

Сравнение устойчивости процедур анализа характеристик сетевых моделей фондовых рынков.

Семенов Д.П., Калягин В.А., Колданов П.А., Бацын М.В., Голованова С.В.,
Воронина М.А.

Аннотация

Под сетевой моделью фондового рынка понимается полный взвешенный граф, вершины которого соответствуют доходностям рыночных активов, а веса ребер задаются мерой их зависимости. Для фильтрации ключевой информации из сетевой модели выделяются подграфы, которые мы будем называть сетевыми структурами. К популярным сетевым структурам в настоящее время относятся граф рынка, клики и независимые множества графа рынка, максимальное оствное дерево. При выделении таких структур и других характеристик сетевой модели из наблюдений неизбежно появляются ошибки, которые связаны со случайнм характером данных, с конечностью времени наблюдения и с процедурами идентификации сетевых структур. Анализ таких ошибок в настоящей работе основан на вероятностной модели доходностей акций, которая описывается классом эллиптических распределений. Основное внимание сосредоточено на анализе устойчивости и сравнении характеристик двух типов процедур идентификации: широко известные процедуры, основанные на выборочном аналоге коэффициентов корреляции Пирсона и недавно предложенные процедуры, основанные на выборочных аналогах вероятностей совпадения знаков.

Ключевые слова: фондовый рынок, сетевая модель, сетевые структуры, сеть случайных величин, процедуры идентификации, гистограмма распределения весов ребер, граф рынка, распределение степеней вершин графа рынка, клики и независимые множества графа рынка, топология максимального оствного дерева.

1. Введение

В последнее время всё большее распространение получают методы анализа фондового рынка, основанные на построении соответствующей сетевой модели[22], [10], [27]. Под сетевой моделью фондового рынка понимается полный взвешенный граф, вершины которого соответствуют доходностям рыночных активов (акций), а веса ребер задаются мерой их зависимости. Для фильтрации наиболее ценной информации из такой модели выделяются подграфы, которые называются сетевыми структурами. К популярным сетевым структурам можно отнести граф рынка, клики и независимые множества графа рынка [10] и максимальное оствное дерево [22]. К настоящему времени известно достаточно большое количество работ по применению такого подхода к анализу рынков различных стран и интерпретации полученных результатов [14], [15], [17], [18], [24], [25], [28], [26],[1], [21], [13], [12], [11]. Вместе с тем, в этих исследованиях отсутствует анализ достоверности полученных выводов. Такой анализ необходим так как наблюдения над акциями представляют собой наблюдения над случайными величинами [5], [4]. Следовательно, при выделении сетевых структур и анализе других характеристик сетевой модели по наблюдениям неизбежно появляются ошибки, которые связаны со случайнм характером данных, с конечностью времени наблюдения и с применяемыми процедурами идентификации сетевых структур. Первой работой, в которой задача идентификации сетевых структур рассматривалась с учетом случайнного характера наблюдений является работа [20]. Настоящая работа является продолжением исследований в этом направлении.

Математической основой проводимых исследований является понятие сети случайных величин [2],[19].

Сетью случайных величин называется пара (X, γ) , где $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ — случайный вектор, $\gamma = \gamma(X, Y)$ — мера зависимости случайных величин X, Y . В сетевой модели, порожденной сетью случайных величин, вес ребра (i, j) задается значением $\gamma(X_i, X_j)$. Для построения сети случайных величин фондового рынка и порожденной сетевой модели, вектор $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ задаётся совместным распределением доходностей рыночных активов. Для описания такого распределения в настоящее время используются многомерные эллиптические распределения [16] и распределения, заданные различными копула-функциями [4]. В широкий класс эллиптических распределений входят, в частности, многомерные нормальные распределения и распределения Стьюдента с тяжелыми хвостами. В качестве меры зависимости доходностей обычно используется коэффициент корреляции Пирсона. Вместе с тем, в работах [8], [7] было показано, что неопределенность процедур идентификации графа рынка и максимального оственного дерева, основанных на выборочных корреляциях Пирсона, может существенно возрастать при отклонении совместного распределения доходностей от нормального. В работе [9] предложена новая мера зависимости доходностей, основанная на вероятности совпадения знаков. В работах [8], [7] экспериментально установлено, что процедуры идентификации графа рынка и максимального оственного дерева, основанные на вероятности совпадения знаков, обладают свойством устойчивости при отклонении распределения от нормального. В работе [19] теоретически доказана устойчивость статистических процедур идентификации графа рынка в сетевых моделях, порожденных сетями случайных величин в классе эллиптических распределений. В [2],[19] доказано, что этот вывод справедлив и для процедур идентификации максимального оственного дерева. Вместе с тем, остается открытым вопрос насколько сильно отличаются характеристики устойчивости процедур идентификации клик и независимых множеств, а также процедур оценивания других характеристик сетевых моделей и сетевых структур.

Целью настоящей работы является сравнение характеристик устойчивости двух типов процедур идентификации: широко известные процедуры, основанные на выборочном коэффициенте корреляции Пирсона и процедуры, основанные на оценках вероятностей совпадения знаков в классе эллиптических распределений. При этом изучаются такие сетевые структуры как: максимальные клики и максимальные независимые множества графа рынка и такие характеристики как: распределение весов рёбер сетевой модели (полного взвешенного графа) фондового рынка, распределение степеней вершин в графе рынка, топология степеней вершин максимального оственного дерева.

Работа организована следующим образом: в разделе 2 описана вероятностная модель, сеть случайных величин, введены основные определения и обозначения; в разделе 3 приведены формулировки задач; в разделе 4 изложен общий подход к сравнению истинных и выборочных характеристик сетевых моделей и их структур; в разделе 5 приведены результаты статистического моделирования, основанные на анализе рынков 8 стран и обсуждаются полученные результаты.

2. Основные определения и обозначения

Определение 1. Сетью случайных величин будем называть пару (X, γ) , где $X = (X_1, \dots, X_N)$ -вектор случайных величин, а $\gamma = \{\gamma_{i,j} : i, j = 1, \dots, N; i \neq j\}$ мера зависимости между случайными величинами X_i, X_j .

В зависимости от распределения вектора X и выбранной меры зависимости γ можно рассматривать различные сети случайных величин. Будем предполагать, что вектор X имеет эллиптическое распределение, плотность которого имеет вид [6]:

$$f(x) = |\Lambda|^{-1} g((x - \mu)' \Lambda^{-1} (x - \mu)), \quad (1)$$

где Λ - положительно определенная матрица, $g(x) \geq 0$, а функция распределения $g(x'x)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x'x) d(x) = 1$$

К такому классу распределений относятся: многомерное нормальное

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Lambda|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \mu)' \Lambda^{-1} (x - \mu)\right)$$

многомерное распределение Стьюдента

$$t_v(x) = \frac{1}{\sqrt{(v\pi)^N * \det \Lambda}} \frac{\Gamma(\frac{v+N}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{(x - \mu)' \Lambda^{-1} (x - \mu)}{v}\right)^{\frac{v+N}{2}}$$

и их смесь при одном и том же векторе μ и матрице Λ , где v - количество степеней свободы. В настоящей работе рассматриваются следующие сети случайных величин.

Определение 2. Эллиптической сетью корреляций Пирсона будем называть сеть случайных величин (X, γ^P) , в которой вектор $X = (X_1, \dots, X_N)$ имеет распределение с плотностью, постоянной на многомерных эллипсоидах, а мера зависимости $\gamma_{i,j}^P$ между случайными величинами X_i, X_j задается коэффициентом корреляции Пирсона

$$\rho_{i,j} = \frac{E(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)}{\sqrt{DX_iDX_j}}$$

Такие сети (без предположения о распределении X) широко применяются в задачах генетики и финансового рынка [22], [12], [10], [11].

Определение 3. Эллиптической сетью вероятностей совпадения знаков или знаковой сетью будем называть сеть случайных величин (X, γ^{sg}) , в которой вектор $X = (X_1, \dots, X_N)$ имеет распределение с плотностью, постоянной на многомерных эллипсоидах, а мера зависимости $\gamma_{i,j}^{sg}$ между случайными величинами X_i, X_j задается вероятностью совпадения знаков

$$p^{i,j} = P((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) > 0)$$

Сети случайных величин порождают сетевые модели, которые представляют собой простой полный неориентированный взвешенный граф $G = (V, E, \gamma)$, где $V = \{1, 2, \dots, N\}$ - множество вершин, которые описываются случайными величинами X_1, X_2, \dots, X_N , E - множество ребер с весами, заданными мерой γ .

Изучение сетевых моделей $G = (V, E, \gamma)$ естественно свести к изучению ключевых характеристик соответствующих графов. В теории графов предложено достаточно большое количество таких характеристик: отсеченный граф, клики, независимые множества, максимальное оствовное дерево, степени вершин, центральность, диаметр и т.д.

В настоящей работе исследуются характеристики графов, удовлетворяющие следующим определениям:

Определение 4. Распределением весов ребер называется функция $h(x) = m$, где m - число ребер веса x .

Определение 5. Отсеченным графом (графом рынка, MG) сетевой модели $G = (V, E, \gamma)$ называется подграф $G'(\gamma_0) = (V', E') : V' = V; E' \subseteq E; E' = \{(i, j) : \gamma_{i,j} > \gamma_0\}$, где γ_0 - некоторый порог.

Подчеркнем, что график рынка представляет собой простой неориентированный график без весов и без петель. Вместе с графиком рынка часто изучаются его клики и независимые множества.

Определение 6. Под распределением степеней вершин графа рынка понимается таблица $2 \times N$, где в первой строке указаны возможные значения степеней вершин $0, 1, \dots, N - 1$, а во второй строке указано число вершин v_i степени $i, i = 0, \dots, N - 1$.

Определение 7. Кликой графа рынка $G = (V, E)$ называется полный подграф графа G , т.е. подграф $G' = (V', E') : V' \subset V, E' \subset E : \forall i, j \in V' \Rightarrow (i, j) \in E'$

Определение 8. Клика $G_1 = (V_1, E_1)$ называется максимальной(МС) (по размеру), если для любой другой клики $G_2 = (V_2, E_2)$ выполняется: $|V_1| \geq |V_2|$

Определение 9. Независимым множеством (IS) графа рынка $G = (V, E)$ называется пустой подграф графа G , т.е. подграф $G_1 = (V_1, E_1) : V_1 \subset V, E_1 \subset E : \forall i, j \in V_1 \Rightarrow (i, j) \notin E_1$

Определение 10. Независимое множество $G_1 = (V_1, E_1)$ называется максимальным (MIS) (по размеру), если для любого другого независимого множества $G_2 = (V_2, E_2)$ графа G выполняется: $|V_1| \geq |V_2|$.

