Лекции по теории Морса

Сергей Максименко
Институт математики НАН Украины, Киев

Математиками давно было замечено, что существуют некоторые взаимосвязи между количеством и типами “особых” точек отображений многообразий и геометрическими свойствами самих многообразий.

Ещё К. Вейерштрасс (1815-1897) показал, что непрерывная функция на компакте обязательно принимает максимальное и минимальное значение. Б. Риман (1826-1866) и А. Гурвиц (1959-1919) установили связь между числом точек ветвления разветвленного накрытия поверхностей и эйлеровыми характеристиками этих поверхностей. А. Пуанкаре (1854-1912) и Х. Хопф (1894-1971) получили формулу связывающую количество и типы особых точек векторных полей и эйлеровой характеристикой многообразия.

Марстон Морс (1982-1977) в 20-х годах прошлого столетия смог формализовать довольно «тонкие» взаимосвязи между числом критических точек дифференцируемой функции на компактном многообразии и геометрическими свойствами (а именно, рангами групп гомологий) этого многообразия. Эти результаты были названы «теорией Морса» и дали очень сильный толчок в развитии практически всех разделов математики и физики.

Они были обобщены Р. Боттом (1923-2005) на случай функций, у которых критические точки образуют подмногобразия. Л.А.Люстерник (1899-1991) и Л.Г.Шнирельман (1905-1938) построили аналог теории Морса для покрытий топологических пространств стягиваемыми множествами. Э. Виттен (род. 1951) передоказал результаты Морса с помощью “физических” аргументов. М. Атья (род. 1929) и И. Зингер (род. 1924) доказали так называемую теорему *об индексе* эллиптического оператора. С.П.Новиков (род. в 1938 в Нижнем Новгороде) развил аналог теории Морса для дифференциальных форм. Имеется также много других замечательных примеров, перечислить которые здесь вряд ли удастся.

Цель этих двух лекций изложить базовые геометрические идеи лежащие в основе теории Морса и проиллюстрировать ее применение для доказательства некоторых изучаемых в школьном и университетском курсе теорем.