**Программа учебной дисциплины «Вычислительная математика»**

Утверждена
Академическим советом ООП
Протокол № 2 от «27» июня 2018 г.

| | |
|---|---|
| Автор | Казаков А. О., к.ф-м.н., akazakov@hse.ru |
| Число кредитов | 6 |
| Контактная работа (час.) | 76 |
| Самостоятельная работа (час.) | 152 |
| Курс | 4 |
| Формат изучения дисциплины | без использования онлайн курса |

## I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины является ознакомление студентов с методами вычислительной математики. Основной целью освоения дисциплины является приобретение студентами теоретических знаний и навыков численного исследования различных математических проблем. Особое внимание будет уделено освоению методов численного исследования динамических систем, и численных методов проведения бифуркационного анализа.

В результате освоения дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные методы вычислительной математики;

**уметь:**

- решать типовые задачи с помощью методов вычислительной математики;

**владеть:**

- навыками решения математических задач, возникающих в некоторых прикладных областях.

Изучение дисциплины «вычислительная математика» базируется на следующих дисциплинах:

- основы математического анализа;
- алгебры и геометрии;
- дифференциальные уравнения;
- введение в динамические системы.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями: знать основы математического анализа, алгебры и геометрии, дифференциальных уравнений, введение в динамические системы. «Вычислительная математика» занимает одну из основополагающий позиций в образовании студентов специальности «математика».

## II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

**1. Введение.**

1.1. Классификация динамических систем

1.1.1 По типу времени

- Системы с непрерывным временем (потоки)
- Системы с дискретным временем (точечные отображения)

1.1.2. По размерности

1.1.3. По наличию дополнительных инвариантов (симметрий, первых интегралов)

- Интегрируемые системы.
- Неинтегрируемые системы с гладкой инвариантной мерой.
- Неинтегрируемые системы без меры
- Обратимые (реверсивные) системы.

1.2. Классификация аттракторов в потоковых и дискретных системах: состояния равновесия, периодические орбиты.

1.2 Понятие бифуркации в динамических системах.

1.4. Сведение потоковых систем к точечным отображениям с помощью построения секущей Пуанкаре. Численные методы конструирования отображения Пуанкаре.

**2. Анализ локальных бифуркаций систем с дискретным временем**

2.1. Бифуркации неподвижных точек.

2.2. Методы численного поиска неподвижных и периодических точек и определение их мультипликаторов.

2.3. Продолжение неподвижных точек по параметрам.

2.4. Численное исследование двумерного отображения Эно и универсального отображения Спротта. Построения деревьев бифуркаций

**3. Анализ глобальных бифуркаций систем с дискретным временем**

3.1. Построение инвариантных многообразий седловых состояний равновесия (для потоков) и седловых циклов (для отображений).

3.2. Глобальные бифуркации, гомоклинические траектории и гомоклинические структуры.

3.3. Численные исследования локальных и глобальных бифуркаций в системе Лоренца и системе Рёсслера.

3.4. Численные исследования трехмерного отображения Эно.

**4. Двухпараметрический анализ динамических систем.**

4.1. Построение бифуркационных кривых локальных бифуркаций периодических точек.

4.2. Построение карт динамических режимов. Анализ системы на основе построенных карт.

4.3. Построение карт показателей Ляпунова. Анализ системы на основе построенных карт.

4.4. Построение карт средней дивергенции (среднего якобиана). Анализ системы на основе построенных карт.

**5. Исследование некоторых сценариев перехода от порядка к хаосу. Классификация хаотических режимов.**

4.1. Переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума.

4.2. Переход к хаосу в результате разрушения тора (инвариантной кривой для отображения) по сценарию Афраймовича-Шильникова.

4.3. Переход к хаосу в результате возникновения гомоклиники к седло-фокусу по сценарию Шильникова.

4.4 Переход к хаосу в соответствии со сценариями Гонченко-Шильникова (устойчивая точка -> удвоение периода -> возникновение гомоклинической структуры -> исчезновение регулярного аттрактора).

4.5 Классификация странных аттракторов:

- Квазиаттракторы;
- Гиперболические аттракторы;

Псевдогиперболические аттракторы.*

## III. ОЦЕНИВАНИЕ

Студент должен быть знаком с вычислительными методами, а также приобрести опыт решения практических задач. При выполнении письменных контрольных работ, а также зачетной и экзаменационной работ студент должен продемонстрировать знание теоретического материала соответствующего раздела курса, уметь правильно применять его к решению конкретных задач, соблюдать логику решения задачи и грамотно формулировать ответ. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Результатом контрольной работы или экзамена студентов является оценка, выставляемая по 10-ти балльной шкале в соответствии со следующими критериями:

высшая оценка в 10 баллов выставляется при отличном выполнении заданий, то есть при наличии полных (с детальными пояснениями и культурой выкладок), оригинальных и правильных ответов и высококачественного оформления работы, а также при полном развернутом верном ответе на вопросы по содержанию курса;

оценка в 7-8-9 баллов выставляется при наличии верных и правильных ответов на вопросы по содержанию курса, при грамотном выполнении заданий, но при отсутствии какого-либо из выше перечисленных отличительных признаков, как, например: детальных выкладок или пояснений, качественного оформления;

оценка в 6 баллов выставляется при наличии отдельных неточностей в ответах на вопросы по содержанию курса и при выполнении заданий или при наличии замечаний к заданиям непринципиального характера (описки, случайные ошибки арифметического характера, грамматические ошибки);

оценка в 5 баллов выставляется в случаях, когда в ответах и в заданиях имеются неточности и ошибки, свидетельствующие о недостаточном понимании вопросов и требующие дополнительного обращения к тематическим материалам;

оценка в 4 балла выставляется при наличии серьезных ошибок и пробелов в знаниях по контролируемой тематике;

оценка в 3 балла выставляется при наличии лишь отдельных положительных моментов в выполненной заданий и представленных ответах на вопросы по содержанию курса;

оценка в 2 балла выставляется при полном отсутствии положительных моментов в выполненных заданиях и представленных ответах на вопросы по содержанию курса;

оценка в 1 или 0 баллов выставляется в случаях, когда небрежные записи, неправильные ответы, кроме того, сопровождаются какими-либо демонстративными

проявлениями безграмотности или неэтичного отношения к изучаемой теме и предмету в целом.

