О методе раскраски одной задачей. (Д.Ю.Кузнецов)

На математических олимпиадах часто встречаются задачи, решаемые методом раскраски. Ознакомимся с этим методом, продемонстрировав его красоту сразу несколькими решениями одной известной задачи:

Доказать, что клетчатую доску 10×10 нельзя разрезать по линиям сетки на прямоугольники 1×4.

Решение 1. Разделим доску на квадраты 2×2 и раскрасим их в шахматном порядке (рис.1). Заметим, что любой прямоугольник 1×4 содержит поровну (по 2) чёрных и белых клеток, но при данной раскраске на доске 52 чёрных клетки и 48 белых, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 не удастся.

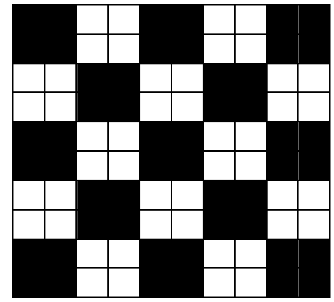

рис.1

Примечание. Идея применения подобной «шахматной раскраски квадратами 2×2» возникает естественным образом из обычной шахматной раскраски, которая очень часто применяется для доминошек 1×2. А здесь мы имеем дело с фигурой в два раза крупнее, потому и раскраска стала в два раза крупнее, причём в обоих направлениях.

Решение 2. Раскрасим доску диагональной раскраской в 4 цвета (рис.2). Заметим, что любой прямоугольник содержит по одной клетке каждого из четырёх цветов, но при данной раскраске на доске по 25 клеток 1-го и 3-го цветов, 26 клеток – 2-го и 24 клетки – 4-го, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 не удастся.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

рис.2

Решение 3. Раскрасим доску диагональной раскраской в два цвета (рис.3). Заметим, что любой прямоугольник содержит одну чёрную клетку, а их на доске – 24. Таким образом, нам удастся вырезать не более 24 тетрамино, а по площади надо 25 штук.

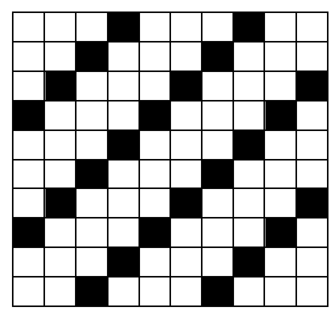

рис.3

Примечание. Легко заметить, что данная раскраска является разновидностью диагональной раскраски на рис.2, когда в качестве чёрного цвета выделен цвет номер 4, которого меньше 25 клеток. С таким же успехом можно было бы использовать в качестве чёрного цвета и цвет номер 2, то тогда бы мы получили сразу 26 прямоугольников, что невозможно. Кроме того, можно было бы объединить в чёрный цвет и любые два соседних цвета с раскраски на рис.2. Например, если бы мы в качестве чёрного цвета использовали цвета номер 1 и 2, то у нас бы возникло следующее решение.

Решение 4. Посмотрим на раскраску на рис.4. Заметим, что любой прямоугольник 1×4 содержит поровну (по 2) чёрных и белых клеток, но при данной раскраске на доске 51 чёрная клетка и 49 белых, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 не удастся.

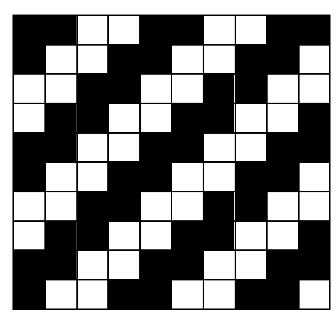

рис.4

Решение 5. Разделим доску на квадраты 2×2 и раскрасим их в 4 цвета одинаковым образом (рис.5). Тогда каждого цвета у нас будет по 25 клеток (нечётное количество), но при этом каждый прямоугольник содержит чётное количество (0 или 2) клетки каждого цвета. И как следствие, во всех вырезанных тетрамино должно быть в сумме по чётному количеству клеток каждого цвета, а не 25, что приводит нас к выводу о невозможности разрезания доски.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

рис.5

Решение 6. Применим решётчатую раскраску доски (рис.6). Тогда каждый прямоугольник содержит чётное (0 или 2) количество чёрных клеток, а их на доске – нечётное количество (25), значит, разрезать доску на прямоугольники не удастся.

Примечание. Заметим, что данная раскраска является разновидностью предыдущей раскраски на рис.5, когда только один из четырёх цветов выделен в качестве чёрного, а рассуждение является принципиально таким же. Кроме того, очень важным свойством раскраски с рисунка 5 является то, что она фактически каждый из двух цветов обычной шахматной раскраски в свою очередь тоже раскрасила в шахматном порядке (в данном случае чёрный цвет – во 2-й и 3-й, а белый – в 1-й и 4-й). Это свойство используется при решении некоторых задач методом раскраски.

