А вот у Пети ничего не вышло. Почему же? Проанализируем его действия. Сначала он вычел год рождения из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке (или наоборот – это неважно). Тогда разность должна делиться на 9 (3-й кит!). Если эта разность четырехзначная (больше, очевидно, невозможно), то после сложения ее с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, сумма поделится на 11 (1-й кит!). Посему результат будет делиться на 99, и опыт удастся. А он не удался! Значит, имеет место единственная возможность: после вычитания получилось *не четырехзначное* число. Только в этом случае при последующем сложении сумма *может не поделиться* на 11 (и эксперимент провалится). Разберемся с этим подробнее.

В условии не зря упоминается, что опыт выполняли *школьники* (и дополнительно добавлено, что Петя был троечник – т.е. наверняка школьник). Несомненно, возраст любого ученика лицея не меньше 4 и не больше 20 лет (это если учесть возможных вундеркиндов или второгодников). Так как дело происходило (опять же по условию) в прошлом году, то год рождения любого школьника (и Пети в том числе) не меньше 1994 и не больше 2010.

Теперь можно было бы перебрать все возможные годы рождения (их всего-то 17), но можно заранее отбросить заведомо бесперспективные годы. Итак:

• годы с 1994-го по 1999-й отбрасываем, так как у «обращенного» числа первая цифра не меньше 4 и само обращенное число больше 4000, тогда как исходное число меньше 2000, так что разность между ними окажется больше 2000 – т.е. будет заведомо четырехзначной;

• годы с 2004-го по 2009-й отбрасываем по аналогичной причине (у «обращенного» числа первая цифра не меньше 4 и само обращенное число больше 4000, тогда как исходное число меньше 3000, так что разность между ними окажется больше 1000 – т.е. также будет четырехзначной).

Остальные годы рассмотрим по порядку их возрастания:

2000-й год: разность равна 2000 – 0002 = 1998;

2001-й год: разность равна 2001 – 1002 = 999;

2002-й год: разность равна 2002 – 2002 = 0;

2003-й год: разность равна 3002 – 2003 = 999;

2010-й год: разность равна 2010 – 0102 = 1898.

Вот и весь перебор. Как видим, в двух случаях разность все же получилась четырехзначная, еще в одном хотя и не четырехзначная, но равная 0, т.е. делящаяся на 11. Остальные же два варианта дают одинаковую разность 999, которая (вот счастье-то!) не делится на 11. Так как других вариантов нет, то приходится сделать однозначный вывод: после первого вычитания у Пети получилась разность 999, и тогда после сложения с обращенным числом он получил 999 + 999 = 1998.

Ответ: у Пети получился результат 1998.

А вот год рождения Пети мы назвать не можем: то ли 2001-й, то ли 2003-й.

О методе раскраски на примере одной задачи

Д.КУЗНЕЦОВ

НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮТСЯ задачи, решаемые методом раскраски. Ознакомимся с этим методом, продемонстрировав его красоту сразу несколькими решениями одной известной задачи:

Докажите, что клетчатую доску 10×10 нельзя разрезать по линиям сетки на прямоугольники 1×4.

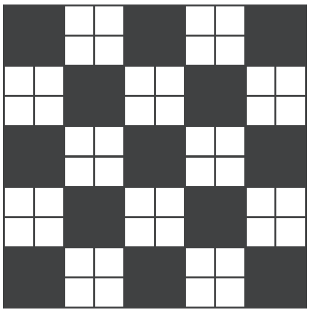

Рис. 1

Решение 1. Разделим доску на квадраты 2×2 и раскрасим их в шахматном порядке (рис.1). Заметим, что любой прямоугольник 1×4 содержит поровну (по 2) черных и белых клеток, но при данной раскраске на доске 52 черных клетки и 48 белых, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 не удастся.

Идея применения подобной «шахматной раскраски квадратами 2×2 возникает естественным образом из обычной шахматной раскраски, которая очень часто применяется для доминошек 1×2. А здесь мы имеем дело с фигурой в два раза крупнее, потому и раскраска стала в два раза крупнее, причем в обоих направлениях.

