Нижегородская (IX открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая школа экономики – Нижний Новгород, 11 декабря 2011 года

УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

8 класс

1. Вася, когда едет на автобусе, любит играть в игру «100», т.е. из шестизначного номера выданного ему билета составляет числовое выражение, равное 100. При этом можно использовать знаки «+», «–», «:», «×» и скобки, но переставлять цифры местами нельзя. Однажды он получил билет вида $\overline{ababcd}$(*разные буквы – разные цифры*, *одинаковые буквы – одинаковые цифры*) и сразу составил сотню двумя разными способами: $100=(a+b)\cdot(a+b)+\overline{cd}=\overline{ab}+\overline{ab}+c+d$. Какой номер мог быть у него? Предложите также ещё один способ создания 100 из этого номера.

Ответ: 454519; другие способы, например, 4+54+51–9=100, (4+5–4+5)·(1+9)=100, –4+54+5·(1+9)=100, 45·4·5·1:9=100. ***Решение:*** Т.к. сумма двух последних цифр $1\le c+d\le 9+8=17$, то из второго равенства следует, что $41{,}5\le\overline{ab}\le 49{,}5$; тогда $a=4$. А из первого равенства следует, что $a+b\le 9$,т.е. $b\le 5$. Переберём все возможные варианты числа $\overline{ab}$ (42, 43 и 45), находя каждый раз из первого равенства число $\overline{cd}$ и проверяя его сумму цифр. Получим, что нам подходит только 45, а по нему уже найдём и остальные цифры.

Комментарий: *Когда садишься на транспорт, то … сразу получаешь из рук кондуктора задачу, значит, есть время занять мозги делом и потренироваться в устном счёте. Кстати, замечено, что с очень высокой вероятностью на транспорте в руках оказывается хороший билет, из которого можно составить 100. В случае неудачи разрешается использовать факториал, т.к. за счёт 0!=1 и других факториалов появляются дополнительные возможности в создании 100.*

2. Василиса Премудрая решила проверить уровень образования Ивана-царевича и задала ему следующую задачу: «На столе лежат числами вверх 9 карточек с числами $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{10}$ и сундук с приданым, с 10!=1·2·3·…·10 жемчужинами. Можно взять любую карточку и забрать из сундука часть жемчужин, равную написанному на этой карточке числу. Затем можно взять любую оставшуюся на столе карточку и забрать соответствующую часть оставшегося жемчуга из сундука. И сделать так все 9 раз. Как надо действовать, чтобы забрать из сундука максимально возможное количество жемчужин?» Как же надо действовать?

***Ответ*:** порядок выбора карточек не имеет значения. ***Решение*:** Рассмотрим количество жемчуга, остающееся в сундуке после каждой операции. Если взяли карточку $\frac{1}{n}$, то в сундуке осталась $\frac{n-1}{n}$ часть имеющегося на данный момент жемчуга. Значит, независимо от порядка выбора карточек в сундуке останется $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$ часть всего жемчуга, т.е. 10!:10=9!=362880 жемчужин. Следовательно, из сундука всегда возьмут 10!–9!=3265920 жемчужин. Заметим также, что при любой операции всегда будет оставаться число, кратное натуральным числам, записанным на ещё неиспользованных карточках, т.к. у числа жемчужин в сундуке в изначальном произведении (10!) как множитель будет пропадать только знаменатель взятой карточки и при этом будут появляться новые целые множители. Значит, при любом порядке операций Иван всегда будет брать целое число жемчужин.

Комментарий 1**:** *Если Иван-царевич действительно любит Василису Премудрую, то … дело совсем не в приданом:☺. Как указал в своём ответе один из школьников – «не в деньгах (жемчужинах) счастье».*

Комментарий 2**:** *Если не указано в решении, что на каждом шаге всегда будет взято целое число (см. конец решения), то решение оценивается уже из 6 баллов.*

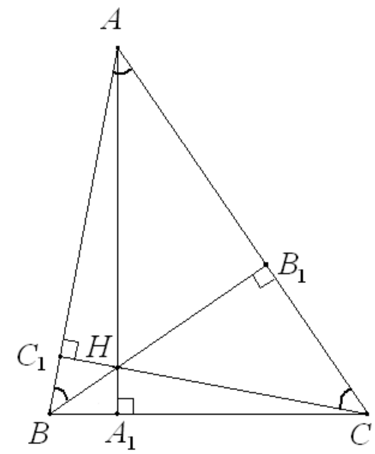
3. Какое наибольшее количество различных простых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма любых четырёх подряд идущих чисел также оказалась простым числом?

