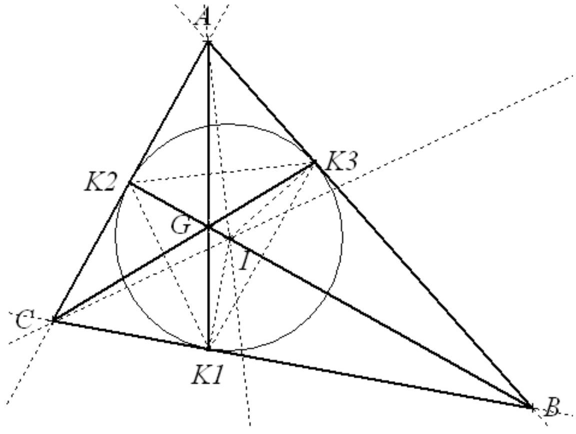
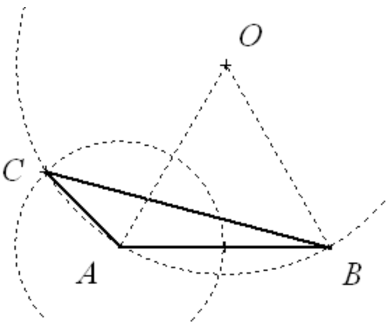
<u>IV Нижегородская компьютерно-рисуночная устная геометрическая олимпиада «КРУГ».</u>
<u>НИУ ВШЭ-Нижний Новгород. Младшая группа (7-8 класс).</u>* <u>РЕШЕНИЯ.</u> *<u>24 мая 2012 года</u>

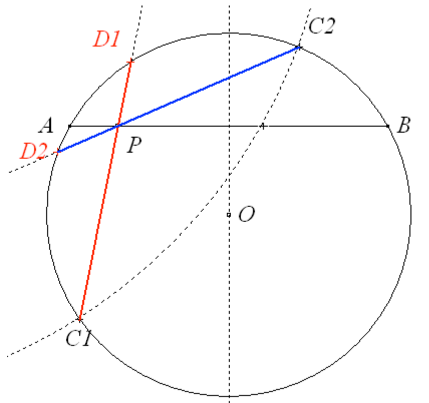
1. *Точкой Жергонна* треугольника называется точка G пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности. Постройте точку Жергонна по трём точкам касания вписанной окружности со сторонами треугольника. (*Свободны три точки касания.*) **(Сначала с помощью серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющим данные точки касания, построим центр описанной окружности треугольника из трёх точек касания, который является центром вписанной окружности *I*. Затем восстановим перпендикуляры к радиусам в точках касания, которые при пересечении дадут нам три вершины треугольника. После этого построим точку Жергонна *G* как точку пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности.)**



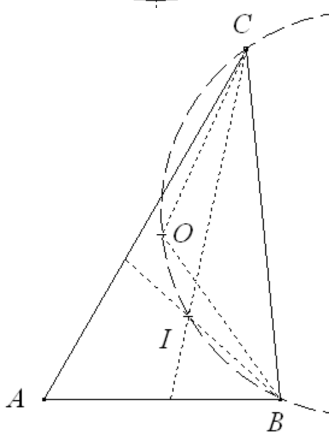
2. Постройте треугольник ABC, в котором $\angle C=30°$ и $AB=2AC$. (*Свободны точки A и B.*) **(Построим равносторонний треугольник *ABO*, окружность с центром *O* и радиусом *AB*. Найдём точку *C* пересечения этой окружности и окружности с центром *A* и радиусом *AB*/2.)**

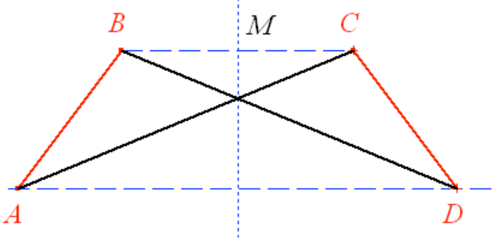


3. Постройте в окружности хорду CD, пересекающую хорду AB в точке P так, что $CP=3PD$. (*Свободны точки A и B, частично свободны центр окружности O и точка P.*) **(Точку *O* отметим на серединном перпендикуляре к отрезку, построим окружность. Затем применим гомотетию с центром *P* и коэффициентом (-3). Точки пересечения окружности и её образа при гомотетии дадут нам два возможных положения точки *C*. Затем проведём оба луча *CP* и найдём точки *D* как пересечение этих лучей с окружностью.)**



