Геометрия масс.

Сущность барицентрического метода: 1. В точки ... помещаем массы ... 2. Тогда выполняются соотношения... 3.Возьмем точку, удовлетворяющую условиям... 4.Вывод.

1. Докажите, что если в трех вершинах A, B, C параллелограмма ABCD поместить массы 1, -1, 1, то их барицентром будет четвертая вершина.
2. В вершинах параллелограмма ABCD расположены такие массы m_A, m_B, m_C, m_D (с ненулевой суммарной массой), что центр масс получающихся четырех материальных точек совпадает с центром параллелограмма. Докажите, что $m_A=m_B$ и $m_C=m_D$.
3. Докажите, что если система материальных точек симметрична относительно плоскости α, то ее центр масс лежит в плоскости α.
4. Многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол φ. Докажите, что сумма векторов OA_1, OA_2, …, OA_n равна нулю.
5. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и каждая медиана делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.
6. На стороне BC треугольника ABC взята точка K, что BK:KC=5:1. В каком отношении медиана CE делит отрезок AK?
7. В треугольнике ABC проведена медиана CE. На сторонах CA и CB выбраны такие точки K и M, что CK=4KA, 2CM=MB. В каком отношении точка P пересечения прямых KM и CE делит медиану CE? В каком отношении точка P делит отрезок KM?
8. На стороне AC треугольника ABC взята точка M такая, что AM : MC = 1:2, а на продолжении стороны CB – точка N такая, что NB=CB. Прямая NM пересекает сторону AB в точке P. В каком отношении эта точка делит сторону AB и отрезок MN?
9. Доказать, что ц.м. четырехугольника, в вершинах которого расположены одинаковые массы – точка пересечения средних линий.
10. Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой. Точки M и N – середины отрезков AB и CD, E – середина отрезка MN, P – точка пересечения медиан треугольника BCD. Лежат ли точки A, E, P на одной прямой?
11. Доказать, что точка пересечения средних линий четырехугольника и середины его диагоналей лежат на одной прямой. В каком отношении эта точка делит средние линии и отрезок между серединами диагоналей?
12. Основанием пирамиды SABCD служит параллелограмм ABCD. Плоскость отсекает от трех боковых ребер SA, SB, SC соответственно треть, четверть и пятую часть (считая от вершины S). Какую часть отсекает она от четвертого бокового ребра?
13. В тетраэдре проведены три отрезка, каждый из которых соединяет середины двух противоположных ребер. Докажите, что эти три отрезка пересекаются в одной точке и каждый из них делится в этой точке пополам.
14. В тетраэдре проведены четыре отрезка, каждый из которых соединяет одну из вершин с точкой пересечения медиан противолежащей грани. Докажите, что эти четыре отрезка пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершин.
15. На сторонах шестиугольника последовательно отмечены середины B_1, B_2, …, B_6.. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника $B_1B_3B_5$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника $B_2B_4B_6$.
16. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C’, A’ и B’ так, что они делят стороны в отношении 1:2 считая от вершины A, B и C соответственно. Отрезки AA’, BB’ и CC’ образуют треугольник. Во сколько раз его площадь меньше площади исходного треугольника?
17. Через точку *P*, расположенную внутри параллелограмма *ABCD,* проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Они пересекают стороны *AB, BC, CD, DA* соответственно в точках *K, L, M, N*. Пусть *Q* – точка пересечения средних линий четырехугольника *KLMN,* а *S* – центр параллелограмма. Доказать, что *Q* – середина отрезка *PS.*
18. Стороны треугольника ABC, противолежащие вершинам A, B и C имеют длины a, b и c.Доказать, что ц.м. системы aA, bB, cC – центр вписанной окружности этого треугольника. В каком отношении биссектриса AA_1 делится точкой пересечения биссектрис?