Ответ: 7, например, подойдёт последовательность 7, 5, 3, 2, 13, 11, 17, где соответствующие суммы по четыре подряд идущих числа равны 17, 23, 29, 43. ***Доказательство оценки:*** Сумма четырёх простых чисел будет не меньше 8, значит, чтобы оказаться простой, она должна быть нечётной, следовательно, не может состоять только из нечётных простых чисел, т.е. обязана содержать 2. Но двойка может быть только одна, следовательно, в ряду не более 7 чисел (не более трёх – перед двойкой и не более трёх – после двойки). Если чисел будет ровно 7, то двойка должна стоять на четвёртом месте, что и даёт нам возможность построить нужный пример.

4. На шахматную доску по очереди выставляются ладьи так, что каждая нечётная по очереди выставленная ладья никого не бьёт, а каждая чётная по очереди выставленная ладья бьёт ровно 1 выставленную ранее ладью. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на доску по этим правилам?

1	2	4	6				
8							
10							
				3			
					5		
						7	
							9

Ответ: 10 ладей. Пример см. на рисунке, где число показывает порядковый номер выставляемой ладьи. ***Доказательство оценки (с помощью теории графов):*** Рассмотрим двудольный граф, в котором вершины – горизонтали и вертикали, а рёбра – ладьи, стоящие на пересечении горизонтали и вертикали. Тогда постановка нечётной ладьи, бьющей 0 других ладей, создаёт новую компоненту связности из двух вершин, соединённых ребром. Постановка ладьи, бьющей 1 ладью, подсоединяет к какой-нибудь компоненте связности ещё одну висячую вершину. Т.о., в графе количество изолированных вершин (изначально 16) уменьшается на 2+1=3 за каждые два хода. Значит, на доску можно выставить не более [16:3]=5 пар ладей, при этом одна изолированная вершина останется и для следующего хода не будет хватать изолированных вершин. Следовательно, на доску можно поставить не более 5·2=10 ладей. ***2-й способ доказательства оценки (без графа):*** Каждая нечётная по номеру ладья бьёт ровно 4 новые стенки из 32=4·8 стенок на доске (сторон граничных клеток), а каждая чётная ладья бьёт ровно 2 новые стенки, т.к. две стенки ряда (строки-столбца), в котором эта ладья стоит вместе с побитой ею ладьёй, уже были ранее побиты той ладьёй. Значит, каждая пара подряд выставленных ладей бьёт ровно 6 новых стенок, тогда можно выставить ровно [32:6]=5 пар ладей (всего 10 ладей), после чего останется ровно 32–5·6=2 непобитые стенки, которых уже не хватит для появления на доске 11-й ладьи, т.к. ей надо 4 новые стенки.



5. *H* – ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника *ABC*, в котором *AH*=*BC*=*a*. Найдите площадь четырёхугольника *ABHC*.

Ответ: $a^2/2$. ***Решение:*** Пусть AA_1 – высота треугольника ABC (см. рис.), тогда площадь четырёхугольника *ABHC* равна разности площадей двух из треугольников – *ABC* и *HBC*, т.е. $BC \cdot AA_1/2 - BC \cdot HA_1/2 = BC \cdot AH/2 = a^2/2$.

Комментарий: *Вот такая простенькая утешительная геометрия и … снова мало решивших, что грустно.*

9 класс

	с 1	
кор 4	ф 5	
конь 2	Л 3	

1. Можно ли на шахматную доску выставить по очереди в некотором порядке 5 главных шахматных фигур (ладью, коня, слона, ферзя и короля) так, чтобы каждая фигура в момент постановки на доску била все выставленные до неё фигуры?

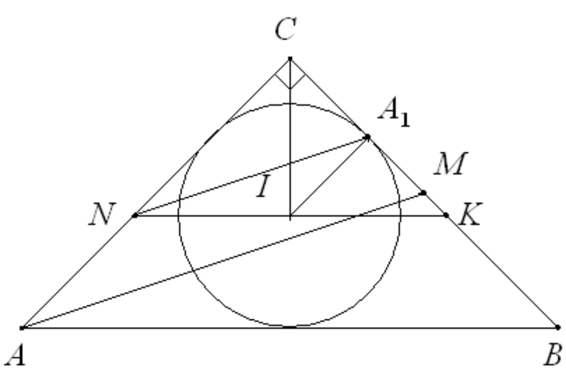
Ответ: да, например, как на рисунке, где первой выставленной фигурой будет слон, 2 – конь, 3 – ладья, 4 – король, 5 – ферзь.

2. Докажите, что у многочлена $P(x)=x^{2011}+2x^{2010}+4x^{2009}+8x^{2008}+\ldots+2^{2010}x+2^{2011}$ есть хотя бы один целочисленный корень.

