С.А. Лапинова, А.И. Саичев, М.В. Тараканова

Экстремумы неполного моста

Аннотация

В работе исследуются совместные вероятностные свойства глобальных экстремумов винеровского моста. Попутно найдены решения соответствующего диффузионного уравнения с нулевыми граничными условиями на равномерно движущихся границах. Помимо приложений к процессам диффузии, результаты работы могут быть использованы при решении волновых и квантовых задач. К примеру, для отыскания волновых функций в потенциальных ямах с движущимися стенками или гидроакустических волн в шельфовых зонах.

S. Lapinova[1,2], A. Saichev[2], M.Tarakanova[2]

[1]Higher School of Economics, [2]Nizhny Novgorod State University
Abstract We study the properties of the joint probability of global extremes Wiener bridge. Along the way, found solutions corresponding diffusion equation with zero boundary conditions on a uniformly moving boundaries. In addition to the application to the processes of diffusion, the results can be used to solve the wave and quantum problems , for example, in order to find the wave functions in the potential wells with moving walls or sonar waves in the offshore areas . As well as the construction of efficient estimators of volatility of financial processes.

Keywords: statistical physics, Wiener process , global extremes, volatility estimator.

1 Введение

Наша главная цель состоит в решении известной проблемы теории диффузии: статистическом описании глобальных (на заданном интервале времени) экстремумов винеровского моста.

Перед тем как приступить к решению поставленной задачи, укажем случайные процессы, экстремальные свойства которых изучаются в данной статье. Прежде всего отметим что, в силу фрактальности винеровского процесса, заданный интервал времени можно брать единичной длины $t \in (0,1)$, а исходный процесс можно, не ограничивая общности, полагать равным

$$X(t,\gamma) := \gamma t + W(t), \qquad t \in (0,1), \tag{1}$$

где γ – постоянная скорость сноса, а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$. Здесь и далее значок $\sim$ символизирует стохастическую эквивалентность левой и правой сторон отношения.

Назовем случайный процесс $X(t,\gamma)$ (1) *винеровским процессом со сносом.* Нам понадобится также неполный винеровский мост, по определению равный

$$Y(t,\kappa,\gamma) := X(t,\gamma) - \kappa t X(1,\gamma). \tag{2}$$

Для краткости будем звать его *неполным мостом.* Частный случай неполного моста при $\kappa = 1$

$$Y(t) := Y(t,1,\gamma) \equiv W(t) - tW(1) \tag{3}$$

называют винеровским мостом, или кратко – *мостом.* Ниже мы будем интересоваться совместными вероятностными свойствами случайных величин

$$H := \sup_{t\in(0,1)} Y(t,\kappa,\gamma), \quad L := \inf_{t\in(0,1)} Y(t,\kappa,\gamma), \quad C := X(1,\gamma), \tag{4}$$

характеризующих экстремальные свойства неполного моста.

Напомним, во многих частных случаях совместные статистические характеристики случайных величин (H,L,C) (4) детально изучены. К примеру, давно известны совместные вероятностные свойства величин (4) при $\kappa = \gamma = 0$, то есть в частном случае стандартного винеровского процесса $W(t)$ (см., например, [1]). Найдено также совместное распределение величин (H,L,C) для винеровского процесса со сносом $X(t,\gamma)$. Соответствующие вероятностные соотношения и другие полезные формулы теории винеровских процессов можно найти, например, в книгах [2–4].

Напомним еще классическую работу Феллера [5], где найдено распределение разности экстремумов $R := H - L$ винеровского процесса.

Тем не менее, до сих пор неизвестно явное аналитическое выражение для трехмерной плотности вероятностей $Q(h, \ell, c; \kappa, \gamma)$ случайных величин (H, L, C) (4) при произвольных параметрах κ и γ неполного моста $Y(t, \kappa, \gamma)$ (2). Более того, до сих пор неизвестно даже совместное распределение экстремумов (H, L) моста $Y(t)$ (3). В качестве примера приложений, где востребована статистика экстремумов родственных винеровскому процессов, сошлемся на анализ эффективности оценок волатильности финансовых рынков, опирающихся на экстремальные значения цен акций, фьючерсов и опционов (см., например, [6–8]).