Решение 2. Раскрасим доску диагональной раскраской в 4 цвета (рис.2). Заметим, что любой прямоугольник содержит по одной клетке каждого из четырех цветов, но при данной раскраске на доске по 25 клеток 1-го и 3-го цветов, 26 клеток – 2-го и 24 клетки – 4-го, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 не удастся.

Решение 3. Раскрасим доску диагональной раскраской в два цвета (рис. 3). Заметим, что любой прямоугольник содержит одну черную клетку, а их на доске – 24. Таким образом, нам удастся вырезать не более 24 тетрамино, а по площади надо 25 штук.

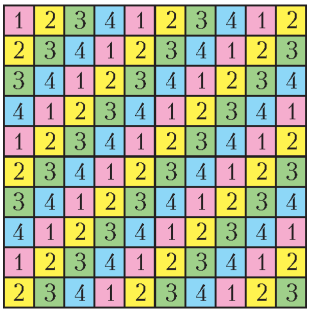

Рис. 2

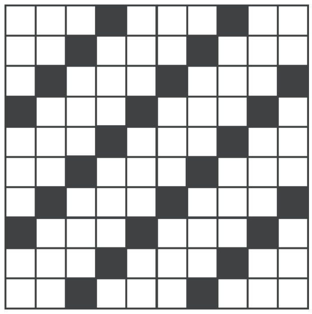

Рис. 3

Легко заметить, что данная раскраска является разновидностью диагональной раскраски на рисунке 2, когда в качестве черного цвета выделен цвет номер 4, которого меньше 25 клеток. С таким же успехом можно было бы использовать в качестве черного цвета и цвет номер 2, то тогда бы мы получили сразу 26 прямоугольников, что невозможно. Кроме того, можно было бы объединить в черный цвет и любые два соседних цвета с раскраски на рисунке 2. Например, если бы мы в качестве черного цвета использовали цвета номер 1 и 2, то у нас бы возникла раскраска рисунка 4.

Упражнение 1. Получите четвертое решение задачи, используя раскраску рисунка 4.

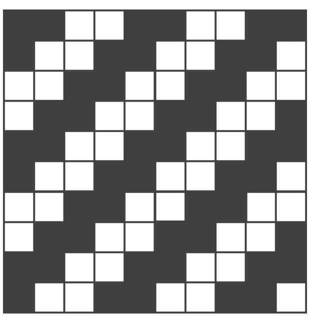

Рис. 4

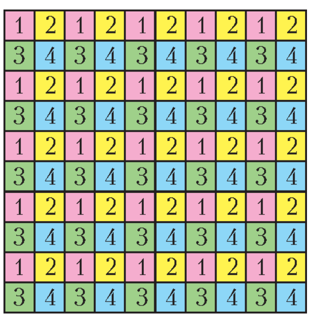

Рис. 5

Решение 5. Разделим доску на квадраты 2×2 и раскрасим их в 4 цвета одинаковым образом (рис.5). Тогда каждого цвета у нас будет по 25 клеток (нечетное количество), но при этом каждый прямоугольник содержит четное количество (0 или 2) клетки каждого цвета. И как следствие, во всех вырезанных тетрамино должно быть в сумме по четному количеству клеток каждого цвета, а не 25, что приводит нас к выводу о невозможности разрезания доски.

Упражнение 2. Получите шестое решение задачи, используя решетчатую раскраску на рисунке 6.

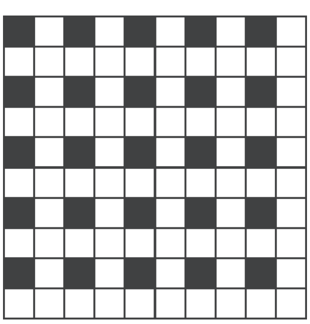

Рис. 6

Заметим, что раскраска на рисунке 6 является разновидностью предыдущей раскраски на рисунке 5, когда только один из четырех цветов выделен в качестве черного, а рассуждение является принципиально таким же. Кроме того, очень важным свойством раскраски с рисунка 5 является то, что она фактически каждый из двух цветов обычной шахматной раскраски в свою очередь тоже раскрасила в шахматном порядке (в данном случае черный цвет – во 2-й и 3-й, а белый – в 1-й и 4-й). Это свойство используется при решении некоторых задач методом раскраски.

