**VI Нижегородская открытая ОСЕННЯЯ олимпиада**
**по математике для 5-7-х классов**

***Комментарий:*** *Обращаем внимание участников олимпиады, что практически все по-настоящему олимпиадные задачи имеют короткие красивые решения, опирающиеся на концепцию олимпиадной математики – ключевую идею решения всех задач «В любом процессе ищи соответствующий инвариант!». Инвариант – неизменное, постоянное свойство. Советуем проанализировать решение каждой задачи с точки зрения опоры на инварианты соответствующего процесса.*

# 7 класс

**1. Найдите наименьшее десятизначное число из различных цифр, делящееся на 7.**

***Ответ:*** $1023456798=7\cdot 146208114$. ***Решение:*** Наименьшее число требуемого вида 1023456789 не делится на 7, а следующее по величине 1023456798 уже нам подходит.

***Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:*** *Задача типа «оценка+пример», значит, нужно доказать оценку и построить пример. Начнём перебирать десятизначные числа из различных цифр с самого маленького (1023456789) и … нам уже на втором числе везёт:☺. Главное, не забыть про цифру 0 и поставить её сразу после 1 (ловушка), а уже затем остальные цифры поставить по возрастанию.*

***Комментарий:*** *К сожалению, эту задачу решил очень небольшой процент участников олимпиады. Это связано ещё с таким важным моментом, как ПРОСНУТЬСЯ! Многие школьники приходят на олимпиаду сонными и сходу теряют простую задачу под первым номером, даже не вчитавшись в её условие (типичная проблема участников олимпиад). Именно по этой причине у них появляются числа вида 1000000000 – из различных цифр? Да, в этом числе есть разные цифры, но тогда бы нас просто спросили о наименьшем 10-значном числе. И в чём тогда задача? А так всё-таки перед нами поставили проблему 0.*

**2. Какое наибольшее количество пятизначных слагаемых «число» может быть в сумме: $\overline{ЧИСЛО}+\ldots+\overline{ЧИСЛО}=\overline{СУММА}$? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)**

***Ответ:*** 9 слагаемых по 10926 даст 98334. ***Решение:*** Больше 9 слагаемых быть не может, т.к. тогда получим уже не менее чем 6-значное число.

***Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:*** *Задача типа «оценка+пример», значит, нужно доказать оценку и построить пример. Можно было пойти оценками (максимальная СУММА и минимальное ЧИСЛО):* $\overline{ЧИСЛО}\ge 10234$, $\overline{СУММА}\le 98765$, *значит, чисел не больше 9. И для нахождения примера на 9 слагаемых становится ясно, что* $\overline{ЧИСЛО}=109..$, $\overline{СУММА}=9\cdot\overline{ЧИСЛО}=98...$ *. Далее начинаем проверять числа с одинаковой цифрой «М» (от 2 до 7), кратные 9 (здесь работает признак делимости на 9 по сумме цифр – инвариант), т.е. нам надо проверить числа 98775, 98667, 98550 – не подходит из-за 0=И, 98442, 98334, 98226, найдя подходящее нам $98334=9\cdot 10926$.*

**3. Какое наименьшее количество несократимых дробей может быть в последовательности из 101 правильной дроби $\frac{a}{a+100},\frac{a+1}{a+101},\ldots,\frac{a+100}{a+200}$?**

***Ответ:*** 40. ***Решение:*** В ряду из 101 подряд идущего числителя максимум 51 будут чётны (тогда чётны будут и знаменатели) и максимум 21 будут кратны 5, при этом 10 или 11 из них будут нечётны (знаменатели в этом случае также будут кратны 5, т.к. всегда отличаются ровно на 100). При этом 11 нечётных кратных 5 числителей будут только в случае, когда такими будут $a$ и $a$+100, но тогда будет ровно 50 чётных числителей. Таким образом, максимум в 51+10=50+11=61 дробях будет сократимость хотя бы на 2 или 5, т.е. минимум 101–61=40 дробей будут несократимы, т.к. сократимость дробей будет только при кратных 2 или 5 числителях-знаменателях в силу того, что разность числителя и знаменателя равна $100=2^2\cdot5^2$ и сократимось может быть только на делитель числа 100. И нужный пример на 40 несократимых дробей есть, например, при $a$=2, т.к. сократимость дробей будет только при кратных 2 или 5 числителях-знаменателях.

