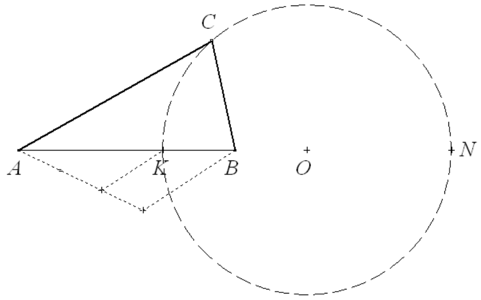
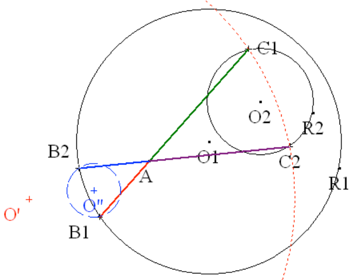
II Нижегородская компьютерно-рисуночная устная геометрическая олимпиада «КРУГ».
НФ ГУ ВШЭ. 11 мая 2010 года. Решения.

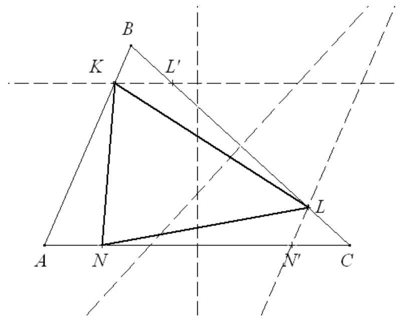
1. Постройте треугольник ABC, в котором $AC:BC=2:1$. (*Свободными являются точки A и B; точка C является частично свободной.*) **(Геометрическим местом точки C будет соответствующая для отношения 2:1 окружность Аполлония, которая является окружностью с диаметром KN, где K и N лежат на луче AB и $AK:BK=AN:BN=2:1$. Точка C не может совпадать с K и N.)**

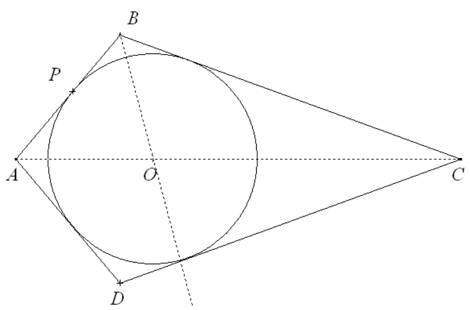




2. Даны две окружности, вторая лежит внутри первой. Через точку A, лежащую в области между окружностями, провести все возможные отрезки BC такие, что $BA:CA=1:2$, при этом точка B лежит на первой окружности, точка C – на второй окружности. (*Свободными являются точка A, центры и радиусы обеих окружностей.*) **(Применим с центром в точке A гомотетию с коэффициентом (-2) для первой окружности и с коэффициентом $(-1/2)$ для второй окружности. Точки пересечения одной исходной окружности и гомотетичного образа другой окружности дадут нам нужные положения для точек B и C. *Построение возможно не при каждом положении точки A.*)**

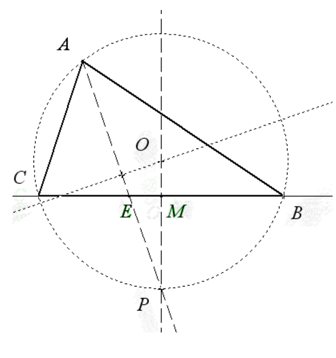
3. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отметьте соответственно точки K, L и N так, чтобы $AK/KB=BL/LC=CN/NA$. (*Свободными являются вершины треугольника, частично свободна точка K.*) **(Проведём через точку K прямую, параллельную AC, точку её пересечения со стороной BC назовём L'. Тогда по теореме Фалеса $AK/KB=CL'/L'B$. Отобразим точку L' симметрично относительно середины стороны BC, получим нужную нам точку L, т.к. $BL/LC= CL'/L'B=AK/KB$. Аналогично строится точка N на стороне CA.)**



