Сравнения

<u>Определение</u>: два целых числа a и b называются *сравнимыми* по модулю натурального числа n тогда и только тогда, когда $(a-b)$ нацело делится на n, т.е. a и b имеют одинаковые остатки при делении на n.

<u>Обозначение</u>: $a \equiv b(\bmod n)$.

Доказать, что для любого целого a: $a^3 \equiv a(\bmod 3)$; $a^5 \equiv a(\bmod 5)$; $a^5-5a^3 \equiv -4a(\bmod 120)$.

<u>Свойства сравнений</u>

для любых целых a, b и c, и натурального n

1). (рефлексивность) $a \equiv a(\bmod n)$;

2). (симметричность) если $a \equiv b(\bmod n)$, то $b \equiv a(\bmod n)$;

3). (транзитивность) если $a \equiv b(\bmod n)$ и $b \equiv c(\bmod n)$, то $a \equiv c(\bmod n)$;

если $\mathbf{a \equiv b(\bmod n)}$ и $\mathbf{c \equiv d(\bmod n)}$, то:

4). (сложение) $a+c \equiv b+d(\bmod n)$;

5). (вычитание) $a-c \equiv b-d(\bmod n)$;

в частности, $a+k \equiv b+k(\bmod n)$, где k – целое число.

6). (умножение) $ac \equiv bd(\bmod n)$;

в частности, $ka \equiv kb (\bmod n)$, где k – целое число.

7). (возведение в степень) $a^m \equiv b^m (\bmod n)$, где m – натуральное число

<u>Леммы</u>: 1). $(a^m - b^m) \vdots (a - b)$ при различных целых a и b, и натуральном m

2). $(a^m + b^m) \vdots (a + b)$ при целых a и b, в сумме не дающих 0, и натуральном нечётном m

<u>Свойства, связанные с делением:</u> если $\mathbf{a \equiv b(\bmod n)}$, **то:**

8). $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}(\bmod \frac{n}{k})$, если a, b и n делятся на натуральное число k;

9). $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}(\bmod n)$, если a и b делятся на целое число k, взаимно простое с n;

10). $a \equiv b(\bmod \frac{n}{k})$, если n делится на натуральное число k.

<u>КЛЮЧЕВЫЕ ИДЕИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ в целых числах.</u>

1. Чётность, в том числе как провокация.

2. Остатки, метод остатков. (в частности, отрицательный остаток, разбиение на пары).

3. Сравнения – как следствие таблица остатков квадрата и куба и ключевые факты теории сравнений, которые выводятся из таблицы. Плюс несколько важных фактов про сравнимость по степеням 2 и 5, про суммы цифр по 3, 9 и 11, малая теорема Ферма.

4. Разложение на множители – формулы количества и суммы натуральных делителей, основные формулы сокращенного умножения и возникающие из этого леммы, связанные с делимостью суммы и разности степеней, основная теорема арифметики, выделение простых множителей и проверка делимости.

5. Оценки.

6. Упорядочивание, перебор, симметрия, сокращение перебора.

7. ОБРАЗ комбинаторики в числовых выражениях – применение формул комбинаторики (факториалы, сочетания, размещения и перестановки с повторениями и без повторений с пониманием универсальности формулы перестановок с повторениями и кодированием).

7. АНАЛИЗ С КОНЦА как наиважнейшая идея решения многих классов задач.

8. Замена переменных.

9. Бесконечный спуск, принцип крайнего.

10. Геометрические интерпретации алгебраического выражения.

<u>Основные 3 типа уравнений в целых числах.</u>

1. Доказать, что уравнение не имеет решений (в частности, число некоего вида не может быть квадратом, кубом) – <u>ключевые факты теории сравнений – метод остатков</u>.

2. Доказать, что уравнение имеет бесконечно много решений – нахождение бесконечной серии – несколько частных решений и построение по ним процесса с выявлением инварианта-формулы.
3. Решить уравнение – разложение на множители с различными вариантами работы с остатками, делимостью, оценками, упорядочиванием.