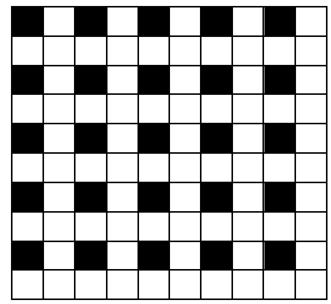

рис.6

Решение 7. Применим вертикальную полосатую раскраску доски в два цвета (рис.7). Тогда любая вертикальная тетрамино содержит кратное 4 (0 или 4) количество чёрных клеток, а любая горизонтальная – 2 чёрные клетки. А так как общее количество чёрных клеток – 50, т.е. при делении на 4 даёт остаток 2, то общее число горизонтальных прямоугольников равно нечётному числу. Рассуждая аналогично для горизонтальной полосатой раскраски, мы докажем, что общее число вертикальных прямоугольников также равно нечётному числу, но тогда в сумме у нас должно быть чётное количество всех прямоугольников, что не может равняться нужному нам числу 25. Т.е. вывод прежний – разрезать не удастся.

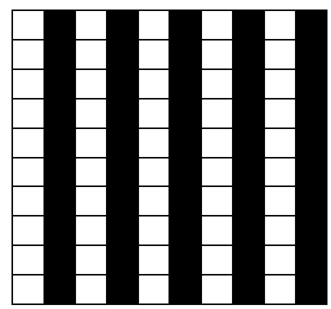

рис.7

Примечание. В этом решении в полной мере проявилась специфика полосатой раскраски – разделение фигурок на два направления. Самое интересное заключается в том, что если мы будем считать при вертикальной полосатой раскраске белый и чёрный цвета соответственно за 0 и 1, а при горизонтальной полосатой раскраске – соответственно за 1 и 3, то при наложении этих раскрасок друг на друга и подсчёте суммы чисел в каждой клетке у нас получится ничто иное, как раскраска квадратами 2×2 в четыре цвета с рис.5. Посмотрим, что получится, если применить полосатую раскраску в 4 цвета.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2

рис.8.

Решение 8. При вертикальной полосатой раскраске в 4 цвета (рис.8) заметим, что вертикальное тетрамино содержит кратное 4 (0 или 4) количество клеток каждого цвета, а горизонтальное тетрамино содержит по одной клетке каждого цвета. Но каждого цвета на доске либо 20, либо 40 клеток, а значит, на доске будет кратное 4 количество горизонтальных тетрамино. Аналогично рассмотрев горизонтальную полосатую раскраску в 4 цвета, мы сделаем вывод о том, что количество вертикальных тетрамино также кратно 4. Но тогда в сумме на доске должно быть кратное 4 число тетрамино, что не может равняться нужному нам числу 25. Опять тот же вывод – разрезать доску 10×10 на прямоугольники 1×4 нельзя.

Примечание. А теперь посмотрим, что получится при проведении в жизнь двух уже известных нам идей – сначала 4 цвета превратим в 2, а затем наложим раскраски. Получим два новых решения.

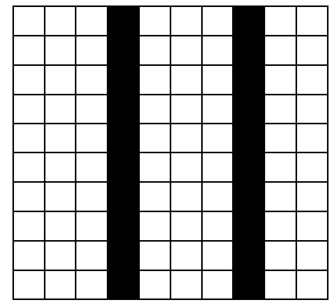

рис.9.

Решение 9. Применим сначала вертикальную полосатую раскраску (рис.9), чередуя три белых и одну чёрную полосу, а затем и горизонтальную раскраску. Далее рассуждения аналогичны тем, которые мы сделали в решении 8.

Решение 10. При наложении вертикальной и полосатой раскрасок из решения 9 по принципу «чёрный цвет – перекрашивание клетки в противоположный цвет» мы получим следующую раскраску (рис.10). Заметим, что каждый прямоугольник 1×4 содержит в себе нечётное (1 или 3) количество чёрных клеток, а всего их на доске при данной раскраске чётное количество – 32. Значит, и прямоугольников должно быть чётное количество, т.е. не равное 25. Вывод прежний – разрезать нельзя.

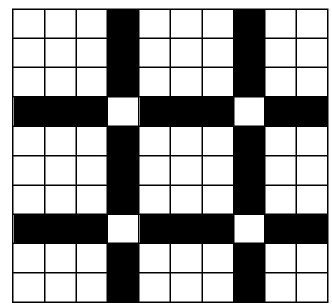

рис.10.

Решение 11. Если вертикальную и горизонтальную раскраски с рис.9 наложить друг на друга и для красоты поменять цвета местами, то получится следующая решётчатая раскраска (рис.11). Тогда любой прямоугольник накрывает кратное 3 (0 или 3) количество чёрных клеток, а их на доске не кратное 3 количество (64). И как следствие, делаем вывод, что все чёрные клетки принадлежать прямоугольникам не могут, а значит, и разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 нельзя.

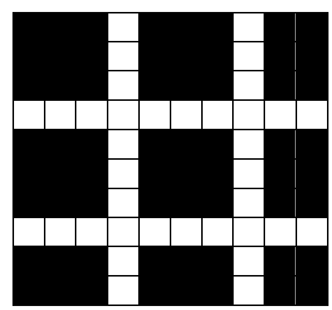

рис.11.

Вывод. Надеемся, что приведённые решения наглядно проиллюстрировали красоту *метода раскраски*, а заодно и специфические свойства каждой из раскрасок в отдельности, особенно их взаимосвязи при наложении друг на друга. Например, в самом первом решении раскраска получается наложением друг на друга двух полосатых раскрасок, а значит, мы фактически можем предложить и «новое» решение, уже двенадцатое по счету. Предлагаем ещё придумать разные другие варианты раскрасок, дающих решения этой классической задачи