ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ.

1. Доказать, что полный комплект домино можно выложить по правилам домино.
2. *«Лемма о хороводах»*. В некоторой компании каждый человек имеет ровно двух друзей. Докажите, что если все друзья возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов.
3. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён ровно с десятью городами (авиалиния действует в обе стороны). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так что возможность попасть из любого города в любой сохранится.
4. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.
5. В стране из каждого города выходит по 3 железные дороги. Две компании хотят их все приватизировать. Антимонопольный комитет требует, чтобы из каждого города выходили дороги обеих компаний. Доказать, что компании могут договориться между собой, чтобы требование Антимонопольного комитета было выполнено.
6. Дан связный граф G с k рёбрами. Доказать, что можно занумеровать рёбра всеми числами $1, 2, \dots, k$ так, что для каждой вершины степени не меньшей двух, набор чисел, которыми помечены рёбра из этой вершины, имеет НОД, равный 1.
7. В турнире по футболу, проведённому среди 20 команд из разных городов, каждая команда провела одну встречу дома и не более двух встреч на выезде. Докажите, что можно было составить расписание игр так, чтобы каждая команда играла не более одной игры в день и весь турнир прошёл бы за три дня.
8. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более: а). 198 перелётов; б). 196 перелётов.

ГАМИЛЬТОНОВ ГРАФ.

9. На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают со всеми вершинами куба. Какое наименьшее число звеньев этой ломаной может совпадать с ребрами куба?
10. Из восьми маленьких кубиков сложен куб. Можно ли, выйдя из центра большого куба и двигаясь по рёбрам маленьких кубиков, обойти все вершины маленьких кубиков, побывав в каждой ровно один раз?
11. Дана доска 5×5. Может ли конь обойти все клетки, побывав на каждой по одному разу и вернуться в исходное положение?
12. Можно ли обойти хромым королем (король не может ходить по диагоналям) все клетки шахматной доски, начав в левом нижнем углу и закончив в правом верхнем углу?
13. Может ли конь сделать 8 ходов и вернуться в исходную клетку, побывав при этом на всех горизонталях и вертикалях шахматной доски?
14. а). На две клетки шахматной доски выставляются черная и белая фишки. Разрешается по очереди передвигать их, каждым ходом сдвигая очередную фишку на любое свободное соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли на доске в результате таких ходов встретиться все возможные позиции расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу? б). А если разрешается сдвигать фишки в любом порядке (не обязательно по очереди)?

Какой из следующих трёх фактов самый «сильный»?

15. В некотором государстве каждые 2 города соединены дорогой. На каждой дороге разрешено движение только в одну сторону. Докажите, что найдётся город, выехав из которого можно объехать всё государство, побывав в каждом городе ровно 1 раз.
16. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.
17. В некотором государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

Докажите самый «сильный» факт и оба следствия из него.

18. В однокруговом шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым по одной партии. Докажите, что участников можно так занумеровать, что ни один не проиграл непосредственно следующему за ним по номеру.
19. В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнёт путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза. *(Всероссийская олимпиада, 2003г.)*
20. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с 5 нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.
21. *«Рыцари при дворе короля Артура» - теорема Дирака.* За круглым столом у короля Артура собрались $2n$ рыцарей, у каждого из которых не более $(n-1)$ врага среди остальных. Доказать, что советник короля Мерлин может так рассадить рыцарей, что враги рядом не сядут. ***Сформулируйте теорему Дирака в общем виде.***
22. На конференцию приехало $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n остальными. Докажите, что участников можно так расселить в двухместные номера, чтобы в каждом номере жили знакомые друг с другом люди.
23. Дано n фишек нескольких цветов, причём фишек каждого цвета не более $n/2$. Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.
24. В федеративном государстве, состоящем из двух республик, каждые два города соединены дорогой с односторонним движением; при этом, двигаясь по дорогам, можно из любого города попасть в любой другой. Туристическое агентство «Гамильтон» предлагает n различных туристических маршрутов по городам первой республики и m – по городам второй (любой из этих маршрутов предполагает посещение каждого города республики ровно по одному разу и возвращение в исходный город, причем всё это – не выезжая за пределы республики). Докажите, что агентство «Гамильтон» могло бы предложить любознательным туристам не менее mn аналогичных туристических маршрутов по городам всей федерации.

Турниры – полные графы.

25. В классе 28 учеников. Учитель может пересаживать учеников, но каждый школьник в течение учебного дня сидит с одним и тем же учеником. За какое наименьшее число дней каждый ученик сумеет посидеть с каждым?
26. Сумма 1000 действительных чисел равна 0. Доказать, что по крайней мере 999 попарных сумм из этих чисел будут неотрицательными.
27. В куче лежат 25 камней. Её делят на две части, затем одну из частей опять делят надвое и т.д., до тех пор, пока не получат 25 отдельно лежащих камней. При каждом делении одной из куч на две части на доску записывается произведение количеств камней в этих частях. Докажите, что в конце сумма всех чисел на доске будет равна 300.

