дут на одно и то же место (тут важно, что 37 – нечетное число).
Докажем, что расстояние между любыми два гномами изменится. Пусть изначально два гнома сидели на местах a и b, причем $a > b$. Тогда расстояние между ними – это либо $a - b$, либо $37-(a-b)$, т.е. дает такой же остаток от деления на 37, как $a - b$ или как $-(a-b)$. Аналогично, расстояние между новыми местами гномов будет давать такой же остаток от деления на 37, как $2(a-b)$ или как $-2(a-b)$. Если расстояния совпадают, то их разность делится на 37, а значит, либо $\pm(2(a-b)-(a-b))$, либо $\pm(2(a-b)+(a-b))$ делится на 37. В первом случае $a - b$ делится на 37, что невозможно, поскольку это число положительно ($a > b$) и меньше 37. Второй случай сводится к первому, так как если $3(a-b)$ делится на 37, то и $a - b$ делится на 37, поскольку 37 взаимно просто с 3.
Аналогично решается задача для любого числа гномов, не делящегося ни на 2, ни на 3.

О МЕТОДЕ РАСКРАСКИ НА ПРИМЕРЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

Ответы к упражнениям

1. Посмотрим на раскраску рисунка 4 из статьи. Заметим, что любой прямоугольник 1×4 содержит поровну (по 2) черных и белых клеток, но при данной раскраске на доске 51 черная клетка и 49 белых, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 не удастся.
2. При решетчатой раскраске доски (рис. 6 из статьи) каждый прямоугольник содержит четное (0 или 2) количество черных клеток, а их на доске – нечетное количество (25), значит, разрезать доску на прямоугольники не удастся.
3. Заметим, что при вертикальной полосатой раскраске в 4 цвета (рис. 8 из статьи) вертикальное тетрамино содержит кратное 4 (0 или 4) количество клеток каждого цвета, а горизонтальное тетрамино содержит по одной клетке каждого цвета. Но каждого цвета на доске либо 20 (кратно 4), либо 30 клеток (остаток 2 при делении на 4), а значит, на доске количество горизонтальных тетрамино будет одновременно делиться на 4 и давать остаток 2 при делении на 4. Противоречие. Опять тот же вывод – разрезать доску 10×10 на прямоугольники 1×4 нельзя.
4. Применив «вертикальную» раскраску рисунка 9 из статьи, получим, что каждое вертикальное тетрамино содержит делящееся на 4 число черных клеток (либо 0, либо 4), а каждое горизонтальное тетрамино – одну черную клетку. Так как всего черных клеток 20, количество горизонтальных тетрамино делится на 4. Применив аналогичную «горизонтальную» раскраску, получим, что и количество вертикальных тетрамино делится на 4. Противоречие, так как всего тетрамино 25 штук, и значит, доску нельзя разрезать.
5. Заметим, что каждый прямоугольник 1×4 содержит в себе нечетное (1 или 3) количество черных клеток, а всего их на доске при данной раскраске четное количество – 32. Значит, и прямоугольников должно быть четное количество, т.е. не равное 25. Вывод прежний – разрезать нельзя.

Решение задачи про разрезание доски 15×20 на фигурки 1×6

Покрасим доску в 6 цветов по диагоналям, аналогично раскраске на рисунке 2 из статьи. Предположим, что разрезание возможно. Тогда каждая фигурка 1×6 будет содержать по одной клетке каждого цвета. Значит, на доске клеток всех цветов будет поровну. Покажем, что это не так.
Отрежем от нашей доски кусок 12×20 клеток. В этом куске всех цветов поровну (хотя бы потому, что этот кусок легко разрезать на фигурки 1×6, ведь одна из сторон куска делится на 6). От оставшейся части 3×20 отрежем кусок 3×18, в котором тоже всех цветов поровну. У нас останется прямоугольник 3×2, но в нем цветов будет не поровну! Ведь при диагональной раскраске в 6 цветов в таком прямоугольнике вообще встретится всего 4 разных цвета (проверьте!). Получили противоречие.
Аналогично можно решить и общую задачу о разрезании доски на одинаковые клетчатые полоски любой длины (сделайте это!).

МАЛЬЧИКИ, ДЕВОЧКИ, ТАБЛИЦЫ, ГРАФЫ...

Упражнения

1. xy.
Указание. Как и в задаче 3, речь идет о разрезании прямоугольника $x\times y$ на полоски шириной 1.
2. xy.
Указание. Речь идет о разрезании прямоугольника $x\times y$ на квадраты.
3. abc.
Указание. Речь идет о распиливании прямоугольного параллелепипеда $a\times b\times c$ на слои толщиной 1.
4. *Указание.* Рассмотрим, как меняется максимум из количеств карт каждой масти. Сначала он был равен 13, а в конце он 0. Каждый раз, когда он уменьшается, Вася отгадывает масть.
5. Встанем между 21-й и 22-й рубашкой, тогда слева и справа будет по 21 рубашке. Не умаляя общности, можно считать, что слева белых рубашек не больше, чем фиолетовых. Тогда слева не больше чем 10 белых рубашек, а справа не больше чем 10 фиолетовых (потому что их должно быть столько же, сколько белых слева). Снимем все белые рубашки слева и все фиолетовые рубашки справа. После этого все оставшиеся фиолетовые рубашки будут висеть слева, а все оставшиеся белые – справа. Если мы сняли $n < 10$ рубашек какого-то цвета, то можно снять еще $10 - n$ рубашек этого цвета – выполнение желаемого условия от этого не нарушится.
6. См. решение задачи 5. Пете нужно, чтобы под ломаной оказался прямоугольник высотой p и шириной q. А Васе – чтобы над ломаной оказался прямоугольник высотой $22 - p$ и шириной $22 - q$. Эти два прямоугольника пересекаются ровно по одной клеточке. Если она под ломаной – исполнится пожелание Пети, иначе – Васи.
7. Рассмотрим полный двудольный граф, количество вершин в долях которого совпадает с числами на доске. Когда Вася будет уменьшать одно из этих чисел на 1, будем выбрасывать из соответствующей доли графа любую вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами. Тогда количество ребер в графе уменьшится на степень этой вершины, т.е. на количество ребер в другой доле, что как раз равно числу, которое Вася записывает на бумажку. Значит, искомая сумма чисел на бумажке будет равна общему количеству выкинутых ребер, которое равно xy.
8. *Указание.* Лестница из $a + b - 1$ ступенек разрезается на прямоугольник $a\times b$ и две лестницы, в которых $a - 1$ и $b - 1$ ступенек соответственно (рис.6).

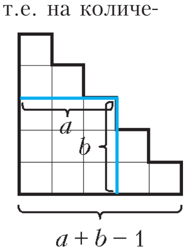

Рис. 6

Задачи для самостоятельного решения

7. Эта задача отличается от задачи 1 тем, что к подсчету детей противоположного пола добавляется подсчет детей своего пола. Но количества мальчиков, стоящих справа от мальчиков, – это 0, 1, 2, ..., 9, поэтому мальчики насчитают 45 мальчиков. Аналогично, девочки насчитают 45 девочек. Тем