Смотр выпускных квалификационных работ
математиков России 2020

СБОРНИК ДИПЛОМНЫХ РАБОТ

Нижний Новгород
2020

Смотр выпускных квалификационных работ математиков России 2020. Сборник дипломных работ. Составитель А.И. Морозов.

Кафедра фундаментальной математики НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, 10 июня 2020 г.

Объем 867 с.

Тираж: 1 электронный экземпляр, опубликованный на сайте Смотра https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr и свободно распространяемый под лицензией, описанной в стандарте Creative Commons Attribution-NoDerivs

Оглавление

Вступительное слово 7

Обращение к оценщикам 8

ВКР бакалавров

1. Аржаник А. А. Разработка алгоритма оценки информативности сейсмических атрибутов (ВКР бакалавра, Томский Политехнический Университет, Томск, 2019) 10

2. Белова А. С. Приближенное построение матрицы монодромии (ВКР ~~бакалавра~~ магистра, Башкирский Государственный Университет, Уфа, 2019) 48

3. Боголепова Е. В. Двумерные Лоренцевы орбифолды постоянной кривизны с существенной группой изометрий (ВКР бакалавра, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, Нижний Новгород, 2020) 96

4. Быстрыгова А. В. Расшифровка Булевых функций из замкнутых классов Поста (ВКР бакалавра, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2018) 147

5. Логинова А. С. О классах устойчивой изотопической связности полярных поверхностных каскадов (ВКР бакалавра, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, Нижний Новгород, 2020) 178

6. Пухова А. С. О топологии вещественных распадающихся кривых степени 7 (ВКР бакалавра, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, Нижний Новгород, 2020) 202

7. Пучкова Н. Д. О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4 (ВКР бакалавра, Национальный Исследовательский

Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2019) 222

8. Степанов И.Д. Миграционная устойчивость замощений плоскости (ВКР бакалавра, Московский Физико-Технический Институт, Москва, 2019) 262

9. Ткачук Е. А. Вычисление меры максимальной Энтропии (ВКР бакалавра, Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Севастополе, 2020) 293

10. Николаева М. А. Численное исследование одного метода отсечений с обновлением аппроксимирующих множеств (ВКР бакалавра, Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Казань, 2017) 337

11. Усик В. А. Моделирование вертикального распределения объектов плоской подсистемы Галактики (ВКР бакалавра, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 2018) 382

12. Чернов А.А. О структуре неблуждающего множества градиентно-подобных потоков на проективно-подобных многообразиях (ВКР бакалавра, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, Нижний Новгород, 2020) 425

13. Щепалова А.С. Эволюция орбитального движения астероидов: метрический подход (ВКР бакалавра, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 2018) 440

ВКР специалистов

14. Логачев А. Н. Пороговые эффекты разрушения при действии комбинированных импульсных и высокочастотных нагрузок (ВКР специалиста, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 2019) 470

15. Мясникова А. Ю. Преобразования функциональных интегралов (ВКР специалиста, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2019) 488

16. Плиев Н. В. Слабые пределы вероятностных мер в статистической механике (ВКР специалиста, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2020) 505

17. Трифонова В. А. Критерий Высотности атома (ВКР специалиста, Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2020) 531

ВКР магистров

18. Горская В. А. Взаимное расположение кубики и двух коник на проективной плоскости (ВКР магистра, Национальный Исследовательский Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2020) 561

19. Журавлева М. А. Управление Асимптотическими характеристиками линейных систем в гильбертовом пространстве (ВКР магистра, Удмуртский Государственный Университет, Ижевск, 2020) 581

20. Клочков А. К. Исследование флуктуаций скорости частицы в вязком газе со случайной скоростью в виде двух коррелированных цветных шумов (ВКР магистра, Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана, Москва, 2020) 612

21. Кравченко А. А. Исследование сложности аппроксимации случайных полей большой параметрической размерности (ВКР магистра, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 2020) 675

22. Погорелов П. Г. Применение метода обертывания с информационной регуляризацией для решения задач поиска оптимального подмножества факторов (ВКР магистра, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 2020) 740

23. Щадинский Д. М. Гидродинамика дисперсионного турбулентного потока в канале с шероховатыми стенками (ВКР магистра, Московский

Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана, Москва, 2020) 778

Положение о Смотре 859

Постер Смотра 867

Вступительное слово

Уважаемые коллеги! От лица всего Оргкомитета благодарю вас за участие в Смотре. С вашей помощью и поддержкой мы с 2019 года создаём новый важный элемент в системе математического образования в России.

Мы хотим сделать нормой ситуацию, в которой каждый сильный студент-математик будет делать диплом с мыслью о том, чтобы представить его на Смотр и заявить о себе в математическом сообществе. Мы надеемся, что уйдёт в прошлое ситуация, в которой единственными читателями хорошей дипломной работы являются научный руководитель и рецензент. И, конечно, мы надеемся, что Смотр станет удобной площадкой для общения студентов, выпускников, преподавателей, научных работников и работодателей.

На Смотр в 2020 году подано 23 работы, приём работ завершён и настала фаза собственно смотра - все желающие приглашаются смотреть работы и оценивать их. О том, как это делать, и кто может быть оценщиком, сказано в обращении к оценщикам - оно следует далее. Здесь напомню лишь, что Оргкомитет ожидает, что перед выставлением оценки оценщик уделит изучению работы хотя бы 30 минут своего времени. Мы понимаем, что глубоко изучить работу за это время невозможно, поэтому просим авторов работ отнестись к оценкам снисходительно. Всё же это именно смотр, а не конкурс, в котором каждая работа изучается подробно.

Также стоит отметить, что сборник дипломных работ не является рецензируемым изданием, поэтому публикация научного результата в составе сборника не является препятствием для публикации этого результата в составе научной статьи. Тем не менее, сборник датируется, поэтому он может быть использован для определения научного приоритета.

В заключение хочу ещё раз поблагодарить всех участников, представивших работы на Смотр, и всех оценщиков, готовых уделить время просмотру и оценке работ.

С уважением,
Иван Ремизов

Председатель оргкомитета Смотра
выпускных квалификационных работ математиков России 2020

К.ф.-м.н., доцент кафедры фундаментальной математики
НИУ ВШЭ - Нижний Новгород

Обращение к оценщикам Смотра ВКР математиков 2020

Уважаемые коллеги!

Приглашаю вас принять участие в Смотре дипломных работ математиков России 2020. На Смотр в этом году представлены 23 дипломные работы (ВКР) бакалавров, специалистов, магистров со всех уголков нашей необъятной страны. Приём работ на Смотр окончен, и с 10 июня 2020 по 1 июля 2020 проходит фаза их оценки. Для удобства оценщиков работы свёрстаны в сборник, который выложен на сайте Смотра https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr

Существует три группы оценщиков:

1. Сами участники Смотра, представившие свои работы на Смотр (выпускники)
2. Сотрудники научно-исследовательских и образовательных организаций (учёные и преподаватели)
3. Сотрудники любых организаций, иногда нанимающих на работу математиков (работодатели)

Каждому оценщику выдаются номера 5 работ случайным образом, и ещё от 0 до 5 работ он может выбрать себе для оценки самостоятельно из общего списка, отправляясь от сферы своих интересов.

При оценке работ участников оценщик Смотра руководствуется следующими критериями:

1. Понятность постановки задачи. После прочтения работы должно быть ясно, какая задача решалась автором.
2. Доступность введения для неспециалистов. Базовые термины и факты исследуемой области должны быть изложены в форме, доступной для понимания широкой математической аудиторией.
3. Качество изложения основного научного результата, полученного автором.
4. Качество обоснования основного научного результата, полученного автором.
5. Качество оформления работы - стилистическое единство, качество вёрстки текста, наличие необходимых частей в работе.
6. Наличие и уровень публикаций автора по теме работы.

Оценивание проводится по бинарной шкале (0 или 1 балл), где «0» – «работа имеет существенные недостатки и в представленном на Смотр виде не может считаться достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно», а «1» – «работа является достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно». Иными словами, нравится «1», или не нравится «0».

Оценки по каждой из групп оценщиков суммируются, в результате каждая работа получает трёхмерный вектор оценки: три числа, по одному от каждой из групп оценщиков.

Обращаю ваше внимание на то, что писать рецензии или как-то обосновывать своё мнение не требуется. Это Смотр, а не конкурс, подробного разбора работ не предполагается. Тем не менее, количество положительных оценок косвенно свидетельствует о том, что работа написана на интересную тему и выполнена хорошо. Оргкомитет ожидает, что каждый оценщик посвятит изучению каждой работы как

минимум 30 минут. **Таким образом, минимально достаточное для участия в оценке время составляет два с половиной часа – 5 работ, по 30 минут на каждую.**

Чтобы стать оценщиком, нужно написать письмо на почту hsennconfmath@gmail.com и указать в нём:

- Имя, Отчество, Фамилию
- Учёную степень (если имеется)
- Должность и место работы
- Согласие на публикацию представленных выше данных – они будут указаны в общем списке оценщиков и мы просим подтвердить, что Вы не против.
- Согласие или отсутствие согласия на публикацию Вашего адреса электронной почты.
- Согласие или отсутствие согласия на публикацию выставленных оценок «1» в неанонимном виде. Оценки «0» опубликованы не будут в любом случае.

Оргкомитет отметит грамотами участников Смотра, набравших максимальное количество баллов по каждой из трёх групп оценщиков, а также участников, набравших максимальное общее число баллов.

Ваша организация тоже может принять участие в награждении: предоставить всем участниками или победителям сувенирную продукцию с логотипом организации, грамоты, книги, денежные и любые другие призы, а также принять участие в торжественном закрытии Смотра в июле 2020 в Нижнем Новгороде. Вы также можете отметить авторов отдельных работ по любому удобному вам критерию.

От одной организации Оргкомитет будет рад принять до 5 оценщиков включительно.

Просим завершить оценку работ к 1 июля 2020 и выслать оценки на почту hsennconfmath@gmail.com Вы поможете организаторам, если завершите оценку раньше этого крайнего срока.

Вся информация о ходе Смотра доступна на сайте https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr

С уважением,
Иван Ремизов

Доцент кафедры фундаментальной математики ВШЭ
Председатель Оргкомитета Смотра
https://www.hse.ru/org/persons/215573332

10 июня 2020
Нижний Новгород

P.S.: Для обсуждения любых вопросов в связи с изложенным выше можно связаться со мной напрямую по следующим контактным данным:
ivremizov@yandex.ru 89263595145 vk.com/ivan_remizov

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей России и стран СНГ
от Аржаник Александры Алексеевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новым в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее – работа) под названием «Разработка алгоритма оценки информативности сейсмических атрибутов» является критерий информативности сейсмического атрибута для исследуемого метода моделирования.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Был произведен поиск следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, e-library по следующим ключевым словам: сейсмические атрибуты, информативность сейсмического атрибута, параметры геофизических исследований скважин. В выдаче поисковиков были изучены статьи и книги по теме исследования, книги по математическим методам (полный список представлен в «Списке использованных источников» выпускной квалификационной работы), и все они не содержали материала, заявляемого в выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в [12] были найдены решения задачи, однако используемые для другого метода моделирования геологической среды, не подходящие для исследуемого метода.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Гергет Ольгой Михайловной, доцентом отделения информационных технологий Томского политехнического университета.
- Проведены выступления на XV и XVI Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и современные информационные технологии».

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась в 2019-м году. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись Аржаник Александра Алексеевна

15.05.20
Томск, Россия

TOMSK POLYTECHNIC UNIVERSITY
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Томский политехнический университет» (ТПУ)

Инженерная школа информационных технологий и робототехники
Направление подготовки: Прикладная математика и информатика
Отделение информационных технологий

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Тема работы
Разработка алгоритма оценки информативности сейсмических атрибутов

УДК 004.7.021:004.925.84:552.1:53

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
8Б51	Аржаник Александра Алексеевна		

Руководитель ВКР

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Гергет Ольга Михайловна	д.т.н.		

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:

Руководитель ООП	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Шевелев Геннадий Ефимович	к.ф.-м.н.		

Томск – 2019 г.

Реферат

Ключевые слова: сейсмическая разведка, геофизические исследования скважин, сейсмическая трасса, сейсмический атрибут.

Объектом исследования является геологическая среда.

Цель работы: разработка метода количественного оценивания информативности атрибута для исследуемого метода моделирования.

В первой главе данной работы рассмотрены задачи и методы сейсморазведки, методы геофизических исследований скважин; рассмотрена задача моделирования петрофизического параметра и приведен один из методов её решения.

Во второй главе работы проведен анализ существующих алгоритмов решения задачи оценки информативности сейсмических атрибутов, выявлены их преимущества и недостатки; приведено описание предлагаемого алгоритма поиска информативного атрибута; проведены численные эксперименты, в ходе которых доказана эффективность алгоритма.

В третьей главе работы описана программная реализация алгоритма, а также проведено ее тестирование на реальных данных, полученных на месторождении Томской области.

Результатом работы является новый алгоритм оценки информативности сейсмического атрибута, который позволяет определять информативный атрибут в условиях исследуемого метода моделирования параметров геологической среды.

Оглавление

Введение 4
1. Задачи и методы сейсморазведки и геофизических исследований скважин 6
1.1 Понятие сейсморазведки и её задачи и методы 6
1.2 Методы геофизических исследований скважин 9
1.2.1 Электрические методы ГИС 10
1.2.2 Радиоактивные методы ГИС 11
1.2.3 Акустические методы ГИС 12
1.3 Задача прогноза параметра ГИС в трехмерном пространстве 12
1.3.1 Исследуемый метод моделирования параметра ГИС 13
2. Оценка информативности сейсмических атрибутов 15
2.1 Общая постановка задачи оценки информативности сейсмических атрибутов 15
2.2 Алгоритмы оценки информативности сейсмических атрибутов 15
2.2.1 Метод главных компонент 16
2.2.2 Метод главных факторов 17
2.2.3 Нейронный анализ 17
2.2.4 Регрессионный анализ 19
2.2.5 Недостатки рассмотренных методов 20
2.3 Предлагаемый метод решения 20
3. Алгоритм решения задачи 30
3.1 Описание программной реализации 31
3.2 Тестирование программной реализации на данных месторождения Томской области 32
Заключение 35
Список использованных источников 36

Введение

Петрофизические параметры геологической среды, такие как пористость, проницаемость, газонефтеводонасыщенность и другие, несут в себе важную информацию о наличии или отсутствии углеводородных коллекторов – горных пород, содержащих пустоты и способных вмещать и фильтровать флюиды (нефть, газ, воду) [1]. Так как первоначальная информация об этих параметрах известна лишь в ограниченном пространстве вблизи скважин, актуальной является задача прогноза в пределах некоторого объема.

По используемому подходу существующие методы решения данной задачи можно классифицировать на стохастические, геостатистические, нейросетевые и т.д. По типу используемых данных они также могут быть разделены на две группы:

— методы, использующие только данные о прогнозируемом параметре;

— методы, использующие в качестве вспомогательных данных сейсмические атрибуты, которые несут в себе косвенную информацию о прогнозируемом параметре.

Методы первой группы эффективны в условиях густо разбуренного месторождения. Если же скважин мало, но имеется густая регулярная сеть сейсмических измерений, то в таком случае применяются методы второй группы.

Эффективность методов второй группы зависит от ряда факторов: зашумленности используемых сейсмических данных, корректности увязки по глубине сейсмических атрибутов и прогнозируемых параметров, а также – от информативности сейсмического атрибута для конкретно взятого параметра. Под *информативным сейсмическим атрибутом* подразумевается такой атрибут, который с определенной точностью измеряет свойство прогнозируемого параметра [2].

Так как существование связи между сейсмическими атрибутами и параметрами среды принимается на уровне аксиомы, на сегодняшний день разработано множество методов моделирования, каждый из которых базируется на собственной взаимосвязи. Однако вопросу количественной оценки этой взаимосвязи и соответственно вопросу выбора наиболее информативного атрибута авторы многих методов не уделяют достаточного внимания. В данной работе проводится исследование одного из таких методов. Целью работы является разработка метода количественного оценивания информативности атрибута для исследуемого метода моделирования.

Объектом исследования является геологическая среда. *Предмет исследования* – сейсмические атрибуты и параметры геологической среды.

1. Задачи и методы сейсморазведки и геофизических исследований скважин

1.1 Понятие сейсморазведки и её задачи и методы

Сейсмическая разведка включает в себя комплекс методов исследований геологического строения земной коры, основанных на изучении особенностей распространения в ней искусственно возбуждаемых упругих волн [3].

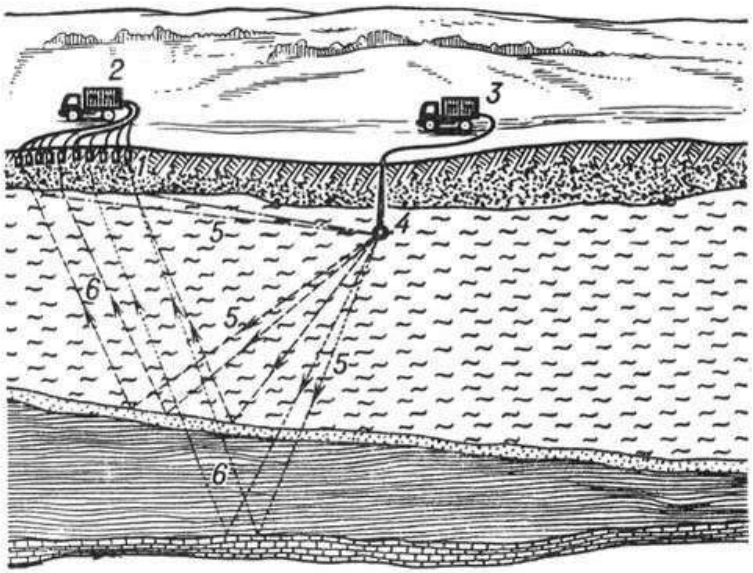


Рисунок 1 – Схема сейсморазведочных работ методом отраженных волн:
1 – сейсмоприёмники; 2 – сейсморазведочная станция; 3 – взрывной пункт;
4 – место взрыва; 5 – прямая волна; 6 – отраженная волна

Сейсморазведка является одним из ведущих методов исследования структуры и состава горных пород. Прямая задача сейсморазведки – определение волнового поля геологической среды – материальной среды упругого взаимодействия природных объектов. Сейсморазведочные работы проводят по отдельным линиям или их группам – *профилям* (рис. 1). На профиле наблюдений бурят взрывные скважины, в которых инициируются взрывы взрывчатого вещества (в настоящее время могут использоваться и невзрывные источники). Также на профиле раскладываются сейсмоприемники

упругих колебаний, способные улавливать даже слабые сотрясения поверхности земли. С помощью взрыва в земной коре возбуждаются упругие волны.

Так как разные горные породы с разными физическими свойствами имеют различные скорости распространения упругих волн, это создает условия для возникновения на границах литологических пластов процессов отражения и преломления упругих волн. Отраженные волны, которые достигли поверхности земли, фиксируются специальными датчиками (сейсмоприемниками) в виде сейсмотрасс. С*ейсмическая трасса* – это совокупность сейсмических сигналов, зарегистрированных в пункте приема в течение заданного времени после возбуждения упругой волны [4]. Все зарегистрированные сейсмотрассы в совокупности проходят первичную обработку на сейсмостанциях и в дальнейшем отправляются специалистам-геофизикам для решения обратной задачи [3].

Обратной задачей сейсморазведки является прогнозирование некоторых характеристик горных пород по результатам сейсморазведочных работ [5]. Однако точное решение обратной задачи невозможно на практике в виду ряда причин, среди которых – наличие помех в волновом поле, дискретность систем наблюдений, отсутствие математической модели, отражающей в полной мере особенности распространения упругих волн в геологической среде.

Не смотря на это, сейсмические данные несут в себе достаточно информации для построения адекватной модели геологической среды в пределах задач выбора мест бурения скважин и поиска залежей полезных ископаемых [6].

В сейсморазведке выделяют два основных метода:

1. *метод отраженных волн (МОВ)*, основанный на исследовании особенностей распространения упругих волн, однократно отразившихся от границы раздела геологических слоев, различных по физическим свойствам;

2. *метод преломленных волн (МПВ)*, основанный на регистрации колебаний преломленных упругих волн, скользящих вдоль кровли геологических образований, вдали от источника.

На сегодняшний день основным методом сейсморазведки, применяемым примерно в 98% сейсморазведочных работ, является один из вариантов реализаций МОВ – метод общей глубинной точки (МОГТ). Метод основан на многократной регистрации и последующем накапливании сигналов сейсмических волн, которые были отражены под разными углами от одного и того же локального участка (точки) сейсмической границы в земной коре (рис. 2) [7].

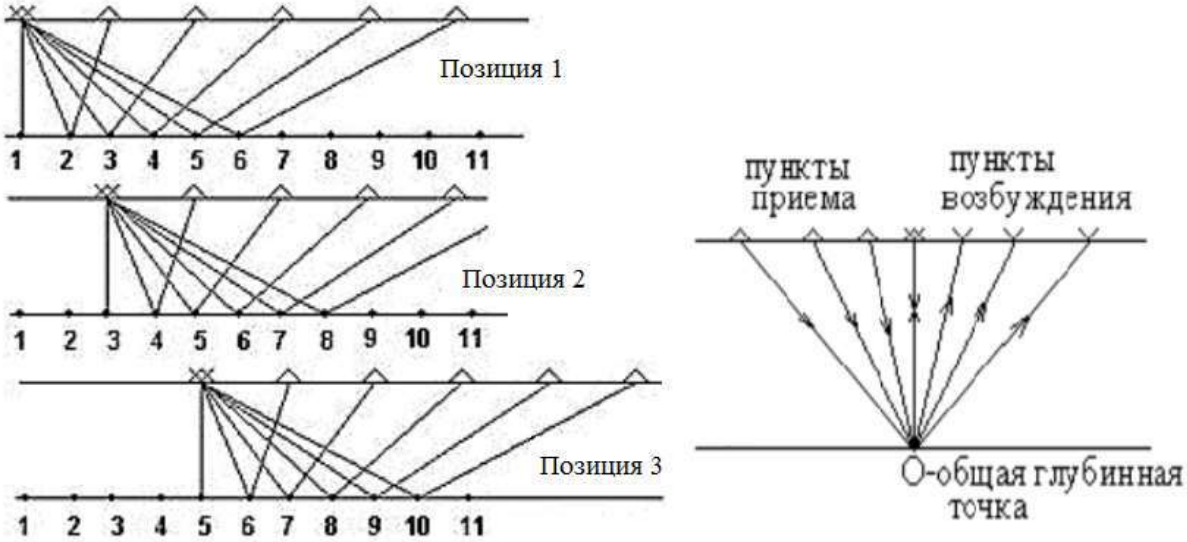


Рисунок 2 – Метод общей глубинной точки

Принципиальное достоинство метода заключается в том, что в процессе получения результатов существенно ослабляются волны-помехи. Однако обработка данных методом общей глубинной точки предъявляет высокие требования к используемым ЭВМ [3].

Пространственная интерполяция и экстраполяция в областях с низкой плотностью скважин (скважинных измерений фильтрационно-емкостных свойств (ФЕС) пород) при использовании сейсмических данных основывается на атрибутном анализе.

Атрибутный анализ – это анализ динамики атрибутов волнового поля в межскважинном пространстве, а также прогноз свойств резервуара на основании связей, установленных между скважинными характеристиками (пористостью, проницаемостью, газонефтеводонасыщенностью и т.д.) и свойствами акустических волн (амплитудой, частотой, фазой). Физическая основа метода заключается в том, что атрибуты сейсмических волн связаны со свойствами пород: амплитуды отражений связаны с контрастами акустических жёсткостей на границе слоёв, частоты – с мощностями пластов и их литологическим составом, фазы – с характером переслаивания и т.д. [8].

Сейсмические атрибуты – это параметры, свойства или характеристики, полученные из сейсмических данных. Сейсмические атрибуты могут быть измерены в определенный момент времени или же во временном окне, также они могут измеряться как по одной трассе, так и по группе трасс, это могут быть извлеченные из сейсмических данных поверхности или объемы.

Вычисление сейсмических атрибутов включает в себя выбор окна, фильтрацию, сглаживание, вычисление статистических характеристик и другую обработку данных [9].

Под сейсмическими атрибутами понимают как конкретные измерения геометрических, динамических и кинематических характеристик волнового поля, так и статистические оценки, найденные с помощью сейсмических данных, то есть некоторые производные от сейсмических данных [8].

1.2 Методы геофизических исследований скважин

Геофизические исследования скважин (ГИС) – это комплекс методов исследования горных пород с целью изучения их свойств в межскважинном и околоскважинном пространствах.

Геофизические методы позволяют представить разрезы скважин набором физических характеристик, таких как теплопроводность изучаемых сред, удельное электрическое сопротивление, радиоактивность, скорость распространения упругих волн и др.

ГИС предназначены для выявления и оценки полезных ископаемых, осуществления контроля над разработкой нефтяных и газовых месторождений, изучения технического состояния скважин и т.д. ГИС также используются при контроле технического состояния скважин [10].

Методы ГИС могут быть разделены на электрические, радиоактивные, акустические, магнитные, термические и др.

1.2.1 Электрические методы ГИС

Электрические методы исследования разрезов скважин основаны на изучении электромагнитных полей различной природы в горных породах. Электромагнитные поля подразделяются на естественные и искусственные. Естественные поля в земной коре обусловлены электрохимическими процессами и другими природными явлениями. Искусственные электромагнитные поля создаются в горных породах генераторами постоянного или переменного тока различной мощности. Искусственные поля – непосредственный результат человеческой деятельности, направленный на изучение строения земной коры, поиск и разработку месторождений.

Естественные электрические поля изучают с помощью метода потенциалов собственной поляризации горных пород (ПС). Вокруг скважины, заполненной глинистым раствором или водой, самопроизвольно возникают электрические поля, названные самопроизвольной или собственной поляризацией. Происхождение таких потенциалов в скважине обусловлено тем, что на границах пластов возникают фильтрационные и окислительно-восстановительные процессы. Измерение естественных потенциалов сводится к замеру разности потенциалов между электродом, перемещаемым по скважине, заполненной водой или глинистым раствором, и электродом, находящимся на поверхности вблизи устья скважины. Разность потенциалов между неподвижным и перемещаемым электродами указывает на изменение электрического потенциала вдоль скважины и фиксируется в виде кривой ПС.

Искусственные электрические поля могут быть исследованы методами кажущегося сопротивления (КС), сопротивления заземления, микрозондирования (МЗ) и др. Данные методы основаны на исследовании удельного электрического сопротивления земных пород с помощью зонда, который кроме записи кривых также обеспечивает перпендикулярное распределение тока на боковой поверхности скважины [10].

1.2.2 Радиоактивные методы ГИС

Радиоактивный каротаж (РК) – это геофизические методы изучения геологического разреза скважин, основанные на измерении характеристик полей естественных и искусственных ионизирующих излучений, происходящих в ядрах атомов. Наиболее широко распространены следующие виды радиоактивного каротажа: гамма-каротаж (позволяет изучать естественное γ-излучение горных пород); гамма-гамма-каротаж и нейтронный каротаж (основаны на эффекте взаимодействия источников γ-излучения и нейтронов с горной породой).

Гамма-каротаж применяют для изучения литологии пород, выделения глинистых и продуктивных пластов, качественной и количественной оценки их глинистости, пористости коллекторов. Интенсивность радиоактивного излучения пород в скважине измеряют при помощи индикатора γ-излучения (счетчика Гейгера-Мюллера), расположенного в глубинном приборе.

Гамма-гамма-каротаж (ГГК) – метод измерения характеристик полей рассеянного γ-излучения, возникающего при облучении горных пород источником γ-квантов вдоль ствола скважины. ГГК применяют для оценки пористости горных пород, изучения технического состояния скважин, выявления интервалов притока в скважину флюидов различной плотности и др.

Нейтронный гамма-каротаж основывается на измерении характеристик поля γ-излучения, возникающего в результате внешнего источника нейтронов. По нейтронным свойствам осадочные горные породы подразделяются на две группы: породы с низким и высоким

водородосодержанием. К первой группе относятся глины с высокой пористостью, которые содержат значительное количество минералов с химически связанной водой, а также некоторые очень пористые и проницаемые песчаники и карбонатные породы, насыщенные в естественных условиях жидкостью [10].

1.2.3 Акустические методы ГИС

Акустический каротаж (АК) основан на изучении характеристик упругих волн ультразвукового и звукового диапазона в горных породах. При АК в скважине возбуждаются упругие колебания, которые распространяются в ней и в окружающих породах, а затем воспринимаются приемниками, расположенными в той же скважине.

АК в основном сводится к определению скорости распространения упругих колебаний в пересеченных скважиной породах, также могут определяться поглощающие свойства горных пород.

Данные АК в комплексе с другими геофизическими методами позволяют уточнить литологию разреза; определить пористость пород; выделить зоны трещиноватости в карбонатном разрезе; получить сведения о техническом состоянии скважины, вычислить скорости распространения упругих колебаний, которые в дальнейшем используются при интерпретации данных сейсморазведки [10].

1.3 Задача прогноза параметра ГИС в трехмерном пространстве

В общем случае задачу моделирования петрофизического параметра можно сформулировать следующим образом: имеется сейсмический атрибут $S(x, y, h)$; $h = \overline{h_0, h_{\max}}$; h_0 – соответствующая глубина первого отсчета сейсмических трасс; $h_{\max}$ – соответствующая глубина последнего отсчета сейсмических трасс. Также имеются измерения параметра ГИС $g_k(x_k, y_k, h)$ вдоль стволов скважин: $k = \overline{1, K}$, $h = \overline{h_0, h_{\max}}$; K – количество скважин; h_0 –

соответствующая глубина первого измерения; $h_{\max}$ – соответствующая глубина последнего измерения. Необходимо осуществить оценку параметра ГИС $G(x, y, h)$ в каждой точке, в которой сейсмический атрибут $S(x, y, h)$ известен.

1.3.1 Исследуемый метод моделирования параметра ГИС

Метод моделирования, используемый для решения выше рассмотренной задачи, базируется на геостатистическом подходе и в качестве основных уравнений использует два уравнения Крайгинга:

$$\hat{G}(x, y, h) = \sum_{k=1}^{K} v_k(x, y, h)\, g_k(h), \tag{1}$$

$$\hat{S}(x, y, h) = \sum_{k=1}^{K} w_k(x, y, h) s_k(h), \tag{2}$$

где $\hat{G}(x, y, h)$ – значение параметра ГИС в точке прогноза с координатами (x, y, h), $g_k(h)$ – значения параметра ГИС, измеренные в стволе *k*-ой скважины; K – количество скважин; $v_k(x, y, h)$ – весовая функция *k*-ой скважины; $\hat{S}(x, y, h)$ – значение сейсмического атрибута в точке прогноза; $s_k(h) = S(x_k, y_k, h)$ – значение сейсмического атрибута вблизи *k*-ой скважины; $w_k(x, y, h)$ – весовая функция сейсмических данных вблизи *k*-ой скважины.

Как показано в [10], несмещенность оценок (1) и (2) при фиксированных аргументах *x*, *y* и *h* достигается при условиях

$$\sum_{k=1}^{K} w_k(x, y, t) = 1, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{K} v_k(x, y, t) = 1. \tag{4}$$

Учитывая то, что данные ГИС и сейсмические атрибуты измерены в пределах одного геологического объекта, предполагается, что их

ковариационные свойства близки. В силу этого функции w_k, вычисляемые в соответствии с выражением (2), принимаются схожими с функциями v_k,, а выражение (1) – эквивалентно выражению (5):

$$\hat{G}(x,y,h)=\sum_{k=1}^{K} w_k(x,y,h)\,\mathrm{g}_k(h)\,. \tag{5}$$

Выбор весовых функций w_k определяется минимизацией ошибки:

$$M\left[(G(x,y,t)-\hat{G}(x,y,t))^2\right]\to\min\,. \tag{6}$$

Или с учетом (2):

$$D\left[S(x,y,t)-\sum_{k=1}^{K} w_k(x,y,t)s_k(t)\right]\to\min\,. \tag{7}$$

В результате математических преобразований, дифференцирования выражения (7) относительно каждой искомой весовой функции и добавления методом неопределенных множителей Лагранжа уравнения $w_1^0(t)+w_2^0(t)+\cdots+w_K^0(t)=1$ (для учета условия (3)) получим систему линейных уравнений вида [11]:

$$C(h)\cdot W(h)=C^0(h), \tag{8}$$

$$C(h)=\begin{pmatrix} c_{11}(h) & c_{12}(h) & \cdots & c_{1K}(h) & 1\\ c_{21}(h) & c_{22}(h) & \cdots & c_{2K}(h) & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ c_{K1}(h) & c_{K2}(h) & \cdots & c_{KK}(h) & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},\ W(h)=\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_K\\ \alpha(t)\end{pmatrix},\ C^0(h)=\begin{pmatrix} C_{K+1,1}(h)\\ C_{K+1,2}(h)\\ \vdots\\ C_{K+1,\mathrm{K}}(h)\\ 1\end{pmatrix},$$

где $C(h)$ – ковариационная матрица значений сейсмического атрибута вблизи скважин; $W(h)$ – матрица весовых функций; $C^0(h)$ – матрица-столбец, коэффициенты которой – это ковариации значений сейсмического атрибута вблизи точек скважин и точки прогноза.

Для того чтобы исключить возможность получения физически нереального результата, на весовые коэффициенты накладываются дополнительные ограничения:

$$0\le w_k^0,\ k=\overline{1,K}\,. \tag{9}$$

2. Оценка информативности сейсмических атрибутов

2.1 Общая постановка задачи оценки информативности сейсмических атрибутов

Пусть имеются несколько сейсмических атрибутов $S^i(x, y, h)$, тогда $S_k^i(x_k, y_k, h)$ – это соответствующие для каждого атрибута выборки трасс в точках K скважин; $i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, K}$, $h = \overline{h_0, h_{\max}}$; N – количество сейсмических атрибутов; K – количество скважин; h_0 – соответствующая глубина первого отсчета сейсмической трассы; $h_{\max}$ – соответствующая глубина последнего отсчета сейсмической трассы.

Пусть также имеются измерения параметра ГИС $G_k(x_k, y_k, h)$ вдоль стволов тех же скважин: $k = \overline{1, K}$, $h = \overline{h_0, h_{\max}}$; K – количество скважин; h_0 – соответствующая глубина первого отсчета; $h_{\max}$ – соответствующая глубина последнего отсчета; известно, что $G_k(x_k, y_k, h)$ – образует генеральную совокупность.

Необходимо установить, какой из сейсмических атрибутов $S^i(x, y, h)$ окажется наиболее информативным при построении объемной модели $G(x, y, h)$ заданным методом.

2.2 Алгоритмы оценки информативности сейсмических атрибутов

Существующие алгоритмы оценки информативности сейсмических атрибутов базируются на непосредственном сопоставлении значений сейсмических атрибутов и параметров ГИС. Наиболее информативным принимается тот атрибут (или набор атрибутов), который по определенным признакам более соответствует параметру ГИС. Выбор необходимых признаков осуществляется с учетом решаемой задачи и метода её решения. Отдельной

задачей является выбор метода количественной оценки признака, среди которых можно выделить следующие [12]:

— метод главных компонент;
— метод главных факторов;
— нейронный анализ (алгоритм оценки значимости);
— регрессионный анализ.

2.2.1 Метод главных компонент

Метод главных компонент – один из способов уменьшить размерность данных при наименьшей потери информации. Данный метод позволяет уменьшить число переменных, выбрав наиболее изменчивые.

Идея метода состоит в преобразовании множества переменных в некоторое новое множество попарно некоррелированных переменных, таких, что первая соответствует максимально возможной дисперсии, вторая соответствует максимально возможной дисперсии в ортогональном первому подпространстве и т.д. Таким образом отбрасываются переменные, соответствующие минимальным дисперсиям. Выходом такой процедуры является набор данных, которые называются *главными компонентами*. Вычисление главных компонент сводится к вычислению собственных векторов и собственных значений ковариационной матрицы исходных данных. Главные компоненты оцениваются в соответствии с их вкладом в изменчивость данных. Компоненты, которые содержат шумовую и избыточную информацию, удаляются, и процесс повторяется.

Впоследствии по полученным вспомогательным переменным – главным компонентам – можно воспроизвести интересующие свойства массива данных, анализируемого согласно задаче [13].

2.2.2 Метод главных факторов

Метод главных факторов – один из методов факторного анализа.

Основное различие метода главных факторов и метода главных компонент заключается в том, что в методе главных компонент предполагается, что должна быть использована вся изменчивость переменных, тогда как в методе главных факторов используется только изменчивость переменной, общая и для других переменных.

Главные компоненты основываются на собственных числах и собственных векторах ковариационной матрицы, тогда как главные факторы опираются на такие же числа и векторы, но найденные для ее редуцированной формы, то есть такой, в которой элементы главной диагонали соответствуют общностям. *Общностью* называется доля дисперсии отдельной переменной, принадлежащая общим факторам (и разделяемая с другими переменными).

То есть главные компоненты описывают всю суммарную вариацию исходных данных, а главные факторы учитывают только суммарную общность этих данных.

Первый главный фактор, таким образом, описывает максимум суммарной общности, второй – следующую по величине ее часть и т.д. Аналогично главные факторы не коррелируют друг с другом, т.е. являются ортогональными [14].

2.2.3 Нейронный анализ

Нейронный анализ – подход, основанный на использовании искусственных нейронных сетей (ИНС). ИНС состоит из множества формальных нейронов [15]. Структура нейрона представлена на рисунке 3.

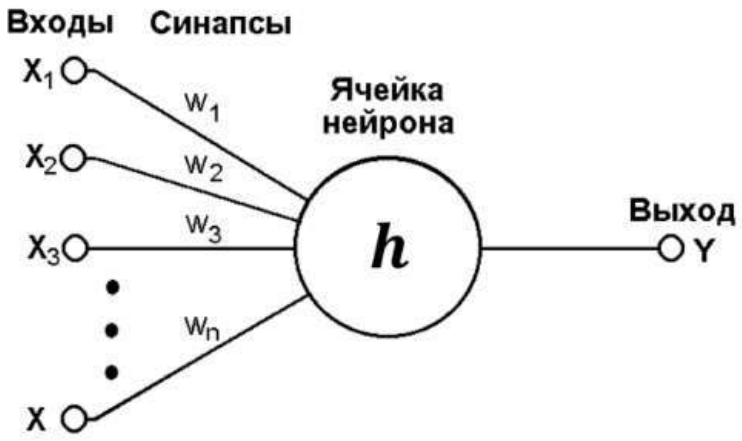


Рисунок 3 – Структура формального нейрона

На рисунке 3 имеются следующие обозначения:

$$h = \sum_{i=1}^{n} W_i X_i, \tag{10}$$

$$Y = f(h), \tag{11}$$

где W_i – синаптические веса, которые определяют значимость каждого входного сигнала X_i; $f(h)$ – передаточная функция; Y – выходной сигнал [16].

Как правило, ИНС состоят из нескольких нейронов, которые организованны в виде слоев. Каждый слой соединяется с предыдущим при помощи синаптических связей, вес которых влияет на конечный результат работы сети. Настройка таких весов синаптических связей называется обучением нейронной сети и чаще всего сводится к поиску таких значений весов, при которых выходной сигнал наиболее близок к некоторому эталонному значению [15].

Для определения информативного набора атрибутов может быть использован *алгоритм оценки значимости*. Идея алгоритма заключается в том, что если признак является избыточным для классификации набора примеров, то фиксация значения соответствующего входа сети не будет существенно ухудшать значение целевой функции обученной нейронной сети в сравнении с реальными значениями данного признака для того же набора примеров. То есть чем значимее признак, тем более негативно воздействие на целевую функцию

ИНС, когда вход этого признака фиксируется к среднему значению. Под *значимостью* имеется в виду коэффициент, отражающий степень реакции сети на фиксированный признак. Чем больше данный коэффициент, тем лучше представлен диапазон данных этим признаком [17].

2.2.4 Регрессионный анализ

Для установления связи между сейсмическими атрибутами и петрофизическими параметрами на практике чаще всего применяется метод линейного регрессионного анализа. С целью выявления значимой статистической зависимости данные ГИС, соответствующие породам с высокими коллекторскими свойствами, сравниваются с сейсмическими атрибутами. Прогнозная величина параметра ГИС рассчитывается по следующей формуле [18]:

$$P = a + bA, \tag{12}$$

где P – прогнозируемый петрофизический параметр;

A – сейсмический атрибут;

a и b – коэффициенты, вычисляемые методом наименьших квадратов.

Статистическая связь между A и P определяется с помощью коэффициента корреляции Пирсона, рассчитываемого по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(P_i - \bar{P}) \cdot (A_i - \bar{A})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A})^2}}. \tag{13}$$

Величина коэффициента должна быть не менее 0.7. Если данное условие не выполнено, то нельзя говорить о надежности построенной модели. Таким образом, в данном случае критерием информативности является наличие линейной взаимосвязи между параметрами и атрибутами.

Также возможна оценка взаимосвязи петрофизического параметра с несколькими сейсмическими атрибутами методами множественного

регрессионного анализа. Однако такой подход не распространен на практике ввиду сложности его реализации.

2.2.5 Недостатки рассмотренных методов

Метод главных компонент допускает, что размерность данных может быть понижена путем линейного преобразования, однако это не всегда корректно по отношению к данным сейсморазведки. Также в основе метода лежит допущение о том, что больше всего информации несут те направления, в которых дисперсия входных данных максимальна. Тем же самым недостатком обладает *метод главных факторов*.

Недостаток *методов нейронного анализа* заключается в том, что для каждого отдельно взятого месторождения необходимо переобучать и видоизменять ИНС, что трудозатратно, поэтому данные методы плохо подходят для прогнозирования параметров геологической среды, в том числе и для поиска информативного атрибута.

Недостаток *методов регрессионного анализа* заключается в том, что на практике не существует сейсмического атрибута, который имел бы однозначную корреляционную связь с прогнозируемым параметром.

2.3 Предлагаемый метод решения

Методы, рассмотренные в пункте 2.2, направлены на исследование взаимосвязи непосредственно между кривыми (наборами значений) сейсмических атрибутов и данных ГИС. Однако в используемом методе моделирования петрофизического параметра ключевую роль играют весовые функции, которые, в свою очередь, зависят от изменчивости ковариационных свойств в пределах месторождения, но не непосредственно от кривых в точках скважин.