Доказательство: $P(-2)= -2^{2011}+2^{2011}-2^{2011}+2^{2011}-\ldots-2^{2011}+2^{2011}=0$, т.к. будет чётное количество (2012) равных по модулю и чередующихся по знаку чисел. Значит, целое число (–2) будет корнем этого многочлена.

3. В прямоугольном треугольнике *ABC* ($\angle C=90°$) A_1 – точка касания вписанной окружности (с центром *I*) со стороной *BC*. Прямая, проходящая через A_1 параллельно медиане *AM*, пересекает *AC* в точке *N*. Оказалось, что *NI* || *AB*. Найдите остальные углы ΔABC.

Ответ: $\angle A=\angle B=45°$. ***Доказательство***: Пусть *NI* пересекает *BC* в точке *K*. По теореме Фалеса, $CA_1/A_1M=CN/NA=CK/KB$. Но $CK+KB=2 \cdot CM=2 \cdot (CA_1+A_1M)$, значит, $CK=2 \cdot CA_1$ (речь идёт, фактически, о гомотетии с коэффициентом 2 и центром *C*), т.е. $CA_1=A_1K$. Т.к. радиус $IA_1 \perp CB$ и *CI* – биссектриса прямого угла, то ΔCA_1I – прямоугольный равнобедренный. Тогда $IA_1=CA_1=A_1K$, следовательно, ΔCIK – прямоугольный ($IK \perp CI$). Но $IK \| AB$, значит, биссектриса *CI* содержит ещё и высоту ΔABC, т.е. ΔABC – равнобедренный (*AC*=*BC*). Тогда $\angle A=\angle B=45°$.

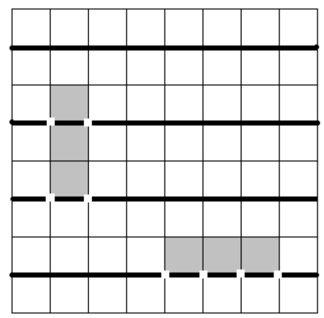


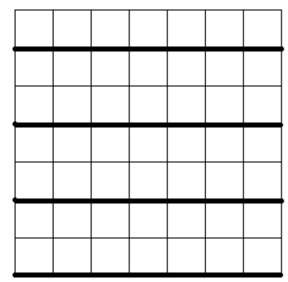
4. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел *a* и *b*, удовлетворяющих равенству $(a+b)^2=a^3+b$.

Ответ: $a=2$, $b=1$. ***Решение***: Раскроем скобки и перенесём числа в разные стороны двумя способами: $a^3-a^2=b^2+2ab-b$ и $b^2-b=a^3-a^2-2ab$. Из первого равенства следует, что $a^3-a^2=a^2(a-1)\vdots b$, но в силу взаимной простоты a и b получаем, что $(a-1)\vdots b$, т.е. либо $a=1$, либо $a-1\geq b$. Из второго равенства следует, что $b^2-b=b(b-1)\vdots a$, откуда в силу взаимной простоты a и b получаем, что $(b-1)\vdots a$, т.е. либо $b=1$, либо $b-1\geq a$. Оба полученных неравенства $a-1\geq b$ и $b-1\geq a$ одновременно выполняться не могут, значит, либо $a=1$, либо $b=1$. В первом случае при $a=1$ получаем уравнение $b+b^2=0$, не имеющее решений в натуральных числах. Во втором случае при $b=1$ после деления на $a>0$ получаем уравнение $a+2=a^2$, имеющее натуральный корень $a=2$.

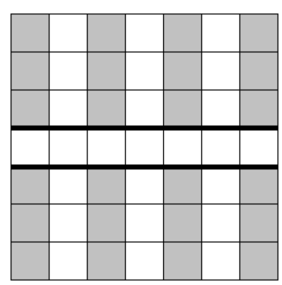
5. Пусть T_k – максимальное количество несоприкасающихся между собой кораблей 1×3 на поле $k\times k$. Докажите, что $T_{2n}=T_{2n-1}$ при любом натуральном n.

