Мастер-класс “Числа Харера-Цагира”

Аннотация. Хорошо известно, что попарным отождествлением сторон 2n-угольника можно получить любую поверхность без края, как ориентируемую (сфера, тор, крендель, ..), так и неориентируемую (проективная плоскость, бутылка Клейна, …). Каждая из этих поверхностей однозначно определяется своим родом q, который совпадает с числом приклеенных к сфере ручек в ориентируемом случае и с числом приклеенных к сфере пленок Мебиуса в не ориенируемом случае. В классической работе Дж. Харера и Д. Цагира приведены формулы для вычисления числа склеек $2n$-угольника в ориентируемую поверхность рода q (*числа Харера-Цагира*).

В рамкам настоящего мастер-класса слушателям предлагается опытным путем, склеивая квадраты и шестиугольники, найти числа Харера-Цагира для неориентируемых поверхностей.

Подготовительный материал. В статье Г. Шабата и А. Сгибнева [1] наглядно объясняется, как можно получить замкнутые поверхности попарным отождествлением сторон $2n$-угольников. В ней приведены результаты классической работы Дж. Харера и Д. Цагира [2] о числе склеек $2n$-угольника в ориентируемую поверхность рода q (*числа Харера-Цагира*).

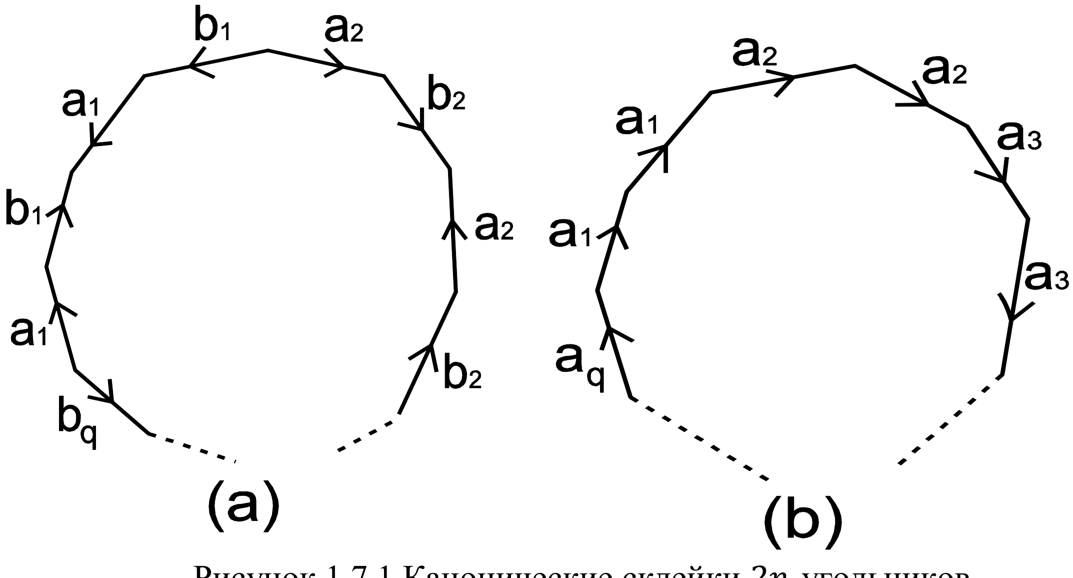

Рисунок 1.7.1 Канонические склейки $2n$-угольников

Хорошо известен (смотрите, например, [3]) канонический вариант склейки $4q$-угольника ($2q$-угольника), дающий ориентируемую (неориентируемую) поверхность рода q, смотри Рис. 1.7.1 (a) (Рис. 1.7.1 (b)). Здесь и на всех рисунках ниже буквы и стрелки около сторон многоугольника означают следующее: у многоугольника склеиваются граничные стороны, обозначенные одинаковой буквой, при этом стрелки на сторонах указывают направление отождествления сторон. Коротко описать такую склейку можно, так называемым ``словом'', состоящим из всех букв, встречающихся при обходе границы многоугольника по часовой стрелке, при этом к букве добавляется -1 в верхнем индексе, если стрелка на соответсвующей стороне направлена в сторону, противоположную обходу. Так склейка на Рисунке 1.1 (a) (1.7.1 (b)) записывается словом $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_q b_q a_q^{-1} b_q^{-1}$ $(a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_q a_q)$.