28. В школе учатся 1996 ребят. Каждому из них нравятся ровно k из остальных 1995 учащихся. При каких значениях k можно утверждать, что обязательно найдутся два ученика этой школы, которые или оба нравятся друг другу, или оба не нравятся друг другу?
29. Астроном наблюдает 50 звёзд, сумма попарных расстояний между которыми равна S. Набежало облако и заслонило 25 звёзд. Докажите, что сумма попарных расстояний между видимыми звёздами меньше, чем S/2.
30. В доску вбиты 1997 гвоздей. Двое по очереди делают ходы. Ход состоит в том, что играющий соединяет проводом какие-либо два гвоздя, не соединенных ранее. Проигрывает тот, после хода которого впервые становится возможным добраться по проводам от любого гвоздя до любого другого. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер?
31. В стране, где 25 городов, три авиакомпании хотят, чтобы для любой пары городов все беспосадочные авиарейсы между этими городами осуществлялись только одной из авиакомпаний, однако любая авиакомпания могла доставлять пассажиров из любого города в любой другой с посадкой не более, чем в одном промежуточном городе. Докажите, что это осуществимо.
32. Комиссия состоит из 49 человек. В каждом заседании участвуют ровно три члена комиссии. Можно ли составить расписание работы комиссии так, чтобы любые два члена комиссии встретились на заседаниях ровно один раз?

МИНИМАЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ.

33. В городе N с любой станции метро можно проехать на любую другую (возможно, с пересадками). Докажите, что одну из станций метро можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.
34. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.
35. На планете 1000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 21 дороги. Докажите, что на планете не больше 90 столиц.
36. Доказать, что граф – двудольный тогда и только тогда, когда все циклы в нём – чётные.
37. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека всё ещё не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.
38. В некоторой стране 30 городов, причём каждый город соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый, возможно, проезжая через другие города?
39. Из проволоки сделана модель одиннадцатиугольника, из одной вершины которого проведены все диагонали. Двое по очереди перекусывают по одной проволочке. Выигрывает тот, после хода которого модель впервые распадается на две части. Кто выигрывает при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер?
40. Первоначально на каждом поле доски 1×n стоит шашка. Первым ходом разрешается переставить любую шашку на соседнюю клетку (одну из двух, если шашка не с краю), так что образуется столбик из двух шашек. Далее очередным ходом каждый столбик можно передвинуть в любую сторону на столько клеток, сколько в нем шашек (в пределах доски); если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Докажите, что за n-1 ход можно собрать все шашки на одной клетке.
41. Есть 101 банка консервов массами 1001 г, 1002 г, ..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний. Есть двое чашечных весов: одни точные, другие — грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые — только если разница больше 1г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?
42. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число единичных верёвочек (между узелками) можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
43. Есть веревочная сетка в виде квадрата 8×8, разбитого на ячейки 1×1. Какую самую длинную веревку можно из нее вырезать? (От узлов можно отрезать любой конец не нарушая соединения остальных, но нельзя разрезать узел так, чтобы концов не образовалось).
44. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние по стороне клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?
45. Назовем лабиринтом шахматную доску 8x8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе - плохим. Каких лабиринтов больше - хороших или плохих?
46. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более: а). 198 перелётов; б). 196 перелётов.
47. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются пешки по следующим правилам: выбираются любые четыре пустые клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставится пешка. Затем выбираются аналогичные четыре пустые клетки, на одну из них снова ставится пешка, и так далее. Какое наибольшее число пешек можно расставить на доске, соблюдая эти правила?
48. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p, либо q человек. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну между гостями, если: а). p и q взаимно просты; б). p и q имеют наибольший общий делитель d?
49. Секретный объект представляет собой в плане квадрат 8×8, разбитый коридорами на квадратики 1×1. В каждой вершине такого квадратика – выключатель. Щелчок выключателя действует сразу на все выходящие из этой вершины метровые коридоры, меняя их освещенности на противоположные. Сторож находится в углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать выключателями любое число раз. Может ли сторож добиться того, чтобы от любого выключателя к любому другому он мог пройти, не щелкая выключателями?
50. В связном графе $2n$ вершин, причем все они степени 3. Докажите, что можно так выбрать $n+1$ ребро, чтобы правильная раскраска в 3 цвета выбранных ребер однозначно задавала правильную раскраску в 3 цвета всех ребер графа (раскраска правильная, если два ребра с общей вершиной имеют разные цвета).

ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ.

51. Доказать, что граф – двудольный тогда и только тогда, когда все циклы в нём – чётные.
52. Доказать, что дерево (связный граф без циклов) – двудольный граф.
53. В некоторой группе людей у каждого есть один враг и один друг. Докажите, что этих людей можно разбить на две компании так, что в каждой компании не будет ни врагов, ни друзей.
54. В чемпионате России по футболу играют 16 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 8 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

55. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов. Всегда ли можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные – в красный так, чтобы на каждой линии сетки разность между числом белых и красных узлов по модулю не превосходила 1?
56. На плоскости даны 1997 точек. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причем один отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?
57. На окружности взяли 10 точек. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы никакие три из этих отрезков не образовывали треугольник с вершинами в этих точках?
58. В деревне Мартышкино у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди её знакомых мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Мартышкино мальчиков живёт не меньше, чем девочек.
59. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить её на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более, чем N ударов.
60. В компании из 2n+1 человек для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

ПЛОСКИЕ ГРАФЫ.