4. Постройте треугольник ABC, в котором центр описанной окружности O, центр вписанной окружности I и вершины B и C лежат на одной окружности. (*Свободны вершины A и B, частично свободна вершина C.*) **(Нужным нам свойством обладают только треугольники с $\angle A=60°$, что нетрудно доказать. Пусть $\angle A=\alpha$, тогда $\angle BIC=90°+\alpha/2$, $\angle BOC=2\alpha$. Разобрав два возможных случая расположения точек *I* и *O* относительно прямой *BC*, получим либо $\angle BIC=\angle BOC$, т.е. $\alpha=60°$, либо $\angle BIC+(360°-\angle BOC)=180°$, т.е. $\alpha=180°$, что невозможно. *<u>Комментарий</u>*: Заметим, что по лемме о трезубце: *CM*=*BM*=*IM*, где *M* – середина дуги *BC*, противолежащей вершине *A*. В нашей задаче ещё и точка *O* оказалась на окружности с центром в точке *M*.)**

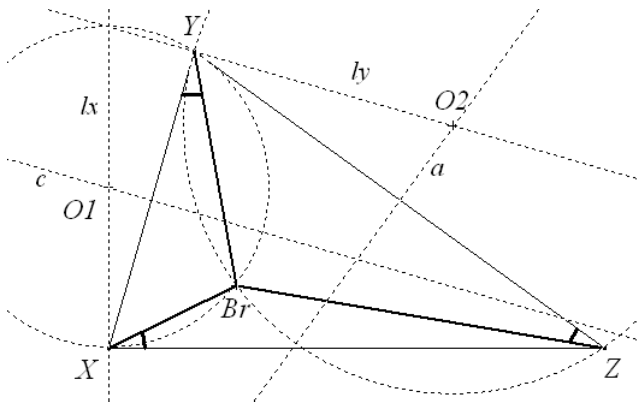


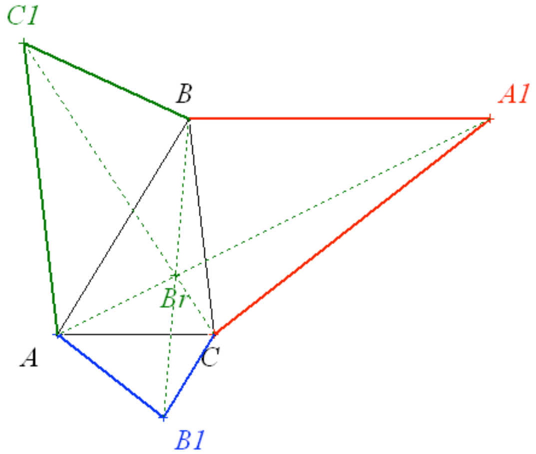


5. Постройте выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором равны стороны AB и CD и равны диагонали AC и BD. (*Свободны точки A, B и C. Все построения сохранить на чертеже.*) **(Надо построить равнобочную трапецию, т.к. нетрудно доказать, что наш четырёхугольник окажется такой трапецией. Построим серединный перпендикуляр к стороне *BC*, а затем точку *D*, симметричную точке *A* относительно этого перпендикуляра. *<u>Комментарий:</u> некоторые алгоритмы построения, например, через окружности с центрами C и B и радиусами AB и AC соответственно, могут привести к тому, что при движении точки C по плоскости не всегда будет получаться нужный нам четырёхугольник.*)**

6. *Первой точкой Брокара* треугольника XYZ называется такая точка Br_1, что $\angle XYBr_1=\angle YZBr_1=\angle ZXBr_1$. Постройте эту точку. (*Свободны все вершины треугольника XYZ.*) **(Прове-**

дём через X прямую l_X, перпендикулярную XZ и найдём точку O_1 её пересечения с серединным перпендикуляром c к стороне XY. Аналогично построим точку O_2 пересечения прямой l_Y, проходящей через Y перпендикулярно XY, и серединного перпендикуляра a к стороне YZ. Точка Брокара Br_1 будет точкой пересечения окружностей с центрами O_1 и O_2 и радиусами O_1Y и O_2Y соответственно, что следует из свойств вписанных углов и углов между секущей и касательной. Точку Брокара можно построить и по-другому, например, воспользовавшись задачей 5.126 из §12 главы 5 книги В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии». Это построение можно осуществить с помощью параллельности и симметрии.)





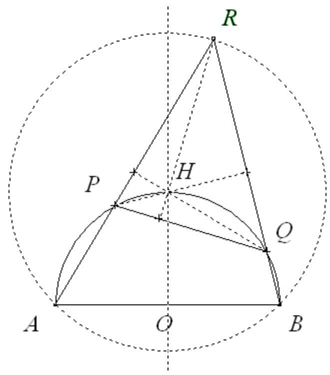
§12. Точки Брокара

5.126*. а) Докажите, что внутри треугольника ABC существует такая точка P, что $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$.