***<u>Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта</u>:*** *Задача типа «оценка+пример», значит, нужно доказать оценку и построить пример. Дробь сократима при наличии у числителя и знаменателя НОДа (наибольшего общего делителя), большего 1, но НОД будет делителем их разности – числа 100, значит, надо обращать внимание только на делимость на 2 и 5 (нечётные числа). Плюс аккуратность с минимумом-максимумом (сравните с задачей №4 в 6-м классе).*

**4. На плоскости проведено 7 вертикальных и 7 горизонтальных прямых, в узлах на пересечении которых отмечены 7 синих точек так, что на каждой вертикальной и на каждой горизонтальной прямой отмечено ровно по одной синей точке. Требуется отметить максимальное количество красных узлов-точек таким образом, чтобы никакие 2 красные и 2 синие точки не стояли в вершинах прямоугольника со сторонами, идущими по проведённым прямым. Сколькими способами это можно сделать?**

***<u>Ответ</u>:*** $2^{21}$. ***<u>Решение</u>:*** Каждый свободный узел будет находиться на пересечении занятых 2 синими точками вертикали и горизонтали. Тогда все $7^2$–7=42 свободных узла разобьются на пары, дающие с двумя синими узлами прямоугольник со сторонами, идущими по линиям сетки. Но тогда из каждой такой пары (42:2=21 пара) надо взять ровно один узел под красную точку, 21 – это и будет теоретический максимум количества красных точек. Причём всего будет $2^{21}$ способов поставить красные точки требуемым образом, т.к. из каждой пары претендентов на красную точку надо покрасить в красный цвет ровно одну точку.

***<u>Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта</u>:*** *Будем смотреть на прямоугольники с любой парой двух синих узлов и заметим, что два других узла уже не синие. При этом каждой паре синих узлов (количество таких пар равно $C_7^2=\dfrac{7\cdot6}{2}=21$) СООТВЕСТВУЕТ своя пара из 42:2=21 возможной пары пока ещё бесцветных узлов (СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ИНВАРИАНТ), из которой можно выбрать только один узел в качестве красного.*

**5. К некоторому моменту в однокруговом шахматном турнире (каждый с каждым в итоге должен сыграть по одной партии) оказалось, что каждый шахматист сыграл ровно по 6 партий и что у каждых двух шахматистов были сыграны партии ровно с двумя общими соперниками. Сколько шахматистов участвует в турнире?**

***<u>Ответ</u>:*** 16. ***<u>Решение</u>* <u>(метод собственного присутствия в задаче)</u>*:*** Пусть каждые два шахматиста своим двум общим соперникам подарят на память по одной своей общей фотографии. Тогда всего подарено $2\cdot C_n^2=n(n-1)$ фотографий, а получено в подарок $n\cdot C_6^2=15n$ фотографий, т.к. каждый шахматист получил в подарок фотографию от каждой пары тех соперников, с которыми он уже сыграл свои партии (является для них общим соперником). Из получившегося уравнения $n(n–1)=15n$ находим $n=16$. И подобная ситуация могла быть, например, в следующем случае. Посадим шахматистов в виде квадрата 4×4 и пусть каждый сыграет свою партию с тремя шахматистами из своей строки и с тремя шахматистами из своего столбца (всего 6 партий). При этом у каждых двух было ровно два общих соперника – либо два оставшихся человека из их общего ряда, либо два шахматиста на пересечении строк и столбцов двух шахматистов, находящихся в разных рядах.