61. На плоскости дано 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то четыре из них лежат в вершинах выпуклого четырёхугольника.
62. На плоскости даны 5 кругов, каждые два из которых пересекаются. Докажите, что какие-то три из них имеют общую точку.
63. На плоскости дано 6 точек (по 3 синих и красных), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что некоторые 2 синие и 2 красные точки лежат в вершинах выпуклого четырёхугольника.
64. На клетчатом поле лежит полный комплект домино (каждая доминошка занимает 2 клетки). Назовем *областью* множество клеток, на которые попали одинаковые цифры доминошек. Область назовем *связной*, если из любой её клетки хромая ладья может попасть в любую другую. Какое наибольшее число связных областей может быть на поле?

ЧАСТИЧНАЯ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ.

65. В классе 12 девочек и 12 мальчиков, все – разного роста. На уроке физкультуры их построили в две шеренги (одна – позади другой): мальчиков – по росту слева направо, а девочек – по росту справа налево. Затем из каждой пары мальчик-девочка вызвали более высокого. Докажите, что вызвали двенадцать самых высоких учеников.
66. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.
67. Из целых чисел от 1 до 100 выбрали несколько различных чисел. Назовем показателем делимости данного числа количество выбранных чисел, на которые данное число делится нацело. Оказалось, что все выбранные числа имеют различные показатели делимости. Какое наибольшее количество чисел могло быть выбрано?
68. Доказать, что из 17 различных натуральных чисел либо найдутся 5 таких чисел a, b, c, d, e, что каждое из чисел этой пятёрки, кроме последнего, делится на число, стоящее за ним, либо найдутся пять таких чисел, что ни одно из них не делится на другое.
69. Числа 1, 2, 3, …, 101 расположены в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из этого ряда всегда можно вычеркнуть 90 чисел так, что оставшиеся 11 расположены в порядке возрастания или убывания.

АЛГОРИТМЫ.

70. Доказать, что в остовном дереве вершины можно раскрасить в шахматном порядке.
71. В группе людей каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.
72. В посёлке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводами. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку – лжецу или рыцарю – так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» – ответил положительно. (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или нет).
73. Доказать, что в вершинах многогранника можно расставить натуральные числа так, что в каждых двух вершинах, соединённых ребром, стоят числа не взаимно-простые, а в каждых двух вершинах, не соединённых ребром, – взаимно-простые.
74. В *Port Aventura* было заброшено 16 секретных агентов. Каждый из них следит за некоторыми из своих коллег. Известно, что если агент A следит за агентом B, то агент B не следит за агентом A. Любые 10 агентов могут быть перенумерованы таким образом, что первый следит за вторым, второй – за третьим, …, десятый – за первым. Докажите, что таким же образом можно занумеровать некоторых 11 агентов.
75. При каких n можно раскрасить все рёбра n-угольной призмы (основания – n-угольники) в три цвета так, чтобы в каждой вершине сходились рёбра всех трёх цветов и у каждой грани (включая основания) были рёбра всех трёх цветов?
76. а). Докажите, что вершины 3n-угольной призмы можно раскрасить тремя красками так, чтобы каждая вершина была связана ребрами с вершинами всех трех цветов. б). Докажите, что если вершины n-угольной призмы можно раскрасить тремя красками так, чтобы каждая вершина была связана ребрами с вершинами всех трех цветов, то n делится нацело на 3.

«АНТИГРАФ».

77. В компании из 2n+1 человек для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

ГРАФЫ И МНОГОЧЛЕНЫ.

78. Даны натуральное число k и многочлены $R(x)$ и $S(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что при любом целом x число $R(S(x)) - x$ делится на k. Докажите, что число $S(R(x)) - x$ тоже делится на k при любом целом x.
79. Существуют ли четыре многочлена, такие, что сумма любых трёх из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней?

ЦИКЛИЧНОСТЬ.

80. В Цветочном городе живут 2000 коротышек. Каждый коротышка каждый день дарит подарок каждому своему другу. Во избежание разорения дареное разрешается дарить дальше, но только не тому, кто тебе этот подарок подарил. Знайка подсчитал, что никакой из подарков, подаренных им в пятницу, не может к нему вернуться раньше чем в следующую пятницу. Докажите, что у какого-то коротышки не более 13 друзей.