Семейство $\{MG(\gamma_0) : \gamma_0 \in R^1\}$ содержит наиболее полную информацию о сетевой модели, в частности, о сетевой модели рынка. При этом клики и независимые множества характеризуют кластерную структуру рынка. Кроме того, размер максимальных клик является показателем глобализации, а размер максимального независимого множества является показателем степени 'свободы' на рынке.

Определение 11. Максимальным оствовым деревом (MST) сетевой модели $G = (V, E, \gamma)$ называется дерево (граф без циклов) $G' = (V', E') : V' = V; E' \subset E; |E'| = |V| - 1$; такое, что $\sum_{(i,j) \in E'} \gamma_{i,j}$ максимальна.

Определение 12. Топологией MST будем называть последовательность степеней вершин MST, упорядоченную в возрастающем порядке.

3. Задачи идентификации характеристик сетевых моделей фондовых рынков

При практическом построении характеристик сетевых моделей распределение вектора X и значение $\gamma_{i,j}$ неизвестны. Доступными данными являются наблюдения за доходностями рыночных активов. Под проблемой идентификации характеристик сетевых моделей в настоящей работе понимается задачи построения таких характеристик по наблюдениям. В качестве модели наблюдений используется повторная выборка $x_i(t), i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, n$ конечного объема из распределения случайного вектора $X = (X_1, \dots, X_N)$.

1. Задача оценки распределения весов ребер $h(x)$ заключается в построении гистограммы оценок весов рёбер.
2. Задача идентификации графа рынка заключается в выборе одной из гипотез:

$$\begin{aligned} H_1^{TG} &: \gamma_{i,j} \leq \gamma_0, \forall (i,j), i < j, \\ H_2^{TG} &: \gamma_{1,2} > \gamma_0, \gamma_{i,j} \leq \gamma_0, \forall (i,j) \neq (1,2), i < j, \\ H_3^{TG} &: \gamma_{1,2} > \gamma_0, \gamma_{13} > \gamma_0, \gamma_{i,j} \leq \gamma_0, \forall (i,j) \neq (1,2), (i,j) \neq (1,3), \\ &\dots \\ H_L^{TG} &: \gamma_{i,j} > \gamma_0, \forall (i,j), i < j, \end{aligned} \quad (2)$$

При этом гипотеза H_1^{TG} соответствует пустому графу рынка $G'(\gamma_0)$, гипотеза H_2^{TG} - графу рынка $G'(\gamma_0)$ с одним ребром $(1,2)$, и т.д., гипотеза H_L^{TG} соответствует полному графу рынка $G'(\gamma_0)$.

Для сетевой модели на N вершинах число гипотез равно $L = 2^{\frac{N(N-1)}{2}}$

3. Задача оценки степеней вершин в графе рынка.
4. Задача идентификации максимальных клик в графе рынка.
5. Задача идентификации максимальных независимых множеств в графе рынка.
6. Задача идентификации MST.

Пусть $E_1 = \{(i, j) : (i, j) \in E\}$ - подмножество ребер, образующих оствовое дерево, $E_2 = \{(i, j) : (i, j) \in E\}$ - другое подмножество ребер, образующих оствовое дерево и т.д. Обозначим множество всех таких подмножеств $E_{MST} = \{E_1, E_2, \dots, E_{L_{MST}}\}$. В соответствии с определением 11 задача идентификации максимального оствового дерева (при условии, что оно единственno) по

наблюдениям $x_i(t); i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, n$ может быть сформулирована как задача выбора одной из многих статистических гипотез

$$\begin{aligned}
H_1^{MST} : \sum_{(i,j) \in E_1} \gamma_{i,j} &> \sum_{(i,j) \in E_k} \gamma_{i,j} : \forall E_k \in EMST, E_k \neq E_1 \\
H_2^{MST} : \sum_{(i,j) \in E_2} \gamma_{i,j} &> \sum_{(i,j) \in E_k} \gamma_{i,j} : \forall E_k \in EMST, E_k \neq E_2 \\
H_3^{MST} : \sum_{(i,j) \in E_3} \gamma_{i,j} &> \sum_{(i,j) \in E_k} \gamma_{i,j} : \forall E_k \in EMST, E_k \neq E_3 \\
&\dots \\
H_{L_{MST}}^{MST} : \sum_{(i,j) \in E_{L_{MST}}} \gamma_{i,j} &> \sum_{(i,j) \in E_k} \gamma_{i,j} : \forall E_k \in EMST, E_k \neq E_{L_{MST}}
\end{aligned} \tag{3}$$

Согласно формуле Кэли число оставных деревьев в полном графе на N вершинах, и следовательно, число различаемых гипотез равно $L_{MST} = N^{N-2}$.

7. Задача оценки топологии MST.

4. Меры различия истинных и выборочных характеристик

Пусть $\gamma_{i,j}, i, j = 1, \dots, N$ - истинное значение меры зависимости между случайными величинами X_i и X_j (вес ребра между вершинами i и j в сетевой модели). Сетевую модель, построенную на основе $\gamma_{i,j}, i, j = 1, \dots, N$ будем называть истинной сетевой моделью. Характеристики этой сетевой модели, определенные в разделе 2 будем называть истинными характеристиками сетевой модели.

Пусть $\hat{\gamma}_{i,j}, i, j = 1, \dots, N$ - оценка значения меры зависимости между случайными величинами X_i и X_j , построенная по выборке $x_i(t), i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, n$. Сетевую модель, построенную на основе $\hat{\gamma}_{i,j}, i, j = 1, \dots, N$ будем называть выборочной сетевой моделью. Характеристики этой сетевой модели будем называть выборочными характеристиками сетевой модели.

Введем меры различия между истинными и выборочными характеристиками соответствующих сетевых моделей.

Определение 13. Под мерой различия истинного распределения весов ребер $h(x)$ и оценкой этого распределения (гистограммой $\hat{h}(x)$) будем понимать $E(|S - \hat{S}|)$, где E - математическое ожидание, S - площадь под кривой $h(x)$, \hat{S} - площадь под кривой $\hat{h}(x)$.

Определение 14. Под мерой различия оценки распределения степеней вершин графа рынка и его истинного значения будем понимать $E(\sum_{i=0}^{N-1} |k_i - \hat{k}_i|)$, где N - число вершин, k_i - истинное число вершин степени i , \hat{k}_i - ее оценка.

Определение 15. Под мерой различия максимальных выборочных и истинных клик (независимых множеств) будем понимать $E(\sum_{i=1}^N |v_i - \hat{v}_i|)$ математическое ожидание мощности симметрической разности множества вершин истинной клики и выборочной клики, где N - число вершин, v_i - индикатор, равный 1, если вершина i есть в клике (независимом множестве), а \hat{v}_i - индикатор в выборочной клике (независимом множестве).

Определение 16. Под мерой различия топологии выборочного и истинного MST будем понимать вероятность правильного определения топологии степеней вершин.

Определение 17. Под устойчивостью введенных мер различия к изменению вероятностной модели распределения вектора X будем понимать независимость этих мер от функции g .

5. Результаты исследования устойчивости процедур оценки характеристик сетевых моделей

В настоящем разделе приведены результаты исследования устойчивости двух типов процедур идентификации характеристик сетевых моделей. Исследования проводились в рамках эллиптической сети корреляции Пирсона. В качестве истинных сетевых моделей были использованы сетевые модели,

построенные по наблюдениям за доходностями акций реальных рынков. Были проанализированы доходности 50 наиболее доходных акций рынков России, Бразилии, Индии, Китая, Франции, Германии, США и Великобритании за 2010-2012 года. В качестве истинных значений весов ребер использовались значения коэффициентов корреляции Пирсона, построенные по наблюдениям за 1 календарный год. В таблице 1 для примера приведен фрагмент матрицы 10×10 весов истинной сетевой модели рынка Великобритании за 2010 год.

Таблица 1. Фрагмент истинной матрицы корреляций доходностей. Великобритания, 2010 год. Сеть Пирсона.

1,00	0,12	0,00	0,10	-0,05	-0,14	0,04	-0,02	-0,02	0,22
0,12	1,00	0,08	-0,03	-0,01	-0,03	-0,05	-0,03	0,05	-0,10
0,00	0,08	1,00	0,04	-0,06	0,02	0,02	-0,04	-0,04	-0,03
0,10	-0,03	0,04	1,00	-0,07	0,06	0,10	0,06	0,04	0,09
-0,05	-0,01	-0,06	-0,07	1,00	0,49	0,14	0,44	0,35	0,01
-0,14	-0,03	0,02	0,06	0,49	1,00	0,24	0,48	0,42	-0,09
0,04	-0,05	0,02	0,10	0,14	0,24	1,00	0,30	0,15	0,00
-0,02	-0,03	-0,04	0,06	0,44	0,48	0,30	1,00	0,45	0,04
-0,02	0,05	-0,04	0,04	0,35	0,42	0,15	0,45	1,00	0,01
0,22	-0,10	-0,03	0,09	0,01	-0,09	0,00	0,04	0,01	1,00

На основе таких сетевых моделей за каждый год наблюдений для каждой страны были построены истинные характеристики. В общей сложности для 8 стран, 3 лет наблюдений и 5 характеристик было построено $8 * 3 * 5 = 120$ истинных характеристик сетевых моделей. Примеры истинных характеристик сетевых моделей приведены ниже.