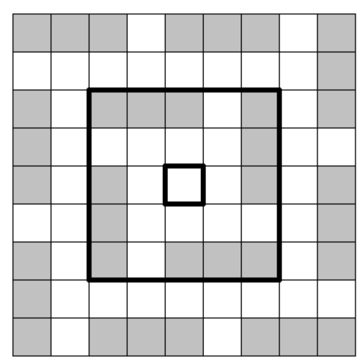
Доказательство: Очевидно, что при $n=1$ получаем $T_2=T_1=0$. Пусть теперь $n\geq2$. Рассмотрим на поле $2n\times2n$ все линии сетки с чётными номерами, считая их по порядку сверху поля (всего n линий, см. рис. для случая $n=8$). Заметим, что любой корабль 1×3 содержит ровно 4 узла на этих линиях – либо все 4 узла на одной, либо по 2 узла на двух подряд идущих из этих линий. При этом на каждой линии будет занято чётное количество узлов, т.е. не более $2n$. Тогда на всей доске корабли займут не более $n\cdot2n=2n^2$ на этих «чётных» линиях, значит, кораблей будет не более $\left[\frac{2n^2}{4}\right]=\left[\frac{n^2}{2}\right]$. Аналогично рассматриваем такие же n «чётных» линий на поле $(2n-1)\times(2n-1)$ (см. рис. для случая $n=7$), на которых будет по $2n$ узлов, и получаем такую же оценку для T_{2n-1}. Для полей 1×1 и 2×2 очевидно, что $T_1=T_2=0$, что соответствует полученной оценке. Покажем теперь, что на поле $(2n-1)\times(2n-1)$ при $n\geq2$ можно выставить $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ несоприкасающихся





кораблей 1×3, а тогда и на поле $2n\times2n$ мы сможем привести точно такую же расстановку кораблей, добавив ещё по одному свободному ряду клеток снизу и справа. <u>1 случай:</u> $2n-1=4k-1$, где k – любое натуральное число, т.е. $n=2k$ - чётное число. Тогда выделяем k горизонтальных полос ширины 3 (см. рис. для случая $2n-1=7$), между которыми будет по одному свободному горизонтальному ряду. В каждой такой полосе ставим вертикально ровно $2k$ кораблей с пропусками между ними одного ряда. Всего расставим $T_{2n-1}=k\cdot2k=2k^2=\frac{n^2}{2}=\left[\frac{n^2}{2}\right]$ кораблей, что соответствует доказанной выше оценке. <u>2 случай:</u> $2n-1=4k+1$, где k – любое натуральное число, т.е. $n=2k+1$ - нечётное число. Разобьём наше поле на каёмки ширины 2, вложенные друг в друга (см. рис. для случая $2n-1=9$), причём длина внешней стороны каждой каёмки сравнима с 1 по модулю 4, значит, в





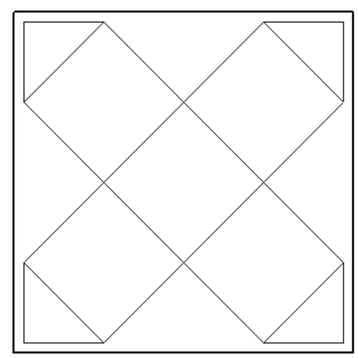
каждой каёмке с помощью метода «пропеллера» можно по краю, начиная с угла, последовательно выставлять корабли, которые будут занимать клетки циклами по 4 штуки (3 клетки для корабля и 1 пустая клетка), а последняя клетка будет угловой и одновременно начальной клеткой для перпендикулярного ряда кораблей. При этом последняя «каёмка» окажется одиночной клеткой. В результате на корабли уйдут все узлы нашей доски, кроме 4 узлов в центре – вершин центральной клетки-«каёмки», что при подсчёте по 8 узлов на каждый корабль даст нам $T_{2n-1}=\frac{(2n)^2-4}{8}=\frac{n^2-1}{2}=\left[\frac{n^2}{2}\right]$ кораблей, что соответствует доказанной выше оценке.

10 класс

1. Найдите все квадратные трехчлены ax^2+bx+c, корнями которых будут действительные числа a и c.

Ответ: 1). ax^2-a^2x, где a – любое ненулевое действительное число; 2). $x^2-(c+1)x+c$, где c – любое действительное число; $-x^2+(c-1)x+c$, где с – любое действительное число. Отметим также, что при $a=\pm1$ в первом случае будут получаться те же многочлены, что и при $c=0$ в двух других случаях. ***Решение*:** По теореме Виета произведение корней $ac=\frac{c}{a}$, а сумма корней $a+c=-\frac{b}{a}$. Рассмотрим 2 случая: $c=0$ и $c\neq0$. При $c=0$ из первого уравнения получим, что a – любое ненулевое действительное число; из второго получим, что $b=-a^2$. При $c\neq0$ получим, что $a^2=1$, $b=-a^2-ac=-1-ac$.

