Нижегородская (XII открытая) городская математическая олимпиада школьников

НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 23 ноября 2014 года

УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

с комментариями о подсказках:☺

6 класс

Общий комментарий к варианту 6-го класса: *Если в этом году на впервые проводившейся городской олимпиаде для 6 класса специально поставлены 3 конструктивных задачи (№№1, 2 и 5), а №6 также фактически является подобной задачей, но с доказательством, то к олимпиадам 7-ого класса надо готовиться уже серьёзно, обучаясь методам доказательства (например, чётность (№7.3), раскраска (№7.4), остатки и признаки делимости (№№7.2 и 7.5), парная стратегия, симметрия (№7.6) и другие). Поэтому приглашаем всех желающих учиться (бесплатно) в Школу информационных технологий и математики (ШИТМ). Информацию о занятиях можно взять из Интернета на странице Кузнецова Дмитрия Юрьевича (с сайта Высшей школы экономики).*

	ф				
			ф		
					ф
ф					
		ф			
				ф	

1. На доске 6×6 разместите 6 не бьющих друг друга ферзей. (*Ферзь бьёт по вертикали, горизонтали и диагонали.*)

***Решение*:** пример см. на рисунке.

2. Назовём двузначное число $\overline{ab}$ *гармоничным*, если для него и для симметричного ему числа $\overline{ba}$ выполняется следующее свойство: их сумма цифр $S(\overline{ab}) = S(\overline{ba}) = a + b$ равна количеству букв в записи каждого из них на русском языке. Существует ли двузначное гармоничное число?

Ответ: Существуют, например, числа 78 и 87 с суммой цифр 15 в своей записи имеют ровно по 15 букв (семьдесят восемь и восемьдесят семь).

3. Карлсону и Малышу на Новый год подарили одинаковые подарки. Карлсон, обрадовавшись, сначала съел половину своих конфет, на следующий день, огорчившись быстрому убыванию конфет, съел треть своих оставшихся конфет, а на третий день – четверть оставшихся. Малыш же в первый день взял из своего подарка четверть конфет, на следующий день – треть оставшихся, а на третий день – половину оставшихся, при этом он каждый раз половину взятых конфет съедал сам, половину отдавал Карлсону, который их сразу съедал. Во сколько раз больше Малыша съел конфет Карлсон за эти три дня?

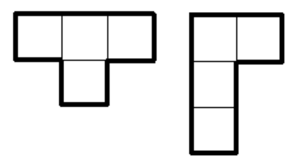
Ответ: Карлсон съел в 3 раза больше конфет, чем Малыш. ***Решение*:** Пусть у них было по k конфет, тогда посмотрим, сколько конфет у них оставалось после каждого дня. У Малыша сначала осталось $\frac{3}{4}k$, затем – $\frac{3}{4}k\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}k$, на третий день – $\frac{1}{2}k\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}k$. У Карлсона сначала осталось $\frac{1}{2}k$, затем – $\frac{1}{2}k\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}k$, на третий день – $\frac{1}{3}k\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}k$. Таким образом, у Малыша и Карлсона осталось поровну конфет, значит, они вынули из подарков поровну конфет (по $n=\frac{3}{4}k$). Но Малыш каждый раз половину отдавал Карлсону, значит, Малыш съел $\frac{n}{2}$ конфет, а Карлсон – $\frac{3}{2}n$, т.е. в три раза больше.

4. Четвероклассник Вася, любящий решать задачи по теории чисел с помощью компьютерных алгоритмов, попытался решить ребус $\overline{ДВА}+\overline{ТРИ}=\overline{ПЯТЬ}$ (*разные буквы – разные цифры, одинаковые буквы – одинаковые цифры*). Компьютер выдал 214 решений. Докажите, что программа работает неправильно.

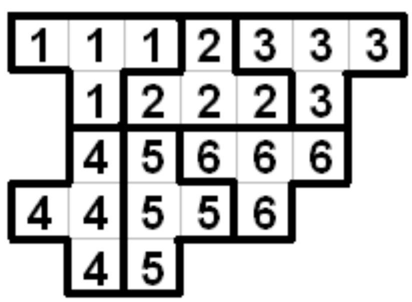
***<u>Решение</u>*:** Все решения ребуса разбиваются на четвёрки, отличающиеся друг от друга перестановкой четырьмя способами цифр в двух последних разрядах (единиц и десятков). Т.е., переставляя местами между собой цифры *В* и *Р*, *А* и *И*, мы будем получать другие решения ребуса, т.к. сумма чисел $\overline{ПЯТЬ}$ будет оставаться прежней. Значит, количество решений должно быть кратно 4, но 214 не делится на 4.

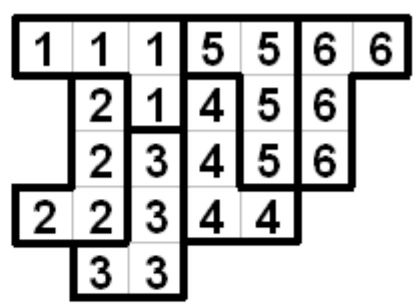
<u>Комментарий:</u> *Странное число 214 (а не 2014) подсказывает обратить на себя особое внимание. Что интересного в нём? На 2 делится, а на 4 нет, что и даёт нам идею доказательства. Кроме того, подсказка заложена и в номере класса Васи (4-й, а не 6-й), и в номере самой задачи. Реальное же количество решений ребуса как раз будет в районе 200. Можете попробовать написать программу и узнать самостоятельно точное количество решений этого ребуса:* ☺.

5. Существует ли клетчатый многоугольник из 24 клеток, который можно разрезать и на 6 четырёхклеточных фигурок вида буквы «Т», и на 6 четырёхклеточных фигурок вида буквы «Г» (см. рисунок справа)? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



<u>Ответ:</u> Да, существует, например, как на рисунке.





6. Аня, Боря и Вова решили сыграть в следующую игру. В кучке лежат 2014 спичек. Аня и Боря имеют право брать 1, 2 или 3 спички, а Вова – 1, 2, 3, 4 или 5. При этом Аня и Боря объединяют свои усилия против Вовы, но Вова имеет право выбрать очередь своего хода – первый, второй или третий. Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю спичку. Может ли Вова выбрать себе такую очередь, что при правильной игре выиграет именно он?

***<u>Ответ 1</u>*:** Да, Вова может выиграть, если будет ходить вторым. ***<u>Доказательство 1</u>*:** Пусть в паре Аня–Боря первой ходит Аня, тогда Боря будет играть третьим. На любой первый Анин ход Вова ответит взятием спичек так, чтобы в сумме они взяли 5 спичек, а осталось ровно 2009 спичек (т.е., на 1 ответит 4, на 2 ответит 3, на 3 ответит 2). После этого на каждый двойной ход Бори и Ани Вова отвечает так, чтобы в сумме за три хода они взяли 7 спичек. Т.к. Боря и Аня в сумме возьмут от 2 до 6 спичек, то Вова соответственно будет брать от 5 до 1 спички. В результате после каждого хода Вовы в кучке будет оставаться количество спичек, кратное 7, т.к. изначальное число 2009 также делится на 7. Значит, последнюю спичку возьмёт Вова, в результате чего он и победит.

***<u>Комментарий 1</u>*:** *Имя Вовы начинается на букву «В» и подсказывает, что Вове надо ходить вторым, чтобы выиграть:*☺.