В данной статье выводится выражение для упомянутой плотности вероятностей. Попутно находится функция Грина уравнения диффузии с нулевыми условиями на равномерно движущихся границах. Указанная функция Грина имеет самостоятельное значение и может быть, к примеру, использована для анализа движения квантовых частиц в потенциальной яме с движущимися стенками.

Статья построена следующим образом: В разделе 2 указаны некоторые геометрические свойства неполного моста, знание которых необходимо для отыскания совместного распределения случайных величин (4). В разделе 3 сформулирована смешанная краевая задача для уравнения диффузии, решение которой определяет искомую плотность вероятностей $Q(h, \ell, c; \kappa, \gamma)$. В разделе 4 найдено решение уравнения диффузии на отрезке с равномерно движущимися поглощающими границами. В разделе 5 дано аналитическое выражение для совместной плотности вероятностей $Q(h, \ell, c; \kappa, \gamma)$ и обсуждены некоторые ее свойства.

2 Геометрические свойства неполного моста

Обсудим некоторые, полезные для дальнейших построений, геометрические свойства неполного моста $Y(t, \kappa, \gamma)$ (2). Для этого нам понадобится теорема:

Теорема 1 *Неполный мост $Y(t, \kappa, \gamma)$ (2) стохастически эквивалентен случайному процессу $\mathcal{Y}(t, \kappa, \gamma)$:*

$$Y(t, \kappa, \gamma) \sim \mathcal{Y}(t, \kappa, \gamma) := \gamma(1 - \kappa)t + \mathcal{W}(t, \kappa), \tag{5}$$

где

$$\mathcal{W}(t, \kappa) := (1 - t + (1 - \kappa)^2 t) W\left(\frac{t}{1 - t + (1 - \kappa)^2 t}\right). \tag{6}$$

Доказательство: После подстановки (1) в (2) получим

$$Y(t,\kappa,\gamma) = \gamma(1-\kappa)t + \Omega(t,\kappa). \tag{7}$$

Здесь

$$\Omega(t,\kappa) := W(t) - \kappa t W(1).$$

Легко проверить что процесс $\Omega(t,\kappa)$ гауссов с нулевым средним и корреляцией

$$\mathrm{E}[\Omega(t_1,\kappa)\Omega(t_2,\kappa)] = (t_1 \wedge t_2) - [1-(1-\kappa)^2]t_1 t_2, \quad 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1. \tag{8}$$

С другой стороны, непосредственными вычислениями легко показать, что гауссов процесс $\mathcal{W}(t,\kappa)$ (6) также обладает нулевым средним и корреляцией (8). Последнее означает, что неполный мост $Y(t,\kappa,\gamma)$ (7) стохастически эквивалентен процессу $\mathcal{Y}(t,\kappa,\gamma)$ (5). ■

В дальнейшем, при анализе экстремальных свойств неполного моста $Y(t,\kappa,\gamma)$ (7) будем опираться на стохастическую эквивалентность процессов $Y(t,\kappa,\gamma)$ и $\mathcal{Y}(t,\kappa,\gamma)$. Как будет видно ниже, удобнее всего исследовать экстремальные свойства процесса $\mathcal{Y}(t,\kappa,\gamma)$, используя замену переменных

$$\tau(t,\kappa) := \frac{(1-\kappa)^2 t}{1-t+(1-\kappa)^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad t(\tau,\kappa) := \frac{\tau}{\tau+(1-\kappa)^2(1-\tau)}.$$

Другими словами, введем еще один вспомогательный случайный процесс

$$\mathcal{Z}(\tau,\kappa,\gamma) := \mathcal{Y}(t(\tau,\kappa),\kappa,\gamma). \tag{9}$$

Опираясь на равенства (5), (6) и фрактальные свойства винеровского процесса, перепишем процесс $\mathcal{Z}(\tau,\kappa,\gamma)$ в виде

$$\mathcal{Z}(\tau,\kappa,\gamma) = \frac{1-\kappa}{\tau+(1-\kappa)^2(1-\tau)}\left[\gamma\tau + W(\tau)\right]. \tag{10}$$

Ниже мы полагаем, для определенности но без ограничения общности, что $\kappa < 1$.