Решение 7. Применим вертикальную полосатую раскраску доски в два цвета (рис. 7). Тогда любая вертикальная фигурка содержит кратное 4 (0 или 4) количество черных клеток, а любая горизонтальная – 2 черные клетки. А так как общее количество черных клеток – 50, т.е. при делении на 4 дает остаток 2, то общее число горизонтальных прямоугольников нечетно. Рассуждая аналогично для горизонтальной полосатой раскраски, мы докажем, что общее число вертикальных прямоугольников также нечетно, но тогда в сумме у нас должно быть четное количество всех прямоугольников, что не может равняться нужному нам числу 25, т.е. вывод прежний – разрезать не удастся.

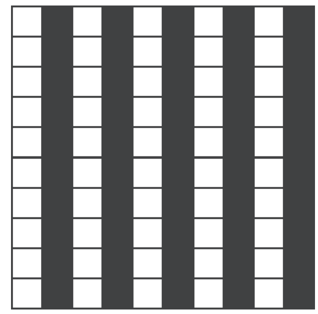

Рис. 7

В этом решении в полной мере проявилась специфика полосатой раскраски – разделение фигурок на два направления. Самое интересное заключается в том, что если мы будем считать при вертикальной полосатой раскраске белый и черный цвета соответственно за 0 и 1, а при горизонтальной полосатой раскраске – соответственно за 1 и 3, то при наложении этих раскрасок друг на друга и подсчете суммы чисел в каждой клетке у нас получится не что иное, как раскраска квадратами 2×2 в четыре цвета с рисунка 5.

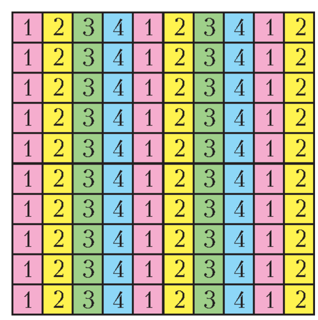

Рис. 8

Упражнение 3. Получите восьмое решение задачи, используя полосатую раскраску в 4 цвета на рисунке 8.

А теперь посмотрим, что получится при проведении в жизнь двух уже известных нам идей – сначала 4 цвета превратим в 2, а затем наложим раскраски.

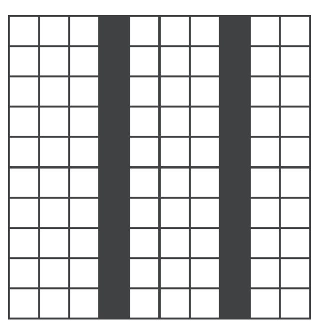

Рис. 9

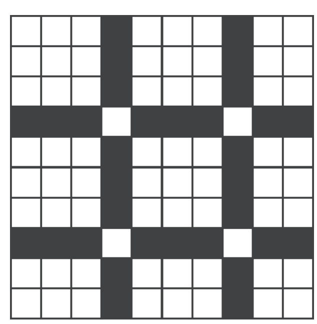

Рис. 10

Упражнение 4. Получите девятое решение задачи, используя вертикальную раскраску на рисунке 9 и аналогичную горизонтальную раскраску.

Упражнение 5. Получите десятое решение задачи, используя раскраску на рисунке 10 (она получена при наложении вертикальной и горизонтальной раскрасок из решения 9 по принципу «черный цвет – перекрашивание клетки в противоположный цвет»).

Решение 11. Если вертикальную раскраску с рисунка 9 и аналогичную горизонтальную раскраску наложить друг на друга и для красоты поменять цвета местами, то получится следующая решетчатая раскраска (рис.11). Тогда любой прямоугольник накрывает кратное 3 (0 или 3) количество черных клеток, а их на доске не кратное 3 количество (64). И как следствие, делаем вывод, что все черные клетки принадлежать прямоугольникам не могут, а значит, и разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 нельзя.