2. Можно ли из квадрата со стороной 3 вырезать многоугольник площади 6, которым можно полностью без наложений и пустот обернуть единичный куб? *(классическая фольклорная задача)*



Ответ: Да, см. рисунок, причём эту фигуру можно вырезать даже из квадрата с меньшей, чем 3, стороной ($2\sqrt{2}$).

3. В треугольнике ABC с $\angle B=30°$ на средней линии, параллельной стороне AC, взята произвольным образом точка K. Докажите, что $KB<AC$.

***Доказательство* 1:** Рассмотрим описанную окружность треугольника ABC с центром O (рис.1), тогда центральный угол $\angle AOC=2\angle ABC=60°$, значит, ΔAOC – равносторонний. Отметим точку K' пересечения луча BK и отрезка AC, тогда в силу свойств средней линии $K'B=2\cdot KB$, но $K'B$ не превосходит диаметра окружности, который равен удвоенной стороне треугольника AOC, т.е. $2\cdot AC$, значит, $2\cdot KB\leq2\cdot AC$, откуда $KB\leq AC$ (в частности, возможно и равенство, если $K=O$ и совпадает с одним из концов средней линии).

***Доказательство* 2:** Пусть $A'C'$ – требуемая средняя линия треугольника ABC (рис.2). Отобразим точку K относительно сторон AB и CB, получив точки K_1 и K_2 соответственно. Тогда $\angle K_1BK_2=2\angle A'BC'=60°$, $BK_1=BK=BK_2$, т.е. ΔK_1BK_2 – равносторонний, значит, $KB=K_1K_2$. Но длина ломаной $K_1A'C'K_2$, во-первых, будет не меньше K_1K_2, во-вторых, длина этой ломаной равна удвоенной длине отрезка $A'C'$, т.к. в силу симметрии $K_1A'=A'K$, $K_2C'=C'K$, т.е. длина этой ломаной равна $AC=2\cdot A'C'$. Значит, $KB=K_1K_2\leq2\cdot A'C'=AC$.