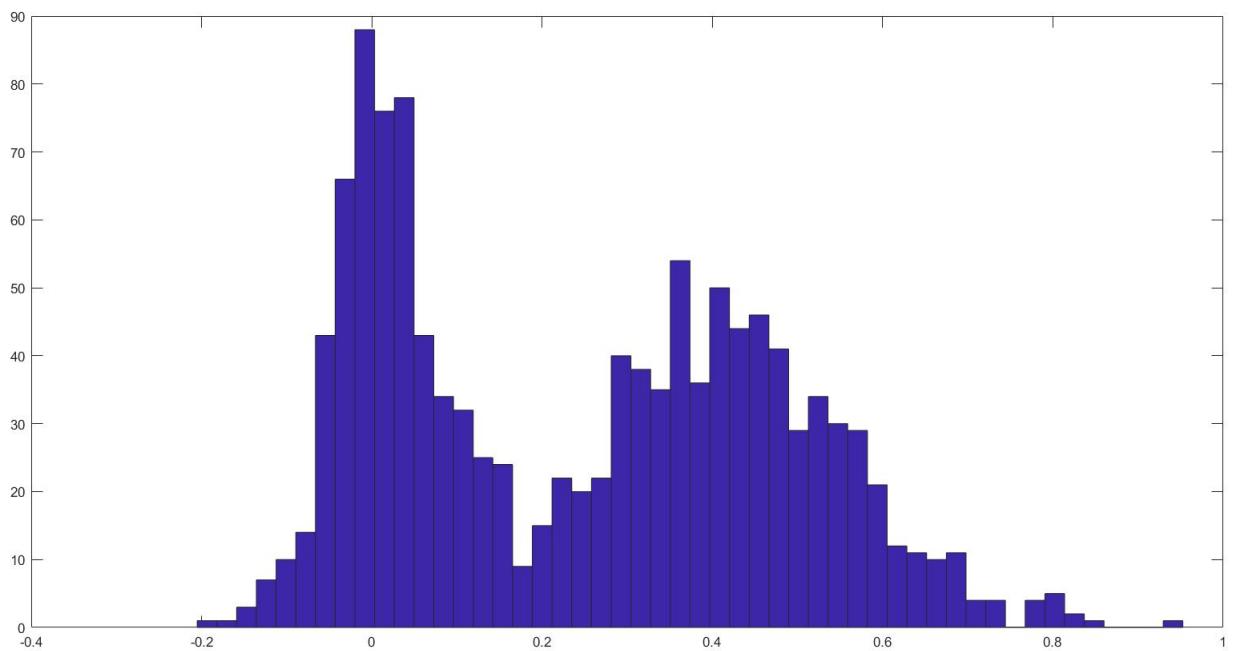


Рис. 1. Истинная гистограмма весов ребер. Великобритания, 2010 год. Сеть Пирсона.

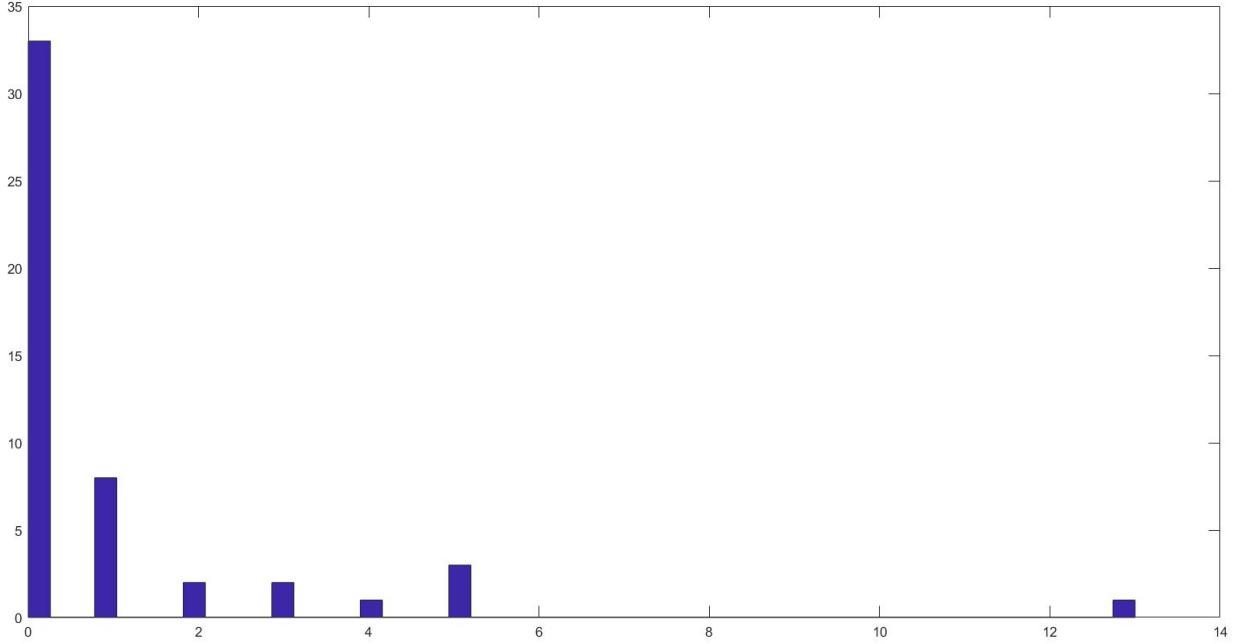


Рис. 2. Истинное распределение степеней вершин в графе рынка при пороге 0.3. Великобритания, 2010 год. Сеть Пирсона.

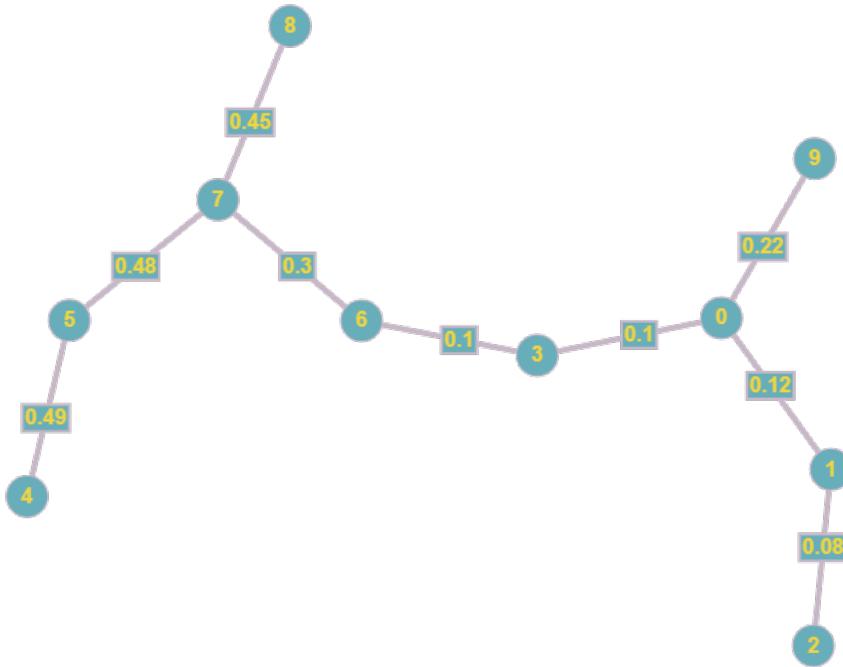


Рис. 3. Истинное MST. Великобритания, 2010 год. Сеть Пирсона.

Анализ устойчивости рассматриваемых процедур идентификации характеристик сетевых моделей проводился методом статистического моделирования. Были сгенерированы многомерные выборки различного объема из распределения смеси с плотностью:

$$f(x_1, \dots, x_N) = \gamma * f_{gauss}(x_1, \dots, x_N) + (1 - \gamma) * f_{St,k}(x_1, \dots, x_N)$$

где $f_{gauss}(x_1, \dots, x_N)$ - N-мерное нормальное распределение, $f_{St,k}(x_1, \dots, x_N)$ - N-мерное распределение Стьюдента с $v = 3$ степенями свободы. В качестве Λ использовалась истинная матрица весов ребер.

Эксперимент повторялся 10000 раз и усреднением находилась оценка введенных выше мер различия. Результаты проведения экспериментов представлены в виде кривых зависимости меры различия от γ ($\gamma = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$) для каждого рынка и каждой сети.

5.1. Распределение весов ребер

Для оценки выборочных гистограмм использовались традиционные процедуры: выборочная корреляция Пирсона и частота совпадения знаков. Эксперимент заключался в следующем: $n = 100$ раз генерировался N-мерный ($N = 50$) случайный вектор с распределением смеси с заданным γ . По наблюдениям вычислялась гистограмма и мера различия. Эксперимент повторялся 10000 раз и усреднением находилась оценка меры различия. Результаты проведения экспериментов представлены в виде кривых зависимости меры различия от γ ($\gamma = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$) для каждого рынка и каждой сети. Результаты экспериментов показывают, что оценка распределения весов ребер, основанная на оценке вероятности совпадения знаков устойчива к изменению параметра смеси γ . При использовании для оценок выборочных коэффициентов корреляции Пирсона мера различия неустойчива к изменению параметра смеси γ . Аналогичные результаты, показывающие устойчивость процедур, основанных на оценках вероятности совпадения знаков справедливы и для рынков других стран и годов наблюдения.

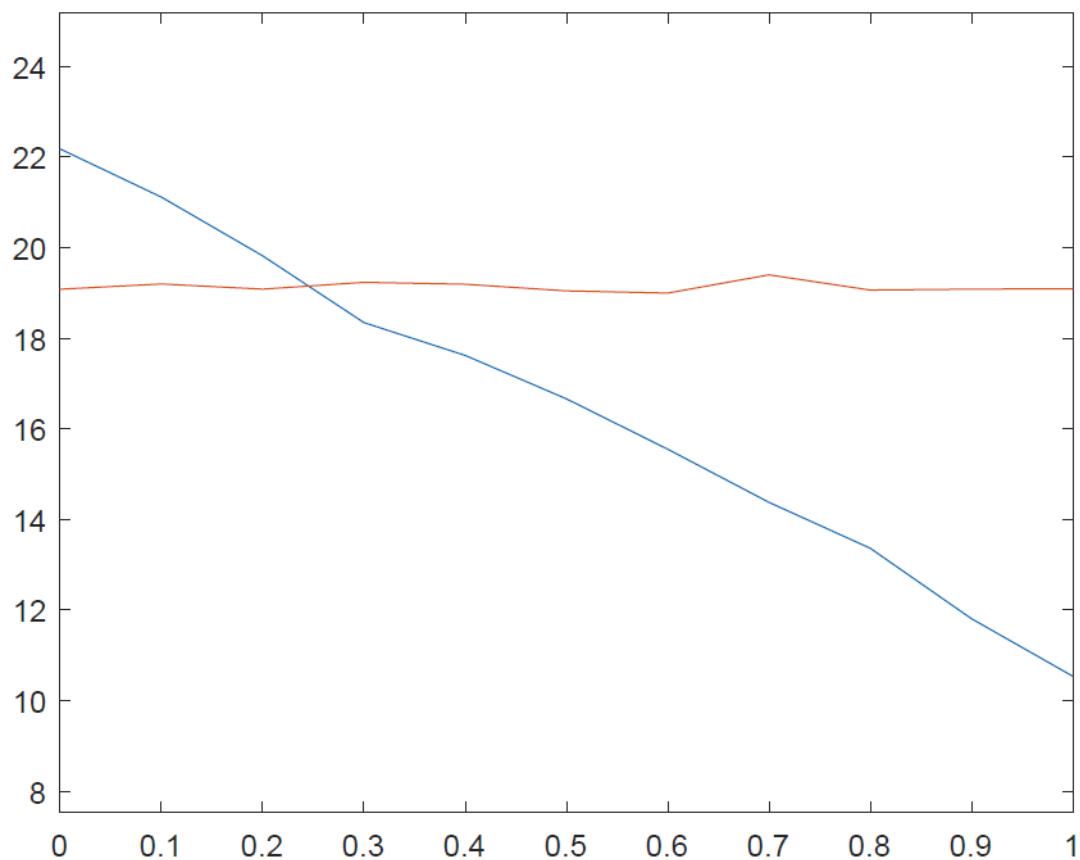


Рис. 4. Зависимость меры различия 13 от γ . Гистограмма весов ребер. Россия, 2012 год. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