Как видно из отношения эквивалентности (5), конструкции (9) случайного процесса $\mathcal{Z}(\tau,\kappa,\gamma)$ и из равенства (10), равносильны следующие неравенства

$$\begin{gathered} \ell < Y(t,\kappa,\gamma) < h, \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell < \mathcal{Y}(t,\kappa,\gamma) < h, \qquad \Leftrightarrow \\ a + \mu\tau < W(\tau) < b + \nu\tau, \qquad t,\tau \in (0,1), \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$
\begin{gathered}
a=(1-\kappa)\ell, \qquad b=(1-\kappa)h, \\
\mu=\frac{1-(1-\kappa)^2}{1-\kappa}\,\ell-\gamma, \qquad \nu=\frac{1-(1-\kappa)^2}{1-\kappa}\,h-\gamma.
\end{gathered} \tag{12}
$$

В дальнейшем нам понадобится еще случайная величина C (4). Она связана со значением неполного моста $Y(t=1,\kappa,\gamma)$ равенством

$$
Y(1,\kappa,\gamma)=(1-\kappa)C.
$$

В свою очередь, как следует из соотношения (1) и из (9), (10), случайную величину $Y(1,\kappa,\gamma)$ можно заменить на

$$
\mathcal{Z}(1,\kappa,\gamma)=(1-\kappa)[\gamma+W(1)].
$$

Таким образом, справедливо равенство

$$
W(1)=C-\gamma, \tag{13}
$$

на которое мы будем опираться в последующем анализе.

3 Диффузионное уравнение

Напомним, основная цель статьи состоит в выводе аналитического выражения для совместной плотности вероятностей $Q(h,\ell,c;\kappa,\gamma)$ случайных величин (H,L,C) (4). Последняя однозначно выражается через вероятность

$$
f(h,\ell,c;\kappa,\gamma)dc:=\Pr\{C\in(c,c+dc)\cap\ell\leqslant Y(t,\kappa,\gamma)\leqslant h:t\in(0,1)\}. \tag{14}
$$

А именно

$$
Q(h,\ell,c;\kappa,\gamma)=-\frac{\partial^2 f(h,\ell,c;\kappa,\gamma)}{\partial h\partial\ell}, \tag{15}
$$

где переменные (h,ℓ,c) удовлетворяют очевидным равенствам

$$
\begin{gathered}
h>h_-, \qquad \ell<\ell_+, \qquad \frac{\ell}{1-\kappa}\leqslant c\leqslant\frac{h}{1-\kappa}, \\
h_-=0\vee(1-\kappa)c, \qquad \ell_+=0\wedge(1-\kappa)c.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Как следует из соотношений (11), (13) и стохастической эквивалентности случайных процессов $Y(t,\kappa,\gamma)$, $\mathcal{Y}(t,\kappa,\gamma)$, при любых значениях переменных (h,ℓ,c), удовлетворяющих неравенствам (16), вероятность (14) равна

$$\varphi(c-\gamma;1,a,b,\mu,\nu)dc$$

где

$$\varphi(\omega;\tau,a,b,\mu,\nu)d\omega :=$$

$$\Pr\{W(\tau)\in(\omega,\omega+d\omega)\cap a+\mu\tau'\leqslant W(\tau')\leqslant b+\nu\tau' : \tau'\in(0,\tau)\}.$$

