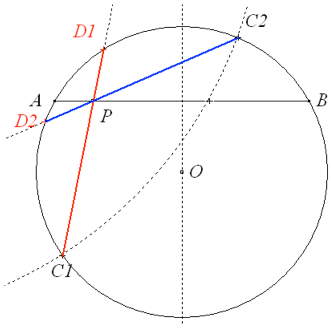
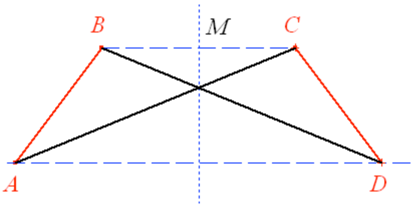
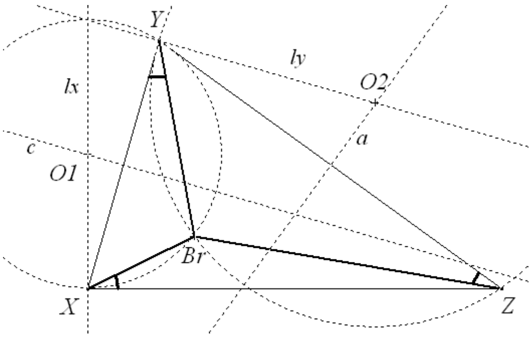
<u>IV Нижегородская компьютерно-рисуночная устная геометрическая олимпиада «КРУГ».</u>
<u>НИУ ВШЭ-Нижний Новгород. Старшая группа (9-11 класс).</u>* <u>РЕШЕНИЯ.</u> *<u>24 мая 2012 года</u>



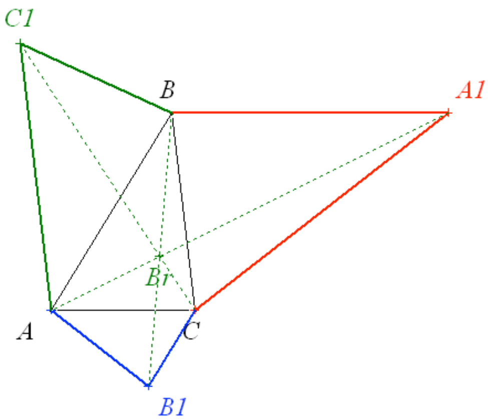
1. Постройте в окружности хорду CD, пересекающую хорду AB в точке P так, что CP=3PD. (*Свободны точки A и B, частично свободны центр окружности O и точка P.*) **(Точку *O* отметим на серединном перпендикуляре к отрезку, построим окружность. Затем применим гомотетию с центром *P* и коэффициентом (-3). Точки пересечения окружности и её образа при гомотетии дадут нам два возможных положения точки *C*. Затем проведём оба луча *CP* и найдём точки *D* как пересечение этих лучей с окружностью.)**



2. Постройте выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором равны стороны AB и CD и равны диагонали AC и BD. (*Свободны точки A, B и C. Все построения сохранить на чертеже.*) **(Надо построить равнобочную трапецию, т.к. нетрудно доказать, что наш четырёхугольник окажется такой трапецией. Построим серединный перпендикуляр к стороне *BC*, а затем точку *D*, симметричную точке *A* относительно этого перпендикуляра. *<u>Комментарий</u>: некоторые алгоритмы построения, например, через окружности с центрами C и B и радиусами AB и AC соответственно, могут привести к тому, что при движении точки C по плоскости не всегда будет получаться нужный нам четырёхугольник.*)**



3. *Первой точкой Брокара* треугольника XYZ называется такая точка Br_1, что $\angle XYBr_1=\angle YZBr_1=\angle ZXBr_1$. Постройте эту точку. (*Свободны все вершины треугольника XYZ.*) **(Проведём через *X* прямую l_X, перпендикулярную *XZ* и найдём точку O_1 её пересечения с серединным перпендикуляром *c* к стороне *XY*. Аналогично построим точку O_2 пересечения прямой l_Y, проходящей через *Y* перпендикулярно *XY*, и серединного перпендикуляра *a* к стороне YZ. Точка Брокара Br_1 будет точкой пересечения окружностей с центрами O_1 и O_2 и радиусами O_1Y и O_2Y соответственно, что следует из свойств вписанных углов и углов между секущей и касательной. Точку Брокара можно построить и по-другому, например, воспользовавшись задачей 5.126 из §12 главы 5 книги В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии». Это построение можно осуществить с помощью параллельности и симметрии.)**