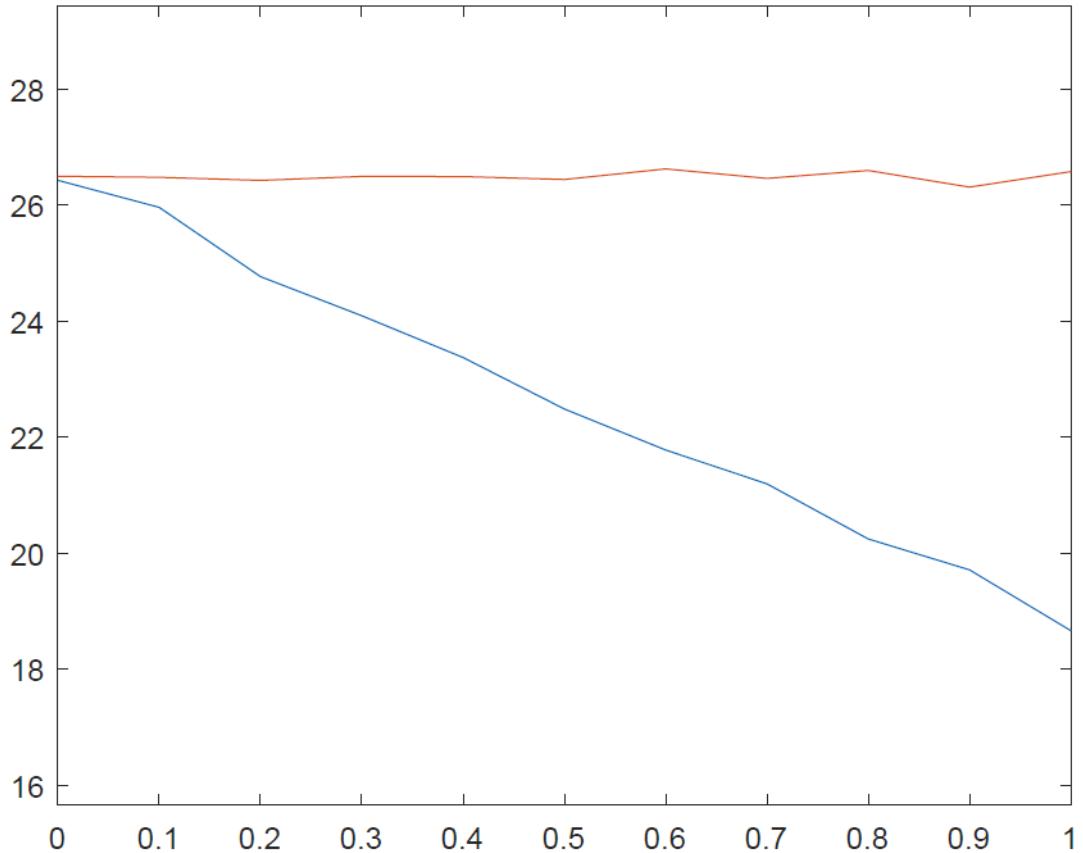


Рис. 5. Зависимость меры различия 13 от γ . Гистограмма весов ребер. Китай, 2010 год. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

5.2. Распределение степеней вершин

Эксперимент заключался в следующем: $n(n = 100, 250)$ раз генерировался N -мерный ($N = 50$) случайный вектор с распределением смеси с заданным γ . По наблюдениям вычислялись выборочные корреляции Пирсона и частоты совпадения знаков, строился граф рынка 5 с порогом γ_0 ($\gamma_0 = 0, 1; 0, 3; 0, 5$), находилось распределение степеней вершин и мера различия. Эксперимент повторялся 10000 раз и усреднением находилась оценка меры различия. Результаты проведения экспериментов представлены в виде кривых зависимости меры различия от γ ($\gamma = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$) для каждого рынка, каждой сети и каждого значения количества наблюдений.

Как и в случае с распределением весов ребер, результаты экспериментов показывают, что вероятность совпадения знаков оказывается устойчивой к изменению параметра смеси γ , а оценки выборочных коэффициентов корреляции Пирсона - нет. Также стоит отметить, что значение меры различия, как правило, быстро уменьшается с ростом числа наблюдений.

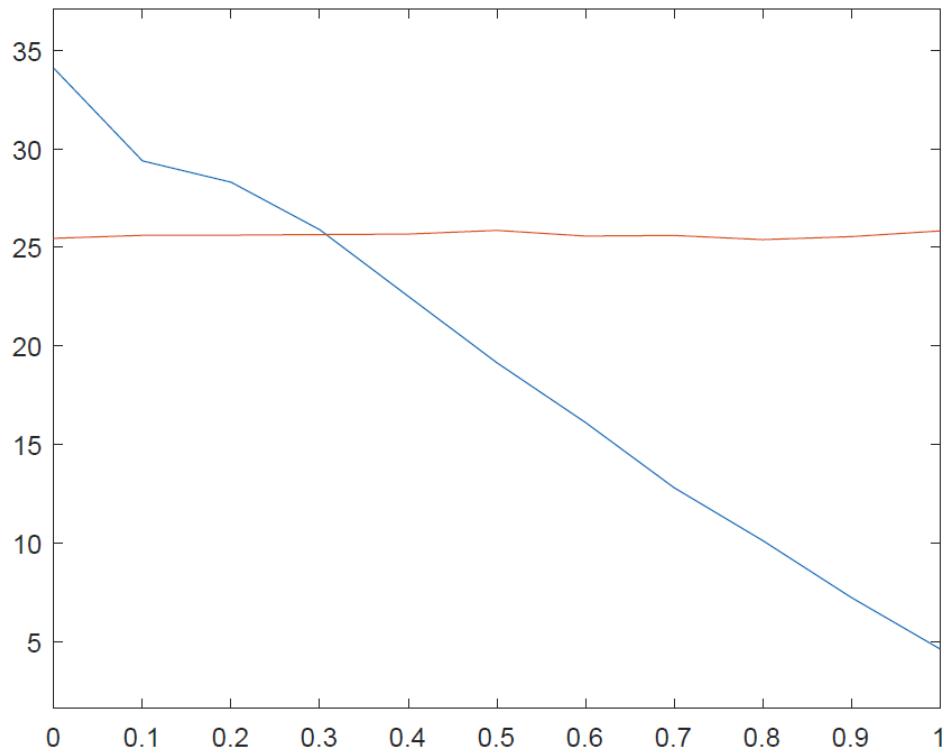


Рис. 6. Зависимость меры различия 14 от γ . Распределение степеней вершин. $\gamma_0 = 0.5$. Бразилия, 2012 год. 100 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

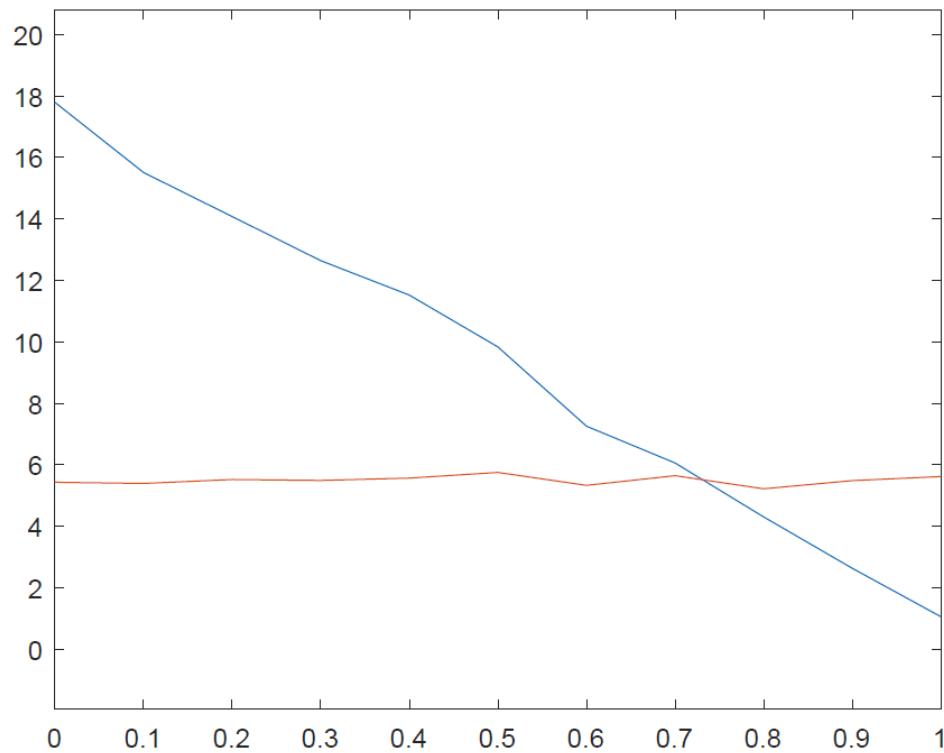


Рис. 7. Зависимость меры различия 14 от γ . Распределение степеней вершин. $\gamma_0 = 0.5$. Бразилия, 2012 год. 250 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

С другой стороны, есть примеры, когда сходимость обеих мер плохая и значение меры различия с увеличением наблюдений практически не изменяется.

