

### Штурмуется ли?

1. Сумма неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  равна 1. Докажите, что а)  $a^2 + b^2 \geq 1/2$ ; б)  $a^4 + b^4 \geq 1/8$ .
2. Докажите, что  $7a+5b \geq ab+35$ , если  $a, b \in [5, 7]$ .
3. Предположим, что числа  $a$  и  $b$  принадлежат отрезку  $[0, 1]$ , докажите, что тогда  $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq 1$ .
4.  $a \geq b > 0$ ,  $\alpha \geq \beta > 0$ ,  $\alpha\beta = 1$ . Докажите, что  $a+b \leq \alpha a + \beta b$ .
5.  $a+b+c=0$ . Докажите, что  $b^2 \geq 4ac$ .
6. Докажите, что если числа  $a, b, c$  и  $d$  принадлежат отрезку  $[1; 2]$ , то  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{c+d}{d+a} \leq \frac{9}{4}$ .
7. Найти треугольник наибольшей площади с заданным периметром.
8. Найти четырехугольник наибольшей площади с заданным периметром.
9. Докажите, что площадь любого вписанного в данный круг треугольника не больше площади вписанного в этот круг правильного треугольника.
10. Докажите, что площадь любого вписанного в данный круг четырехугольника не больше площади вписанного в этот круг квадрата.
11. Дан треугольник площади 1 со сторонами  $a \leq b \leq c$ . Доказать, что  $b \geq \sqrt{2}$ .
12. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Доказать, что его площадь не превосходит 1.
13. Площадь выпуклого четырехугольника равна 1. Докажите, что его периметр не меньше 4.
14. Площадь выпуклого четырехугольника равна 1. Может ли его периметр быть больше 2000?
15. Докажите, что любой многоугольник периметра 1 можно поместить в круг радиуса  $1/4$ .
16. Предположим, что  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — положительные числа, удовлетворяющие условию  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ . Докажите, что 
$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2}$$
.
17. Сумма неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{25}$  равна 1. Найдите наибольшее значение величины  $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{24} a_{25}$ .
18. Решить систему уравнений:  $x + y + z = \sqrt{3}$  и  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
19. Числа  $x, y, z$  таковы, что  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ . Какое наибольшее значение может принимать выражение  $2x + y - z$ ?
20.  $a > b > c > d$  — натуральные числа,  $a+b+c+d = 10000$ ,  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 10000$ . Какое наименьшее значение может иметь  $a$ ?
21. Найдите наибольшее возможное отношение трехзначного числа  $\overline{abc}$  к числу  $\overline{ac} + \overline{bc}$ .
22. Числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^2 + b^2 + ab = a + b$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $a^2 + b^2$ .
23. Пусть  $a, b$  и  $c$  — стороны треугольника с периметром 1. Докажите, что  $\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} > 6$ .
24. Сумма чисел  $a, b$  и  $c$  равна единице. Найдите наибольшее значение выражения  $a(0,5 - b) + b(0,5 - c) + c(0,5 - a)$ , если известно, что каждое из чисел  $a, b$  и  $c$  не меньше  $-19$  и не больше  $98$ .
25.  $a > 0, b > 0$ . Докажите, что  $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq \frac{9}{a+b}$ .
26. Пусть  $a, b$  и  $c$  — положительные числа,  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Докажите, что  $b(a+c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
27. Сумма трех отличных от нуля чисел  $a, b$  и  $c$  равна нулю. Найдите значение выражения 
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$
.
28. Доказать, что для углов треугольника выполняется неравенство  $1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2$ .