Однако, это не единственный вариант склейки, и для разных склеек одного и того же многоугольника род поверхности может получиться различный. К примеру, из квадрата может получиться тор (см. Рис. 1.7.2), проективная плоскость (см. Рис. 1.7.3), сфера (см. Рис. 1.7.4), бутылка Клейна (см. Рис. 1.7.5).

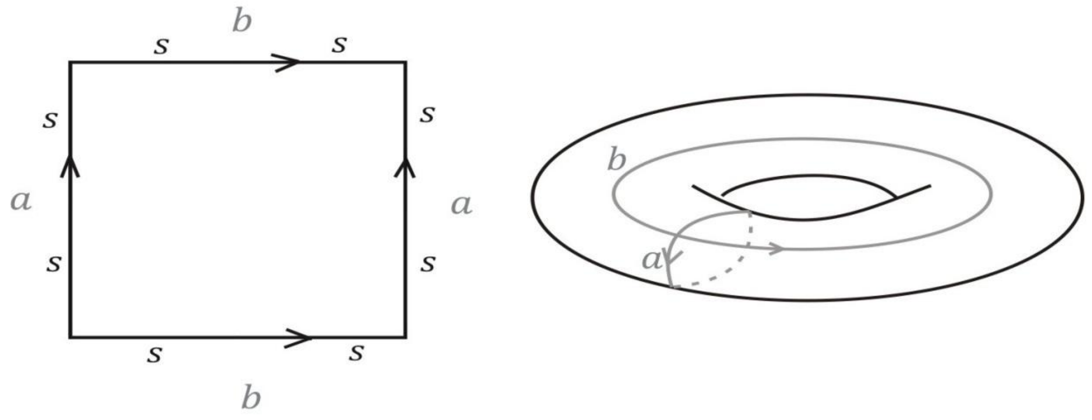

Рисунок 1.7.2 Тор и его развёртка

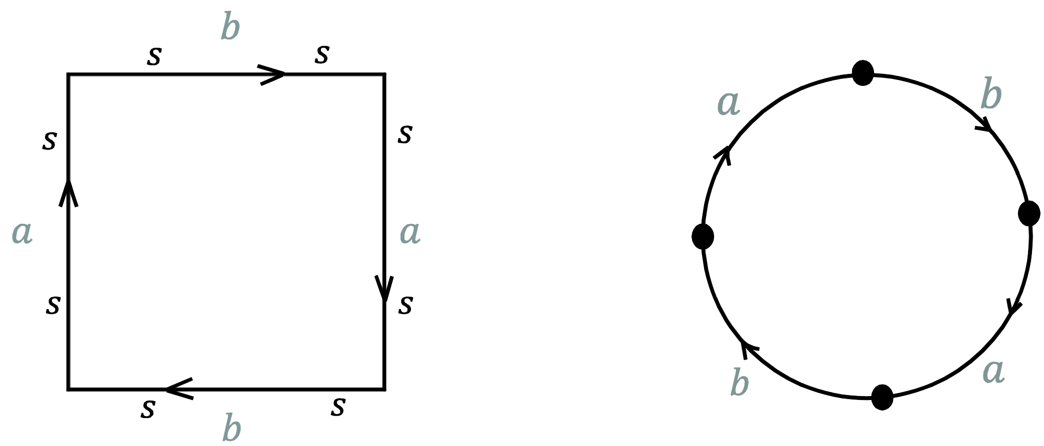

Рисунок 1.7.3 Проективная плоскость и её развёртка

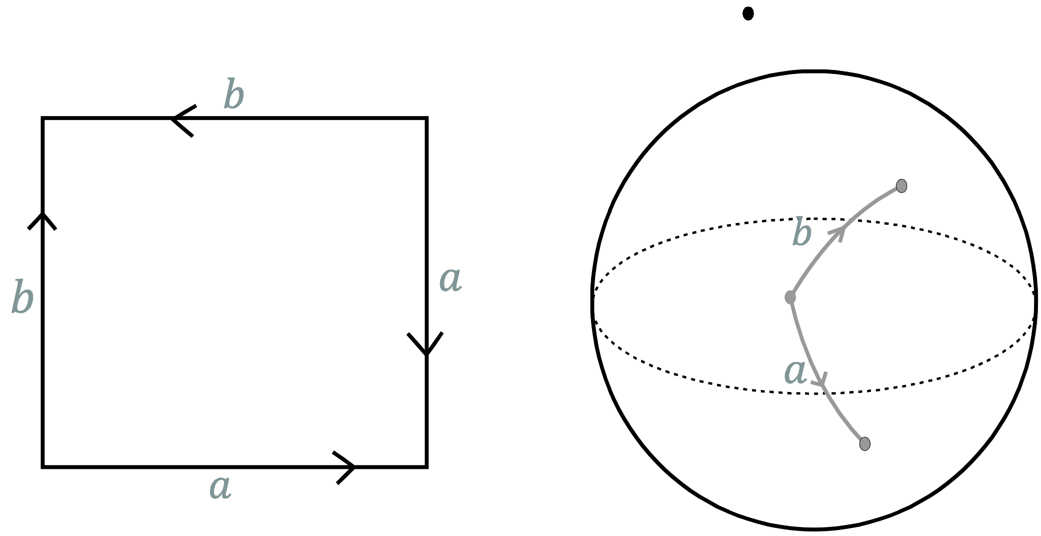