Ответ 2**:** Да, Вова может выиграть, если будет ходить первым. ***Доказательство 2:*** Первым ходом Вова берёт 5 спичек, остаётся ровно 2009 спичек. После этого на каждый двойной ход Ани и Бори Вова отвечает так, чтобы в сумме за три хода они взяли 7 спичек. Т.к. Аня и Боря в сумме возьмут от 2 до 6 спичек, то Вова соответственно будет брать от 5 до 1 спички. В результате после каждого хода Вовы в кучке будет оставаться количество спичек, кратное 7, т.к. изначальное число 2009 также делится на 7. Значит, последнюю спичку возьмёт Вова, в результате чего он и победит.
Комментарий 2: *Итак, Вова может быть и первым, и вторым, главное, в компании Ани и Бори не быть третьим:☺.*

7 класс

1. Существуют ли такие целые числа *a*, *b* и *c*, что (*a*–1)(*b*–1)(*c*–1)=*abc*=(*a*+1)(*b*+1)(*c*+1)? (*по мотивам задачи 10.4, предложенной Костроминым Александром, 11 класс, лицей №87 г.Н.Новгорода*)
Ответ: Да, например, $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, тогда каждое произведение будет равно 0.
2. Как известно, 2014-й год – год Лошади, а такие года идут через 12 лет. Найдите какой-нибудь номер *N* года Лошади в третьем тысячелетии, когда жюри на олимпиаде сможет дать ребус, имеющий решение: $N = \overline{ГОД} \times (Л + О + Ш + А + Д + И)$**.**
(*Разные русские буквы означают разные цифры, одинаковые русские буквы – одинаковые цифры*.)
Ответ: например, 2650=106·(2+0+3+5+6+9)=106·(2+0+4+5+6+8), 2782=107·(2+0+3+5+7+9)=107·(2+0+3+6+7+8), 2794=127·(0+2+3+4+7+6).
Решение-комментарий 1: Покажем, как можно догадаться до примеров с числом 2650. Число 2014=2·19·53=106·19, а если к нему добавить 106·6, что делится на 12, то мы снова получим год Лошади – 2650=106·25=106·(2+0+3+5+6+9).
Решение-комментарий 2: Покажем, как можно прийти к данным примерам более сложными рассуждениями. Заметим, что сумма цифр во втором множителе будет не меньше 0+1+2+3+4+5=15. Если год будет не меньше 201, то всё произведение будет не меньше 201·15=3015, что уже будет давать следующее тысячелетие. Поэтому меньшее значение *N* можно получить только для года, начинающегося на 1, тогда во втором множителе нет 1, а сумма $Л + О + Ш + А + Д + И \geq 0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$. Заметим, что год Лошади при делении на 12 имеет остаток 10. Если наш ребус имеет решение, то год должен оказаться произведением двух натуральных чисел, у которых не может быть при делении на 12 остатков, кратных 3 и 4, т.к. тогда произведение будет кратно 3 и 4, что невозможно для остатка 10. Тогда у наших множителей могут быть только остатки 1, 2, 5, 7, 10 и 11. Кроме того, оба остатка не могут оказаться нечётными (иначе произведение также будет нечётным) и чётными (иначе произведение делится на 4). Разберём все варианты пар остатков с помощью таблицы, исключая пары остатков одина-

	1	2	5	7	10	11	**Год**
1		2			10		**109**
2	2		10	2		10	**134**
5		10			2		**125**
7		2			10		**127**
10	10		2	10		2	**106**
11		10			2		**107**
S	25	26	29	31	22	23	

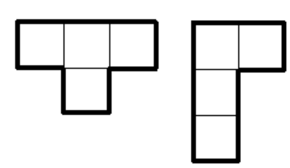
ковой чётности в силу выше указанного. Учтём также, что $\overline{ГОД} \geq 102$, а сумма $S = Л + О + Ш + А + Д + И \geq 20$. Укажем в таблице минимально возможные значения наших двух множителей для каждого варианта остатка, учитывая также, что год состоит из трёх различных цифр. Тогда для каждого из шести возможных вариантов остатка года найдём минимально возможные значения произведения и укажем следующие возможные значения 109·22=2398 (далее +109·12, новое тысячелетие, или +12·22), 134·23=3082 (уже новое тысячелетие), 125·26=3250 (новое тысячелетие), 127·22=2794 (далее +127·12, новое тысячелетие), 106·25=2650 (далее +106·6, новое тысячелетие), 107·26=2782 (далее +107·12, новое тысячелетие). Это рассуждение не даёт нам все возможные варианты решения ребуса, но показывает несколько подходящих примеров.

3. Назовём треугольник *простым*, если градусные меры всех его углов являются простыми числами. Существует ли *простой* треугольник, который можно разрезать на два *простых* треугольника?

Ответ: Не существует. ***Решение***: Сумма трёх простых чисел должна равняться чётному числу 180, значит, в ней либо три чётных числа (все – 2, что невозможно, т.к. сумма 2+2+2=6≠180), либо одно чётное число (2), а два других – простые нечётные. Тогда в этом случае невозможен вариант 2, 3 и 175, т.к. 175 – составное число. Значит, два простых нечётных числа, дающие в сумме 178, не должны быть кратны 3. Но 178 даёт при делении на 3 остаток 1, значит, оба простых числа должны иметь остаток 2 при делении на 3. Разрезать треугольник на два треугольника можно только отрезком из вершины до противоположной стороны. Тогда в каждом треугольнике должен быть угол в 2° согласно вышеописанным рассуждениям. При этом в одном из них уже есть угол в 2° от исходного треугольника, т.к. этот угол нельзя было разрезать. Тогда в другом треугольнике угол в 2° образуется либо у стороны, либо у вершины. Но в первом случае смежный угол в 178° будет углом второго треугольника, что приводит к противоречию по разным причинам (либо сумма углов треугольника уже больше 2°+178°=180°, либо 178 – составное). Во втором случае мы отрезаем 2° от угла с остатком 2 при делении на 3, т.е. получаем угол, кратный 3, что невозможно в силу вышеописанных рассуждений.

Комментарий: *Номер задачи 3 подсказывает воспользоваться делимостью на 3:* ☺.

4. Докажите, что не существует клетчатого многоугольника из 28 клеток, который можно разрезать и на 7 четырёхклеточных фигурок вида буквы «Т», и на 7 четырёхклеточных фигурок вида буквы «Г» (см. рисунок справа). *Фигурки можно поворачивать и переворачивать.*



Доказательство: Раскрасим клетчатую плоскость в шахматном порядке. Тогда каждая фигурка «Г» накрывает ровно 2 чёрных и 2 белых клетки, значит, 7 таких фигурок накроют чётное количество (14) чёрных клеток. Каждая фигурка «Т» в свою очередь накрывает 3 или 1 чёрную клетку, т.е. нечётное количество, значит, 7 фигурок накроют нечётное количество черных клеток, что противоречит чётности количества чёрных клеток в фигурках «Г».

5. На клетках *d*1 и *e*8 шахматной доски стоят соответственно белый и чёрный ферзи, а на остальных клетках – пешки. Двое игроков (Вова и Петя) ходят по очереди своими ферзями: первый (Вова) – белым, второй (Петя) – чёрным. Каждым своим

ходом игрок обязан съедать какую-нибудь фигуру. Проигравшим считается тот, чей ферзь своим ходом ничего съесть не может или съеден противником. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет первый – Вова. ***Решение*:** Сначала он идёт на клетку *e*2, а затем повторяет ходы второго симметрично относительно пятой горизонтали. В некоторый момент второй вынужден будет пойти на пятую горизонталь, после чего первый съест его ферзя.

Комментарий: *Расположение чёрного ферзя не соответствует правильному расположению его в исходной расстановке шахматных фигур, кроме того имя Вова начинается на букву «В» (второй), а Петя – на букву «П» (первый), что фактически и подсказывает перестроиться Вове под игру вторым, отдав инициативу случайных ходов неправильному чёрному ферзю Пети, действуя после них уже чётко симметричным ответом.*

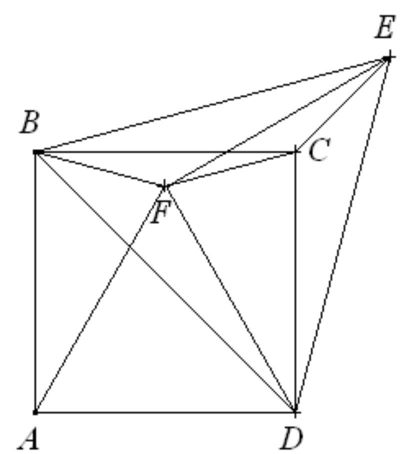
6. Незнайка записал некоторые 8 цифр девятизначного числа, оставив один разряд для Винтика, который поставил туда некоторую цифру. После этого приходит Шпунтик и угадывает этот разряд. Как Винтику и Шпунтику заранее договориться, чтобы Шпунтик смог гарантированно угадать этот разряд?