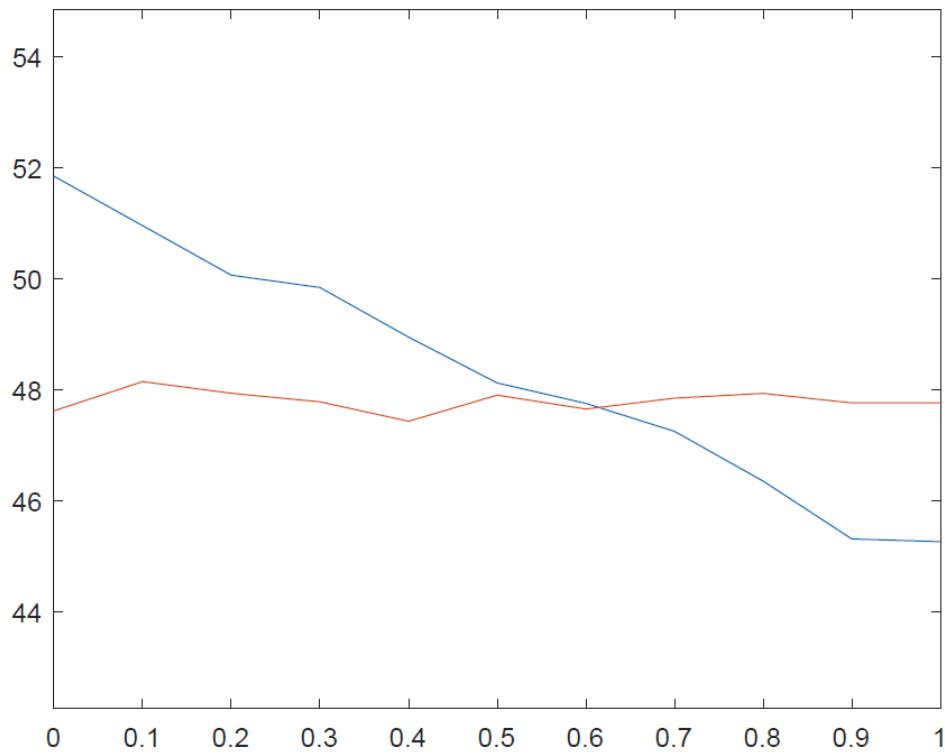


Рис. 8. Зависимость меры различия 14 от γ . Распределение степеней вершин. $\gamma_0 = 0.3$. Франция, 2011 год. 100 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

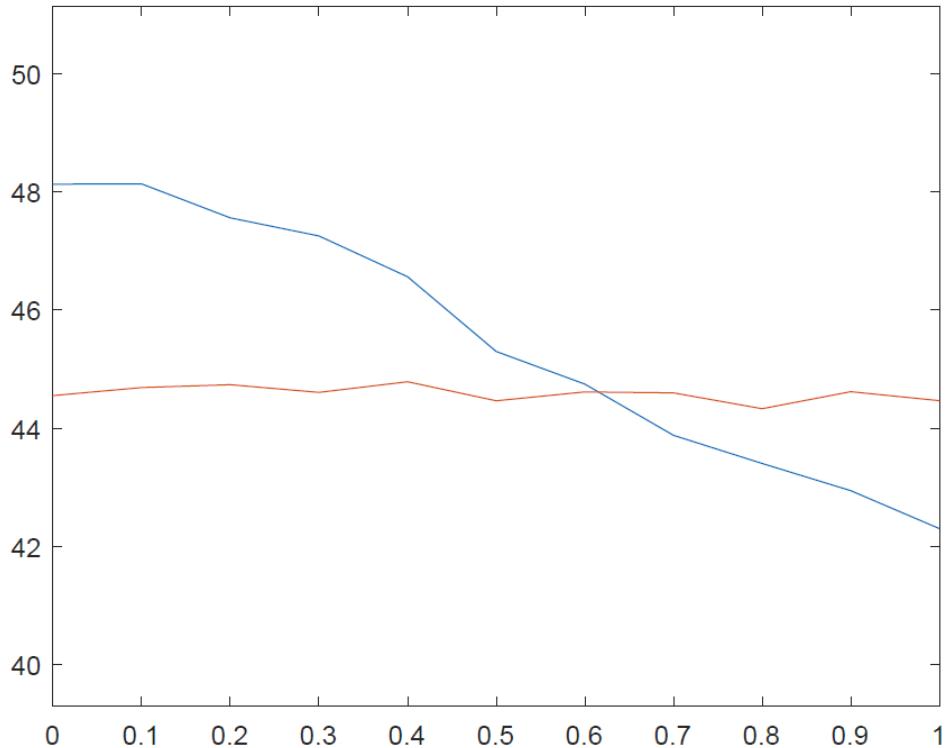


Рис. 9. Зависимость меры различия 14 от γ . Распределение степеней вершин. $\gamma_0 = 0.3$. Франция, 2011 год. 250 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

На рисунках ниже отмечены "экстремальные" случаи, когда мера различия при использовании для оценок вероятности совпадения знаков оказывается почти равной мере различия при использовании для оценок выборочного коэффициента корреляции Пирсона при γ близких к 1 и, наоборот,

оказывается хуже при γ близком к 0.

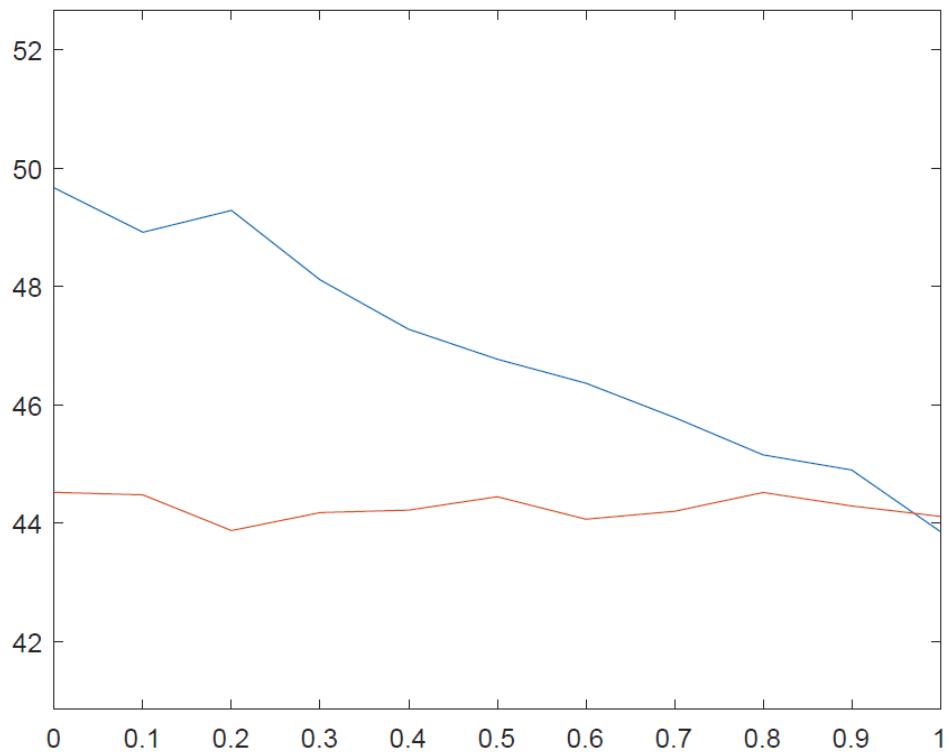


Рис. 10. Зависимость меры различия 14 от γ . Распределение степеней вершин. $\gamma_0 = 0.1$. Китай, 2011 год. 250 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

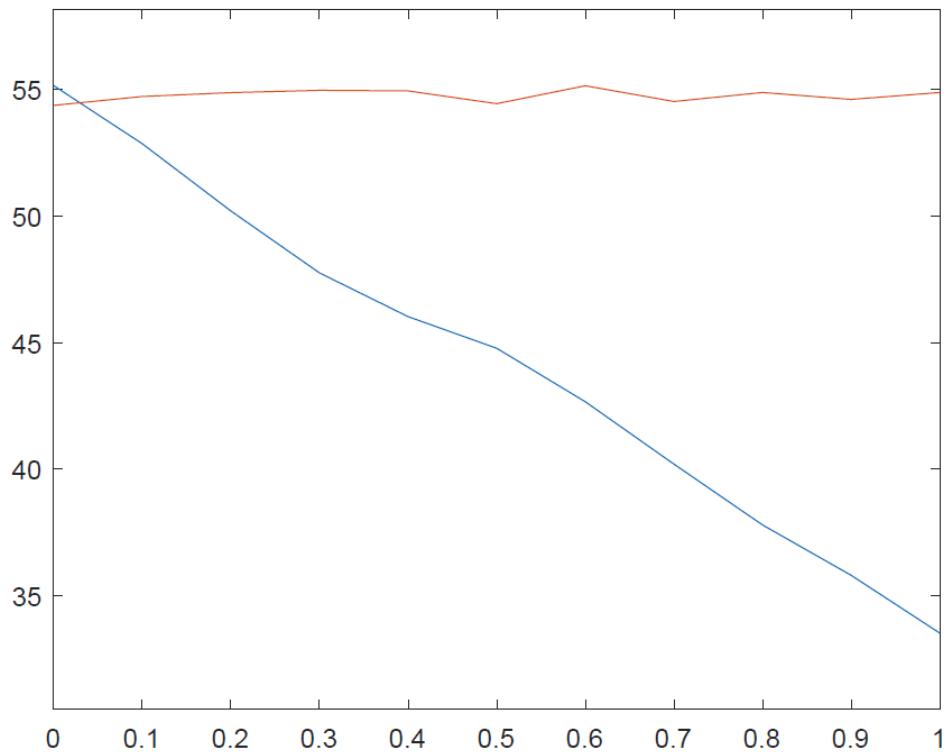


Рис. 11. Зависимость меры различия 14 от γ . Распределение степеней вершин. $\gamma_0 = 0.5$. Германия, 2010 год. 100 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

5.3. Клики и независимые множества

Эксперимент заключался в следующем: $n(n = 100, 250)$ раз генерировался N-мерный ($N = 50$) случайный вектор с распределением смеси с заданным γ . По наблюдениям вычислялись выборочные корреляции Пирсона и частоты совпадения знаков, строился граф рынка 5 с порогом $\gamma_0(\gamma_0 = 0, 1; 0, 3; 0, 5)$, находилась максимальная клика (максимальное независимое множество). Эксперимент повторялся 10000 раз и усреднением находилась оценка меры различия 15. Результаты проведения экспериментов представлены в виде кривых зависимости меры различия от $\gamma(\gamma = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1)$ для каждого рынка, каждой сети и каждого значения числа наблюдений.

Для данных сетевых структур вероятность совпадения знаков оказывается устойчивой к изменению параметра смеси γ .