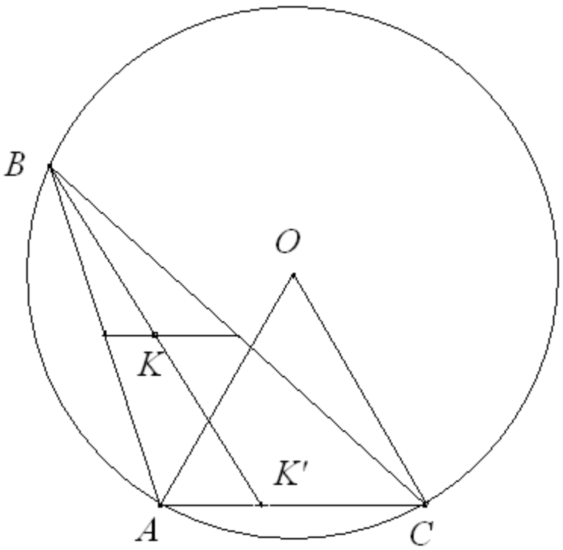


рис.1

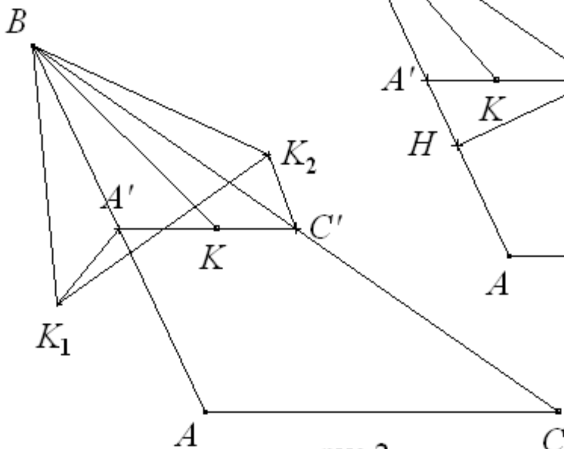


рис.2

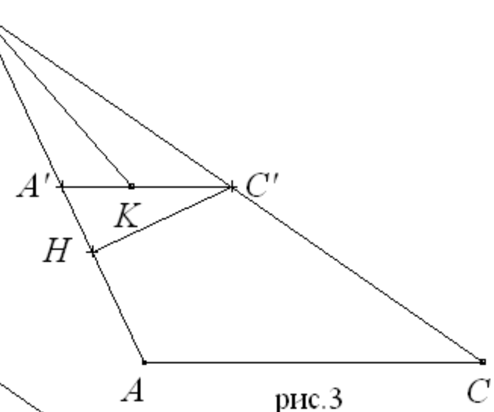


рис.3

***<u>Доказательство</u>* <u>3</u>:** Пусть *A'C'* – требуемая средняя линия треугольника *ABC* (рис.3). Т.к. сумма углов *A'KB* и *C'KB* равна 180°, то по принципу Дирихле один из них не меньше 90°. С точностью до симметрии можно считать, что ∠ *C'KB*≥90°, тогда в Δ *C'KB* наибольшей стороной будет *C'B*. Рассмотрим проекцию *H* точки *C'* на прямую *AB*, тогда, во-первых, в силу свойства наклонной *A'C'*≥*HC'*, а во-вторых, *BC'*=2·*HC'*, т.к. в прямоугольном треугольнике с углом 30° гипотенуза в два раза больше катета, лежащего напротив угла 30°. Кроме того, в силу свойств средней линии *AC*=2·*A'C'*. Значит, *KB*≤*BC'*=2·*HC'*≤2·*A'C'*=*AC* (в частности, возможно и равенство, если *K*=*C'* и *A'*=*H*.)

***<u>Комментарий</u>*:** *Если в работе не было учтено, что на самом деле KB≤AC, то решение оценивалось из 6 баллов.*

4. Сколько существует различных представлений числа 63000 в виде суммы нескольких (не менее двух) подряд идущих (по возрастанию) целых чисел?

<u>Ответ:</u> 47. ***<u>Решение</u>*:** Решим задачу в общем виде для любого натурального *n*. Возможны два случая, когда в сумме будет нечётное и чётное количество слагаемых, которое обозначим через *k*, причём для каждого *k* будет своё представление числа *n* в виде нужной нам суммы целых чисел. 1). В случае нечётного количества слагаемых сумма всех чисел равна произведению этого количества на среднее число *p*, которое будет при этом натуральным числом, т.е. *n=kp*, тогда *k* может являться любым натуральным нечётным делителем числа *n*, за исключением 1. Т.е. всего *d*(*n*)−1 вариант, где *d*(*n*) − количество нечётных натуральных делителей числа *n*. 2). В случае чётного количества слагаемых (*k*=2*m*, где *m* – натуральное число) сумма всех чисел равна произведению этого количества на среднее число, равное среднему арифметическому двух чисел в середине ряда, т.е. полуцелому числу *p*/2, где *p* – нечётное натуральное число. Получаем равенство *n*=*k*·*p*/2=2*m*·*p*/2=*mp*, тогда *p* может являться любым натуральным нечётным делителем числа *n*, а по числу *p* находим число *m*, затем *k*=2*m*. Т.е. всего *d*(*n*) вариантов. Таким образом, количество нужных нам представлений равно 2*d*(*n*)−1, где *d*(*n*) − количество нечётных натуральных делителей числа *n*. А число *d*(*n*) найдём из разложения *n* на простые множители аналогично формуле $\tau(n)=\tau(p_1^{\alpha_1}\cdot p_1^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s})=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_s+1)$ количества всех натуральных делителей числа *n*, когда мы берём каноническое разложение *n* на простые множители. Но при нахождении $d(n)$ мы должны учитывать только нечётные простые множители. Т.к. $63000=2^3\cdot3^2\cdot5^3\cdot7$, то $d(63000)=3\cdot4\cdot2=24$ и тогда нужных нам представлений будет $2\cdot24-1=47$.

5. Докажите, что система из 3-х уравнений с 9-ю неизвестными $\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_9=0, \\ x_1^3+x_2^3+\ldots+x_9^3=0, \\ x_1^5+x_2^5+\ldots+x_9^5=1 \end{cases}$ **имеет решения в действительных числах.**

Доказательство: Рассмотрим сначала систему уравнений $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3=1 \end{cases}$ и будем искать частное решение этой системы в следующем виде: $x_1=x_2=\alpha$, $x_3=\beta$. Для переменных α и β мы получаем систему уравнений $\begin{cases} 2\alpha+\beta=0, \\ 2\alpha^3+\beta^3=1, \end{cases}$ из которой находим $\beta=-2\alpha$ и $-6\alpha^3=1$. Рассмотрим теперь нашу исходную систему уравнений. Пусть $u=(t_1, t_2, t_3)=(\alpha, \alpha, \beta)$ – решение предыдущей системы из двух уравнений с тремя неизвестными. Будем искать решение этой новой системы в следующем виде: $(x_1, x_2, x_3)=\alpha u$, $(x_4, x_5, x_6)=\alpha u$, $(x_7, x_8, x_9)=\beta u$. Первое уравнение выполняется автоматически, а следующие два уравнения выполняются тогда и только тогда, когда $2\alpha^3+\beta^3=0$ и $2\alpha^5+\beta^5=1$, т.е. $\beta=-\sqrt[3]{2}\alpha$ и $\alpha^5(2-\sqrt[3]{2^5})=1$, откуда и найдём α. Таким образом, мы нашли частное решение исходной системы, значит, она имеет решения в действительных числах.