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях: оценивается правильность решения задач на семинаре. Оценки за работу на семинарских занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Результирующая оценка по 10-ти балльной шкале за работу на семинарских занятиях также заносится в рабочую ведомость.

Накопленная оценка за текущий контроль (1-3 модули) учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$$О_{накопленная} = 0,4 \cdot О_{к/р} + 0,3 \cdot О_{сам.работа} + 0,3 О_{аудит.}$$

Результирующая оценка за итоговый контроль в форме экзамена выставляется по следующей формуле:

$$О_{итоговый} = 0,2 \cdot О_{экзамен} + 0,8 \cdot О_{накопленная}$$

Способ округления оценок – арифметический.

В диплом ставится оценка за итоговый контроль, которая является результирующей оценкой по учебной дисциплине.

## IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**Тематика заданий текущего контроля**

Примерные типы заданий для контрольных работ:

1. Треугольник устойчивости неподвижной точки.
2. Анализ локальных бифуркаций в отображении Эно.
3. Многомерный метод секущих для поиска периодических точек.
4. Метод Эно построения отображения Пуанкаре, метод интерполяций для поиска пересечения траектории и секущей.
5. Гомоклиническая траектория Пуанкаре. Гомоклиническя структура.
6. Теорема Л.П. Шильникова о сложной структуре в окрестности петли седло-фокуса. Примеры.

**Вопросы для оценки качества освоения дисциплины**

Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу.

1. Основные бифуркации состояний равновесия потоковых систем
2. Седло-узловая бифуркация
3.Бифуркация сложного узла, сложного седла
4. Бифуркация Андронова-Хопфа (мягка и жесткая потери устойчивости)
5. Основные локальные бифуркации неподвижных точек отображений
6. Седло-узловая (касательная бифуркация)
7. Бифуркация вилка
8. Бифуркация Неймарка-Сакера
9. Треугольник устойчивости
10. Нелокальные бифуркации в потоковых системах
11. Теорема Шильникова о сложной структуре в окрестности петли седло-фокуса
12. Гомоклинические пересечения и касания. Гомоклиническая структура.
13. Классификация аттракторов в динамических системах
14. Алгоритмы поиска неподвижных и периодических точек

15. Алгоритм построения инвариантных многообразий

16.Алгоритмы построения отображения Пуанкаре. Метод половинного деления, интерполяции, Эно.

17. Алгоритм Бинетина расчета спектра показателей Ляпунова

18. Карты периодических режимов и показателей Ляпунова, дивергенций.

19. Исследование локальных и глобальных бифуркаций в двумерном отображении Эно

20. Переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода

21. Переход к хаосу через разрушение тора (по сценариям Афраймовича-Шильникова)

22. Аттрактор Шильникова

23. Аттрактор Лоренца

24. Аттрактор Рёсслера

25. Бифуркационный анализ трехмерного отображения Эно.

## V. РЕСУРСЫ

### 1. Основная литература


1. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2 / Л.П.Шильников [и др.]; пер. с англ. В.А.Осотовой под науч. ред. Д.В.Тураева, А.Л.Шильникова. - М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований: R&C Dynamics, 2009. - 546 с. - (Современная математика). - ISBN 978-5-93972-700-6.
2. Пантина, И.В. Вычислительная математика [Электронный ресурс]: учебник / И.В.Пантина, А.В.Синчуков; ЭБС Znanium. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: МФПУ Синергия, 2012. - 176 с. - (Университетская серия). – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=451160. – Загл. с экрана.


### 2. Дополнительная литература


1. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения: учебник / А.Н.Тихонов, А.Б.Васильева, А.Г.Свешников. - 4-е изд.; стер. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. - (Курс высшей математики и математической физики; Вып. 6). - ISBN 5-9221-0277-X.
2. Зализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Е.Зализняк, Г.И.Щепановская; ЭБС Znanium. - Красноярск: СФУ, 2012. - 174 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=441232. – Загл. с экрана.
3. Рябенький, В.С. Введение в вычислительную математику [Электронный ресурс] / В.С.Рябенький. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 288 с. - (Физтеховский учебник). – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=544692. – Загл. с экрана.


### 3. Программное обеспечение

| № п/п | Наименование | Условия доступа |
|---|---|---|
| 1. | Microsoft Windows 8.1 Professional RUS | *Из внутренней сети университета (договор)* |

| | | |
|---|---|---|
| 2. | Matlab | *Из внутренней сети университета (договор)* |

## 4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

| № п/п | Наименование | Условия доступа |
|---|---|---|
| | ***Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы*** | |
| 1. | Электронные образовательные ресурсы | *Договор на использование электронных баз данных/по подключению и обеспечению доступа к базам данных* |
| | ***Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)*** | |
| 1. | «Электронно-библиотечная система (ЭБС) Public.ru» | URL: https://www.public.ru/ |

## 5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

− ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

− мультимедийный проектор с дистанционным управлением.