Нижегородский университетский округ Высшей школы экономики

Лицей №40, 12 ноября 2011 года

III Нижегородская лицейская олимпиада по математике среди 5-7-х классов

Задачи и решения.

5 класс

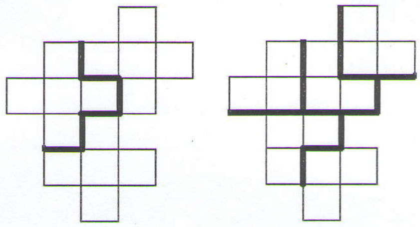
1. Разложите гирьки весом 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 граммов в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй – три, в третьей – четыре, а суммарный вес гирек в каждой коробочке был одним и тем же.

Ответ: **например, 9+6; 8+5+2; 7+4+3+1; есть и другие варианты.** ***Решение:*** **Вес всех гирек равен 45 г, поэтому вес каждой коробочки должен быть равен 45:3=15 г. Пример подобрать уже несложно.**

2. Полный бидон с молоком весит 20 кг, а бидон, наполненный молоком наполовину, весит 14 кг. Сколько будет весить бидон, если наполнить его молоком на треть? *(Ответ обосновать).*

Ответ: 12 кг. ***Решение:*** **Вес молока, заполняющего половину бидона, равен 20-14=6 кг. Поэтому вес молока, заполняющего бидон полностью, равен 6·2=12 кг, а вес бидона равен 20-12=8 кг. Значит, вес бидона, заполненного на треть, равен 8+12/3=12 кг.**

3. Андрей нарисовал на клетчатой плоскости клетчатый многоугольник. Боря сказал, что может его полностью разрезать на пятиклеточные кресты, а Вася сказал, что может его полностью разрезать на трёхклетчатые уголки. На это им Андрей ответил, что из всех клетчатых многоугольников с такими свойствами его многоугольник имеет минимально возможную площадь. Приведите пример возможного такого многоугольника и оба разрезания.

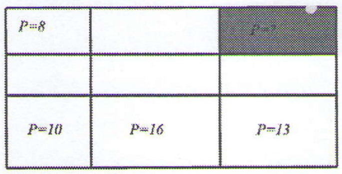


Ответ: **см. пример на рисунке.** ***Решение:*** **т.к. площадь многоугольника делится и на 3, и на 5, то она должна делиться и на 15, т.к. 3 и 5 – простые числа (комментарий: о чём 5-й класс ещё может и не знать, но … догадаться до минимальной площади в 15 клеток может:☺.)**

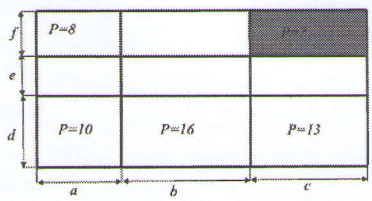
4. В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В России же сначала идёт число, потом месяц и год. Например, сегодняшнюю дату (12 ноября 2011 года) в США пишут как 11.12.2011, а в России – 12.11.2011. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана? *(Ответ обосновать).*

Ответ: 132. ***Решение:*** **Искомые даты – это те, в которых день и месяц могут поменяться местами, и полученная дата будет существовать, то есть те, в которых номер дня не больше 12. Таких дат 12·12=144. Но если номер дня и номер месяца совпадают, то такая дата определяется однозначно. Значит, нельзя прочитать однозначно дату у 144-12=132 дней.**

5. Прямоугольник разделён прямыми, параллельными его сторонам, на 9 прямоугольников меньшего размера. Периметры четырёх из этих прямоугольников указаны на рисунке. Найдите периметр окрашенного прямоугольника. *(Ответ обосновать).*



Ответ: 11. ***Решение:*** **Пусть нижняя сторона прямоугольника разделена на отрезки *a*, *b*, *c* (считая слева), а левая сторона – на отрезки *d*, *e*, *f* (считая снизу) – см. рис. Тогда искомый периметр равен $2(c+f)=2(c+d-d-a+a+f)=2(c+d)+2(a+f)-2(a+d)$. Но $2(c+d)$ – это периметр правого нижнего прямоугольника, $2(a+f)$ – периметр левого верхнего прямоугольника, а $2(a+d)$ – периметр левого нижнего прямоугольника, поэтому искомый периметр равен 13+8-10=11.** ***Комментарий:*** **заметим, что периметр 16 одного из отмеченных прямоугольников нам даже не нужен.**



Нижегородский университетский округ Высшей школы экономики

Лицей №40, 12 ноября 2011 года

III Нижегородская лицейская олимпиада по математике среди 5-7-х классов

Задачи и решения.