Соответственно, равны плотности вероятностей

$$f(h,\ell,c;\kappa,\gamma)=\varphi(c-\gamma;1,a,b,\mu,\nu). \tag{17}$$

Как известно, плотность вероятностей $\varphi(\omega;\tau,a,b,\mu,\nu)$, которую будем иногда обозначать кратко – $\varphi(\omega;\tau)$, подчиняется уравнению диффузии

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}, \tag{18}$$

сингулярному начальному условию

$$\varphi(\omega;\tau=0)=\delta(\omega) \tag{19}$$

и нулевым граничным условиям

$$\varphi(\omega=a+\mu\tau;\tau)=0,\quad \varphi(\omega=b+\nu\tau;\tau)=0. \tag{20}$$

В следующем разделе мы решим смешанную краевую задачу (18)–(20). Это даст возможность получить явное выражение для совместной плотности вероятностей $Q(h,\ell,c;\kappa,\gamma)$ (15) случайных величин (H,L,C) (4), опираясь на соотношение

$$Q(h,\ell,c;\kappa,\gamma)=-\frac{\partial^2\varphi(c-\gamma;1,a,b,\mu,\nu)}{\partial h\partial\ell}. \tag{21}$$

вытекающее из равенств (17) и (15). В правой части последнего равенства следует выразить, с помощью соотношений (12), параметры (a,b,μ,ν) через (h,ℓ,κ,γ).

4 Решение краевой задачи (18)–(20)

В дальнейшем мы выразим решение смешанной краевой задачи (18)–(20) через решения вспомогательной задачи Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2},\quad \varphi(\omega;\tau=0)=\varphi(\omega),\quad \tau>0,\quad \omega\in(-\infty,\infty). \tag{22}$$

Ниже начальные функции $\varphi(\omega)$ полагаются таковыми, что существуют постоянные $\varrho \in \mathbb{R}$ и $B < \infty$, делающие справедливым неравенство

$$|\varphi(\omega) e^{\varrho\omega}| < B \qquad \forall\, \omega. \tag{23}$$

Тогда, как хорошо известно, соответствующие функции

$$\varphi(\omega;\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(\omega-y)^2}{2\tau}\right) dy. \tag{24}$$

непрерывны при любых $\tau > 0$ и $\omega \in \mathbb{R}$, и удовлетворяют задаче Коши (22).

Нам понадобятся ниже некоторые свойства симметрии решения $\varphi(\omega;\tau)$ (24) задачи Коши (22). Первое из них очевидно:

$$\varphi(\omega;\tau) \quad \leftrightarrow \quad A\varphi(\omega + a;\tau), \qquad A, a \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Здесь и ниже символ $\leftrightarrow$ означает, что если левая часть соотношения удовлетворяет уравнению диффузии (18), то ему удовлетворяет и правая часть. Другие требуемые свойства симметрии содержатся в доказываемых ниже леммах.

Лемма 1 *Функция $\varphi(\omega,\tau)$ (24) обладает свойством симметрии*

$$\varphi(\omega;\tau) \qquad \leftrightarrow \qquad A\varphi(2\mu\tau - \omega;\tau)\; e^{2\mu(\mu\tau-\omega)}. \tag{26}$$

Доказательство: Используя равенство (24), перепишем функцию из правой части соотношения (26) в виде

$$\varphi(2\mu\tau-\omega;\tau)\; e^{2\mu(\mu\tau-\omega)} = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(2\mu\tau-\omega-y)^2}{2\tau}\right) dy\; e^{2\mu(\mu\tau-\omega)}. \tag{27}$$

Так как

$$-\frac{(2\mu\tau-\omega-y)^2}{2\tau} + 2\mu(\mu\tau-\omega) = -\frac{(\omega+y)^2}{2\tau} + 2\mu y,$$

то, с учетом (24) и (23), правая часть равенства (27) также удовлетворяет, при любых $\omega \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$, уравнению диффузии (18) и начальному условию

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \varphi(-\omega)\; e^{2\mu\omega}.$$