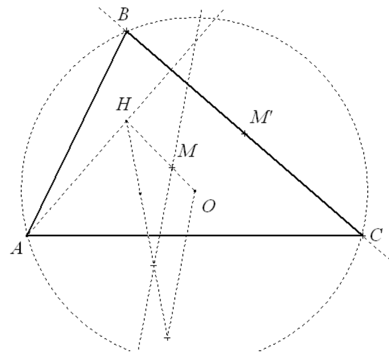


§12. Точки Брокара

5.126*. а) Докажите, что внутри треугольника ABC существует такая точка P, что $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$.

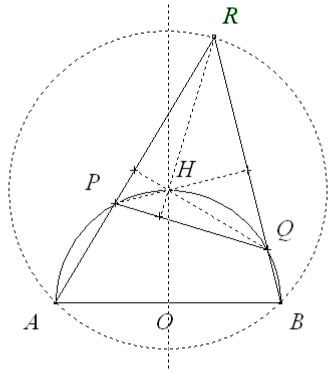
б) На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные ему треугольники CA_1B, CAB_1 и C_1AB (углы при первых вершинах всех четырех треугольников равны и т. д.). Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, причем эта точка совпадает с точкой задачи а).

Точку P называют *точкой Брокара* треугольника ABC. Аналогично доказывается, что существует еще и вторая точка Брокара Q, для которой $\angle BAQ = \angle ACQ = \angle CBQ$.

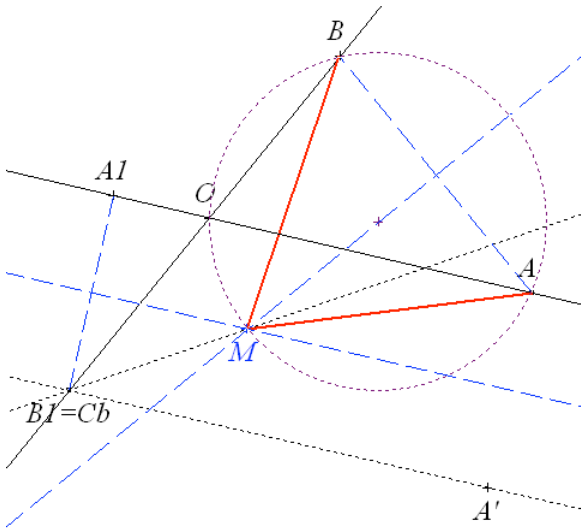


4. Постройте треугольник ABC по вершине A, ортоцентру H и центру описанной окружности O. (*Свободны точки A, H и O.*) **(Воспользуемся тем, что *H* и *O* лежат на прямой Эйлера вместе с точкой пересечения медиан *M*, которая делит отрезок *HO* в отношении *HM*:*MO*=2:1 (см., например, §4. «Четыре замечательные точки треугольника» на стр. 34-41 в книге Я.П.Понарина «Элементарная геометрия. Том 1.»). Разделим с помощью теоремы Фалеса отрезок *HO* на 3 части и отметим на нём точку *M*. Затем построим середину *M'* стороны *BC* с помощью гомотетии: $M'=H_A^{1,5}(M)$. Затем через точку *M'* проведём прямую, перпендикулярную прямой *AH*, и отметим на этой прямой точки *B* и *C* пересечения с окружностью с центром *O* и радиусом *OA*.)**