Рисунок 1.7.4 Сфера и её развёртка

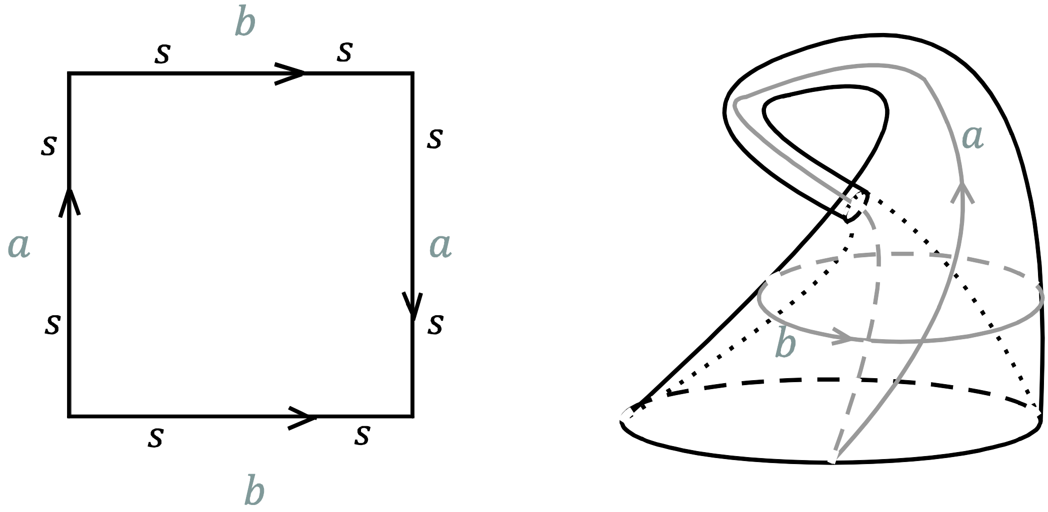

Рисунок 1.7.5 Бутылка Клейна и её развёртка

Нетрудно понять, что наличие в слове хотя бы двух одинаковых букв aa, $a^{-1}a^{-1}$, не обязательно стоящих подряд, приводит к существованию пленки Мебиуса на такой поверхности и, следовательно, к неориентируемости такой поверхности. Таким образом, ориентируемость поверхности по склейке определяется довольно быстро. По формуле Эйлера род поверхности q связан с числом вершин B, ребер P и граней Γ следующей формулой