Следовательно, соотношение (26) справедливо. ■

Лемма 2 *Пусть $\varphi(\omega)$ обладает свойством симметрии*

$$\varphi(\omega) = -\varphi(2a - \omega)\ e^{2\mu(a-\omega)}. \tag{28}$$

Тогда соответствующее решение $\varphi(\omega;\tau)$ (24) *уравнения диффузии* (18) *равно нулю вдоль прямой $\omega = a + \mu\tau$:*

$$\varphi(a + \mu\tau;\tau) = 0, \qquad \tau > 0.$$

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\tilde{\varphi}(\omega;\tau) = \varphi(2\mu\tau + 2a - \omega;\tau)\ e^{2\mu(\mu\tau+a-\omega)}, \tag{29}$$

где $\varphi(\omega;\tau)$ задана равенством (24), а $\varphi(\omega)$ обладает симметрией (28). Тогда, как видно из (25), (26) и предыдущей леммы, $\tilde{\varphi}(\omega;\tau)$ удовлетворяет уравнению диффузии (18) и непрерывна по ω при любом $\tau > 0$. Кроме того, из (29) и (28) следует что $\tilde{\varphi}(\omega;\tau)$ удовлетворяет начальному условию

$$\tilde{\varphi}(\omega;\tau = 0) = \varphi(2a - \omega)\ e^{2\mu(a-\omega)} = -\varphi(\omega).$$

Это, в свою очередь, означает, что при любых $\omega \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$ справедливо равенство

$$\tilde{\varphi}(\omega;\tau) = -\varphi(\omega;\tau),$$

в развернутой форме имеющее вид

$$\varphi(\omega;\tau) = -\varphi(2\mu\tau + 2a - \omega;\tau)\ e^{2\mu(\mu\tau+a-\omega)}.$$

В частности, в силу непрерывности $\varphi(\omega;\tau)$

$$\varphi(a + \mu\tau;\tau) = -\varphi(a + \mu\tau;\tau) \quad \Rightarrow \quad \varphi(a + \mu\tau;\tau) = 0, \quad \forall\ \tau > 0.$$

Что и требовалось доказать. ■

Главный результат данного раздела сформулирован в теореме:

Теорема 2 *Решение уравнения диффузии* (18), *удовлетворяющее начальному и граничным условиям* (19), (20), *равно*

$$\varphi(\omega;\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2(\mu-\nu)(b-a)m^2+2(\mu b-\nu a)m} \times$$
$$\left[g_0(\omega + 2m(b-a);\tau) - e^{2a(2(\nu-\mu)m-\mu)} g_0(\omega + 2m(b-a) - 2a;\tau)\right], \tag{30}$$
$$g_0(\omega;\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\tau}\right).$$

Доказательство: Для удобства рассуждений заменим начальное условие (19) более общим

$$\varphi(\omega;\tau=0)=\varphi(\omega), \qquad \omega\in(a,b). \tag{31}$$

Затем мы найдем решение (30), положив $\varphi(\omega)=\delta(\omega)$.

Идея доказательства состоит в экстраполяции функции $\varphi(\omega)$ вне интервала $\omega\in(a,b)$ таким образом, чтобы решение задачи Коши (22) с экстраполированным начальным условием

$$\varphi(\omega;\tau=0)=\varphi(\omega), \qquad \omega\in(-\infty,\infty), \tag{32}$$

удовлетворяло нулевым граничным условиям (20). Иными словами, решение должно быть равно нулю вдоль линий $\omega=a+\mu\tau$, $\omega=b+\nu\tau$, $\tau>0$.

Для удобства экстраполяции введем вспомогательную функцию

$$\varphi_0(\omega):=\begin{cases}\varphi(\omega), & \omega\in(a,b),\\ 0, & \omega\notin(a,b),\end{cases} \tag{33}$$

определенную на всей оси $\omega\in\mathbb{R}$.

