МЕТОД СПУСКА.

1. Дана таблица n×n, в каждой клетке записано число, причем все числа в таблице различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.
2. Доказать, что в графе-дереве В–Р=1.
3. Доказать, что ребра графа-дерева можно так раскрасить в белый и черный цвета, чтобы в каждой вершине разность между числом белых и черных ребер по модулю не превосходила 1.
4. На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри него, так что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?
5. В таблицу из 3 строк и n столбцов расставлено произвольным образом n белых, n черных и n красных чисел. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, что в каждом столбце будут стоять фишки всех трех цветов.
6. На кольцевой автотрассе стоит несколько машин, в баках которых в сумме находится количество бензина, достаточное для того, чтобы объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин может объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.
7. Есть набор гирек массами 1г, 2г, 3г,..., 50 г и чашечные весы. Двое играющих по очереди перекладывают на весы по одной гирьке из набора, каждый на свою чашу. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Кто из игроков может гарантировать себе победу независимо от игры противника?
8. Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$ не меньше na_1.
9. Даны натуральные числа a_1, a_2, …, a_n такие, что $a_k\le k$ ($k=1, 2, \ldots, n$) и их сумма равна чётному числу. Докажите, что одно из выражений $a_1\pm a_2\pm a_3\pm \ldots\pm a_n$ равно нулю.
10. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг. Доказать, что можно выделить такие четыре команды А, В, С и Д, что А выиграла у В, С и Д; В выиграла у С и Д; а С выиграла у Д.
11. Есть 28 заготовок для детского домино. У каждой заготовки одну половинку наугад раскрасили в какой-нибудь цвет, использовав всего не более семи цветов. Докажите, что можно раскрасить оставшиеся половинки так, чтобы домино можно было разложить на 7 кучек, по 4 одинаково раскрашенных домино в каждой.
12. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причем каждый оказался не на своем месте. Билетер может поменять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Верно ли, что при любой начальной рассадке билетер может действовать так, чтобы все расселись по своим местам?
13. На большой шахматной доске отметили 2n клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные. Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разрезать на n прямоугольников.

БЕСКОНЕЧНЫЙ СПУСК.

14. Докажите, что число $\sqrt{2}$ – иррациональное.
15. Решить в натуральных числах уравнение $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$.
16. Докажите неразрешимость в натуральных числах уравнения $x^2+y^2+z^2+u^2=2xyzu$.
17. Найдите все решения в натуральных числах уравнения $x^2-2y^2=1$.
18. Имеется $2n+1$ гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые $2n$ из них можно так разложить на чашки весов, по n на каждую, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют одинаковый вес.
19. Дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Докажите, что хотя бы один из перпендикуляров к плоскостям граней, проведённых через эту точку, пересекается с соответствующей гранью. Верен ли этот факт для невыпуклого многогранника?
20. Можно ли куб разрезать на несколько различных кубиков?
21. Докажите, что при $n\ne4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах клетчатой решётки.

Для самостоятельного решения.

1. Докажите, что основание и боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при вершине 36° несоизмеримы.
2. Докажите, что число 7 нельзя представить в виде суммы квадратов трёх рациональных чисел.
3. Решите в целых числах уравнения: а). $x^3-3y^3-9z^3=0$; б). $5x^3+11y^3+13z^3=0$.
4. Докажите, что уравнения а). $x^2+y^2+z^2=2xyz$; б). $x^4+y^4=z^4$ не имеют решений в натуральных числах.
5. Решите в натуральных числах уравнения: а). $x^2+(x+1)^2=y^2+1$; б). $3x^2-7y^2+1=0$; в). $(x+1)^3-x^3=y^2$.
6. Докажите, что никакое число вида $4^n(8k-1)$, где k и n – натуральные числа, не является полным квадратом и не представимо в виде суммы двух или трёх квадратов целых чисел.
7. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – набор попарно различных натуральных чисел ($n>2$). Из него получается новый набор средних арифметических $(a_1+a_2)/2$, $(a_2+a_3)/2$, …, $(a_{n-1}+a_n)/2$, $(a_n+a_1)/2$; из него – следующий, по тому же правилу, и так далее. Докажите, что через несколько шагов обязательно получится набор, в котором не все числа будут целыми.
8. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n}$ – произвольный набор натуральных чисел. Докажите, что если образовать из него новый набор $b_1, b_2, \ldots, b_{2^n}$ по правилу $b_k=|a_{k+1}-a_k|$, где $k=1, 2, \ldots, 2^n$ и $a_{2^n+1}=a_1$, затем из набора $b_1, b_2, \ldots, b_{2^n}$ по тому же правилу образовать новый набор, и так далее, то через несколько шагов мы придём к набору, состоящему только из нулей.