$$B - P + \Gamma = 2 - 2q$$

для ориентируемой поверхности и

$$B - P + \Gamma = 2 - q$$

для неориентируемой, в этих формулах число $2 - 2q$ и $2 - q$ соответственно --- *эйлерова характеристика поверхности*. В нашем случае они принимают вид $B - n + 1 = 2 - 2q$, $B - n + 1 = 2 - q$ соответственно, и задача определения рода поверхности сводится к подсчету вершин, получающихся в результате склейки. Однако сделать это не так просто, особенно для большого числа сторон. Например, уже для восьмиугольника существует 105 различных склеек его сторон и нужно хорошее пространственное воображение, чтобы при каждом склеивании сторон, следить какие вершины склеятся. В рамках проекта показано, как вычислить число склеенных вершин с помощью цветных графов.

Более детально.

Обозначим через M наш $2n$-угольник и через S поверхность, получающуюся после склейки его сторон. Соединим его центр со всеми вершинами, а соединяющие отрезки назовём t-кривыми. Затем соединим центр же с серединами всех сторон, а соединяющие отрезки назовём u-кривыми. Каждую половину стороны, отделённую вершиной многоугольника и серединой стороны, назовём s-кривой.

Заметим, что мы только что триангулировали многоугольник и, соответственно, поверхность, или разделили на *треугольные области*. Стороны треугольных областей будем называть цветными кривыми, каждая одного из трёх цветов -- s, u или t (см. Рис. 1.7.6).

Теперь мы можем построить *трёхцветный граф* Г. Поставим в соответствие треугольным областям вершины графа, а цветным кривым -- цветные рёбра, причём ребро, соответствующее цветной кривой, имеет такой же цвет что и сторона и соединяет вершины, соответствующие треугольным областям, границам которых одновременно принадлежит цветная кривая (см. Рис. 1.7.6).

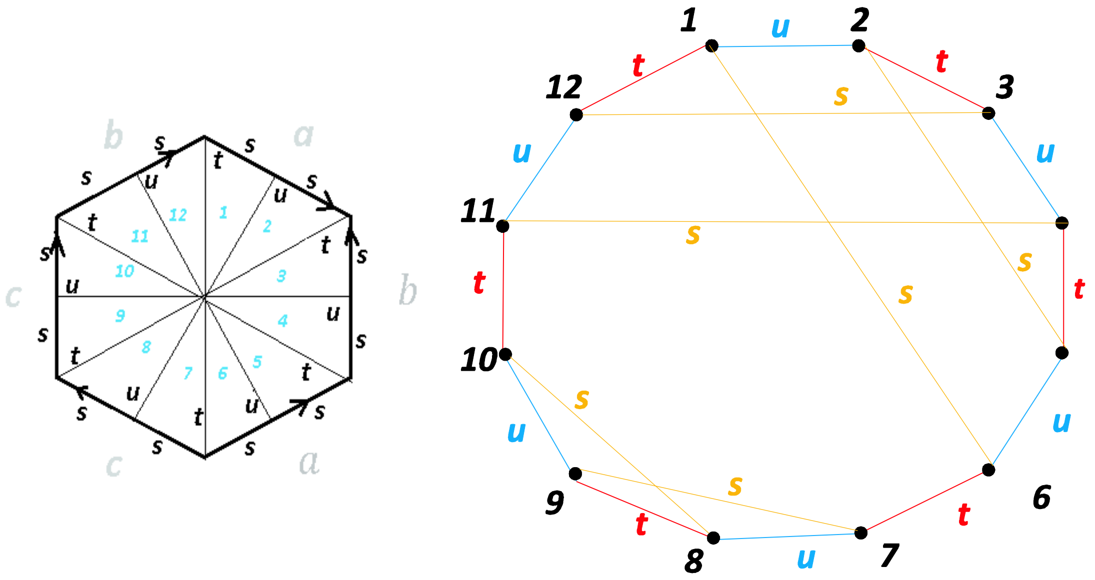

Рисунок 1.7.6 Триангуляция цветными кривыми и её трёхцветный граф

Назовём st-циклом, tu-циклом, su-циклом цикл на графе, состоящий только из рёбер цветов s и t, t и u, s и u соответственно (см. Рис. 1.7.7, 1.7.8, 1.7.9).