6 класс

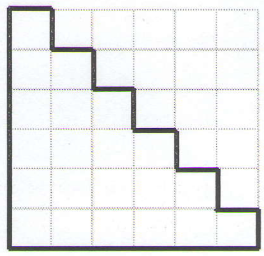
1. Торговец купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя торговец получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена одной ручки?

Ответ: **2 рубля 50 копеек.** ***Решение:*** **Пусть оптовая цена ручки x рублей. Тогда, по условию, прибыль равна $5-x=10-3x$. Решая это уравнение, получаем, что $x=2{,}5$ рубля.**

2. Из числа 7777 вычли наименьший из его натуральных делителей, больших 1. Из полученной разности также вычли наименьший из её делителей, больших 1, и т.д., пока не получился 0. Сколько всего вычитаний было проделано?

Ответ: 3886. ***Решение:*** **Наименьший из делителей числа 7777, больший 1, равен 7. Вычитая, получаем 7770. Поскольку разность двух чётных чисел чётна, в дальнейшем всё время будет вычитаться двойка, и 0 получится после 3885 вычитаний. Значит, всего будет 3885+1=3886 вычитаний.**

3. Сколько сторон может быть у многоугольника, у которого любые две соседние стороны перпендикулярны?



Ответ: **любое чётное количество, не меньшее 4.** ***Решение:*** **Разместим наш многоугольник так, что его стороны чередуются по направлению (вертикально, горизонтально), значит, их будет чётное количество. В качестве примера для каждого $n=2k$, где k – натуральное число, не меньшее 2, можно привести клетчатый многоугольник, у которого $2k$-2 стороны идут в форме лесенки (см. рис. для n=14).**

4. Винни-Пух, Пятачок и Кролик играли в снежки. Первый снежок бросил Винни-Пух. После этого в процессе игры в ответ на каждое попадание снежком в себя Кролик кидал 6 снежков, Пятачок – 5, а Винни-Пух – 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, сколько снежков попало в каждого, если мимо цели пролетело 13 снежков, и каждый сколько-то кинул. *(В самого себя снежками не кидаются, и снежок не может попасть в двоих.)*

Ответ: **во всех попали по одному разу.** ***Решение:*** **Пусть в Винни-Пуха попало x снежков, в Пятачка – y, а в Кролика – z. Так как каждый сколько-то снежков кинул, то в Пятачка и Кролика попали, значит, y и z не меньше 1. Заметим, что всего было брошено $1+4x+5y+6z$ снежков, поэтому $1+4x+5y+6z=x+y+z+13$. Значит, $3x+4y+5z=12$. А это уравнение имеет только одно решение в целых неотрицательных числах при натуральных y и z: $x=y=z=1$.**

5. Докажите, что при любом количестве слагаемых в левой части ребус $\overline{НЛО}+\overline{НЛО}+\ldots+\overline{НЛО}=\overline{НЛО2011}$ не имеет решений. *(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры, $\overline{НЛО}$ - трёхзначное число, $\overline{НЛО2011}$ - семизначное число.)*

Решение: **пусть ребус при n слагаемых имеет решение. Тогда $\overline{НЛО}\cdot n=\overline{НЛО}\cdot 10000+2011$, то есть $\overline{НЛО}\cdot(n-10000)=2011$. Значит, $\overline{НЛО}$ - делитель числа 2011. Но 2011 – простое число и у 2011 нет трёхзначных делителей, поэтому и наш ребус не имеет решений.**

Нижегородский университетский округ Высшей школы экономики

Лицей №40, 12 ноября 2011 года

III Нижегородская лицейская олимпиада по математике среди 5-7-х классов

Задачи и решения.