81. В государстве 100 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем есть не менее четырех циклических маршрутов. Докажите, что есть циклический маршрут, проходящий не более, чем через 51 город.
82. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем всего есть 200 дорог. Оказалось, что любой циклический маршрут имеет длину не менее пяти. Докажите, что существуют два непересекающихся циклических маршрута.
83. В здании Московского университета очень много лифтов, причём каждый лифт перевозит пассажиров лишь между какими-то двумя этажами (зато на каждом этаже можно пройти к любому лифту, который на нём останавливается). Известно, что с любого этажа можно проехать на любой другой, воспользовавшись чётным числом лифтов, и не проходя ни по какому этажу дважды. Докажите, что при желании то же самое можно сделать, воспользовавшись нечётным числом лифтов.
84. В стране Оз имеется несколько замков, из каждого из которых ведут три пути. Странствующий рыцарь выехал из своего родового замка и пустился в путешествие по стране. Рыцарь любит разнообразие, поэтому, доезжая до очередного замка, он каждый раз поворачивает налево, если в предыдущий раз повернул направо, и поворачивает направо, если до этого он повернул налево. (Проезжая первый на своем пути замок, рыцарь может повернуть в любую сторону). Докажите, что когда-нибудь рыцарь вернется в свой замок.
85. На бесконечной ленте напечатана бесконечная последовательность цифр от 1 до 9. Докажите, что либо какая-то комбинация цифр повторится 10 раз подряд, либо из нее можно вырезать 10 стозначных чисел идущих в порядке убывания.

ТЕОРЕМА О ЧЁТНОСТИ ЧИСЛА НЕЧЁТНЫХ ВЕРШИН.

86. Вершины выпуклого многогранника, все грани которого треугольники, покрасили в три цвета. Докажите, что число граней, все три вершины которых разноцветные, – чётно.

Количество рёбер.

87. На белом листе клетчатой бумаги нарисовали квадрат размером 12×12. Две клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона. Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую закрашенную клетку число ранее закрашенных ее соседей. Чему будет равна сумма всех чисел, когда будут закрашены все клетки?
88. Окрасили бесконечный лист клетчатой бумаги, кроме квадрата 7×7. Вася в этом квадрате покрасил клетку, у которой ровно одна соседняя (по стороне) клетка окрашена, затем еще одну клетку, у которой теперь ровно одна соседняя клетка окрашена, и так далее. Какое наибольшее количество клеток может покрасить таким образом Вася?
89. При каких $n>1$ может случиться так, что в компании из $n+1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек?

СМЕСЬ.

90. На некотором собрании присутствовало n человек. Известно, что каждые два знакомых из них не имеют никаких общих знакомых, а каждые два незнакомых между собой лица имеют ровно двух общих знакомых. а). Доказать, что все присутствующие имеют одно и то же число знакомых. б). При каких n возможно условие задачи?
91. В городе «Многообразие» живут 10000 жителей, каждые два из которых либо враждуют, либо дружат между собой. Каждый день не более чем один житель города может «начать новую жизнь», т.е. пересcориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами; при этом любые три жителя могут подружиться между собой. Доказать, что все без исключения жители могут подружиться между собой. Какого наименьшего числа дней наверняка достаточно для этого?
92. k и n – натуральные числа, большие 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k-1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k+1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.
93. На плоскости отмечены 100 точек. Играют двое, ходят по очереди. За один ход можно соединить стрелкой две точки, если их не соединяли раньше. При этом запрещается проводить стрелку, после появления которой из любой точки можно будет добраться по стрелкам до любой другой. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер?
94. В Однобоком графстве между некоторыми (но, к сожалению, еще не между всеми) усадьбами проложены дороги с односторонним движением. При этом при появлении любой новой дороги (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединенными дорогой до этого, оказывается, что от любой усадьбы до любой другой можно добраться, не нарушая правил. Докажите, что такая возможность имеется уже сейчас.
95. Встретились несколько друзей. Каждый из них обменялся рукопожатием с каждым, кроме Федота Бурчеева, который, будучи не в духе, некоторым пожал руку, а некоторым – нет. Всего было сделано 197 рукопожатий. Сколько рукопожатий сделал Федот?
96. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы попрежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.
97. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 5 разных видов, причем количество ключей разных видов различно. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах, так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев имеет дубликат ключа от одной из комнат. Докажите, что он может открыть все комнаты.
98. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 4 разных видов. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев знает, где какой ключ лежит. Докажите, что сторож Сергеев может сделать дубликаты ключей двух кабинетов, с помощью которых можно открыть все комнаты.
99. На кошачьей выставке в ряд сидели 19 кошек и 10 котов, причем рядом с каждой кошкой сидел кот, который был толще, чем она. Докажите, что рядом с каждым котом сидела кошка, которая была тоньше, чем он.
100. Квадратный материк разделен на 19 стран в форме выпуклых многоугольников, причем нет точек, в которых сходились бы границы четырех или больше стран. Из всяких же трех границ, сходящихся в одной точке, одна закрыта, а две открыты для проезда. Докажите, что невозможно объехать все эти страны, побывав в каждой по одному разу и вернуться в исходную страну.
101. В стране Фалкерсонии некоторые города соединены авиалиниями, причем из города А в город В нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из А в В будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.
102. Каждый ученик класса занимается в двух кружках, и для каждых трех учеников есть кружок, в который они ходят вместе. Докажите, что имеется кружок, в котором занимаются все ученики.
103. **.** Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую он мог влезть (то есть не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей не смогло надеть галоши?
104. В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас знаком с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше - карабасов или барабасов?