В соответствии с [11], рассматриваемый метод моделирования основан на предположении эквивалентности систем следующего вида:

$$C^S(h) \cdot W^S(h) = C_0{}^S(h), \tag{14}$$

$$C^G(h)\cdot W^G(h) = C_0{}^G(h), \tag{14}$$

$$\left\| W^S(h) - W^G(h) \right\| = 0, \tag{15}$$

где $C^S(h)$ и $C_0{}^S(h)$ – матрицы системы, рассчитанные по сейсмическому атрибуту; $C^G(h)$ и $C^G(h)$ – матрицы системы, рассчитанные по параметру ГИС; $W^S(h)$ и $W^G(h)$ – весовые функции, полученные по сейсмическим атрибутам и параметрам ГИС соответственно.

Выражение (15) является верным в случае, когда между $S(h)$ и $G(h)$ существует значимая и однозначная статистическая взаимосвязь и их ковариационные свойства схожи. В противном случае оценка параметра является приближенной, а выражение (15) преобразуется к следующему виду:

$$\left\| W^S(h) - W^G(h) \right\| = \varepsilon, \tag{16}$$

$$\overline{G^0(h)} \approx G^0(h). \tag{17}$$

где $\overline{G^0(h)}$ – прогнозное значение параметра ГИС; $G^0(h)$ – истинное значение параметра ГИС. Однако, так как в условиях реальных данных истинное значение параметра ГИС $G^0(h)$ неизвестно в межскважинном пространстве, составить правую часть СЛАУ (14) не представляется возможным, и получить численные значения $W^G(h)$ нельзя.

Для решения данной проблемы предлагается использовать метод кросс-валидации, в соответствии с которым усредненное значение ошибки $\bar{\varepsilon}$ можно получить, последовательно используя данные каждой скважины для составления правой части системы. Стоит отметить, что применение метода кросс-валидации имеет свои риски: точность метода зависит от объема скважинных данных: оценка тем точнее, чем больше объем данных. Справедливо и обратное утверждение.

Таким образом, среди нескольких атрибутов S_i ($i = \overline{1, N}$, N – количество сейсмических атрибутов) наиболее информативным будет тот, при котором $\bar{\varepsilon}_i$

минимально. Такой атрибут должен быть использован для расчета коэффициентов СЛАУ (8).

2.3.1 Исследование метода на модельных данных

Для доказательства эффективности использования нормы разности для оценки ошибки моделирования были проведены численные эксперименты на смоделированных данных. Модельные данные представляют собой три куба сейсмического атрибута и куб петрофизического параметра, сформированные в соответствии с выражениями (1) и (2). Значения сейсмических атрибутов и параметров ГИС вблизи скважины были сгенерированы с помощью функций Берлаге и Уолша соответственно.

В первом приближении сейсмотрасса представляет собой синусоиду, отклоняющуюся влево и вправо от нулевой линии. Степень отклонения от нуля – это амплитуда волны, она может быть как отрицательной, так и положительной. Также волна характеризуется периодом и частотой [7]. В связи с этим трасса сейсмического атрибута была сформирована на основе импульса Берлаге, который задается в общем виде следующей формулой:

$$S(t) = a_0\, t^n e^{-\beta t} \sin(2\pi f_0\, t),\ t \geq 0, \tag{18}$$

где a_0, n, β – параметры, определяющие конкретный вид огибающей импульса, f_0 – преобладающая частота.

Матрица корреляции между импульсами Берлаге в точках скважин имеет следующий вид:

$$R_{Ber} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.0884 & 0.0590 & 0.1236 \\ 0.0884 & 1.000 & 0.0010 & 0.1179 \\ 0.0590 & 0.0010 & 1.000 & 0.1170 \\ 0.1236 & 0.1179 & 0.1170 & 1.000 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

По значениям матрицы (19) можно сделать вывод, что сгенерированные импульсы Берлаге в точках скважин линейно независимы и могут быть использованы для формирования коэффициентов СЛАУ.

Кривые ГИС были сформированы на основе функций Уолша, так как параметры ГИС в отличие от сейсмических данных меняются не синусоидально, а более резко, ступенчато. Функции Уолша могут быть сформированы на основе функции Радемахера, имеющей следующий вид:

$$r_k(\Theta) = \mathrm{sign}[\sin(2^k \pi\, \Theta)],\ 0 \le \Theta < 1, \tag{20}$$

где аргумент Θ – безразмерный параметр, нормированный к произвольному интервалу, а k – порядок функции.

Кривые Уолша в точках скважин были заданы с помощью функций Радемахера следующим образом:

$$wal(1,\Theta) = r_1(\Theta), \tag{21}$$

$$wal(2,\Theta) = r_1(\Theta) \cdot r_2(\Theta), \tag{22}$$

$$wal(3,\Theta) = r_2(\Theta), \tag{23}$$

$$wal(4,\Theta) = r_2(\Theta) \cdot r_3(\Theta). \tag{24}$$

На рисунках 4.1-4.2 представлены графики полученных импульсов Берлаге и Уолша соответственно.

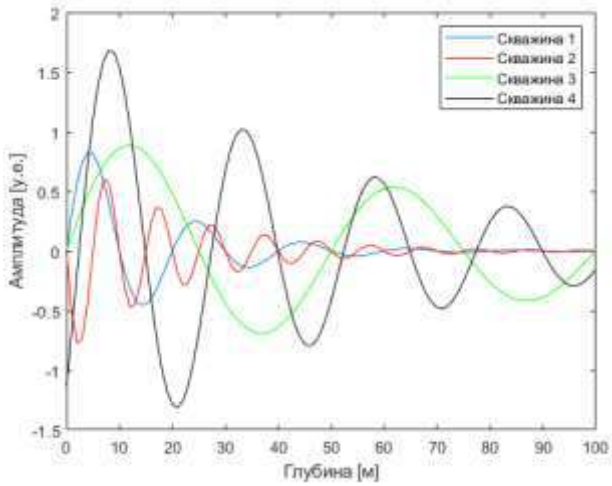


Рисунок 4.1 – Импульсы Берлаге в точках четырех скважин

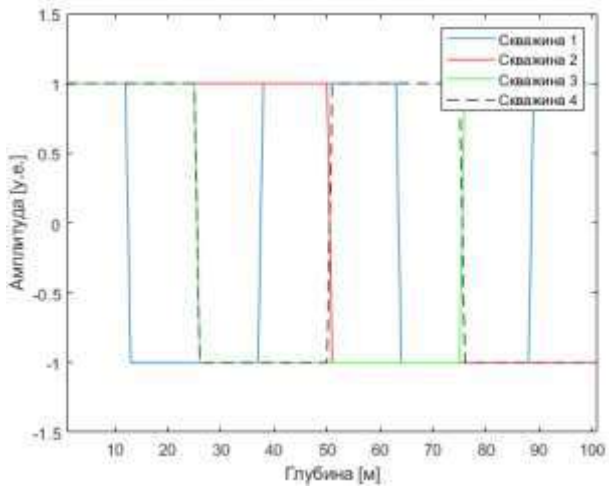


Рисунок 4.2 – Импульсы Уолша в точках четырех скважин

Схема расположения «псевдо-скважин» приведена на рисунке 5:

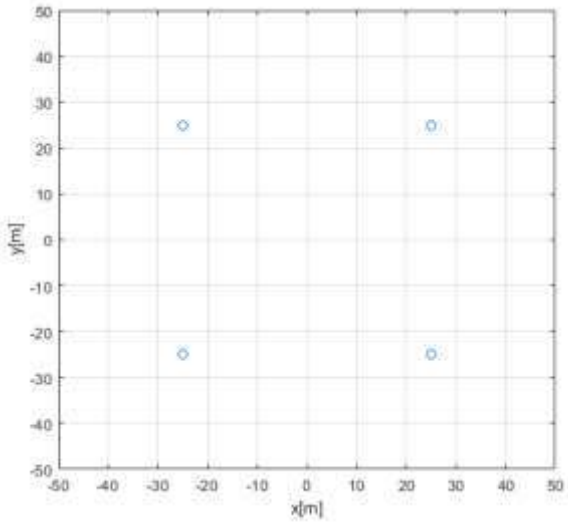
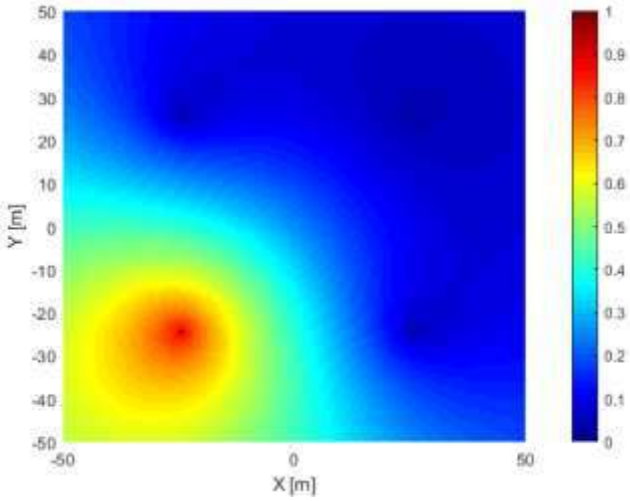


Рисунок 5 – Схема расположения скважин

Эксперимент проводился в три этапа с различными начальными условиями:

1. Кубы сейсмического атрибута и параметра ГИС рассчитываются с использованием одних и тех же весовых функций, то есть $V_k(x,y) = W_k(x,y)$, $k = \overline{1,4}$. Проекции поверхностей весовых функций представлены на рисунках 6.1-6.4.



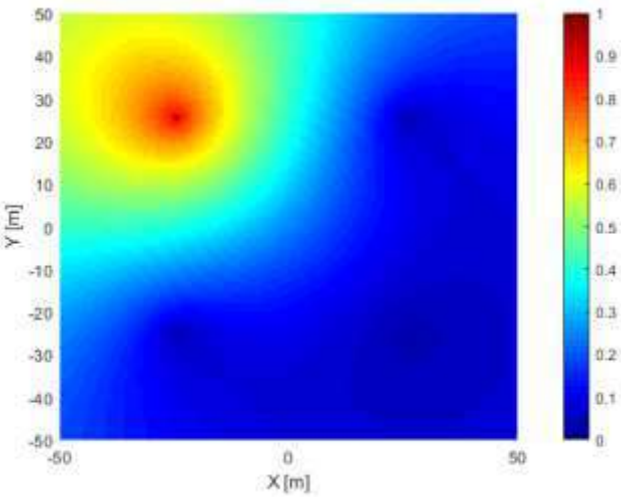


Рисунок 6.1 – Весовая функция $V_1(x,y)$ Рисунок 6.2 – Весовая функция $V_2(x,y)$

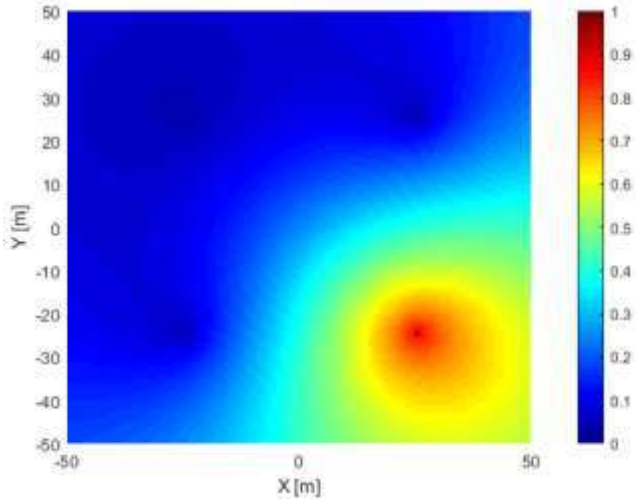


Рисунок 6.3 – Весовая функция $V_3(x,y)$

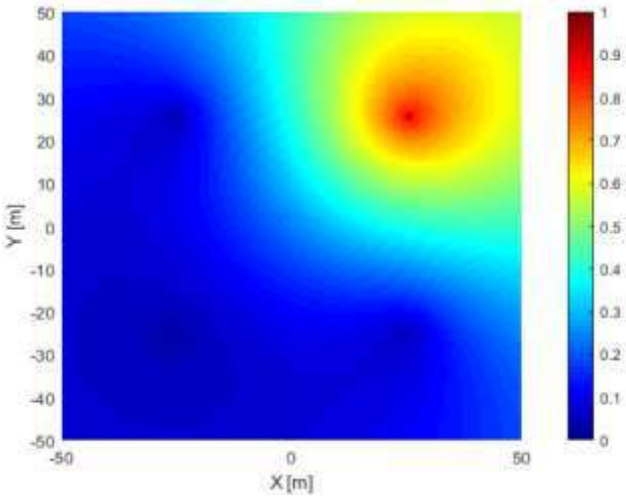


Рисунок 6.4 – Весовая функция $V_4(x,y)$

2. Весовые функции параметра ГИС $V_k(x,y)$ остались неизменными. Куб сейсмического атрибута рассчитывается с использованием незначительно видоизмененных весовых поверхностей. Симметрия поверхностей сохраняется, то есть скважины равнозначны. Проекции поверхностей весовых функций $W_k^2(x,y)$, $k=\overline{1,4}$, представлены на рисунках 7.1-7.4.

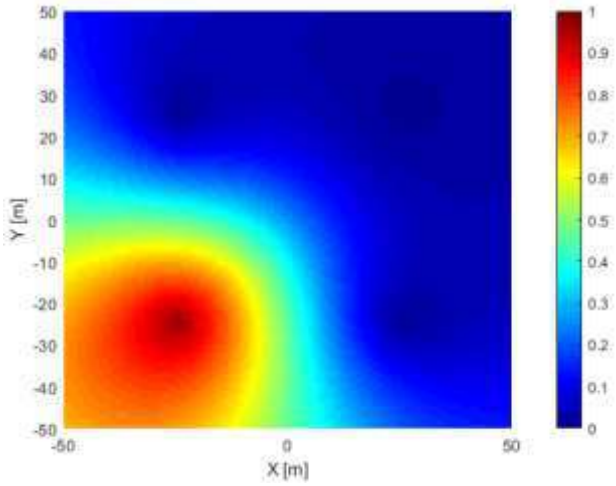


Рисунок 7.1 – Весовая функция скважины $W_1^2(x,y)$

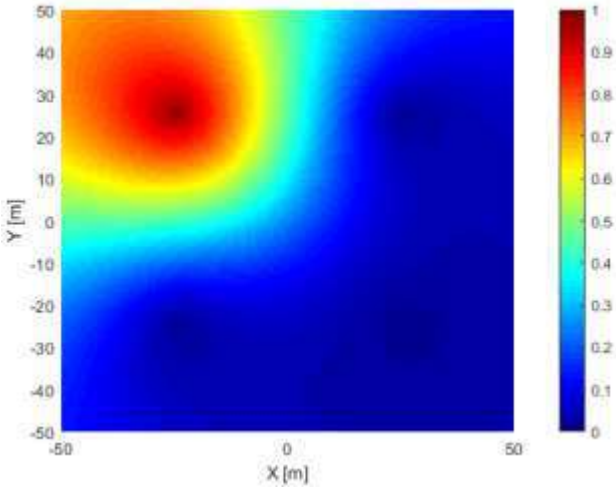


Рисунок 7.2 – Весовая функция скважины $W_2^2(x,y)$

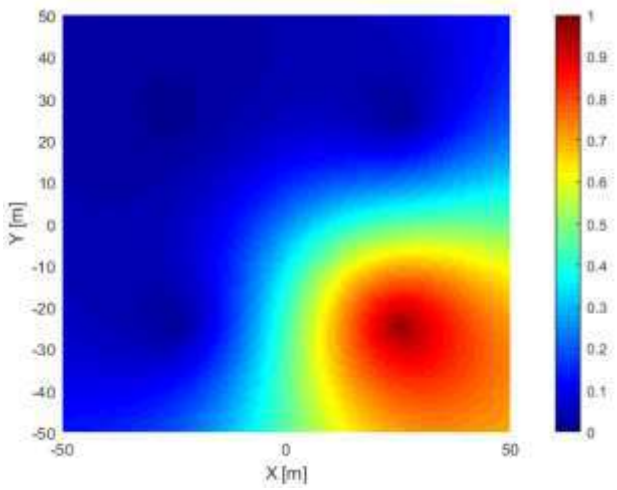


Рисунок 7.3 – Весовая функция скважины $W_3^2(x, y)$

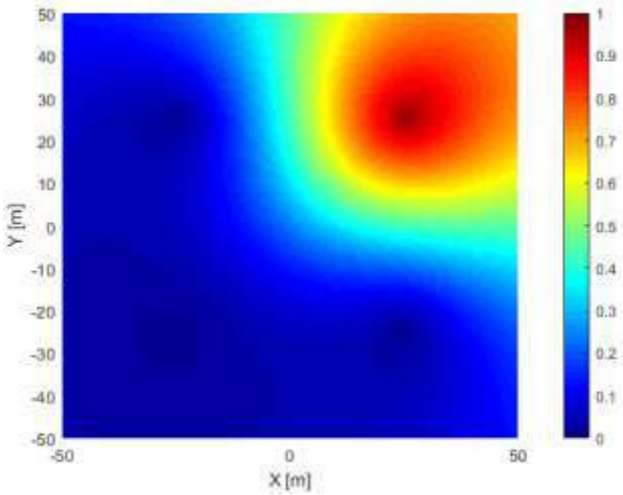


Рисунок 7.4 – Весовая функция скважины $W_4^2(x, y)$

3. Весовые функции параметра ГИС $V_k(x, y)$ остались неизменными. Куб сейсмического атрибута рассчитывается с использованием сильно видоизмененных поверхностей. Симметрия поверхностей не сохраняется. Проекции поверхностей весовых функций $W_k^3(x, y)$, $k = \overline{1,4}$, представлены на рисунках 8.1-8.4.

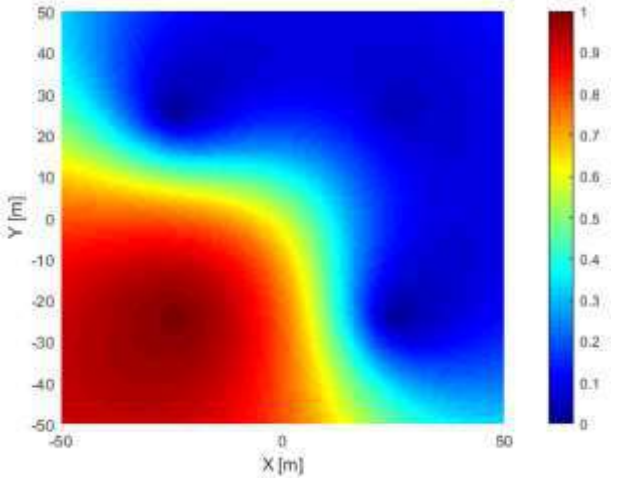


Рисунок 8.1 – Весовая функция скважины $W_1^3(x, y)$

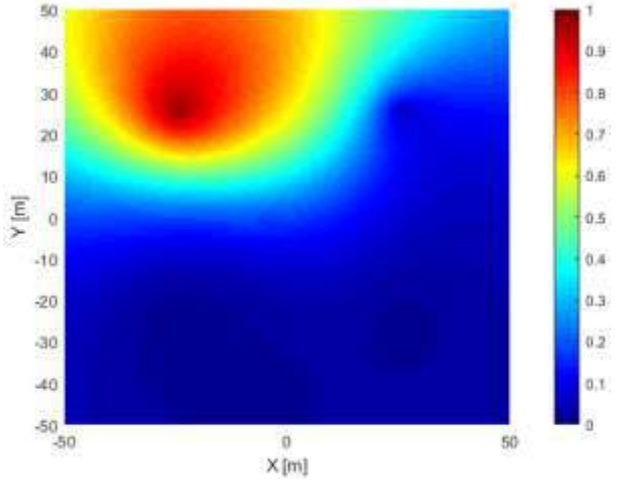


Рисунок 8.2 – Весовая функция скважины $W_2^3(x, y)$

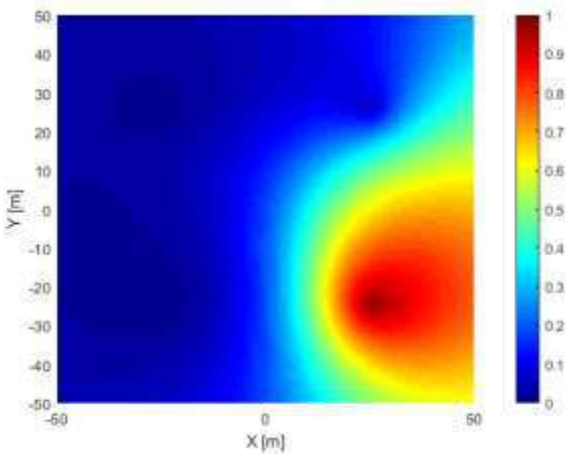


Рисунок 8.3 – Весовая функция скважины $W_3^3(x, y)$

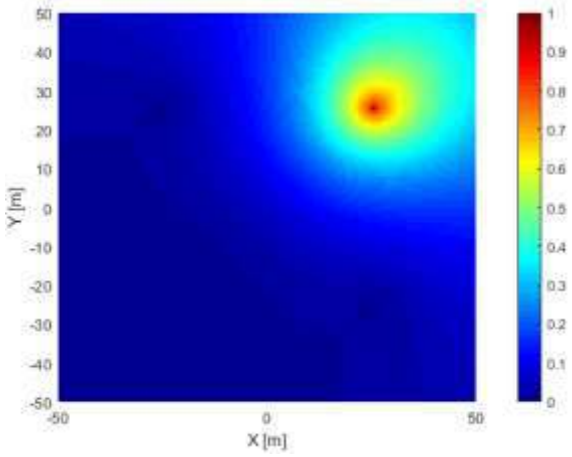


Рисунок 8.4 – Весовая функция скважины $W_4^3(x, y)$

В соответствии с заданными условиями этапов эксперимента для формирования кубов сейсмического атрибута согласно формуле (2) были смоделированы три набора весовых функций $W_k^m(x, y)$, $k = \overline{1..4}, m = \overline{1..3}$, для четырех скважин соответственно. Аналогично для формирования куба параметра ГИС согласно формуле (1) смоделирован набор весовых функций $V_k(x, y)$, $k = \overline{1,4}$. Визуализация одного из кубов сейсмического атрибута и параметра ГИС представлена на рисунках 9.1-9.2.

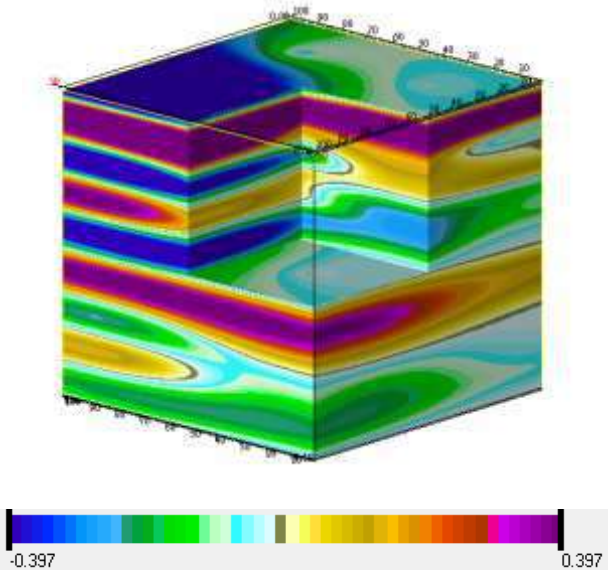


Рисунок 9.1 – Модельный куб сейсмического атрибута

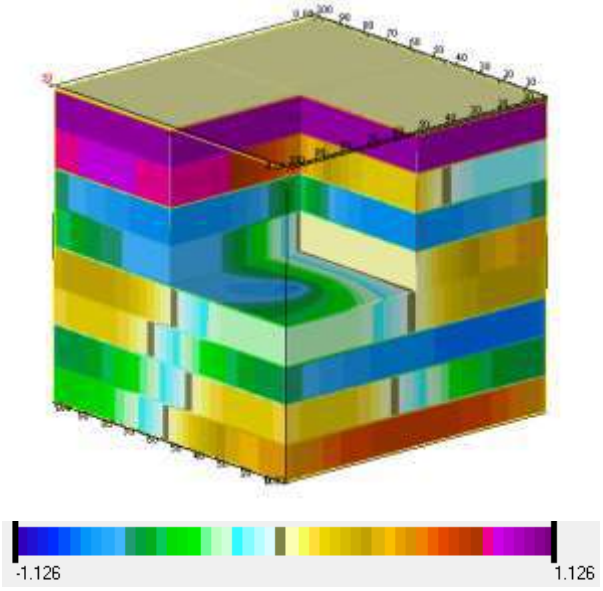


Рисунок 9.2 – Модельный куб параметра ГИС

Так как для формирования первого куба сейсмического атрибута и куба параметра ГИС использовались эквивалентные весовые функции, т.е. $W_k^1(x,y) = V_k(x,y), \quad k = \overline{1,4},$ заранее известно, что информативным является именно первый атрибут. Отсюда очевидно, что предложенный метод оценки информативности можно считать эффективным в том случае, если его применение позволит однозначно определить первый куб сейсмического атрибута как наиболее информативный.

На каждом этапе эксперимента на вход алгоритма моделирования подавался один из кубов сейсмического атрибута и координаты псевдо-скважин. Выходом алгоритма являлся набор прогнозных значений весовых функций параметра ГИС $\overline{V}_k(x,y)$, которые в дальнейшем сопоставлялись со своими истинными значениями $V_k(x,y)$ по формуле (16). На рисунках 10.1-10.3 представлены результаты сравнения в виде проекций поверхностей:

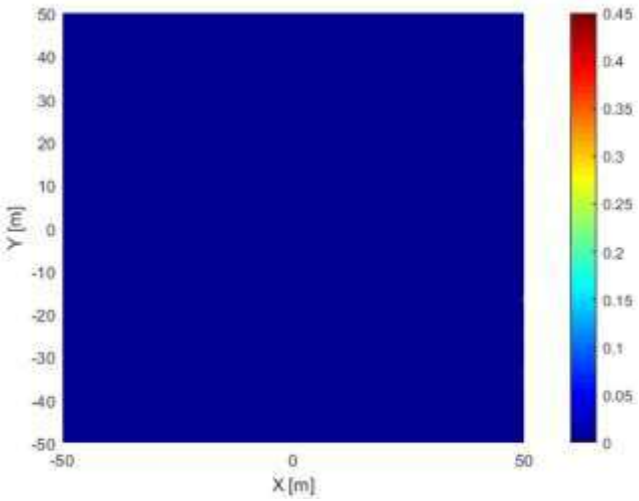


Рисунок 10.1 – Норма разности весовых функций (эксперимент 1)

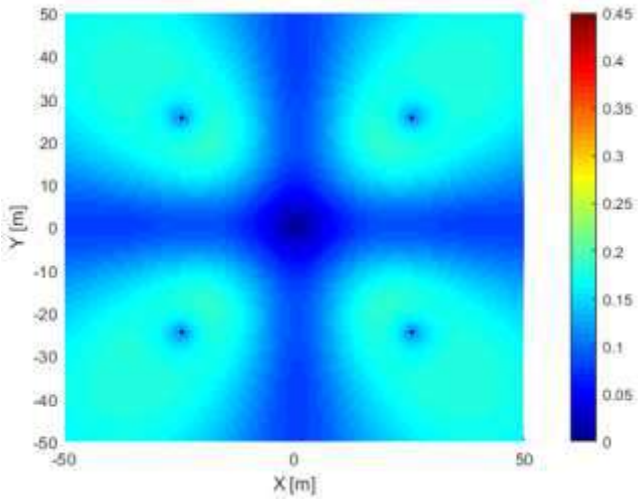


Рисунок 10.2 – Норма разности весовых функций (эксперимент 2)

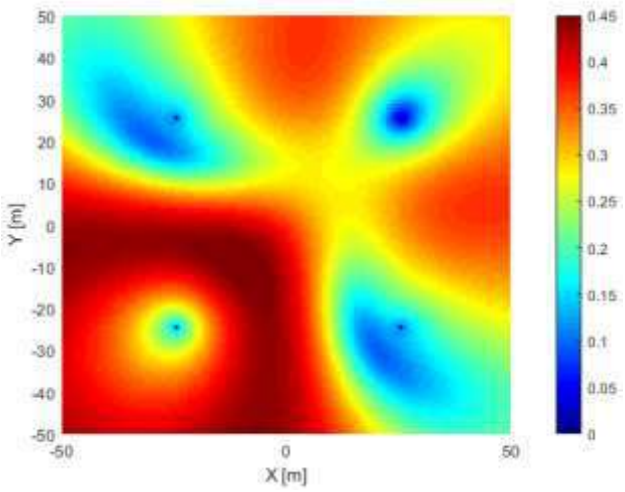


Рисунок 10.3 – Норма разности весовых функций (эксперимент 3)

Каждая точка этих поверхностей соответствует значению нормы разностей весовых функций. Как и предполагалось, наиболее информативным оказался первый атрибут, т.к. норма разности весов практически равна нулю во всех рассматриваемых точках (рис. 10.1). Менее информативным оказался второй атрибут, т.к. его использование повлекло незначительные искажения весовых функций (рис. 10.2). Наибольшие искажения при прогнозе весовых функций проявились при использовании сейсмического атрибута 3, что делает его наименее информативным (рис. 10.3). Все эти выводы подтверждают, что норма разницы весовых функций, полученных по сейсмическим атрибутам, и весовых функций, полученных по параметрам параметру ГИС, может быть использована для оценки ошибки моделирования: чем ближе норма разницы к нулю, тем меньше ошибка моделирования.

3. Алгоритм решения задачи

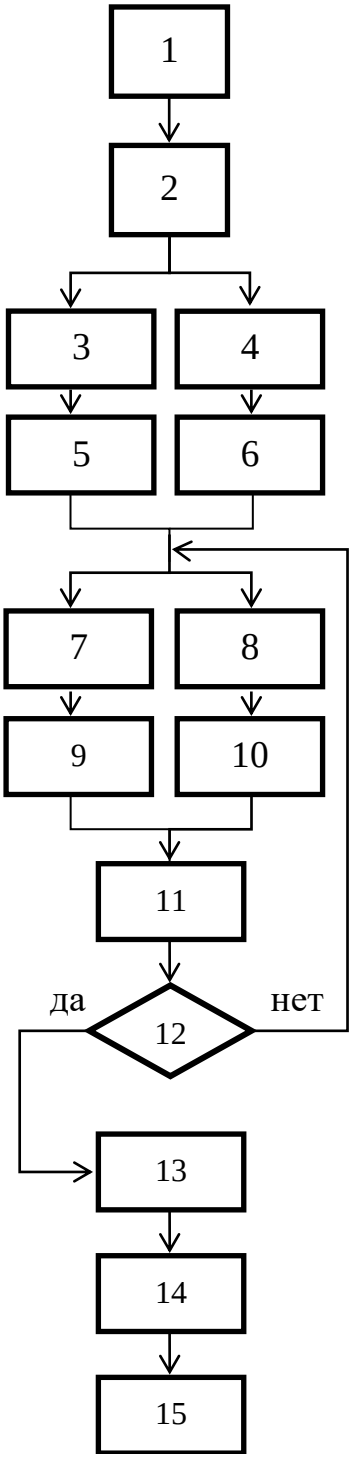


Рисунок 11 – Алгоритм поиска информативного атрибута

Алгоритм поиска информативного атрибута представлен на рисунке 11.

1) Ввод данных МОГТ (файл .segy) и ГИС (файл .xls).

2) Поиск трасс МОГТ, координаты которых соответствуют координатам скважин, запись данных в файл .xls, считывание данных с файла.

3) Расчет матрицы ковариации трасс скважин для параметра ГИС.

4) Расчет матриц ковариации трасс скважин для сейсмических атрибутов.

5) Нормирование матрицы ковариации параметра ГИС, добавление единичной строки.

6) Нормирование матриц ковариации сейсмических атрибутов, добавление единичной строки.

7) Выбор из матрицы ковариации параметра ГИС столбца (скважины) для формирования правой части системы (14), исключение столбца и соответствующей строки из матрицы.

8) Выбор из матрицы ковариации каждого сейсмического атрибута столбца (скважины) для формирования правой части системы (14), исключение столбца и соответствующей строки из матрицы.

9) Решение системы линейных алгебраических уравнений (расчет весовых коэффициентов), составленной на основе параметра ГИС.

10) Решение систем линейных алгебраических уравнений (расчет весовых коэффициентов), составленных на основе каждого сейсмического атрибута.

11) Поиск нормы разности весовых коэффициентов, полученных из системы, составленной по параметру ГИС, и систем, составленных по каждому сейсмическому атрибуту попарно.

12) Проверка условия: для формирования правой части системы использовались все скважины?

13) Усредненение значений норм разности весовых коэффициентов по каждому сеймическому атрибуту.

14) Поиск наименьшего значения нормы разности.

15) Вывод результата.

3.1 Описание программной реализации

Алгоритм реализован в пакете прикладных программ MATLAB. Выбор MATLAB обусловлен большим количеством встроенных функций, удобством работы с матрицами и векторами, простотой построения графиков, а также возможностью подключать сторонние библиотеки, среди которых имеется библиотека SeisLab, с помощью которой возможно работать с исходными данными – с файлами формата .segy.

В качестве входных параметров в алгоритме используются:

— количество сейсмических атрибутов;

— количество параметров ГИС;

— количество скважин и их координаты.

Данные параметры могут быть изменены пользователем программы.

Основной функционал программы включает:

- Считывание данных МОГТ из файлов формата .segy. Данная функция реализована с помощью сторонней библиотеки SeisLab. Считывание файла осуществляется в специальную структуру данных, хранящую в себе базовую информацию о файле .segy, а также заголовки трасс и их амплитуды.

- Считывание данных ГИС из файлов формата .xls. В файле .xls каждая строка соответствует одной из скважин; в первом столбце хранятся названия скважин, во втором – координаты X и Y; во всех последующих – значения параметра ГИС.
- Поиск ближайших по отношению к координатам скважин трасс сейсмического атрибута.
- Расчет матриц ковариации сейсмического атрибута и параметра ГИС (формирование левых частей СЛАУ).
- Формирование правых частей системы с использованием метода кросс-валидации; решение СЛАУ матричным методом.
- Определение наиболее информативного атрибута среди имеющегося набора для каждого параметра ГИС, запись результатов в структуру, в которой хранятся пары значений «параметр ГИС – наиболее информативный атрибут».
- Вывод результата в виде графиков.

Листинги кодов, реализующих алгоритм, представлены в Приложении А.

3.2 Тестирование программной реализации на данных месторождения Томской области

Метод протестирован на реальных данных, полученных на одном из месторождений углеводородов Томской области. В качестве исходных данных использовался один параметр ГИС – *Aps* (потенциал самопроизвольно возникающего электрического поля), измеренный в стволах шести скважин (рис. 12), и 8 сейсмических атрибутов, список которых приведен ниже:

1. *Fsrd* – куб суммы ОГТ с деконволюцией;
2. *g* – куб градиента амплитуды;
3. *n* – куб нормального луча;
4. *ns* – разность кубов нормального распределения и суммы ОГТ;
5. *puasson* – куб коэффициентов Пуассона;

6. *rn30Fsd* – куб рангов;
7. *sd* – результирующий временной куб с деконволюцией;
8. *vf45rn30Fsd* – куб рангов после адаптивной веерной фильтрации.

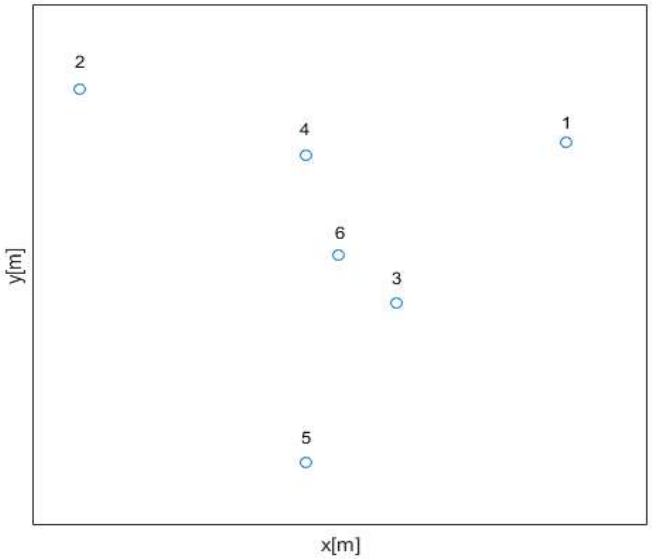


Рисунок 12 – Схема расположения скважин на месторождении

Системы вида (14) были составлены и решены для кривых параметра ГИС и сейсмических атрибутов в точках скважин с использованием метода кросс-валидации. Информативность каждого атрибута относительно *Aps* была оценена посредством критерия (16). Нормы разности весовых коэффициентов были усреднены по каждому сеймическому атрибуту.

На рисунке 13 приведен график усредненных значений норм разностей весовых коэффициентов, полученных из системы, составленной по ГИС, и систем, составленных по сейсмическим атрибутам.

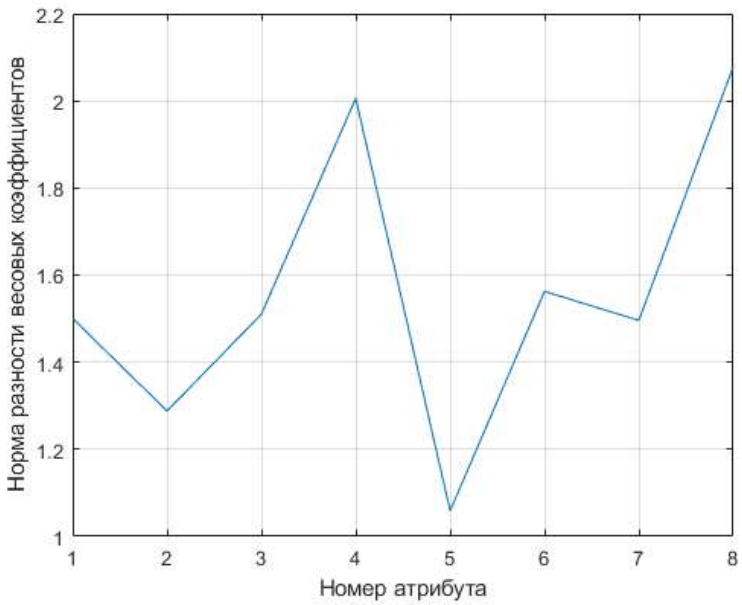


Рисунок 13 – Усредненные нормы разностей весовых коэффициентов параметра ГИС и сейсмических атрибутов

По графику на рисунке 13 можно отметить, что наименьшая норма разности весовых коэффициентов параметра *Aps* и сейсмического атрибута наблюдается при использовании атрибута *puasson*. Следовательно, для параметра *Aps* в качестве наиболее информативного атрибута принимаем атрибут *puasson*.

Заключение

В ходе выполнения работы проведен анализ существующих алгоритмов оценки информативности сейсмических атрибутов. Было выявлено, что все рассмотренные методы основаны на оценке взаимосвязи непосредственно между сейсмическими атрибутами и параметрами ГИС, измеренных в пределах одной скважины. В исследуемом методе моделирования петрофизического параметра используется предположение о схожести ковариационных свойств сейсмического атрибута и параметра ГИС во всем моделируемом пространстве. Соответственно, рассмотренные методы оценки информативности для него неэффективны.

Предлагаемый метод оценки информативности сейсмического атрибута базируется на методе кросс-валидации, в соответствии с которым усредненное значение ошибки моделирования можно получить, последовательно используя данные каждой скважины для составления правой части системы. В качестве количественной оценки ошибки моделирования использовалась норма разности весовых функций, полученных по сейсмическим атрибутам, и весовых функций, полученных по параметрам ГИС. Эффективность использования такого метода оценки ошибки была доказана путем проведения численных экспериментов.

На основе предложенного метода разработан алгоритм выбора наиболее информативного атрибута. Алгоритм реализован средствами пакета прикладных программ MATLAB и протестирован на реальных данных месторождения Томской области.

Список использованных источников

[1] Бакиров Э. А., Ермолкин В. И., Ларин В. И. и др. Геология нефти и газа: Учебник для вузов / Под ред. Э. А. Бакирова. – М.: Недра, 1990. – 240 с.

[2] Лаврик А.С., Логинов Д.В., Ванярхо М.А. Применение нейросетей для прогнозирования пористости в 3D кубах (расчет по сейсмическим атрибутам и каротажным данным) / Приборы и системы разведочной геофизики, ООО "ИнформГеофизСервис", №01(39)/2012, стр. 56-57.

[3] И.В. Бондарев. Сейсморазведка – Екатеринбург, Уральский государственный горный университет, 2007. – 703с.

[4] ГОСТ 16821-91 Сейсморазведка. Термины и определения. – Взамен ГОСТ 16821-71; Введ. С 01.07.92. - Москва: Изд-во стандартов, 1982. – 29 с.

[5] Бондарев В. И., Крылатков С. М. Основы обработки и интерпретации данных сейсморазведки. – Екатеринбург, 2001. – 192 с.

[6] Тихонов А.И., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач – М. Недра, 1979.

[7] Нежданов, А. А. Геологическая интерпретация сейсморазведочных данных : курс лекций / А. А. Нежданов. – Тюмень : ТИУ, 2017. – 171 с.

[8] Атрибутный анализ. Теория [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://petroportal.ru/post/atributnyy-analiz-teoriya.html (дата обращения: 20.01.2019)

[9] Виктор Орре Донателла Астрати, Таха Нассер Али Аль Дайини Сабри Лотфи Махмуд, Эндрю Б.С. Кларк, Майкл Дж. Стеллас Джек В. Стрингер, Брайан Толл, Оле В. Вайбэк Джиллиан Уайт «Обнаружение мелких разломов и трещин с помощью сейсмических данных», Нефтегазовое обозрение, 24, №2 (лето 2012 г)

[10] В.Н. Косков, Б.В. Косков – Геофизические исследования скважин и интерпретация данных ГИС. – Пермь, Перм. гос. техн. ун-т., 2007. - 304 стр.