<u>Примеры задач на каждую идею.</u>

<u>1. Чётность, в том числе как провокация.</u>

1. Найдите все такие наборы целых чисел (a,b,c), для которых $(3a–b)(3b–c)(3c–a) = 15015$.
2. Числа p,q и pq+1 - простые. Доказать, что (2p+q)(p+2q) делится на 4.
3. Докажите, что уравнение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$ не имеет решений в нечётных натуральных числах.
4. Найдите все такие простые числа p и q, для которых выполняется равенство $p^2 - 2q^2 = 1$.
5. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2 + 2y + 13$.
6. Найдите все натуральные числа, не представимые в виде разности квадратов каких-либо натуральных чисел.

<u>2. Отрицательный остаток, разбиение на пары, дополнение.</u>

1. Доказать, что среди чисел от 1 до 100 количество таких чисел n, что n^2+1 делится на 101, четно.
2. Как среди первых 100 натуральных чисел выбрать наибольший по количеству чисел набор так, чтобы сумма любых двух чисел набора делилась на 25?
3. Как среди первых 2010 натуральных чисел выбрать наибольший по количеству чисел набор так, чтобы сумма любых двух чисел набора делилась на 4?
4. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.
5. Доказать, что $1^{2011} + 2^{2011} + \ldots + 30^{2011}$ делится на 31.
6. Из чисел 1, 2, …, 169 выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.

<u>3. Сравнения, метод остатков. Таблица остатков квадрата и куба и ключевые факты теории сравнений, которые выводятся из таблицы. Несколько важных фактов про сравнимость по степеням 2 и 5, про суммы цифр по 3, 9 и 11, малая теорема Ферма.</u>

<u>3а. Линейные уравнения через сравнения. В частности, быстрое нахождение ответа через каноническое и параметрическое уравнение прямой.</u>

1. Шалтай-Болтай ходит по прямой, проходя за минуту либо на 37 шагов влево, либо на 47 шагов вправо. За какое наименьшее время он может оказаться на один шаг правее исходной точки?

<u>3б. КВАДРАТЫ</u>

<u>1. $N^2 \equiv 0,1 \pmod{3, 4}$</u>

1. Решить уравнение в целых числах $a^2+b^2=2011$.
2. a^2+b^2 делится на 21. Доказать, что a^2+b^2 делится и на 441.
3. X, Y, Z – натуральные числа, причём $X^2+Y^2=Z^2$. Докажите, что XY делится на 6 (на 12).
4. Доказать, что не существует a и b таких, что $a^2-3b^2=8$.
5. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является полным квадратом.
6. В прямоугольном треугольнике длины сторон — натуральные взаимно простые числа. Докажите, что длина гипотенузы — нечетное число, а длины катетов имеют разную четность.

Если a и b — нечетные числа, то равенство $a^2 + b^2 = c^2$ невозможно, поскольку c^2 не может давать остаток 2 при делении на 4.

7. Решите в натуральных числах уравнение $3n^4 – m^4 = 2011$.
8. Решить в натуральных числах уравнение $3^m+7=2^n$.
9. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1954 = n^2$?

<u>1а. $N^2 \equiv 1 \pmod 8$ при нечётном N – более точная работа, чем с модулем 4</u>

1. Докажите, что произведение пяти последовательных нечётных натуральных чисел не является полным квадратом. (*Взаимная простота*.)
2. Докажите, что если p – простое число, большее 3, то p^2-1 делится на 24.
3. Можно ли число 1986 представить в виде суммы 6 квадратов нечётных чисел?

3в. КУБЫ

1. $N^3 \equiv N \pmod{6, 2, 3}$, $N^3 \equiv N \pmod 8$ при нечётном N

1.a, b, c – натуральные. a+b+c делится на 6. Доказать, что $a^3+b^3+c^3$ делится на 6.
2. n^3+2n делится на 3
3. Доказать, что n^3-n делится на 24 при любом нечетном n.