105. В группе из 100 людей среди любых трех есть человек, знакомый с обоими другими. Докажите, что из этой группы можно выбрать компанию из 50 человек, в которой все знакомы друг с другом.
106. В клуб пришли 20 джентльменов: некоторые – в шляпах, некоторые – без. Затем время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал на голову другому джентльмену, у которого в этот момент шляпы не было. Через час 10 джентльменов заявили: "Я отдавал шляпу чаще, чем получал!" Сколько джентльменов пришли в клуб в шляпах?
107. В некоторой компании более 10 человек, и у каждого количество знакомых делится на 10. Доказать, что есть хотя бы 11 человек с одинаковым количеством знакомых.
108. На олимпиаде было предложено 8 (6) задач. Каждый участник решил ровно 3 из них, причем никакие двое участников не решили более одной общей задачи. Какое наибольшее число участников могло быть на олимпиаде?
109. Для компании из n человек выполнено следующее условие: если какие-то 2 человека имеют поровну знакомых, то каждый из остальных знаком ровно с одним из них. При каких n такое возможно?
110. На вечеринку пришло 19 гостей. Среди любых 3 из них есть 2 знакомых. Доказать, что гости могут разбиться на 5 групп, в каждой из которых все попарно знакомы.
111. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.
112. Среди 11 человек любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что хотя бы один из них знаком со всеми остальными.
113. Среди 5 человек любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что хотя бы один из них знаком со всеми остальными.
114. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.
115. В стране Юрландии некоторые города соединены дорогами (не проходящими через другие города), причем из любого города можно добраться до любого другого. В один несчастный день злобное племя субчиков захватило некоторый город. Каждый следующий день субчики либо захватывали город, соседний с одним из захваченных, либо освобождали захваченный город, все соседние с которым захвачены. При этом никакой город не захватывали больше одного раза. Докажите, что если субчики уже ничего не могут захватить, то из любых двух соседних городов хотя бы один захвачен.
116. На банкете присутствовало 14 членов жюри, которые выпили 17 бутылок лимонада. Каждую бутылку лимонада члены жюри выпили вчетвером. Докажите, что есть два члена жюри, которые не пили лимонад из одной бутылки.
117. У каждого из 7 членов команды не более двух близких приятелей. Оказавшись в одном помещении, два близких приятеля начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этом помещении прекращается. Докажите, что капитану достаточно трех комнат для того, чтобы обеспечить бесперебойную работу всей команды.
118. 10 шахматистов сыграли однокруговой турнир, причем каждый выиграл, проиграл и свел вничью по 3 партии. Известно, что нет трех шахматистов, которые набрали в матчах между собой ровно по 1 очку. Докажите, что всех десятерых шахматистов можно поставить по кругу так, чтобы каждый из них выиграл у стоящего справа от него. За победу в шахматах дается 1 очко, за ничью дается 0,5 очка, за поражение – 0 очков.
119. 10 шахматистов сыграли однокруговой турнир, причем каждый выиграл и проиграл по 4 партии и одну партию свел вничью. Докажите, что можно выбрать трех шахматистов и поставить их по кругу так, чтобы каждый из них выиграл у стоящего справа от него.
120. В Море Дождей живут осьминожки, у каждой – один или два друга. Когда взошло Солнце, все те осьминожки, у кого было двое друзей, посинели, а все те, у кого был один друг – покраснели. Оказалось, что любые два друга – разноцветные. Тогда 10 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, и одновременно с этим 12 красных осьминожек перекрасились в синий цвет, после чего любые два друга стали одного цвета. Сколько осьминожек в Море Дождей?
121. Во дворе стоят 12 столбов. Электрику Петрову дали задание соединить столбы проводами таким образом, чтобы каждый провод соединял ровно два столба, никакие два столба не были бы соединены дважды, и, главное, чтобы для любых четырех столбов нашлось бы ровно три провода, протянутых между этими столбами. Докажите, что электрик Петров не сумеет справиться с этим заданием.
122. Каждый из 24 человек знаком не менее, чем с 11 из остальных. Всегда ли можно их поселить в двухместные номера гостиницы так, чтобы каждый был поселен со своим знакомым?
123. Планета Тор имеет форму бублика. На ней расположены 5 городов. Можно ли соединить каждую пару этих городов дорогами так, чтобы дороги нигде не пересекались?
124. На острове Новая Вавилония используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Известно, что любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно при посредничестве нескольких переводчиков. Докажите, что тогда любые два островитянина смогут поговорить между собой, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков.
125. В группе из 100 человек некоторые знакомы друг с другом, причем каждый член группы знаком не менее, чем с 20 другими. Докажите, что можно выбрать 40 членов группы и разбить их на 20 пар так, что в каждой паре люди будут знакомы.
126. На kn карточках с двух сторон написаны числа от 1 до n по $2k$ раз каждое. Докажите, что эти карточки можно положить на стол так, чтобы сверху каждое число было написано ровно k раз.
127. В стране 201 город, из каждого выходит ровно 10 дорог, причем из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно выбрать 20 городов, никакие два из которых не соединены дорогой.
128. Во дворе стоят несколько столбов, некоторые пары соединены проводами. Всего протянуто mn проводов, и эти провода раскрашены в n цветов, причем ни от какого столба не отходят провода одинакового цвета. Докажите, что можно перекрасить эти провода так, чтобы проводов всех цветов было поровну и по-прежнему ни от какого столба не отходили два провода одного цвета.
129. Во дворе стоит 36 столбов, изначально между любыми двумя столбами натянут провод. Каждое утро по дороге в школу хулиган Вася срывает 35 проводов. Каждый вечер электрик Петров восстанавливает провода, отходящие от некоторого столба. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы однажды утром после очередного акта вандализма осталось менее 18 проводов.
130. На плоскости отмечены 100 точек. Играют двое, ходят по очереди. За один ход можно соединить стрелкой две точки, если их не соединяли раньше. При этом запрещается проводить стрелку, после появления которой из любой точки можно будет добраться по стрелкам до любой другой. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер?
131. Из целых чисел от 1 до 100 выбрали несколько различных чисел. Назовем показателем делимости данного числа количество выбранных чисел, на которые данное число делится нацело. Оказалось, что все выбранные числа имеют различные показатели делимости. Какое наибольшее количество чисел могло быть выбрано?
132. N кругов расположены так, что центр каждого из них лежит внутри ровно одного из остальных, и внутри каждого лежит центр ровно одного из остальных. Найдите все числа N, при которых такое возможно.

