

Теорема Хелли.

1. На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все четыре фигуры имеют хотя бы одну общую точку.
2. Теорема Хелли. На плоскости дано n выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все n фигур имеют общую точку.

А если фигур бесконечно много?

3. Более общая формулировка теоремы Хелли. Если на плоскости даны ограниченные выпуклые фигуры в конечном или бесконечном числе, каждые три из которых имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая одновременно всем фигурам.
4. На плоскости дано n точек, причем известно, что каждые три из них можно заключить в круг радиуса 1. Докажите, что все n точек можно заключить в круг радиуса 1.
5. Теорема Юнга. На плоскости дано n точек, расстояние между любыми двумя из которых не больше 1. Докажите, что все эти точки могут быть заключены в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Диаметр фигуры – наибольшее расстояние между её точками.

Более общая формулировка теоремы Юнга. Любая плоская фигура (не обязательно выпуклая) диаметра 1 может быть заключена в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Более общий факт. Любая плоская фигура диаметра 1 может быть заключена внутри правильного шестиугольника, каждая сторона которого равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Опорная прямая – прямая, касающаяся фигуры так, что вся фигура лежит по одну сторону от этой прямой. Ширина ограниченной фигуры – минимальное расстояние между парой параллельных опорных прямых.

6. Теорема Бляшке. Докажите, что всякая ограниченная выпуклая фигура ширины 1 заключает внутри себя некоторый круг радиуса $1/3$.

Вспомогательная лемма для теоремы Бляшке. Докажите, что внутри каждой ограниченной выпуклой фигуры Φ существует такая точка O , что всякая хорда AB фигуры Φ , проходящая через точку O , разбивается этой точкой на отрезки AO и BO , длина каждого из которых не меньше $1/3$ отрезка AB .

Еще две задачи на теорему Хелли.

7. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.
8. На плоскости дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.
9. Сформулируйте и докажите аналоги теоремы Хелли в пространствах другой размерности.
 - а). Теорема Хелли для плоскости. Докажите, что если каждые два из заданных на прямой n отрезков имеют общую точку, то и все n отрезков имеют общую точку.
 - б). Теорема Хелли для пространства. В пространстве даны n выпуклых ограниченных тел, каждые четыре из которых имеют общую точку. Докажите, что все n тел имеют общую точку.
 - в). Общая теорема Хелли. Если в пространстве n измерений ($n=1, 2, 3$) дано некоторое число ограниченных выпуклых фигур, каждые $n+1$ из которых имеют общую точку, то все эти фигуры имеют общую точку.