Из леммы 2 следует, что решение уравнения диффузии (18), дополненное начальным условием (32), удовлетворяет обоим нулевым граничным условиям (20), если $\varphi(\omega)$ обладает двумя свойствами симметрии

$$\varphi(\omega)=-\varphi(2a-\omega)\;e^{2\mu(a-\omega)}, \qquad \varphi(\omega)=-\varphi(2b-\omega)\;e^{2\nu(b-\omega)}. \tag{34}$$

В совокупности они означают, что $\varphi(\omega)$ удовлетворяет условию квазипериодичности

$$\varphi(\omega)=\varphi(\omega+2\Delta)\;e^{2(\nu-\mu)(\omega+b-a)+2(\mu b-\nu a)}, \qquad \Delta=b-a, \tag{35}$$

с периодом 2Δ. Таким образом, нам осталось экстраполировать функцию $\varphi(\omega)$ из начального условия (32) на интервал длины Δ, примыкающий слева или справа к интервалу $\omega\in(a,b)$. Опираясь на первое из равенств (34) и на определение (33) функции $\varphi_0(\omega)$, экстраполируем $\varphi(\omega)$ на интервал $\omega\in(2a-b,b)$ длиной 2Δ:

$$\varphi(\omega)=\varphi^0(\omega), \qquad \varphi^0(\omega)=\varphi_0(\omega)-\varphi_0(2a-\omega)\;e^{2\mu(a-\omega)}. \tag{36}$$

Обратим внимание, новая функция совпадает с исходным начальным условием (31) в интервале $\omega\in(a,b)$, а вне интервала $\omega\in(2a-b,b)$ длиной 2Δ тождественно равна нулю.

Условие квазипериодичности (35) вместе с равенством (36) дает окончательную конструкцию интерполированной на всю ось ω функции $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi^m(\omega), \qquad \omega \in (-\infty, \infty). \tag{37}$$

Здесь $\varphi^m(\omega)$ находится m–кратным применением свойства квазипериодичности (35):

$$\varphi^m(\omega) = \varphi^0(\omega + 2(b-a)m)\ e^{2(\nu-\mu)(\omega+m(b-a))m+2(\mu b-\nu a)m}. \tag{38}$$

Подставив $\varphi(\omega)$ (37), (38) в (24), получим искомое решение смешанной краевой задачи (18), (19), (20). В частном случае $\varphi_0(\omega) = \delta(\omega)$ имеем

$$\varphi^0(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^0(\omega) = \delta(\omega) - e^{-2\mu a}\ \delta(\omega - 2a),$$

что приводит к решению (30). ■

5 Статистика экстремумов неполного моста

Опираясь на формулы (30) и (17), найдем функцию $f(h, \ell, c; \kappa, \gamma)$:

$$f(h, \ell, c; \kappa, \gamma) = g_0(c - \gamma) \times$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2(h-\ell)^2 m^2 - 2m(h-\ell)(1-\kappa)c} \left[1 - e^{4(h-\ell)\ell m - 2\ell(\ell-(1-\kappa)c)}\right], \tag{39}$$
$$g_0(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right).$$

В свою очередь, подставив $f(h, \ell, c; \kappa, \gamma)$ в (15), после несложных вычислений получим искомую плотность вероятностей

$$Q(h, \ell, c; \kappa, \gamma) = g_0(c - \gamma)\mathcal{R}(h, \ell; \kappa|c), \tag{40}$$

где

$$\mathcal{R}(h, \ell; \kappa|c) =$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} m\big[m\mathcal{D}(m(h-\ell), (1-\kappa)c) + (1-m)\mathcal{D}(m(h-\ell)+\ell, (1-\kappa)c)\big] \tag{41}$$
$$\mathcal{D}(h, c) := 4[(c-2h)^2 - 1]e^{2h(c-h)}.$$

Входящая в (40) функция $\mathcal{R}(h, \ell; \kappa|c)$ имеет ясный вероятностный смысл. Это условная плотность вероятностей экстремальных величин H