***Комментарий 1:*** *Одного только нахождения ответа (16) для полного решения недостаточно. Ещё ОБЯЗАТЕЛЬНО надо приводить так называемый ПОДТВЕРЖДАЮЩИЙ ПРИМЕР, что подобная ситуация с 16 шахматистами возможна.*

***Комментарий 2:*** *Метод собственного присутствия в задаче рекомендует при решении «графских» задач работать не на «графском» языке, а с рубликами, конфетками, подарками и т.п. (например, с фотографиями, как в приведённом выше решении).*

***Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:*** *«Графская» задача, а решение подобных задач уже подразумевает наличие подготовки – знание основного набора методов, с помощью которых решаются «графские задачи». И метод собственного присутствия вместе с методом перераспределения зарядов (см. статью в журнале «Квант», №12, 2019 год) является одним из важных. Вывод – к олимпиадам надо готовиться и изучать методы, с помощью которых решаются задачи.*

## 6 класс

**1. В олимпиаде участвовал 41 школьник. Число школьников, набравших баллов больше Васи, в 4 раза меньше числа тех, кто набрал баллов меньше Васи. Какие абсолютные места поделил Вася по итогам олимпиады, если одинаковый с ним результат показали ещё 5 школьников?**

***Ответ:*** 8-13-е места. ***Решение:*** Пусть число школьников впереди Васи равно $n$, тогда число школьников после Васи равно $4n$. Тогда $n+4n=41–1–5$, откуда $n=7$. Значит, Вася поделил 8-13 места.

***Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:*** *Составление очевидного уравнения на части напрашивается естественным образом. Главное – не запутаться с понятием «абсолютные места» в списке на 41 человек, тем более ОТКРОВЕННО написано «какие абсолютные места поделил».*

**2. Разрешается стереть в ряду цифр 123456789 несколько цифр (возможно одну) и расставить между оставшимися цифрами несколько плюсов (возможно один) так, чтобы полученное числовое выражение равнялось 2023. Покажите, как это сделать.**

***Пример:*** 1234+789=2023, стёрли 5 и 6; или 1345+678=2023, стёрли 2 и 9.

***Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:*** *«Возможно один» плюс – откровенная подсказка в тексте-сказке (*), значит, смотрим на последние цифры, которые дают сумму, оканчивающуюся на 3, а это 4+9, или 5+8, или 6+7. А дальше внимательный взгляд с четырёхзначным числом 1234 и НАМ ВЕЗЁТ «+789». Удивительно простой пример!:)*

***Комментарий к (*):*** *МНОЖЕСТВА СОДЕРЖАТ ПОДМНОЖЕСТВА, а СКАЗКИ СОДЕРЖАТ ... ПОДСКАЗКИ:☺. Тексты многих задач по сути своей ... сказки.*

**3. Можно ли клетчатый квадрат 2023×2023 разрезать по границам клеток на прямоугольники периметра 14?**

***<u>Ответ:</u>*** Нельзя. ***<u>Доказательство:</u>*** Заметим, что периметр 14 будет у прямоугольника с суммой сторон, равной 7, т.е. стороны будут иметь разную по чётности длину. Тогда каждый прямоугольник имеет чётную площадь и будет накрывать чётное количество клеток квадрата 2023×2023. Значит, все прямоугольники в сумме накроют чётное количество клеток, а клеток у нас нечётное количество – $2023^2$. Следовательно, разрезать квадрат на прямоугольники периметра 14 не удастся.

***<u>Комментарий 1:</u>*** *Также можно было воспользоваться шахматной раскраской, при которой каждый прямоугольник разрезания содержит равное количество чёрных и белых клеток, а во всём квадрате их будет неравное количество.*

***<u>Комментарий 2:</u>*** *К сожалению, многие школьники просто делили периметр квадрата 4·2023 на 14 и, получив делимость, делали неверный вывод о возможности разрезания.*

***<u>Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:</u>*** *Если можно, то ... строить пример! А не слишком ли долгим будет процесс создания и описания такого примера? Ведь это всего третья по номеру задача, а на олимпиадах считается классическим ставить задачи в порядке повышения сложности с точки зрения методкомиссии. Если же примера нет, то ... процесс – какой же там может быть инвариант? Примеров прямоугольников с периметром 14 несколько, а что у них общего – инвариантного? Площадь – чётная!*