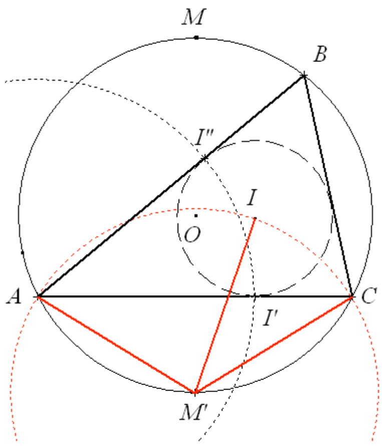
5. «Дана ***полуокружность*** с центром O и диаметром AB. На ней расположены точки P и Q ($AP < AQ$). Лучи AP и BQ пересекаются в точке R. Оказалось, что ортоцентр H треугольника PQR лежит на полуокружности.» (*Постройте чертёж, на котором точки A и B – свободны, точка R – частично свободна.*) **(Пусть $\angle PRQ = \alpha$. Тогда $\angle PHQ = \pi - \alpha$ (угол между прямыми QH и PH равен углу между перпендикулярными им прямыми AR и RB). Так как H лежит на полуокружности (очевидно, на меньшей дуге PQ), получаем, что $\angle PAQ = \alpha$. Значит, треугольник ARQ – прямоугольный равнобедренный с острым углом α, откуда $\alpha = \pi/4$. Значит, $\angle AQH = \pi/4$, $\angle AOH = 2\angle AQH = \pi/2$. Тогда H – середина дуги полуокружности, а точка R лежит на дуге окружности с центром в H и радиусом HA. *Нужные нам построения теперь очевидны.*)**



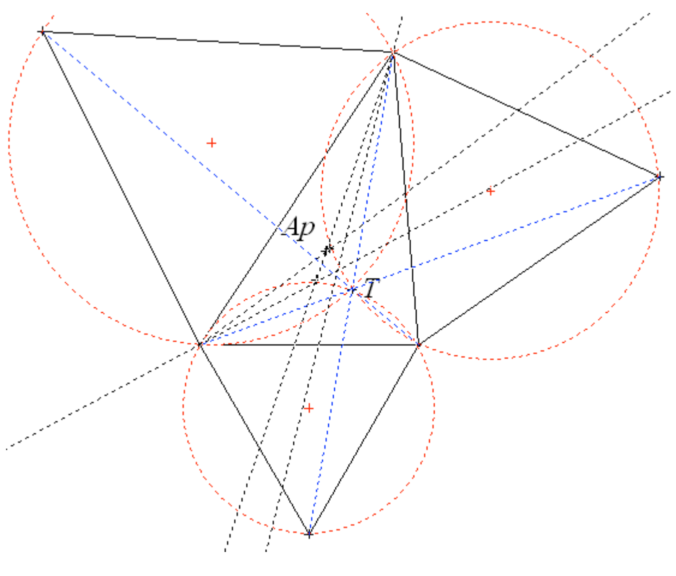
6. По двум пересекающимся прямым с равными скоростями движутся две точки A и B. Построить такую точку M плоскости, которая во все моменты времени равноудалена от A и B. (*Свободны обе прямые, частична свободна точка A на одной из прямых, стартовое положение точки B также должно меняться в зависимости от некоторой частично свободной точки C_B на второй прямой.*) **(Нужная нам точка M будет точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам A_1B_1 и A_2B_2, где A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно положения точек A и B в два разных момента времени. Треугольники A_1A_2M и B_1B_2M будут равны по трём сторонам – один треугольник получается из другого поворотом на угол AOB с центром М (см. задачу №144 из книги И.Ф.Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия.» (серия “Библиотечка «Квант»“, выпуск 17, с.39)). Нужные построения лучше всего делать с помощью проекции на прямую, параллельную первой, и симметрии относительно биссектрисы между этой новой прямой и второй прямой. *<u>Комментарий</u>: При построении с помощью параллельных переносов и окружностей могут возникнуть проблемы с движением точки B, которая будет менять направление движения. Заметим также, что нужная нам точка M является точкой пересечения построенной биссектрисы и описанной окружности треугольника ABO.*)**



