

ГАМИЛЬТОНОВ ГРАФ.

1. На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают со всеми вершинами куба. Какое наименьшее число звеньев этой ломаной может совпадать с ребрами куба?
2. Из восьми маленьких кубиков сложен куб. Можно ли, выйдя из центра большого куба и двигаясь по рёбрам маленьких кубиков, обойти все вершины маленьких кубиков, побывав в каждой ровно один раз?
3. Дана доска 5×5 . Может ли конь обойти все клетки, побывав на каждой по одному разу и вернуться в исходное положение?
4. Можно ли обойти хромым королем (король не может ходить по диагоналям) все клетки шахматной доски, начав в левом нижнем углу и закончив в правом верхнем углу?
5. Может ли конь сделать 8 ходов и вернуться в исходную клетку, побывав при этом на всех горизонталях и вертикалях шахматной доски?
6. а). На две клетки шахматной доски выставляются черная и белая фишки. Разрешается по очереди передвигать их, каждым ходом сдвигая очередную фишку на любое свободное соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли на доске в результате таких ходов встретиться все возможные позиции расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу? б). А если разрешается сдвигать фишки в любом порядке (не обязательно по очереди)?

Какой из следующих трёх фактов самый «сильный»?

7. В некотором государстве каждые 2 города соединены дорогой. На каждой дороге разрешено движение только в одну сторону. Докажите, что найдётся город, выехав из которого можно объехать всё государство, побывав в каждом городе ровно 1 раз.
8. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.
9. В некотором государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

Докажите самый «сильный» факт и оба следствия из него.

10. В однокруговом шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым по одной партии. Докажите, что участников можно так занумеровать, что ни один не проиграл непосредственно следующему за ним по номеру.
11. В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнёт путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза. (*Всероссийская олимпиада, 2003г.*)
12. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с 5 нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.
13. «*Рыцари при дворе короля Артура*» - теорема Дирака.
За круглым столом у короля Артура собрались $2n$ рыцарей, у каждого из которых не более $(n-1)$ врага среди остальных. Доказать, что советник короля Мерлин может так рассадить рыцарей, что враги рядом не сядут. **Сформулируйте теорему Дирака в общем виде.**
14. На конференцию приехало $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n остальными. Докажите, что участников можно так расселить в двухместные номера, чтобы в каждом номере жили знакомые друг с другом люди.
15. Дано n фишек нескольких цветов, причём фишек каждого цвета не более $n/2$. Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.
16. В федеративном государстве, состоящем из двух республик, каждые два города соединены дорогой с односторонним движением; при этом, двигаясь по дорогам, можно из любого города попасть в любой другой. Туристическое агентство «Гамильтон» предлагает n различных туристических маршрутов по городам первой республики и m – по городам второй (любой из этих маршрутов предполагает посещение каждого города республики ровно по одному разу и возвращение в исходный город, причем всё это – не выезжая за пределы республики). Докажите, что агентство «Гамильтон» могло бы предложить любознательным туристам не менее mn аналогичных туристических маршрутов по городам всей федерации.