133. 22 школьника участвовали в съезде юных писателей. После съезда каждый из них прочитал произведения трех юных писателей, побывавших на съезде. Докажите, что из делегатов съезда можно составить комиссию из 4 человек так, что в комиссии никто не читал произведения остальных ее членов.

134. В доме отдыха 1999 отдыхающих. Некоторые из них знакомы между собой, причем любые двое *незнакомых* имеют среди отдыхающих общего знакомого. Каково наименьшее возможное число *пар* знакомых отдыхающих?

135. На планете 1000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 21 дороги. Докажите, что на планете не больше 90 столиц.

136. В доску вбиты 1997 гвоздей. Двое по очереди делают ходы. Ход состоит в том, что играющий соединяет проводом какие-либо два гвоздя, не соединенных ранее. Проигрывает тот, после хода которого впервые становится возможным добраться по проводам от любого гвоздя до любого другого. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер?

137. Связный граф G остается связным при удалении любых 18 вершин (вместе со всеми выходящими из них ребрами). Назовем *разрезом* любое множество из 19 вершин, при удалении которых граф теряет связность, а *куском* любую компоненту связности, которая образуется при удалении разреза. Известно, что любой кусок, содержащий менее 10 вершин, не содержится ни в каком разрезе. Докажите, что никакой кусок не содержится внутри разреза.

138. Граф G связен. Назовем *разрезом* минимальное по включению множество вершин, при удалении которых (вместе со всеми выходящими из них ребрами) граф теряет связность. Известно, что при удалении вершин разреза R вершины из разреза S оказываются в одной компоненте связности. Докажите, что при удалении вершин разреза S вершины из разреза R оказываются в одной компоненте связности.

139. На клетчатой бумаге отмечены 49 узлов сетки, расположенные в виде квадрата 6×6. Какое минимальное число единичных отрезков с концами в отмеченных узлах нужно провести, чтобы между любой парой соседних узлов был путь не длиннее 3?

140. В компании из n человек, где каждый знаком хотя бы с одним из остальных, у всех поровну знакомых (считается, что если A знаком с B, то и B знаком с A). Докажите, что из членов этой компании можно выбрать не менее, чем $n/3$ непересекающихся пар знакомых.

141. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество знакомств (пар знакомых) кратно трем.

142. В однокруговом турнире два участника покинули соревнования после пятого тура. В итоге в турнире было сыграно 38 игр. Успели ли эти двое сыграть между собой?

143. В однокруговом турнире шесть участников покинули соревнования после шестого тура. В итоге в турнире было сыграно 67 игр. Докажите, что хотя бы двое из выбывших не сыграли между собой.

144. Каково наименьшее возможное число ребер в графе со 100 вершинами, среди любых 11 вершин которого найдется одна, соединенная с остальными 10 из них?

145. В связном графе $2n$ вершин, степень каждой вершины равна трем. Докажите, что количество способов раскрасить ребра этого графа в три цвета так, чтобы в каждой вершине сходились ребра разных цветов, не превосходит $3\cdot 2^n$.

146. В некотором государстве $4n$ аэропортов, из каждого аэропорта выходит ровно 3 авиалинии (авиалиния соединяет два аэропорта). Из любого аэропорта можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Пусть K – количество способов продать *все* авиалинии трем авиакомпаниям таким образом, чтобы из каждого аэропорта выходили три авиалинии разных авиакомпаний. Докажите, что $K \le 3\cdot 2^{3n}$.

147. Восемь шахматистов сыграли турнир в один круг. Известно, что в любой тройке шахматистов были двое, сыгравшие между собой вничью. Какое наименьшее число ничьих могло быть в этом турнире?

148. В вершинах квадрата помещены 4 компьютера, соединенных со своими соседями по сторонам квадрата. В начальный момент на каждый компьютер пришло по важной новости (на каждый – своя). Каждую секунду компьютер может или передавать все известные ему новости на соседний компьютер, или принимать соответствующую информацию с соседнего компьютера, или бездействовать. Каким образом за наименьшее время все компьютеры могут получить все имеющиеся в системе новости?