**4. Какое наибольшее количество несократимых дробей может быть в последовательности из 101 правильной дроби $\frac{a}{a+100}, \frac{a+1}{a+101}, \dots, \frac{a+100}{a+200}$?**

***<u>Ответ:</u>*** 41. ***<u>Решение:</u>*** В ряду из 101 подряд идущего числителя по крайней мере 50 будут чётны (тогда чётны будут и знаменатели) и по крайней мере 20 будут кратны 5, при этом 10 из них будут нечётны (знаменатели в этом случае также будут кратны 5, т.к. всегда отличаются ровно на 100). Значит, в 50+10=60 дробях будет сократимость хотя бы на 2 или 5, т.е. максимум 101–60=41 дробь будет несократимой, т.к. сократимость дробей будет только при кратных 2 или 5 числителях-знаменателях в силу того, что разность числителя и знаменателя равна $100=2^2\cdot5^2$ и сократимось может быть только на делитель числа 100. И нужный пример на 41 несократимую дробь есть, например, при $a$=1, т.к. сократимость дробей будет только при кратных 2 или 5 числителях-знаменателях.

***<u>Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:</u>*** *Задача типа «оценка+пример», значит, нужно доказать оценку и построить пример. Дробь сократима при наличии у числителя и знаменателя НОДа (наибольшего общего делителя), большего 1, но НОД будет делителем их разности – числа 100, значит, надо обращать внимание только на делимость на 2 и 5 (нечётные числа). Плюс аккуратность с минимумом-максимумом (сравните с задачей №3 в 7-м классе).*

**5. Сколькими способами на доске 8×7 можно разместить наибольшее количество не бьющих друг друга королей?**

***<u>Ответ:</u>*** $5^4$=625. ***<u>Решение:</u>*** Всё поле разбивается на 12 квадратов 2×2 и 4 доминошки (справа) 1×2 (см. рис.1). В каждую из 16 зон можно поставить максимум одного короля. Значит, королей максимум 16 и в каждой зоне примера на 16 будет стоять ровно 1 король. В правый ряд из 4-х доминошек королей можно поставить 5-ю способами (см. рис.2). Эти короли влияют на следующие 2 вертикали слева, правая из которых должна оказаться пустой, а в левой вертикали, разбитой на 4 доминошки, 4-х королей можно также поставить 5-мя способами. Рассуждая далее аналогично, получим по правилу произведения в комбинаторике всего $5^4=625$ способов.

***<u>Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта</u>:*** *Задача типа «оценка+пример+комбиподсчёт», значит, нужно доказать оценку, построить пример и подсчитать их количество. А какой СТАНДАРТНЫЙ метод доказательства оценки на досках, особенно про не бьющие друг друга фигуры? – Разбиение на части! Это пятая по номеру задача и самая сложная с позиции автора варианта, значит, уже требует подготовки и дополнительных знаний! Вывод – к олимпиадам надо готовиться и изучать стандартные методы, с помощью которых решаются задачи классического вида.*

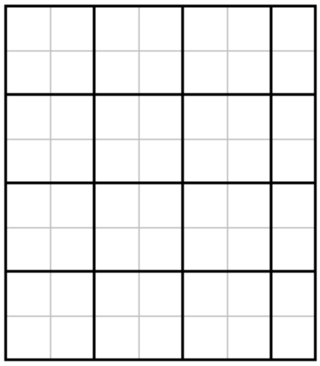


**рис.1**

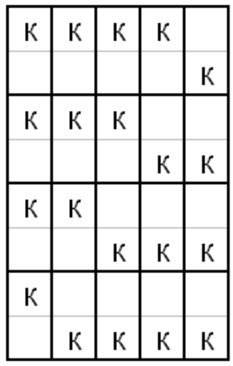


**рис.2**

# 5 класс

**1. В ряду цифр 123456789 поставьте как-нибудь один или несколько плюсов так, чтобы получилось число, делящееся на 30.**