11 класс

1. Какая из сумм больше и на сколько: $S(\sin)=\sin 1°+\sin 2°+\sin 3°+\ldots+\sin 90°$ или $S(\cos)=\cos 1°+\cos 2°+\cos 3°+\ldots+\cos 90°$?

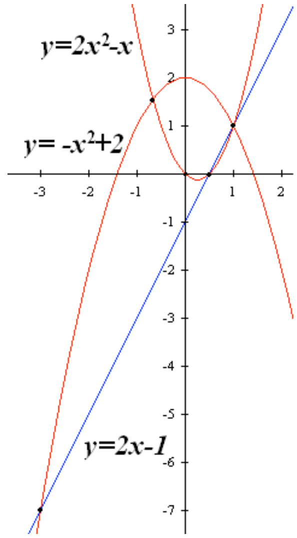
Ответ: сумма синусов больше суммы косинусов на 1. ***Доказательство:*** $S(\sin)-S(\cos)=\sin 90°-\cos 90°=1$, т.к. все остальные слагаемые взаимно уничтожатся в силу равенства $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$.

2. Василиса Премудрая решила проверить уровень образования Ивана-царевича и задала ему следующую задачу: «На столе лежат числами вверх 9 карточек с числами $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{10}$ и сундук с приданым, с $10!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot10$ жемчужинами. Можно взять любую карточку и забрать из сундука часть жемчужин, равную написанному на этой карточке числу. Затем можно взять любую оставшуюся на столе карточку и забрать соответствующую часть оставшегося жемчуга из сундука. И сделать так все 9 раз. Как надо действовать, чтобы забрать из сундука максимально возможное количество жемчужин?» Как же надо действовать?

Комментарий: *см. решение задачи 8.2.*

3. Какое наибольшее количество точек пересечения может быть у графиков трёх функций $y=ax^2+bx+c$, $y=bx^2+cx+a$ и $y=cx^2+ax+b$, где a, b и c – попарно различные целые числа?

Ответ: 4, например, при $a=0$, $b=2$, $c=-1$, т.к. каждое из трёх получающихся квадратных уравнений $2x-1=-x^2+2$, $2x^2-x=2x-1$ и $-x^2+2=2x^2-x$ имеет по два корня: один общий корень $x=1$ и три различных – соответственно (-3), $1/2$ и $(-2/3)$. ***Решение:*** Значения данных функций при $x=1$ равны $a+b+c$. Значит, все графики пересекаются в точке с абсциссой 1, и общее число точек пересечения у них не превосходит 4, т.к. каждые два графика пересекаются максимум в двух точках, абсциссы которых являются корнями квадратного уравнения, получающегося приравниванием соответствующих квадратных трехчленов.



4. На шахматную доску по очереди выставляются ладьи так, что вторая ладья бьёт ровно 1 выставленную ладью, третья – 2 выставленные ладьи, четвёртая – 0 ладей, пятая – 1, шестая – 2, и т.д. (каждые три следующие выставляемые по очереди ладьи бьют соответственно 0, 1 и 2 выставленные ладьи). Какое наибольшее количество ладей можно поставить на доску по этим правилам?

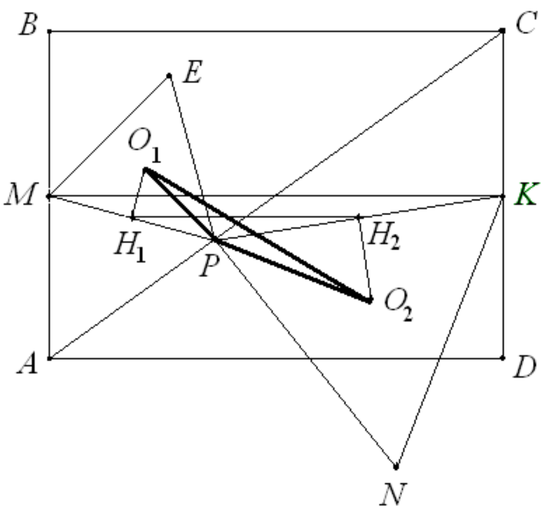
1	3	2	14				
5	6	15					
8	9						
11	12						
				4			
					7		
						10	
							13