[11] Шестаков В. В., Степанов Д. Ю., Сысолятина Г. А. Построение трехмерных моделей параметров геологических сред // Информационные

технологии в науке: сборник научных трудов III Международной конференции. В 2 т., Томск, 23-26 Мая 2016. – Томск: ТПУ, 2016 – Т. 1 – С. 87-91.

[12] Логинов Д.В., Лаврик С.А. Некоторые методы определения информативного набора сейсмических атрибутов для прогнозирования свойств коллекторов // Нефтегазовая геология. Теория и практика. – 2010. – Т.5. – №1.

[13] Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

[14] StatSoft, Inc. (2012). Электронный учебник по статистике. Москва, StatSoft. WEB: http://statsoft.ru/home/textbook/modules/stfacan.html.

[15] Саймон Хайкин. Нейронные сети. – Москва, Вильямс – 2006 – 1104 с.

[16] Самое главное о нейронных сетях [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/company/yandex/blog/307260/ (дата обращения: 20.02.2019)

[17] Дубровин В.И., Субботин С.А. Оценка значимости признаков на основе многослойных нейронных сетей в задачах диагностики и распознавания //Информатика и системы управления, 2002. – № 1(3). – С. 66-72.

[18] Ю.Н. Воскресенский. Полевая геофизика. – Москва, Недра, 2010 – 479 с.

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Беловой Анны Сергеевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Приближенное построение матрицы монодромии» являются доказательства теорем 1 - 21 используемых в работе. Основу несут теоремы 1 и 2 в начале работы, на основе них и формул теории возмущений, получаются теоремы и их основные следствия 3- 21. В качестве приложения рассмотрена плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел.
Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:
Проведена серия консультаций, которые проводил мой научный руководитель Юмагулов Марат Гаязович, профессор кафедры дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета.
Проведено

- выступление на международной научной конференции "Спектральная теория и смежные вопросы": (г. Уфа, 1 – 4 октября 2018 г.) / (Юмагулов М.Г., Белова А.С. Методы приближенного построения операторов монодромии линейных периодических систем)
- опубликована работа М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, А. С. Белова, Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2019, том 163, 113–126

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.
Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась 14.06.2019
На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись Белова Анна Сергеевна
02.06.2020
г. Уфа, Россия

Содержание

Введение и постановка задачи 4

§1. Задача о приближенном построении мультипликаторов периодической системы 7

1.1. Приближенное построение матрицы монодромии 7

1.2. Формулы теории возмущений линейных операторов 10

1.3. Устойчивость линейных периодических систем 19

§2. Построение границ областей устойчивости динамических систем 23

2.1. Случай 1^0 : простое нулевое собственное значение 24

2.2. Случай 2^0 : пара простых чисто мнимых собственных значений, нерезонансный случай 27

2.3. Случай 3^0 : пара простых чисто мнимых собственных значений, резонансный случай 27

§3. Исследование основных сценариев бифуркаций 29

3.1. Случай S1: условия бифуркации вынужденных колебаний . . 30

3.2. Случай S2: условия бифуркации субгармонических колебаний 31

3.3. Случай S3: условия бифуркации квазипериодических колебаний 32

§4. Плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел 33

4.1. Устойчивость точек либрации 34

4.2. Границы области устойчивости треугольных точек либрации 36

4.3. Основные этапы построения границы Γ_3 области устойчивости треугольных точек либрации 40

4.4. Спектральные свойства линеаризованной задачи 41

4.5. Бифуркации в окрестностях треугольных точек либрации . . 43

Заключение 45

Список использованных источников и литературы 46

Введение и постановка задачи

Многие теоретические и практические задачи приводят к необходимости исследования зависящей от скалярного или векторного параметра ε системы вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t\,,x\,,\varepsilon)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

с T-периодической по t правой частью: $f(t+T\,,x\,,\varepsilon) \equiv f(t\,,x\,,\varepsilon)$. Для простоты будем предполагать, что вектор-функция $f(t\,,x\,,\varepsilon)$ определена и непрерывно дифференцируема по совокупности переменных. Далее, пусть система (1) при всех значениях параметра ε имеет точку равновесия $x = 0$, т.е. выполняется равенство: $f(t\,,0\,,\varepsilon) \equiv 0$.

Систему (1) можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + a(t\,,x\,,\varepsilon)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{2}$$

где $A(t,\varepsilon) = f'_x(t\,,0\,,\varepsilon)$, а нелинейность $a(t\,,x\,,\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению: $\|a(t\,,x\,,\varepsilon)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$.

Для простоты будем считать, что при $\varepsilon = 0$ матрица $A(t,0)$ является постоянной матрицей, т.е. $A(t,0) \equiv A_0$. Задача в общей постановке может быть решена по аналогичной схеме, но потребует более громоздких построений и поэтому здесь не приводится.

При указанном предположении, уравнение (2) представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t,\varepsilon)]\,x + a(t\,,x\,,\varepsilon)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{3}$$

в котором $S(t,\varepsilon)$ – вещественная, T-периодическая по t матрица, при этом $S(t,0) \equiv O$.

В первой главе основное внимание будет уделено изучению линейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t,\varepsilon)]\,x\,, \quad x \in R^N\,. \tag{4}$$

Анализ системы (4) при $\varepsilon = 0$ т.е. “невозмущенной” системы

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x\,, \quad x \in R^N\,, \tag{5}$$

относительно прост. Эта простота связана с существованием явных формул для фундаментальной системы решений и, следовательно, явных формул для общего решения автономной системы (5) типа $x(t) = e^{A_0 t}x_0$. К сожалению, для “возмущенной” системы (4) в общем случае (при $N \geqslant 2$) в силу ее неавтономности не существует такого рода явных формул, что существенно усложняет анализ системы.

В литературе предложен ряд методов исследования систем вида (4), приводящих к тем или иным формулам для приближенного представления их общего решения, для анализа устойчивости системы, для изучения свойств решений и пр. Классическим здесь является теория Флоке (см., например, [13], [24]), позволяющая переходить от линейных уравнений с периодическими коэффициентами к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Однако, использование этой теории предполагает знание фундаментальной системы решений уравнения с периодическими коэффициентами, что возможно лишь в простейших случаях. Поэтому теория Флоке, имея важное теоретическое значение, с практической точки зрения далеко не всегда эффективна. В ряде работ (см., например, [13], [24], [19]) были предложены методы приближенного исследования систем вида (4) для ряда важных случаев, в частности, для случая, когда элементы матрицы $S(t, \varepsilon)$ представляют собой конечные суммы экспоненциальных слагаемых. В [17] был предложен метод, позволяющий пошагово (по степеням малого параметра ε) преобразовывать коэффициенты периодической матрицы $S(t, \varepsilon)$ в коэффициенты специально конструируемой постоянной матрицы. Исследование различных задач, связанных с рассмотрением систем вида (4), активно продолжается в различных направлениях (см., например, [5], [16]).

В настоящей работе предлагаются новые подходы в задаче приближенного построения фундаментальной матрицы решений системы (4) и новые формулы для приближенного вычисления ее мультипликаторов. Да-

лее будут приведены формулы теории возмущений линейных операторов, рассматривается задача о построении границ областей устойчивости динамических систем, изучены основные сценарии бифуркаций.

Методы, описанные в работе, применяются к плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел. Исследованию этой задачи посвящено большое число работ, начиная с исследований Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, А. Пуанкаре и других авторов. В этой задаче особый интерес представляют построение и изучение границ областей устойчивости в окрестности, так называемых, точек либрации. В настоящей работе предлагается новый способ построения границ областей устойчивости, основанный на приближенном построении матрицы монодромии и формулах теории возмущения. В данной работе рассматриваются спектральные свойства линеаризованной задачи трех тел, а также основные сценарии бифуркации в окрестностях треугольных точек либрации.

§1. Задача о приближенном построении мультипликаторов периодической системы

1.1. Приближенное построение матрицы монодромии

В настоящей главе основное внимание будет уделено линейному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x\,, \quad x \in R^N\,, \tag{6}$$

которое зависит от малого скалярного параметра ε с T-периодической по t правой частью: $A(t+T\,,\varepsilon) \equiv A(t\,,\varepsilon)$.

Положим, что выполняются следующие условия:

a) матрица $A(t\,,\varepsilon)$ вещественная, определена и непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, непрерывно дифференцируемая по ε до порядка k $(k \geq 1)$ включительно;

b) $A(t, 0) \equiv A_0$ т.е. при $\varepsilon = 0$ матрица $A(t, 0)$ является постоянной матрицей;

Общий случай может быть рассмотрен по той же схеме, но требует более громоздких построений и поэтому здесь не приводится.

В этих предложениях систему (6) можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t, \varepsilon)]\,x\,, \quad x \in R^N\,, \tag{7}$$

в котором A_0 – вещественная постоянная матрица; $S(t, \varepsilon)$ – вещественная, T-периодическая по t матрица.

Обозначим через $U = X(t, \varepsilon)$ – решение матричной задачи Коши:

$$U' = [A_0 + S(t, \varepsilon)]\,U\,, \quad U(0) = I\,, \tag{8}$$

где I – единичная матрица. Матрица $X(t, \varepsilon)$ является фундаментальной матрицей решений (ФМР) системы (7), она существует, единственна и определена при всех значениях $t\,,\varepsilon$. Матрицу $V(\varepsilon) = X(T, \varepsilon)$ называют

матрицей монодромии периодической системы (7), а ее собственные значения – мультипликаторами системы (7). Очевидно, что для системы (7) при $\varepsilon = 0$ ФМР и матрица монодромии – это матричные экспоненты e^{tA_0} и e^{TA_0}, соответственно.

Приведем схему получения формул для приближенного вычисления ФМР системы (7).

Строить ФМР (7) будем в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$X(t,\varepsilon) = X_0(t) + \frac{\varepsilon}{1!}X_1(t) + \frac{\varepsilon^2}{2!}X_2(t) + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{k!}X_k(t) + \Psi(t,\varepsilon)\,, \tag{9}$$

где $X_0(t) = e^{A_0 t}$, а матрицы $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_k(t)$ требуют определения; $\Psi(t,\varepsilon)$ – непрерывная по t и непрерывно дифференцируемая по ε матрица, удовлетворяющая условию: $\|\Psi(t,\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^{k+1})$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее введем обозначение:

$$S_j(t) = S_\varepsilon^{(j)}(t,0) \qquad (j = 1, 2, \ldots k)\,, \tag{10}$$

т.е. $S_j(t)$ – это производная j-го порядка матрицы $S(t,\varepsilon)$ по ε при $\varepsilon = 0$.

Теорема 1. *Фундаментальная матрица решений системы (7) представима в виде равенства (9), в котором $X_0(t) = e^{A_0 t}$, а матрицы $X_1(t), \ldots, X_k(t)$ определяются рекуррентной формулой:*

$$X_m(t) = e^{A_0 t}\int_0^t e^{-A_0\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\left[C_m^j S_{m-j}(\tau)X_j(\tau)\right]d\tau\,, \quad (m = 1, \ldots, k) \tag{11}$$

здесь $C_m^j = \frac{m!}{(m-j)!j!}$.

В частности, матрицы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ определяются формулами:

$$X_1(t) = e^{A_0 t}\int_0^t e^{-A_0\tau}S_1(\tau)e^{A_0\tau}d\tau\,, \tag{12}$$

$$X_2(t) = e^{A_0 t}\int_0^t e^{-A_0\tau}\left[S_2(\tau)e^{-A_0\tau} + 2S_1(\tau)X_1(\tau)\right]d\tau. \tag{13}$$

Доказательство. Участвующие в формуле (9) матрицы $X_j(t)$ – это производные ФМР $X(t,\varepsilon)$ системы (6) по ε в точке $\varepsilon = 0$. А именно,

$$X_1(t) = X'_\varepsilon(t,0)\,, \quad X_2(t) = X''_\varepsilon(t,0)\,, \ldots\,. \tag{14}$$

Другими словами, формула (9) – это формула Тейлора для $X(t,\varepsilon)$, существование которой следует из общих теорем о C^k-гладкости по параметру ε решения задачи Коши (8). Остается, таким образом, вычислить производные матрицы $X(t,\varepsilon)$ по ε до k-го порядка включительно.

Матрица $X(t,\varepsilon)$ является решением задачи Коши (8) и, следовательно, выполняется равенство

$$X(t,\varepsilon) = e^{A_0 t} + e^{A_0 t}\int\limits_0^t e^{-A_0\tau} S(\tau,\varepsilon)X(\tau,\varepsilon)d\tau. \tag{15}$$

Продифференцировав обе части этого равенства по ε, получим:

$$X'_\varepsilon(t,\varepsilon) = e^{A_0 t}\int\limits_0^t e^{-A_0\tau}\left[S'_\varepsilon(\tau,\varepsilon)X(\tau,\varepsilon) + S(\tau,\varepsilon)X'_\varepsilon(\tau,\varepsilon)\right]d\tau. \tag{16}$$

Полагая здесь $\varepsilon = 0$ и учитывая равенства $X_0(t) = e^{A_0 t}$, и $S(t\,,0) = 0$ придем к равенству (12).

Для того, чтобы определить $X_2(t)$, следует продифференцировать равенство (16) по ε. Полагая в полученном равенстве $\varepsilon = 0$ придем к равенству (13).

Общая формула (11) может быть получена по аналогичной схеме с использованием метода математической индукции.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ системы (7) представима в виде равенства*

$$V(\varepsilon) = V_0 + \frac{\varepsilon}{1!}V_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!}V_2 + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{k!}V_k + \Upsilon(\varepsilon)\,,$$

в котором $V_0 = e^{A_0 T}$ *, а матрицы* $V_1, \ldots, V_k$ *определяются рекуррентной формулой:*

$$V_m = e^{A_0 T} \int\limits_0^T e^{-A_0 \tau} \sum_{j=0}^{m-1} \left[C_m^j S_{m-j}(\tau) X_j(\tau) \right] d\tau \,, \qquad (m = 1 \,, \ldots \,, k) \,,$$

здесь $\Upsilon(\varepsilon)$ *– непрерывно дифференцируемая по* ε *матрица, удовлетворяющая условию:* $\|\Upsilon(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^{k+1})$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В частности, матрицы V_1 и V_2 определяются формулами:

$$V_1 = e^{A_0 T} \int\limits_0^T e^{-A_0 \tau} S_1(\tau) e^{A_0 \tau} d\tau \,, \tag{17}$$

$$V_2 = e^{A_0 T} \int\limits_0^T e^{-A_0 \tau} \left[S_2(\tau) e^{A_0 \tau} + 2 S_1(\tau) X_1(\tau) \right] d\tau \,. \tag{18}$$

1.2. Формулы теории возмущений линейных операторов

Рассмотрим задачу о построении мультипликаторов системы (7) в следующих важных с точки зрения приложений случаях:

1^0. Матрица A_0 имеет простое собственное значение 0 ;

2^0. Матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, $\omega_0 T \neq \pi k$ при $k \in N$;

3^0. Матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, $T\omega_0 = \pi k_0$ при некотором $k_0 \in N$.

Во всех этих случаях, считаем, что матрица A_0 не имеет других собственных значений с нулевой вещественной частью.

Случай 1^0 : простое нулевое собственное значение

Пусть сначала матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение. Положим, что вектор e – собственный вектор соответствующий нулевому собственному значению. Отметим, что сопряженная матрица A_0^* также имеет простое нулевое собственное значение, которому соответствует

собственный вектор g^* . Векторы e и g^* определены неоднозначно, нас будет интересовать следующая нормировка.

Теорема 3. *Векторы e и g^* можно нормировать в соответствии с равенством:*

$$(e, g^*) = 1\,.$$

Доказательство. $A_0 : H \longrightarrow H$ – линейный вполне непрерывный оператор, где H – вещественное гильбертово или конечномерное линейное пространство. Всегда найдутся ненулевые векторы $e, g^* \in H$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0 e = 0 \cdot e\,, \;\; A_0^* g^* = 0 \cdot g^*\,; \tag{19}$$

Заметим, что если e и g^* – удовлетворяют равенствам (19), то векторы $e_1 = C_1 e$ и $g_1^* = C_2 g^*$ при любых значениях констант C_1 и C_2 также удовлетворяют равенствам (19). Поэтому векторы e и g^* можно нормировать.

Пространство H может быть представлено в виде $H = H_0 \oplus H^0$, где H_0 – содержащее вектор e одномерное подпространство, а H^0 – дополнительное к H_0 инвариантное для A_0 подпространство.

Известно, что для любого $u \in H^0$ выполняется равенство: $(u, g^*) = 0$. Тогда имеет место соотношение $(e, g^*) \neq 0$. Действительно, допустим противное, т.е. $(e, g^*) = 0$. Тогда $g^* \perp H_0$ и $g^* \perp H^0$. Отсюда и из равенства $H = H_0 \oplus H^0$ получим: $g^* = 0$. Это противоречит тому, что вектор g^* является ненулевым.

Отсюда следует, что пространство H^0 может быть определено равенством

$$H^0 = \{x : \; x \in H, \, (x, g^*) = 0\}\,.$$

Справедливость теоремы 3 теперь следует из условия $(e, g^*) \neq 0$: всегда можно нормировать вектор g исходя из требования выполнения равенства $(e, g^*) = 1$.

Заметим, что в рассматриваемом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ системы (5) имеет простое собственное значение 1.

Из теории возмущения линейных операторов (см., например, [10]) следует, что матрица монодромии $V(\varepsilon)$ "возмущенной" системы (7) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет единственное простое собственное значение $\mu(\varepsilon)$ такое, что $\mu(0) = 1$ и функция $\mu(\varepsilon)$ – k раз непрерывно дифференцируема. Рассмотрим вопрос о приближенном построении функции $\mu(\varepsilon)$.

Теорема 4. *Функция $\mu(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ представима в виде*

$$\mu(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\mu_1 + O(\varepsilon^2)\,, \tag{20}$$

где

$$\mu_1 = \int_0^T (S_1(t)e, g^*)dt\,; \tag{21}$$

здесь $S_1(t)$ – первая из матриц (10).

Доказательство. В силу теоремы 2 матрица $V(\varepsilon)$ представима в виде:

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \Upsilon(\varepsilon)\,, \qquad \|\Upsilon(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)\,, \varepsilon \to 0\,.$$

Из теории возмущений линейных операторов следует, что так как оператор V_0 имеет простое собственное значение 1, то оператор $V(\varepsilon)$ имеет непрерывную ветвь простых собственных значений $\mu(\varepsilon)$, $\mu(0) = 1$. При этом если соответствующие собственные векторы e и g^* выбраны в соответствии с равенством $(e, g^*) = 1$, то функция $\mu(\varepsilon)$ представима в виде (20), в котором коэффициент μ_1 определяется равенством: $\mu_1 = (V_1 e, g^*)$.

Но число $\mu_1 = (V_1 e, g^*)$ совпадает с числом (21). Действительно, в силу (18) имеем:

$$(V_1 e, g^*) = \left(e^{A_0 T} \int\limits_0^T e^{-A_0\tau} S_1(\tau) e^{A_0\tau} d\tau\, e, g^* \right) = \int\limits_0^T (S_1(\tau)e, g^*)\, d\tau\,,$$

что и требовалось доказать.

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ имеет собственный вектор вида

$$e(\varepsilon) = e + \varepsilon e_1 + \tilde{e}(\varepsilon)\,,$$

где $e_1 = \dfrac{de(\varepsilon)}{d\varepsilon}$, $\tilde{e}(\varepsilon)$ – непрерывно дифференцируемый по ε вектор, удовлетворяющий условию: $\|\tilde{e}(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Положим, что

$$(e(\varepsilon)\,, g^*) = Const\,, \tag{22}$$

тогда $(e_1\,, g^*) = 0$ и $(e_1\,, e \cdot g^*) = 0$, где произведение $e \cdot g^*$ представляет собой матрицу (диаду). Тогда верна

Теорема 5. *Собственный вектор матрицы монодромии $V(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ представим в виде:*

$$e(\varepsilon) = e + \varepsilon e_1 + \tilde{e}(\varepsilon)\,,$$

где

$$e_1 = (V_0 - I + e \cdot g^*)^{-1}(\mu_1 I - V_1)e\,.$$

В этом случае формулу (21) можно уточнить следующим образом:

Теорема 6. *Функция $\mu(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ в случае выполнения равенства (22) представима в виде:*

$$\mu(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\mu_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!}\mu_2 + O(|\varepsilon|^3)\,,$$

где

$$\mu_2 = (V_1 e_1 - \mu_1 e_1, g^*) + (V_2\, e \cdot g^*)\,,$$

где матрицы $V_1\,, V_2$ определяются формулами (17)–(18).

Продолжая этот процесс единственным образом найдем и все последующие коэффициенты $\mu_3\,, \mu_4\,, \ldots\,, \mu_k$.

Случай 2^0 : пара простых чисто мнимых собственных значений, нерезонансный случай

Пусть матрица A_0 имеет пару простых комплексно-сопряженных собственных значений вида $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ на при каком натуральном k. Найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*)\,. \tag{23}$$

Векторы e и g (векторы e^* и g^*) линейно независимы, при этом они определяются неоднозначно. Здесь нас интересует следующая нормировка этих векторов.

Теорема 7. *Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами:*

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \;\; (e, g^*) = (g, e^*) = 0\,. \tag{24}$$

Доказательство. $A_0 : H \longrightarrow H$ – линейный вполне непрерывный оператор, где H – вещественное гильбертово или конечномерное линейное пространство. Всегда найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in H$ такие, что выполняются равенства (23), при этом векторы e и g (векторы e^* и g^*) линейно независимы.

Положим

$$e_1 = r(e\cos\varphi + g\sin\varphi)\,, \quad g_1 = r(g\cos\varphi - e\sin\varphi)\,. \tag{25}$$

Подберем $r > 0$ и φ таким образом, чтобы выполнялись равенства (24) Возможны следующие случаи:

S1. $(e, g) = 0\,, \;\; (e, e) = (g, g)\,;$

S2. $(e, g) = 0\,, \;\; (e, e) \neq (g, g)\,;$

S3. $(e, g) \neq 0\,.$

В случае S1 в качестве r в (25) следует положить $r = 1/\sqrt{(e,e)}$, а угол φ можно взять любым.

В случае S2 в качестве r в (25) следует положить

$$r = \sqrt{\frac{2}{(e,e)+(g,g)}}, \tag{26}$$

а в качестве φ следует взять любой из углов $\varphi = \pi/4 + n\pi/2$, где n – целое число.

В случае S3 в качестве r в (25) следует выбрать число (26), а в качестве φ следует взять любой из углов

$$\varphi = \frac{1}{2} arctg \frac{(g,g)-(e,e)}{2(e,g)} + \frac{n\pi}{2},$$

где n – целое число.

Далее положим

$$\alpha = \frac{(e,e^*)\cos\varphi - (e,g^*)\sin\varphi}{rC_0}, \quad \beta = \frac{(e,g^*)\cos\varphi + (e,e^*)\sin\varphi}{rC_0},$$

где $C_0 = (e,e^*)^2 + (e,g^*)^2 > 0$. Тогда векторы $e_1^* = \alpha e^* + \beta g^*$ и $g_1^* = \alpha g^* - \beta e^*$ удовлетворяют равенствам (23).

В справедливости предложенных формул можно убедиться прямым подсчетом.

Матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ “невозмущенной” системы (5) в рассматриваемом случае имеет пару простых комплексно-сопряженных собственных значений $e^{\pm\omega_0 Ti}$ ($e^{\pm\omega_0 Ti} \neq \pm 1$).

Из теории возмущения линейных операторов следует, что матрица монодромии $V(\varepsilon)$ “возмущенной” системы (7) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару простых собственных значений $\mu(\varepsilon)$ таких, что $\mu(0) = \mu_0 = e^{\pm\omega_0 Ti}$ и функция $\mu(\varepsilon)$ является k раз непрерывно дифференцируемой. Предложим формулы приближенного построения функции $\mu(\varepsilon)$ на основе теорем 1 и 2.

Теорема 8. *Функция $\mu(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ представима в виде*

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 \pm \varepsilon\mu_1 + O(\varepsilon^2), \tag{27}$$

где $\mu_0 = \pm\omega_0 T i$,

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2)\,;$$

здесь

$$\gamma_1 = \int\limits_0^T [(S_1(t)e, e^*) + (S_1(t)g, g^*)]\,dt\,, \quad \gamma_2 = \int\limits_0^T [(S_1(t)g, e^*) - (S_1(t)e, g^*)]\,dt\,,$$

а $S_1(t)$ *– первая из матриц (10).*

Теорема 8 доказывается по той же схеме, что и ее аналог – теорема 4.

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ имеет собственный вектор $e(\varepsilon) + ig(\varepsilon)$:

$$e(\varepsilon) = e + \varepsilon e_1 + \tilde{e}(\varepsilon)\,,$$

$$g(\varepsilon) = g + \varepsilon g_1 + \tilde{g}(\varepsilon)\,,$$

где $\tilde{e}(\varepsilon)\,, \tilde{g}(\varepsilon)$– непрерывно дифференцируемые векторы по ε и удовлетворяющие условию: $\|\tilde{e}(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^2)\,,\ \|\tilde{g}(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Как и в случае 1^0 предположим, что $(e(\varepsilon)\,, g) = Const$. Тогда верна

Теорема 9. *Собственный вектор матрицы монодромии* $V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!}V_2 + O(|\varepsilon|^3)$ *при малых* $|\varepsilon|$ *представим в виде*

$$e(\varepsilon) + ig(\varepsilon) = e + ig + \varepsilon(e_1 + ig_1) + \frac{\varepsilon^2}{2!}(e_2 + ig_2) + O(|\varepsilon|^3)\,,$$

где

$$e_1 + ig_1 = \left((V_0 - \mu_0 I + e \cdot g)^{-1}(\mu_1 I - V_1)\right)(e + ig)\,.$$

Аналогично, как и в случае 1^0 , возможно продолжить процесс определения всех последующих коэффициентов $\mu_2\,, \mu_3\,, \ldots\,, \mu_k$.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим (см., например, [18]) уравнение движения вертикального маятника:

$$\ddot{\varphi} + (g + a\omega^2 G(t\,, H) sign(\sin t))\varphi = 0\,. \tag{28}$$

Здесь g – ускорение свободного падения, ω –частота, $G(t\,,H)$ – 2π периодическая функция

$$G(t\,,H)=\begin{cases}0\,,t\in(t^*\,,t^*+\Delta t)\,,\\ 1\,,t\notin(t^*\,,t^*+\Delta t)\,,\end{cases}$$

где t^* — моменты времени, после которых ускорение $sign(\sin t)$ меняет знак, Δt – время, затрачиваемое поршнем на прохождение цилиндра.

Данное уравнение можно свести к системе

$$\frac{dx}{dt}=[A_0+\delta S(t)]\,x\,,\quad x\in R^2\,,$$

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g & 0\end{pmatrix};\quad S(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -G(t\,,H)sign(\sin t) & 0\end{pmatrix},$$

здесь $\delta=a\omega^2$ – малый параметр.

Рассмотрим вопрос приближенного построения мультипликаторов матрицы монодромии $V(\delta)$ системы (28). Для этого построим собственные векторы $e\,,h$, соответствующие собственному значению $i\sqrt{g}$ матрицы A_0 (аналогично, векторы e^*,h^*, соответствующие собственному значению $-i\sqrt{g}$ матрицы A_0^T).

$$e=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix};\quad h=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{g}}\\ 0\end{pmatrix};\quad e^*=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix};\quad h^*=\begin{pmatrix}-\sqrt{g}\\ 0\end{pmatrix};$$

Далее, нормируем полученные векторы в соответствии с (24).

Тогда, собственные значения матрицы монодромии $V(\delta)$ системы (28) при каждом малом $|\delta|$ на промежутке $(0\,,2\pi)$ может быть описаны 2-мя функциями:

$$\mu(\varepsilon)=e^{\pm 2\pi\sqrt{g}i}+O(\delta^2)\,,\qquad t\in[0\,,\Delta t)\cup(\pi\,,\pi+\Delta t]\,,$$

$$\mu(\varepsilon)=e^{\pm 2\pi\sqrt{g}i}\left(1\pm\frac{\pi\sqrt{g+1}}{2g}\delta\right)+O(\delta^2)\,,\qquad t\in[\Delta t\,,\pi]\cup[\pi+\Delta t\,,2\pi]\,.$$

Случай 3^0 : пара простых чисто мнимых собственных значений, резонансный случай

В этом случае матрица монодромии $V_0 = e^{A_0 T}$ "невозмущенной" системы (5) имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2, где $\mu_0 = 1$ (если k_0 четно) или $\mu_0 = -1$ (если k_0 нечетно).

Из теории возмущения линейных операторов (см., например, [10]) следует, что матрица монодромии $V(\varepsilon)$ "возмущенной" системы (7) при каждом малом $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ таких, что $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu_0$ и функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ являются k раз непрерывно дифференцируемыми. Рассмотрим вопрос о приближенном построении этих функций.

Теорема 10. *Функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ при малых $|\varepsilon|$ представимы в виде*

$$\mu_1(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)\,, \qquad \mu_2(\varepsilon) = \mu_0 + \mu_2\varepsilon + O(\varepsilon^2)\,, \tag{29}$$

где μ_1 и μ_2 – это собственные значения матрицы

$$B = \begin{bmatrix} (V_1 e, e^*) & (V_1 g, e^*) \\ (V_1 e, g^*) & (V_1 g, g^*) \end{bmatrix}; \tag{30}$$

Здесь векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ выбраны в соответствии с равенствами (23)–(24). Элементы матрицы (30) могут быть вычислены с использованием формулы (17). В результате получим равенства:

$$(V_1 e, e^*) = \mu_0 \int_0^T \{\cos^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)e, e^*) + \sin^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)g, g^*) - \tag{31}$$

$$-\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(S_1(t)e, g^*) + (S_1(t)g, e^*)]\}dt\,,$$

$$(V_1 g, e^*) = \mu_0 \int_0^T \{\cos^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)g, e^*) - \sin^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)e, g^*) + \tag{32}$$

$$+\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(S_1(t)e, e^*) + (S_1(t)g, g^*)]\}dt\,,$$

$$(V_1 e, g^*) = \mu_0 \int_0^T \{\cos^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)e, g^*) - \sin^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)g, e^*) + \tag{33}$$

$$+\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(S_1(t)e, e^*) - (S_1(t)g, g^*)]\}dt\,,$$

$$(V_1 g, g^*) = \mu_0 \int_0^T \{\cos^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)g, g^*) + \sin^2(\omega_0 t)\,(S_1(t)e, e^*) + \tag{34}$$

$$+\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(S_1(t)e, g^*) - (S_1(t)g, e^*)]\}dt\,.$$

1.3. Устойчивость линейных периодических систем

Рассмотрим вопрос об устойчивости линейной системы (35)

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t,\varepsilon)]\,x\,, \quad x \in R^N\,, \tag{35}$$

при малых $|\varepsilon|$. Этот вопрос решается относительно просто в следующих двух случаях (см., например, [17], [24], [13]). Первым является случай, когда все собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части; тогда при всех малых $|\varepsilon|$ нулевое решение системы (35) является асимптотически устойчивым.

Вторым является случай, когда матрица A_0 имеет хотя бы одно собственное значение с положительной вещественной частью; тогда при всех малых $|\varepsilon|$ нулевое решение системы (35) является неустойчивым.

Критическим и существенно более сложным является случай, когда матрица A_0 имеет одно или несколько собственных значений с нулевой вещественной частью, при этом она не имеет собственных значений с положительной вещественной частью. Рассмотрим три основных варианта

критического случая, а именно, указанные в предыдущем пункте случаи $1^0 - 3^0$. При этом будем предполагать, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части.

Рассмотрим сначала случай 1^0, т.е. пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0. Из теоремы 4 следует, что верна

Теорема 11. *При всех малых $|\varepsilon|$ таких, что $\varepsilon\mu_1 < 0$ ($\varepsilon\mu_1 > 0$) решение $x = 0$ уравнения (35) является асимптотически устойчивым (неустойчивым).*

В качестве иллюстративного примера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$x'' + (1 + a(t))x' + b(t)x = 0\,, \qquad x \in R\,, \tag{36}$$

где $a(t)\,, b(t)$ – T-периодические, непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных функции.

Введем в уравнение (36) числовой параметр ε, получим систему

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \varepsilon S(t)]\,x\,, \quad x \in R^2\,, \tag{37}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad S(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix},$$

Матрица A_0 имеет следующие собственные значения: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$. Очевидно, что в этом случае устойчивость системы (37) определяется поведением непрерывной ветви $\mu(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\mu_1 + O(|\varepsilon|^2)$.

Определим собственные вектора e и g^*, нормированные равенством $(e\,, g^*) = 1$ и получим, что в этом случае $\mu_1 = \int_0^T (S_1(t)\,e\,, g^*)\,dt = \int_0^T b(t)\,dt$.

В окончательном результате следует положить $\varepsilon = 1$ и тогда один из мультипликаторов уравнения (36) может быть записан в виде $\mu = 1 + \int_0^T b(t)\,dt$. Таким образом, решение $x = 0$ уравнения (36) является асимптотически устойчивым при $\int_0^T b(t)\,dt < 0$ и неустойчивым при $\int_0^T b(t)\,dt > 0$.

Рассмотрим теперь случай 2^0, т.е. пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при целых k. Из теоремы 8 следует, что верна

Теорема 12. *При всех малых $|\varepsilon|$ таких, что $\varepsilon\gamma_1 < 0$ ($\varepsilon\gamma_1 > 0$) решение $x = 0$ уравнения (35) является асимптотически устойчивым (неустойчивым).*

В случае 3^0 вопрос об устойчивости системы (35) сводится к вопросу нахождения собственных значений матрицы (30) и анализу формул (29) при малых $|\varepsilon|$.

Теорема 13. *При всех малых $|\varepsilon|$ таких, что $\varepsilon\mu_1 < 0$ и $\varepsilon\mu_2 < 0$ решение $x = 0$ уравнения (35) является асимптотически устойчивым.*

Если же, хотя бы одно из выражений $\varepsilon\mu_1$ или $\varepsilon\mu_2$ будет положительным, то решение $x = 0$ уравнения (35) является неустойчивым.

Приведем здесь иллюстративный пример (см., например, [24]):

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + \varepsilon S_1(t))x, \quad x \in R^3, \tag{38}$$

где ε – малый параметр,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos t & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A_0 – это числа $\lambda_{1,2} = \pm i$ и $\lambda_3 = -1$. Изучим вопрос об устойчивости решения $x = 0$ системы (38) при малых ε.

Так как матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i$ и период T правой части системы (38) равен $T = 2\pi$, то в рассматриваемом примере выполнены условия случая 3^0 при $k_0 = 2$.

Для изучения устойчивости системы (38) построим матрицу (30), элементы которой вычислим с помощью формул (31) – (34). С этой целью

найдем собственные векторы e, g и e^*, g^* матриц A_0 и A_0^*, отвечающие собственным значениям i и $-i$, соответственно, и удовлетворяющие соотношениям (24):

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad e^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

В результате несложных вычислений получим, что матрица (30) здесь имеет вид

$$B = \pi \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда из теоремы 10 и формул (29) получим, что система (38) имеет пару мультипликаторов, представимых в виде $\mu_{1,2}(\varepsilon) = 1 - \pi\varepsilon \pm \pi i\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Третий мультипликатор, очевидно, представим в виде $\mu_3(\varepsilon) = e^{-2\pi} + O(\varepsilon)$. Отсюда следует, что при малых $\varepsilon > 0$ решение $x = 0$ системы (38) асимптотически устойчиво, а при малых $\varepsilon < 0$ оно неустойчиво.

§2. Построение границ областей устойчивости динамических систем

Задачи о построении и изучении границ областей устойчивости являются важными и интересными задачами теории динамических систем, теории нелинейных колебаний и их многочисленных приложений. В этом параграфе предложен ряд эффективных методов исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см. [17], [13], [20], [21], [23]) и имеющуюся там библиографию). Предлагаемые в работе схемы исследования основаны на формулах теории возмущений линейных операторов [10] и методах исследования локальных бифуркаций (см. [8] и [22]).

В качестве основного приложения рассмотрим задачу о построении границы области устойчивости линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t,\alpha,\beta)]\,x\,, \quad x \in R^N\,, \tag{39}$$

зависящей от двух скалярных параметров α и β. Будем предполагать, что матрица $S(t,\alpha,\beta)$ является T-периодической по t, при этом $S(t,\alpha_0,\beta_0) \equiv 0$.

Далее будем рассматривать лишь случай, когда матрица A_0 не имеет собственных значений с положительной вещественной частью (в противном случае, при всех малых $|\alpha-\alpha_0|\,,|\beta-\beta_0|$ нулевое решение системы (39) является неустойчивым).

Введем следующие обозначения: множество G в плоскости Π параметров (α,β) будем называть областью устойчивости (областью неустойчивости) системы (39), если для любого $(\alpha,\beta) \in G$ система (39) является устойчивой по Ляпунову (неустойчивой).

Точку $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ будем называть граничной точкой области устойчивости G системы (39), если в любой ее окрестности содержатся как точки из области устойчивости G, так и точки из области неустойчивости, совокупность таких точек образует границу устойчивости Γ множества G.

Очевидно, что для того, чтобы точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ была граничной для области устойчивости G необходимо, чтобы матрица A_0 имела хотя бы одно собственное значение с нулевой вещественной частью и не имела собственных значений с положительной вещественной частью.

Как правило, если точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ – есть граничная точка области устойчивости системы (39), то, через нее проходят одна или несколько гладких граничных кривых.

Пусть (α_0, β_0) – это граничная точка области устойчивости системы (39). Рассмотрим вопрос о построении граничной кривой (одной или нескольких), проходящей через точку (α_0, β_0) в трех основных критических случаях, а именно, указанных в главе 1, случаях $1^0 - 3^0$.

2.1. Случай 1^0 : простое нулевое собственное значение

Пусть матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение, при этом другие ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.Обозначим через e и g^* собственные векторы матрицы A_0 и матрицы A_0^*, соответственно, отвечающие их простому собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами (3).

Введем в рассмотрение числа ζ_1 и ζ_1 :

$$\zeta_1 = \int_0^T (S'_\alpha(t, \alpha_0, \beta_0)e, g^*)dt\,, \quad \zeta_2 = \int_0^T (S'_\beta(t, \alpha_0, \beta_0)e, g^*)dt\,.$$

Теорема 14. *Если $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 > 0$, то точка (α_0, β_0) является регулярной граничной точкой области устойчивости решения $x = 0$ уравнения (39).*

Доказательство. Пусть для определенности $\zeta_1 \neq 0$. Если матрица A_0 имеет простое нулевое собственное, тогда при всех малых $|\alpha - \alpha_0|$, $|\beta - \beta_0|$ матрица монодромии системы(39) имеет простое собственное значение $\mu(\alpha, \beta)$ (см. теорему 4) такое, что: функция $\mu(\alpha, \beta)$ – непрерывно дифференцируема и $\mu(\alpha_0, \beta_0) = 0$.

Покажем, что уравнение $\mu(\alpha,\beta) = 0$ определяет единственную кривую $\alpha = f(\beta)$, определенную и гладкую в некоторой окрестности числа α_0 и такую, что $\alpha_0 = f(\beta_0)$. Чтобы это доказать, достаточно показать, что $\mu'_{1\alpha}(\alpha_0,\beta_0) \neq 0$. положим в (39) $\beta = \beta_0$, тогда перейдем от (39) к однопараметрическому уравнению

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + (\alpha - \alpha_0)S_1(t) + S_2(t,\alpha,\beta_0)]x\,, \quad x \in R^N\,. \tag{40}$$

В силу формул теории возмущений линейных операторов (см. 4) получим нужное соотношение:

$$\mu'(\alpha_0) = \int_0^T (S_1(t)e, g^*)\,dt = \zeta_1 \neq 0\,.$$

Единственность граничной кривой следует из теоремы о неявной функции.

Заметим, что уравнение

$$\zeta_1 \cos\varphi + \zeta_2 \sin\varphi = 0$$

имеет на промежутке $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ в точности два решения; пусть $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + \pi$ являются этими решениями.

Приведем схему построения граничной кривой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \alpha(\delta) = \alpha_0 + \alpha_1\delta + \alpha_2\delta^2 + \ldots + \alpha_k\delta^k + \psi_1(\delta), \\ \beta(\delta) = \beta_0 + \beta_1\delta + \beta_2\delta^2 + \ldots + \beta_k\delta^k + \psi_2(\delta), \end{cases}$$

где δ – малый параметр, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\,,\beta_1\,,\ldots\,,\beta_k$ – требующие определения коэффициенты, $\|\psi_j(\delta)\| = O(|\delta|^{k+1})$ при $\delta \to 0\,, j = 1\,, 2$. Тогда наша задача сводится к системе вида (39), зависящей от одного малого параметра δ. Далее искомые коэффиициенты подбираются так, чтобы мультипликаторы соответствующих систем оставались на единичной окружности комплексной плоскости.

Коэффициенты α_1 и β_1 здесь определяют угол наклона касательной к кривой γ_0 .

Теорема 15. *Параметрически заданная прямая* $\alpha = \alpha_0 + \delta\cos\varphi_0$, $\beta = \beta_0 + \delta\sin\varphi_0$ *является касательной к граничной кривой* γ_0 *в точке* (α_0, β_0).

Доказательство. Действительно, ранее были получены равенства: $\mu'_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \zeta_1$ и $\mu'_\beta(\alpha_0, \beta_0) = \zeta_2$. Вектор (ζ_1, ζ_2) в плоскости параметров П ортогонален вектору касательной к кривой γ_0. Рассмотрим прямую, проходящую через точку $(\alpha_0, \beta_0) \in$ П и заданную параметрически уравнениями: $\alpha = \alpha_0 + \delta\cos\varphi$ и $\beta = \beta_0 + \delta\sin\varphi$, где φ – некоторый угол. Справедливость теоремы 15 следует из того, что вектор $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ будет вектором касательным к кривой γ_0, если $\zeta_1\cos\varphi + \zeta_2\sin\varphi = 0$.