***<u>Решение</u>:*** Подходит вариант 1+23456789=23456790=30·781893

***<u>Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта</u>:*** *«Поставьте как-нибудь один» плюс – откровенная подсказка в тексте-сказке (*), значит, смотрим на последние цифры, которые дают сумму, оканчивающуюся на 0, а это сходу 1+9. И НАМ СРАЗУ ВЕЗЁТ «1+23456789». Удивительно простой пример!:) А ИНАЧЕ И НЕ МОГЛО НЕ ПОВЕЗТИ!:) Т.к. при любом наборе плюсов, дающих число, оканчивающееся на 0 (например, 1+2+3+4+56+7+8+9=90), у нас будет делимость на 30. Делимость на 10 обеспечивается 0 на конце, дополнительная делимость на 3 (число, взаимно простое с 10, это уже важно знать, но при решении этой задачи совсем необязательно, т.к. надо только привести пример и подойдёт любой с 0 на конце) возникает в силу классического свойства равноостаточности числа и суммы цифр по модулю 3, а здесь вся сумма цифр (45) сравнима с 0 по модулю 3. Изучайте теорию сравнений, материалов по которой в Интернете много!*

***<u>Комментарий к (*)</u>:*** *МНОЖЕСТВА СОДЕРЖАТ ПОДМНОЖЕСТВА, а СКАЗКИ СОДЕРЖАТ … ПОДСКАЗКИ:☺. Тексты многих задач по сути своей … сказки.*

**2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Всем жителям острова задали вопрос: "Верно ли, что рыцарей на острове больше половины?" В результате ровно половина жителей ответила на этот вопрос утвердительно. Кого на самом деле на острове больше — рыцарей или лжецов?**

***<u>Ответ</u>:*** Поровну. ***<u>Решение</u>:*** Если бы рыцарей на острове в самом деле было больше половины, то все они ответили бы на вопрос утвердительно, что противоречит условию задачи. Значит, утвердительно на вопрос отвечали лжецы, и их на острове ровно половина, тогда и рыцарей ровно половина, при этом данная ситуация удовлетворяет условию задачи: рыцари скажут правду «нет», а лжецы соврут, сказав «да».

***<u>Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта</u>:*** *Инвариант процесса – и лжецы, и рыцари отвечают одинаково, а на фразу одинаково ответила ровно половина жителей, значит, лжецов и рыцарей поровну. Осталось только понять, что утвердительно ответили именно лжецы – солгав!*

**3. Вася решил в бесконечной четверти угла, диагонали которой последовательно пронумерованы числами 2, 0, 2, 3 (см. рис.) подсчитать сумму 2023, двигаясь из левого верхнего угла только вправо или вниз. Сколькими способами Вася сможет получить сумму 2023?**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 |

***Ответ:*** $2^{1155}$. ***Решение:*** Васе надо пройти 289=2023:7 полных циклов 2+0+2+3=7, каждый раз имея по 2 выбора – двигаться либо вправо, либо вниз. С учётом первой двойки он должен сделать 289·4–1=1155 ходов, что даст $2^{1155}$ способов.

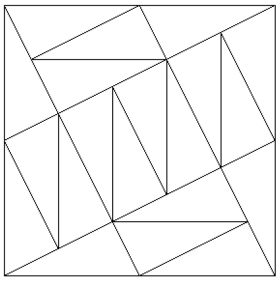
***Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:*** *Инвариант с циклом 2+0+2+3=7 очевиден, а 2023 делится на 7. Осталось только не запутаться с подсчётом числа ходов и раздвоением на каждом ходу при применении правила произведения в комбинаторике.*

**4. Расставьте на шахматной доске 8 пар бьющих друг друга короля и ладью так, чтобы никаких других фигур они уже не били.**

***Решение:*** см. пример методом пропеллера.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Л | |
| Л | К | | К | | | К | |
| | | | Л | | | | |
| | | | | | Л | К | |
| | К | Л | | | | | |
| | | | | Л | | | |
| | К | | | К | | К | Л |
| | Л | | | | | | |

***Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:*** *Надо построить комбинаторный пример на доске, а ГЛАВНЫМ методом при построении конструкций на досках является метод пропеллера. 8 пар – есть делимость на 4, значит, с высокой вероятностью сработает поворот на 90 градусов. А где об этом узнать? Если бы мы готовились к олимпиадам (А К НИМ НАДО ГОТОВИТЬСЯ, изучив варианты прошлых лет), то ... узнали бы по прошлым олимпиадам про метод пропеллера! Смотрим, что было, например, на предыдущей Осенней олимпиаде.*