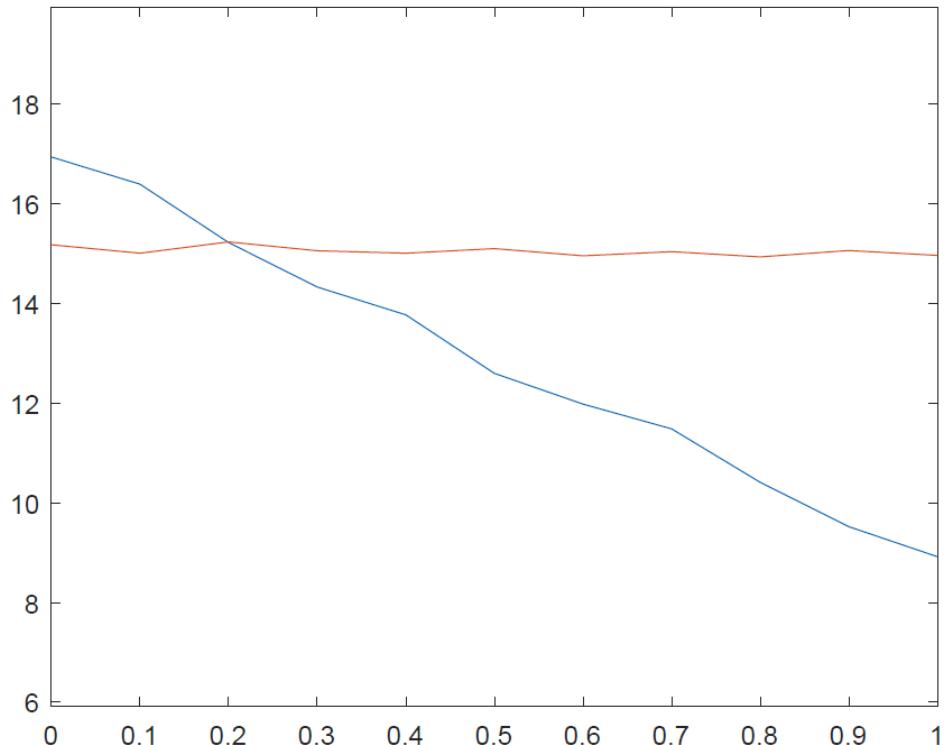


Рис. 12. Зависимость меры различия 15 от γ . Максимальное независимое множество. $\gamma_0 = 0.5$. Китай, 2011 год. 100 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

В данном случае характерно, что при увеличении числа наблюдений знаки показывают лучшую сходимость, нежели коэффициент корреляции Пирсона.

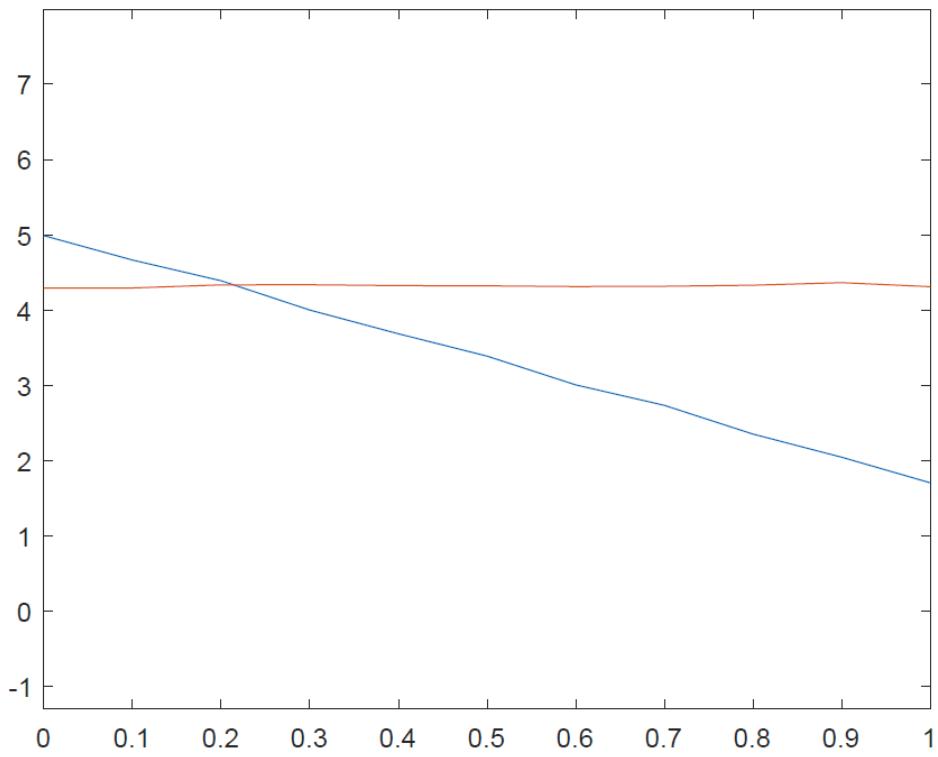


Рис. 13. Зависимость меры различия 15 от γ . Максимальная клика. $\gamma_0 = 0.1$. США, 2011 год. 100 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

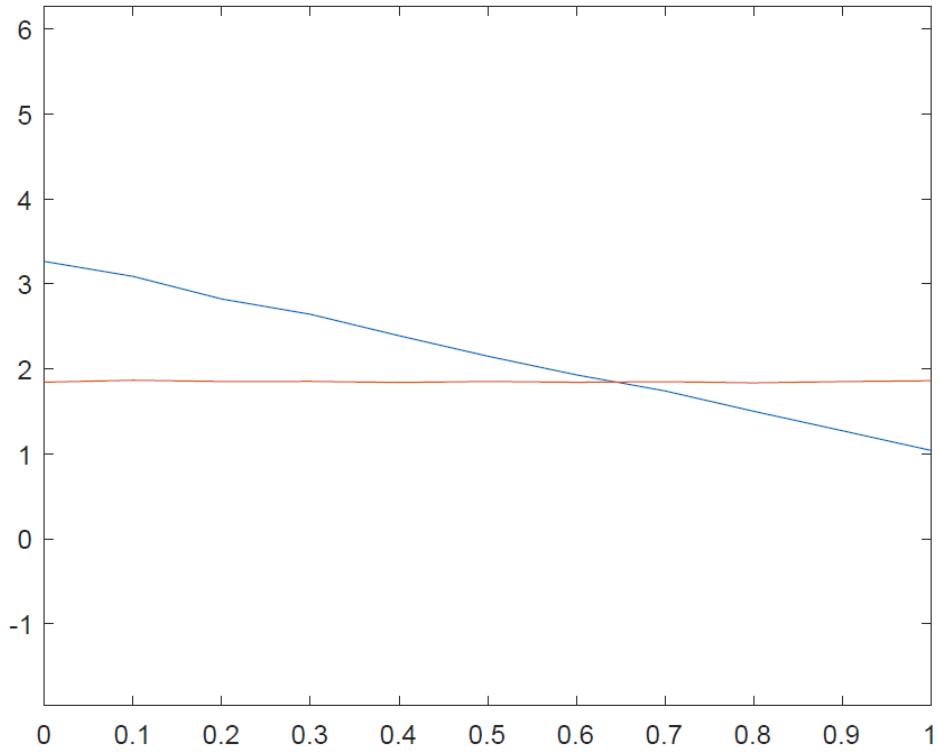


Рис. 14. Зависимость меры различия 15 от γ . Максимальная клика. $\gamma_0 = 0.1$. США, 2011 год. 250 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

И в этих экспериментах имеются примеры, когда мера различия при использовании для оценок вероятности совпадения знаков оказывается почти равной с мерой различия при использовании для оценок выборочного коэффициента корреляции Пирсона при γ близких к 1 и, наоборот, оказывается хуже при γ близком к 0.

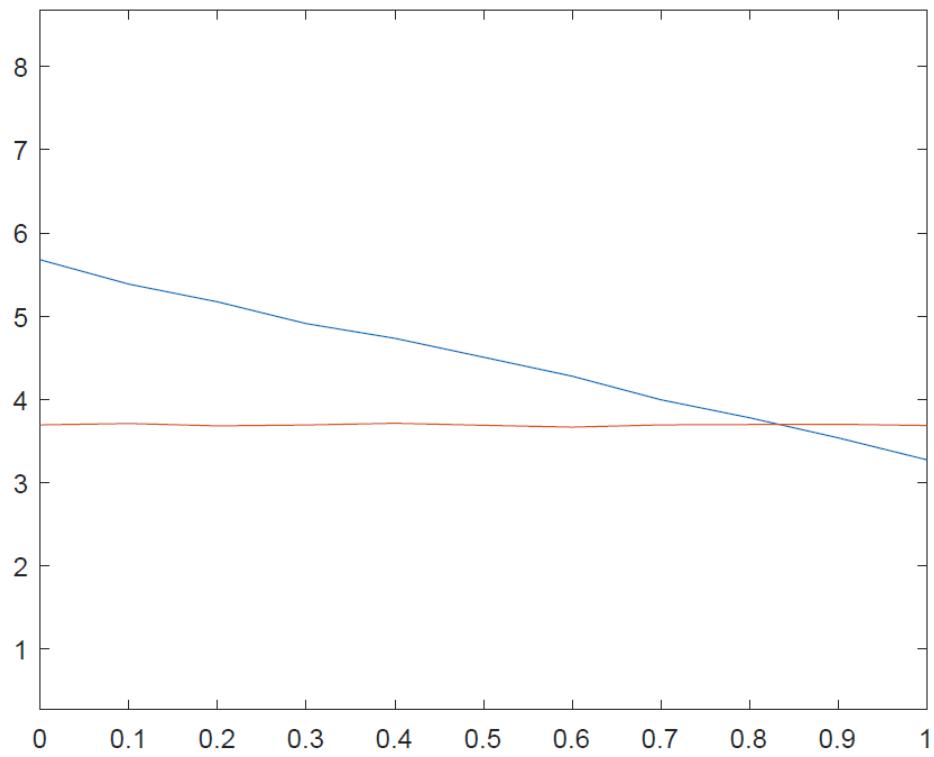


Рис. 15. Зависимость меры различия 15 от γ . Максимальная клика. $\gamma_0 = 0.5$. Индия, 2010 год. 250 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