Покажем, что данная заданная прямая является касательной к граничной кривой γ_0 , для этого построим прямую:

$$\alpha(\delta) = \alpha_0 + \mu\delta\varphi^*, \quad \beta(\delta) = \beta_0 + \delta\sin\varphi^*, \tag{41}$$

где $\varphi^* \neq \varphi_0$, $\varphi^* \neq \varphi_0 + \pi$. Эта прямая трансверсально пересекает кривую γ_0 в точке (α_0, β_0), следовательно, при изменении параметров (α, β) через кривую γ_0 изменяется и топологический тип точки равновесия $x = 0$ системы (39). Отсюда получим тот факт, что кривая γ_0 является граничной кривой области устойчивости уравнения (39).

Знание касательной к граничной кривой γ_0 позволяет определить характер устойчивости решения $x = 0$ системы (39) при близких к (α_0, β_0) значениях (α, β). Пусть $\varphi^* \in [0, 2\pi)$ таково, что

$$\zeta_1\cos\varphi^* + \zeta_2\sin\varphi^* \neq 0;$$

таким образом, $\varphi^* \neq \varphi_0$ и $\varphi^* \neq \varphi_0 + \pi$. Как выше было показано, при трансверсальном переходе параметров (α, β) через кривую γ_0 (вблизи точки (α_0, β_0)) изменяется топологический тип точки равновесия $x = 0$ системы (39) поэтому верна

Теорема 16. *В условиях теоремы 14 решение* $x = 0$ *системы (39) при* $\alpha = \alpha_0 + \delta\cos\varphi^*$ *и* $\beta = \beta_0 + \delta\sin\varphi^*$ *будет асимптотически устойчивым при*

всех малых $|\delta|$, *если* $\delta\,(\zeta_1 \cos\varphi^* + \zeta_2 \sin\varphi^*) < 0$; *оно будет неустойчивым, если* $\delta\,(\zeta_1 \cos\varphi^* + \zeta_2 \sin\varphi^*) > 0$.

2.2. Случай 2^0 : пара простых чисто мнимых собственных значений, нерезонансный случай

Пусть матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, $\omega_0 T \neq \pi k$, $k \in N$. В этом случае существуют ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ определяемые равенствами (24).

Положим

$$\eta_1 = \int_0^T \left[(S'_\alpha(t,\alpha_0,\beta_0)e, e^*) + (S'_\alpha(t,\alpha_0,\beta_0)g, g^*)\right] dt\,,$$

$$\eta_2 = \int_0^T \left[(S'_\beta(t,\alpha_0,\beta_0)e, e^*) + (S'_\beta(t,\alpha_0,\beta_0)g, g^*)\right] dt\,.$$

Имеет место следующий аналог теоремы 14.

Теорема 17. *Если* $\eta_1^2 + \eta_2^2 > 0$, *то точка* (α_0, β_0) *является регулярной граничной точкой области устойчивости решения* $x = 0$ *уравнения* (39).

Теорема 17 доказывается по той же схеме, что и ее аналог – теорема 14.

Изучение вопроса о построении кривой γ_0 и касательной к ней может выполняться по той же схеме, что и в случае 1^0, и привести к аналогам теорем 15 и 16.

2.3. Случай 3^0 : пара простых чисто мнимых собственных значений, резонансный случай

Рассмотрим двумерную систему (39) в комплексном пространстве C^N :

$$\frac{dx}{dt} = \left[A_0 + (\alpha - \alpha_0)S_{1,\alpha}(t\,,\alpha_0\,,\beta_0) + (\beta - \beta_0)S_{1,\beta}(t\,,\alpha_0\,,\beta_0) + S_2(t\,,\alpha\,,\beta)\right] x\,, \tag{42}$$

здесь матрица $S_2(t\,,\alpha\,,\beta)$ удовлетворяет соотношению: $\|S_2(t\,,\alpha\,,\beta)\| = O((\alpha-\alpha_0)^2 + (\beta-\beta_0)^2)$ при $(\alpha\,,\beta) \to (\alpha_0\,,\beta_0)$.

Система (42) является линейной системой с периодическими коэффициентами, при этом период равен $T = \pi$. Матрица A_0 может быть записана в виде:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \omega_0 i & 0 \\ 0 & -\omega_0 i \end{bmatrix}.$$

Положим,

$$Q = \begin{bmatrix} -2\omega_0 i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и определим матрицу

$$D(\varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{Qt}\left[S_{1,\alpha}(t\,,\alpha_0\,,\beta_0)\cos\varphi + S_{1,\beta}(t\,,\alpha_0\,,\beta_0)\sin\varphi\right]e^{-Qt}dt\,. \quad (43)$$

Теорема 18. *Пусть при некотором $\varphi = \varphi^*$, $0 \le \varphi^* < 2\pi$ матрица $D(\varphi)$ является негиперболической, при этом на некоторых интервалах $(\varphi^* - \delta_0\,,\varphi^*)$ и $(\varphi^*\,,\varphi^* + \delta_0)$ она является гиперболической с разным топологическом типом. Тогда через точку $(\alpha_0\,,\beta_0)$ проходит граничная кривая области гиперболичности системы (42) , при этом параметрически заданная прямая $\alpha = \alpha_0 + \delta cos\varphi^*\,,\beta = \beta_0 + \delta\sin\varphi^*$ является касательной к этой граничной привой.*

Изучение вопроса о построении кривых может выполняться по той же схеме, что и в случаях 1^0 – 2^0 .

§3. Исследование основных сценариев бифуркаций

В этой главе основное внимание будет уделено периодической системе (44):

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t,\varepsilon)]\,x + a(t\,,x\,,\varepsilon)\,, \quad x \in R^N \tag{44}$$

в которой $S(t,\varepsilon)$ – вещественная, T-периодическая по t матрица, обращающаяся в нулевую матрицу при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Нелинейность $a(t\,,x\,,\varepsilon)$ представима в виде:

$$a(t\,,x\,,\varepsilon) = a_2(t\,,x\,,\varepsilon) + a_3(t\,,x\,,\varepsilon) + \tilde{a}_4(t\,,x\,,\varepsilon)\,.$$

где $a_2(t\,,x\,,\varepsilon)$ и $a_3(t\,,x\,,\varepsilon)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(t\,,x\,,\varepsilon)$ является гладкой и удовлетворяющей соотношению: $\|\tilde{a}_4(t\,,x\,,\varepsilon)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \longrightarrow 0$ равномерно по $t\,,\varepsilon$.

Задача о бифуркации системы (44) может быть сведена к эквивалентной задаче о бифуркации малых решений операторного уравнения

$$x = V(\varepsilon)x + \nu_2(x,\varepsilon) + \nu_3(x,\varepsilon) + \tilde{\nu}_4(x,\varepsilon)\,,$$

$$\nu_j(x,\varepsilon) = V(\varepsilon)\int_0^T X^{-1}(\tau,\varepsilon)a_j(X(\tau,\varepsilon)x,\tau,\varepsilon)d\tau\,, \quad j = 2\,,3$$

где $V(\varepsilon)$ – матрица монодромии, приближенное построение которой можно осуществить по формулам из теоремы 2.

Напомним, что значение $\varepsilon = 0$ называют точкой бифуркации или бифуркационным значением параметра системы (44) если матрица A_0 имеет хотя бы одно собственное значение, вещественная часть которого равна 0 т.е. система (44) имеет негиперболическую точку равновесия $x = 0$.

Рассмотрим основные случаи негиперболичности:

$S1$. V_0 имеет простое собственное значение 1;

$S2$. V_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, $\theta_0 \neq \frac{1}{3}\,,\frac{1}{4}$ и $\theta_0 = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь.

$S3$. V_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $0 < \theta_0 < 1/2$ и θ_0 – иррационально.

В рассматриваемых случаях полагаем, что у матрицы V_0 отсутствуют другие собственные значения, модуль которых равен одному.

3.1. Случай S1: условия бифуркации вынужденных колебаний

Пусть матрица V_0 имеет простое единичное собственное значение. Коразмерность бифуркации в рассматриваемом случае равна 1 , поэтому естественно предполагать, что параметр ε является скалярным.

Основным сценарием в случае $S1$ является бифуркация вынужденных колебаний, которая связанна с возникновением в окрестности точки равновесия $x = 0$ системы (44) нестационарных T-периодических решений.

Заметим, что если ε_0 является точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (44), то матрица V_0 имеет собственное значение 1. Но, обратное утверждение не верно. Приведем один из вариантов достаточного условия бифуркации.

Обозначим далее через e и g^* собственные векторы матриц A_0 и A_0^*, отвечающие их нулевому собственному значению и нормированные в соответствии с равенством: $(e, g^*) = 1$.

В силу теоремы 4 при близких к ε_0 значениях ε матрица $V(\varepsilon)$ имеет простое вещественное собственное значение $\mu(\varepsilon)$, определяемое по формуле (20)

Теорема 19. *Если $\mu_1 \neq 0$, то ε_0 будет точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (44).*

Доказательство этой теоремы и других утверждений из этой главы подробно представлены в работах [4], [8], [20], [22].

3.2. Случай S2: условия бифуркации субгармонических колебаний

Рассмотрим случай S2: пусть матрица V_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $0 < \theta_0 < 1/2$ и $\theta_0 \neq 1/3\,, 1/4$ и $\theta_0 = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь.

В таком случае коразмерность бифуркации равна двум, поэтому далее будем считать, что параметр ε является двумерным, т.е. $\varepsilon = (\alpha\,, \beta)$, где α и β — скалярные параметры. Положим, что также $\varepsilon_0 = (\alpha_0\,, \beta_0)$.

В рассматриваемом случае возможны различные сценарии бифуркации, а именно: переход параметра ε через точку бифуркации ε_0 может влечь за собой возникновение или исчезновение периодических решения различных периодов kT , где $k \geq q$. Это происходит из-за того, что переход возможен по бесконечному числу различных направлений по различным прямым или кривым, проходящим через точку $(\alpha_0\,, \beta_0)$ на плоскости $(\alpha\,, \beta)$.

Приведем необходимое условие бифуркации субгармонических колебаний:

Теорема 20. *Пусть ε_0 является точкой бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (44), тогда матрица $V(\varepsilon)$ имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $0 < \theta_0 < 1/2$ и $\theta_0 \neq 1/3\,, 1/4$ и $\theta_0 = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь.*

Приведем один из вариантов достаточного условия бифуркации субгармонических колебаний и укажем те значения параметра ε, при которых возникают колебания периода qT.

Положим $B(\varepsilon) = V^q(\varepsilon)$; в силу условия S2 матрица $B(\varepsilon_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Обозначим через e, g и e^*, g^* соответствующие линейно независимые собственные векторы матриц $B(\varepsilon_0)$ и $B^*(\varepsilon_0)$, нормированные равенствами (24).

Основным в приводимом ниже достаточном признаке является число:

$$\Delta = det\left(\begin{bmatrix} (B_\alpha(\varepsilon_0)\,e, e^*) & (B_\beta(\varepsilon_0)\,e, e^*) \\ (B_\alpha(\varepsilon_0)\,e, g^*) & (B_\beta(\varepsilon_0)\,e, g^*) \end{bmatrix}\right). \tag{45}$$

Теорема 21. *Пусть матрица монодромии $V(\varepsilon)$ линейной системы (44) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $0 < \theta_0 < 1/2$ и $\theta_0 \neq 1/3\,, 1/4$ и $\theta_0 = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Пусть $\Delta \neq 0$, тогда $\varepsilon = (\alpha_0\,, \beta_0)$ является точкой бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (44).*

3.3. Случай S3: условия бифуркации квазипериодических колебаний

Рассмотрим третий случай: пусть матрица V_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $0 < \theta_0 < 1/2$ и θ_0 – иррационально.

Здесь, как и в случае S1, естественным будет предположение, что параметр ε является скалярным, так как коразмерность соответствующей бифуркации равна 1.

Рассмотрим этот случай на примере двумерной системы т.е.

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t, \varepsilon)]\,x + a(t\,, x\,, \varepsilon)\,, \quad x \in R^2\,. \tag{46}$$

Фазовый портрет системы (46) при всех значениях ε, близких к ε_0, в окрестности точки $x = 0$ содержит замкнутую кривую $\gamma(\varepsilon)$, которая ограничивает неподвижную точку $x = 0$.

Динамика системы (46) на кривой $\gamma(\varepsilon)$ может оказаться весьма сложной, содержащей семейство периодических (с большим периодом) и квазипериодических орбит. Следовательно основным сценарием бифуркационного поведения системы (44) при переходе скалярного параметра ε через точку бифуркации ε_0 является возникновение и исчезновение у нее длиннопериодических либо квазипериодических колебаний.

§4. Плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел

Для демонстрации методов, изложенных ранее, рассмотрим движение малой массы P_3 под действием ньютоновского притяжения тел P_1 и P_2. Положим, что тела P_1 и P_2 обладают конечной массой m_1 и m_2 соответственно, и движутся по эллиптической орбите с эксцентриситетом ε $(0 < \varepsilon < 1)$.

Тогда движение третьего тела P_3 в плоской ограниченной эллиптической задаче описывается неавтономной системой с 2π-периодической правой частью вида

$$\begin{cases} u_1' = u_3, \\ u_2' = u_4, \\ u_3' = 2u_4 + \rho(u_1 - \mu + \frac{(\mu-1)u_1}{({u_1}^2+{u_2}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu(u_1-1)}{((u_1-1)^2+{u_2}^2)^{\frac{3}{2}}}), \\ u_4' = -2u_3 + \rho(u_2 + \frac{(\mu-1)u_2}{({u_1}^2+{u_2}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu u_2}{((u_1-1)^2+{u_2}^2)^{\frac{3}{2}}}); \end{cases} \tag{47}$$

где $\rho = \dfrac{1}{1+\varepsilon\cos t}$, $\mu = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$.

Система (47) имеет пять постоянных решений: прямолинейные точки либрации L_1, L_2 и L_3; и треугольные точки либрации L_4 и L_5.

Точки либрации L_4 и L_5 образуют с телами P_0 и P_1 равносторонние треугольники. данные точки имеют координаты

$$L_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad L_5 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Первые три точки (L_1, L_2 и L_3) лежат на одной прямой (на оси Ou_1), проходящей через P_0 и P_1 и определяются уравнениями:

$$L_1 : \ u_1 < 0\,, u_1^5 - (\mu+2)u_1^4 + (2\mu+1)u_1^3 - (\mu-1)u_1^2 + 2(\mu-1)u_1 - \mu + 1 = 0$$

$$L_2 : \ 0 < u_1 < 1\,, u_1^5 - (\mu+2)u_1^4 + (2\mu+1)u_1^3 + (\mu-1)u_1^2 - 2(\mu-1)u_1 + \mu - 1 = 0$$

$$L_3 : \ u_1 > 1\,, u_1^5 - (\mu+2)u_1^4 + (2\mu+1)u_1^3 - (\mu+1)u_1^2 - 2(\mu-1)u_1 + \mu - 1 = 0$$

Вычислить зависимость u_1 от μ удается лишь приближенно. В частности, в случае L_2 :

$$u_1(\mu) = 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{27}\mu - \frac{58}{81}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{4}{3}} + o(\mu^{\frac{4}{3}})\,. \tag{48}$$

4.1. Устойчивость точек либрации

Рассмотрим вопрос об устойчивости точек либрации. Для изучения поведения системы (47) в окрестности точки либрации L_k перенесём начало координат системы (47) в точку либрации сделав замену $h = u - L_k$[1]. Получим новую систему вида

$$h' = A(\varepsilon, \mu, t)h + a(\varepsilon\,, \mu\,, t\,, h),\ \ h \in R^4,$$

Нелинейность $a(\varepsilon\,, \mu\,, t\,, h)$ начинается с квадратичных слагаемых.

При $0 \le \varepsilon < 1$ верно $\rho = 1/(1+\varepsilon\cos t) = 1-\varepsilon\cos t+\varepsilon^2\cos^2 t-\varepsilon^3\cos^3 t+\ldots$, поэтому матрица $A(\varepsilon, \mu, t)$ представима в виде:

$$A(\varepsilon, \mu, t) = A_0(\mu) + (-\varepsilon\cos t + \varepsilon^2\cos^2 t - \ldots)A_1(\mu) + \varepsilon^3 A_3(\varepsilon, \mu, t),$$

Рассмотрим линейное уравнение:

$$h' = A_0(\mu)h + (-\varepsilon\cos t + \varepsilon^2\cos^2 t)A_1(\mu)h + \varepsilon^3 A_3(\varepsilon, \mu, t)h, h \in R^4\,. \tag{49}$$

Здесь

$$A_0(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1(\mu) & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a_2(\mu) & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2(\mu) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3(\varepsilon, \mu, t) = -\cos^3 t/(1 + \varepsilon\cos t)A_1(\mu)\,.$$

Рассмотрим задачу (49) в круговой постановке ($\varepsilon = 0$). В этом случае топологический тип определяется свойствами матрицы $A_0(\mu)$.

[1] Для простоты сохраним обозначение L_k за соответствующим постоянным решением системы.

Рассмотрим задачу в окрестности прямолинейной точки либрации L_2 :

$$a_1(\mu) = 1 - \frac{2\mu}{|u_1 - 1|^3} - \frac{2(\mu - 1)}{|u_1|^3}\,,\ a_2(\mu)1 + \frac{\mu - 1}{|u_1|^3} + \frac{\mu}{|u_1 - 1|^3}\,,$$

где $u_1(\mu)$ определяется по формуле (48). Собственные значения матрицы $A_0(\mu)$:

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{r+s}}{\sqrt{2}}\,, \quad \lambda_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{r-s}}{\sqrt{2}}\,,$$

где $s = \sqrt{(a_1(\mu) - 4)^2 + (a_2(\mu) - 4)^2 - 2(a_1(\mu)a_2(\mu) + 8)}, r = a_1(\mu)+a_2(\mu)-4$.

Несложно показать, что $r - s < 0$ при любых малых μ. Тогда матрица $A_0(\mu)$ имеет ровно два чисто мнимых собственных значений: $\pm\omega_0 i$ и два вещественных собственных значений, поэтому прямолинейная точка либрации L_2 при всех малых μ и ε является неустойчивой. Все приведенные выше выводы верны и для точек L_1 , L_3 с соответствующими модификациями.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости треугольных точек либрации. Для определенности будем рассматривать точку L_4 . Здесь матрицы $A_0(\mu)$ и $A_1(\mu)$ могут быть записаны в виде:

$$A_0(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4} & 0 & 2 \\ \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4} & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_1(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $A_0(\mu)$ удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0\,.$$

Поэтому имеет место 3 различные ситуации:

1) если $\mu \in (\mu^*, 1-\mu^*)$, тогда решение $h = 0$ является гиперболической неустойчивой точкой равновесия системы (49). Действительно, собственные значения матрицы A_0 будут комплексными числами: два из них имеют положительные вещественные части, а два других — отрицательные вещественные части.

2) в случае, если $\mu = \mu^*$ или $\mu = 1 - \mu^*$ все собственные значения будут чисто мнимыми и кратными: $\lambda_1 = \lambda_3 = \dfrac{i}{\sqrt{2}}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}$. Решение $h = 0$ является негиперболической точкой равновесия системы (49).

3) если $\mu \in (0, \mu^*) \cup (1 - \mu^*, 1)$, тогда собственные значения будут чисто мнимыми и иметь вид:

$$\lambda_{1,2,3,4}(\mu) = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}i}\,.$$

Решение $h = 0$ также является негиперболической точкой равновесия системы (49).

4.2. Границы области устойчивости треугольных точек либрации

Задача об устойчивости точек либрации трех тел была рассмотрена еще в 1978 г. Маркеевым А. П. [14]. Он разработал способ построения границы устойчивости плоской ограниченной задачи трех тел в круговой и эллиптической постановках. Немного позже появились работы по исследованию устойчивости треугольных решений аналитическими способами в плоскости (см., например, работу Нейфеха и Кэмила [2]).

Исследования в указанном направлении активно продолжаются и по сей день, так, например, в 2002 году T. Kovacs предложил метод расхода энергии [1]. В 2015 - 2018 годах были предложены различные способы построения граничных кривых изложенные в работах [3], [7], [9], [20], [21].

В настоящей работе предлагается новый способ построения границ областей устойчивости, основанный на приближенном построении матрицы монодромии и формулах теории возмущения. Приводимые ниже формулы были получены с помощью пакета Matlab, т.е. являются точными.

Приведем основные результаты работы относительно исследования областей устойчивости системы (47). Для этого построим плоскость параметров μ, ε системы (47) и определим прямоугольник

$$\Pi = \{(\mu, \varepsilon) : 0 < \mu < 1, 0 < \varepsilon < 1\}.$$

На Рис.1. изображены области устойчивости и неустойчивости системы (47) для малых значений μ. Заштрихованная часть — есть область устойчивости треугольных точек либрации, граница области образована тремя непрерывными кривыми Γ_1, Γ_2, Γ_3. Точки μ_0 и μ^* — точки пересечения кривых Γ_1, Γ_2, Γ_3 с осью $O\mu$.

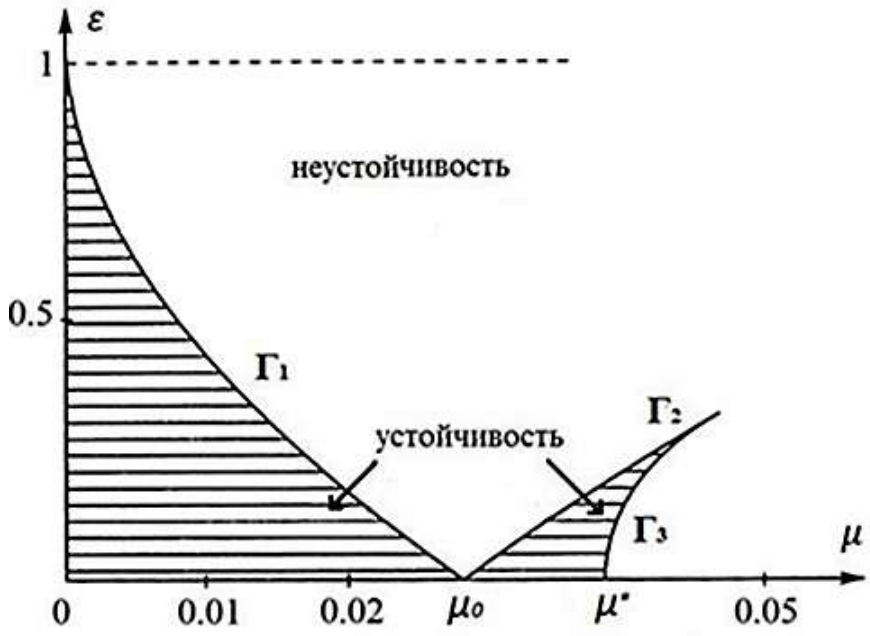


Рисунок 1. Область устойчивости треугольных точек либрации.

Здесь

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.0285..., \qquad \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.0385... \tag{50}$$

Теорема 22. *Для любого значения параметра μ из интервала $(\mu^*, 1 - \mu^*)$ найдется малое $\delta > 0$ такое, что при всех $0 \le \varepsilon < \delta$ треугольные точки либрации системы (47) неустойчивы.*

Доказательство. Действительно, мультипликаторы p системы (49) при $\varepsilon = 0$ связаны с собственными значениями матрицы $A_0(\mu)$ равенством $p = e^{2\pi\lambda}$. Следовательно топологический тип треугольных точек либрации системы (49) при $\varepsilon = 0$ равен $(2\,,0\,,2)$ поэтому треугольные точки либрации системы (47) являются гиперболическими и неустойчивыми в линейном приближении. Отсюда заключаем, что треугольные точки либрации системы (49) будут неустойчивыми и в общей нелинейной постановке при $\mu \in (\mu^*, 1-\mu^*)$, и при всех малых значениях $\varepsilon \geq 0$.

Теорема 23. *Если $\mu = \mu^*$ или $\mu = 1-\mu^*$, то найдется малое $\delta > 0$ такое, что при всех $0 \leq \varepsilon < \delta$ треугольные точки либрации системы (49) неустойчивы.*

Теорема 24. *Для любого $\mu \in (0,\mu^*) \cup (1-\mu^*, 1)$, $\mu \neq \mu_0$, $\mu \neq 1-\mu_0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $0 \leq \varepsilon < \delta$ треугольные точки либрации системы (49) устойчивы в линейном приближении.*

Доказательство. Топологический тип треугольных точек либрации системы (49) при $\varepsilon = 0$ в условиях теорем 23 и 24 равен $(0\,,4\,,0)$, а следовательно, точки являются негиперболическими.

Рассмотрим случай, когда $\mu \in (0,\mu^*)$ (случай $\mu \in (1-\mu^*, 1)$ рассматривается аналогично). мультипликаторы системы (49): $p_{1,2}(\mu) = e^{\pm 2\pi\omega_1(\mu)i}$, $p_{3,4}(\mu) = e^{\pm 2\pi\omega_2(\mu)i}$,

$$\omega_{1,2}(\mu) = \sqrt{(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)})}\,.$$

Очевидно, что $0 < \omega_1(\mu) < \frac{1}{\sqrt{2}} < \omega_2(\mu) < 1$, тогда числа $p_{1,2}(\mu)$ имеют вид $e^{\pm\varphi i}$ при $\varphi \in \left(0, \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)$ и, следовательно, при $\omega_1 = \frac{1}{2}$: $p_1 = p_2 = -1$. В свою очередь числа $p_{3,4}(\mu)$ являются числами вида $e^{\pm\varphi i}$ при $\varphi \in (\frac{2\pi}{\sqrt{2}}, 2\pi)$, это означает, что $p_{3,4}(\mu)$ не равны -1 или 1 ни при каком $\mu \in (0,\mu^*)$. Для остальных значений $\mu \in (0,\mu^*)$ и $\varepsilon = 0$ мультипликаторы p системы (49) являются простыми, невещественными и такими, что $|p| = 1$.

Система (49) является гамильтоновой, поэтому справедливость теоремы следует из свойств гамильтоновых систем. Более подробно этот вопрос изучен в книгах [20], [21].

На основе выше сказанного верна

Теорема 25. *Для любого значения параметра μ из интервала $(0, \mu^*)$ и малых ε граница области устойчивости системы (47) состоит в точности из трёх гладких кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3, первые две из которых выходят на ось μ в плоскости параметров (μ, ε) в точке $\mu = \mu_0$, а третья-в точке $\mu = \mu^*$.*

Первые кривые Γ_1 и Γ_2 могут быть представимы в виде монотонных функций

$$f_1(\delta) = -\frac{\sqrt{3456}}{11}\delta + \frac{36}{121}\sqrt{33}\left(67\sqrt{33} - 643\right)\delta^2 + \phi_1(\delta)$$

и

$$f_2(\delta) = \frac{\sqrt{3456}}{11}\delta + \frac{36}{121}\sqrt{33}\left(67\sqrt{33} + 643\right)\delta^2 + \phi_2(\delta),$$

определенных и монотонных на промежутках $(-\mu_0, 0]$ и $[0, \mu_3 - \mu_0)$ соответственно. Здесь $\delta = \mu - \mu_0$, нелинейные функции $\phi_j(\delta)$ удовлетворяют соотношениям: $\phi_j(\delta) = O(\delta^3)$ при $\delta \to 0$, $j = 1, 2$.

Третья кривая Γ_3 может быть представима в виде монотонной на промежутке $[0, \mu_3 - \mu_0)$, функции

$$f_3(\varsigma) = \sqrt[4]{\frac{691}{4}}\sqrt{\varsigma} + \phi_3(\varsigma),$$

где $\varsigma = \mu - \mu^*$, нелинейность $\phi_3(\varsigma)$ удовлетворяет соотношению: $\phi_3(\varsigma) = O(\varsigma)$ при $\varsigma \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим доказательство утверждения теоремы относительно существования гладкой кривой Γ_3, начинающейся в точке $(\mu^*, 0)$ и состоящей из граничных точек области устойчивости системы (49).

Обозначим через $X(\mu, \varepsilon)$ – матрицу монодромии системы (49), тогда, при близких к μ^* значениях μ и малых ε граничные точки (μ, ε) области

устойчивости системы (47) являются решениями уравнения

$$F(\mu, \varepsilon) = det(X(\mu, \varepsilon) + I) = 0. \tag{51}$$

Действительно, мультипликаторы системы (49) — это собственные значения матрицы $X(\mu, \varepsilon)$. Поэтому решения уравнения (51) — это те (μ, ε), при которых система (49) имеет мультипликатор -1. Пара $(\mu^*, 0)$ является решением уравнения (51), так как при $\mu = \mu^*$ и $\varepsilon = 0$ система (49) имеет мультипликаторы $p_1 = p_2 = -1$, $p_3 = p_4 = e^{\pm\pi\sqrt{3}i}$. Из свойств гамильтоновых систем следует, что близкая к $(\mu^*, 0)$ точка (μ, ε) будет граничной точкой области устойчивости системы (49) тогда и только тогда, когда при $\mu = \mu^*$ система (49) имеет мультипликатор -1.

4.3. Основные этапы построения границы Γ_3 области устойчивости треугольных точек либрации

Рассмотрим построение кривой Γ_3 (кривые Γ_1 и Γ_2 строятся аналогично), основываясь на методах, изложенных в главах 1-2.

Построим касательную K_3 к кривой Γ_3, в плоскости (μ, ε) данная прямая проходит через точку $(\mu^*, 0)$, образуя с осью μ угол φ . Зафиксируем число φ, $0 < \varphi < \pi$, и рассмотрим прямую, заданную уравнениями в параметрической форме:

$$\mu = \mu^* + \delta \cos\varphi, \;\; \varepsilon = \delta \sin\varphi, \tag{52}$$

здесь δ – малый параметр.

Подставив (52) в уравнение (49), перейдём к зависящему от малого параметра δ и угла φ уравнению:

$$h' = (A_0 + \delta S_1(t, \delta) + \delta^2 S_2(t, \delta, \varepsilon_2, \mu_2))h + \delta^3 S_3(t, \delta, \varphi, \varepsilon_2, \mu_2)h, h \in R^4$$

Построим матрицу Q из собственных векторов и произведём замену $h = Qy$, получим равносильное уравнение

$$y' = (\hat{A}_0 + \delta \hat{P}_1(t, \varphi) + \delta^2 \hat{P}_2(t, \varphi, \varepsilon_2, \mu_2) + \delta^3 \hat{P}_3(t, \delta, \varphi, \varepsilon_2, \mu_2))y, y \in C^4,$$

где

$$\hat{A}_0 = Q^{-1}A_0Q = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_1(t,\varphi) = \cos\varphi\hat{B}_0 - \sin\varphi\cos t\hat{A}_1, \quad \text{где} \quad \hat{A}_1 = Q^{-1}A_1Q, \quad \hat{B}_0 = Q^{-1}B_0Q. \tag{53}$$

По формулам теории возмущения определим: матрица монодромии $V(\delta,\varphi)$ системы (49) при каждом малом δ имеет простые собственные значения

$$e^{\pm 2\pi i/\sqrt{2}} + \delta\frac{1}{16}\left(\pm 3\sqrt{138}\cos\varphi \pm \sqrt{6}\sqrt{-63\cos^2\varphi + 32\sqrt{69}\cos\varphi\sin\varphi}\right)$$

Отсюда заключаем, что изменение характера устойчивости системы (47) происходит при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, т.е касательная $К_3$ к кривой $Г_3$ проходит через $(\mu^*, 0)$ и образует угол 90 с осью $O\mu$.

В дальнейшем кривую $Г_3$ будем искать в параметрической форме

$$\mu = \mu^* + \mu_2\delta^2 + O(\delta^3), \ \ \varepsilon = \delta\,,$$

проходящую через точку $(\mu^*, 0)$ и образующую с осью $O\mu$ угол 90.

Для определения последующих коэффициентов предлагается построить следующее приближение матрицы монодромии $V(\delta)$ системы (49). Далее изучая собственные значения полученной матрицы определим число $\mu_2 = \dfrac{2}{3\sqrt{69}}$ при переходе через которое изменяется топологический тип матрицы $V_0 + \delta V_1 + \delta^2 V_2$.

4.4. Спектральные свойства линеаризованной задачи

Приведем некоторые утверждения, относительно спектральных свойств линейного уравнения (49). Эти утверждения используются ниже при изучении возможных сценариев бифуркаций, но они представляют и самостоятельный интерес.

На Рис. 2 для иллюстрации схематично изображено расположение мультипликаторов системы (49), когда параметры ε , μ располагаются на граничных кривых Γ_1 (Рис. 2а), Γ_2 (Рис. 2б) и Γ_3 (Рис. 2в). Стрелки на окружности показывают направление движения мультипликаторов при увеличении параметра ε.

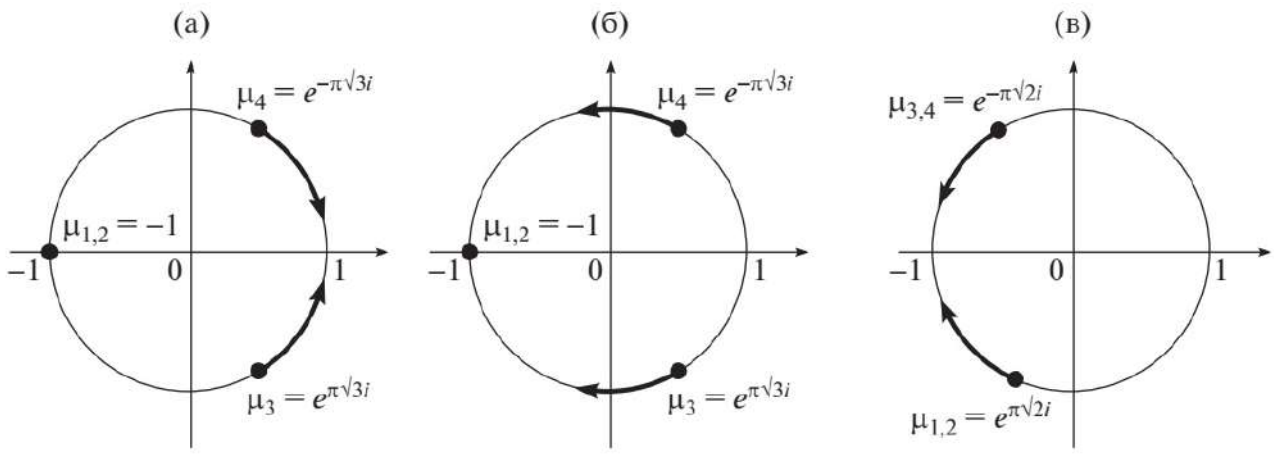


Рисунок 2. Расположение мультипликаторов линеаризованной системы (49).

Использование математических символьных пакетов для построения граничных кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3 позволяет определить свойства спектра линеаризованной задачи (49) на ее граничных кривых, которые важны, например, при изучении задач о бифуркациях в системе (47). Имеет место следующее утверждение

Теорема 26. *При любых значениях* $(\mu\,,\varepsilon)$ *на граничных кривых* Γ_1 *и* Γ_2 *линейная система (49) имеет мультипликатор* -1 *кратности* 2.

Для всех точек $(\mu\,,\varepsilon)$ *граничной кривой* Γ_3 *линейная система (49) имеет пару мультипликаторов вида* $e^{2\pi\varphi i}$ *кратности* 2, *где* $1 - 1/\sqrt{2} \le \varphi \le 1/2$.

4.5. Бифуркации в окрестностях треугольных точек либрации

Так как в качестве точек бифуркации рассматриваются значение $(0\,,\mu)$, где $\mu \in (0\,,1)$ то свойства гиперболичности (негиперболичности) точки равновесия $h = 0$ системы (47) для указанных значений параметров $(\varepsilon\,,\mu)$ связаны с аналогичными свойствами для плоской ограниченной круговой задачи

$$h' = A_0(\mu)h + a(\mu\,,h)\,, h \in R^4\,,$$

здесь $a(\mu\,,h) = O(\|h\|^2)$ при $(\|h\| \longrightarrow 0\,.$

Ранее было оговорено, что для круговой задачи следует различать 3 различные ситуации:

Рассмотрим сначала первый случай т.е. пусть $\mu \in (\mu^*, 1-\mu^*)$ тогда тогда при всех малых $\varepsilon > 0$ точка равновесия $h = 0$ системы (47) является гиперболической.

Во втором и третьем случаях, когда $\mu = (0, \mu^*]$ либо $\mu = [1-\mu^*, 1)$ точка равновесия $h = 0$ системы (47) негиперболической, значение $(0\,,\mu)$ параметра μ является точкой бифуркации системы (47).

Рассмотрим основные сценарии бифуркаций системы (47) в случае 3) т.е. в случае, если $\mu \in (0, \mu^*) \cup (1-\mu^*, 1)$, тогда собственные значения будут чисто мнимыми и иметь вид: $\lambda_{1,2} = \pm\omega_1(\mu)i\,,\ \lambda_{3,4} = \pm\omega_2(\mu)i\,,$ где

$$\omega_1(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}\,, \qquad \omega_2(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}$$

Рассмотрим различные ситуации, которые возникают в зависимости от соотношения $\dfrac{\omega_1(\mu)}{\omega_2(\mu)}$.

Случай $S1$) Пусть сначала $\omega_1(\mu)$ и $\omega_2(\mu)$ – иррациональны. В этом случае основным сценарием является бифуркация квазипериодических колебаний: при переходе векторного параметра $(\varepsilon\,,\mu)$ через точку $(0\,,\mu_0)$ в окрестности точки либрации L_4 у системы (47) могут возникать или исчезать длиннопериодические или квазипериодические колебания.

Случай $S2$) Пусть $\omega_1(\mu)$ и $\omega_2(\mu)$ – рациональны. В этом случае имеет место резонансная ситуация, здесь возможны различные сценарии бифуркации, связанные с возникновением резонансных торов в фазовом пространстве системы (47).

Случай $S3$) Пусть $\omega_1(\mu)$ – рационально, но $\omega_2(\mu)$ – иррационально. В этом случае основным сценарием является бифуркация субгармонических колебаний: при переходе векторного параметра $(\varepsilon\,,\mu)$ через точку $(0\,,\mu_0)$ в окрестности точки либрации L_4 у системы (47) могут возникать или исчезать периодические решения периодов $2\pi q$.

Теорема 27. *Пусть точка* $(0\,,\mu_0)$ *является точкой бифуркации субгармонических* $2\pi q$*-периодических* $(q \geq 2)$ *колебаний системы* (47)*, тогда* μ_0 *является одним из корней уравнений*

$$\omega_1(\mu) = \frac{p}{q} \text{ или } \omega_2(\mu) = \frac{p}{q} \text{ где } q \geq 2 \text{ и } \left|\frac{p}{q}\right| < 1$$

при некотором p .

Замечание. *Число* $\mu_k = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{27k^4 - 16k^2 + 16}}{6\sqrt{3}k^2}$ *, где* $k \geq 2$ *, удовлетворяет необходимому условию бифуркации субгармонических* $2\pi q$*-периодических* $(q \geq 2)$ *колебаний системы* (47).

Заключение

В данной выпускной квалификационной работе было получено приближенное построение матрицы монодромии периодической системы вида

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t, \varepsilon)]\, x\,, \quad x \in R^N\,, \tag{54}$$

рассмотрена задача о приближенном построении мультипликаторов периодической системы (54) в следующих важных с точки зрения приложений случаях:

1^0. Матрица A_0 имеет простое собственное значение 0;

2^0. Матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, причем $\omega_0 T \neq \pi k$ при целых k;

3^0. Матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $T\omega_0 = \pi k_0$ при некотором целом k_0.

Во всех этих случаях, были предложены методы построения границ областей устойчивости, исследованы основные сценарии бифуркаций.

Методы, описанные в работе, были применены к плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел, а именно, были

- изучены вопросы устойчивости точек либрации в зависимости от параметров ε и μ;
- построены граничные кривые области устойчивости треугольных точек либрации;
- рассмотрены основные сценарии бифуркации в окрестностях треугольных точек либрации.

Список использованных источников и литературы

[1] Kovacs T. Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. Mon.*N*ot. R. Astron. Soc. 000, 1-7. 2002.

[2] Nayfeh A.H., Kamel A.A. Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of the three bodies , AIAA Journal, 8, No. 2 (1970).

[3] Аксенов С. А. [и др.] Компьютерное моделирование движения космического аппарата в окрестности точки либрации L2 системы Солнце-Земля - М.: ЦНИИмаш, 2015. - 55 с.

[4] Вышинский А. А., Ибрагимова Л. С., Муртазина С. А., Юмагулов М. Г., Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах, Уфимск. матем. журн., 2:4 (2010), 3–26

[5] Демиденко, Г.В., Матвеева И. И., Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами , Сиб. матем. журн., 42:2 (2001), 332–348; Siberian Math. J., 42:2 (2001), 282–296

[6] Демидович Б.П. Лекции по математический теории устойчивости. - М.: Наука, 1967.

[7] Евтеев В.П. Периодические решения плоской эллиптической задачи трех тел // Космические исследования. – 1988. – Т. 26. – Вып. 5. – С. 785–787.

[8] Ибрагимова Л. С., Мустафина И. Ж., Юмагулов М. Г., Асимптотические формулы в задаче построения областей гиперболичности и устойчивости динамических систем, Уфимск. матем. журн., 8:3 (2016), 59–81; Ufa Math. J., 8:3 (2016), 58–78

[9] Икромов А. О 6π-периодических решениях плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел //Астрон. журн. – 1984. – Т. 61. – Вып. 4. – С. 800–805.

[10] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1975. 740 с.

[11] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. М.: МЦНМО. 2005. 464 с.

[12] Ляпунов А.М., Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Сбор. соч., т. 1. - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954 дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972. 720 с.

[13] Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. — Физматлит М, 2009. — 399 с.

[14] Маркеев А.П., Точки либрации в небесной механике и космодинамике - М.: Наука, 1978, 312 с.

[15] Маршал К. Задача трех тел. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 640 с.

[16] Перов А. И. Об одном критерии устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Автомат. и телемех., 2013, № 2, 22–37; Autom. Remote Control, 74:2 (2013), 183–195

[17] Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука. 1971. 288 с.

[18] Семенов М. Е., Хатиф З. , Решетова О. О. , Демчук А. А., Мелешенко П. А. Модель динамики обратного маятника с гистерезисным управлением // Журнал «Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика»

[19] Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1964. - 477 с.