Решение: Пусть Винтик посчитает сумму восьми цифр, написанных Незнайкой, и добавит цифру от 1 до 9 так, чтобы сумма цифр при делении на 9 имела остаток, равный номеру угадываемого разряда, начиная, например, слева (остаток 0 соответствует девятому разряду). Он сможет это сделать, т.к. прибавляя цифры от 1 до 9, он получит все девять различных остатков. При этом не возникает проблемы 0 в первом разряде, т.к. Винтик пишет ненулевую цифру. После этого приходит Шпунтик, считает сумму цифр, находит её остаток при делении на 9 и указывает по остатку номер нужного разряда.

8 класс

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что написал сначала 8 целых чисел, потом все их увеличил на 1, потом все числа нового набора увеличил на 2, потом опять все числа третьего нового набора увеличил на 3, и так далее, а в конце все числа нового седьмого набора увеличил на 7, при этом каждый раз получал набор с произведением чисел, равным произведению чисел исходного набора. Мог ли барон оказаться прав? (*по мотивам задачи 10.4, предложенной Костроминым Александром, 11 класс, лицей №87 г.Н.Новгорода***)**

Ответ*:** Мог быть прав. ***Решение: Такое могло быть, если у него был следующий исходный набор чисел {0, –1, –3, –6, –10, –15, –21, –28}. Тогда на каждом шаге одно из чисел становилось равным 0, а всё произведение всегда было равно 0.



2. На стороне *AD* и диагонали *BD* квадрата *ABCD* построены равносторонние треугольники *ADF* (внутрь квадрата) и *BDE* (накрывает точку *C*). Докажите, что треугольник *CEF* – равнобедренный.

Доказательство: Равнобедренные треугольники *ABF* и *DFC* равны между собой, т.к. *AB*=*AF*=*DF*=*DC*, ∠*BAF*=∠*FDC*=90°–60°=30°, значит, *BF*=*CF*. Также равны треугольники *BDF* и *EDC*, т.к. *BD*=*ED*, *FD*=*CD*,

$\angle BDF=\angle FDA-\angle BDA=60°-45°=15°=\angle BDE-\angle BDC=\angle EDC$, значит, $BF=CE$. Тогда $CF=BF=CE$ и ΔCEF – равнобедренный. При этом очевидно, что точка F лежит вне прямой CE, проходящей по диагонали AC, т.е. точки C, E и F действительно образуют треугольник.

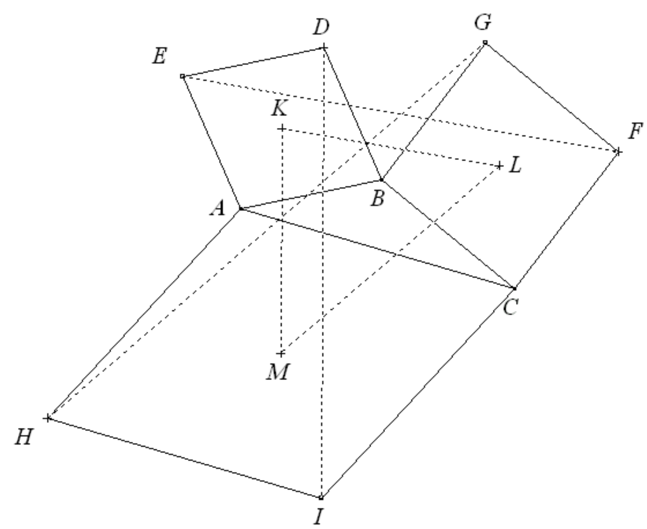
3. Графики различных функций $y = ax + a$ и $y = bx + b$ пересекаются в единственной точке M. Оказалось, что график функции $y = cx + d$ также проходит через точку M. Докажите, что $c=d$.

Доказательство: Чтобы найти координаты точки M, решим уравнение $ax + a = bx + b$. Получим, что $(a-b)x=b-a$, откуда $x=(b-a)/(a-b)=-1$, т.к. $a-b\neq 0$ в силу различных чисел a и b. Значит, $x=-1$, тогда $y_M= a\cdot(-1) + a =0$, т.е. точка M имеет координаты $(-1;0)$. Подставим её в уравнение $y = cx + d$ и получим, что $0=c\cdot(-1)+d$, откуда $c=d$.

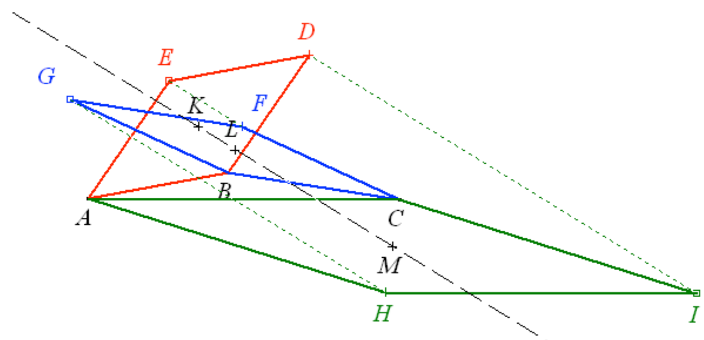
4. Незнайка записал некоторые 8 цифр девятизначного числа, оставив один разряд для Винтика, который поставил туда некоторую цифру. После этого приходит Шпунтик и угадывает этот разряд. Как Винтику и Шпунтику заранее договориться, чтобы Шпунтик смог гарантированно угадать этот разряд?

Решение (см. также задачу №6 из 7-го класса): Пусть Винтик посчитает сумму восьми цифр, написанных Незнайкой, и добавит цифру от 1 до 9 так, чтобы сумма цифр при делении на 9 имела остаток, равный номеру угадываемого разряда, начиная, например, слева (остаток 0 соответствует девятому разряду). Он сможет это сделать, т.к. прибавляя цифры от 1 до 9, он получит все девять различных остатков. При этом не возникает проблемы 0 в первом разряде, т.к. Винтик пишет ненулевую цифру. После этого приходит Шпунтик считает сумму цифр, находит её остаток при делении на 9 и указывает по остатку номер нужного разряда.

5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены ромбы $ABDE$, $BCFG$ и $CAHI$. Докажите, что из отрезков EF, GH и ID можно составить треугольник.



Доказательство: Пусть K, L, M – это центры параллелограммов $ABDE$, $BCFG$ и $CAHI$ соответственно. Тогда в треугольниках BEF, CGH и AID (возможно, вырожденных) отрезки KL, LM и MK будут средними линиями. При этом они образуют треугольник и соответственно параллельны и вдвое короче отрезков EF, GH и ID, значит, из этих трёх отрезков можно составить треугольник, подобный треугольнику KLM с коэффициентом 2, что и требовалось доказать.



Комментарий: *Кажется, что всё в порядке в приведённом выше решении, но … почему же тогда даны ромбы? Ведь и для параллелограммов должно проходить абсолютно аналогичное решение. Но, если хорошо подумать, то легко можно построить* *параллелограммы наружу так, что точки K, L и M будут лежать на одной прямой и не дадут нам треугольника, а ведь именно на существование такого треугольника мы и опирались выше. Значит, надо доказать, что для ромбов точки K, L и M всегда будут образовывать треугольник.*

Продолжение рассуждений: *Однако, снова хорошо подумав, мы обнаружим, что и для ромбов возможен случай, когда точки K, L и M лежат на одной прямой (см. рис.).* Значит, правильным будет следующий вывод – условие задачи несколько некорректно. Более точное утверждение задачи должно звучать следующим образом: «**Докажите, что или из отрезков *EF*, *GH* и *ID* можно составить треугольник, или эти отрезки параллельны между собой.»**

Комментарий 2: *В геометрической задаче очень важны различные случаи расположения объектов!*

Комментарий 3: *Если у школьника будет полное решение с обоснованием возможного случая параллельности, то его работа будет оцениваться из 10 баллов, иначе задача оценивается как обычно из 7 баллов. Если же школьник укажет только про случай параллельности, но не сможет решить задачу для общего случая, то он получает 3 балла.*

6. По кругу по часовой стрелке выложены подряд 2014 карточек с числами 1, 2, 3, …, 2014. За один ход можно положить друг на друга две стопки (одна карточка тоже стопка), верхними числами в которых являются изначально соседние числа (2014 и 1 также изначально соседние). После 2013 ходов образуется одна общая стопка. Сколько существует возможных различных вариантов расположения карточек в такой стопке?