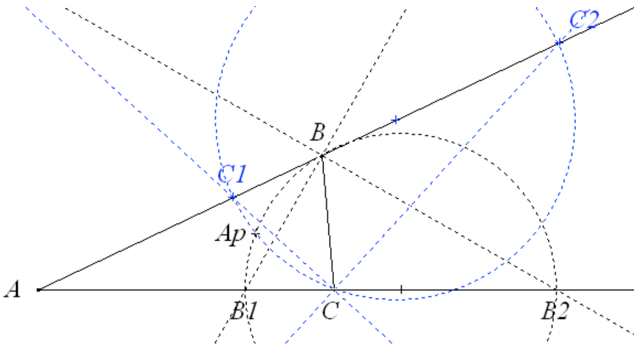
7. «***IMO***:☺ **или** ***MIMO***?» Построить треугольник ABC по центрам O и I соответственно описанной и вписанной окружностей и середине M дуги ABC описанной окружности. **(Свободны точки O, I и M.) (Рассмотрим точку M', диаметрально противоположную точке M на описанной окружности, тогда по лемме о «трезубце»: $AM'=IM'=CM'$. Значит, точки A и C получим как пересечение окружностей с центрами M' и O и радиусами $M'I$ и MO соответственно. Далее построим проекцию I' точки I на сторону AC, вписанную окружность, вторую касательную из точки A к вписанной окружности, которая пересечёт описанную окружность в точке B.)**



8. *Первой точкой Аполлония* треугольника называется точка Ap_1 внутри треугольника, для которой равны все три произведения каждой из сторон на расстояние от этой точки до противоположной вершины. Постройте точку Аполлония внутри остроугольного треугольника. (*Свободны все вершины треугольника.*) **(<u>1-й способ</u>. Построить точку Аполлония можно, воспользовавшись её свойством: для любой вершины X треугольника лучи XAp_1 и XT_1 симметричны относительно биссектрисы угла X, где T_1 – первая точка Торричелли (точка, для которой сумма расстояний до вершин будет наименьшей; в остроугольном треугольнике из точки Торричелли все стороны видны под углом 120°.) Построить точку Торричелли можно: 1) как точку пересечения отрезков, соединяющих третьи вершины равносторонних треугольников, построенных внешним образом на сторонах исходного треугольника, с противоположными вершинами треугольника; 2) как точку пересечения**



окружностей, описанных около этих равносторонних треугольников. <u>2-й способ</u>. Построить точку Аполлония также можно, воспользовавшись её другим свойством: она лежит на окружности, диаметр которой образуют точки пересечения биссектрис внутреннего и внешнего угла треугольника с прямой, на которой лежит противоположная сторона.)



9. Постройте центр описанной окружности треугольника, воспользовавшись ровно девятью действиями, если при этом запрещено пользоваться операциями «окружность», «биссектриса», «серединный перпендикуляр», «перпендикулярность», «параллельность», «поворот», «осевая» и «центральная симметрия», «параллельный перенос» и стандартными многоугольниками. (*Свободны вершины треугольника; показать весь алгоритм построения.*) **(Построение следует из свойств окружности девяти точек – см., например, п. 6.1. на стр. 48 из книги Я.П.Понарина «Элементарная геометрия. Том 1.» про окружность девяти точек.**

§6. *Окружность девяти точек треугольника*

6.1. Существование окружности девяти точек. Имеет место

Теорема. *В любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности с центром в середине E отрезка OH и радиусом $\frac{1}{2}R$.*

Доказательство 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, H_1, H_2, H_3 — основания соответствующих высот и A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH соответственно (рис. 38). Тогда четырехугольники $B_1C_1B_2C_2$ и $C_1A_1C_2A_2$ являются прямоугольниками. В самом деле, отрезки B_1C_1 и B_2C_2 как средние линии треугольников ABC и HBC параллельны BC и равны ее половине. Поэтому четырехугольник $B_1C_1B_2C_2$ — параллелограмм. Кроме того, в нем $B_1C_2 \parallel AH$, но $AH \perp BC$, поэтому $B_1C_2 \perp B_2C_2$. Для четырехугольника $C_1A_1C_2A_2$ доказательство аналогично. Эти прямоугольники имеют общую диагональ C_1C_2. Значит, их диагонали равны и пересекаются в одной точке E. Поэтому точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности с центром E. Так как из точек H_1, H_2, H_3 диаметры этой окружности видны под прямыми углами, то эти точки ей принадлежат. Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$, вследствие чего радиус описанной около него окружности вдвое меньше радиуса R окружности ABC. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки E. Следовательно, их ортоцентры O и H симметричны относительно E (O — центр окружности ABC).