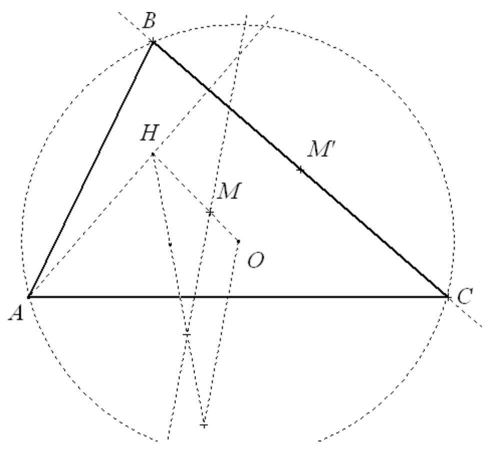
б) На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные ему треугольники CA_1B, CAB_1 и C_1AB (углы при первых вершинах всех четырех треугольников равны и т. д.). Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, причем эта точка совпадает с точкой задачи а).

Точку P называют *точкой Брокара* треугольника ABC. Аналогично доказывается, что существует еще и вторая точка Брокара Q, для которой $\angle BAQ = \angle ACQ = \angle CBQ$.

7. «Дана ***полуокружность*** с центром O и диаметром AB. На ней расположены точки P и Q ($AP < AQ$). Лучи AP и BQ пересекаются в точке R. Оказалось, что ортоцентр H треугольника PQR лежит на полуокружности.» (*Постройте чертёж, на котором точки A и B – свободны, точка R – частично свободна.*) **(Пусть $\angle PRQ = \alpha$. Тогда $\angle PHQ = \pi - \alpha$ (угол между прямыми QH и PH равен углу между перпендикулярными им прямыми AR и RB). Так как H лежит на полуокружности (очевидно, на меньшей дуге PQ), получаем, что $\angle PAQ = \alpha$. Значит, треугольник ARQ – прямоугольный равнобедренный с острым углом α, откуда $\alpha = \pi/4$. Значит, $\angle AQH = \pi/4$, $\angle AOH = 2\angle AQH = \pi/2$. Тогда H – середина дуги полуокружности, а точка R лежит на дуге окружности с центром в H и радиусом HA. *Нужные нам построения теперь очевидны.*)**



8. Постройте треугольник ABC по вершине A, ортоцентру H и центру описанной окружности O. (*Свободны точки A, H и O.*) **(Воспользуемся тем, что H и O лежат на прямой Эйлера вместе с точкой пересечения медиан M, которая делит отрезок HO в отношении HM:MO=2:1 (см., например, §4. «Четыре замечательные точки треугольника» на стр. 34-41 в книге Я.П.Понарина «Элементарная геометрия. Том 1.»). Разделим с помощью теоремы Фалеса отрезок HO на 3 части и отметим на нём точку M. Затем построим середину M' стороны BC с помощью гомотетии: $M' = H_A^{1,5}(M)$. Затем через точку M' проведём прямую, перпендикулярную прямой AH, и отметим на этой прямой точки B и C пересечения с окружностью с центром O и радиусом OA.)**



9. Постройте центр описанной окружности треугольника, воспользовавшись ровно девятью действиями, если при этом запрещено пользоваться операциями «окружность», «биссектриса», «серединный перпендикуляр», «перпендикулярность», «параллельность», «поворот», «осевая» и «центральная симметрия», «параллельный перенос» и стандартными многоугольниками. (*Свободны вершины треуголь-*

ника; показать весь алгоритм построения.) **(Сначала построим проекции H_1 и H_2 вершин A и B на противоположные стороны исходного треугольника ABC. Затем проведём прямые AH_1 и BH_2, отметим их точку пересечения H – ортоцентр треугольника. Последовательно отметим середины трёх отрезков: BC – точку A_1, AH – точку A_2, A_1A_2 – точку E, которая является центром окружности девяти точек. После этого отобразим H центрально симметрично относительно точки E (т.е. в условиях нашей задачи применим гомотетию с центром E и коэффициентом (-1)), что даст нам центр описанной окружности O. Построение следует из свойств окружности девяти точек: см., например, п. 6.1. на стр. 48 из книги Я.П.Понарина «Элементарная геометрия. Том 1.» про окружность девяти точек.)**

§6. *Окружность девяти точек треугольника*

6.1. Существование окружности девяти точек. Имеет место

Теорема. *В любом треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности с центром в середине E отрезка OH и радиусом $\frac{1}{2}R$.*