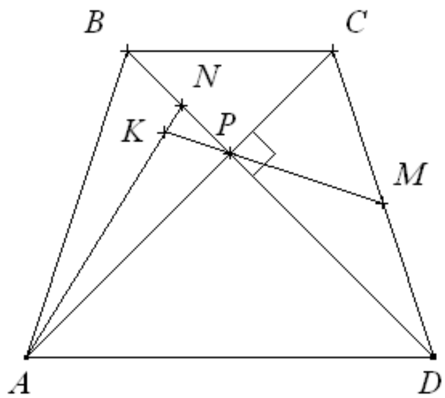
Ответ: $2014\cdot2012\cdot2=8104336$. ***Решение*:** Рассмотрим ориентированный граф, в котором ребро-стрелка между соседними карточками будет указывать на то, какая карточка под какую легла. На первом ходу образуется стрелка между двумя соседними числами. После этого либо стрелки начинают располагаться подряд от карточки к карточке в одном направлении (1 случай), либо в некоторый момент появится отдельная стрелка в некотором другом месте (2 случай). Тогда невозможно образовать общую стопку в случае, если начало появившейся только что стрелки не соседствует с началом самой первой стрелки. В первом случае у нас будет ровно $2\cdot2014$ вариантов стопки, т.к. началом цепочки из стрелок (*ориентированного гамильтонова пути*) может быть любая карточка, а идти стрелки могут в любом из двух направлений (по часовой стрелке или против часовой). Во втором случае перед последним ходом образуются две цепочки, начала которых будут в соседних карточках – 2014 вариантов такой *начальной* пары, а концы цепочек также будут соседними – всего 2011 вариантов такой пары, т.к. мы должны убрать из рассмотрения три пары (две пары, соседние с начальной, и саму начальную). На последнем ходу мы можем положить эти две стопки друг на друга двумя разными способами. Значит, второй случай даёт нам $2014\cdot2011\cdot2$ вариантов, а всего будет $2\cdot2014+2014\cdot2011\cdot2=2014\cdot2012\cdot2=8104336$ вариантов расположения карточек в нашей окончательной стопке.

9 класс

1. Существуют ли такие действительные числа *x*, *y* и *z*, что $xyz=(x+1)(y+1)(z+1)=(x+2)(y+2)(z+2)$? (*по мотивам задачи 10.4, предложенной Костроминым Александром, 11 класс, лицей №87 г.Н.Новгорода*)

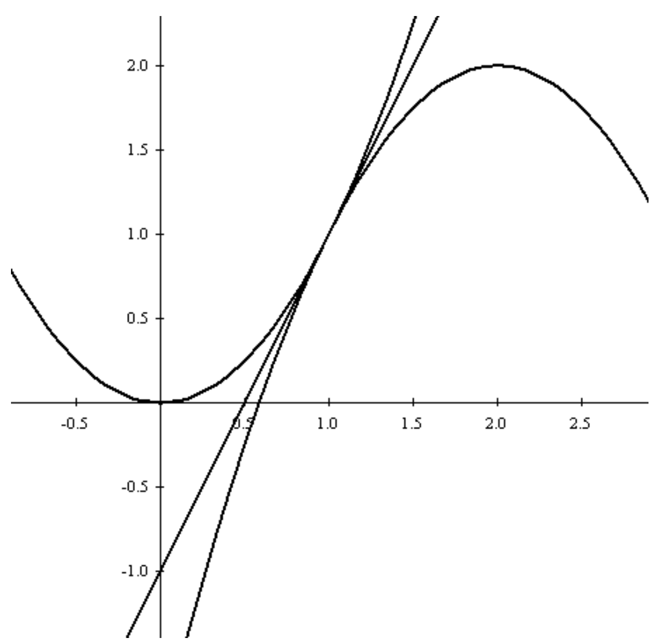
Ответ: Да, например, $x = 0$, $y = -1$, $z = -2$, тогда каждое произведение будет равно 0.

2. Точка *M* – середина боковой стороны *CD* равнобочной трапеции *ABCD* (*AB*=*CD*), диагонали которой перпендикулярны и пересекаются в точке *P*. Биссектриса угла *BAC* пересекает диагональ *BD* и прямую *MP* соответственно в точках *N* и *K*. Докажите, что треугольник *PNK* – равнобедренный. (*задача предложена Выбиным Сергеем, 10 класс, лицей №7 г.Кстово*)



Доказательство: Прямоугольные треугольники *ABP* и *DCP* равны в силу свойств равнобочной трапеции, значит, $\angle BAC=\angle BAP=\angle CDP$ и пусть они равны 2α. Тогда $\angle NAP=\alpha$, т.к. *AN* – биссектриса $\angle BAC$. Следовательно, из прямоугольного треугольника *ANP* получим $\angle ANP=90°-\alpha$. В прямоугольном треугольнике *CDP* медиана *PM*, выходящая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, значит, треугольник *DMP* – равнобедренный, а $\angle MPD=\angle MDP=2\alpha$. Углы *NPK* и *MPD* – вертикальные, значит, $\angle NPK$ также равен 2α. Тогда в треугольнике *PNK* получаем, что $\angle PKN=180°-\angle KNP-\angle NPK=180°-(90°-\alpha)-2\alpha=90°-\alpha=\angle KNP$. Значит, треугольник *PNK* – равнобедренный.

3. Найдите параболу $y = -x^2 + bx + c$, которая касается параболы $y=x^2$ в точке (1; 1) и имеет в точке касания с этой параболой общую касательную.

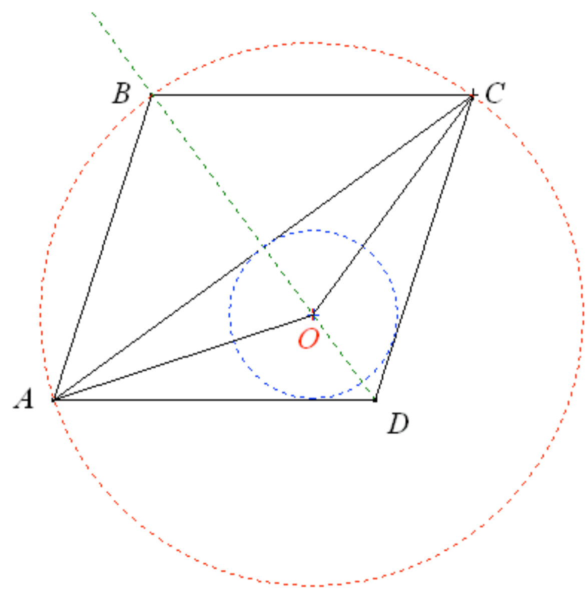


Ответ: $y= -x^2+4x-2$. ***Решение* 1:** Параболы имеют одинаковый по модулю старший коэффициент, значит, они геометрически будут равны. Тогда точка касания *K*(1; 1) окажется центром симметрии получающейся геометрической конструкции. Значит, вершина второй параболы будет в точке (2;2), симметричной относительно *K* началу координат – вершине первой параболы. Следовательно, уравнение второй параболы $y= -(x-2)^2+2= -x^2+4x-2$. ***Решение* 2:** Парабола $y=x^2$ касается в точке (1; 1) прямой $y=kx+l$ сверху, значит, неравенство $x^2\geq kx+l$ должно обращаться в равенство ровно в одной точке $x=1$, т.е. выражение x^2-kx-l должно быть полным квадратом $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Значит, касательной будет прямая $y=2x-1$. При вычитании $2x-1$ верхняя парабола приобретает вид $(x-1)^2$, а нижняя парабола в силу центральной симметрии чертежа относительно точки касания примет вид $-(x-1)^2$. Значит, исходно нижняя парабола имела вид $y=-(x-1)^2+2x-1=-x^2+4x-2$. ***Комментарий:*** *Приведённые выше решения используют симметрию чертежа, а типичным решением, возможно, будет решение с подстановкой точки касания в уравнение нижней параболы и дальнейшим рассуждением с неравенством.*

4. На доске 100×100 стоят 2014 шахматных фигур (не пешек), каждая из которых никого не бьёт. Какое наибольшее количество ладей может быть среди них?