Доказательство 2. Примем во внимание, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника относительно его сторон и середин сторон, принадлежат описанной около треугольника окружности (задача 4.2). Зададим гомотетию с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этой гомотетии прообразами девяти точек, рассматриваемых в теореме, являются точки описанной окружности (рис. 39). Гомотетия отображает описанную около треугольника ABC окружность $(O; R)$ на окружность $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$, которой принадлежат все девять указанных в теореме точек. Поскольку $O \to E$, то E — середина OH.

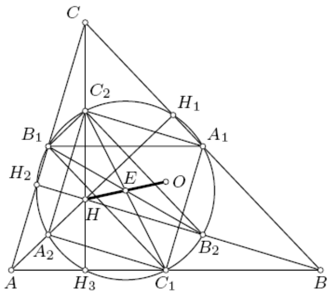


Рис. 38

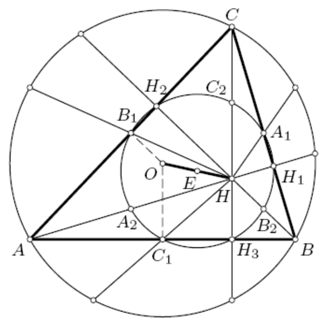


Рис. 39

Окружность $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$ называют *окружностью девяти точек* треугольника. «Эта окружность — первое волнующее, с чем мы встречаемся в курсе элементарной геометрии», — говорил Даниэль Пидо.

Итак, окружность девяти точек треугольника гомотетична его описанной окружности относительно ортоцентра этого треугольника. Окружность девяти точек треугольника ABC описана около его серединного треугольника $A_1B_1C_1$ и около его ортотреугольника $H_1H_2H_3$.

6.2. Теорема Фейербаха. В 1804 г. окружность девяти точек была уже известна. Иногда ее приписывают Л. Эйлеру, который в 1765 г. доказал, что серединный треугольник и ортотреугольник данного треугольника имеют общую описанную окружность. Карл Фейербах (1800—1834), немецкий математик, брат известного философа Людвига Фейербаха, частично переоткрыл результат Эйлера и в 1822 году

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек треугольника касается внутренне его вписанной окружности и касается внешне каждой из трех вневписанных окружностей.*

Сначала построим проекции H_1 и H_2 вершин A и B на противоположные стороны исходного треугольника ABC. Затем проведём прямые AH_1 и BH_2, отметим их точку пересечения H – ортоцентр треугольника. Последовательно отметим середины трёх отрезков: BC – точку A_1, AH – точку A_2, A_1A_2 – точку E, которая является центром окружности девяти точек. После этого отобразим H центрально симметрично относительно точки E (т.е. в условиях нашей задачи применим гомотетию с центром E и коэффициентом (-1)), что даст центр описанной окружности O. <u>*Комментарий:*</u> самый юный участник старшей группы нашёл оригинальное решение в 7 ходов, воспользовавшись тем, что центр описанной окружности является ортоцентром серединного треугольника.)

10. Постройте циссоиду Диоклеса, открытую в поисках решения задачи об удвоении куба. Уравнение циссоиды в прямоугольных координатах: $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$, в полярных координатах: $\rho = \dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$. (*Свободен отрезок, задающий параметр a; частично свободна точка, от движения которой зависит движение точки, описывающей циссоиду.*) **(См. о циссоиде в «Математическом энциклопедическом словаре» под редакцией Ю.В.Прохорова, с.181.)**

ДИОКЛЕСА ЦИССОИДА (от греч. κισσοειδής — плющевидный, похожий на лист плюща) — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка. Уравнение в прямоугольных координатах:

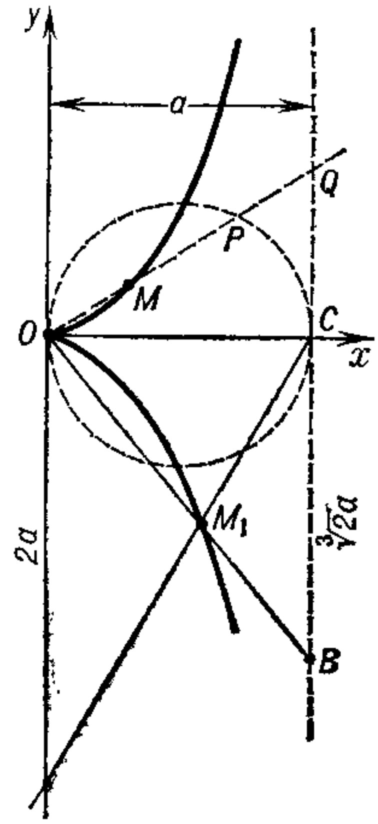
$$y^2 = \frac{x^3}{a-x},$$

в полярных координатах:

$$\rho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

параметрич. уравнения:

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}, \text{ где } t = \operatorname{tg} MOx.$$



Д. ц. может быть построена следующим образом: луч OQ (рис.) пересекает окружность с диаметром $OC=a$ и касательную BQ к этой окружности; точка M (отрезок $OM=PQ$) описывает Д. ц. (по отрезку $CB=\sqrt[3]{2}\,a$ можно построить отрезок длины $\sqrt[3]{2}$, т. е. решить задачу об удвоении куба). Д. ц. (рис.) симметрична относительно оси Ox. В начале координат точка возврата 1-го рода. Асимптота $x=a$. Площадь между кривой и асимптотой $S=3\pi a^2/4$. Д. ц. открыта древними греками в поисках решения задачи об удвоении куба(Диоклес, 2 в. до н. э.).

11. (Призовая задача победителя. Выполняется только после решения всех 10 основных задач по окончании олимпиады наглядно для всех участников олимпиады.) Впишите в окружность с центром O правильный пятиугольник $ABCDE$, не пользуясь операцией «поворот». (*Свободны точки O и A; все построения сохранить пунктиром и показать алгоритм при предъявлении решения.*) **(Воспользуемся свойствами правильной пятиконечной звезды, связанными с «золотым сечением», например, что точка *I* делит радиус *OA* в этом отношении, где *I* - центр описанной окружности маленького треугольника звезды и одновременно центр вписанной окружности треугольника *ABE* (см. рис.). Применим алгоритм построения «золотого сечения» (см., например, п. 2.7. на стр. 21 из книги Я.П.Понарина «Элементарная геометрия. Том 1.»). Далее построим серединный перпендикуляр к отрезку *OI*, который пересечёт окружность в вершинах *B* и *E* нужной нам звезды. Затем построим прямые, симметричные *BE* относительно *BO* и *EO*, которые пересекаются с окружностью в двух оставшихся вершинах *D* и *C* соответственно.)**

2.7. Золотое сечение отрезка. С древности известна такая замечательная задача: разделить данный отрезок a на две части так, чтобы одна из них была средней геометрической величиной между отрезком и другой его частью (задача о золотом сечении отрезка).

Решение ее просто. Если x — одна из искомых частей данного отрезка a, то согласно требованию

$$x^2 = a(a-x), \quad \text{или} \quad x^2 + ax - a^2 = 0,$$

откуда $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

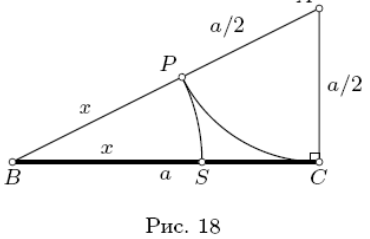


Рис. 18

На основании полученной формулы «золотой отрезок» x строится по заданному отрезку a с помощью циркуля и линейки следующим образом. Строим прямоугольный треугольник ABC с катетами a и $\frac{a}{2}$ (рис. 18).

Его гипотенуза AB будет равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Если из нее вычесть отрезок $AP = \frac{a}{2}$, то получим искомый отрезок $BP = x$, а затем и точку S, делящую отрезок $BC = a$ в «золотом отношении»

$$\frac{BS}{SC} = \frac{x}{a-x} = \frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$