7 класс

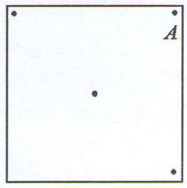
1. У Кролика денег на 8 рублей меньше, чем стоит тетрадь, у Пятачка – на 11 рублей, а у Винни-Пуха – на 18 рублей. Но вместе им всё равно не хватит денег для того, чтобы купить тетрадь. Сможет ли купить её Кристофер Робин, если у него 18 рублей 50 копеек? *(Ответ обосновать.)*

Ответ: **да, сможет.** ***Решение:*** **Пусть тетрадь стоит x рублей. Тогда у Кролика (x-8) рублей, у Пятачка – (x-11) рублей, а у Винни-Пуха – (x-18) рублей. По условию, $3x-(8+11+18)<x$, откуда $x<37/2=18{,}5$ рубля. Значит, Кристоферу Робину на тетрадь денег хватит.**

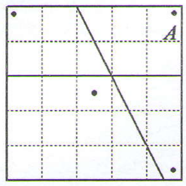
2. Трёхголовый Змей Горыныч праздновал День Рождения. Его головы по очереди лакомились именинными пирогами и за 15 минут съели два одинаковых пирога. Известно, что каждая голова ела столько времени, сколько потребовалось бы двум другим, чтобы вместе съесть один пирог. За сколько времени три головы Змея Горыныча съели бы вместе один пирог? *(Каждая голова ест с собственной постоянной скоростью).*

Ответ: **за 3 минуты.** ***Решение*: Если бы головы ели все вместе, то, пока ела первая, вторая с третьей съели бы ещё один пирог; затем, пока ела вторая, первая и третья съели бы один пирог; и, пока ела третья, первая и вторая съели бы один пирог. Значит, три головы вместе за 15 минут съели бы 2+1+1+1=5 пирогов. Следовательно, один пирог они съели бы за 3 минуты.**

3. У Пети есть торт, в трёх углах и в самом центре которого – по изюминке. Петя хочет двумя прямолинейными разрезами разделить торт на 4 части (каждая с изюминкой), так, чтобы ему достался кусок с изюминкой *A*, и этот кусок составлял ровно 1/5 часть торта. Помогите Пете разрезать торт.



Ответ: **см. рисунок.** ***Решение:*** **Разобьём торт на 25 маленьких квадратиков, и проведём разрезы, как показано на рисунке. Тогда кусок с изюминкой *A* равен по площади 5 квадратикам, то есть как раз 1/5 торта.**



4. Сколько решений имеет ребус $\overline{НЛО}+\overline{НЛО}+\ldots+\overline{НЛО}=\overline{2011НЛО}$? *(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры, количество слагаемых в левой части может быть любым.)*

Ответ: 2. ***Решение:*** **Предположим, что при n слагаемых есть решение. Тогда $\overline{НЛО}\cdot n=2011000+\overline{НЛО}$, или $(n-1)\cdot\overline{НЛО}=2011\cdot1000$. Так как 2011 – простое число, и оно больше любого трёхзначного, то n-1 делится на 2011. Значит, $n-1=2011m$, где m – натуральное число. Поэтому $\overline{НЛО}\cdot m=1000$, и данный ребус имеет решение в том и только в том случае, когда $\overline{НЛО}$ - делитель числа 1000, а таких трёхзначных чисел 5 – это 100, 125, 200, 250, 500, но при этом три варианта (100, 200, 500) не подходят, т.к. в них повторяются цифры, что у числа $\overline{НЛО}$ не должно быть. Поэтому наш ребус имеет 2 решения.**

5. Двое играют в следующую игру. У них есть по 64 фишки чёрного и белого цветов. Ход состоит в том, что первый игрок выбирает цвет, а второй ставит фишку этого цвета на клетку доски 8х8 (на каждую клетку можно поставить фишку только один раз). Игра заканчивается, когда все клетки заняты. Какой наибольший квадрат, во всех клетках которого стоят фишки одного цвета, может получить второй игрок независимо от игры первого? *(Приведите алгоритм действий второго игрока и объясните, почему нельзя гарантировать одноцветный квадрат большего размера.)*

Ответ: **4х4.** ***Решение:*** **Докажем, что второй игрок не всегда сможет создать одноцветный квадрат 5х5. Действительно, любой квадрат 5х5 на нашей доске полностью содержит центральный квадратик 2х2, поэтому для того, чтобы любой квадрат 5х5 содержал фишки обоих цветов, первому игроку достаточно, выбирая только белый цвет, дождаться момента, когда второй займёт одну из его клеток, после чего выбирать только чёрный цвет. Теперь покажем, что второй игрок всегда сможет создать одноцветный квадрат 4х4. Для этого ему нужно все белые фишки ставить вначале в левый нижний квадрат, а чёрные – в правый верхний квадрат 4х4, и только после заполнения одного из этих квадратов ставить фишки на остальную часть доски. Тогда, так как оба квадрата к концу игры заполнятся, один из них обязательно заполнится фишками своего цвета, он и будет искомым.**