[20] Юмагулов М. Г., Беликова О. Н., Бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации задачи трех тел, Изв. вузов. Матем., 2010, № 6, 82–89; Russian Math. (Iz. VUZ), 54:6 (2010), 69–74.

[21] Юмагулов М.Г., Белова А.С., Алгоритмы построения границ областей устойчивости линейных гамильтоновых систем с помощью пакета Matlab // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. №4.

[22] Юмагулов М. Г., Муртазина С. А., Исследование локальных бифуркаций вынужденных колебаний динамических систем , Автомат. и телемех., 2012, № 4, 83–98; Autom. Remote Control, 73:4 (2012), 665–676

[23] Юмагулов М. Г., Мустафина И. Ж. , Ибрагимова Л. С. , Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических динамических систем , Автомат. и телемех., 2017, № 10, 74–89; Autom. Remote Control, 78:10 (2017), 1790–1802.

[24] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука. 1972. 720 с.

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Боголеповой
Елены Вадимовны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Двумерные лоренцевы орбифолды постоянной кривизны с существенной группой изометрий» являются: Теоремы 7, 9, Замечание 4, предложение 6.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, arxiv.org по следующим ключевым словам: группа изометрий лоренцевых орбифолдов, isometry group of Lorentz orbifolds, в выдаче поисковиков было исследовано 6 статей, 3 монографии (см. список литературы выпускной квалификационной работы) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. Наличие работ [2-3], [16] подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Жуковой Ниной Ивановной, профессором кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ -НН.
- Получена рецензия от кандидата физико-математических наук, доцента А. В. Багаева.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 15.06.2020. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись

Боголепова Елена
Вадимовна 27 мая 2020 г.
г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”
НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ

Факультет математики, информатики и компьютерных наук

Боголепова Елена Вадимовна

Двумерные лоренцевы орбифолды постоянной кривизны с существенной группой изометрий

Выпускная квалификационная работа - БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
по направлению подготовки 01.03.01 Математика
образовательная программа “Математика”

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент
Андрей Владимирович Багаев

Научный руководитель
д.ф.-м.н.,проф.
Нина Ивановна Жукова

Нижний Новгород 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ГЛАВА 1 Основные определения и факты **5**

1.1 Псевдоримановы и римановы многообразия 5

1.2 Действия групп на многообразии 6

1.3 Полнота риманова многообразия 7

1.4 Полнота псевдориманова многообразия 8

ГЛАВА 2 Пространство Де Ситтера **10**

2.1 Определение пространства Де Ситтера 10

2.2 Регулярные накрывающие отображения 12

2.3 Группа изометрий пространства Де Ситтера 16

ГЛАВА 3 Псевдоримановы орбифолды и группы их изометрий **20**

3.1 Определение орбифолда 20

3.2 Группа изометрий лоренцева орбифолда, накрытого пространством Де Ситтера 23

3.3 Примеры лоренцевых орбифолдов с несущественной группой изометрий 37

ГЛАВА 4 Классификация лоренцевых поверхностей и орбифолдов **40**

4.1 Классификация лоренцевых поверхностей постоянной кривизны 40

4.2 Классификация лоренцевых орбифолдов постоянной кривизны 44

4.2.1 Лоренцевы орбифолды постоянной кривизны с бесконечной фундаментальной группой 44

4.2.2 Лоренцевы орбифолды постоянной кривизны с конечной фундаментальной группой 45

4.3 Заключение 47

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 48

Введение

Лоренцева геометрия существенно отличается от римановой. Известно, что любой гладкий орбифолд допускает риманову метрику, что не верно для лоренцевой метрики. Существование лоренцевой метрики на орбифолде накладывает ограничения на его структуру. Орбифолды можно рассматривать как многообразия с особенностями.

Орбифолды размерности n являются связными хаусдорфовыми топологическими пространствами, локально представляющими собой фактор-пространства $\mathbb{R}^n/\Gamma$ арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ по конечной группе диффеоморфизмов Γ; причем группа Γ не фиксирована и может меняться при переходе от одной точки к другой. Орбифолды естественным образом образуют категорию $\mathcal{O}rb$ [1].

Орбифолды находят применение в различных областях математики и физики. Они возникают в теории слоений как хаусдорфовы пространства компактных слоений. У. Тёрстон применил классификацию двумерных компактных орбифолдов при классификации замкнутых трехмерных многообразий [5]. Орбифолды используются в качестве пространств распространения струн в теоретической физике.

Целью данной квалификационной работы является исследование структуры некомпактных гладких двумерных полных лоренцевых орбифолдов постоянной кривизны с существенной группой изометрий.

Компактные двумерные плоские лоренцевы орбифолды были исследованы в работе Н.И. Жуковой и Е.А. Рогожиной [9], где доказано, что существует единственный собственный орбифолд, названный „Подушкой“, накрытый тором, допускающий плоские лоренцевы метрики с существенной группой изометрий.

Структура некомпактных лоренцевых 2-орбифолдов нулевой кривизны была изучена в совместной работе автора и научного руководителя [9]. Мы показали, что существует только два (с точностью до изоморфизмов в категориии орбифолдов) гладких двумерных некомпактных орбифолда, допускающих полные плоские лоренцевы метрики с существенной группой изометрий.

Они представляют собой плоскость $\mathbb{R}^2$ и орбифолд $\mathbb{R}^2/\Psi$, полученный факторизацией плоскости $\mathbb{R}^2$ по группе изометрий Ψ, изоморфной $\mathbb{Z}_2$. Результаты были доложены на XVII Всероссийской молодежной школе-конференции “Лобачевские чтения-2018” [8].

Основным результатом данной работы является классификация с точностью до изометрий полных лоренцевых орбифолдов постоянной положительной кривизны в категории лоренцевых орбифолдов и классификация указанных орбифолдов с точностью до изоморфизмов категории гладких орбифолдов. Из этой классификации следует:

1. Существует только четыре двумерных гладких орбифолда, допускающие полную лоренцеву геометрию постоянной кривизны с существенной группой изометрий.

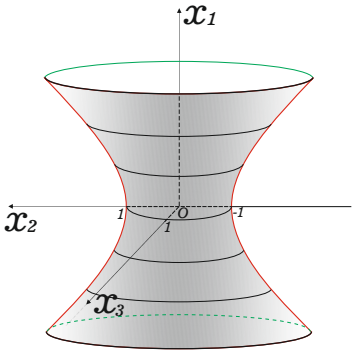


Рисунок 1 — $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_1, g) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

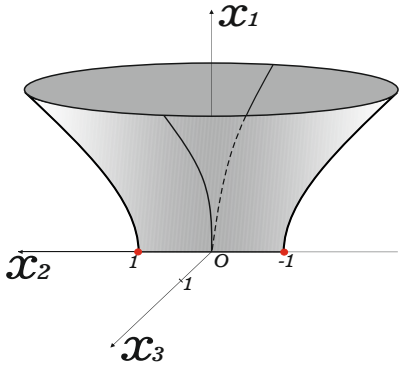


Рисунок 2 — $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_2, g) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

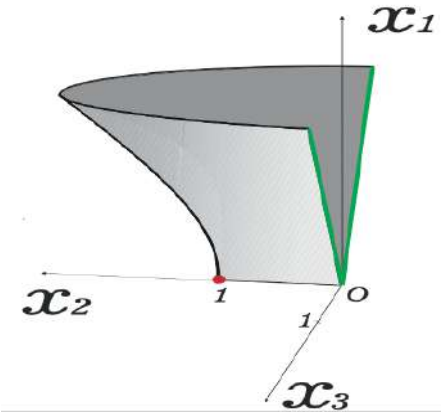


Рисунок 3 — $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_3, g) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2$

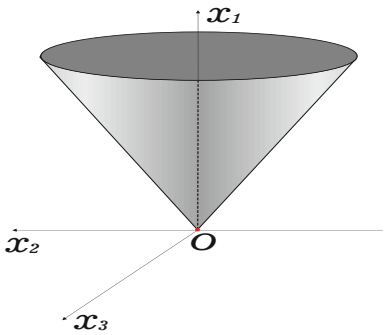


Рисунок 4 — $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_2, g) \cong \widetilde{A_1(t)} \times \mathbb{Z}_2$

2. При любом фиксированном K, $K > 0$, существует счетное множество попарно не изоморфных двумерных лоренцевых орбифолдов постоянной кривизны K, имеющих существенную группу изометрий.

ГЛАВА 1

Основные определения и факты

1.1 Псевдоримановы и римановы многообразия

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M. Напомним, что билинейная форма g на называется *невырожденной*, если из того, что $g(X_0, X) = 0$, $X_0 \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M)$, следует, что $X_0 = 0$.

Обозначим через $\pi : TM \to M$ проекцию касательного расслоения к многообразию M.

Определение 1. *Пусть M — гладкое n-мерное многообразие. Псевдоримановой метрикой на многообразии M называется гладкая симметричная невырожденная билинейная форма g на M. Если при этом форма g положительно определена, то g называется римановой метрикой. Многообразие M, наделенное псевдоримановой метрикой g, то есть пара (M, g), называется псевдоримановым многообразием. Если g – псевдориманова метрика на M, то пара (M, g) называется псевдоримановым многообразием. Тензор, соответствующий билинейной форме g, называется метрическим тензором псевдориманова многообразия (M, g) и обозначается также через g.*

Определение 2. *Пусть (M, g) – псевдориманово многообразие. Тогда для каждой точки $p \in M$ сужение $g_{|_p} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ является невырожденным скалярным произведением сигнатуры $(s, n-s)$, которое в карте (U, φ) с локальными координатами x^i, $i = \overline{1, n}$, задается следующим образом:*

$$g = -\sum_{i=1}^{s} dx^i \otimes dx^i + \sum_{j=s+1}^{n} dx^j \otimes dx^j,$$

где 1-формы dx^i образуют базис сопряженного векторного пространства к касательному векторному пространству T_pM в произвольной точке $p \in U$. Пара $(s, n-s)$ называется сигнатурой псевдоримановой метрики g.

Псевдориманово многообразие M с заданной на нем псевдоримановой метрикой g называется *псевдоевклидовым пространством* с сигнатурой $(s, n-s)$ и обозначается через $\mathbb{E}^n_s$ или $\mathbb{R}^n_s$. В частности, $\mathbb{R}^n_1$ есть n-мерное *пространство Минковского.*

Определение 3. *Псевдориманова метрика g сигнатуры $(1, n-1)$ называется лоренцевой метрикой, а многообразие M, наделенное лоренцевой метрикой g, то есть пара (M, g), называется лоренцевым многообразием.*

Пусть M — гладкое лоренцево многообразие. Группа всех изометрий лоренцева многообразия называется *полной.* Обозначим ее через $\mathfrak{J}(M, g)$, где g — лоренцева метрика на M.

1.2 Действия групп на многообразии

Напомним основные понятия о действии групп на многообразии. Пусть G — группа, M — гладкое многообразие.

Говорят, что группа G *действует на* M, если задано отображение $G \times M \to M$ такое, что выполняются следующие два условия:
1) $e(x) = x \quad \forall\, x \in M$, где e — единица группы G;
2) $h(g(x)) = (h \cdot g)(x)$ для любых $h,\ g \in G,\ x \in M$.

Определение 4. *Действие группы G на M называется свободным, если для любых различных $g, h \in G$ и любого $x \in M$ выполняется $g(x) \neq h(x)$, или, эквивалентно, если $g \in G$ не имеет неподвижных точек.*

Определение 5. *Действие группы G на M называется транзитивным, если для любых $x, y \in M$ существует элемент $g \in G$ такой, что $g(x) = y$.*

Определение 6. *Если для любого компактного подмножества K в M, множество всех $g \in G$, для которых пересечение $K \cap g(K)$ непусто, является конечным, то такое действие группы G на M называется вполне разрывным.*

1.3 Полнота риманова многообразия

Пусть (M, g) — n-мерное риманово многообразие.

Напомним, что под дифференцируемой кривой γ класса C^k в M, где $k \in \mathbb{N}$, понимается дифференцируемое отображение $\gamma : [a, b] \to M$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, класса C^k. Дифференцируемая кривая класса C^k при $k \geqslant 1$ называется также гладкой кривой.

Длиной кривой $\gamma : [a, b] \to M$ называется число

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b ||\dot{\gamma}(t)||dt.$$

Пусть (U, φ) – произвольная карта многообразия M и $\gamma : [a, b] \to U$ гладкая кривая, тогда

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b (g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t))^{1/2}dt,$$

где g_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, — компоненты метрического тензора, а $\gamma^i(t)$ — координаты кривой $\gamma(t)$ в карте (U, φ).

Любое риманово многообразие (M, g) является метрическим пространством (M, d) с функцией расстояния d, определенной следующим образом. Пусть x и y – любые точки из M. Обозначим через $A(x, y)$ множество всех кусочно дифференцируемых кривых класса C^k в M, соединяющих x с y. Тогда расстояние $d(x, y)$ между точками x и y определяется как точная нижняя грань длин кривых из $A(x, y)$, т.е.

$$d(x, y) = \inf_{\gamma \in A(x,y)} L(\gamma).$$

Напомним, что векторное поле вдоль кривой γ является полем параллельного переноса, если его ковариантная производная вдоль γ тождественно равна нулю.

Определение 7. *Кривая γ в римановом многообразии называется геодезической линией, если любой вектор касательной к кривой γ в какой-либо ее точке при параллельном переносе вдоль γ остается вектором, касательным*

к этой кривой.

Определение 8. *Аффинным параметром t для геодезической γ называется любой параметр для γ такой, что касательный вектор $\dot{\gamma(t)}$ геодезической γ переносится вдоль нее параллельно для любого значения этого параметра.*

Следующая теорема [14] показывает эквивалентность метрической и геодезической полноты риманова пространства.

Теорема 1. ***(Хопфа — Ринова)*** *Пусть (M, g) — связное риманово многообразие с функцией расстояния d. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

1) (M, d) — полное метрическое пространство;

2) для каждой точки $p \in M$ экспоненциальное отображение $\exp_p : T_p \to M$ определено на всем касательном пространстве T_p;

3) каждое подмножество многообразия , ограниченное и замкнутое в метрическом пространстве (M, d), компактно.

Определение 9. *Риманово многообразие (M, g) называется полным, если выполняется любое условие теоремы Хопфа-Ринова.*

Таким образом, каждое из условий 1)-3) теоремы Хопфа-Ринова влечет выполнение теоремы Гильберта.

Следствие 1. ***(Теорема Гильберта)*** *Любые две точки p, q связного полного риманова многообразия M можно соединить гладким геодезическим сегментом γ длины, равной расстоянию между этими точками: $L(\gamma) = d(p, q)$.*

1.4 Полнота псевдориманова многообразия

Геодезические линии на псевдоримановом многообразии определяются аналогично геодезическим линиям на римановом многообразии.

Определение 10. *Геодезическая γ с аффинным параметром t на псевдоримановом многообразии (M, g) называется полной, если эту геодезическую можно продолжить так, чтобы она была определена для всех значений параметра t, $-\infty < t < +\infty$.*

Определение 11. *Псевдориманово многообразие называется геодезически полным, если все геодезические являются полными.*

ГЛАВА 2

Пространство Де Ситтера

2.1 Определение пространства Де Ситтера

Пусть $\{\partial_1, \partial_2 ..., \partial_n\}$ — координатный базис в карте $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$. Для любого гладкого векторного поля Z на $\mathbb{R}^n$ имеет место разложение $Z = Z^i\partial_i$, где Z^i — гладкие координатные функции на $\mathbb{R}^n_s$. Здесь и далее мы используем обозначение Эйнштейна $Z^i\partial_i = \sum\limits_i Z^i\partial_i$ и не пишем символ суммы, считая, что по одноименным индексам разной валентности идет суммирование.

Пусть g — псевдориманова метрика на $\mathbb{R}^n$, которая в карте $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ имеет вид

$$g(X,Y) = -\sum_{i=1}^{s} X^iY^i + \sum_{j=s+1}^{n} X^jY^j \ \forall\ X = X^i\partial_i,\ Y = Y^i\partial_i \in \mathfrak{F}(M).$$

Тогда пара $\mathbb{R}^n_s = (\mathbb{R}^n, g)$ называется псевдоевклидовым пространством размерности n сигнатуры $(s, n-s)$. Как известно [13, Теорема 2.4.3], $\mathbb{R}^n_s$ является полным односвязным лоренцевым многообразием нулевой кривизны. Лоренцево многообразие $\mathbb{R}^3_1$ называется *пространством Минковского.*

Определим следующее множество

$$dS^n_1 = \big\{x = (x^1, x^2, ..., x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^{n+1})^2 = 1\big\}.$$

Нетрудно доказать (см., напр., [13, Лемма 2.4.6]), что dS^n_1 диффеоморфно $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$. Псевдоевклидова метрика на $\mathbb{R}^{n+1}_1$ индуцирует на dS^n_1 лоренцеву метрику постоянной кривизны $K = 1$.

Определение 12. *Лоренцево многообразие dS^n_1 с указанной индуцированной лоренцевой метрикой называется пространством Де Ситтера.*

Данное лоренцево многообразие dS^n_1 еще называется пространством Де Ситтера первого рода [7].

Мы будем изучать пространство Де Ситтера $dS_1^2 = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$. На рисунке 2.1 [4] синим цветом изображено пространство Де Ситтера dS_1^2, которое представляет собой однополостный гиперболоид, зеленым — световой конус в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^3$, желтым — пространство Анти Де Ситтера, которое задается следующим образом $AdS_1^2 = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1\}$, представляющее собой двуполостный гиперболоид. На Рисунке 2.1 видна одна компонента связности пространства AdS_1^2.

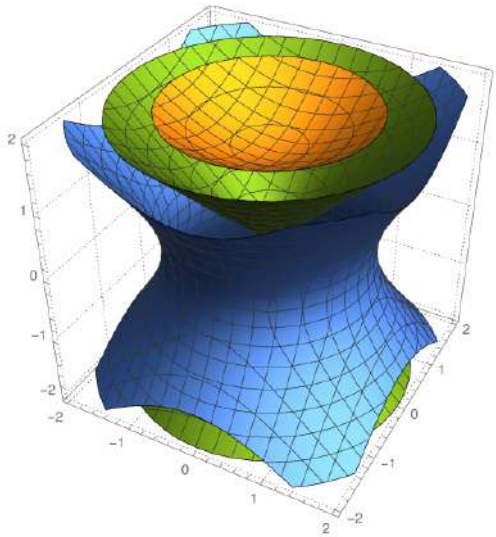


Рисунок 2.1

Согласно [13, Теорема 2.4.4], пространство Де Ситтера dS_1^2 — полное лоренцево многообразие сигнатуры $(1, 1)$ и постоянной кривизны 1, которое относится к *сферическим лоренцевым пространствам.*

Геодезические пространства Де Ситтера есть линии пересечения dS_1^2 с плоскостями в $\mathbb{R}_1^3$, проходящими через начало координат [13, Теорема 2.4.4]. На Рисунке 2.2 указаны точки и $p,\ q \in dS_1^2$, которые лежат на разных ветвях гиперболы, получающейся при пересечении плоскости Ox^1x^2 с dS_1^2. Других плоскостей, проходящих через точки p, q и начало координат нет, следовательно, точки p и q нельзя соединить геодезической на пространстве Де Ситтера dS_1^2. Таким образом, аналога теоремы Гильберта для пространства Де Ситтера не существует.

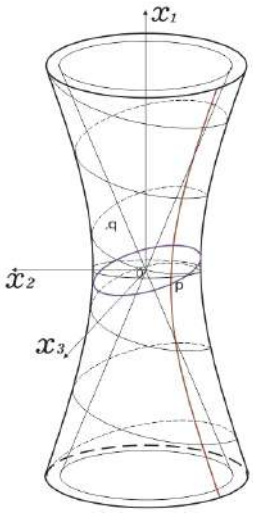


Рисунок 2.2

2.2 Регулярные накрывающие отображения

Пусть M, N — гладкие многообразия одинаковой размерности.

Определение 13. *Регулярное отображение $p : M \to N$ называется накрывающим отображением, или накрытием, если оно обладает следующим свойством: для каждой точки $y \in N$ существует окрестность $V \subset N$ такая, что ее полный прообраз $p^{-1}(V)$ есть объединение непересекающихся окрестностей многообразия M, то есть $p^{-1}(V) = U_1 \sqcup U_2 \sqcup ... \sqcup U_k \sqcup ...$, где $k \in \mathbb{N}$ (либо $p^{-1}(V) = U_1 \sqcup U_2 \sqcup ... \sqcup U_k$, если накрытие конечнолистное), причем сужение отображения $p_{|U_k} : U_k \to V$ — диффеоморфизм.*

Многообразие N называется *базой* накрывающего отображения, M — *накрывающим пространством. Слоем над точкой* $y \in N$ накрывающего отображения $p : M \to N$ называется полный прообраз точки y, то есть множество $P_y = p^{-1}(y)$.

Напомним, что топологическое пространство называется *односвязным*, если оно линейно связно и его фундаментальная группа тривиальна.

Определение 14. *Накрывающее отображение $p : M \to N$ называется универсальным, если M односвязно.*

Пусть (M_1, g_1) и (M_2, g_2) – n-мерные псевдоримановы многообразия и $p : M_1 \to M_2$ — гладкое накрывающее отображение. Напомним, что

$p : M_1 \to M_2$ называется псевдоримановым накрывающим отображением, если p является локальной изометрией, т.е. $g_1 = p^* g_2$, где p^* — кодифференциал отображения p.

Пусть $p : M \to N$ — накрывающее отображение, $x_0 \in M,\ y_0 = p(x_0)$. Так как накрывающее отображение непрерывно, то определен гомоморфизм групп $p_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, y_0)$, который называется *индуцированным гомоморфизмом фундаментальных групп.*

Определение 15. *Пусть $p : M \to N$ — накрывающее отображение. Гомеоморфизм $f : M \to M$ называется накрывающим преобразованием накрытия p, если $p \circ f = p$. Множество накрывающих преобразований образует группу Γ, которая называется группой накрывающих преобразований накрытия p.*

Следующее утверждение доказано в [12, Теорема 41.Px].

Теорема 2. *Пусть $p : M \to N$ накрывающее отображение, $y_0 \in N$, $x_0 \in p^{-1}(y_0)$. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

1) подгруппа $p_*(\pi_1(M, x_0))$ — нормальный делитель группы $\pi_1(N, p(x_0))\ \forall\ x_0 \in M$;

2) все подгруппы $p_*(\pi_1(M, x_0))$ группы $\pi_1(N, y_0)$ при $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ совпадают между собой;

3) для любой петли h в многообразии N либо каждый путь в M, накрывающий h, является петлей, либо ни один из этих путей не является петлей;

4) группа накрывающих преобразований накрытия $p : M \to N$ действует транзитивно на слое $p^{-1}(y_0),\ y_0 \in N$.

Определение 16. *Если выполняется одно из эквивалентных условий Теоремы 2, то накрывающее отображение $p : M \to N$ называется регулярным.*

Примеры регулярных накрытий

1. Пусть $M = \mathbb{R}^1$ — прямая, $N = \mathbb{S}^1$ — окружность, тогда $p : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$ — универсальное накрывающее отображение. Любое универсальное накрывающее отображение является регулярным, причем группа накрывающих преобразований изоморфна фундаментальной группе.

2. Пусть $M = N = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \mathbb{S}^1$. Отображение $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$, где $n \in \mathbb{N}$, является накрывающим отображением. Так как $\pi_1(M, x) = \mathbb{Z}$, то накрывающее отображение не является универсальным.

3. Пусть $M = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$. Отображение $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, y)$ является универсальным накрывающим отображением.

4. Любое универсальное накрытие является регулярным.

Обозначим через $p : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2$ универсальное накрывающее отображение для пространства Де Ситтера (dS_1^2, g). Так как пространство Де Ситтера диффеоморфно цилиндру $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$, то $\widetilde{dS_1^2}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^2$, а фундаментальная группа $\pi_1(dS_1^2, x_0)$ изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Через Γ обозначим группу накрывающих преобразований универсального накрытия $p : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2$, она изоморфна группе $\pi_1(dS_1^2, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Группа Γ свободно и вполне разрывно действует на $\widetilde{dS_1^2}$, причем $dS_1^2 \cong \widetilde{dS_1^2}/\Gamma$.

На пространстве универсального накрытия $\widetilde{dS_1^2}$ индуцирована лоренцева метрика $\widetilde{g} = p^* g$, относительно которой $p : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2$ — локальная изометрия, следовательно, $(\widetilde{dS_1^2}, \widetilde{g})$ — лоренцево многообразие постоянной кривизны $K = 1$. Так как при локальной изометрии p геодезические проектируются в геодезические, то полнота метрики пространства Де Ситтера влечет полноту $(\widetilde{dS_1^2}, \widetilde{g})$.

Напомним, что псевдориманово многообразие называется *однородным*, если его полная группа изометрий транзитивна.

Теорема 3. *Пусть $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ и (M, g) — псевдоримановы многообразия. Пусть $p : \widetilde{M} \to M$ псевдориманово накрывающее отображение, Γ — группа накрывающих преобразований накрытия p, а $\mathrm{N}(\Gamma)$ — нормализатор группы Γ в группе изометрий $\mathfrak{J}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1. Если псевдориманово многообразие (M, g) однородно, то группа $\mathrm{N}(\Gamma)$ транзитивна на универсальном накрытии $\widetilde{M}$ и $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ также однородно. В частности, однородно и универсальное накрывающее псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ для (M, g).

2. Если централизатор группы Γ транзитивен на $\overline{M}$ и накрывающее отображение регулярно, то псевдориманово многообразие (M, g) является однородным.

Доказательство. 1. Предположим, что (M, g) — однородное псевдориманово многообразие. Обозначим через $r : \overline{M} \to \widetilde{M}$ — универсальное накрывающее отображение для $\widetilde{M}$. Тогда на $\overline{M}$ индуцирована псевдориманова метрика для $\widetilde{M}$ $\overline{g} = r^*\widetilde{g}$ и композиция отображений $q = p \circ r : \overline{M} \to M$ является универсальным накрывающим псевдоримановым отображением для (M, g).

Обозначим через Ψ группу накрывающих преобразований универсального накрытия $r : \overline{M} \to \widetilde{M}$, тогда Ψ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x})$, $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$, причем $\widetilde{M}$ диффеоморфно фактор-многообразию $\overline{M}/\Psi$.

Так как Ψ — группа локальных изометрий, то $\Psi \subset \mathfrak{J}(\overline{M}, \overline{g})$. По условию, $p : \widetilde{M} \to M$ — псевдориманово накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Γ, поэтому $\Gamma \subset \mathfrak{J}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, а (M, g) изометрично псевдориманову фактор-многообразию $\widetilde{M}/\Gamma$.

Пусть x, y — любые точки из $\overline{M}$ и $v = q(x)$, $z = q(y) \in M$. Так как (M, g) — однородно, то существует изометрия $f \in \mathfrak{J}(M, g)$ такая, что $f(v) = z$. Заметим, что композиция $k = f \circ q : \overline{M} \to M$ также является универсальным накрывающим отображением, поэтому $k_*\pi_1(\overline{M}, x) = 1_{k(x)} = 1_z$, так как $k(x) = z$, следовательно, имеет место следующая цепочка равенств

$$k_*\pi_1(\overline{M}, x) = (f_* \circ q_*)\pi_1(\overline{M}, x) = f_*(1_{q(x)}) = f_*(1_v) = 1_{f(v)} = 1_z = q_*\pi_1.$$

Поскольку $q : \overline{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение, то как известно [10, Теорема 28.10] преобразование k обладает поднятием $\overline{k}$ на многообразие $\overline{M}$, причем $\overline{k} \in \mathfrak{J}(\overline{M}, \overline{g})$ и удовлетворяет коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\overline{M} \arrow[r, "\overline{k}"] \arrow[d, "q"'] & \overline{M} \arrow[d, "q"'] \\
M \arrow[r, "k"'] & M
\end{tikzcd}$$

то есть $\overline{k}$ лежит над k относительно $q : \overline{M} \to M$. Согласно [16, Предложение 1], множество всех изометрий многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$, лежащих над k равно $\overline{k} \circ \Psi = \Psi \circ \overline{k} = \{\overline{k} \circ \psi \mid \psi \in \Psi\}$.

Подчеркнем, что $\overline{k} \in \mathrm{N}(\Psi)$. Пусть $\overline{k}(x) = x_1$, тогда $x_1 \in q^{-1}(z)$. Так как x_1 и y лежат в одном слое $q^{-1}(z)$, а группа Ψ транзитивна на слое $q^{-1}(z)$, то существует $\psi \in \Psi$ такое, что $\psi(x_1) = y$. Тогда $\overline{k_0} = \psi \circ \overline{k}$, следовательно, $\overline{k_0}$ лежит над $\overline{k}$ и обладает свойством $\overline{k_0}(x) = y$. Поскольку, $\Psi \subset \mathfrak{J}(\overline{M}, \overline{g})$, то

отсюда следует, что $\overline{k_0} \in \mathfrak{J}(\overline{M}, \overline{g})$.

Таким образом, для любых двух точек x и y из $\overline{M}$ существует изометрия $\overline{k_0} \in \mathfrak{J}(\overline{M}, \overline{g})$ такая, что $y = \overline{k_0}(x)$. Это означает, что нормализатор $\mathrm{N}(\Psi)$ группы Ψ в группе изометрий $\mathfrak{J}(\overline{M}, \overline{g})$ транзитивен на $\overline{M}$. Следовательно, $(\overline{M}, \overline{g})$ — однородное многообразие.

Так как M и $\widetilde{M}$ однородные псевдоримановы многообразия, $r : \overline{M} \to \widetilde{M}$ и $p : \widetilde{M} \to M$ — универсальные псевдоримановы накрытия, тогда получаем, что $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ так же однородно.

2. Если накрывающее отображение p регулярно, то согласно [13, Следствию 1.8.17] группа накрывающих преобразований Γ действует транзитивно на любом слое $p^{-1}(x)$ где $x \in M$. Тогда если при этом изометрии многообразия $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ содержатся в нормализаторе $\mathrm{N}(\Gamma)$ группы Γ

$$h \circ \gamma = \gamma \circ h \ \forall \ \gamma \in \Gamma, \ h \in \mathfrak{J}(\widetilde{M}, \widetilde{g}),$$

то эти изометрии переводят слои в слои, то есть $h(p^{-1}(x)) = p^{-1}(y)$ для любых точек $x, \ y \in M$. Заметим, что $Z(\Gamma)$ есть нормальная подгруппа $\mathrm{N}(\Gamma)$. Тогда если группа $Z(\Gamma)$ транзитивна на $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ и накрывающее отображение p регулярно, то эта группа индуцирует транзитивную группу изометрий многообразия (M, g). Таким образом, (M, g) — однородное многообразие. $\square$

2.3 Группа изометрий пространства Де Ситтера

Псевдоортогональная группа $O(1,2)$ — это группа Ли всех линейных преобразований трехмерного векторного пространства, сохраняющих невырожденную квадратичную форму $g = -dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$.

Группа Ли $O(1,2)$ совпадает с группой изометрий пространства Минковского $\mathbb{R}^2_1$, оставляющих начало координат $O = (0,0,0)$ на месте. Кроме того, группа $O(1,2)$ является группой Ли всех изометрий пространства Де Ситтера dS^2_1, и имеет место следующее утверждение, доказанное в [2].

Теорема 4. *Группа всех изометрий $\mathfrak{J}(dS^2_1, g)$ пространства Де Ситтера (dS^2_1, g) есть псевдоортогональная группа $O(1,2)$, которая является группой Ли размерности 3 и транзитивно действует на dS^2_1.*

Следствие 2. *Пространство Де Ситтера* (dS_1^2, g) *является однородным лоренцевым многообразием.*

Группа $O(1,2)$ имеет размерность 3 и состоит из четырех компонент связности:

$$O(1,2) = O_+^{\uparrow}(1,2) \sqcup O_+^{\downarrow}(1,2) \sqcup O_-^{\uparrow}(1,2) \sqcup O_-^{\downarrow}(1,2).$$

Нижний индекс $(\pm)$ показывает сохраняется или изменяется ориентация плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x^2, x^3 (обозначим ее x^2Ox^3), а верхний индекс $(\uparrow\downarrow)$ — ориентацию оси времени Ox^1. Таким образом, $O_+^{\uparrow}(1,2)$ сохраняет ориентацию плоскости x^2Ox^3 и ориентацию времени, $O_+^{\downarrow}(1,2)$ сохраняет ориентацию плоскости x^2Ox^3 и изменяет ориентацию времени, $O_-^{\uparrow}(1,2)$ изменяет ориентацию плоскости x^2Ox^3 и сохраняет ориентацию времени и $O_-^{\downarrow}(1,2)$ изменяет и ориентацию плоскости x^2Ox^3, ориентацию времени.

Компонента единицы группы $O(1,2)$ обозначается через $SO_e(1,2) \equiv O_+^{\uparrow}(1,2)$. Как известно [2], эта группа действует транзитивно на пространстве Де Ситтера dS_1^2 и порождается следующими тремя 1−параметрическими подгруппами, оставляющими соответствующие оси координат $\mathbb{R}_1^3$ инвариантными.

1. Подгруппа вращений $\{R_0(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$:

$$R_0(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Подгруппа $\{A_1(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$:

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix}.$$

3. Подгруппа $\{A_2(s) \mid s \in \mathbb{R}\}$:

$$A_2(s) = \begin{pmatrix} chs & shs & 0 \\ shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы $A_2(s)$.

$$\begin{vmatrix} chs-\lambda & shs & 0 \\ shs & chs-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

.

Раскрывая этот определитель и решая характеристическое уравнение $(1-\lambda)((chs-\lambda)^2 - sh^2 s) = 0$, получаем следующие собственные числа: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^s, \lambda_3 = e^{-s}$. Применяя знания из линейной алгебры, находим собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям: $V_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$.

Так как группа $SO_e(1,2)$ является компонентой единицы группы $O(1,2)$, то она является нормальной подгруппой этой группы и, следовательно, определена фактор-группа $G = O(1,2)/SO_e(1,2)$, которая имеет следующие элементы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда группу $O(1,2)$ можно записать в виде: $O(1,2) = SO_e(1,2) \sqcup \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) \sqcup \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) \sqcup \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2)$.

Группа $G = \left\{ E, g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ — конечная подгруппа группы $O(1,2)$.

Поворот на угол π задается следующей матрицей: $R_0(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Данное преобразование принадлежит компоненте

связности группы $SO_e(1,2)$, поэтому выполняются следующие соотношения.

$$O_+^{\uparrow}(1,2) = SO_e(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2),$$

$$O_+^{\downarrow}(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2),$$

$$O_-^{\uparrow}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} SO_e(1,2),$$

$$O_-^{\downarrow}(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SO_e(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} SO_e(1,2).$$

Группа G изоморфна прямому произведению $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1 \times G_2$ подгрупп $G_1 = \{E, g_1\}$ и $G_2 = \{E, g_2\}$. Обозначим подгруппу $\{E, g_3\} = G_3$. С точностью до сопряженности, G_1, G_2, G_3 и G исчерпывают все нетривиальные конечные подгруппы группы $O(1,2)$.

ГЛАВА 3

Псевдоримановы орбифолды и группы их изометрий

3.1 Определение орбифолда

Пусть $\mathcal{N}$ — связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, U — открытое подмножество в $\mathcal{N}$, r — фиксированное натуральное число.

Определение 17. *Тройка (Ω, Γ, p) называется картой на $\mathcal{N}$, где Ω является связным открытым подмножеством n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, Γ — конечная группа диффеоморфизмов Ω, $q : \Omega \to \Omega/\Gamma$ — фактор-отображение, причем существует гомеоморфизм $h : \Omega/\Gamma \to U$ на некоторое подмножество U в $\mathcal{N}$ такой, что $p = h \circ q$ (Рисунок 3.1).*

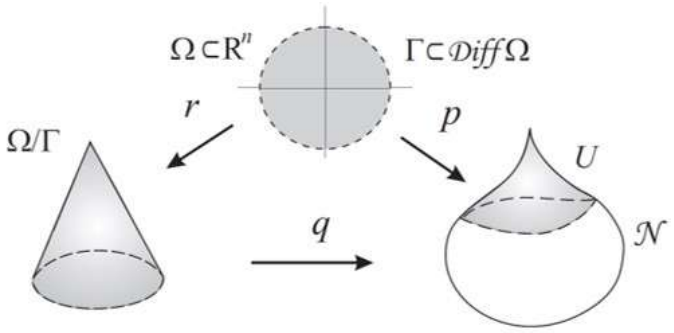


Рисунок 3.1 — Карта орбифолда $\mathcal{N}$

Определение 18. *Изоморфными называются две карты (Ω, Γ, p) и (Ω', Γ', p') на $\mathcal{N}$ с общей координатной окрестностью $U = U'$, если существует диффеоморфизм многообразий $\mu : \Omega \to \Omega'$ такой, что $p' \circ \mu = p$.*

Обозначим через $[(\Omega, \Gamma, p)]$, класс изоморфных карт, который содержит карту (Ω, Γ, p).

Отметим, что, если (Ω, Γ, p) является картой с координатной окрестностью V, а $[(\Omega, \Gamma, p)]$ — класс изоморфных карт с координатной окрестностью V', который индуцирован включением $V' \subset V$, то для любого связного открытого подмножества U в V включения $U \subset V'$ и $U \subset V$ индуцируют один и тот же класс изоморфных карт с координатной окрестностью U, это означает, что индуцирование обладает транзитивностью.

Определение 19. *Две карты (Ω, Γ, p) и (Ω', Γ', p') с координатными окрестностями V и V', согласованы в точке $Y \in U \cap U'$, если они индуцируют один класс изоморфных карт на некоторой связной окрестности $U \subset V \cap V'$ точки y. Карты согласованы, если они C^r-согласованы в каждой точке $y \in V \cap V'$.*

Определение 20. *Семейство карт $A = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in I\}$ называется C^r-атласом, если выполняются следующие два условия:*
1) множество $\{U_i = p_i(\Omega_i) \mid i \in I\}$ является открытым покрытием пространства $\mathcal{N}$;
2) любые две карты из атласа A являются C^r-согласованными.

Известно, что C^r-атласы A_1 и A_2 являются *эквивалентными*, если их объединение является C^r-атласом на $\mathcal{N}$. Введенное бинарное отношение является отношением эквивалентности во множестве всех C^r-атласов на $\mathcal{N}$. Следовательно, множество всех C^r-атласов разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. Обозначим через $[A]$ класс эквивалентности, содержащий атлас A.

Напомним, что атлас A называется *максимальным по включению*, если он совпадает с любым атласом его содержащим. Объединение всех атласов, которые принадлежат одному классу эквивалентности, является максимальным атласом на $\mathcal{N}$.

Определение 21. *Пара $(\mathcal{N}, A)$, где A — максимальный атлас на $\mathcal{N}$, называется гладким $n-$мерным орбифолдом.*

Пусть M — гладкое многообразие. Напомним, что орбифолд называется *хорошим*, если он представим в виде пространства орбит M/Ψ многообразия

M по некоторой группе диффеоморфизмов Ψ. Если при этом группа Ψ конечна, то орбифолд $\mathcal{N} = M/\Psi$ называется *очень хорошим.* Термины хороший орбифолд и очень хороший орбифолд были введены Терстоном [5].

Определение 22. *Лоренцевым орбифолдом* $(\mathcal{N}, g)$ *называется орбифолд* $\mathcal{N}$*, на котором задана лоренцева метрика* g*.*

Орбифолд, не являющийся многообразием будем называть собственным орбифолдом.

Любой n-мерный собственный лоренцев орбифолд $(\mathcal{N}, g)$ постоянной кривизны является хорошим орбифолдом [15].

Определение 23. *Группа всех изометрий лоренцева орбифолда* $(\mathcal{N}, g)$ *называется полной. Обозначим ее через* $\mathfrak{J}(\mathcal{N}, g)$*.*

Орбифолды естественным образом составляют категорию [1], которая обозначается через $\mathcal{O}\mathrm{rb}$.

Действие $\Phi : G \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ группы Ли G на орбифолде $\mathcal{N}$ будем называть *гладким*, если Φ — гладкое отображение в категории $\mathcal{O}\mathrm{rb}$ произведения орбифолдов $G \times \mathcal{N}$ в $\mathcal{N}$.

Определение 24. *Гладкое действие группы Ли на орбифолде* $\mathcal{N}$*:*

$$\Phi : G \times \mathcal{N} \to \mathcal{N} : \ (g, x) \mapsto g \cdot x \ \ \forall \ (g, x) \in G \times \mathcal{N},$$

называется собственным, если для любых компактных подмножеств K *и* F *в* $\mathcal{N}$ *подмножество* $Q = \{g \in G \mid g(K) \cap F \neq \varnothing\}$ *компактно в* $\mathcal{N}$*.*

Определение 25. *Группа изометрий орбифолда* $\mathfrak{J}(\mathcal{N}, g)$ *называется существенной, если она действует несобственно на* $\mathcal{N}$ *[16].*

Элемент $\phi \in \mathfrak{J}(\mathcal{N}, g)$ *называется существенным, если порожденная им группа* $\Phi = < \phi >$ *является существенной.*

Из результатов А. В. Багаева, Н. И. Жуковой [6, Теорема 4] вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Группа изометрий* $\mathfrak{J}(\mathcal{N}, g)$ $n-$*мерного псевдориманова орбифолда* $(\mathcal{N}, g)$ *является группой Ли размерности не выше, чем* $n(n+1)/2$*, где* n —

размерность орбифолда, в частности, равенство $dim\ \mathfrak{J}(\mathcal{N}, g) = n(n+1)/2$ *достигается, если группа изометрий* $\mathfrak{J}(\mathcal{N}, g)$ *действует транзитивно на орбифолде* $(\mathcal{N}, g)$*, то есть* $(\mathcal{N}, g)$ *является однородным псевдоримановым многообразием.*

Замечание 1. *Так как Теорема 5 верна для псевдоримановых орбифолдов любой сигнатуры, то она верна и для лоренцевых орбифолдов.*

3.2 Группа изометрий лоренцева орбифолда, накрытого пространством Де Ситтера

Следующая теорема доказана нами в [9, Теорема 1] и существенно используется далее.