19. В угол PAQ вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках P и Q. Прямая BC касается окружности в точке T. Прямые BQ и CP пересекаются в точке M. Доказать, что точки A, T и M лежат на одной прямой.
20. Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой. Точки пересечения медиан треугольников BCD, ACD, ABD, ABC обозначены соответственно A', B', C', D'. Доказать, что отрезки AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке M.
21. Даны четыре точки A, B, C, D. Через K, L, M, N, P, Q обозначены середины отрезков AB, CD, AC, BD, AD, BC. Доказать, что середины отрезков KL, MN и PQ совпадают между собой и с точкой M из предыдущей задачи.
22. Доказать, что ц.м. выпуклого многоугольника (многогранника) лежит внутри него.
23. В каком отношении биссектриса AA' делится точкой пересечения биссектрис?
24. *Теорема Ван-Абеля.* В треугольнике ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 на сторонах BC, AC и AB соответственно, так , что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке M. Доказать, что $\frac{CB_1}{B_1A}+\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CM}{MC_1}$.
25. В треугольнике ABC точки A_1 и A_2 делят сторону BC на три равные части (считая от вершины B), точка B_1 – сторону AC в отношении 2:1 (от вершины A). BB_1 пересекает AA_1 и AA_2 в точках N и M соответственно. Какую часть от площади треугольника ABC составляет площадь четырехугольника A_1A_2MN? *(5:42)*
26. Около окружности описан четырехугольник *ABCD*, касающийся окружности в точках *M, N, P, Q*. Известно, что длины отрезков касательных, проведенных из точек *A, B, C, D* к окружности, равны соответственно a, b, c, d. В каком отношении делится каждый из отрезков *MP* и *NQ* точкой их пересечения?
27. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остается на месте. Докажите, что он совпадает с ц.м. треугольника *ABC*, если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.
28. На окружности дано **n** точек. Через центр масс **n-2** точек проводится прямая , перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Докажите, что все такие прямые пересекаются в одной точке.
29. *(теорема Ньютона).* Если вокруг окружности описан четырехугольник *ABCD*, то центр *M* окружности лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей этого четырехугольника.
30. *(теорема Чевы)*. Пусть точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах *BC, CA, AB* треугольника *ABC* или на их продолжениях так, что выполняется «*условие Чевы*» : $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=1$. Тогда либо все три прямые AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку, либо все они параллельны.
31. *(теорема Менелая)* Если точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах *BC, CA* и *AB* треугольника *ABC* или на их продолжениях так, что выполняется «*условие Менелая*» : $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=-1$, то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.
32. Из произвольной точки *M* окружности опущены перпендикуляры на все стороны (или продолжения сторон) треугольника *ABC*, вписанного в эту окружность. Доказать, что основания A_1, B_1, C_1 этих перпендикуляров лежат на одной прямой.*(прямая Симпсона)*.
33. Пусть $a_1, a_2,\dots a_n$ – возрастающая последовательность чисел, а $b_1, b_2,\dots b_n$ – убывающая последовательность положительных чисел. Пусть, далее, $\mu_1,\mu_2\dots\mu_n$ – положительные числа, причем $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n=1$. Тогда $$\left(\mu_1a_1+\mu_2a_2+\dots+\mu_na_n\right)\left(\mu_1b_1+\mu_2b_2+\dots+\mu_nb_n\right)\ge\mu_1a_1b_1+\mu_2a_2b_2+\dots+\mu_na_nb_n.$$
34. На сторонах *BC, CA* и *AB* треугольника *ABC* взяты точки A_1, B_1, и C_1, причем отрезки AA_1, BB_1, и CC_1 пересекаются в точке *P*. Пусть l_a, l_b, l_c,– прямые, соединяющиесередины отрезков *BC* и B_1C_1, *CA* и C_1A_1, *AB* и A_1B_1. Докажите, что прямые l_a, l_b, и l_c пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на отрезке *PM*, где *M* – центр масс треугольника *ABC*.
35. Центрально симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из *n* “уголков” и *k* прямоугольников размером 1×4. Докажите, что *n* четно.
36. На сторонах *BC* и *CD* параллелограмма *ABCD* взяты точки *K* и *L* так, что *BK:KC=CL:LD*. Докажите, центр масс треугольника *AKL* лежит на диагонали *BD.*