2. $N^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{7, 9}$

1. Докажите, что сумма двух кубов не может быть равна 2010, 2011, 2012.
2. Докажите, что сумма трёх кубов не может быть равна 2011, 2012.
3. Доказать, что существует бесконечно много чисел, не являющихся суммой трёх кубов.
4. Докажите, что A^3+B^3+4 не является кубом целого числа ни при каких натуральных A и B.
5. Доказать, что 10..050…01 (в каждой группе по 100 нулей) не является кубом целого числа.
6. Доказать, что $6n^3+3$ не является 6-й степенью целого числа.
7. Решите уравнение в целых числах $19x^3 - 84y^2 = 1984$.
8. Доказать, что уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$ не имеет решений в целых числах.
9. Докажите, что уравнение $x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$ не имеет решений в целых числах.

4. Малая теорема Ферма и следствие из неё.

1. Доказать, что $2^{48} - 1$ делится на 105.
2. Докажите, что $(a+b)^{2011} - a^{2011} - b^{2011}$ делится на 2011.

5. $S(N) \equiv N \pmod{3, 9}$ - свойство равноостаточности

1. Суммы цифр чисел N и 2N равны. Докажите, что N делится на 9.
2. Натуральное число назовем интересным, если после вычитания из него суммы его цифр получится число, состоящее из одинаковых цифр. Найти все интересные трехзначные числа.
3. В ряд записаны натуральные числа от 1 до 2001. Между какими-то двумя цифрами получившегося числа *A=1234567891011…199920002001* поставлен знак “+”, разбивающий число *A* на два числа: *B* и *C* (числа могут начинаться и с нулей). Может ли получившаяся сумма *B+C* быть квадратом некоторого натурального числа?
4. *см.предыдущую задачу. (первые два предложения)*, подсчитали и записали результат B+C. Между какими-то цифрами получившейся суммы *B+C* опять поставили знак “+” и подсчитали результат. Так поступали до тех пор, пока не получилось однозначное число. Чему оно равно?
5. Пусть s(A) означает сумму цифр числа А. Разрешимы ли в целых числах уравнения: а). $s(m^2)=300$? б). $s(m^2)+s(n^2)=300$?
6. У числа 2^{100} нашли сумму цифр, затем у получившегося числа нашли сумму цифр и т.д. Какое однозначное число получится в конце концов?
7. Существует ли такое натуральное число n, что сумма цифр числа $n! = 1\times2\times\ldots\times n$ равна 2010?2011?
8. Пусть $S(x)$ - сумма цифр натурального числа x. Решите уравнение: $x+S(x)=2001$.

6. $S_-(N) \equiv N \pmod{11}$ - свойство равноостаточности

1. При каких натуральных n сумма цифр числа $n! = 1\times2\times\ldots\times n$ равна 9?
2. Найти все натуральные N такие, что не существует натурального числа M кратного 11 с суммой цифр N.

7. N сравнимо с числом из последних K цифр по модулям 2^K и 5^K

1. Может ли точный квадрат оканчиваться на 2011?
2. Может ли точный куб оканчиваться на 2005?

8. Выделение максимальной степени некоторого простого множителя.

1. В десятичной записи некоторого целого числа имеется 300 единиц, а остальные - нули. Может ли это число быть полным квадратом?
2. Докажите, что число, записываемое 2000 нулями, 2000 единицами и 2000 двойками не является кубом натурального числа.
3. Найти все натуральные числа n, m, для которых выполняется $n!+24 = m^2$.
4. Найти все такие пары натуральных чисел (k,m) , для которых $k!+12 = m^2$.
5. Квадратную таблицу размером 3×3 заполнили цифрами от 1 до 9, записав каждое ровно один раз. Может ли случиться, что для любой строки и любого столбца произведение трех стоящих в ней (нем) чисел делится на 4?
6. Обозначим через A сумму трех последовательных натуральных чисел, а через B – сумму трех следующих чисел. Может ли произведение AB равняться 222222222222 (12 двоек)?

7. Существуют ли 4 подряд идущих натуральных числа, каждое из которых является степенью (большей 1) другого натурального числа?

8. Найти все целые решения уравнения $y^k=x^2+x$ (k - натуральное число, большее 1).

9. Решите в натуральных числах уравнение $x^y = y^x$ при $x \neq y$.