Теорема 6. *Для любого собственного двумерного лоренцева орбифолда* $(\mathcal{N}, g)$ *существуют двумерное лоренцево многообразие* (M, g_M)*, конечная группа* Ψ *изометрий* (M, g_M)*, изоморфная либо* $\mathbb{Z}_2$*, либо* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$*, и лоренцев орбифолд* $(M/\Psi, d)$*, обладающие свойствами:*

1) существует изометрия $k : M/\Psi \to \mathcal{N}$ *лоренцева орбифолда* $(M/\Psi, d)$*, на* $(\mathcal{N}, g)$ *и* $r = k \circ h : M \to \mathcal{N}$ *— конечнолистное регулярное псевдориманово накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе* Ψ

2) группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)$ *существенная тогда и только тогда, когда нормализатор* $\mathrm{N}(\Psi)$ *группы* Ψ *в группе* $\mathfrak{I}(M, g)$ *является существенной группой;*

3) во введенных выше обозначениях, существенная группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)$ *изоморфна фактор-группе* $\mathrm{N}(\Psi)/\Psi$;

4) если группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}, g)$ *существенная, то группа изометрий* $\mathfrak{I}(M, g_M)$ *также существенная; обратное, вообще говоря, не верно.*

Сначала мы исследуем группы изометрий орбифолдов, конечнолистно накрытых пространством Де Ситтера. Для этого факторизуем пространство Де Ситтера dS_1^2 по группам $G_1 = \left\{ E, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$,

$G_2 = \left\{ E, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ и $G_3 = \left\{ E, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Введем обозначения $H_1 =< h_1 >=< g_1 \circ R_0(\pi) >=< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} >$, $H_2 =< h_2 >= =< g_2 \circ R_0(\pi) >=< \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} >$.

1. Факторизуем пространство Де Ситтера dS_1^2 по группе G_1. Сначала найдем неподвижные точки относительно группы G_1 на dS_1^2, для этого решим следующее уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$. Получаем $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}$, то есть $x^3 = 0$. Подставляя $x^3 = 0$ в уравнение пространства Де Ситтера, мы получаем, что неподвижными точками относительно G_1 являются точки гиперболы, заданной уравнением $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$.

Так как G_1 — конечная группа изометрий лоренцева многообразия dS_1^2, то фактор-пространство $\mathcal{N}_1 = dS_1^2/G_1$ представляет собой очень хороший лоренцев орбифолд, у которого орбифолдные точки – точки краевых гипербол.

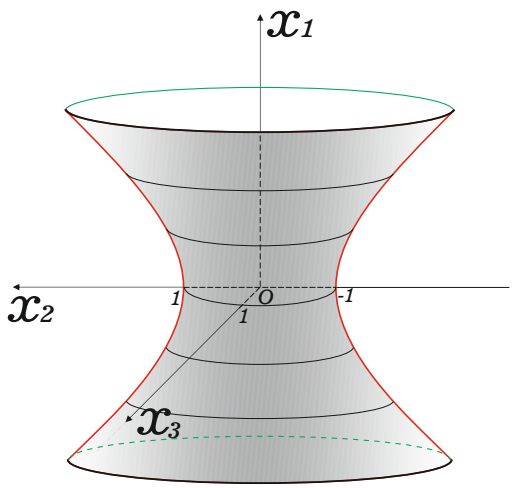


Рисунок 3.2 — Орбифолд $dS_1^2/G_1 = \mathcal{N}_1$

Стратификация орбифолда $\mathcal{N}_1$ имеет вид $\Delta = \left\{\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_2\right\}$, где одномерные страты $\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}$ — это краевые гиперболы, которые на Рисунке 3.2 изображены красным цветом, зеленой тонкой линией отмечена та часть, которая отождествляется по группе G_1.

На Рисунке 3.3 орбифолд $\mathcal{N}_1$ изображен с другого ракурса.

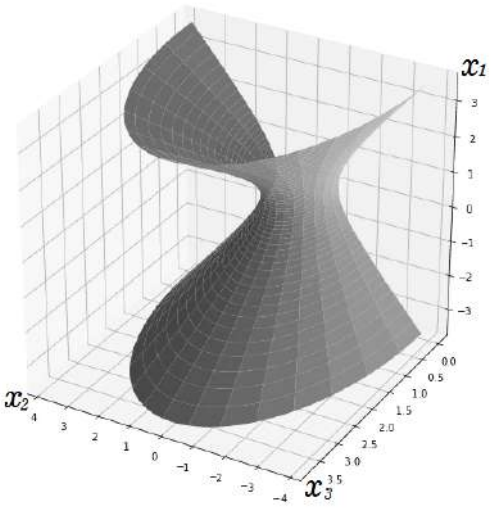


Рисунок 3.3 — Орбифолд $dS_1^2/G_1 = \mathcal{N}_1$

Используя инвариантность стратификации орбифолда относительно его группы изометрий, найдем все изометрии f, которые проектируются с пространства Де Ситтера dS_1^2 на орбифолд $\mathcal{N}_1$. Согласно Теореме 6, группа изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_1)$ лоренцева орбифолда $\mathcal{N}_1 = dS_1^2/G_1$ содержит те и только те изометрии, которые являются проекциями изометрий пространства Де Ситтера dS_1^2 на $\mathcal{N}_1$, то есть, удовлетворяющие условию

$$f \circ G_1 = G_1 \circ f.$$

Проверим, проектируются ли существенные подгруппы $A_1(t)$ и $A_2(s)$ на орбифолд $\mathcal{N}_1$.

$$A_1(t) \circ G_1 = \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cht & 0 & -sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & -cht \end{pmatrix},$$

$$G_1 \circ A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ -sht & 0 & -cht \end{pmatrix}.$$

Таким образом, условие $A_1(t) \circ G_1 = G_1 \circ A_1(t)$ выполняется только при $t = 0$.

$$A_2(s) \circ G_1 = \begin{pmatrix} chs & shs & 0 \\ shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} chs & shs & 0 \\ shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G_1 \circ A_2(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} chs & shs & 0 \\ shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} chs & shs & 0 \\ shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Условие $A_2(s) \circ G_1 = G_1 \circ A_2(s)$ выполняется для любого $s \in \mathbb{R}$. Следовательно, группа изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_1)$ орбифолда $\mathcal{N}_1$ существенная.

Проверим, коммутирует ли G_1 с нетривиальными преобразованиями $R_0(\alpha)$ из группы вращений R_0.

$$G_1 \circ R_0(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & -sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_0(\alpha) \circ G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Итак, условие $G_1 \circ R_0(\alpha) = R_0(\alpha) \circ G_1$ выполняется при $\alpha = 0$, то есть при тождественном преобразовании, и $\alpha = \pi$ — при повороте на угол π вокруг оси Ox^1. Следовательно, преобразование поворота $R_0(\pi)$ на угол π проектируется в изометрию лоренцева орбифолда $\mathcal{N}_1$.

Мы получаем, что нормализатор $\mathrm{N}(G_1)$ группы G_1 в группе всех изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_1)$ состоит из следующих восьми компонент связности, так как $R_0(\pi) \notin A_2(s)$:

$$\mathrm{N}(G_1) = A_2(s) \sqcup A_2(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup A_2(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup A_2(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup$$

$$A_2(s) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup A_2(s) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup A_2(s) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup$$

$A_2(s)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Известно, что $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_1, g) = \mathrm{N}(G_1)/G_1$. Элементами фактор-группы $\mathrm{N}(G_1)/G_1$ являются смежные классы группы $\mathrm{N}(G_1)$ по подгруппе G_1. В один класс входят те, которые отличаются на $g_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Напомним, что $H_2 =< h_2 >=< g_2 \circ R_0(\pi) >=< \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} >$.

Следовательно, $\mathrm{N}(G_1)/G_1 = A_2(s) \sqcup A_2(s)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sqcup$ $A_2(s)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sqcup A_2(s)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \cong A_2(s) \sqcup A_2(s)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sqcup$ $A_2(s)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sqcup A_2(s)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, где $R_0(\pi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $g_2 \circ R_0(\pi) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Таким образом, получаем, что $\mathrm{N}(G_1)/G_1 \cong A_2(s)(G_2 \times H_2) \cong$ $\cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Следовательно, группа изометрий орбифолда $(\mathcal{N}_1, g)$ изоморфна $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_1, g) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Так как g_1 принадлежит компоненте $O_-^{\uparrow}$, данной компоненте также принадлежит преобразование, которое обозначим через $h_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. При факторизации dS_1^2 по группе $H_1 = \{E, h_1\}$ получаем очень хороший лоренцев орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_1 = dS_1^2/H_1$, изометричный $\mathcal{N}_1$ (Рисунок 3.4), с орбифолдными точками, принадлежащими гиперболе, удовлетворяющей уравнению

$-(x^1)^2 + (x^3)^2 = 1$ (эти точки обозначены красным цветом).

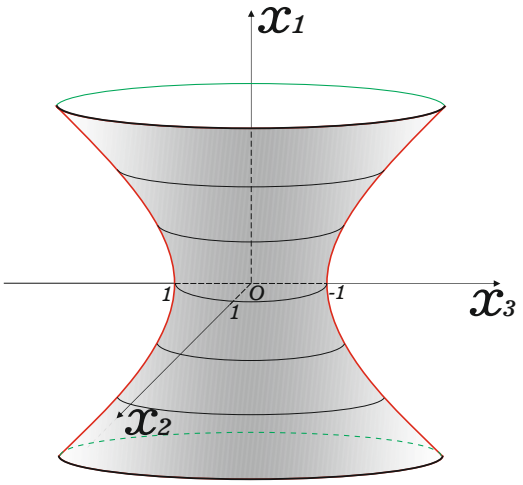


Рисунок 3.4 — Орбифолд $dS_1^2/H_1 = \bar{\mathcal{N}}_1$

Так как каждое преобразование из группы H_1 коммутирует с любым преобразованием из существенной группы изометрий $A_1(t)$, то по Теореме 6 орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_1 = dS_1^2/H_1$ имеет существенную группу изометрий $\mathfrak{J}(\bar{\mathcal{N}}_1, g)$, изоморфную $A_1(t)(G_2 \times H_2) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Таким образом доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *1. При факторизации пространства Де Ситтера dS_1^2 по конечной группе изометрий G_1 получается очень хороший лоренцев орбифолд $\mathcal{N}_1$ с существенной группой изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_1, g)$, изоморфной $A_2(s)(G_2 \times H_2) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

2. При факторизации пространства Де Ситтера dS_1^2 по конечной группе изометрий H_1 получается очень хороший лоренцев орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_1$ с существенной группой изометрий $\mathfrak{J}(\bar{\mathcal{N}}_1, g)$, изоморфной $A_1(t)(G_2 \times H_2) \cong$ $\cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3. Полученные орбифолды $\mathcal{N}_1$ и $\bar{\mathcal{N}}_1$ изометричны.

2. Теперь факторизуем пространство Де Ситтера dS_1^2 по подгруппе G_2. Чтобы найти стратификацию орбифолда dS_1^2/G_2, определим неподвижные точки группы G_2. Для этого решаем уравнение: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$. Получаем $\begin{pmatrix} -x^1 \\ x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, то есть $x^1 = 0,\ x^3 = 0$. Следовательно, получаем две неподвижные точки $(0, 1, 0)$ и $(0, -1, 0)$.

Таким образом, стратификация орбифолда $\mathcal{N}_2 = dS_1^2/G_2$ (Рисунок 3.5) имеет вид $\Delta = \left\{\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}, \Delta_2\right\}$, то есть $\mathcal{N}_2$ имеет две орбифолдные точки (которые на Рисунке 3.5 отмечены красным цветом), остальные точки — регулярные.

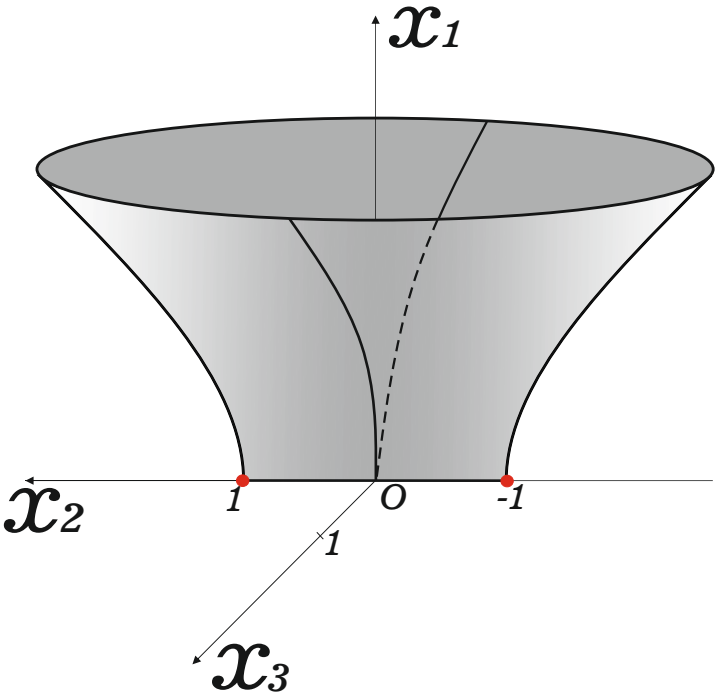


Рисунок 3.5 — Орбифолд $dS_1^2/G_2 = \mathcal{N}_2$

Найдем все изометрии f, которые проектируются с пространства Де Ситтера dS_1^2 на орбифолд $\mathcal{N}_2$, то есть удовлетворят условию $f \circ G_2 = G_2 \circ f$. Проверим проектируются ли существенные подгруппы $A_1(t)$ и $A_2(s)$ на орбифолд $\mathcal{N}_2$.

$$A_1(t) \circ G_2 = \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cht & 0 & -sht \\ 0 & 1 & 0 \\ -sht & 0 & -cht \end{pmatrix},$$

$$G_2 \circ A_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cht & 0 & -sht \\ 0 & 1 & 0 \\ -sht & 0 & -cht \end{pmatrix}.$$

Получили, что $A_1(t) \circ G_2 = G_2 \circ A_1(t)$, выполняется для любых $t \in \mathbb{R}$. Аналогично проверяем данное условие для подгруппы $A_2(s)$.

$$A_2(s) \circ G_1 = \begin{pmatrix} chs & shs & 0 \\ shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -chs & -shs & 0 \\ shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G_1 \circ A_2(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} chs & shs & 0 \\ shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -chs & shs & 0 \\ -shs & chs & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что условие $A_2(s) \circ G_2 = G_2 \circ A_2(s)$ будет выполнено только при $s = 0$.

Таким образом, группа изометрий орбифолда $\mathcal{N}$ является существенной.

Теперь проверим коммутирует ли G_2 с преобразованиями $R_0(\alpha)$.

$$G_2 \circ R_0(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & -sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R_0(\alpha) \circ G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Условие $G_2 \circ R_0(\alpha) = R_0(\alpha) \circ G_2$ выполняется при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$. Следовательно, преобразование поворота на угол π вокруг оси Ox^1 проектируется на орбифолд $\mathcal{N}_2$. Таким образом мы получаем, что нормализатор $\mathrm{N}(G_2)$ группы G_2 в группе всех изометрий $\mathfrak{J}(dS_1^2)$ состоит из следующих восьми компонент связности, так как $R_0(\alpha) \notin A_1(t)$:

$$\mathrm{N}(G_2) = A_1(t) \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup$$

$$A_1(t) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup$$

$$A_1(t) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Известно, что $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_2) = \mathrm{N}(G_2)/G_2$. Элементами

фактор-группы $\mathrm{N}(G_2)/G_2$ являются смежные классы группы $\mathrm{N}(G_2)$ по подгруппе G_2. В один класс входят изометрии, которые отличаются на $g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Пусть $H_1 =< h_1 >=< g_1 \circ R_0(\pi) >=< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} >$.

Тогда $\mathrm{N}(G_2)/G_2 = A_1(t) \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup$ $A_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong A_1(t) \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup$ $A_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sqcup A_1(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $R_0(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $g_1 \circ R_0(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $\mathrm{N}(G_2)/G_2 \cong A_1(t)(G_1 \times H_1) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Применяя Теорему 6, мы получаем, что группа изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_2, g)$ орбифолда $(\mathcal{N}_2, g)$ изоморфна фактор-группе $\mathrm{N}(G_2)/G_2$, поэтому $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_2, g) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Преобразование g_2 принадлежит компоненте $O_-^{\downarrow}$ так же как и преобразование, которое обозначим через $h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. При факторизации dS_1^2 по группе $H_2 = \{E, h_2\}$ получаем очень хороший лоренцев орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_2 = dS_1^2/H_2$, изометричный $\mathcal{N}_2$ (Рисунок 3.6), с двумя неподвижными точками $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$ (отмечены красным цветом).

Группа H_2 коммутирует с существенной группой $A_2(s)$. Таким образом, орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_2 = dS_1^2/H_2$ имеет существенную группу изометрий $\mathfrak{J}(\bar{\mathcal{N}}_2, g)$, изоморфную $A_2(s)(G_1 \times H_1) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Предложение 2. *При факторизации пространства Де Ситтера dS_1^2 по конечной подгруппе G_2 получается очень хороший лоренцев орби-*

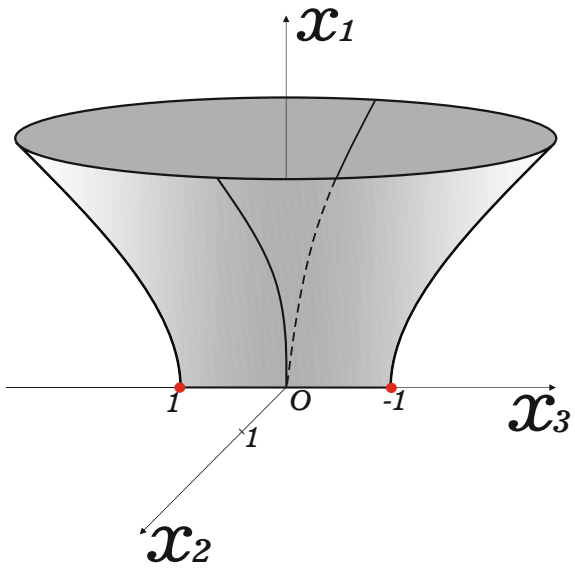


Рисунок 3.6 — Орбифолд $dS_1^2/H_2 = \bar{\mathcal{N}}_2$

фолд $\mathcal{N}_2$ с существенной группой изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_2, g)$, которая изоморфна $A_1(t)(G_1 \times H_1) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

2. При факторизации пространства Де Ситтера dS_1^2 по конечной подгруппе H_2 получается очень хороший лоренцев орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_2$ с существенной группой изометрий $\mathfrak{J}(\bar{\mathcal{N}}_2, g)$, изоморфной $A_2(s)(G_1 \times H_1) \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3. Орбифолды $\mathcal{N}_2$ и $\bar{\mathcal{N}}_2$ изометричны.

3. Обозначим через H_3 группу изометрий пространства Де Ситтера, где $H_3 =< \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} >$. Факторизуя пространство Де Ситтера dS_1^2 по группе H_3, изоморфной $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, получаем орбифолд $\mathcal{N}_3$ с изолированной орбифолдной точкой $(0, 1, 0)$ и одномерной стратой (на Рисунке 3.7 отмечены красным и зеленым цветом соответственно).

Стратификация орбифолда $\mathcal{N}_3$ имеет вид $\Delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2\}$. Группа $A_1(t)$ коммутирует с каждым элементом из H_3, следовательно, $A_1(t)$ проектируется на орбифолд $\mathcal{N}_3 = dS_1^2/H_3$. Таким образом, группа изометрий орбифолда $\mathcal{N}_3$ является существенной.

Нормализатор $N(H_3)$ в группе $\mathfrak{J}(dS_1^2)$ состоит из следующих 8 компо-

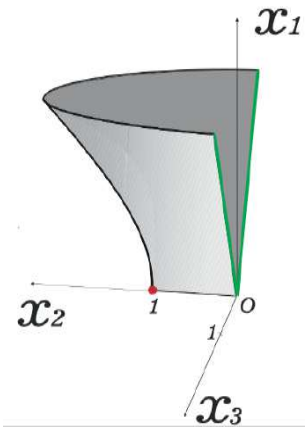


Рисунок 3.7 — Орбифолд $dS_1^2/H_3 = \mathcal{N}_3$

нент связности $\mathrm{N}(H_3) = A_1(t) \sqcup A_1(t)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sqcup A_1(t)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sqcup A_1(t)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sqcup A_1(t)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sqcup A_1(t)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sqcup A_1(t)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sqcup A_1(t)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Следовательно, $\mathrm{N}(H_3)/H_3 = A_1(t) \sqcup A_1(t)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Обозначим группу, порожденную матрицей $R_0(\pi)$, через B.

Таким образом, из Теоремы 6 вытекает, что группа изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_3, g)$ орбифолда $(\mathcal{N}_3, g)$ изоморфна группе $A_1(t) \times B \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2$.

Обозначим через H_4 группу, порожденную следующими элементами $H_4 =< \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} >$. При факторизации пространства Де Ситтера dS_1^2 по группе H_4, получаем орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_3$, изометричный $\mathcal{N}_3$ в категории $\mathcal{O}rb$ (Рисунок 3.8), с изолированной орбифолдной точкой $(0, 0, 1)$ и одномерной стратой (на Рисунке 3.8 отмечены красным и зеленым цветом соответственно).

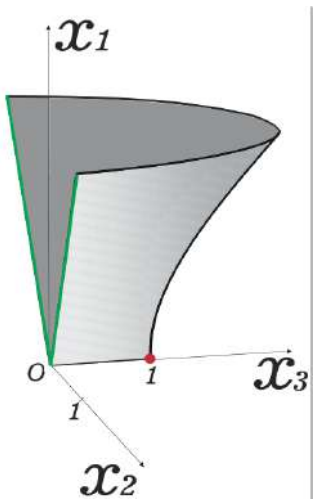


Рисунок 3.8 — Орбифолд $dS_1^2/H_4 = \bar{\mathcal{N}}_3$

Группа $A_2(s)$ коммутирует с каждым элементом из H_4, следовательно, $A_2(s)$ проектируется на орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_3$. Таким образом, группа изометрий орбифолда $\bar{\mathcal{N}}_3$ является существенной и изоморфна $\mathfrak{J}(\bar{\mathcal{N}}_3, g) \cong A_2(s) \times B \cong$ $\cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2$.

Предложение 3. *1. При факторизации пространства Де Ситтера dS_1^2 по конечной подгруппе H_3 получается очень хороший лоренцев орбифолд $\mathcal{N}_3$ с существенной группой изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_3, g)$, которая изоморфна $A_1(t) \times B \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2$.*

2. При факторизации пространства Де Ситтера dS_1^2 по конечной подгруппе H_4 получается очень хороший лоренцев орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_3$ с существенной группой изометрий $\mathfrak{J}(\bar{\mathcal{N}}_3, g)$, изоморфной $A_2(s) \times B \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Z}_2$.

3. Орбифолды $\mathcal{N}_3$ и $\bar{\mathcal{N}}_3$ изометричны.

4. Далее факторизуем пространство Де Ситтера dS_1^2 по конечной подгруппе G_3. Определим неподвижные точки группы G_3, чтобы найти стратификацию фактор-пространства dS_1^2/G_3. Для этого решаем уравнение: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$.

Получаем $\begin{pmatrix} -x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$, откуда $x^1 = 0$. Неподвижные точки группы G_3

– точки окружности, заданной уравнением $(x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Стратификация орбифолда $\mathcal{N}_4$ имеет вид $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2\}$.

Группа G_3 является конечной и орбифолд $\mathcal{N}_4$ имеет неподвижные точки (на Рисунке 3.9 изображены красным цветом), следовательно, $\mathcal{N}_4 = dS_1^2/G_3$ — очень хороший лоренцев орбифолд (Рисунок 3.9).

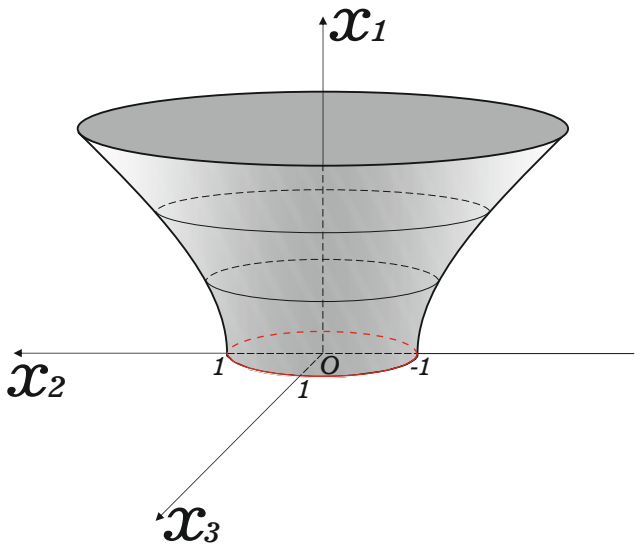


Рисунок 3.9 — Орбифолд $dS_1^2/G_3 = \mathcal{N}_4$

Найдем все изометрии f, которые проектируются с пространства Де Ситтера dS_1^2 на орбифолд $\mathcal{N}_4$, то есть удовлетворяют условию $f \circ G_3 = G_3 \circ f$. Покажем, что существенные подгруппы $A_1(t)$ и $A_2(s)$ не проектируются на $\mathcal{N}_4$.

$$A_1(t) \circ G_3 = \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cht & 0 & -sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix},$$

$$G_3 \circ A_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ -sht & 0 & cht \end{pmatrix}.$$

Итак, $A_1(t) \circ G_3 = G_3 \circ A_1(t)$ выполняется только при $t = 0$. Аналогично, равенство $A_2(s) \circ G_3 = G_3 \circ A_2(s)$ выполняется только при $s = 0$.

Теперь покажем, что группа изометрий орбифолда $\mathcal{N}_4$ является несущественной.

$$R_0(\alpha)\circ G_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos\alpha&-sin\alpha\\0&sin\alpha&cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&cos\alpha&-sin\alpha\\0&sin\alpha&cos\alpha\end{pmatrix},$$

$$G_3\circ R_0(\alpha)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos\alpha&-sin\alpha\\0&sin\alpha&cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&cos\alpha&-sin\alpha\\0&sin\alpha&cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Так как выполняется следующее условие $R_0(\alpha)\circ G_3=G_3\circ R_0(\alpha)$ при любом α, то $R_0(\alpha)\subset N(G_3)$, следовательно, $R_0(\alpha)=N(G_3)\cap SO_e(1,2)$

Группа G_3 так же коммутирует с изометриями $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, поэтому $\mathrm{N}(G_3)=R_0(\alpha)\sqcup R_0(\alpha)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sqcup R_0(\alpha)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\sqcup R_0(\alpha)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Согласно Теореме 6, группа изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_4,g)$ изоморфна фактор-группе $\mathrm{N}(G_3)/G_3$. Элементами этой фактор-группы являются те преобразования, которые отличаются на $g_3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Следовательно, $\mathrm{N}(G_3)/G_3=R_0(\alpha)\sqcup R_0(\alpha)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Таким образом, группа $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_4,g)$ изометрий лоренцева орбифолда $(\mathcal{N}_4,g)$ изоморфна произведению групп $R_0(\alpha)\times G_1\cong\mathbb{R}^1\times\mathbb{Z}_2$.

Предложение 4. *При факторизации пространства Де Ситтера dS_1^2 по конечной подгруппе изометрий G_3 получается очень хороший лоренцев орбифолд $\mathcal{N}_4$ с несущественной группой изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_4,g)$, изоморфной произведению групп $R_0(\alpha)\times G_1\cong\mathbb{R}^1\times\mathbb{Z}_2$.*

Поскольку фундаментальная группа пространства Де Ситтера dS_1^2 бесконечна и изоморфна $\mathbb{Z}$, то все построенные выше орбифолды, имеют бесконечную фундаментальную группу. Следовательно, резюмируя Предложе-

ния 1–4, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *В категории орбифолдов $\mathcal{O}rb$ существует только три некомпактных орбифолда $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$ с бесконечной фундаментальной группой, допускающие лоренцеву метрику постоянной кривизны $K = 1$ с существенной группой изометрий. Эти орбифолды накрыты пространством Де Ситтера dS_1^2 и являются фактор-пространствами dS_1^2 по конечным группам изометрий G_1, G_2 и H_3.*

3.3 Примеры лоренцевых орбифолдов с несущественной группой изометрий

1. Факторизуем пространство Де Ситтера dS_1^2 сначала по группе изометрий $B_1 =< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} >=< g_1, g_3 >$. Полученный орбифолд $\mathcal{N}_{B_1} = dS_1^2/B_1$ имеет орбифолдные точки (на Рисунке 3.10 изображены красным цветом) — это точки полуокружности, которая задается уравнением $\begin{cases} (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1 \\ x^3 > 0 \end{cases}$.

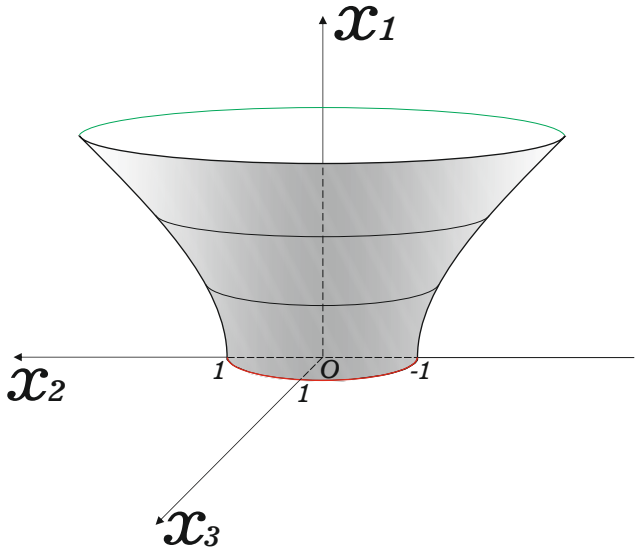


Рисунок 3.10 — Орбифолд $\mathcal{N}_{B_1}$

На Рисунке 3.11 орбифолд $\mathcal{N}_{B_1}$ показан с другого ракурса.

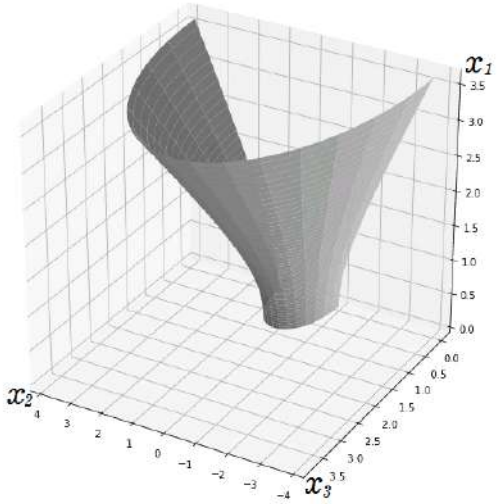


Рисунок 3.11 — Орбифолд $\mathcal{N}_{B_1}$

Группа B_1 коммутирует только с дискретными группами $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, группа изометрий $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_{B_1}, g)$ орбифолда $\mathcal{N}_{B_1}$ несущественна и изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

При факторизации dS_1^2 по группе $B_2 =< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} >$ мы получаем орбифолд $\bar{\mathcal{N}}_{B_2}$, изоморфный $\mathcal{N}_{B_1}$, с несущественной группой изометрий $\mathfrak{J}(\bar{\mathcal{N}}_{B_2}, g) \cong \mathbb{Z}_2$.

2. Факторизуем пространство Де Ситтера dS_1^2 по группе изометрий $B_3 =< g_2, R_0(\pi) >$.

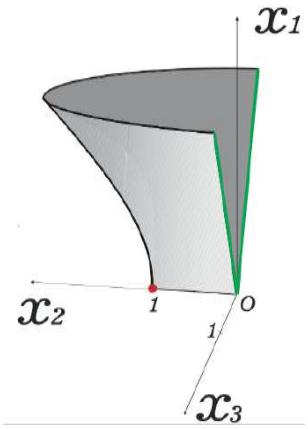


Рисунок 3.12 — Орбифолд $\mathcal{N}_{B_3}$

Получаем изолированную орбифолдную точку $(0,1,0)$ и одномерную страту (на Рисунке 3.12 изображены красным и зеленым цветом, соответственно).

Найдем группу изометрий лоренцева орбифолда $\mathcal{N}_{B_3}$. Выясним, какие изометрии пространства Де Ситтера dS_1^2 проектируются на него

$$\mathrm{N}(B_3) =< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} >.$$

Следовательно, группа изометрий орбифолда $\mathcal{N}_{B_3}$ — несущественная и изоморфна $\mathfrak{I}(\mathcal{N}_{B_3}, g) \cong \mathbb{Z}_2$.

ГЛАВА 4

Классификация лоренцевых поверхностей и орбифолдов

4.1 Классификация лоренцевых поверхностей постоянной кривизны с существенными группами изометрий

Напомним, что $p : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2$ — универсальное накрывающее отображение. На $\widetilde{dS_1^2}$ индуцирована лоренцева метрика $\widetilde{g} = p^*g$. Обозначим через Γ группу накрывающих преобразований накрытия p, при этом $\Gamma \cong \pi_1(dS_1^2) \cong \mathbb{Z}$. Группа изометрий $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$ существенная, причем $\mathfrak{J}(dS_1^2) \cong \mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})/\Gamma$. Через $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$ обозначается компонента единицы группы $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$.

Далее указанные лоренцевы метрики фиксируются, поэтому группа изометрий $\mathfrak{J}(M_s^n, g)$ для краткости обозначается $\mathfrak{J}(M_s^n)$. Через $\mathfrak{J}_e(M_s^n)$ обозначается компонента единицы группы $\mathfrak{J}(M_s^n)$.

Как известно, группа изометрий $\mathfrak{J}(dS_1^2)$ совпадает с группой Ли $O(1,2)$, транзитивной на dS_1^2, причем стационарная подгруппа в произвольной точке изоморфна группе Ли $O(1,1)$, то есть, $\mathfrak{J}(dS_1^2, g)$ является однородным пространством $O(1,2)/O(1,1)$.

Из [13, Раздел 11.5] вытекает следующее утверждение.

Предложение 5. *Группа Γ накрывающих преобразований универсального накрытия $p : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2$ является нормальной подгруппой группы $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$. Индуцирован эпиморфизм групп Ли: $f : \mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2}) \to \mathfrak{J}(dS_1^2)$, с ядром Γ, причем централизатор $Z(\Gamma)$ совпадает с подгруппой $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$. Группа $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$ транзитивна на $\widetilde{dS_1^2}$, а группа $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$ имеет, как и $O(1,2)$, четыре компоненты связности.*

Таким образом, группа изометрий $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$ накрывает посредством f

группу изометрий $\mathfrak{J}(dS_1^2)$, ядром f служит Γ, поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 3. *Группа изометрий $\mathfrak{J}(dS_1^2)$ изоморфна фактор-группе $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})/\Gamma$, где $\Gamma \cong \mathbb{Z}$, и является существенной.*

Пусть $f : \Gamma \to \mathbb{Z}$ — изоморфизм групп. Для любого натурального числа m, $m > 1$, обозначим через $m\mathbb{Z}$ подгруппу $\mathbb{Z}$, образованную целыми числами, кратными m. Положим $\Gamma_m := f^{-1}(m\mathbb{Z})$. Так как Γ_m — подгруппа группы изометрий $\mathbb{Z} \subset \mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$, то определены лоренцево фактор-многообразие $dS_1^2(m) = \widetilde{dS_1^2}/\Gamma_m$ с фактор-отображением $p_m : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2(m)$ и действие фактор-группы $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ на $dS_1^2(m)$ такие, что существует регулярное накрытие $f_m : dS_1^2(m) \to dS_1^2$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{dS_1^2} \arrow[dl, "p_m"'] \arrow[d, "p"] \\ dS_1^2(m) \arrow[r, "f_m"] & dS_1^2. \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Заметим, что группа накрывающих преобразований регулярного накрытия $f_m : dS_1^2(m) \to dS_1^2$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_m$. Подчеркнем, что на многообразии $dS_1^2(m)$ индуцируется лоренцева метрика g_m, относительно которой оба отображения p_m и f_m являются певдоримановыми накрытиями. Будем обозначать (dS_1^2, g) также через $(dS_1^2(1), g_1)$. Известно [13], что группа Γ лежит в центре существенной группы изометрий $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$. Так как $\Gamma_m \subset \Gamma$, то Γ_m лежит в центре существенной группы изометрий $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$, поэтому группа $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$ проектируется в существенную группу изометрий $\mathfrak{J}_e(dS_1^2(m))$. Таким образом, мы доказали следующий факт.

Лемма 1. *При любом натуральном числе m группа изометрий $\mathfrak{J}_e(dS_1^2(m))$ существенная.*

Замечание 2. *Лоренцевы многообразия $(dS_1^2(m), g_m)$, $m \in \mathbb{N}$, попарно не изометричны, но диффеоморфны, поскольку каждое из них диффеоморфно цилиндру $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Теорема 8. *Пусть M_1^2 – полная лоренцева поверхность постоянной кривизны $K = 1$ с существенной группой изометрий. Тогда:*

1) группа накрывающих преобразований Γ_1^2 *универсального накрытия* $\mu : \widetilde{S_1^2} \to M_1^2$ *является нормальной подгруппой группы изометрий* $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$ *и* $M_1^2 = \widetilde{dS_1^2}/\Gamma_1^2$;

2) существует регулярное псевдориманово накрытие $\mu : M_1^2 \to dS_1^2/\{\pm I\}$;

Доказательство. Пусть M_1^2 — любая лоренцева поверхность постоянной кривизны $K = 1$. Тогда универсальным накрывающим пространством для M_1^2 является $\widetilde{dS_1^2}$. Обозначим через $\tau : \widetilde{dS_1^2} \to M_1^2$ универсальное накрытие. Пусть $p : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2$ по-прежнему будет универсальное накрытие для пространства Де Ситтера dS_1^2.

Так как подгруппа $\{\pm I\} \cong \mathbb{Z}_2$, порожденная матрицей $-I$, где $I \in O(1,2)$ – единичная матрица, свободно и собственно разрывно действует на dS_1^2, то определено фактор-многообразие $dS_1^2/\{\pm I\}$ с лоренцевой метрикой g^-, относительно которой фактор-отображение $\mu : dS_1^2 \to dS_1^2/\{\pm I\}$ является псевдоримановым накрытием. Заметим, что многообразие $dS_1^2/\{\pm I\}$ представляет собой открытый лист Мебиуса. Так как все элементы существенных 1-параметрических подгрупп $A_1(t)$ и $A_2(s)$ коммутируют с элементом $-I \in \mathfrak{J}(dS_1^2)$, то они проектируются на многообразие $dS_1^2/\{\pm I\}$ относительно $\mu : dS_1^2 \to dS_1^2/\{\pm I\}$. Следовательно, группа изометрий $\mathfrak{J}(dS_1^2)/\{\pm I\}$ содержит 2-параметрическую существенную подгруппу и поэтому является существенной. Другие лоренцевы поверхности постоянной кривизны $K = 1$, которые накрываются пространством Де Ситтера, имеют вид $dS_1^2/R_0^{(k)}$, где $R_0^{(k)} \cong \mathbb{Z}_k$ — подгруппа 1-параметрической подгруппы $R_0(t) \subset \mathfrak{J}(dS_1^2)$, действующая свободно. Как показано нами выше, подгруппы указанного вида „не пропускают“ существенные изометрии ни при каком $k \geqslant 2$.

Согласно Лемме 1, группа изометрий $\mathfrak{J}_e(dS_1^2(m))$ лоренцева многообразия $dS_1^2(m)$ существенная. Рассмотрим универсальное накрытие $p_m : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2(m)$ и регулярное накрытие $f_m : dS_1^2(m) \to dS_1^2$. Положим $O_m = p_m(O)$. Существует единственная изометрия $g_2^{(m)}$, лежащая над g_2 относительно $f_m : dS_1^2(m) \to dS_1^2$, оставляющая точку O_m неподвижной. Тогда группа изометрий $\Phi_m =< g_2^{(m)} >$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$, причем фактор-многообразие $dS_1^2(m)/\Phi_m$ – открытый лист Мебиуса, на котором индуцирована лоренцева метрика, которую обозначим через g_m^-. Также как и в слу-

чае пространства Де Ситтера, когда $m = 1$, мы доказываем, что лоренцева поверхность $dS_1^2(m)/\Phi_m$ имеет существенную группу изометрий, и группы изометрий других многообразий, накрытых $dS_1^2(m)$, несущественные.

Как известно, группа изометрий $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$ имеет размерность 3. Компонента единицы $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$ порождена тремя 1-параметрическими подгруппами $\widetilde{A}_i(t)$, $i = 1, 2$, и $\widetilde{R_0(t)}$, накрывающими соответствующие 1-параметрические подгруппы $A_i(t)$ и $R_0(t)$ группы $\mathfrak{J}_e(dS_1^2)$, рассмотренные в разделе 2.3, причем группа $\widetilde{R_0(t)}$ не компактна. Подчеркнем, что группы изометрий $\widetilde{A}_i(t) \subset \mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$, $i = 1, 2$, канонически изоморфны подгруппам $A_i(t) \subset \mathfrak{J}(dS_1^2)$ и, следовательно, не имеют подгрупп, свободно и собственно разрывно действующих на плоскости. Отсюда вытекает, что кроме перечисленных выше полных лоренцевых поверхностей с существенными группами изометрий, других нет. □

Из доказательства Теоремы 8 вытекает следующее утверждение, представляющее собой классификацию с точностью до изометрий полных лоренцевых поверхностей постоянной кривизны $K = 1$ с существенными группами изометрий.

Теорема 9. *Существует счетное семейство классов изометричных полных лоренцевых поверхностей постоянной кривизны $K = 1$ с существенными группами изометрий, причем каждый класс содержит одно из следующих лоренцевых многообразий, которые попарно не изометричны:*

1) лоренцево многообразие $(dS_1^2(m), g_m)$ для любого натурального числа m, диффеоморфное цилиндру $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$;

2) неориентируемое лоренцево многообразие $(dS_1^2(m)/\Phi(m), g_m^-)$, где $\Phi(m) \cong \mathbb{Z}_2$ — группа изометрий пространства $(dS_1^2(m), g_m)$, а g_m^- — индуцированная метрика, причем $dS_1^2(m)/\Phi(m)$ диффеоморфно открытому листу Мебиуса;

3) односвязное лоренцево многообразие $(\widetilde{dS_1^2}, \widetilde{g})$, диффеоморфное плоскости $\mathbb{R}^2$.