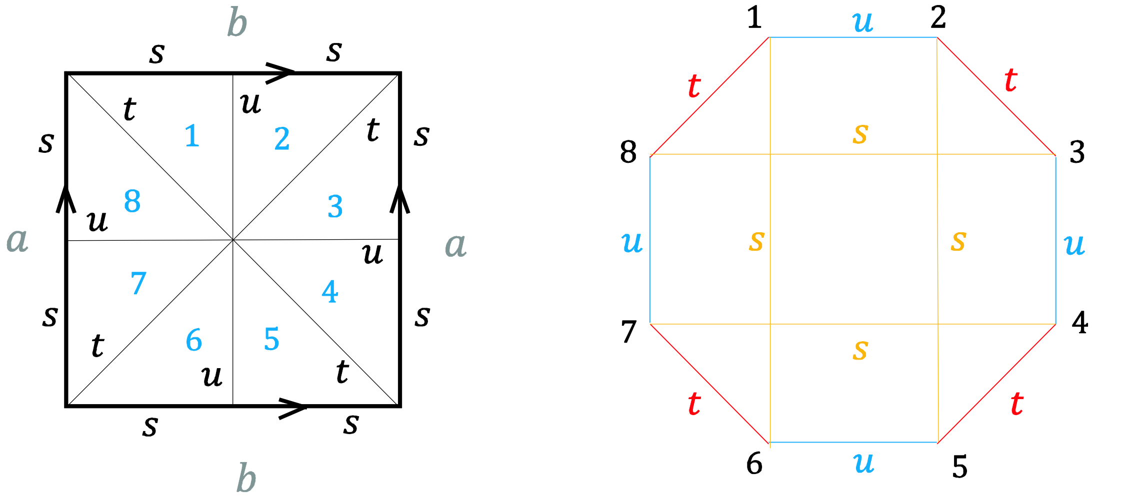

Рисунок 1.7.7 Развёртка тора и его трёхцветный граф

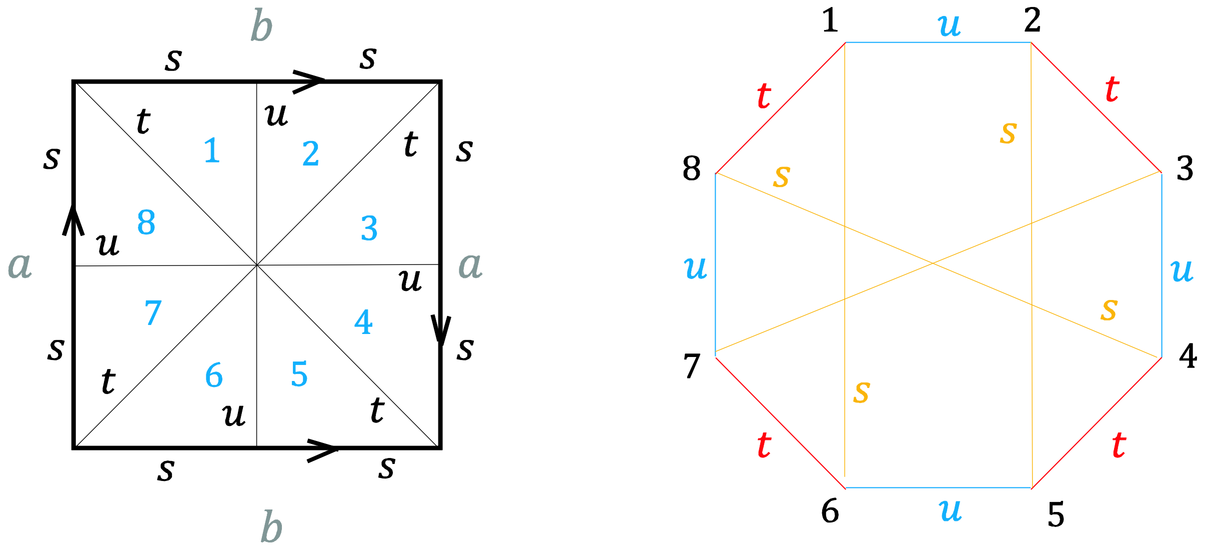

Рисунок 1.7.8 Развёртка бутылки Клейна и её трёхцветный граф

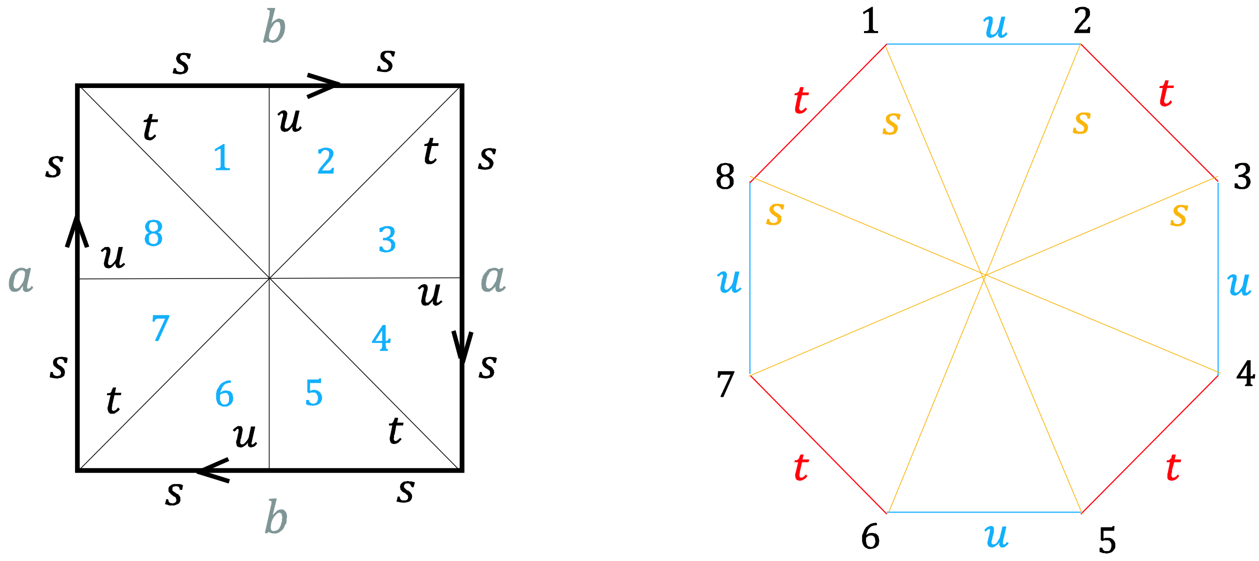

Рисунок 1.7.9 Развёртка проективной плоскости и её трёхцветный граф

Теорема 1.7.1 (В.Е. Круглов, Г.Н. Таланова, 2017)

1. 1 Эйлерова характеристика $\chi(S)$ поверхности S равняется

$$\chi(S) = \nu - n + 1, \tag{1.1}$$

где ν -- количество st-циклов графа Г.

2. 2 Поверхность S ориентируема тогда и только тогда, когда в соответствующем ей графе Г не содержится циклов нечетной длины.

Литература

[1] Г.Б. Шабат, А.И. Сгибнев. Склейки многоугольников. Квант. 3 (2011), 17–22.

[2] J. Harer, D. Zagier, The Euler characteristic of the moduli space of curves, Inventiones mathematicae, 85 (1986), 457–486.

[3] C. Kosniowski, A First Course in Algebraic Topology, Cambridge University Press, 1980, 269 p.