149. В стране Элении n жителей. Они объединяются в кружки по интересам. В каждом кружке ровно три человека, при этом любые двое одновременно состоят ровно в одном кружке. Докажите, что n при делении на 6 дает в остатке либо 1, либо 3.

150. В лагерь приехали m мальчиков и d девочек. Каждая девочка знакома не более, чем с 10 мальчиками, а каждый мальчик – не менее, чем с одной девочкой. Оказалось, что у каждого мальчика больше знакомых девочек, чем у любой знакомой с ним девочки – знакомых мальчиков. Докажите, что $d \ge 1{,}1m$.

151. Приведите пример четырнадцатигранника, каждая грань которого – либо квадрат, либо правильный треугольник?

152. В пространстве даны 2000 черных точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Некоторые из точек соединены стрелками. Известно, что нет пути, идущего по стрелкам и проходящего через все точки (даже если можно проходить через одну точку несколько раз). Докажите, что часть точек (не меньше одной, но не все) можно перекрасить в синий цвет так, чтобы никакая стрелочка не вела из синей точки в черную.

153. В графе существует остовное дерево ровно с n висячими вершинами и остовное дерево ровно с m висячими вершинами, $n \le k \le m$. Докажите, что в этом графе существует остовное дерево ровно с k висячими вершинами.

154. В компании из 200 человек любых пятерых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый из них сидел между двух знакомых (предполагается, что если A знаком с B, то B знаком с A). Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

155. Докажите, что у каждого многогранника можно покрасить две грани в красный цвет, а две другие – в синий так, чтобы у красных граней было поровну сторон, и у синих – тоже.

156. В связном графе $3k$ вершин, все они имеют степень 3, причем каждая вершина входит ровно в один треугольник. Некоторые ребра графа удалили так, что получилось дерево. Докажите, что у этого дерева не более $k+2$ вершин степени 1.

157. В королевстве N городов и r дорог (каждая дорога соединяет два города, и из любого города можно добраться в любой по дорогам). В городах живут гонцы. В начале каждого года один из городов отправляет во все соседние (т.е. соединенные с ним дорогами) города по гонцу. (В таком городе должно быть достаточное для этого количество гонцов.) Через несколько (более нуля) лет в каждом городе оказалось столько же гонцов, сколько было изначально. Какое наименьшее количество гонцов может быть в королевстве?

158. Дан граф, степень любой вершины которого не меньше k (где $k\ge 2$). Докажите, что в этом графе найдется простой цикл длины не меньшей, чем $k+1$.

159. В банде террористов каждый подозревает в измене не менее 10 других.. Докажите, что в этой банде можно выделить не менее 11 террористов и занумеровать их так, что первый подозревает второго, второй, третьего, …, предпоследний – последнего, а последний – первого.

160. В графе любые два простых цикла нечетной длины не имеют общих ребер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

161. В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, но никакой город не соединен со всеми. Из любого города в любой другой можно доехать, заезжая по дороге не более, чем в один город. Какое наименьшее количество дорог может быть в этой стране?

162. В стране 25 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, но никакой город не соединен со всеми. Из любого города в любой другой можно доехать, заезжая по дороге не более, чем в один город. Докажите, что в этой стране хотя бы 35 дорог.

163. В стране 9 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, но никакой город не соединен со всеми. Из любого города в любой другой можно доехать, заезжая по дороге не более, чем в один город. Может ли в этой стране быть не более 13 дорог?

164. Степени всех вершин графа G меньше $\frac{3n}{2}-1$ (где $n > 2$), причем среди любых $n + 1$ вершин есть две несмежных. Назовем *блоком* множество из n попарно смежных вершин графа G. Известно, что любые два блока имеют общую вершину. Докажите, что все блоки имеют общую вершину.

165. Ребра полного графа с n вершинами покрашены в несколько цветов, причем цветов не менее, чем n. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми покрашены в различные цвета.

166. Ребра полного графа с n вершинами покрашены в несколько цветов таким образом, что каждый цвет встречается не более $n - 2$ раз. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми покрашены в различные цвета.

167. В графе G выбраны множества вершин S_1, S_2, S_3 по 100 вершин в каждом. Известно, что при удалении всех вершин любого из этих трех множеств (и всех выходящих из них ребер) остальные вершины графа распадаются ровно на две компоненты связности, а при удалении любых 99 вершин граф остается связным. Докажите, что все не входящие в множества S_1, S_2 и S_3 вершины графа G можно разбить на 6 групп таким образом, чтобы вершины одной группы оказывались в одной компоненте связности при удалении из графа вершин любого из множеств S_1, S_2 или S_3.

168. У царя Гороха 20 придворных. Интригуя друг против друга, они образовали ряд тайных обществ. Шеф тайной полиции, изучая эти общества, обнаружил три закономерности. Во первых, для любых двух тайных обществ все придворные, входящие одновременно в оба общества, образуют тайное общество. Во-вторых, для любых двух тайных обществ все придворные, входящие хотя бы в одно из них, образуют тайное общество. В-третьих, для любого тайного общества все придворные, не входящие в него, образуют тайное общество. Может ли при дворе Гороха быть ровно 2002 тайных общества?