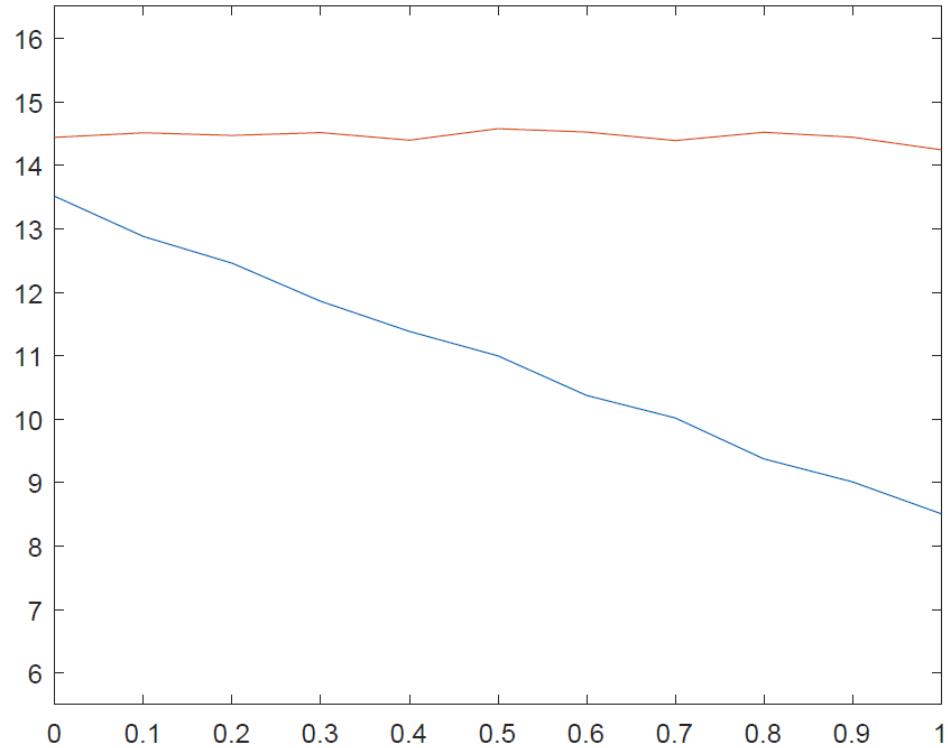


Рис. 16. Зависимость меры различия 15 от γ . Максимальная клика. $\gamma_0 = 0.1$. Россия, 2010 год. 100 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

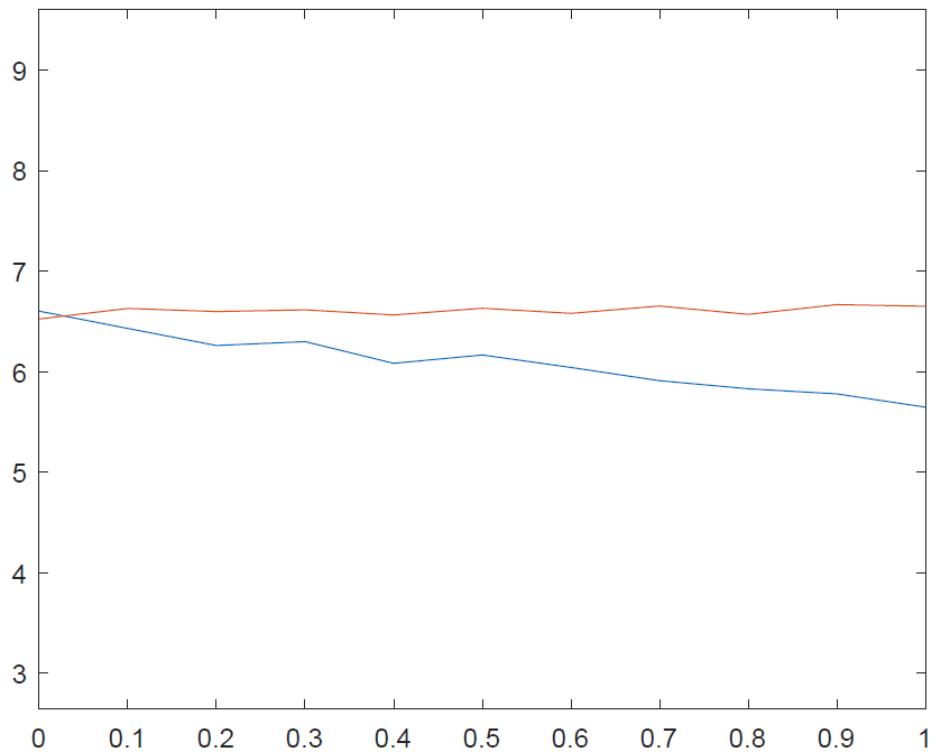


Рис. 17. Зависимость меры различия 15 от γ . Максимальное независимое множество. $\gamma_0 = 0.1$. Франция, 2011 год. 100 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

5.4. Максимальное оствовное дерево

В данном случае рассматривалась смесь $\gamma * f_{gauss}(x_1, \dots, x_N) + (1 - \gamma) * f_{student}(x_1, \dots, x_N)$ N-мерного нормального распределения и N-мерного распределения Стьюдента с 3 и 4 степенями свободы. Эксперимент заключался в следующем: $n(n = 1000, 10000)$ раз генерировался N-мерный ($N = 10$) случайный вектор с распределением смеси с заданным γ . По наблюдениям вычислялись выборочные корреляции Пирсона и частоты совпадения знаков, находились MST 11. Эксперимент повторялся 10000 раз и усреднением находилась оценка меры различия 16. Результаты проведения экспериментов представлены в виде кривых зависимости меры различия от $\gamma(\gamma = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1)$ для каждого рынка, каждой сети, каждого значения количества наблюдений и каждой степени свободы распределения Стьюдента. Графики ниже показаны для смеси с распределением Стьюдента с 3 степенями свободы. Результаты для смеси с распределением Стьюдента с 4 степенями свободы аналогичны.

При $n = 1000$ значение меры различия (вероятности правильного определения топологии степеней вершин) очень близко к 0.

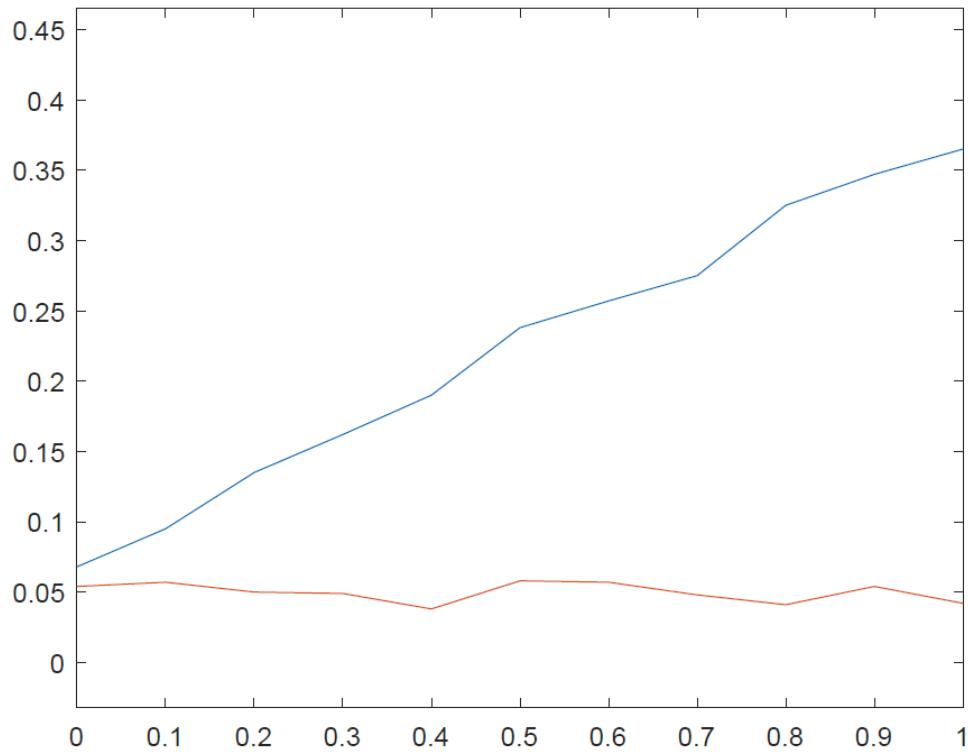


Рис. 18. Зависимость меры различия 16 от γ (смесь с распределением Стьюдента с 3 степенями свободы). Максимальное оствое дерево. Китай, 2012 год. 1000 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

При $n = 10000$ графики для различных стран похожи друг на друга и основное различие заключается в значении меры различия. Наиболее характерные из графиков приведены ниже.

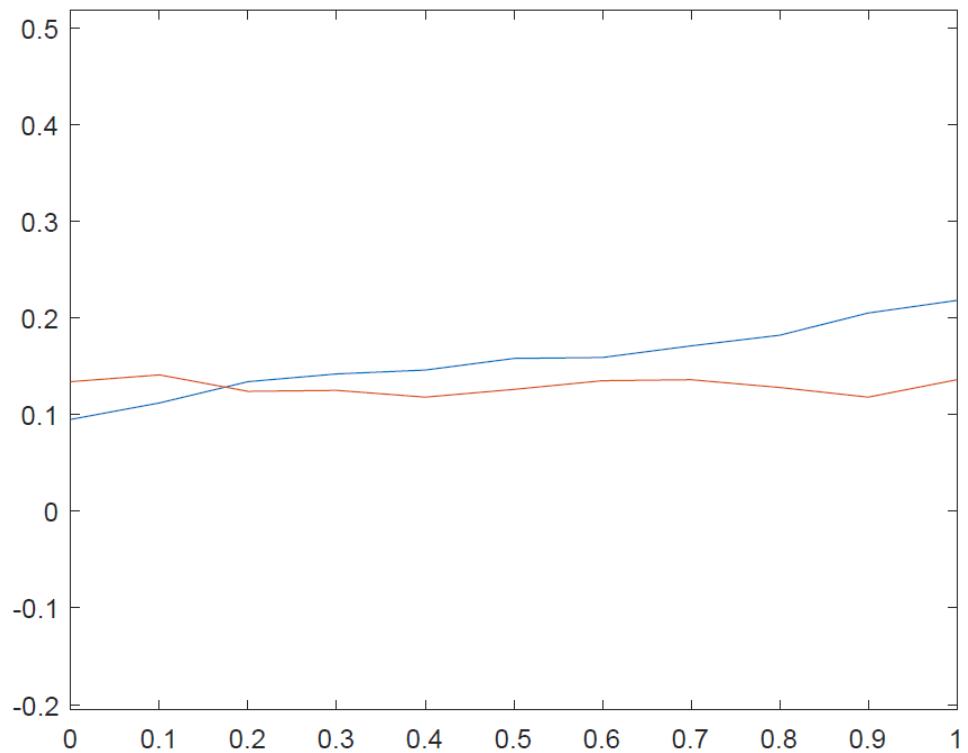


Рис. 19. Зависимость меры различия 16 от γ (смесь с распределением Стьюдента с 3 степенями свободы). Максимальное оствое дерево. Франция, 2010 год. 10000 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