1. Дана таблица n×n, в каждой клетке записано число, причем все числа в таблице различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.
2. Доказать, что в графе-дереве В–Р=1.
3. Доказать, что ребра графа-дерева можно так раскрасить в белый и черный цвета, чтобы в каждой вершине разность между числом белых и черных ребер по модулю не превосходила 1.
4. На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри него, так что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?
5. В таблицу из 3 строк и n столбцов расставлено произвольным образом n белых, n черных и n красных чисел. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, что в каждом столбце будут стоять фишки всех трех цветов.
6. На кольцевой автотрассе стоит несколько машин, в баках которых в сумме находится количество бензина, достаточное для того, чтобы объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин может объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.
7. Есть набор гирек массами 1г, 2г, 3г,..., 50 г и чашечные весы. Двое играющих по очереди перекладывают на весы по одной гирьке из набора, каждый на свою чашу. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Кто из игроков может гарантировать себе победу независимо от игры противника?
8. Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$ не меньше na_1.
9. Даны натуральные числа a_1, a_2, …, a_n такие, что $a_k \le k$ (k=1, 2, …, n) и их сумма равна чётному числу. Докажите, что одно из выражений $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$ равно нулю.
10. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг. Доказать, что можно выделить такие четыре команды А, В, С и Д, что А выиграла у В, С и Д; В выиграла у С и Д; а С выиграла у Д.
11. Есть 28 заготовок для детского домино. У каждой заготовки одну половинку наугад раскрасили в какой-нибудь цвет, использовав всего не более семи цветов. Докажите, что можно раскрасить оставшиеся половинки так, чтобы домино можно было разложить на 7 кучек, по 4 одинаково раскрашенных домино в каждой.
12. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причем каждый оказался не на своем месте. Билетер может поменять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Верно ли, что при любой начальной рассадке билетер может действовать так, чтобы все расселись по своим местам?
13. На большой шахматной доске отметили 2n клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные. Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разрезать на n прямоугольников.

1. Дана таблица n×n, в каждой клетке записано число, причем все числа в таблице различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.
2. Доказать, что в графе-дереве В–Р=1.
3. Доказать, что ребра графа-дерева можно так раскрасить в белый и черный цвета, чтобы в каждой вершине разность между числом белых и черных ребер по модулю не превосходила 1.
4. На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри него, так что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?
5. В таблицу из 3 строк и n столбцов расставлено произвольным образом n белых, n черных и n красных чисел. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, что в каждом столбце будут стоять фишки всех трех цветов.
6. На кольцевой автотрассе стоит несколько машин, в баках которых в сумме находится количество бензина, достаточное для того, чтобы объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин может объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.
7. Есть набор гирек массами 1г, 2г, 3г,..., 50 г и чашечные весы. Двое играющих по очереди перекладывают на весы по одной гирьке из набора, каждый на свою чашу. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Кто из игроков может гарантировать себе победу независимо от игры противника?
8. Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$ не меньше na_1.
9. Даны натуральные числа a_1, a_2, …, a_n такие, что $a_k \le k$ (k=1, 2, …, n) и их сумма равна чётному числу. Докажите, что одно из выражений $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$ равно нулю.
10. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг. Доказать, что можно выделить такие четыре команды А, В, С и Д, что А выиграла у В, С и Д; В выиграла у С и Д; а С выиграла у Д.
11. Есть 28 заготовок для детского домино. У каждой заготовки одну половинку наугад раскрасили в какой-нибудь цвет, использовав всего не более семи цветов. Докажите, что можно раскрасить оставшиеся половинки так, чтобы домино можно было разложить на 7 кучек, по 4 одинаково раскрашенных домино в каждой.
12. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причем каждый оказался не на своем месте. Билетер может поменять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Верно ли, что при любой начальной рассадке билетер может действовать так, чтобы все расселись по своим местам?
13. На большой шахматной доске отметили 2n клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные. Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разрезать на n прямоугольников.

