

Транспозиции.

1. На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу). Докажите, что через 1999 секунд они не могут вернуться в исходное положение.
2. Числа $1, 2, 3, \dots, n$ расположены в ряд в некотором порядке. Разрешается менять местами любые два рядом стоящие числа. Докажите, что если проделать нечетное число таких операций, то наверняка получится отличное от первоначального расположение чисел $1, 2, 3, \dots, n$.
3. Докажите, что утверждение предыдущей задачи останется справедливым, если разрешить менять местами любые два числа в перестановке.

Опр1. Будем говорить, что числа a_i и a_j образуют в этой перестановке *инверсию*, если $i < j$, но $a_i > a_j$, т.е. большее из этих чисел предшествует меньшему.

Опр2. Перестановка с нечетным число инверсий называется *нечетной*, а с четным – *четной*.

Опр3. Переход от одной перестановки к другой, при котором какие-нибудь два элемента меняются местами, а остальные остаются на месте называется *транспозицией*.

Вывод: выполнив нечетное число транспозиций, мы изменим и саму перестановку, и ее четность.

4. По кругу по часовой стрелке стоят целые числа от 1 до 10. За один ход разрешается любые три переставить между собой по часовой стрелке. Можно ли добиться того, чтобы все числа сдвинулись по часовой стрелке на одно место?
5. Числа $1, 2, 3, \dots, 1999$ записаны по порядку. Разрешается выбрать любые четыре числа и расставить их на тех же местах, но в обратном порядке. Можно ли с помощью таких операций прийти к расположению $1999, 1998, \dots, 3, 2, 1$?
6. *Исследование игры «Пятнашки».* Почему, переставив местами в правильной расстановке «пятнашек» числа 14 и 15, уже нельзя прийти к правильной расстановке, действуя по правилам?
7. В различных пунктах кольцевого автодрома в одно и то же время в одном направлении стартовали 25 автомобилей. По правилам гонки автомобили могут обгонять друг друга, но при этом запрещен двойной обгон. Автомобили финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали. Докажите, что во время гонки было четное число обгонов.
8. Дано n магнитофонных лент, намотанных красными концами наружу и зелеными внутрь. При каких n можно их перемотать, пользуясь одной пустой катушкой так, чтобы они оказались на своих прежних местах зелеными концами наружу?