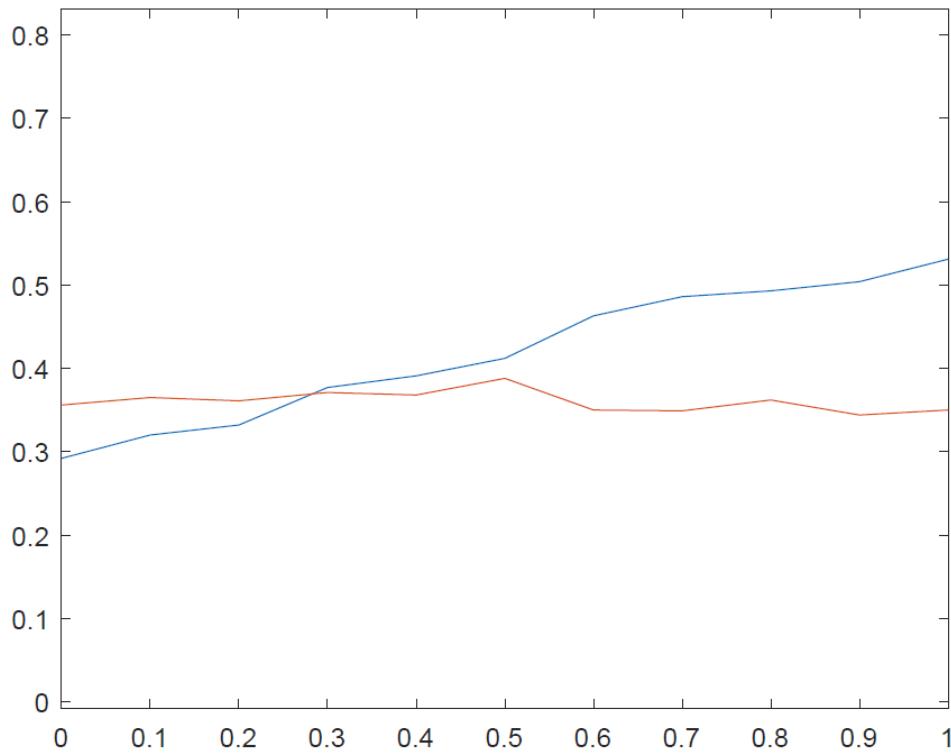


Рис. 20. Зависимость меры различия 16 от γ (смесь с распределением Стьюдента с 3 степенями свободы). Максимальное оствонное дерево. Германия, 2012 год. 10000 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

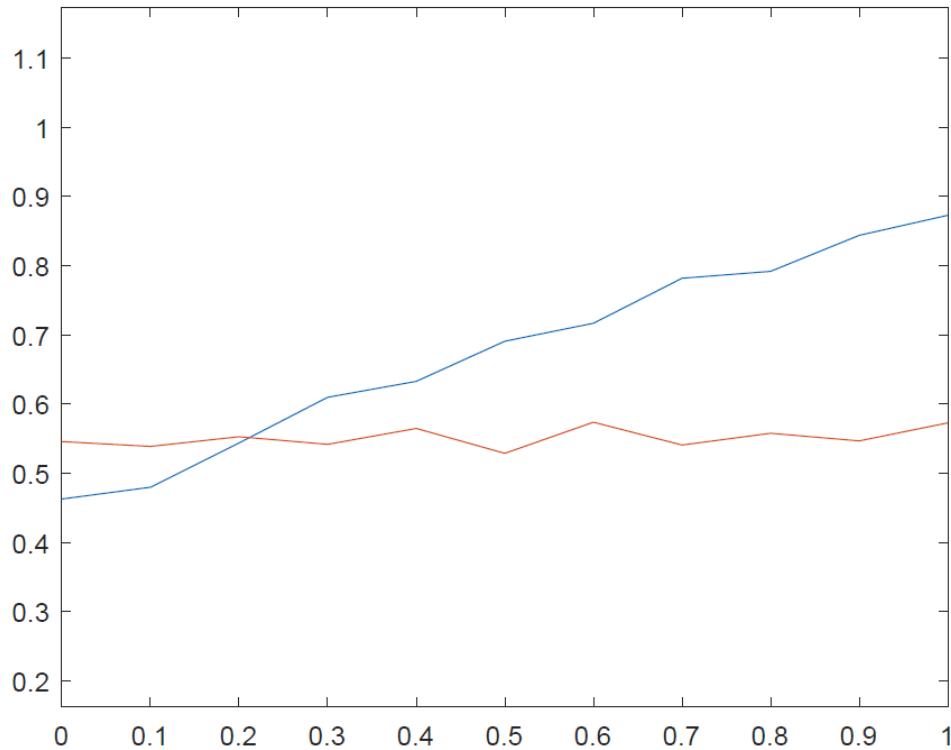


Рис. 21. Зависимость меры различия 16 от γ (смесь с распределением Стьюдента с 3 степенями свободы). Максимальное оствонное дерево. Индия, 2011 год. 10000 наблюдений. Красным - сеть вероятности совпадения знаков, синим - сеть Пирсона.

Таким образом, приведенные результаты показывают устойчивость знаковых процедур оценивания характеристик сетевых моделей и неустойчивость процедур, основанных на выборочных корре-

ляциях Пирсона, к изменению вероятностной модели совместного распределения доходностей акций в классе эллиптических распределений. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 15-32-01052).

Литература

- [1] Визгунов А.Н., Гольденгорин Б.И., Замараев В.А., Калягин В.А., Колданов А.П., Колданов П.А., Пардалос П.М.(2012). Применение рыночных графов к анализу фондового рынка России // Журнал Новой экономической ассоциации. № 3. С. 66—81.
- [2] Калягин В.А., Колданов А.П., Колданов П.А., Пардалос П.М.(2017). Статистические процедуры идентификации сетевых структур фондовых рынков// Журнал Новой экономической ассоциации, №3 (35), с. 33–52
- [3] Крамер Г. (1972). Математические методы статистики. М.: Наука.
- [4] Фантаццини Д.(2011). Моделирование многомерных распределений с использованием копуляционных функций. I //Прикладная эконометрика. Vol.22(2). P. 98—134.
- [5] Ширяев А.Н. (1998). Основы стохастической финансовой математики. ФАЗИС, Москва.
- [6] Anderson T.W.(2003). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. NewYork: Wiley-Interscience.
- [7] Bautin G.A., Koldanov A.P., Pardalos P.M. (2014). Robustness of Sign Correlation in Market Network Analysis // Springer Optimization and Its Applications. Vol. 100. P. 25—33.
- [8] Bautin G., Kalyagin V.A., Koldanov A.P. (2013a). Comparative Analysis of Two Similarity Measures for the Market Graph Construction //Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Vol. 59. P. 29—41.
- [9] Bautin G.A., Kalyagin V.A., Koldanov A.P., Koldanov P.A., Pardalos P.M. (2013b). Simple Measure of Similarity for the Market Graph Construction // Computational Management Science. Vol. 10. P. 105—124.
- [10] Boginski V., Butenko S., Pardalos P.M. (2005). Statistical Analysis of Financial Networks //Journal Computational Statistics and Data Analysis. Vol. 48 (2). P. 431—443.
- [11] Boginski V., Butenko S., Pardalos P.M. (2006). Mining Market Data: A Network Approach //Journal Computers and Operations Research. Vol. 33 (11). P. 3171—3184.
- [12] Boginsky V., Butenko S., Pardalos P.M. (2003). On Structural Properties of the Market Graph. In: Nagurney A. (ed.) “Innovations in Financial and Economic Networks”. Northampton: Edward Elgar Publishing Inc. P. 29—45.
- [13] Bonanno G., Lillo F., Mantegna R.N.(2001). High-Frequency Cross-Correlation in a Set of Stocks //Quantitative Finance. Vol. 1. P. 96—104.
- [14] Coronello C., Tumminello M., Lillo F., Miccichi S., Mantegna R.N.(2005). Sector Identification in a Set of Stock Return Time Series Traded at the London Stock Exchange //Acta Physica Polonica B. Vol.36. P. 2653—2679.
- [15] Garas A., Argyrakis P.(2007). Correlation Study of the Athens Stock Exchange //Physica A. Vol. 380. P. 399—410.
- [16] Bodnar T. Elliptically Contoured Models in Statistics and Portfolio Theory/T. Bodnar, F.K. Gupta, T. Varga Springer, 2013.

- [17] Huang W.-Q., ZhuangX.-T., YaoS. (2009). A Network Analysis of the Chinese Stock Market //Physica A. Vol. 388.P.2956—2964.
- [18] Jung W.-S., ChaeS., YangJ.-S., MoonH.-T. (2006). Characteristics of the Korean Stock Market Correlations //Physica A. Vol. 361.P.263—271.
- [19] Kalyagin V.A., Koldanov A.P., Koldanov P.A. (2017). Robust Identification in Random Variables Networks // Journal of Statistical Planning and Inference. Vol. 181. No. Feb. P. 30—40.
- [20] Koldanov A.P., Kalyagin V.A., Koldanov P., Pardalos P.M.(2013). Statistical Procedures for the Market Graph Construction // Computational Statistics and Data Analysis. Vol. 68. P. 17—29.
- [21] Koldanov P., Kalyagin V.A., Koldanov A.P., Zamaraev V.A. (2014). Market Graph and Markowitz Model. In: “Optimization in Science and Engineering(In Honor of the 60th Birthday of Panos M. Pardalos)”. NewYork: Springer Science, Business Media. P. 301—313.
- [22] Mantegna R.N. (1999). Hierarchical Structure in Financial Market //European Physical Journal. Series B. Vol. 11. P. 193—197.
- [23] Markowitz H.M. (1952). Portfolio Selection //Journal of Finance. Vol. 7 (1). P. 77—91.
- [24] Tabak B.M., Thiago R.S., Cajueiro D.O. (2010). Topological Properties of Stock Market Networks: The Case of Brazil //Physica A. Vol. 389. P. 3240—3249.
- [25] Tee O.C.(2005). The Impact of Globalisation on the Formulation and Implementation of Monetary Policy in Singapore. In: “Globalisation and Monetary Policy in Emerging Markets”. BIS Papers Chapters. Vol. 23. Bank for International Settlements. P. 263—268.
- [26] Tumminello M., Aste T., Matteo T.D., Mantegna R.N. (2005). A Tool for Filtering Information in Complex Systems //Proceedings of the National Academy of Sciences. Vol. 102 (30). P. 10421—10426.
- [27] Tumminello M., Lillo F., Mantegna R.N. (2010). Correlation, Hierarchies and Networks in Financial Markets //Journal of Economic Behavior Organization. Vol. 75. P. 40—58.
- [28] Wang G.J., Chi X., HanF., Sun B. (2012). Similarity Measure and Topology Evolution of Foreign Exchange Markets Using Dynamic Time Warping Method: Evidence from Minimal Spanning Tree //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. Vol. 391 (16). P. 4136—4146.