ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ К КЛАССИФИКАЦИИ РАСПАДАЮЩИХСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Борисов Иван Михайлович
аспирант кафедры фундаментальной математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, г. Нижний Новгород. i.m.borisov@mail.ru

Полотовский Григорий Михайлович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики,
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Россия, г. Нижний Новгород. polotovsky@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается применение метода Оревкова, основанного на теории узлов и зацеплений, к классификации вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых, при выполнении некоторых условий максимальности и общего положения. В частности, рассматриваются распадающиеся кривые 7-й и 8-й степени.

Ключевые слова: вещественные алгебраические кривые, распадающиеся алгебраические кривые, метод Оревкова.

APPLICATION OF THE THEORY OF KNOTS AND LINKS TO THE CLASSIFICATION OF THE DECOMPOSABLE ALGEBRAIC CURVES

Borisov Ivan Michailovich
Postgraduate at the Department of Fundamental mathematics
National Research University Higher School of Economics,
Russia, Nizhny Novgorod. i.m.borisov@mail.ru

Polotovsky Grigory Michailovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Algebra, Geometry and Discrete mathematics
National Research University Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Russia, Nizhny Novgorod. polotovsky@gmail.com

Annotation: The work is devoted to the application of the Orevkov method, based on the theory of knots and links, to the classification of real algebraic curves, which decompose into the product of two nonsingular curves, under some conditions of maximality and general position. In particular, decomposable curves of the 7 and 8 degree are considered.
Keywords: real algebraic curves, real decomposable algebraic curves, Orevkov method

Задача топологической классификации вещественных алгебраических кривых берёт своё начало фактически у истоков математики, а особую известность и современную формулировку приобрела после включения Давидом Гильбертом в его известный список математических проблем под номером 16. Тогда, в 1900 году, Гильберт, столкнувшись, с первым нетривиальным случаем, кривыми степени 6, поставил задачу классификации кривых шестой степени, которая была решена лишь спустя 69 лет Дмитрием Андреевичем Гудковым (см. [2]). Сейчас из**вестн**а классификации кривых седьмой степени, а для кривых восьмой степени есть открытые вопросы. После решения 16 проблемы Гильберта к этой теме резко возрос интерес и появился ряд сопутствующих ей задач, одна из которых была сформулирована Гудковым как топологическая классификация вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых, при некоторых естественных условиях максимальности и общего положения кривых сомножителей. На данный момент известна классификации распадающихся кривых до 6 степени включительно, есть открытые вопросы для кривых степени 7.

Определение 1. Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.

Определение 2. Множество RC_m (CC_m) точек $x_0 : x_1 : x_2 ((z_0 : z_1 : z_2))$ вещественной (комплексной) проективной плоскости RP^2 (CP^2), удовлетворяющих уравнению $C_m(x_0, x_1, x_2) = 0$, называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой C_m.

Определение 3. Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в CP^2).

Теорема (Харнак, 1876). Пусть N – число компонент связности RC_m. Тогда $N \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, причём эта оценка точна для любого m.

Кривые с максимально возможным по теореме Харнака числом ветвей называются *М*-кривыми.

Будем считать, что для рассматриваемых распадающихся кривых C_m выполняются следующие условия:
1. $C_m = C_{m-k} C_k$,
2. C_{m-k} и C_k являются *М*-кривыми,
3. C_{m-k}и C_k пересекаются в $(m-k) \cdot k$ действительных точках без касания,
4. все точки пересечения лежат на одной ветви кривой C_{m-k} и на одной ветви кривой C_k,
5. точки пересечения лежат на пересекающихся ветвях в одном порядке.

Задача топологической классификации распадающихся кривых степени m обычно формулируется как топологическая классификация троек (RP^2, RC_m, RC_k), где $C_m(x_0, x_1, x_2) = C_k(x_0, x_1, x_2) \cdot C_{m-k}(x_0, x_1, x_2)$.

Для того, чтобы применить метод Оревкова (подробнее см. [5], [6]), нужно выбрать схемы, для которых существует максимальный пучок, то есть в RP^2 есть точка, такая, что любая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекает исследуемую схему кривой степени m не менее чем в $m - 2$ точках, и существует прямая, пересекающая схему в m точках. Идея метода заключается в том, чтобы сначала получить для кривой C_m соответствующую ей косу, рассматривая в комплексной проективной плоскости CP^2 взаимное расположение пучка комплексных прямых CL_p с центром в точке p относительно CC_m и устраняя двойные точки множества $CC_m \cap Cl_p$. А затем использовать известный факт (см. [4]), что если схема реализуется вещественной алгебраической кривой, то соответствующая коса квазиположительна. Неравенство Мурасуги-Тристрама и условие Фокса-Милнора – необходимые условия квазиположительности косы. Поэтому, если хотя бы одно из них не выполняется, то схема не реализуется вещественной алгебраической кривой.

В нашей работе метод Оревкова применялся к распадающимся кривым степени 7 и 8. Среди распадающихся кривых степени 7 рассматривались взаимные расположения двух коник и кубики, такие, что коники пересекаются друг с другом в четырёх точках, а нечётная ветвь кубики пересекает каждую из коник в шести точках. Метод Оревкова применялся для 19 схем, вопрос реализуемости которых кривыми рассматриваемого класса оставался открытым. 11 из них удалось запретить этим методом. Также рассматривались распадающиеся кривые степени 8 с сомножителями степеней 2 и 6. Было доказано, что из 250 допустимых расположений, 230 не реализуются вещественными алгебраическими кривыми рассматриваемого класса. Известно, что 6 из оставшихся схем реализуются методом Гильберта (см. [1]). Для остальных 14 схем вопрос о реализуемости вещественными алгебраическими кривыми указанного вида остаётся открытым.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Виро О.Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией // Алгебра и анализ. –1989, №1, С 1-73.
2. Гудков Д.А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. – 1974 – Т.29, №4, С. 3-79.
3. Полотовский Г.М. Полная классификация *M*-распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости // Деп. В ВИНИТИ. – 1978, С 1-103.
4. Lee Rudolf Algebraic functions and closed braids // Topology. – 1983, №22, P. 191-202.
5. Orevkov S.Yu. Classification flexible *M*-curves of degree 8 up to isotopy // Geom. Funct. Anal. – 2002, №12, P. 723-755.
6. Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. – 1999, №38, P.779-810.