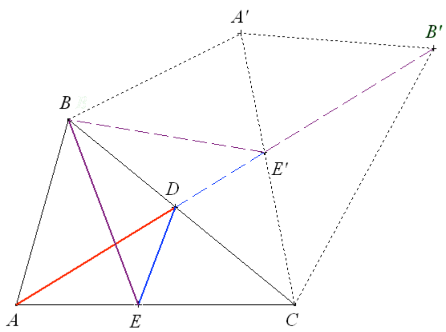


4. Постройте вписанную в дельтоид $ABCD$ ($AB=AD$, $CB=CD$) окружность. (*Свободными являются точки A, B и C.*) **(Центр вписанной окружности O лежит одновременно и на оси симметрии дельтоида – диагонали AC и на биссектрисе угла B. Затем построим проекцию P центра окружности O на одну из сторон дельтоида, потом проведём и саму окружность.)**

5. Восстановите треугольник ABC по трём точкам – вершине A, основаниям M и E медианы AM и биссектрисы AE соответственно. (*Свободными являются точки A, M и E.*) **(Продолжение биссектрисы AE за точку E пересекается с серединным перпендикуляром к стороне BC на середине дуги BC описанной около окружности треугольника. Поэтому строим луч AE и прямую, перпендикулярную прямой ME (она же прямая BC) и проходящую через точку M. Отмечаем их точку пересечения P, которая и будет серединой дуги BC. Затем строим серединный перпендикуляр к отрезку AP и отмечаем его точку пересечения O с прямой MP. Потом отмечаем точки пересечения (B и C) окружности с центром O и радиуса OA с прямой ME.)**

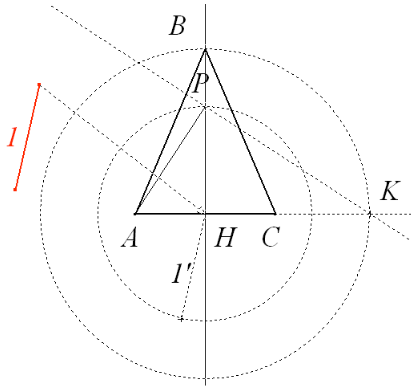


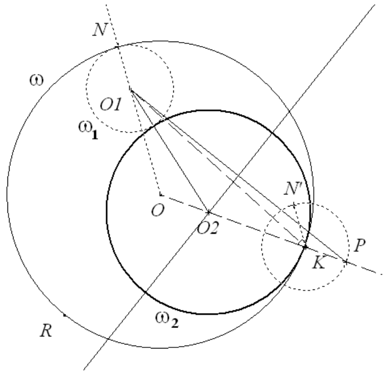
6. Постройте на сторонах BC и CA треугольника ABC такие точки D и E соответственно, что $\angle ADB=\angle EDC$ и $\angle DEC=\angle BEA$. (*Свободны все вершины треугольника ABC.*) **(Фактически речь идёт о луче света, идущем в треугольнике по законам отражения. Значит, построим треугольники $A'BC$ и $A'B'C$, равные ABC так, что A' симметрична A относительно BC, а B' симметрична B относительно $A'C$. Тогда в этих отражённых треугольниках луч света двигался по прямой AB'. Найдём точки D и E' пересечения отрезка AB' с BC и $A'C$ соответственно. Потом построим точку E, симметричную E' относительно BC. Из построения очевидным образом следует равенство нужных нам пар углов.)**



7. Постройте равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) единичной площади. (*Задать единицу масштаба отрезком, у которого оба конца свободны. Свободными являются также вершины A и C треугольника.*) **(В середину H отрезка AC параллельным переносом сдвинем единичный отрезок. После этого построим точку P – одну из точек пересечения единичной окружности с центром H и серединного перпендикуляра**

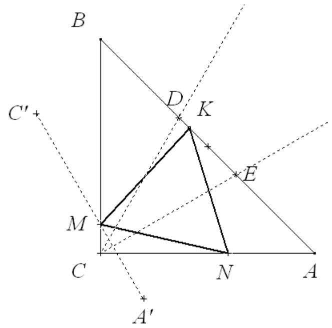
к отрезку AC. Отметим точку K пересечения прямой PK, перпендикулярной к AP, и луча AC. Затем отметим точку B – одну из точек пересечения серединного перпендикуляра к AC и окружности с центром H радиуса HK. Из построения и свойств высоты из прямого угла прямоугольного треугольника (она равна среднему геометрическому отрезков, на которые разбивает гипотенузу) следует, что площадь треугольника ABC равна $AH\cdot HB=AH\cdot HK=(HP)^2=1$.)