***Ответ*:** 55 ладей. ***Решение*:** Пусть на доске стоят n ладей. Тогда они занимают n вертикалей и n горизонталей, в которых больше нет фигур, а остальным $2014-n$ фигурам остаются клетки на пересечении остальных $(100-n)$ вертикалей и $(100-n)$ горизонталей, т.е. всего $(100-n)^2$ мест. Значит, выполняется неравенство $(100-n)^2 \geq 2014-n$ при натуральном $n \leq 100$. Если рассмотреть графики этих функций, то абсцисса точки пересечения (при $n \leq 100$) соответствующей параболы и прямой будет между 55 и 56, т.к. $(100-55)^2=45^2=2025>1959=2014-55$, а $(100-56)^2=44^2=1936<1958=2014-56$. Значит, $n \leq 55$. Приведём теперь пример расстановки, удовлетворяющей условию задачи. Раскрасим доску в шахматном порядке так, что левый нижний угол будет чёрным. Рассмотрим 45 первых нечётных по номерам слева направо вертикалей и 45 нечётных по номерам снизу вверх горизонталей. На пересечении этих линий будет 2025 чёрных клеток, в 1959 из которых мы поставим коней. А 55 ладей поставим в чёрные клетки остальных 55 вертикалей, находящиеся на главной диагонали, идущей слева снизу направо вверх. Тогда ладьи не бьют друг друга, т.к. стоят в разных вертикалях и диагоналях, а также не бьют коней, которые стоят в других вертикалях и горизонталях. Кони же не бьют друг друга и ладей потому, что все фигуры стоят на чёрных клетках, а конь не может при шахматной раскраске бить клетки того же цвета, на котором сам стоит.

5. Найдите углы параллелограмма *ABCD*, в котором центр *O* описанной окружности треугольника *ABC* является и центром вписанной окружности треугольника *ADC*.



Ответ: $\angle A=72°$, $\angle B=108°$. ***Решение*:** Пусть AO и CO – биссектрисы углов DAC и DCA, значит, углы DAO и DCO будут острыми как половины углов, меньших 180°. Тогда по «четвёртому» признаку равенства треугольников будут равными треугольники DAO и DCO (DO – общая, $AO=CO$ – радиусы описанной окружности треугольника ABC, $\angle ADO=\angle CDO$ в силу биссектрисы DO, $\angle DAO$ и $\angle DCO$ – острые). Значит, $AD=CD$, т.е. $ABCD$ – ромб, а точка O лежит на диагонали BD, которая одновременно является и биссектрисой угла B. Пусть $\angle ABO=\angle CBO=\alpha$, тогда в равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) получаем $\angle BAC=90°-\alpha$, а в равнобедренном треугольнике ABO ($AO=BO$ – радиусы описанной окружности треугольника ABC) получаем $\angle OAB=\alpha$. Значит, $\angle OAC=\angle OAB-\angle BAC=\alpha-(90°-\alpha)=2\alpha-90°$, но $\angle OAC$ также равен $\angle DAO$, т.к. AO – биссектриса $\angle DAC$. Тогда сумма двух углов параллелограмма $\angle DAB+\angle ABC=\angle DAO+\angle OAB+\angle ABC=(2\alpha-90°)+\alpha+2\alpha=180°$. Откуда получаем, что $5\alpha=270°$, т.е. $\alpha=54°$. Значит, углы параллелограмма равны $2\cdot 54°=108°$ и $180°-108°=72°$.

6. Докажите, что среди любых 9 натуральных чисел, взаимно простых с 1001, найдутся два, сумма которых также будет взаимно проста с 1001.

Ответ: 9 чисел. ***Доказательство:*** Из условия взаимной простоты с $1001=7\cdot 11\cdot 13$ следует, что ни одно из 9-и чисел не имеет при делении на каждое из этих трёх простых чисел остаток 0. Разобьём ненулевые остатки при делении на каждое из них на две равные группы (малые – до половины числа, большие – после половины числа), т.е. 1-3 и 4-6 при делении на 7, 1-5 и 6-10 при делении на 11, 1-6 и 7-12 при делении на 13. Закодируем теперь каждое число двоичным трёхзначным кодом, где 0 означает малый остаток, а 1 означает большой остаток при делении на соответствующее по номеру простое число. Например, число 25 будет закодировано как 101, потому что даёт остатки 4 (большой), 3 (малый), 12 (большой) при делении на 7, 11 и 13 соответственно. Всего существует $2^3=8$ трёхзначных двоичных кодов. Значит, по принципу Дирихле среди любых 9 натуральных чисел найдутся два числа с одинаковым кодом. Рассмотрим их сумму. Т.к. коды обоих чисел одинаковы, то при делении на каждое их данных трёх нечётных простых чисел остатки будут либо оба малыми, либо оба большими. Если оба остатка при делении на p были малыми, то их сумма будет больше 0, но меньше p; если оба остатка были большими, то их сумма будет больше p, но меньше $2p$. Значит, сумма этих двух чисел не будет делиться на каждое из данных трёх простых чисел, т.е. будет взаимно проста с 1001, что и требовалось доказать.

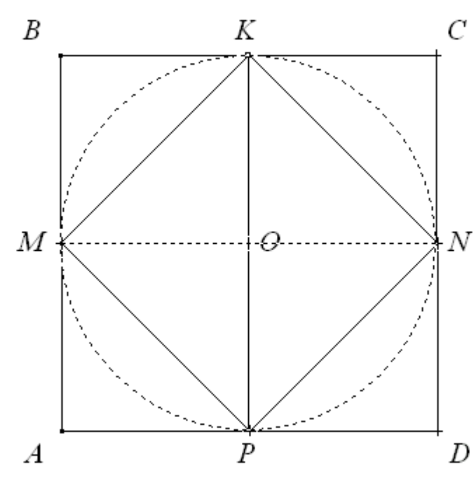
Комментарий: *Число 1001 похоже на двоичный код, что даёт подсказку воспользоваться двоичным кодированием.*

10 класс

1. Найдите все функции $f(x)$, определённые при всех действительных x, такие, что $f(x)+f(1-x)=x^2$.

Ответ: Нет таких функций. ***Доказательство:*** Подставим $x=0$ и $x=1$, получим, что $f(0)+f(1)=0$, а $f(1)+f(0)=1$ – противоречие.

2. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ отмечены середины M и N, а на сторонах BC и DA – точки K и P соответственно так, что $\angle KMP=\angle KNP=90°$. Докажите, что K и P – середины сторон квадрата.



Доказательство 1: $\angle KMP=\angle KNP=90°$, значит, $MKNP$ – вписанный четырёхугольник с диаметром KP. Но середина O диаметра KP, которая является центром описанной окружности этого четырёхугольника, в силу теоремы Фалеса будет также лежать на средней линии MN квадрата. Значит, точка O, равноудалённая от M и N, будет являться серединой MN, т.е. центром квадрата. Но окружность с центром O и радиусом $MN/2$ будет касаться сторон BC и

AD в их серединах, которые и должны быть точками K и P, т.к. эта окружность будет также и окружностью, описанной около четырёхугольника $MKNP$.

Доказательство 2: Подсчёт углов показывает, что подобными являются треугольники в каждой из пар AMP, BKM и CNK, DPN. Тогда $\frac{AM}{AP}=\frac{BK}{BM}$ и $\frac{CN}{CK}=\frac{DP}{DN}$, значит, $AP\cdot BK=AM\cdot BM=CN\cdot DN=CK\cdot DP$. Отсюда получаем, что $\frac{AP}{DP}=\frac{CK}{BK}$ при условии $AP+PD=CK+KB$ (сторона квадрата). Значит, $AP=CK$, но эти отрезки ещё и параллельны, тогда $AKCP$ – параллелограмм, центром которого будет точка O – середина диагонали AC, являющаяся также центром квадрата и серединой средней линии MN. Следовательно, O ещё и центр симметрии четырёхугольника $MKNP$, который тогда является параллелограммом. Но в этом параллелограмме есть прямой угол, значит, $MKNP$ – прямоугольник с центром O. Тогда $OK=OP=OM$ – половина стороны квадрата, значит, K и P могут быть только серединами сторон.