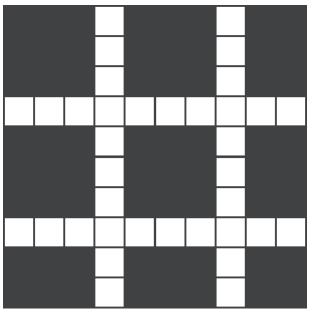

Рис. 11

Решение 12. Применим еще одну раскраску в 4 цвета, которая отличается от раскраски в 4 цвета квадратами 2×2 сдвигом каждой пары рядов относительно предыдущей пары на одну клетку (рис.12). Тогда каждый горизонтальный прямоугольник содержит по четному количеству клеток каждого цвета (0 или 2), а каждый вертикальный прямоугольник содержит по одной клетке каждого цвета. Так как каждого цвета будет по 25 клеток, то из выше изложенного следует, что количество вертикальных прямоугольников нечетно. Повернем раскраску на 90° и получим, что количество горизонтальных прямоугольников нечетно. Тогда в сумме у нас должно быть четное количество всех прямоугольников, что не может равняться нужному нам числу 25, т.е. вывод прежний – разрезать не удастся.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

Рис. 12

Вывод. Надеемся, что приведенные решения наглядно проиллюстрировали красоту метода раскраски, а заодно и специфические свойства каждой из раскрасок в отдельности, особенно их взаимосвязи при наложении друг на друга. Например, в самом первом решении раскраска получается наложением друг на друга двух полосатых раскрасок, а значит, мы фактически можем предложить и «новое» решение, уже тринадцатое по счету. И из двенадцатого решения также можно создать «новое» решение, получаемое с помощью изложенных выше идей. Предлагаем еще придумать другие варианты раскрасок, дающих решения этой классической задачи.

Заметим еще, что рассмотренная нами задача про разрезание доски на фигурки 1×4 – частный случай более общей задачи. Пусть мы хотим разрезать прямоугольную доску на одинаковые клетчатые полоски $1\times N$. Когда это возможно? Оказывается, ответ очень простой – в том и только в том случае, когда длина хотя бы одной из сторон доски делится на N. Иными словами, если хоть какой-то способ разрезания есть, то обязательно есть и «тривиальный» способ – когда все полоски расположены «одинаково» (либо вертикально, либо горизонтально).

Решить эту общую задачу не так-то просто, но и тут есть решение, использующее раскраску! Попробуйте разобрать частный случай – докажите, что доску 15×20 нельзя разрезать на фигурки 1×6. А может быть, вам удастся справиться и с общей задачей?

Дополнительные задачи на «Метод раскраски».

1. Можно ли шахматным конем обойти все клетки доски 5×5, побывав на каждой клетке по одному разу и вернуться последним ходом в исходное положение?

2. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

3. На каждой клетке доски 9×9 сидело по жуку. По сигналу каждый жук переполз на одну из соседних клеток а) по стороне; б) по диагонали. При этом в каких-то клетках могло оказаться несколько жуков, а какие-то могли оказаться пустыми. Найдите наименьшее возможное количество пустых клеток.

4. На каждой клетке-треугольничке треугольной доски со стороной 5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и приземляются на соседние (по стороне) клетки этой доски. Докажите, что тогда найдутся по крайней мере 5 пустых клеток.

5. На шахматной доске стоят несколько (не менее четырех) королей. Докажите, что их можно разбить на четыре группы так, чтобы короли каждой группы друг друга не били.

6. В левом нижнем углу доски 9×9 стоят 9 шашек, образуя квадрат 3×3. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтобы они образовали квадрат 3×3: а) в левом верхнем углу; б) в правом верхнем углу; в) в центральном квадрате 3×3?

7. Можно ли три попарно соседние грани кубика $4\times4\times4$ оклеить 16 полосками 3×1?

8. Из квадрата 8×8 по линиям сетки вырезали 8 квадратов 2×2. Докажите, что можно вырезать еще один квадрат 2×2.

9. Какими видами тетрамино (фигурки из 4 клеток) можно покрыть доску размером 10×10?

10. Можно ли шахматную доску разрезать на 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

11. Прямоугольное дно коробки было выложено квадратами 2×2 и прямоугольниками 1×4. Один квадрат потеряли и вместо него нашли прямоугольник. Можно ли теперь сложить дно прямоугольной коробки?