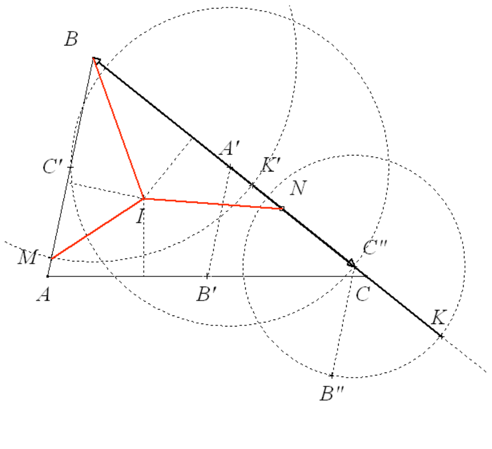




8. В окружности ω постройте касающиеся её изнутри и касающиеся между собой внешним образом две окружности ω_1 и ω_2. (*Свободными являются центр O и радиус R исходной окружности ω, свободен центр O_1 первой внутренней окружности ω_1 и частично свободна точка K касания второй (ω_2) и исходной окружностей.*) **(Строим точку N пересечения луча OO_1 и окружности ω. Затем в точку K параллельным переносом переводим окружность ω_1 и ищем точку P пересечения этой перенесённой окружности и луча OK, т.е. отрезок OP равен сумме радиусов окружностей ω и ω_1. Потом строим точку пересечения луча OK и серединного перпендикуляра к отрезку O_1P – она будет центром O_2 второй внутренней окружности.)**

9. Постройте равносторонний треугольник MNK, вписанный в равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. (*Свободными являются концы гипотенузы AB, частично свободна точка K на ней.*) **(Построим середину гипотенузы AB, затем поворотом на 90° относительно неё одного из концов гипотенузы построим вершину C прямого угла треугольника ABC. Отметим точку K на гипотенузе AB, причём точка K может лежать только между точками D и E на гипотенузе такими, что $\angle BCD=\angle DCE=\angle ECA=30°$, – это следует из условия задачи. Поворот на 60° по часовой стрелке (см. рис.) относительно точки K переводит катет AC в отрезок $A'C'$, точка пересечения которого с катетом BC будет второй вершиной M нужного треугольника. Третью вершину N построим поворотом точки M на угол 60° против часовой стрелки относительно точки K.)**





10. Постройте прямую, делящую пополам и площадь, и периметр треугольника. (*Свободными являются вершины треугольника ABC, требуемая прямая должна пересекать стороны BA и BC в точках M и N соответственно, причём BC – наибольшая сторона треугольника.*) **(Из формулы площади треугольника $S=r\cdot p$ следует, что точки M и N должны лежать на одной прямой с центром I вписанной окружности, т.к. сумма площадей треугольников BMI и BNI равна $r\cdot(BM+BN)/2=r\cdot p/2=S/2$ (см. рис. слева). Значит, нам надо провести прямую через центр описанной окружности так, чтобы она делила его периметр пополам. Сначала построим на луче BC точку K так, что $BK=p$. Это можно сделать с помощью параллельных переносов, окружностей и средних линий треугольника (все построения см. на рис.слева). Заметим теперь, что существует поворот, переводящий отрезок MB в NK. Центр T этого поворота должен лежать одновременно на серединном перпендикуляре к BK (т.к. $BT=KT$) и биссектрисе угла B (т.к. угол поворота $\angle BTK$ равен углу $180°-\angle ABC$ между лучами AB и BC). Строим образ I' точки I при нужном нам повороте – точка I лежит на отрезке TK, причём $TI'=TI$. Т.к. прямая NI' является образом прямой MI при повороте, то угол INI' дополняет угол поворота ITI' до 180°, т.е. $NITI'$ – вписанный четырёхугольник. Значит, точка N является точкой пересечения описанной около $\Delta ITI'$ окружности и стороны BC (из двух точек пересечения выбираем ближнюю к точке C.) Точку M на стороне BA получаем как точку пересечения с прямой NI. Все последние приведённые построения см. на рис. справа.)**