Доказательство 3: Введём систему координат с центром в точке O – центре квадрата так, что вершины имеют следующие координаты: $A(-1;-1)$, $B(-1;\ 1)$, $C\ (1;\ 1)$ и $D\ (1;-1)$, тогда у точек M и N будут соответственно координаты $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$. Пусть абсциссы точек K и P равны соответственно k и p, тогда координаты этих точек будут равны соответственно $(k;\ 1)$ и $(p;-1)$. Тогда найдём координаты следующих векторов: $\overrightarrow{MK}\{k+1;\ 1\}$, $\overrightarrow{MP}\{p+1;-1\}$, $\overrightarrow{NK}\{k-1;\ 1\}$ и $\overrightarrow{NP}\{p-1;\ 1\}$. Т.к. $\angle KMP=\angle KNP=90°$, то равными нулю будут скалярные произведения в парах векторов $\overrightarrow{MK}\{k+1;\ 1\}$, $\overrightarrow{MP}\{p+1;-1\}$ и $\overrightarrow{NK}\{k-1;\ 1\}$, $\overrightarrow{NP}\{p-1;-1\}$. Т.е. получим в координатах, что $(k+1)(p+1)+1\cdot(-1)=0=(k-1)(p-1)+1\cdot(-1)$, следовательно, $kp+k+p=0=kp-k-p$ (*). Приравняв левую и правую части, получим, что $2k=-2p$, т.е. $k=-p$. Подставив в равенство (*), получим, что $k^2=0$, т.е. $k=p=0$. Значит, точки K и P являются соответственно серединами сторон квадрата BC и DA.

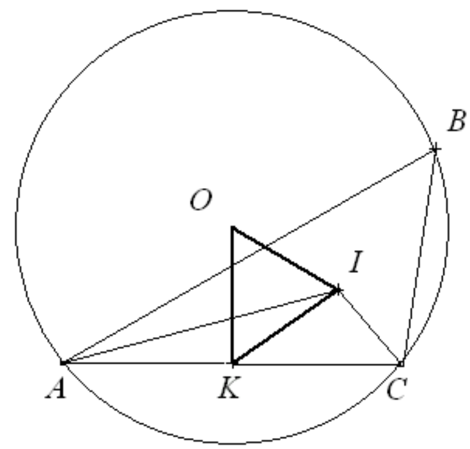
3. План города Квадратово представляет собой квадрат *ABCD* в виде сетки 8×8 кварталов (со стороной каждого квартала, равной 100 метрам). Серёжа в 15 часов вышел из школы в точке *C* в направлении автостанции *A* со скоростью 6 км/ч и успел прийти к автобусу, отправлявшемуся в 15.12. Идти он мог и по улицам (сторонам сетки, в том числе на границе сетки), и по дворам (диагоналям кварталов 1×1). Сколькими различными маршрутами мог пройти Серёжа?

Ответ*:** 73 маршрута. ***Решение: Заметим, что скорость 6 км/ч соответствует скорости 100м/мин, значит, можно считать, что Серёжа за не более чем 12 минут должен успеть пройти расстояние не более 12 единиц, где единица равна стороне квартала-клетки. Кратчайшее расстояние AC равно $8\sqrt{2}<8\cdot 1{,}42=11{,}36<12$. Кроме того, меньше 12 будет и длина маршрута, когда Серёжа вместо 8 дворов прошёл 7 дворов и 2 раза по единицам-улицам (по одной вертикальной и горизонтальной). В этом случае, $7\sqrt{2}+2<7\cdot 1{,}42+2=11{,}94<12$. Любой же другой маршрут будет длиннее 12 (что естественно надо обосновать, пользуясь тем, что $\sqrt{2}>1{,}41$). Значит, Серёжа прошёл либо 8-ю дворами по диагонали AC (1 маршрут), либо 7-ю дворами, одной вертикальной и одной горизонтальной единицей-улицей. Маршрутов второго вида будет $9\cdot 8=72$, т.к. из 9 кусков пути вертикальный участок мог быть любым из 9 по порядку, а горизонтальный – любым из 8 оставшихся по порядку участков. Значит, всего $1+72=73$ маршрута.

4. Саша записал на доске 10 действительных чисел, затем он увеличил каждое число на k>0 и произведение всех чисел не изменилось. Он опять их все увеличил на k и снова произведение всех чисел не изменилось. Какое максимальное число таких операций может провести Саша, чтобы произведение не изменилось? *(задача предложена Костроминым Александром, 11 класс, лицей №87 г.Н.Новгорода)*

Ответ*:** 9 операций. ***Решение: Пусть удалось провести n таких операций. Тогда на t-м шаге будет произведение: $(a_1+kt)(a_2+kt)\ldots(a_{10}+kt)=a_1a_2\ldots a_{10}$ – произведение чисел нашего изначального набора, где t – натуральное число от 1 до n. После раскрытия скобок, вычитания $a_1a_2\ldots a_{10}$, вынесения за скобки и сокращения на $kt>0$ получится некий многочлен 9-й степени, зависящий от положительной переменной t. Но многочлен 9-й степени имеет максимум 9 различных корней, значит, и t может принимать не более 9 значений. Пример набора на 9 операций: возьмём числа 0, $-k$, $-2k$, $-3k$, …, $-9k$, тогда на каждом шаге наше произведение равно 0.

5. В треугольнике ABC $\angle A=30°$, O и I – центры описанной и вписанной окружностей соответственно, K – середина стороны AC. Докажите, что треугольник KIO не может быть правильным.



Доказательство: Заметим, что точки K и O лежат на серединном перпендикуляре к AC. Если $\angle B>90°$, то точки O и I находятся по разные стороны от прямой AC и $\angle OKI>90°$; если $\angle B=90°$, то O совпадает с K, значит, в обоих этих случаях у нас не будет правильного треугольника KIO. Поэтому осталось разобрать только случай, когда $\angle B<90°$. Предположим, что ΔKIO – правильный, тогда $\angle IKC=\angle OKC-\angle OKI=90°-60°=30°$, значит, $KI \parallel AB$. $\angle IAK=\angle BAC/2=15°$, значит, $\angle AIK=\angle IKC-\angle IAK=30°-15°=15°=\angle IAK$, т.е. ΔAIK – равнобедренный. Значит, $IK=AK=KC$, следовательно, ΔAIC – прямоугольный. Тогда $\angle IAC+\angle ICA=90°$, а $\angle BAC+\angle BCA=2(\angle IAC+\angle ICA)=2\cdot 90°=180°$, что для двух углов треугольника невозможно. Противоречие. Значит, ΔKIO не может быть правильным.

6. Докажите, что среди любых 33 натуральных чисел, взаимно простых с 323323, найдутся два, сумма которых также будет взаимно проста с 323323.