Ответ: 15 ладей. Пример см. на рисунке, где число показывает порядковый номер выставляемой ладьи. ***Доказательство оценки (с помощью теории графов):*** Рассмотрим двудольный граф, в котором вершины – горизонтали и вертикали, а рёбра – ладьи, стоящие на пересечении горизонтали и вертикали. Тогда постановка первых трёх ладей означает, что в графе появилась компонента связности в виде «ёжика» с одной вершиной степени 3 и 3 висячими вершина, т.к. третья по очереди ладья может оказаться только между двумя первыми ладьями. После этого постановка ладьи, бьющей 0 других ладей, создаёт новую компоненту связности из двух вершин, соединённых ребром. Постановка ладьи, бьющей 1 ладью, подсоединяет к какой-нибудь компоненте связности ещё одну висячую вершину. Постановка ладьи, бьющей 2 ладьи либо соединяет две висячие вершины, либо добавляет ещё одну висячую вершину к вершине степени 2. Т.о., в графе после трёх первых ходов есть 12 изолированных вершин, на каждом цикле из трёх следующих ходов количество изолированных вершин уменьшается либо на 2+1=3, либо на 2+1+1=4, значит, мы сможем сделать ещё не более 12:3=4 полных циклов по постановке троек новых ладей и после этого нельзя больше поставить новых ладей. Следовательно, на доску можно выставить не более $5\cdot3=15$ ладей. ***2-й способ доказательства оценки (без графа):*** Каждая ладья, номер которой даёт остаток 1 при делении на 3, бьёт ровно 4 новые стенки из $32=4\cdot8$ стенок на доске (сторон граничных клеток). Каждая ладья, номер которой даёт остаток 2 при делении на 3, бьёт ровно 2 новые стенки, т.к. две стенки ряда (строки-столбца), в котором эта ладья стоит вместе с побитой ею ладьёй, уже были ранее побиты той ладьёй. Каждая ладья, номер которой делится на 3, бьёт либо 0, либо 2 новые стенки в зависимости от расположения двух ладей, которые она бьёт. Значит, каждая тройка подряд выставленных ладей бьёт не менее 6 новых стенок, тогда можно выставить не более [32:6]=5 троек ладей (всего 15 ладей), после чего останется не более $32-5\cdot6=2$ непобитых стенки, которых уже не хватит для появления на доске 16-й ладьи, т.к. ей надо 4 новые стенки.

5. Сколько существует 2011-значных чисел, делящихся на 2011?

Ответ: $9\cdot(10^{2010}-1)/2011$. ***Решение***: Заметим, что 2011 – простое число, значит, по малой теореме Ферма самое маленькое 2011-значное число $10^{2010}\equiv 1$ (mod 2011), т.е. имеет остаток 1 при делении на 2011, а самым большим нужным нам числом будет 99…90 (2010 девяток), которое в 10 раз больше числа из 2010 девяток, кратного 2011, что следует из приведённого выше сравнения. Значит, количество нужных нам чисел будет равно разности двух этих полученных выше (кратных 2011) чисел, делённой на 2011, т.е. $9\cdot(10^{2010}-1)/2011$.

6. В прямоугольнике *ABCD* (*AD=a*, *AB=b*) на диагонали *AC* взята произвольная точка *P*. Пусть *MEP* и *PNK* – равносторонние треугольники, где *M* и *K* – середины сторон *AB* и *CD* соответственно, точки *A* и *E* лежат по разные стороны от прямой *MP*, а точки *C* и *N* лежат по разные стороны от прямой *KP*. Докажите, что длина отрезка, соединяющего центры треугольников *MEP* и *PNK*, не зависит от положения точки *P* и найдите длину этого отрезка.



Ответ: $\frac{a}{\sqrt{3}}$. ***Решение***: Пусть O_1 и O_2 – центры равносторонних треугольников *MEP* и *KNP*, точки H_1 и H_2 – середины сторон *MP* и *KP* этих треугольников. Тогда H_1H_2 – средняя линия треугольника *MKP*, значит, $H_1H_2=MK/2=AD/2=a/2$ (в частности, треугольник *MKP* мог оказаться вырожденным, если точка *P* попала на отрезок *MK*). Кроме того, $\angle O_1PH_1=\angle O_2PH_2=30°$, $O_1P=\frac{2}{\sqrt{3}}H_1P$, $O_2P=\frac{2}{\sqrt{3}}H_2P$, значит, $\angle O_1PO_2=\angle H_1PH_2$ и треугольники O_1PO_2 и H_1PH_2 подобны с коэффициентом $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (в частности, они могли оказаться вырожденными). Следовательно, $O_1O_2=\frac{2}{\sqrt{3}}H_1H_2=\frac{MK}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$, и при этом длина отрезка O_1O_2 не зависит от положения точки *P*.