Замечание 3. *Двулистное накрытие $p_2 : Spin(1,2) = SU(1,1) \to SO(1,2)$ называется спинорным накрытием.*

Замечание 4. *Классификация полных лоренцевых поверхностей произвольной постоянной кривизны K с существенными группами изометрий аналогична Теореме 9. Достаточно заменить пространство Де Ситтера dS_1^2 кривизны $K = 1$ пространством Де Ситтера постоянной кривизны K, заданного следующим образом*

$$\left\{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \frac{1}{K^2}\right\},$$

и повторить приведенные выше рассуждения.

4.2 Классификация лоренцевых орбифолдов постоянной кривизны с существенными группами изометрий

4.2.1 Лоренцевы орбифолды постоянной кривизны с бесконечной фундаментальной группой

Как доказано нами, существует ровно три лоренцевых орбифолда с существенными группами изометрий, накрытых пространством Де Ситтера (dS_1^2, g): $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_3$, причем орбифолд $\mathcal{N}_3$ двулистно накрыт лоренцевым многообразием $dS_1^2/\pm I$ с индуцированной метрикой, диффеоморфным открытому листу Мебиуса.

Аналогично, для любого $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, существуют ровно три лоренцевых орбифолда с существенными группами изометрий, накрытых пространствами $(dS_1^2(m), g_i(m))$: $(\mathcal{N}_i^{(m)}, g_i^{(m)})$, $i = 1, 2, 3$, причем орбифолд $\mathcal{N}_3^{(m)}$ двулистно накрыт лоренцевым многообразием $dS_1^2(m)/\pm I$, диффеоморфным открытому листу Мебиуса.

Подчеркнем, что лоренцевы орбифолды $(\mathcal{N}_i, g_i)$ и $(\mathcal{N}_i^{(m)}, g_i^{(m)})$ при каждом $i \in \{1, 2, 3\}$ не изометричны, в то время как гладкие орбифолды $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}_i^{(m)}$ диффеоморфны, то есть изоморфны в категории орбифолдов.

Таким образом, мы классифицировали все полные двумерные лоренцевы орбифолды постоянной кривизны с существенной группой изометрий, имеющие бесконечную фундаментальную группу.

4.2.2 Лоренцевы орбифолды постоянной кривизны с конечной фундаментальной группой

Осталось исследовать лоренцевы орбифолды постоянной кривизны, конечнолистно накрытые плоскостью. Пусть $K = 1$. Тогда $\mathcal{N} = \widetilde{dS_1^2}/\Psi$, где Ψ — конечная группа изометрий, то есть подгруппа группы $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$. Согласно предложению 5, компонента единицы $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$ транзитивно действует на пространстве $\widetilde{dS_1^2}$. Наблюдения показывают, что группа имеет три образующие 1-параметрические некомпактные подгруппы $\widetilde{A}_i(t)$, $i = 1, 2$, и $\widetilde{R_0(t)}$, накрывающими соответствующие 1-параметрические подгруппы $A_i(t)$ и $R_0(t)$ группы $\mathfrak{J}_e(dS_1^2)$. Отсюда вытекает, что группа $\mathfrak{J}_e(\widetilde{dS_1^2})$ не имеет конечных подгрупп. Пусть, как и выше, $p : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2$ — универсальное накрытие. Зафиксируем точку $O \in p^{-1}(a) \subset \widetilde{dS_1^2}$, где $a = (0, 1, 0) \in dS_1^2$.

Заметим, что стационарная подгруппа группы $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$ в любой точке является одномерной существенной группой изометрий, изоморфной $O(1, 1)$, поэтому она имеет четыре конечные нетривиальные конечные подгруппы, три изоморфны $\mathbb{Z}_2$ и одна изоморфна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Эти группы определяют четыре полных лоренцева орбифолда кривизны $K = 1$, среди которых, возможно, существуют имеющие существенную группу изометрий. Покажем, что реализуется только один из указанных четырех случаев.

Стационарная подгруппа $\mathfrak{J}_a(dS_1^2)$ группы изометрий $\mathfrak{J}(dS_1^2)$ в точке a порождена следующими изометриями: $A_1(t)$, $g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и изоморфна $O(1, 1)$. Как известно, для любого диффеоморфизма f базы B универсального накрытия $k : X \to B$, $f(b) = b \in B$, для любой точки $x \in k^{-1}(b)$ существует единственный диффеоморфизм $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}(x) = x$, лежащий над f относительно k. Следовательно, стационарная подгруппа $\mathfrak{J}_O(\widetilde{dS_1^2})$ группы $\mathfrak{J}(\widetilde{dS_1^2})$ в точке O порождена изометриями $\widetilde{A_1(t)}$, $\widetilde{g_2}$ и $\widetilde{g_3}$, лежащими над $A_1(t)$, g_2 и g_3, соответственно, и оставляющими O на месте. Прямая проверка показывает, что $\widetilde{A_1(t)}$ коммутирует с $\widetilde{g_i}$, $i = 2, 3$, тогда

и только тогда, когда $A_1(t)$ коммутирует с g_i. Ранее нами установлено, что только g_2 коммутирует с $A_1(t)$. Отсюда следует, что орбифолд $\mathcal{N}_4 := \widetilde{dS_1^2}/\Psi$, где $\Psi =< \widetilde{g_2} >\cong \mathbb{Z}_2$, наделенный индуцированной лоренцевой метрикой, допускает существенную группу изометрий, причем $\mathfrak{J}(\mathcal{N}_4) = \widetilde{A_1(t)} \times \Phi$, где $\Phi =< \widetilde{g_3} >\cong \mathbb{Z}_2$.

Выясним, что представляет собой орбифолд $\mathcal{N}_4$. Многообразие пространства Де Ситтера dS_1^2 является однополостным гиперболоидом, заданным уравнением $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Сечение плоскостью $x^3 = 0$ есть гипербола $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$. Обозначим через L ветвь этой гиперболы, проходящую через точку $-a = (0, -1, 0)$. Тогда $U := dS_1^2 \setminus L$ — окрестность точки a, правильно накрытая отображением $p : \widetilde{dS_1^2} \to dS_1^2$. Обозначим через $\widetilde{U}$ окрестность точки O в $\widetilde{dS_1^2}$, для которой $p|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$ – диффеоморфизм. При этом коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{U} \arrow[r, "\widetilde{g_2}"] \arrow[d, "p|_{\widetilde{U}}"'] & \widetilde{U} \arrow[d, "p|_{\widetilde{U}}"'] \\
U \arrow[r, "g_2"'] & U
\end{tikzcd}$$

в которой каждое отображение — диффеоморфизм. Касательное пространство $T_a dS_1^2$ к dS_1^2 в точке a совпадает с плоскостью $x^2 = 1$. Так как отображение g_2 линейное, то его дифференциал g_{2*a} в точке a совпадает с сужением g_2 на $T_a dS_1^2$ и задается матрицей $g_{2*a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. Из приведенной выше коммутативной диаграммы вытекает, что дифференциал $\widetilde{g}_{2*O}$ диффеоморфизма $\widetilde{g_2}$ в точке O вычисляется следующим образом $\widetilde{g}_{2*O} = (p_{*O})^{-1} \circ g_{2*a} \circ p_{*O} = -I$, то есть $\widetilde{g}_{2*O} = -I$. Обозначим через $\exp_O : T_O\widetilde{dS_1^2} \to \widetilde{dS_1^2}$ экспоненциальное отображение лоренцева многообразия $(\widetilde{dS_1^2}, \widetilde{g})$ в точке O. В силу полноты лоренцева многообразия $(\widetilde{dS_1^2}, \widetilde{g})$ оно определено на всем касательном пространстве $T_O\widetilde{dS_1^2}$. Кроме того, $\exp_O$ является диффеомерфизмом на $\widetilde{dS_1^2}$. Благодаря свойству экспоненциального отображения псевдоримановых многообразий [17], для изометрии $\widetilde{g_2}$ выполняется

равенство

$$\exp_O \circ \widetilde{g}_{2*O} = \widetilde{g}_2 \circ \exp_O . \tag{4.2}$$

Обозначим через $\widetilde{G_2}$ группу изометрий пространства $\widetilde{dS_1^2}$ с образующей $\widetilde{g}_2$. Равенство (4.2) означает, что действие группы $\widetilde{G_2}$ сопряжено посредством экспоненциального отображения $\exp_O$ с действием линейной группы $\Phi = \{I, -I\}$. Следовательно, определен изоморфизм орбифолдов $f : \mathbb{R}^2/\{\pm I\} \to \widetilde{dS_1^2}/\widetilde{G_2}$, удовлетворяющий равенству $p \circ \exp_O = f \circ q$, где $p : \widetilde{dS_1^2} \to \widetilde{dS_1^2}/\widetilde{G_2}$ и $q : T_O\widetilde{dS_1^2} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\{\pm I\}$ – проекции на пространства орбит.

Таким образом, орбифолд $\mathcal{N}_3 = \widetilde{dS_1^2}/\widetilde{G_2}$ изоморфен в категории орбифолдов $\mathcal{O}rb$ стандартному орбифолду $\mathbb{R}^2/\{\pm I\}$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Предложение 6. *Среди двумерных орбифолдов с конечной фундаментальной группой в категории орбифолдов существует единственный орбифолд* $\mathbb{R}^2/\{\pm I\}$, *допускающий полную лоренцеву метрику постоянной кривизны с существенной группой изометрий.*

4.3 Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

Выводы. *Получена полная классификация с точностью до изометрий полных лоренцевых орбифолдов постоянной положительной кривизны. Из этой классификации следует:*

1. Существует только четыре двумерных гладких орбифолда, допускающие полную лоренцеву геометрию постоянной кривизны с существенной группой изометрий.

2. При любом фиксированном K, $K > 0$, *существует счетное множество попарно не изоморфных двумерных лоренцевых орбифолдов постоянной кривизны* K, *имеющих существенную группу изометрий.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adem A., Leida J., Ruan Y. Orbifolds and stringy topology // Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2007.
2. Barata J., Jakel C., Mund J. The $\mathcal{P}(\varphi)_2$ Model on the de Sitter Space // arXiv:1311.2905vl [math-ph] 12 Nov 2013, 202 с.
3. Barrow J. D., Shaw D. J., Tsagas C. G. Cosmology in three dimensions: Steps towardsthe general solution // Class. Quant. Grav. 2006. no 23, 42 с.
4. Rubilar F., Schultz L. Adjoint orbits of $\mathfrak{sl}(2, R)$ and their geometry // arXiv:2004.12190vl [math.DG] 20 Apr 2020, 34 с.
5. Thurston William P. The Geometry and Topology of Three-Manifolds // Electronic version 1.1 - March 2002.
6. Багаев А. В., Жукова Н. И. Группы автоморфизмов G-структур конечного типа на орбиобразиях // Сиб. мат. журн., 2003, Т. 44, № 2, с. 263-278.
7. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия // М.: Мир, 1985.
8. Боголепова Е. В., Жукова Н.И. Двумерные плоские лоренцевы орбифолды с существенными группами изометрий // Материалы молодёжной школы-конференции, 2019, №1, с.65-69.
9. Боголепова Е.В., Жукова Н.И. Существенные группы изометрий некомпактных двумерных плоских лоренцевых орбифолдов // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки, 2019, Т. 49, № 1, с. 17-32.
10. Буземан Г. Геометрия геодезических // пер. с англ. М.З. Кайнер, ФМ, 1962.
11. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Введение в риманову геометрию // СПб.: Наука, 1994.
12. Виро О. Я., Иванов О. А. и др. Элементарная топология // М.: МЦНМО, 2010.
13. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны // М.: Наука, 1982.
14. Громол Д., Клингеберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом // пер. с нем. Ю. Д. Бураго, М.: Мир, 1971.

15. Жукова Н. И. Слоеные модели для гладких орбифолдов и их применение // СВМО, 2017, Т. 19, № 4, с. 33-44.
16. Жукова Н. И., Рогожина Е. А. Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий // Сиб. матем. журн., 2012, Т. 53, № 6, с. 1292-1309.
17. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства // пер. с англ. А. Л. Онищика и А. Н. Щетиниина М.: Факториал Пресс, 2005.

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Быстрыговой Анастасии Викторовны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Расшифровка булевых функций из замкнутых классов Поста» являются: Лемма 2, 3, 4, 5, 8-15, Утверждения 2, 4, 5.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 сентября 2016 года по 15 апреля 2018 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org, dl.acm.org по следующим ключевым словам: exact learning, attribute-efficient learning, adaptive learning, covering arrays, 0-separating, self dual functions, covering array, Post's lattice, membership queries, расшифровка функций, покрывающие матрицы, решетка Поста. В выдаче поисковиков было исследовано 24 статьи, 2 тезиса докладов (список см. в Списке литературы к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Гасановым Эльяром Эльдаровичем, д.ф-м.н, профессором кафедры Математической теории Интеллектуальных систем МГУ им. М.В. Ломоносова, а также к.ф-м.н Пивоваровым Александром Павловичем.
- Проведена серия выступлений со всеми результатами данной работы на семинаре "Вопросы сложности алгоритмов поиска" под руководством д.ф-м.н, профессора Гасанова Эльяра Эльдаровича, а также выступление на семинаре "Кибернетика и информатика" под руководством к.ф-м.н, с.н.с кафедры Математической теории Интеллектуальных систем МГУ им. М.В. Ломоносова Галатенко Алексея Владимировича.
- Проведено выступление по результатам двух разделов данной работы на X международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем".
- По материалам данной работы опубликована статья "Параметро-эффективная расшифровка булевых функций из замкнутых классов Поста" в журнале Дискретная математика (http://dx.doi.org/10.4213/dm1540).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором, предоставляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась 30.05.2018. На Смотр представлен текст работы.

Быстрыгова Анастасия Викторовна,

3 мая, 2020,
г. Москва, Россия

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра Математической теории интеллектуальных систем

Быстрыгова Анастасия Викторовна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему: «Расшифровка булевых функций из замкнутых классов Поста»

по направлению «Математика и компьютерные науки»

ВКР рассмотрена и рекомендована к защите
Зав. кафедрой «Математической теории интеллектуальных систем» д.ф.-м.н., профессор

_____ Кудрявцев В. Б.

“ _____” _____ 2018 год

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор

_____ Гасанов Э. Э.

“ _____” _____ 2018 год

Москва — 2018

Аннотация

В работе рассматривается задача параметро-эффективной расшифровки функций из замкнутых классов Поста запросами на значение в рамках точной модели расшифровки. Для каждого класса решетки замкнутых классов Поста цветом показано, какого рода оценка сложности расшифровки для него получена, а формой отражается источник ее получения: треугольником выделены классы, для которых результаты были получены ранее в других работах, квадратом — остальные классы.

Abstract

An exact attribute-efficient learning of functions from Post's closed classes using membership queries is considered in this work. We color every closed class from Post's lattice according to the type of learning complexity. If the complexity of the class learning is known from other articles, it will be depicted on the picture using a triangle, otherwise using a square.

Выпускная квалификационная работа студентки группы М2 направления «Математика и компьютерные науки» Быстрыговой Анастасии Викторовны на тему «Расшифровка булевых функций из замкнутых классов Поста»

Содержание

1 Введение **4**

2 Основные понятия и формулировка результатов **7**

3 Вспомогательные определения и утверждения **8**

4 Классы C_i **13**

5 Классы A_i **16**

6 Классы D_i **16**

7 Классы $F_j^i, 1 \leq j \leq 4$ **20**

8 Классы S_i **26**

9 Классы L_i **26**

10 Классы O_i **27**

11 Заключение **28**

Список литературы **29**

Студентка Быстрыгова Анастасия Викторовна

Научный руководитель проф. Гасанов Эльяр Эльдарович

1 Введение

С 1930–1950 годов после того как Э. Пост описал все замкнутые классы двузначной логики в своих работах [1,2], стали изучаться разные задачи, связанные с этими классами. Например, было интересно как можно реализовать автоматами булевые функции из замкнутых классов Поста, базисы какой длины существуют для этих классов. Результаты о сложности автоматной реализации рассматривались в работе [3], все спектры (множества длин базисов) были получены в работе [4].

Отдельное направление исследований было связано с расшифровкой функций из этих классов. Под расшифровкой функции из заданного класса F понимают игру между учеником и учителем, в которой учитель загадывает одну функцию из класса F, а ученик, зная этот класс F полностью, задавая запросы учителю разрешенного типа, получает ответы от учителя и на основе этих ответов должен восстановить какую-то информацию про загаданную функцию.

Причем существует несколько моделей расшифровки, и выбор модели определяет то, как происходит процесс расшифровки и что является его результатом. Наиболее популярны две модели:

- модель точной расшифровки (exact learning)

  В этой модели ученик сам выбирает запросы и его цель — полностью восстановить вектор значений загаданной функции.

- модель вероятно примерно точной расшифровки (probably approximately correct learning, PAC)

  В этой модели не ученик выбирает запрос, запрос выбирается в соответствии с заданным на множестве всех запросов вероятностным распределением. Цель — восстановить вектор значений загаданной функции так, чтобы вероятность ошибки была небольшой.

Чтобы оценить насколько быстро можно расшифровать функции из того или иного класса, вводят понятие сложности расшифровки как максимальное число запросов, которое надо задать учителю для расшифровки самой “плохой” функции.

Типы запросов также бывают различные. Чаще встречаются:

- запросы на значение (membership query) [5–9]: ученик выбирает набор, учитель говорит значение функции на выбранном наборе.

- запросы на сравнение [10,11]: ученик выбирает пару наборов, а учитель возвращает в ответ знак разности значений функций на этих наборах.

- equivalence query [12, 13]: ученик выбирает функцию h, учитель отвечает “ДА”, если $f \equiv h$, иначе выдает набор b, на котором значения функций h, f отличаются.

- superset (subset) query [12, 13]: ученик выбирает функцию h, учитель отвечает “ДА”, если $f \Rightarrow h$ ($h \Rightarrow f$), иначе выдает набор b такой, что $h(b) \neq f(b) = 1$ ($h(b) \neq f(b) = 0$).

В дальнейшем в работе речь будет идти только о расшифровке в рамках модели точной расшифровки запросами на значение.

Один из первых классов, расшифровкой функций из которого занялись исследователи, стал класс монотонных функций. Он рассматривался в работах [6, 7, 14–16]. В 1968 году Ж. Ансель предложил алгоритм [16], благодаря которому он получил точную оценку сложности расшифровки монотонных функций от n переменных

$$C_n^{[n/2]} + C_n^{[n/2]+1}.$$

В. Осокина интересовал вопрос сложности расшифровки монотонных функций от n переменных, где не более k переменных существенных. В [7] им был получен порядок сложности расшифровки монотонных функций

$$\frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n.$$

П. Дамашке в [6, 14] помимо монотонных рассматривал и расшифровку всех функций алгебры логики в целом (класс C_1 решетки замкнутых классов Поста). Уже с этих работ стало понятно, что задача расшифровки функций из замкнутых классов Поста нередко сводится к задаче построения binary covering array для заданных чисел: арности n, оценки сверху на число существенных переменных k.

Binary covering arrays являются частным случаем ортогональных массивов. Сам термин "covering array" был введен в работе [17] и с тех пор прижился. Binary covering array — это бинарная матрица, у которой n столбцов, при фиксации любых k стобцов из которых в этих выбранных столбцах содержатся все 2^k двоичных наборов-строк.

Изучение этих матриц представляет интерес в силу их разных применений. Причем в приложениях могут не ограничиваются алфавитом $\{0, 1\}$, а брать более мощный алфавит. Наиболее известное применение covering arrays — это софтверное и хардверное тестирование, предложенное в [18]. Предположим, у программы n входных параметров, где каждый аргумент может принимать v значений. Тогда рассмотрим covering array с n столбцами, где каждый элемент принимает значение от 0 до $v-1$ включительно и при фиксации любых k столбцов встречаются в строках все v^k комбинаций. Каждую строку такой матрицы можно рассматривать как тест. Благодаря такой матрице, можно проверить корректность работы программы на разных

комбинациях любых k параметров. Ясно, что чем меньше строк в матрице, тем меньше тестов придется сделать.

Другое необычное приложение оценок на число строк в covering arrays заметил Хартман [19] в задаче о слепых роботах на прямой (blind dyslectic synchronized robots on a line), рассматриваемой в [20], благодаря этому он сумел понизить имеющуюся тогда оценку [21] на $]\log_2 n[$.

Как выяснилось в [6,14], что и в расшифровке функций находят свое применение binary covering arrays. П. Дамашке показал в [6], что булеву функцию, зависящую от n переменных, не более k из которых существенных, можно расшифровать за не более $\alpha(n,k) + k\log n$ запросов на значение, приведена тривиальная нижняя оценка $\alpha(n,k)$, где $\alpha(n,k)$ — минимальное число строк в binary covering array для чисел n, k.

Хотелось бы оценить число $\alpha(n,k)$, но к сожалению на данный момент неизвестна асимптотика, или даже порядок этой функции, хотя вопрос построения binary covering array для n, k с наименьшим числом строк $\alpha(n,k)$ изучается давно [17,22–26], но пока лишь получены некие неравенства и соотношения.

1. В [24] получена асимптотическая оценка $\alpha(n,2) = \log_2 n(1+o(1))$ при $n \to \infty$.

2. $\alpha(n,k) \le \frac{k-1}{\log_2 \frac{2^k}{2^k-1}} \cdot \log_2 n$.

   Согласно [26], при $k \to \infty$ правая часть асимптотически равна $2^k(k-1)\ln 2 \cdot \log_2 n$.

3. $\alpha(n,k) \ge 2\alpha(n-1,k-1)$.

4. В [25] для $k > 1$ при $n \to \infty$ показана нижняя оценка

$$\alpha(n,k) \ge 2^{k-2} \cdot \alpha(n-k+2,2) = 2^{k-2}\log_2(n-k+2)(1+o(1)).$$

5. $\alpha(n,1) = 2$ для любого натурального n.

Про расшифровку функций из классов решетки Поста было много исследований, поэтому хочется собрать все результаты по всем классам и понять, на сколько сложна расшифровка функций из разных классов.

В данной работе собраны известные результаты по расшифровке запросами на значение в рамках модели точной расшифровки для классов решетки Поста, для ранее неосвещавшихся классов приведены оценки.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. профессору Э. Э. Гасанову за научное руководство и помощь в работе, а также к.ф.-м.н. А. П. Пивоварову за ценные замечания и предложения по тексту работы.

2 Основные понятия и формулировка результатов

Пусть F — некоторый класс функций. Под $F(n,k)$ будем понимать множество функций из F, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, из которых не более k существенные.

Под *алгоритмом расшифровки* будем понимать условный эксперимент, который генерирует последовательно запросы на значение к функции в зависимости от ответов на предыдущие запросы. Говорим, что *алгоритм расшифровывает функцию* $f \in F(n,k)$, если значения функции на наборах-запросах, заданных алгоритмом, однозначно определяют вектор значений фукнции $f \in F(n,k)$.

Под $\varphi(A,f)$ будем понимать число запросов на значение функции, требуемое алгоритму (ученику) A, для расшифровки $f \in F(n,k)$.

$T(F,n,k)$ — множество всех алгоритмов расшифровки функций из $F(n,k)$.

Определим через $\varphi(F,n,k) = min_{A \in T(F,n,k)} max_{f \in F(n,k)} \varphi(A,f)$ минимальное число запросов, которое задаст наилучший алгоритм на самой худшей для себя функции из $F(n,k)$.

Далее будем говорить только про параметро-эффективную расшифровку, поэтому считаем, что k мало по сравнению с n, то есть $k = o(n)$.

Напомним обозначения замкнутых классов Поста (рис. 1). Классы из "правой" половины решетки Поста заведомо опустим, так как они являются двойственными к классам из "левой" половины, следовательно задача расшифровки классов из "правой" половины сводится к задаче расшифровки классов из "левой"половины.

C_1 — все функции двузначной логики.

C_2 — все функции, сохраняющие 1.

C_3 — все функции, сохраняющие 0.

C_4 — пересечение C_2, C_3.

A_1 — все монотонные функции.

A_2 — все монотонные функции, сохраняющие 1.

A_3 — все монотонные функции, сохраняющие 0.

A_4 — пересечение A_2, A_3.

F_4^i — класс функций, таких что для любого j $(2 \leq j \leq i)$ верно, что любые j наборов, на которых f обращается в 0, имеют общую нулевую компоненту.

F_3^i — пересечение класса F_4^i и A_2.

F_1^i — пересечение класса F_4^i и C_4.

F_2^i — пересечение класса F_4^i и A_4.

D_3 — все самодвойственные функции.

D_1 — все самодвойственные функции, сохраняющие 0.

D_2 — пересечение классов D_3, F_2^2.

S_1 — все логические суммы вида $x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_k}$.

S_3 — S_1 и константа 1.

S_5 — S_1 и константа 0.

S_6 — объединение классов S_3, S_5.

L_1 — все линейные функции.

L_5 — пересечение L_1, D_3.

L_2 — пересечение L_1, C_2.

L_3 — пересечение L_1, C_3.

L_4 — пересечение L_2, L_3, L_5.

$O_9 = \{1, 0, x, \bar{x}\}$.

$O_6 = \{0, 1, x\}$.

$O_4 = \{x, \bar{x}\}$.

$O_5 = \{1, x\}$.

$O_8 = \{0, x\}$.

$O_1 = \{x\}$.

На рисунке 1 показано цветом, какого рода получена оценка сложности расшифровки. Если класс выделен желтым цветом, то имеется точная оценка. Если класс выделен красным, то для него получена асимптотическая оценка, если зеленым, то оценка по порядку, если синим, то условная асимптотическая оценка. Под условной асимптотической оценкой будем понимать то, что оценка асипмтотически равна величине, связанной с $\alpha(n, k)$, асимптотику которой мы не знаем. Если класс выделен треугольником, то это результат, полученный ранее в других работах, далее все такие результаты будут называться теоремами с указанием источника и автора. Если класс выделен квадратом, то результат ранее в литературе не встречался и впервые упоминается в данной работе, далее такие результаты в работе будут называться утверждениями.

3 Вспомогательные определения и утверждения

Через $M_0(n, k)$ обозначим матрицу с наименьшим числом строк и n столбцами, такую, что в любых k столбцах встретятся все 2^k наборов кроме быть может набора из всех нулей, назовем ее почти покрывающей типа 0, число строк в ней обозначим за $\beta_0(n, k)$.

Через $M_1(n, k)$ обозначим матрицу с наименьшим числом строк и n столбцами, такую, что в любых k столбцах встретятся все 2^k наборов кроме быть может набора из всех единиц, назовем ее почти покрывающей типа 1, число строк в ней обозначим за $\beta_1(n, k)$.

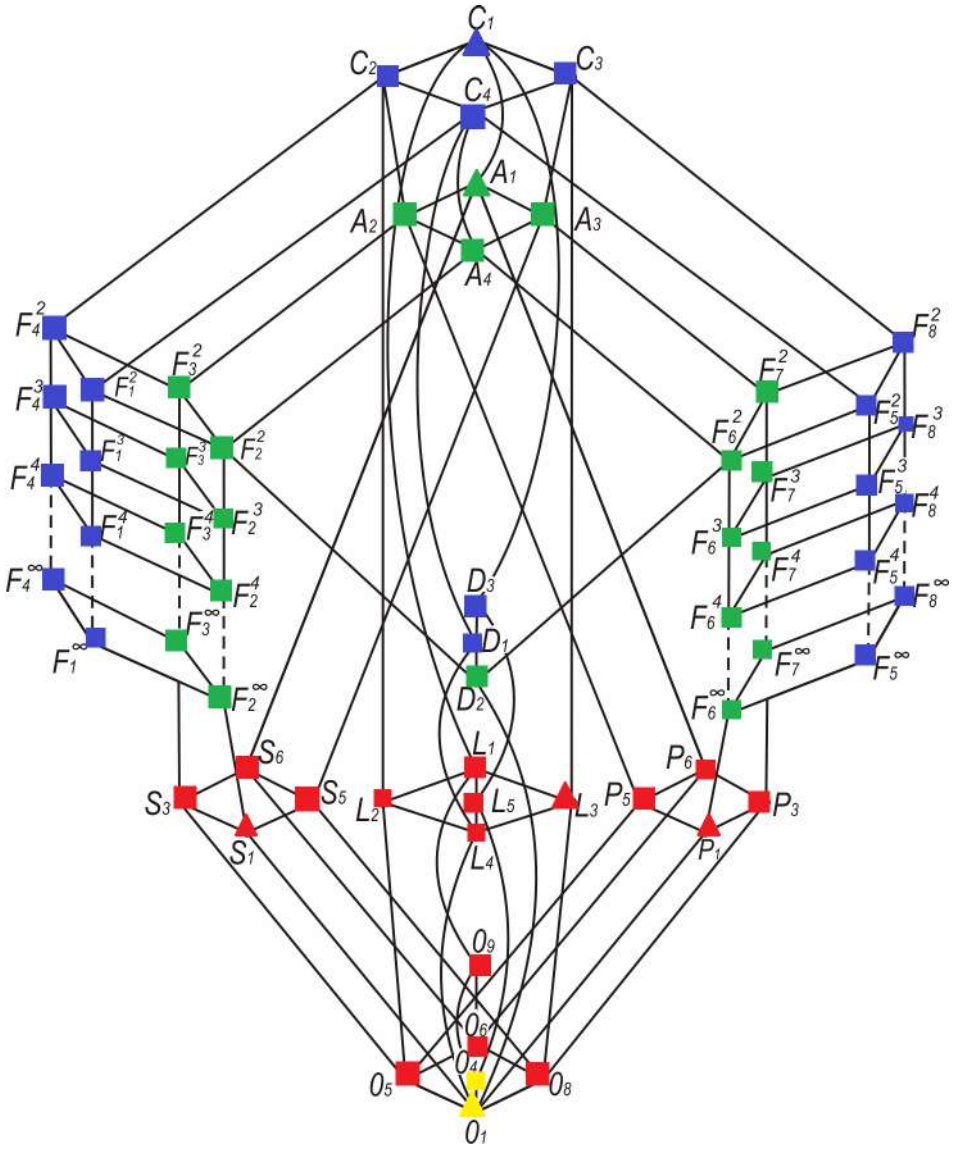

C_1
C_2
C_3
C_4
A_1
A_2
A_3
A_4
F_4^2
F_4^3
F_4^4
F_4^∞
F_1^2
F_1^3
F_1^4
F_1^∞
F_3^2
F_3^3
F_3^4
F_3^∞
F_2^2
F_2^3
F_2^4
F_2^∞
F_8^2
F_8^3
F_8^4
F_8^∞
F_7^2
F_7^3
F_7^4
F_7^∞
F_5^2
F_5^3
F_5^4
F_5^∞
F_6^2
F_6^3
F_6^4
F_6^∞
D_3
D_1
D_2
S_6
S_3
S_5
S_1
L_1
L_2
L_5
L_3
L_4
P_6
P_5
P_3
P_1
O_9
O_6
O_4
O_5
O_8
O_1

Рис. 1:

Выберем произвольные различные k переменных из n и присвоим выбранным переменным произвольным образом значения из $\{0,1\}$. Полученные k переменных с присвоенными им значениями назовем *фиксацией*. Будем говорить, что *запрос содержит фиксацию*, если переменные в фиксации имеют такие же значения, как и эти же переменные в запросе.

Обозначим через $M(n,k)$ бинарную матрицу с наименьшим числом строк и n стобцами, такую, что в любых k стобцах встретятся все 2^k двоичных наборов-строк. Число строк в такой матрице обозначим через $\alpha(n,k)$, а саму такую матрицу будем называть покрывающей.

Для упрощения будем считать $\alpha(n,0)=0$ для любого натурального n.

Обозначим $S_{n,k} = \max_{p\in\mathbb{N},1\le p<k}(2^p-1)\alpha(n-p,k-p)$.

Под $a\vee b$, где a,b — векторы одной размерности, будем понимать вектор, каждая компонента которого получается дизъюнкцией соответствующих компонент векторов a,b.

Будем писать $A \gtrsim B$, если существует такая положительная константа c, что, начиная с некоторого номера n_0, $B(n) \le c\cdot A(n)$. Если $A \gtrsim B, B \gtrsim A$, то будем говорить, что A и B равны по порядку при $n\to\infty$ и обозначать $A \asymp B$.

Будем писать $A(n)=o(B(n))$, если $\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{B(n)}=0$.

Будем говорить, что $A(n),B(n)$ асимптотически равны и писать $A(n)\sim B(n)$, если $\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{B(n)}=1$.

Под $]x[$ будем понимать наименьшее целое, которое больше или равно x.

Под операцией $\oplus$ будем понимать сложение по модулю 2.

Под операцией $|$ будем понимать дизъюнкцию (логическое ИЛИ).

Под операцией & будем понимать конъюнкцию (логическое И).

Лемма 1. *(P. Damaschke [6]) Пусть f — булевская функция, и пусть известны два набора $X=x_1x_2\dots x_n$ и $Y=y_1y_2\dots y_n$, что $f(x_1x_2\dots x_n)=0$, $f(y_1y_2\dots y_n)=1$. Тогда за не более $\log_2 n$ запросов можно найти номер одной из существенных переменных.*

Приведем доказательство данного факта из [6], поскольку оно облегчает понимание дальнейших выкладок.

Доказательство. По двум наборам X, Y построим третий $Z=z_1z_2\dots z_n$. Если $x_i=y_i$, то положим $z_i=x_i$. Иначе примерно половину переменных в Z зафиксируем как зафиксированы они в наборе X, остальные - как в наборе Y. Запросим значение на наборе Z. Если значение равно 0, то положим $X=Z$, иначе положим $Y=Z$. Заметим, что новая пара наборов X, Y отличается в как минимум 2 раза меньшем числе переменных, чем было до этого. Продолжаем этот процесс, пока

наборы отличаются в более чем одной переменной. Эта отличающая переменная и будет существенной. □

Лемма 2. *Справедливо неравенство* $\beta_i(n,k) \geq \alpha(n,k) - 1, i \in \{0,1\}$.

Доказательство. Докажем для $\beta_1(n,k)$, для $\beta_0(n,k)$ доказательство аналогичное. Для этого покажем, что $\alpha(n,k)$ ограничена сверху величиной $\beta_1(n,k)+1$. Любая почти покрывающая матрица типа 1 либо уже какой-то binary covering array с быть может неминимальным числом строк $\alpha_1(n,k)$, либо становится binary covering array после добавления к ее строкам строки из всех единиц. Следовательно,

$$\beta_1(n,k) + 1 \geq \alpha_1(n,k) \geq \alpha(n,k).$$

Значит $\beta_1(n,k) \geq \alpha(n,k) - 1$. □

Лемма 3. *Справедливо соотношение* $k \log_2 n = o(\alpha(n,k))$ *при* $k = o(n), k, n \to \infty$.

Доказательство. Из условий леммы и определения $\alpha(n,k)$ имеем

$$\frac{k \log_2 n}{\alpha(n,k)} \geq 0.$$

Используем нижнюю оценку на $\alpha(n,k)$ [25] при оценке отношения $\frac{k \log_2 n}{\alpha(n,k)}$.

$$\frac{k \log_2 n}{\alpha(n,k)} \leq \frac{k \log_2 n}{2^{k-2} \log_2 (n-k+2)(1+o(1))}$$

Учитывая, что $k = o(n)$, $k, n \to \infty$, применим теорему 3.14 [27] ("теорему о двух миллиционерах") к неравенствам и получим соотношение леммы. □

Лемма 4. *Справедливо соотношение* $k \log_2 n = o((2^p - 1)\alpha(n-p, k-p))$ *при* $1 \leq p < k-1, k = o(n), k, n \to \infty$.

Доказательство. Из условий леммы и определения $\alpha(n,k)$ имеем

$$\frac{k \log_2 n}{(2^p - 1)\alpha(n-p, k-p)} \geq 0.$$

Используем нижнюю оценку на $\alpha(n,k)$ [25] при оценке отношения $\frac{k \log_2 n}{(2^p-1)\alpha(n-p,k-p)}$.

$$\frac{k \log_2 n}{(2^p - 1)\alpha(n-p, k-p)} \leq \frac{k \log_2 n}{(2^p - 1)2^{k-p-2} \log_2 (n-k+2)(1+o(1))}$$

Учитывая, что $k = o(n), p < k$, значит $p = o(n)$, $k, n \to \infty$, применим теорему 3.14 [27] ("теорему о двух миллиционерах") к неравенствам и получим соотношение леммы. □

Лемма 5. *При* $k, n \to \infty, k = o(n)$

$$S_{n,k} = \max_{p \in \mathbb{N}, 1 \le p < k} (2^p - 1)\alpha(n-p, k-p) > (2^{k-1} - 1)\alpha(n-(k-1), k-(k-1)).$$

Доказательство. Рассмотрим $(2^p - 1)\alpha(n-p, k-p)$ при $p = k-1$, $p = k-2$ и $k, n \to \infty, k = o(n)$.

$$(2^{k-1} - 1)\alpha(n-(k-1), k-(k-1)) = (2^{k-1} - 1)\alpha(n-(k-1), 1) = 2^k - 2$$

$$(2^{k-2} - 1)\alpha(n-(k-2), k-(k-2)) = (2^{k-2} - 1)\alpha(n-(k-2), 2) = (2^{k-2} - 1)\log_2 n(1 + o(1))$$

Здесь последнее равенство вытекает из [24].

Получается при $k, n \to \infty, k = o(n)$

$$(2^{k-1} - 1)\alpha(n-(k-1), k-(k-1)) < (2^{k-2} - 1)\alpha(n-(k-2), k-(k-2))$$

Следовательно, при $k, n \to \infty, k = o(n)$ максимум выражения $(2^p - 1)\alpha(n-p, k-p)$ достигается точно не на $p = k-1$, поэтому $S_{n,k} > (2^{k-1} - 1)\alpha(n-(k-1), k-(k-1))$. □

Лемма 6. *Пусть* Q_1, Q_2 *— классы решетки Поста, причем* Q_1 *вкладывается в класс* Q_2. *Пусть* $\varphi(Q_2, n, k) \le B$ *и* $A \le \varphi(Q_1, n, k)$, *тогда* $\varphi(Q_1, n, k) \le B$ *и* $A \le \varphi(Q_2, n, k)$.

Доказательство. Покажем, что

$$\min_{A \in T(Q_2, n, k)} \max_{f \in Q_1(n,k)} \varphi(A, f) \ge \min_{B \in T(Q_1, n, k)} \max_{f \in Q_1(n,k)} \varphi(B, f).$$

Для фиксированной функции $f \in Q_1(n, k)$ алгоритм $A \in T(Q_2, n, k)$ по определению представляет собой последовательность запросов на значение: $q_1, q_2, \ldots, q_{\varphi(A,f)}$. При этом в начале работы алгоритма все функции из $Q_2(n, k)$ кандидаты на ответ. После первого запроса становится понятно, что часть функций из $Q_2(n, k)$ не может быть ответом, после второго запроса еще быть может про какие-то функции станет понятно, что они не могут быть ответом и т.д. Получим последовательность множеств функций $C_0 = Q_2(n, k), C_1, C_2, \ldots, C_{\varphi(A,f)} = \{f\}$, где $C_i (i > 0)$ — подмножество функций из $Q_2(n, k)$ — кандидатов на ответ после заданных первых i вопросов алгоритмом A. Заметим, что для всех функций из $Q_1(n, k)$ алгоритм $A \in T(Q_2, n, k)$ является также алгоритмом расшифровки из $T(Q_1, n, k)$, так как представляет собой последовательность запросов, которые однозначно определяют загаданную функцию $f \in Q_1(n, k)$, причем быть может какие-то запросы ненужные, так как не позволяют уменьшить мощность множества функций-кандидатов на ответ, то есть такие запросы q_i, для которых верно $|C_{i-1}| = |C_i|$. Следовательно, каждый алгоритм

$A \in T(Q_2, n, k)$ лежит в $T(Q_1, n, k)$, но в $T(Q_1, n, k)$ могут лежать еще какие-то алгоритмы расшифровки B, поэтому в силу свойств функции min получаем

$$\min_{A \in T(Q_2,n,k)} \max_{f \in Q_1(n,k)} \varphi(A, f) \geq \min_{B \in T(Q_1,n,k)} \max_{f \in Q_1(n,k)} \varphi(B, f).$$

Учитывая это соотношение, определение сложности расшифровки и свойство функции max, получаем цепочку неравенств, из которой и следует утверждение леммы.

$$\varphi(Q_2, n, k) = \min_{A \in T(Q_2,n,k)} \max_{f \in Q_2(n,k)} \varphi(A, f) \geq \min_{A \in T(Q_2,n,k)} \max_{f \in Q_1(n,k)} \varphi(A, f) \geq$$
$$\geq \min_{B \in T(Q_1,n,k)} \max_{f \in Q_1(n,k)} \varphi(B, f) = \varphi(Q_1, n, k).$$

□

Лемма 7. *(мощностная нижняя оценка) Сложность расшифровки булевых функций из произвольного класса $K(n, k)$ мощности N с помощью запросов на значение функции не меньше $\log_2 N$, то есть $\varphi(K, n, k) \geq \log_2 N$.*

Обоснование можно найти, например, в [7].

4 Классы C_i

Теорема 1. *(P. Damaschke [6]) Справедливы неравенства*

$$\alpha(n, k) \leq \varphi(C_1, n, k) \leq \alpha(n, k) + k \log_2 n.$$

Следовательно, $\varphi(C_1, n, k) = \alpha(n, k) \cdot (1 + o(1))$ при $k, n \to \infty$.

Приведем доказательство неравенств из [6].

Доказательство. Сначала получим верхнюю оценку. Для этого опросим $\alpha(n, k)$ строк какой-то покрывающей матрицы.

1. Если существуют два набора, на котором загаданная функция принимает разные значения, то перейти к шагу 3, иначе — загаданная функция константа, СТОП.