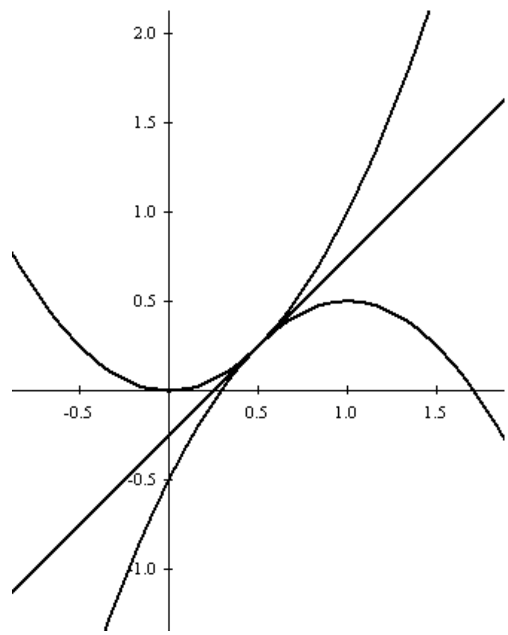
Доказательство: Из условия взаимной простоты с $323323=7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$ следует, что ни одно из 33-х чисел не имеет при делении на каждое из этих пяти простых чисел остаток 0. Разобьём ненулевые остатки при делении на каждое из них на две равные группы (малые – до половины числа, большие – после половины числа), т.е. 1-3 и 4-6 при делении на 7, 1-5 и 6-10 при делении на 11, 1-6 и 7-12 при делении на 13, 1-8 и 9-16 при делении на 17, 1-9 и 10-18 при делении на 19. Закодируем теперь каждое число двоичным пятизначным кодом, где 0 означает малый остаток, а 1 означает большой остаток при делении на соответствующее по номеру простое число. Например, число 25 будет закодировано как 10100, потому что даёт остатки 4 (большой), 3 (малый), 12 (большой), 8 (малый) и 6 (малый) при делении на 7, 11, 13, 17 и 19 соответственно. Всего существует $2^5=32$ пятизначных двоичных кода. Значит, по принципу Дирихле среди любых 33 натуральных чисел найдутся два числа с одинаковым кодом. Рассмотрим их сумму. Т.к. коды обоих чисел одинаковы, то при делении на каждое из данных пяти нечётных простых чисел остатки будут либо оба малыми, либо оба большими. Если оба остатка при делении на p были малыми, то их сумма будет больше 0, но меньше p; если оба остатка были большими, то их сумма будет больше p, но меньше $2p$. Значит, сумма этих двух чисел не будет делиться на каждое из данных пяти простых чисел, т.е. будет взаимно проста с 323323, что и требовалось доказать.

Комментарий: *Число 323323 состоит из двух цифр, что даёт подсказку воспользоваться двоичным кодированием.*

11 класс

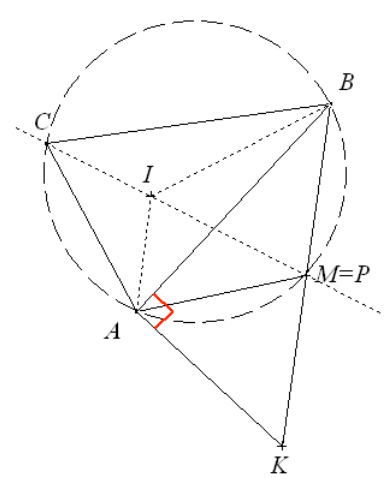
1. Найдите параболу $y = -x^2 + bx + c$, которая касается параболы $y=x^2$ и имеет с ней в точке касания общую касательную, параллельную прямой $y=x$.

Ответ: $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$. ***Решение***: Парабола $y=x^2$ касается прямой $y=x+a$ сверху, значит, неравенство $x^2 \geq x+a$ должно обращаться в равенство ровно в одной точке, т.е. выражение x^2-x-a должно быть полным квадратом $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$. Значит, касательной будет прямая $y = x - \frac{1}{4}$, а точкой касания окажется точка с координатами $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Параболы имеют одинаковый по модулю старший коэффициент, значит, они геометрически будут равны. Тогда точка касания K окажется центром симметрии получающейся геометрической конструкции. Значит, вершина второй параболы будет в точке $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, симметричной относительно K началу координат – вершине первой параболы. Следовательно, уравнение второй параболы имеет вид $y = -(x-1)^2 + \frac{1}{2} = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.



Комментарий: *Приведённое выше решение использует симметрию чертежа, а типичным решением, очевидно, окажется решение с производной.*

2. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен прямоугольный треугольник ABK с $\angle A=90°$ и $\angle K=(\angle BAC+\angle ABC)/2$. Точка M – середина гипотенузы BK. Докажите, что прямая CM проходит через центр I вписанной окружности треугольника ABC.

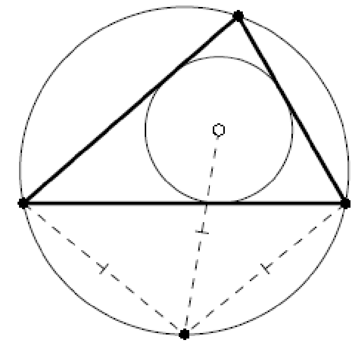


***Доказательство* 1:** $\angle AMB=\angle MAK+\angle MKA=2\angle MKA$, т.к. ΔAMK – равнобедренный в силу свойств прямоугольного треугольника ABK. Значит, $\angle AMB=\angle BAC+\angle ABC$, тогда $\angle AMB+\angle CAB=180°$. Получаем, что $ACBM$ –

вписанный четырёхугольник с равными сторонами-хордами AM и BM, следовательно, CM – биссектриса $\angle ACB$, значит, проходит через точку пересечения биссектрис ΔABC – его центр I вписанной окружности.

<u>Доказательство 2:</u> Пусть P – точка пересечения биссектрисы угла ACB (это луч CI, где I центр вписанной окружности ΔABC, который является точкой пересечения его биссектрис) и описанной окружности ΔABC. Тогда P – середина дуги AB, не содержащей C, а ΔAPB – равнобедренный с $\angle ABP= \angle BAP =\angle ACB/2$ (вписанные углы, опирающиеся на равные дуги) $= (180°-\angle BAC-\angle ABC)/2=90°-\angle AKB=\angle ABK$. Таким образом, луч BP совпадает с лучом BK, а на этом луче существует единственная точка (P), удовлетворяющая условию равенства углов $\angle ABP=\angle BAP$, которая является серединой гипотенузы BK прямоугольного ΔABK в силу известных её свойств, т.е. является точкой M. Значит, P совпадает с M, прямая CP совпадает с CM и точка I лежит на этой прямой, что и требовалось доказать.

4.6.1) **Лемма о трезубце**



<u>Комментарий</u>: *Заметим, что наша задача имеет родственную связь с леммой о трезубце – чертёж 4.6.1. на с. 38 в книге Акопяна А.В. «Геометрия в картинках».*

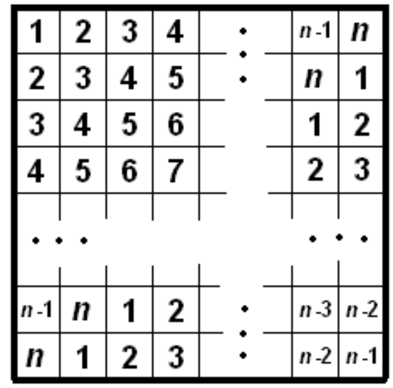
3. Чему равно наибольшее значение выражения $(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – перестановка натуральных чисел 1, 2, …, n?

<u>Ответ</u>: $(n+1)^n$. ***<u>Доказательство 1</u>:*** Применим неравенство Коши в общем виде $\sqrt[n]{(1+a_1)(2+a_2)...(n+a_n)} \le \dfrac{(1+a_1)+(2+a_2)+...+(n+a_n)}{n} = \dfrac{(1+2+...+n)\cdot 2}{n} = \dfrac{(n+1)n}{n} = n+1$ (пользуемся также тем, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=1+2+\ldots+n$), откуда и получаем неравенство $(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n)\le(n+1)^n$. При этом равенство достигается тогда, когда наши переменные идут в убывающем порядке: $a_1=n$, $a_2=n-1$, …, $a_n=1$.

<u>Комментарий</u>: *Т.к. нам надо оценить произведение сверху, а сами числа имеют вид суммы, то очевидным образом напрашивается применить неравенство Коши, – метод «кошизации»:☺.*

<u>Доказательство 2</u>: Воспользуемся классической леммой, используемой в теории транснеравенства, которая ещё носит образное название «Деньги – к деньгам»: начисление на большую сумму большего процента, а на меньшую сумму – меньшего процента, выгоднее, чем наоборот, т.е. «Если $x\ge y$, $a\ge b$, то $xa+yb\ge xb+ya$. При этом в случае различных чисел окончательное неравенство будет строгим». Для доказательства этой леммы перенесём все числа в одну сторону и разложим на множители: $(xa+yb)-(xb+ya)=(x-y)(a-b)\ge 0$, т.к. обе скобки будут неотрицательными согласно условию упорядоченности чисел, что и требовалось доказать. В случае же различных чисел в каждой паре неравенство получится строгим. Раскроем теперь скобки в произведении любой пары ($k<p$) множителей исходного выражения $(k+a_k)(p+a_p)=kp+a_ka_p+ka_p+pa_k$, где первые два слагаемых не зависят от упорядоченности чисел a_k и a_p. А вот для увеличения суммы двух других слагаемых согласно доказанной лемме надо, чтобы a_k было больше a_p. Т.к. это условие выполняется для любой пары множителей-скобок, то переставляя самое большое число n в первую скобку, следующее по убыванию число $(n-1)$ во вторую и так далее, мы получим наибольшее возможное значение всего произведения. При этом

важно, что все переставляемые числа были различными и положительными, т.к. переставив ровно два числа мы увеличим произведение соответствующей пары скобок, умножая его при этом на некоторое положительное число – произведение остальных множителей-скобок, которое в момент перестановки не меняется.