Доказательство 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, H_1, H_2, H_3 — основания соответствующих высот и A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH соответственно (рис. 38). Тогда четырехугольники $B_1C_1B_2C_2$ и $C_1A_1C_2A_2$ являются прямоугольниками. В самом деле, отрезки B_1C_1 и B_2C_2 как средние линии треугольников ABC и HBC параллельны BC и равны ее половине. Поэтому четырехугольник $B_1C_1B_2C_2$ — параллелограмм. Кроме того, в нем $B_1C_2 \parallel AH$, но $AH \perp BC$, поэтому $B_1C_2 \perp B_2C_2$. Для четырехугольника $C_1A_1C_2A_2$ доказательство аналогично. Эти прямоугольники имеют общую диагональ C_1C_2. Значит, их диагонали равны и пересекаются в одной точке E. Поэтому точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности с центром E. Так как из точек H_1, H_2, H_3 диаметры этой окружности видны под прямыми углами, то эти точки ей принадлежат. Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k=\frac{1}{2}$, вследствие чего радиус описанной около него окружности вдвое меньше радиуса R окружности ABC. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки E. Следовательно, их ортоцентры O и H симметричны относительно E (O — центр окружности ABC).

Доказательство 2. Примем во внимание, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника относительно его сторон и середин сторон, принадлежат описанной около треугольника окружности (задача 4.2). Зададим гомотетию с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этой гомотетии прообразами девяти точек, рассматриваемых в теореме, являются точки описанной окружности (рис. 39). Гомотетия отображает описанную около треугольника ABC окружность $(O; R)$ на окружность $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$, которой принадлежат все девять указанных в теореме точек. Поскольку $O \to E$, то E — середина OH.

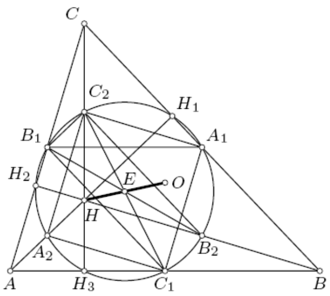


Рис. 38

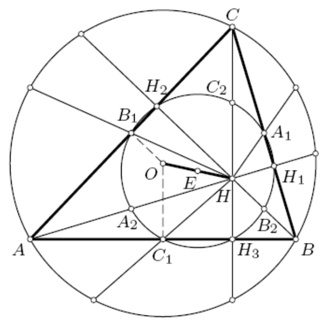


Рис. 39

Окружность $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$ называют *окружностью девяти точек* треугольника. «Эта окружность — первое волнующее, с чем мы встречаемся в курсе элементарной геометрии», — говорил Даниэль Пидо.

Итак, окружность девяти точек треугольника гомотетична его описанной окружности относительно ортоцентра этого треугольника. Окружность девяти точек треугольника ABC описана около его серединного треугольника $A_1B_1C_1$ и около его ортотреугольника $H_1H_2H_3$.

6.2. Теорема Фейербаха. В 1804 г. окружность девяти точек была уже известна. Иногда ее приписывают Л. Эйлеру, который в 1765 г. доказал, что серединный треугольник и ортотреугольник данного треугольника имеют общую описанную окружность. Карл Фейербах (1800—1834), немецкий математик, брат известного философа Людвига Фейербаха, частично переоткрыл результат Эйлера и в 1822 году

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек треугольника касается внутренне его вписанной окружности и касается внешне каждой из трех вневписанных окружностей.*

10. По двум пересекающимся прямым с равными скоростями движутся две точки A и B. Построить такую точку M плоскости, которая во все моменты времени равноудалена от A и B. (*Свободны обе прямые, частична свободна точка A на одной из прямых, стартовое положение точки B также должно меняться в зависимости от некоторой частично свободной точки C_B на второй прямой.*) **(Нужная нам точка M будет точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам A_1B_1 и A_2B_2, где A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно положения точек A и B в два разных момента времени. Треугольники A_1A_2M и B_1B_2M будут равны по трём сторонам – один треугольник получается из другого поворотом на угол AOB с центром М (см. задачу №144 из книги И.Ф.Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия.» (серия “Библиотечка «Квант»“, выпуск 17, с.39)). Нужные построения лучше всего делать с помощью проекции на прямую, параллельную первой, и симметрии относительно биссектрисы между этой новой прямой и второй прямой. *<u>Комментарий</u>: При построении с помощью параллельных переносов и окружностей могут возникнуть проблемы с движением точки В, которая будет менять направление движения. Заметим также, что нужная нам точка М является точкой пересечения построенной биссектрисы и описанной окружности треугольника АВО.*)**