169. На ребрах додекаэдра расставлены числа от 1 до 30 без повторений. Подсчитаем количество ломаных, составленных из трех ребер додекаэдра и таких, что числа на звеньях идут в порядке возрастания. Найдите минимальное возможное количество таких ломаных.

170. На ребрах куба расставлены числа от 1 до 12 без повторений. Подсчитаем количество ломаных, составленных из трех ребер куба и таких, что числа на звеньях идут в порядке возрастания. Найдите минимальное возможное количество таких ломаных.

171. В компании из 20 человек для любых троих найдётся человек, который знает их всех. Докажите, что найдётся человек, имеющий не менее девяти знакомых.

172. В компании из 10 человек для любых троих найдётся человек, который знает их всех. Докажите, что найдётся человек, имеющий не менее шести знакомых.

173. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70 участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более чем с десятью участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат нет ни одной пары знакомых.

174. В компании 22 спортсмена. Пар спортсменов, которые являются друзьями друг друга.– четырнадцать. Оказалось, что среди любых 11 спортсменов есть хотя бы одна пара друзей. Докажите, что всех можно разделить на две футбольные команда так, чтобы каждая пара друзей оказалась в одной команде.

175. В графе с $4k$ вершинами $3k$ ребер. Известно, что среди любых $2k$ его вершин найдутся две, соединенные ребром. Докажите, что вершины графа можно разбить на две группы по $2k$ вершин в каждой так, что никакие две вершины из разных групп не соединены ребром.

176. Пьяный шахматный король никогда не делает два хода подряд в одном и том же направлении. Начав из угла, он обошел клетчатую доску 9×9, побывав на каждой клетке по одному разу, и вернулся на исходную клетку. Какое наименьшее количество диагональных ходов он мог сделать?

177. В стране 7 городов, между которыми летают 7 самолетов. Самолет летит от каждого города до любого другого ровно 1 час, и сразу после приземления может улетать в следующий город (при этом транзитные пассажиры остаются в самолете). Составьте расписание полетов так, чтобы любой пассажир, не меняя по дороге самолет, мог долететь из любого города в любой другой не более чем через 5 часов после прибытия в аэропорт.

178. Пять вершин куба покрашены в красный цвет. Верно ли, что обязательно найдутся три ребра, у которых оба конца красные?

179. У Феди есть несвязный граф. Он всеми возможными способами удалил из этого графа по одной вершине и каждый из полученных графов нарисовал на отдельном листочке бумаги, после чего все эти листочки отдал Диме. Докажите, что Дима с помощью этих листочков может восстановить исходный граф.

180. У Феди есть несколько коробочек, в которых лежат шарики. Он по очереди вынимает из коробочек по одному шарику, записывает на отдельном листочке набор чисел — количество шариков, оставшихся в каждой коробочке, если там что-то осталось (не уточняя, какое число какой коробочке соответствует), после чего возвращает шарик на место. Вынув каждый шарик по одному разу, он отдает все листочки Диме. Докажите, что Дима сможет определить, сколько шариков лежит в каждой коробочке.

181. n — нечетное число. Вершины выпуклого n-угольника раскрашены в несколько цветов так, что каждые две соседние вершины — разного цвета. Докажите, что этот n-угольник можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями, ни у одной из которых концы не окрашены одинаково.

182. Дан граф на n вершинах. Докажите, что все его ребра можно разбить на не более чем $n^2/4$ множеств, каждое из которых состоит из одного ребра или является треугольником.

183. Города A,B, C связаны авиарейсами. Между любыми двумя городами есть хотя бы один авиарейс и все рейсы двусторонние (если можно долететь из A в B, то этим же рейсом можно долететь из B в A). Кроме того известно, что общее число способов добраться из пункта A в пункт C (включая маршруты с пересадкой в B) равно 11, а общее число способов добраться из пункта A в пункт B (включая маршруты с пересадкой в C) равно 13. Сколько существует беспосадочных рейсов между этими городами?

184. Дан клетчатый квадрат, сторона которого содержит n узлов. Невозвратным путем называется путь по ребрам, пересечение которого с любой горизонталью или вертикалью есть отрезок, точка или пустое множество. Каким наименьшим количеством невозвратных путей можно покрыть все вершины?

185. Дан связный граф, который остается связным при удалении любой вершины. Известно, что в нем есть треугольник. В каждой вершине, кроме одной, стоит по фишке (все фишки различны). Разрешается передвинуть фишку из вершины, соседней с пустой, в пустую. Докажите, что такими действиями из любой конфигурации фишек можно получить любую.

186. В городе 10 улиц идут с севера на юг, а 11 – с запада на восток, образуя 110 перекрестков. По распоряжению мэра любой автобусный маршрут в городе может идти не более чем в двух направлениях (восток–юг, восток–север, запад–юг или запад–север). Можно ли семью автобусными маршрутами соединить все перекрестки в городе?

187. Какое наименьшее число вершин может иметь выпуклый многогранник, ровно три грани которого являются пятиугольниками?