4. Клетки доски $n\times n$ раскрашены в n цветов диагональной раскраской (числами от 1 до n как показано на рисунке справа). При каких натуральных n на доску можно поставить n не бьющих друг друга ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета?

Ответ: При всех нечётных n, например, поставив их по главной диагонали из левого верхнего угла до правого нижнего угла. Они займут сначала клетки со всеми подряд идущими нечётными номерами (1, 3, 5, …, n), а затем со всеми подряд идущими чётными номерами (2, 4, …, $n-1$).

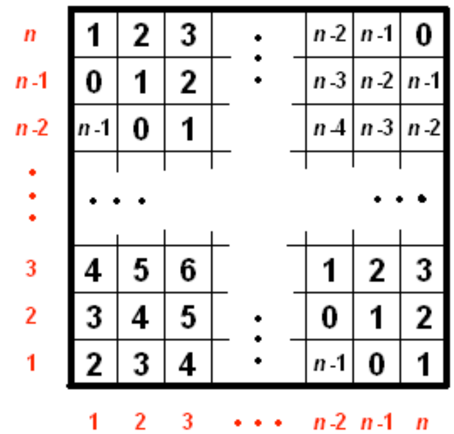
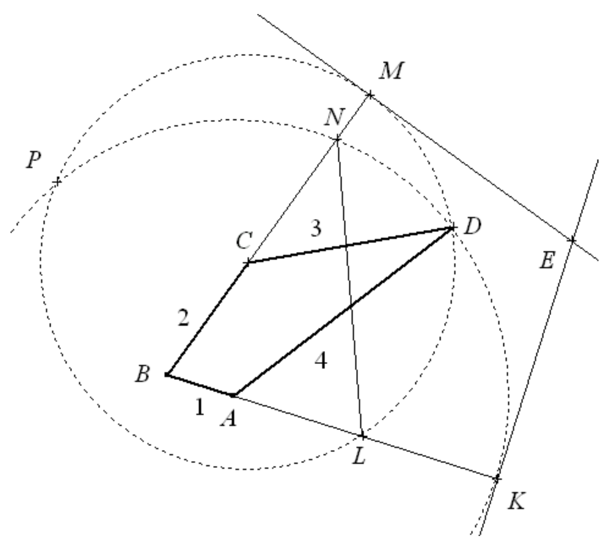


рис.2

Доказательство для чётных n: Повернём нашу доску на 90° против часовой стрелки и переименуем цвета, увеличив все номера на 1 по модулю n, т.е. номера $n-1$ и n превратив соответственно в 0 и 1 (см. рис.2). Пронумеруем столбцы слева направо и строки снизу вверх числами от 1 до n. Тогда в каждой клетке окажется записан остаток при делении на n её суммы координат. Заметим при этом, что сумма координат клеток под n ладьями, не бьющими друг друга, равна $(n+1)n=2\cdot(1+2+3+\ldots+n)$, т.к. каждое из n чисел по вертикали и n чисел по горизонтали будет посчитано ровно один раз (для ладьи, стоящей в соответствующем ряду). Предположим, что все n ладей оказались на разных цветах. Тогда остаток (0) при делении на n суммы координат $(n+1)n$ клеток под ладьями должен равняться остатку суммы наших n чисел $0+1+2+3+\ldots+(n-1)=(n-1)n/2\equiv n/2 \pmod{n}$, т.к. n – чётное число. Противоречие. Значит, найдутся ладьи, стоящие на одном цвете.

5. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, в котором AB=1, BC=2, CD=3, DA=4. Какие значения может принимать $\angle D$?

Ответ: $\angle D\in(0;\ \arccos(2/3))$. ***Доказательство:*** Пусть $\angle B=\beta$, $\angle D=\varphi$. Тогда из треугольников ABC и ADC по теореме косинусов получаем $AC^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\beta=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi=(20+4\cos\beta)/24$. Но угол β в силу выпуклости четырёхугольника лежит в интервале $(0;\pi)$, значит, $\cos\varphi$ лежит в интервале $(2/3;1)$, а угол φ лежит в интервале $(0;\arccos(2/3))$. Докажем теперь, что при любом фиксированном угле β угол φ не только определяется однозначно, но и будет существовать соответствующий выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Для каждого возможного



$\angle B=\beta$ рассмотрим ΔBKM такой, что $BK=BM=5$, точки A и C лежат соответственно на сторонах BK и BM. Тогда точка D должна быть точкой пересечения окружностей с центрами A и C радиусами $AK=4$ и $CM=3$ соответственно. Эти окружности пересекаются в двух точках D и P, вторая из которых P окажется с точкой B в одной полуплоскости относительно прямой AC, т.к. точки P и D будут симметричны относительно AC, а точка D будет в разных полуплоскостях с B, что мы докажем ниже. Значит, четырёхугольник $ABCP$ не будет выпуклым, т.е. точка P не окажется нужной нам четвёртой вершиной выпуклого четырёхугольника. Докажем теперь, четырёхугольник то $ABCD$ будет выпуклым. Первая окружность пересекает отрезок CM в некоторой точке N, т.к. $AC<AB+BC=1+2=3<4=AN=5-1=BM-AB<AM$ (в силу неравенств треугольника). Вторая окружность аналогично пересекает отрезок AK в некоторой точке L, т.к. $CA<CB+CA=2+1=3=CL=5-2=BK-CB<CK$. Значит, в силу непрерывности дуги KN и ML пересекутся в точке D внутри выпуклого пятиугольника $MEKLN$ (E – точка пересечения прямых KE и ME, перпендикулярных BK и BM соответственно), значит, и внутри угла ABC, т.е. $ABCD$ будет выпуклым четырёхугольником.)

<u>Комментарий</u>: *Если не было доказано, что для любого значения из полученного интервала существует выпуклый четырёхугольник ABCD, то решение оценивается не более чем в 3 балла из 7.*

6. Докажите, что для любого натурального *n* существуют *n* подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых не равно произведению цифр никакого натурального числа.

<u>Доказательство</u>: Рассмотрим n различных простых чисел (p_1, p_2, …, p_n), не меньших 11. Тогда по китайской теореме об остатках на интервале от 1 до $P= p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$ в силу взаимной простоты взятых нами n чисел найдётся такое натуральное число A, которое будет сравнимо с $(-k)$ по модулю p_k для любого целого k в пределах от 1 до n. Тогда в наборе чисел $A+1$, $A+2$, …, $A+n$ для каждого k число $A+k$ будет сравнимо с 0 по модулю p_k, т.е. будет делиться на это простое число, которое будет не меньше 11. Значит, каждое из наших n подряд идущих чисел не будет являться произведением цифр никакого натурального числа.

Китайская теорема об остатках. Пусть целые числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты, то есть $(m_i, m_j) = 1$ при $i \neq j$, $m = m_1 \ldots m_n$, и $a_1, \ldots, a_n$, A — произвольные целые числа. Тогда существует ровно одно целое число x такое, что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases} \qquad (4.3)$$

и $A \leqslant x < A + m$. (См. также 6.51.)

<u>Комментарий</u>: *О китайской теореме об остатках (другое название – теорема Сон Ши) можно узнать, например, из книги Алфутовой, Устинова «Алгебра и теория чисел для математических школ» (с.66). Этот задачник является одним из лучших сборников* *по подготовке к олимпиадам. Вывод очевиден – к олимпиадам надо готовиться!*