и L (4), при условии что случайная величина C равна заданной величине c. Отметим некоторые ее характерные особенности. При любом значении κ условная плотность вероятностей $\mathcal{R}(h,\ell;\kappa|c)$ не зависит от параметра сноса γ и удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{h_-}^{\infty} dh \int_{-\infty}^{\ell_+} d\ell\ \mathcal{R}(h,\ell;\kappa|c) = 1.$$

В предельном случае $\kappa = 1$, то есть для случая (полного) моста $Y(t)$ (3), условная плотность вероятностей $\mathcal{R}(h,\ell;\kappa|c)$ (41) перестает зависеть от c. Последнее является следствием хорошо известного факта, что мост $Y(t)$ и случайная величина C статистически независимы. Соответственно, (безусловная) совместная плотность вероятностей $\mathcal{R}(h,\ell)$ экстремумов H и L моста $Y(t)$ (3) равна

$$\mathcal{R}(h,\ell) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\big[m\mathcal{D}(m(h-\ell)) + (1-m)\mathcal{D}(m(h-\ell)+\ell)\big], \qquad (42)$$

$$\mathcal{D}(h) := 4(4h^2-1)e^{-2h^2}.$$

Напомним еще, для сравнения, что плотность вероятностей $\mathcal{R}(h)$ супремума H моста $Y(t)$ равна

$$\mathcal{R}(h) = 4he^{-2h^2}, \qquad h > 0. \qquad (43)$$

Нетрудно получить эту плотность вероятностей почленным интегрированием ряда (42) по всем $\ell \in (-\infty, 0)$ и последующей тривиальной перегруппировкой слагаемых.

Приведем еще коэффициент корреляции ρ супремума H и инфимума L в случае моста $Y(t)$ (3). Из (42), (43) и из аналогичного выражения для плотности вероятностей инфимума L имеем

$$\langle H\rangle = -\langle L\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{8}},\ \langle H^2\rangle = \langle L^2\rangle = \frac{1}{2},\ \langle HL\rangle = \frac{6-\pi^2}{12}\ \Rightarrow\ \rho \simeq 0.655.$$

В другом предельном случае $\kappa = 0$, функция (40) становится плотностью вероятностей

$$Q(h,\ell,c;\gamma) := Q(h,\ell,c;\kappa=0,\gamma)$$

экстремумов H, L и последнего значения $C = X(1,\gamma)$ винеровского процесса со сносом $X(t,\gamma)$ (1). Она равна

$$Q(h,\ell,c;\gamma) = g_0(c-\gamma) \times$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} m\big[m\mathcal{D}(m(h-\ell),c) + (1-m)\mathcal{D}(m(h-\ell)+\ell,c)\big]. \qquad (44)$$

Последнее равенство можно получить еще двукратным дифференцированием равенства 2.1.15.8 (стр. 271) из монографии [2].

6 Благодарности

В научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта є2013-14, выполненного в рамках гранта факультета экономики НИУ ВШЭ-Нижний Новгород в 2013 году.

Список литературы

[1] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod. The Theory of Stochastic Processes II. Series: Classics in Mathematics 218. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg & New York, 1975.

[2] A.N. Borodin, P. Salminen. Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae. Second Edition, Birkhäuser-Verlag, Basel Boston Berlin, 2002.

[3] M. Jeanblanc, M. Yor, M. Chesney. Mathematical Methods for Financial Markets. Springer-Verlag, Dordrecht Heidelberg London & New York, 2009.

[4] A. Saichev, Y. Malevergne, D. Sornette. Theory of Zipf's Law and Beyond. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 632. Springer Verlag, Dordrecht Heidelberg London & New York, 2010.

[5] W. Feller. Annals of Mathematical Statistics, 22, 427, 1951.

[6] M.B. Garman, M.T. Klass. The Journal of Business, 53, 67, 1980.

[7] L.C.G. Rogers, S.E. Satchell. The Annals of Applied Probability, 1, 4, 504, 1991.

[8] M. Martens, D. van Dijk. Journal of Econometrics, 138, 181, 2007.