БЕСКОНЕЧНЫЙ СПУСК. *Для самостоятельного решения.*

1. Докажите, что основание и боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при вершине 36° несоизмеримы.
2. Докажите, что число 7 нельзя представить в виде суммы квадратов трёх рациональных чисел.
3. Решите в целых числах уравнения: а). $x^3-3y^3-9z^3=0$; б). $5x^3+11y^3+13z^3=0$.
4. Докажите, что уравнения а). $x^2+y^2+z^2=2xyz$; б). $x^4+y^4=z^4$ не имеют решений в натуральных числах.
5. Решите в натуральных числах уравнения: а). $x^2+(x+1)^2=y^2+1$; б). $3x^2-7y^2+1=0$; в). $(x+1)^3-x^3=y^2$.
6. Докажите, что никакое число вида $4^n(8k-1)$, где k и n – натуральные числа, не является полным квадратом и не представимо в виде суммы двух или трёх квадратов целых чисел.
7. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – набор попарно различных натуральных чисел ($n>2$). Из него получается новый набор средних арифметических $(a_1+a_2)/2$, $(a_2+a_3)/2$, …, $(a_{n-1}+a_n)/2$, $(a_n+a_1)/2$; из него – следующий, по тому же правилу, и так далее. Докажите, что через несколько шагов обязательно получится набор, в котором не все числа будут целыми.
8. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2^n}$ – произвольный набор натуральных чисел. Докажите, что если образовать из него новый набор $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$ по правилу $b_k=|a_{k+1}-a_k|$, где $k=1, 2, \dots, 2^n$ и $a_{2^n+1}=a_1$, затем из набора $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$ по тому же правилу образовать новый набор, и так далее, то через несколько шагов мы придём к набору, состоящему только из нулей.

БЕСКОНЕЧНЫЙ СПУСК. *Для самостоятельного решения.*

1. Докажите, что основание и боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при вершине 36° несоизмеримы.
2. Докажите, что число 7 нельзя представить в виде суммы квадратов трёх рациональных чисел.
3. Решите в целых числах уравнения: а). $x^3-3y^3-9z^3=0$; б). $5x^3+11y^3+13z^3=0$.
4. Докажите, что уравнения а). $x^2+y^2+z^2=2xyz$; б). $x^4+y^4=z^4$ не имеют решений в натуральных числах.
5. Решите в натуральных числах уравнения: а). $x^2+(x+1)^2=y^2+1$; б). $3x^2-7y^2+1=0$; в). $(x+1)^3-x^3=y^2$.
6. Докажите, что никакое число вида $4^n(8k-1)$, где k и n – натуральные числа, не является полным квадратом и не представимо в виде суммы двух или трёх квадратов целых чисел.
7. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – набор попарно различных натуральных чисел ($n>2$). Из него получается новый набор средних арифметических $(a_1+a_2)/2$, $(a_2+a_3)/2$, …, $(a_{n-1}+a_n)/2$, $(a_n+a_1)/2$; из него – следующий, по тому же правилу, и так далее. Докажите, что через несколько шагов обязательно получится набор, в котором не все числа будут целыми.
8. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2^n}$ – произвольный набор натуральных чисел. Докажите, что если образовать из него новый набор $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$ по правилу $b_k=|a_{k+1}-a_k|$, где $k=1, 2, \dots, 2^n$ и $a_{2^n+1}=a_1$, затем из набора $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$ по тому же правилу образовать новый набор, и так далее, то через несколько шагов мы придём к набору, состоящему только из нулей.

БЕСКОНЕЧНЫЙ СПУСК. *Для самостоятельного решения.*

1. Докажите, что основание и боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при вершине 36° несоизмеримы.
2. Докажите, что число 7 нельзя представить в виде суммы квадратов трёх рациональных чисел.
3. Решите в целых числах уравнения: а). $x^3-3y^3-9z^3=0$; б). $5x^3+11y^3+13z^3=0$.
4. Докажите, что уравнения а). $x^2+y^2+z^2=2xyz$; б). $x^4+y^4=z^4$ не имеют решений в натуральных числах.
5. Решите в натуральных числах уравнения: а). $x^2+(x+1)^2=y^2+1$; б). $3x^2-7y^2+1=0$; в). $(x+1)^3-x^3=y^2$.
6. Докажите, что никакое число вида $4^n(8k-1)$, где k и n – натуральные числа, не является полным квадратом и не представимо в виде суммы двух или трёх квадратов целых чисел.
7. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – набор попарно различных натуральных чисел ($n>2$). Из него получается новый набор средних арифметических $(a_1+a_2)/2$, $(a_2+a_3)/2$, …, $(a_{n-1}+a_n)/2$, $(a_n+a_1)/2$; из него – следующий, по тому же правилу, и так далее. Докажите, что через несколько шагов обязательно получится набор, в котором не все числа будут целыми.
8. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2^n}$ – произвольный набор натуральных чисел. Докажите, что если образовать из него новый набор $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$ по правилу $b_k=|a_{k+1}-a_k|$, где $k=1, 2, \dots, 2^n$ и $a_{2^n+1}=a_1$, затем из набора $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$ по тому же правилу образовать новый набор, и так далее, то через несколько шагов мы придём к набору, состоящему только из нулей.