***Задача №2 для 7-го класса с Осенней олимпиады-2022*. Каждую из 10 прямоугольных плиток 1×2 распилили по диагонали на 2 треугольных куска. Сложите из получившихся 20 кусков квадрат.**

***Решение:*** см. конструкцию методом пропеллера.

***Задача №1 для 5-го класса с Осенней олимпиады-2022*. Поставьте на шахматную доску 4 ладьи и 4 слонов так, чтобы каждая ладья била ровно двух слонов и не била ладей, а каждый слон бил ровно две ладьи и не бил слонов.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Л | С | |
| С | | | Л |
| Л | | | С |
| | С | Л | |

***Решение:*** см. конструкцию методом пропеллера.

**5. Какое наименьшее целое положительное значение может принимать отношение двух произведений $\dfrac{Н \cdot И \cdot Ж \cdot Н \cdot И \cdot Й}{Н \cdot О \cdot В \cdot Г \cdot О \cdot Р \cdot О \cdot Д}$? Ответ обоснуйте. (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)**

***Ответ:*** 35. ***Решение:*** Всего использовано 9 цифр, среди которых нет 0, т.к. он не может быть в знаменателе, а его наличие в числителе даст значение 0, но нам нужно положительное значение. Сократим на ненулевую цифру *Н* и получим, что в нашей дроби используются опять все 9 возможных ненулевых букв-цифр $\dfrac{Н \cdot И \cdot Ж \cdot Н \cdot И \cdot Й}{Н \cdot О \cdot В \cdot Г \cdot О \cdot Р \cdot О \cdot Д} = \dfrac{И \cdot Ж \cdot Н \cdot И \cdot Й}{О \cdot В \cdot Г \cdot О \cdot Р \cdot О \cdot Д} = \dfrac{И^2 \cdot Ж \cdot Н \cdot Й}{О^3 \cdot В \cdot Г \cdot Р \cdot Д}$. Тогда цифры 5 и 7 должны оказаться в числителе, иначе дробь на них не сократится. Остальные же цифры можно расставить так, что их произведения в числителе и знаменателе будут равны, например, $\frac{И^2 \cdot Ж \cdot Н \cdot Й}{О^3 \cdot В \cdot Г \cdot Р \cdot Д} = \frac{8^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}{2^3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 2^6 \cdot 3^2}{2^6 \cdot 3^2} = 7 \cdot 5 = 35$. Значит, наименьшее целое положительное значение данной дроби равно 35 и пример на 35 нами приведён.

***Соображения по процессу решения и поиску нужного инварианта:*** *Это пятая по номеру задача и самая сложная с позиции автора варианта, значит, уже требует подготовки и дополнительных знаний! Задача типа «оценка+пример», значит, нужно доказать оценку и построить пример. Ребус – сколько разных букв-цифр? 9. Если есть 0, то он в числителе и дробь равна 0, а нам нужно положительное целое (т.е. натуральное) число, значит, использованы все ненулевые цифры. Общие множители сократим – всё равно осталось 9 цифр. На 5 и 7 сократить нельзя, значит, их сразу отправляем в числитель (Ж, Н или Й). А можно ли теперь из остальных цифр получить равные произведения в числителе и знаменателе? Начинаем рассматривать простые множители (вот уже и дополнительные знания потребовались) и чуть-чуть потрудимся, проявив интуицию. Оказывается, что получить равенство можем, значит, ответ – 35. Ровно столько баллов – 5 задач по 7 баллов – наберёт хорошо подготовленный к олимпиадам школьник! Поэтому, уважаемые пятиклассники (и более старшие школьники), надеемся, что к следующим своим олимпиадам вы всегда будете готовиться, изучив варианты соответствующей олимпиады за 3-4 последних года! И передадите информацию об этом следующим поколениям школьников! Желаем вам успехов на будущих олимпиадах!*