2. Пусть уже найдено q существенных переменных. Рассмотрим 2^q подфункций загаданной функции, получающихся при всевозможных заменах нулями и единицами уже найденных существенных переменных. Если существует подфункция, которая не константа, тогда возьмем любые два набора, на которых соответствующая подфункция принимает разные значения и перейти к шагу 3. Иначе, СТОП.

3. При помощи алгоритма леммы 1 найдем номер новой существенной переменной, потратив не более $\log_2 n$ запросов. Перейти к шагу 2.

Покажем, что в момент, когда произошел СТОП на шаге 2, найдены все существенные переменные и известен весь вектор значений функции. Пусть есть хотя бы одна ненайденная существенная переменная. По определению существенной переменной, найдутся два набора, отличающиеся только в этой переменной, значения функции на которых будут различаться. Но такие два набора будут относиться к одной и той же подфункции из 2^q штук, так как уже найденные существенные переменные в этих наборах будут зафиксированы одинаково. Но раз произошел СТОП на шаге 2, все 2^q подфункций были константы, пришли к противоречию. Значит, нет ненайденных существенных переменных. Вектор значений загаданной функции уже известен в силу того, что известны номера существенных переменных и значения на всех фиксациях k переменных из n, в том числе на фиксациях существенных переменных с быть может некоторыми фиктивными переменными, если $q < k$.

Чтобы получить нижнюю оценку, достаточно на все запросы ученика отвечать 1 и тогда он до последнего запроса не поймет, перед ним константа или не константа.

Учитывая лемму 3, имеем $\varphi(C_1, n, k) = \alpha(n, k) \cdot (1 + o(1))$ при $k, n \to \infty$. □

Утверждение 1. *Имеет место неравенство*

$$\alpha(n, k) - 1 \leq \varphi(C_2, n, k) \leq \alpha(n, k) + k \log n.$$

Следовательно, $\varphi(C_2, n, k) = \alpha(n, k) \cdot (1 + o(1))$ *при* $k, n \to \infty$.

Доказательство. Верхняя оценка, согласно лемме 6, наследуется от класса $C_1(n, k)$ (теоремы 1).

Для получения нижней оценки на все запросы ученика будем отвечать 1. Пока ученик не опросит все фиксации k переменных из n, он не поймет ему загадали константу 1 или функцию с ровно одним нулем в векторе значений, полученном при удалении всех фиктивных переменных. Так как $f \in C_1(n, k)$, то $f(1, \ldots, 1) = 1$, следовательно ученику не интересны фиксации k переменных из n из одних единиц. Если он и задаст запрос, содержащий такую фиксацию, то он все равно получит в ответ 1, то есть он не поймет, именно переменные этой фиксации из одних единиц и есть набор существенных переменных или нет. Следовательно, ученик должен опросить все строки почти покрывающей матрицы типа 1. Учитывая лемму 2, получаем $\alpha(n, k) - 1 \leq \varphi(C_2, n, k)$. □

Утверждение 2. *При* $n > 1$ *имеет место неравенство*

$$2\alpha(n-1, k-1) - 2 \leq \varphi(C_4, n, k) \leq 2\alpha(n-1, k-1) + k \log n.$$

Следовательно, $\varphi(C_4, n, k) = 2\alpha(n-1, k-1) \cdot (1 + o(1))$ *при* $k, n \to \infty$.

Доказательство. Получим сначала верхнюю оценку.

$f(0,\ldots,0)=0, f(1,\ldots,1)=1$. Воспользуемся алгоритмом леммы 1 для нахождения существенной переменной x_j по этим двум наборам. После этого возьмем покрывающую матрицу $M(n-1,k-1)$, ее столбцы будут соответствовать остальным переменным. Опросим строки этой матрицы, считая сначала, что $x_j=0$, затем аналогично проделаем, считая, что $x_j=1$. В итоге у нас будет опрошена вся binary covering array с возможно неминимальным числом строк $2\alpha(n-1,k-1)$. По этой матрице затратив быть может еще $(k-1)\log n$ запросов для нахождения существенных переменных алгоритмом теоремы 1, мы расшифруем всю функцию.

Получим нижнюю оценку из утверждения. Играем за учителя, сдадим ученику сразу информацию, что переменная x_1 существенная. На все его запросы $a_1a_2\ldots a_n$ будем отвечать a_1. Покажем, что он будет вынужден опросить строки покрывающей матрицы типа 0 $M_0(n-1,k-1)$, где столбцам матрицы соответствуют переменные $x_2,\ldots,x_n$, а $x_1=0$, и строки покрывающей матрицы типа 1 $M_1(n-1,k-1)$, где столбцам матрицы соответствуют переменные $x_2,\ldots,x_n$, а $x_1=1$.

Для этого покажем, что следующие функции лежат в $C_4(n,k)$.

1. Функция, которую получит ученик, если сделает все $\beta_0(n-1,k-1)+\beta_1(n-1,k-1)$ запросов, равна x_1. Она очевидно лежит в $C_4(n,k)$.

2. Пусть ученик задал строго меньше $\beta_0(n-1,k-1)+\beta_1(n-1,k-1)$ запросов. Рассмотрим набор $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, содержащий неопрошенную фиксацию $k-1$ переменных из переменных $x_2,\ldots,x_n$. Хотя бы одна такая фиксация точно найдется, потому что были опрошены не все строки матрицы $M_0(n-1,k-1)$ при $x_1=0$, либо не все строки матрицы $M_1(n-1,k-1)$ при $x_1=1$. Переменные, вошедшие в эту неопрошенную фиксацию, обозначим за $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-1}}$ $(1<i_1<i_2<\ldots<i_{k-1})$. Рассмотрим функцию от переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$, у которой множество существенных переменных в точности равно $\{x_1,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-1}}\}$. Вектор значений этой функции при удалении всех фиктивных переменных имеет следующий вид: значение на наборе $(a_1,a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{k-1}})$ равно $\overline{a_1}$, а на остальных наборах значение совпадает со значением переменной x_1. Следует проверить, что действительно все переменные $x_1,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{k-1}}$ являются существенными. Переменная x_1 существенная, так как на любой паре наборов, отличающихся только в переменной x_1, где ни один набор из пары не равен набору $(a_1,a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{k-1}})$, значения отличаются в силу задания вектора значений функции. Такая пара наборов существует, так как $n>1$. Для переменной $x_{i_j}, j=\overline{1,k-1}$ в качестве такой пары наборов возьмем наборы $(a_1,a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{k-1}})$ и $(a_1,a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_{j-1}},\overline{a_{i_j}},a_{i_{j+1}},\ldots,a_{i_{k-1}})$. Значение функции на первом наборе равно $\overline{a_1}$, на втором — a_1. Поэтому пере-

менные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}$ существенные. Также действительно, значение функции на наборе $(0, \ldots, 0)$ равно 0, а наборе $(1, \ldots, 1)$ — 1. Следовательно, заданная функция лежит в $C_4(n, k)$ и она не равна x_1 при $n > 1$.

Из этого следует, что ученик вынужден задать все $\beta_0(n-1, k-1) + \beta_1(n-1, k-1)$ запросов, потому что до последнего момента он не знает, у загаданной функции ровно одна существенная переменная или больше. □

5 Классы A_i

Теорема 2. *(В. Осокин [7]) Справедливо соотношение*

$$\varphi(A_1, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$$

при $k, n \to \infty$.

Утверждение 3. *Справедливы соотношения*

- $\varphi(A_2, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$ *при* $k, n \to \infty$;
- $\varphi(A_3, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$ *при* $k, n \to \infty$;
- $\varphi(A_4, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$ *при* $k, n \to \infty$.

Доказательство. Поскольку $A_2(n, k), A_3(n, k), A_4(n, k)$ — подмножества класса $A_1(n, k)$, то верхняя оценка для них также же, как и для класса $A_1(n, k)$, по порядку не превосходит $\frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$.

Согласно [7], нижняя оценка для класса $A_1(n, k)$ мощностная. Если покажем, что мощность классов $A_2(n, k), A_3(n, k), A_4(n, k)$ почти такая же, как и для класса $A_1(n, k)$, то нижняя оценка класса $A_1(n, k)$ будет верна и для классов $A_2(n, k), A_3(n, k), A_4(n, k)$.

Действительно, класс $A_2(n, k) = A_1(n, k) \setminus \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0\}, A_3(n, k) = A_1(n, k) \setminus \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1\}, A_4(n, k) = A_2(n, k) \setminus \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1\}$ □

6 Классы D_i

Лемма 8. *Имеет место неравенство* $\varphi(D_3, n, k) \geq \alpha(n-1, k-1)$.

Доказательство. В качестве отгадываемой функции выберем такую, что у нее подфункция $f(0, x_2, \ldots, x_n)$ — константа 0, подфункция $f(1, x_2, \ldots, x_n)$ — константа 1.

На запрос ученика $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем отвечать x_1.

Покажем, что ученик будет вынужден задать при такой системе ответов на его запросы как минимум $\alpha(n-1, k-1)$ запросов.

Рассмотрим все запросы, что задаст ученик. Каждый запрос преобразуем следующим образом:

- если $x_1 = 0$, то оставим запрос без изменений;
- если $x_1 = 1$, то инвертируем все переменные в запросе.

Теперь рассмотрим преобразованные запросы. Пусть различных запросов среди них строго меньше $\alpha(n-1, k-1)$, значит ученик не опросил какую-то фиксацию $k-1$ переменной из переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Если бы все фиксации $k-1$ переменных из переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$ были б опрошены, тогда $\alpha(n-1, k-1)$ изначально было не минимально. Значит, ученик действительно одну из фиксаций не опросил. Фиксируем одну такую фиксацию. Рассмотрим любой набор, содержащий ее, мы могли ответить на этот набор в качестве запроса как x_1, так и $\bar{x_1}$. Если бы мы ответили на этот набор-запрос значение переменной x_1, тогда загаданная функция была равна $x_1 \in D_3(n, k)$. Если бы мы ответили $\bar{x_1}$, то все переменные из фиксации и переменная x_1 — существенные, а остальные — фиктивные. Получилась бы самодвойственная функция, у которой при выбрасывании всех фиктивных переменных ($n-k$ штук) вектор значений в первой половине содержит ровно одну единицу, то есть функция из $D_3(n, k)$. Таким образом, не задав последнего $\alpha(n-1, k-1)$-го запроса ученик не знает, какая из двух функций перед ним. □

Лемма 9. *Имеет место неравенство* $\varphi(D_3, n, k) \leq \alpha(n-1, k-1) + k \log n + 1$.

Доказательство. Запрашиваем значение на наборе веса 0. В силу самодвойственности f знаем, чему равно ее значение на наборе веса n. Пользуемся алгоритмом леммы 1 для нахождения существенной переменной по двум наборам, на которых значение функции отличается. Соответственно, за $\log_2 n$ найдем одну существенную переменную x_i.

Строим покрывающую матрицу $M(n-1, k-1)$, вставляем в нее i-й столбец из нулей, опрашиваем все строки этой матрицы. Теперь возьмем матрицу, где строки — это инвертированные строки нашей матрицы. Ответы на запросы-строки второй матрицы в силу самодвойственности функции восстанавливаются по ответам по первой матрице. Заметим, что все фиксации переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кроме x_i содержатся в первой матрице и во второй матрице. Все фиксации, в которых участвует переменная x_i, если она равна 0, есть в первой матрице, если она равно 1, во второй.

Теперь у нас есть найденная одна существенная переменная и построена какая-то покрывающая матрица с быть может не минимальным числом строк, далее найдем все остальные существенные переменные алгоритмом теоремы 1.

Итого, задали $1 + k \log n + \alpha(n-1, k-1)$ запросов. $\square$

Лемма 10. *Имеет место неравенство* $\varphi(D_1, n, k) \geq \alpha(n-1, k-1) - 1$.

Доказательство. Ученик знает, что значение функции на наборе $(0, \ldots, 0)$ равно 0, а на наборе $(1, \ldots, 1)$ в силу самодвойственности функции — 1.

В качестве отгадываемой функции выберем такую, что у нее подфункция $f(0, x_2, \ldots, x_n)$ — константа 0, подфункция $f(1, x_2, \ldots, x_n)$ — константа 1.

На запрос ученика $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем отвечать x_1.

Покажем, что ученик будет вынужден задать при такой системе ответов на его запросы как минимум $\beta_0(n-1, k-1)$ запросов.

Рассмотрим все запросы, что задаст ученик. Каждый запрос преобразуем следующим образом:

- если $x_1 = 0$, то оставим запрос без изменений;
- если $x_1 = 1$, то инвертируем все переменные в запросе.

Теперь рассмотрим преобразованные запросы. Пусть различных запросов среди них строго меньше $\beta_0(n-1, k-1)$, значит ученик не опросил какую-то фиксацию $k-1$ переменной из переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, где не все переменные одновременно равны 0. Если бы все такие фиксации $k-1$ переменных из переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$ были б опрошены, тогда $\beta_0(n-1, k-1)$ изначально было не минимально. Значит, ученик действительно одну из фиксаций не опросил. Фиксируем одну такую фиксацию. Рассмотрим любой набор, содержащий ее, мы могли ответить на этот набор в качестве запроса как x_1, так и $\bar{x_1}$. Если бы мы ответили на этот набор-запрос значение переменной x_1, тогда загаданная функция была равна $x_1 \in D_1(n, k)$. Если бы мы ответили $\overline{x_1}$, то все переменные из фиксации и переменная x_1 — существенные, а остальные — фиктивные. Получилась бы самодвойственная функция, у которой при выбрасывании всех фиктивных переменных ($n-k$ штук) вектор значений в первой половине содержит ровно одну единицу, то есть функция из $D_1(n, k)$. Таким образом, не задав последнего $\beta_0(n-1, k-1)$-го запроса ученик не знает, какая из двух функций перед ним.

Следовательно, ученик вынужден опросить $\beta_0(n-1, k-1)$ запросов, что согласно лемме 2, не меньше $\alpha(n-1, k-1) - 1$.

$\square$

Лемма 11. *Имеет место неравенство*

$$\varphi(D_2, n, k) \gtrsim k \log(n/k) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

при $k, n \to \infty$, $k < n$.

Доказательство. Посчитаем число функций из D_2 арности k_2, где k_2 существенных переменных и k_2 — самое большое четное число, не превосходящее k. Зададим значение функции на вершинах среднего слоя с номером $k_2/2$. Если задаем значение функции на наборе X этого слоя, то противоположный набор лежит в этом же слое. Поэтому если каким-то образом определим значение на половине вершин среднего слоя (попарно непротивоположных), то весь слой будет задан. Значение функции на наборах выше среднего слоя положим равным 1. Противоположные к ним наборы лежат ниже среднего слоя, значение функции на них положим равным 0. Полученная функция самодвойственная. Проверим, что полученная функция лежит в F_2^2, для этого проверим для каждой пары наборов, на которых функция обращается в нуль, имеют ли они общую нулевую компоненту.

1. Возьмем любые два набора a, b ниже среднего слоя. Вес их строго меньше $k_2/2$. Вес набора $a \vee b$ строго меньше k_2. Отсюда следует, что у наборов a, b есть хотя бы одна общая нулевая компонента.

2. Возьмем набор a со слоя ниже среднего, b со среднего слоя. Вес набора a строго меньше $k_2/2$, вес набора b равен $k_2/2$. Вес набора $a \vee b$ строго меньше k_2. Отсюда следует, что у наборов a, b есть хотя бы одна общая нулевая компонента.

3. Возьмем любые два набора a, b со среднего слоя, на которых функция равна 0. Вес каждого в точности равен $k_2/2$. Вес набора $a \vee b$ будет равен k_2 лишь в случае, когда a и b противоложные наборы, но тогда значение на одном из них равно 1, чего не может быть в силу выбора a, b. Значит, вес набора $a \vee b$ строго меньше k_2 и поэтому у наборов a, b имеется общая нулевая компонента.

Теперь посчитаем число способов верным образом задать значение функции на половине вершин среднего слоя, чтобы получилась функция, существенно зависящая от всех своих переменных. Сделаем это аналогично доказательству леммы 3.2 из [7].

Пусть a, b, c — три произвольных набора из слоя $k_2/2$ k_2-мерного булевого куба таких, что их поэлементная дизъюнкция дает в точности единичный набор. Заметим, что такая тройка наборов существует, можно, например, взять наборы следующие

$111\ldots1100\ldots000$

$000\ldots0111\ldots110$

$000\ldots0111\ldots101$

Причем они попарно не являются противоположными, то есть входят в ту половину серединного слоя, что мы собираемся задавать.

Рассмотрим множество функций A из D_2 от k_2 переменных, для которых эти a, b, c являются нижними единицами и все нижние единицы этой функции располагаются в этом слое. Чтобы переменная была существенной для монотонной функции надо,

чтобы она входила хотя бы в одну конъюнкцию минимальной ДНФ этой функции. Конъюнкции, соответствующие наборам a, b, c, содержат все k_2 переменных, следовательно все переменные существенные. Значит число функций в D_2 от k_2 переменных, где все переменные существенные, не меньше чем мощность A, которая равна $2^{\frac{1}{2}\cdot C_{k_2}^{k_2/2}-3}$, то есть каждой вершине среднего слоя из той половины, что собираемся задавать, кроме наборов a, b, c, можно присвоить любое из двух значений.

Следовательно, всего функций от n переменных, не более k из которых существенные, в D_2 не меньше, чем $C_n^{k_2} \cdot 2^{\frac{1}{2}\cdot C_{k_2}^{k_2/2}-3}$. Пользуемся известным неравенством. $(\frac{n}{k})^k \leq C_n^k$.

Получаем, мощностную нижнюю оценку

$$\varphi(D_2, n, k) \geq \log_2 (C_n^{k_2} \cdot 2^{\frac{1}{2}C_{k_2}^{k_2/2}-3}) = \log_2 C_n^{k_2} + \frac{1}{2}\cdot C_{k_2}^{[k_2/2]} - 3 \geq k_2 \log_2 (n/k_2) + \frac{1}{2}\cdot C_{k_2}^{k_2/2} - 3.$$

Аналогично [7] воспользуемся асимптотическим равенством для центральных биномиальных коэффициентов $C_k^{k/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^k}{\sqrt{k}}$ при $k \to \infty$ для получения оценки из утверждения. □

Утверждение 4. *Имеют место следующие соотношения.*

1. $\varphi(D_3, n, k) = \alpha(n-1, k-1) \cdot (1 + o(1))$ *при* $k, n \to \infty$.
2. $\varphi(D_1, n, k) = \alpha(n-1, k-1) \cdot (1 + o(1))$ *при* $k, n \to \infty$.
3. $\varphi(D_2, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$ *при* $k, n \to \infty$.

Доказательство. Соотношение, связанное с классом D_3, следует из лемм 8, 9, 4 при $p = 1$.

Соотношение, связанное с классом D_1, следует из лемм 9, 10, 4 при $p = 1$.

Соотношение, связанное с классом D_2, следует из леммы 11 и теоремы 2.

□

7 Классы $F_j^i, 1 \leq j \leq 4$

Заметим, что ученику известно, что на наборе из всех единиц значение функции из этих классов равно 1, так как они также лежат в классе C_2.

Если на каком-то наборе значение равно 0, то на противоположном значение равно 1, поскольку противоположные наборы не имеют общей нулевой компоненты.

Лемма 12. *Имеет место неравенство* $\varphi(F_4^i, n, k) \geq \alpha(n, k) - 1$.

Доказательство. В качестве загаданной функции выберем константу 1. Тогда ученик будет вынужден опросить все строки почти покрывающей матрицы типа 1. Потому что если ученик не опросит хотя бы одну строку, будет не опрошена хотя бы одна фиксация. На этот запрос учитель мог ответить как 0, так и 1. Если бы учитель ответил 0, то ученик бы понял, что одна из опрошенных этим запросом фиксаций и содержит все номера существенных переменных. □

Лемма 13. *Справедливо неравенство* $\varphi(F_1^i, n, k) \leq S_{n,k} + k \log n + k$.

Доказательство. Найдем первую существенную переменную по наборам $(0, \ldots, 0)$ и $(1, \ldots, 1)$ алгоритмом леммы 1, за не более $\log n$ запросов. Далее следуем к шагу 1.

1. Положим $i = 1$. Перейти к шагу 2.

2. Запросить значение на наборе веса $n - i$, где уже найденные существенные переменные зафиксированы 0. Если оно равно 1, то перейти к шагу 3, иначе перейти к 4.

3. Алгоритмом леммы 1 находим номер новой существенной переменной. Меняем $i = i + 1$. Перейти к шагу 2.

4. Пусть найденные существенные переменные имеют номера $n_1, n_2, \ldots, n_i$. Тогда раз на опрошенном только что наборе функция равна 0, то на любом наборе, где $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x_{n_i} = 1$, функция равна 1. Поэтому мы не тратим запросы на опрос строк матрицы $M(n-i, k-i)$ на переменных с номерами $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_i\}$. СТОП.

Допустим после этого нашли p существенных переменных. Пусть номера найденных существенных переменных $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$. Если $p = k$, то останется опросить значение функции на $2^k - 2 - k$ наборах и тогда полностью расшифруем загаданную функцию. Минус 2 делаем потому, что значение на наборе из всех единиц и на наборе из всех 0, значение функции известно. Минус k, потому что их уже опросили в предыдущем алгоритме.

Иначе, сделаем запрос по строкам следующих $2^p - 1$ матриц.

Q-я матрица $(0 \leq Q < 2^p - 1)$ строится так:

- Берем любую покрывающую матрицу $M(n - p, k - p)$. Столбцы этой матрицы будут соответствовать переменным с номерами $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_p\}$

- Значение найденных существенных переменных будет соответствовать битам двоичного разложения номера Q.

Опросим все такие матрицы.

После этого получится, что мы опросили все фиксации из n столбцов по k. По этой информации согласно алгоритму, описанному в теореме 1, мы сможем полностью восстановить всю функцию, затратив по не более $\log n$ запросов на нахождение каждой из оставшихся существенных переменных.

Итого оценим число запросов

- $p \neq k$

  $p + (2^p - 1)\alpha(n-p, k-p) + k \log n \leq k + S_{n,k} + k \log n.$

- $p = k$

  $\alpha(n-k+1, 1) = 2$

  $k + (2^k - 2 - k) + k \log n \leq (2^k - 2) + k \log n \leq k + (2^{k-1} - 1)\alpha(n-k+1, 1) + k \log n \leq k + S_{n,k} + k \log n.$

□

Лемма 14. *Пусть $i > 1, k > 1, 1 \leq p < k$, p — целое. Тогда справедливо неравенство*

$$\varphi(F_1^i, n, k) \geq (2^p - 1)\alpha(n-p, k-p).$$

Доказательство. Для получения этой оценки рассмотрим такую f. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p$ объявим существенными, а есть ли еще существенные переменные или нет определимся позже. Если ученик подаст запрос $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n)$, то будем различать следуюшие три категории запросов:

1. $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$
2. $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 1$
3. остальные наборы

Будем считать, что группа наборов с фиксированными значениями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$ опрошена, если были опрошены все фиксации из k переменных, в которые вошли переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Отвечать на запросы будем следующим образом.

1. если $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$
   (a) Если опрошены все группы наборов 3-й категории, то
      i. Если после ответа на текущий запрос, будет опрошена группа первой категории, отвечаем 1
      ii. Иначе, отвечаем 0.

(b) Иначе, отвечаем 0.

2. если $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 1$, будем отвечать 1

3. (a) Если после ответа на текущий запрос, будут опрошены все группы запросов 3-й категории,

   i. Если опрошена вся группа первой категории, отвечаем 0

   ii. Иначе, отвечаем 1

   (b) Иначе, отвечаем 1

Заметим, что если бы на запросы группы первой категории мы всегда б отвечали 0, а на запросы групп остальных категорий 1, то это получилась в точности функция с ровно p существенными переменными $x_1|x_2|\ldots|x_p$, так как все подфункции, соответствующие зафиксированным наборам p первых переменных, являлись константами. Эта функция принадлежит $F_1^\infty(n,k)$, так как все наборы, на которых функция обращается в 0 имеют общую нулевую компоненту x_1.

Но мы в самый последний момент, когда опрошены все запросы категорий 1 и 3, отвечаем иначе, и получаем иную функцию. После ответа на этот запрос становятся опрошенными все фиксации по k переменных, куда входят переменные с номерами $x_1, \ldots, x_p$, значит любая из фиксаций, которая была наконец опрошена этим запросом, и определяет набор существенных переменных, а их в фиксации ровно k штук. Зафиксируем одну из таких фиксаций и переменные, помимо переменных $x_1, \ldots, x_p$, вошедшие в нее, объявим существенными, обозначим их $x_{i_{p+1}}, x_{i_{p+2}}, \ldots, x_{i_k}$, где $p < i_{p+1} < i_{p+2} < \ldots < i_k$.

Не нарушая общности будем считать, что в зафиксированной фиксации переменным $x_{i_{p+1}}, x_{i_{p+2}}, \ldots, x_{i_q}$ присвоено значение 1, а переменным $x_{i_{q+1}}, x_{i_{q+2}}, \ldots, x_{i_k}$ — значение 0.

Также не нарушая общности будем считать, что в зафиксированной фиксации переменным $x_1, x_2, \ldots, x_t$ присвоено значение 1, а переменным $x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_p$ — значение 0.

Покажем, что получившаяся функция лежит в $F_1^\infty(n,k)$.

1. Пусть сработал случай 1.(a).i. Тогда загаданная функция имеет вид

$$x_1|x_2|\ldots|x_p|(x_{i_{p+1}}\&x_{i_{p+2}}\&\ldots x_{i_q}\&\overline{x_{i_{q+1}}}\&\overline{x_{i_{q+2}}}\&\ldots\&\overline{x_{i_k}}).$$

   Очевидно, что все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{i_{p+1}}, x_{i_{p+2}}, \ldots, x_{i_k}$ существенные.

   В этом случае $f \in F_1^\infty(n,k)$, так как все наборы, на которых f равна 0, имеют общую нулевую компоненту x_1.

2. Пусть сработал случай 3.(a).i. Тогда загаданная функция имеет вид

$$(x_1|x_2|\dots|x_p)\&(\overline{x_1}|\overline{x_2}|\dots|\overline{x_t}|x_{t+1}|x_{t+2}|\dots|x_p|\overline{x_{i_{p+1}}}|\overline{x_{i_{p+2}}}|\dots|\overline{x_{i_q}}|x_{i_{q+1}}|x_{i_{q+2}}|\dots|x_{i_k}).$$

Необходимо показать, что все переменные $x_1, x_2, \dots, x_p, x_{i_{p+1}}, x_{i_{p+2}}, \dots, x_{i_k}$ существенные. Рассмотрим переменную x_j, где $j \in \{1, 2, \dots, p, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_k\}$.

- Если в последнем запросе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $a_j = 0$, то переменная x_j — существенная, так как на наборе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ функция равна 0, а на наборе $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \overline{a_j}, a_{j+1}, \dots, a_n)$ — 1.
- Если в последнем запросе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $a_j = 1$, то
  - если $j \in \{i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_k\}$, то число ненулевых компонент в наборе $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ строго больше 1, так как есть еще хотя бы одна единица среди значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_p$. Поэтому в качестве пары наборов, отличающихся только в переменной x_j, можно взять наборы $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \overline{a_j}, a_{j+1}, \dots, a_n)$. На первом наборе значение функции равно 0, на втором — 1. Следовательно, переменная x_j — существенная.
  - если $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ и среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_p$ строго больше одной единицы, то в качестве пары соседних наборов, отличающихся в переменной x_j, возьмем наборы $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \overline{a_j}, a_{j+1}, \dots, a_n)$. На первом наборе значение функции равно 0, на втором — 1. Следовательно, переменная x_j — существенная.
  - если $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ и среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_p$ ровно одна единица, тогда в качестве пары соседних наборов, отличающихся в переменной x_j, возьмем наборы $(a_1, a_2, \dots, a_p, \overline{a_{p+1}}, \overline{a_{p+2}}, \dots, \overline{a_n})$ и $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \overline{a_j}, a_{j+1}, \dots, a_p, \overline{a_{p+1}}, \overline{a_{p+2}}, \dots, \overline{a_n})$. На первом наборе значение функции равно 1, на втором — 0. Следовательно, переменная x_j — существенная.

Заметим, что в последнем запросе не все $a_1, a_2, \dots, a_p$ одновременно равны 1. Пусть отлична от единицы $a_q, 1 \le q \le p$. Тогда все наборы, на которых f обращается в 0, имеют общую нулевую компоненту x_q. Следовательно $f \in F_1^\infty(n, k)$.

Заметим, что мы могли ученику подсказать, что первые p переменных существенные, и он мог не задавать в принципе запросы групп 2-й категории, но все запросы групп 1-й и 3-й категории мы его заставили задать, потому что не задав хотя бы один из этих запросов, у него нет уверенности, p или больше существенных переменных у загаданной функции.

Итого, ученик вынужден задать как минимум $(2^p-1)\alpha(n-p,k-p)$ запросов. $\square$

Лемма 15. *Имеет место неравенство*

$$\varphi(F_2^\infty,n,k) \gtrsim k\log(n/k) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2^{k-1}}{\sqrt{k-1}}$$

при $k,n\to\infty$, $k<n$.

Доказательство. Оценим снизу количество функций из F_2^∞ арности k, где все переменные существенные.

Рассмотрим функции f, обладающие обоими свойствами:

1. $f(0,x_2,\ldots,x_k)$ — какая-то монотонная функция арности $k-1$, у которой все переменные существенные.

2. $f(1,x_2,\ldots,x_k)\equiv 1$

Заметим, что каждая такая функция f монотонная и лежит в F_4^∞, так как у всех наборов, на которых функция может обратиться в 0, имеется общая нулевая компонента x_1.

Соответственно надо оценить число монотонных функций арности $k-1$, у которых все переменные существенные. Это было сделано в доказательстве леммы 3.2 работы из [7]. Таких функций не меньше чем $2^{C_{k-1}^{[(k-1)/2]}-3}$.

Значит всего функций в $F_2^\infty(n,k)$ не меньше, чем $C_n^k\cdot 2^{C_{k-1}^{[(k-1)/2]}-3}$. Проделываем шаги леммы 11 и получаем нижнюю мощностную оценку из утверждения леммы. $\square$

Утверждение 5. *Справедливы соотношения*

- *если* $i>1$ *или* $i=\infty$, *то* $\varphi(F_4^i,n,k)=\alpha(n,k)\cdot(1+o(1))$ *при* $k,n\to\infty$;
- *если* $i>1$ *или* $i=\infty$, *то* $\varphi(F_1^i,n,k)=S_{n,k}\cdot(1+o(1))$ *при* $k,n\to\infty$;
- *если* $i>1$ *или* $i=\infty$, *то* $\varphi(F_2^i,n,k)\asymp k\log n+\frac{2^k}{\sqrt{k}}$ *при* $k,n\to\infty$;
- *если* $i>1$ *или* $i=\infty$, *то* $\varphi(F_3^i,n,k)\asymp k\log n+\frac{2^k}{\sqrt{k}}$ *при* $k,n\to\infty$.

Доказательство. Соотношение, касающееся класса $F_4^i(n,k)$, следует из леммы 12, верхней оценки теоремы 1, леммы 3.

Соотношение, касающееся класса $F_1^i(n,k)$, следует из лемм 13, 14, 4, 5.

Соотношения, касающееся классов $F_2^i(n,k), F_3^i(\mathrm{n},\ \mathrm{k})$, следуют из верхней оценки теоремы 2 и леммы 15, потому что класс $F_2^\infty(n,k)$ вкладывается в классы $F_2^i(n,k), F_3^i(n,k)$. $\square$

8 Классы S_i

Теорема 3. *(Uehara, Tsuchida, Wegener [8]) Справедливы неравенства*

$$]\log_2 C_n^k[\leq \varphi(S_1, n, k) \leq k]\log(n/k)[+2k-2.$$

Следовательно, $\varphi(S_1, n, k) \sim k\log(n/k), n, k \to \infty, k = o(n)$.

Утверждение 6. *Справедливы соотношения*

- $\varphi(S_3, n, k) \sim k\log(n/k), n, k \to \infty, k = o(n)$;
- $\varphi(S_5, n, k) \sim k\log(n/k), n, k \to \infty, k = o(n)$;
- $\varphi(S_6, n, k) \sim k\log(n/k), n, k \to \infty, k = o(n)$.

Доказательство. Получим верхнюю оценку сложности расшифровки для класса $S_3(n, k)$. Запросив значение на наборе (0,...,0), можно понять $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$ или нет. Если нет, то разгадываем обычную функцию из $S_1(n, k)$. Таким образом, получаем верхнюю оценку $1 + k]\log(n/k)[+2k-2$. Нижняя оценка мощностная $]\log_2(C_n^k + 1)[$. Отсюда и вытекает первый пункт утверждения.

Получим верхнюю оценку сложности расшифровки для класса $S_5(n, k)$. Запросив значение на наборе (1,...,1), можно понять $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ или нет. Если нет, то разгадываем обычную функцию из $S_1(n, k)$. Таким образом, получаем верхнюю оценку $1 + k]\log(n/k)[+2k-2$. Нижняя оценка мощностная $]\log_2(C_n^k + 1)[$. Отсюда и вытекает второй пункт утверждения.

Получим верхнюю оценку сложности расшифровки для класса $S_6(n, k)$. Запросив значение на наборе (0,...,0), можно понять $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$ или нет. Если нет, запросив значение на наборе $(1, \ldots, 1)$, можно понять $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ или нет. Если нет, то разгадываем обычную функцию из $S_1(n, k)$. Таким образом, получаем верхнюю оценку $2 + k]\log(n/k)[+2k-2$. Нижняя оценка мощностная $]\log_2(C_n^k + 2)[$. Отсюда и вытекает третий пункт утверждения.

□

9 Классы L_i

Теорема 4. *(Hofmeister [9]) Справедливо неравенство* $\varphi(L_3, n, k) \leq k\log_2 n + k$.

Теорема 5. *(Uehara, Tsuchida, Wegener [8]) Справедливо неравенство*

$$\varphi(L_3, n, k) \geq]\log_2 C_n^k[.$$

Как следствие теорем 4, 5, получаем следующую теорему.

Теорема 6. *(Uehara, Tsuchida, Wegener [8], Hofmeister [9]) Справедливо соотношение*

$$\varphi(L_3, n, k) \sim k \log_2 n, n, k \to \infty, \log_2 k = o(\log_2 n).$$

Утверждение 7. *Справедливы соотношения*

- $\varphi(L_1, n, k) \sim k \log n, n, k \to \infty, \log_2 k = o(\log_2 n)$;
- $\varphi(L_2, n, k) \sim k \log n, n, k \to \infty, \log_2 k = o(\log_2 n)$;
- $\varphi(L_4, n, k) \sim k \log n, n, k \to \infty, \log_2 k = o(\log_2 n)$;
- $\varphi(L_5, n, k) \sim k \log n, n, k \to \infty, \log_2 k = o(\log_2 n)$.

Доказательство. Получим верхнюю оценку сложности расшифровки для класса $L_1(n, k)$. Задав один запрос $(0, \ldots, 0)$, определим свободный член c_0 загаданной функции $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} \oplus c_0$. Если $c_0 = 0$, то разгадываем функцию из класса $L_3(n, k)$, иначе разгадываем $\bar{f}$ из класса $L_3(n, k)$. Итого, на расшифровку функции потратим не более $1 + k \log_2 n + k$ запросов.

Для получения нижней оценки заметим, что ученик первым же запросом может узнать значение свободного члена. Поэтому нижняя оценка практически совпадает с нижней оценкой для класса $L_3(n, k)$: $\varphi(L_1, n, k) \geq 1 +]\log_2 C_n^k[$.

Верхняя оценка сложности расшифровки функции из класса $L_4(n, k)$ совпадает с верхней оценкой сложности расшифровки функции из класса $L_3(n, k)$, так как класс $L_4(n, k)$ вкладывается в класс $L_3(n, k)$. В качестве нижней оценки возьмем мощностную оценку. В классе $L_4(n, k)$ лежат линейные функции с нулевым свободным членом с нечетным числом существенных переменных. Положим k_o — наибольшее нечетное число, которое не больше, чем k. Тогда получим нижнюю мощностную оценку: $\varphi(L_4, n, k) \geq]\log_2 C_n^{k_o}[$.

Сложность расшифровки классов $L_2(n, k), L_5(n, k)$ асимптотически равна сложности расшифровки классов $L_1(n, k)$ и $L_4(n, k)$ в силу того, что они вкладываются в $L_1(n, k)$ и содержат $L_4(n, k)$.

□

10 Классы O_i

Теорема 7. *(Uehara, Tsuchida, Wegener [8]) Справедливо неравенство*

$$\varphi(O_1, n, 1) =]\log_2 n[.$$

Утверждение 8. *Справедливы соотношения*

- $\varphi(O_4, n, 1) =]\log n[$;

- $\varphi(O_5, n, 1) \sim \log n, n \to \infty$;
- $\varphi(O_6, n, 1) \sim \log n, n \to \infty$;
- $\varphi(O_8, n, 1) \sim \log n, n \to \infty$;
- $\varphi(O_9, n, 1) \sim \log n, n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим класс $O_4(n, 1)$. Задав запрос (0,...,0), определим $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i$ или $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \bar{x}_i$.Затем, согласно теореме 7, потратим не более $]\log_2 n[$ запросов на нахождение номера существенной переменной. Таким образом, верхняя оценка равна $1+]\log_2 n[$ запросов. Нижняя оценка мощностная: $]\log_2 2n[=]1 + \log_2 n[= 1+]\log_2 n[$.

Рассмотрим класс $O_6(n, 1)$. Задав запрос (0,...,0), определим $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$ или нет. Если нет, зададим запрос (1,...,1), определим $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ или нет. Если нет, то, согласно теореме 7, потратим не более $]\log_2 n[$ запросов на нахождение номера существенной переменной. Таким образом, верхняя оценка равна $2+]\log_2 n[$ запросов. Нижняя оценка мощностная: $]\log_2 (2 + n)[$.

Сложность расшифровки классов $O_5(n, 1), O_8(n, 1)$ асимптотически равна сложности расшифровки классов $O_1(n, 1)$ и $O_6(n, 1)$ в силу того, что $O_5(n, 1), O_8(n, 1)$ вкладываются в $O_6(n, 1)$ и содержат $O_1(n, 1)$.

Рассмотрим класс $O_9(n, 1)$. Зададим запросы (0,...,0) и (1,...,1).

- Если $f(0, \ldots, 0) = 0, f(1, \ldots, 1) = 0$, то $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$.
- Если $f(0, \ldots, 0) = 1, f(1, \ldots, 1) = 1$, то $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$.
- Если $f(0, \ldots, 0) = 0, f(1, \ldots, 1) = 1$, то $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Согласно теореме 7, потратим не более $]\log_2 n[$ запросов на нахождение номера существенной переменной.
- Если $f(0, \ldots, 0) = 1, f(1, \ldots, 1) = 0$, то $f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_i$. Согласно теореме 7, потратим не более $]\log_2 n[$ запросов на нахождение номера существенной переменной.

Следовательно, верхняя оценка $2+]\log_2 n[$. Нижняя оценка — мощностная: $]\log_2 (2 + 2n)[$.

□

11 Заключение

В работе исследована задача параметро-эффективной расшифровки запросами на значение в рамках точной модели для всех классов решетки замкнутых классов

Поста. Как результат, приведена раскраска решетки Поста на рисунке 1: желтый цвет означает, что имеется точная оценка, красный цвет — асимптотическая оценка сложности расшифровки класса, зеленый — оценка по порядку, синий — условная асимптотическая оценка. Также на рисунке отражены существовавшие результаты в форме треугольника, иные результаты — квадратом.

Список литературы

[1] E. Post, "Determination of all closed systems of truth tables", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26** (1920), 437.

[2] E. Post, "Two-valued iterative systems of mathematical logic", *Princeton Univ. Press, Princeton*, 1941.

[3] М. А .Кибкало, "Об автоматной сложности классов Поста булевых функций", *Интеллектуальные системы*, **15**:(1-4) (2011), 379–400.

[4] Блохина Г. Н., Кудрявцев В. В., "О спектрах классов Поста булевских функций", *Интеллектуальные системы*, **14**:(1-4) (2010), 279–298.

[5] Гасанов Э. Э., Ниязова З. А., "Расшифровка арифметических сумм малого числа монотонных конъюнкций", *Материалы XI Международного семинара Дискретная математика и ее приложения (Москва, 18-23 июня 2012 г.)*, Изд-во механико-математического ф-та МГУ, Москва, 2012, 335–337.

[6] P. Damaschke, "Adaptive Versus Nonadaptive Attribute-Efficient Learning", *Machine Learning*, **41** (2000), 197–215.

[7] В. Осокин, "О расшифровке монотонных булевых функций с несущественными переменными", *Дискретная математика*, **22**:3 (2010), 134–145.

[8] R. Uehara, K. Tsuchida, I. Wegener, "Optimal Attribute-Efficient Learning Of Disjunction, Parity, And Threshold Functions", *EuroCOLT '97 Proceedings of the Third European Conference on Computational Learning Theory*, 1997.

[9] Thomas Hofmeister, "An Application of Codes to Attribute-Efficient Learning", *EuroCOLT'99 Proceedings of the 4th European Conference on Computational Learning Theory*, 1999.

[10] Гасанов Э.Э., "Расшифровка линейных функций ранжирования", *Материалы XI Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения посвященного 80-летию со дня рождения академика О.Б.Лупанова (Москва, 18-23 июня 2012 г.)*, Изд-во мех-мат фак-та МГУ, 2012, 332–334.

[11] Хегай С.И., "Расшифровка полиномиальных функций ранжирования", *Интеллектуальные системы*, **19**:1 (2015), 213–230.

[12] N. H. Bshouty, R. Cleve, R. Gavalda, S. Kannan, Ch. Tamon, "Oracles and Queries That Are Sufficient for Exact Learning", *Journal of Computer and System Sciences*, **52**:3 (1996), 421–433.

[13] D. Angluin, "Queries and Concept Learning", *Machine Learning*, **2**:4 (1988), 319-342.

[14] P. Damaschke, "On parallel attribute-efficient learning", *Journal of Computer Science*, **67** (2003), 46–62.

[15] Коробков В. К., "О монотонных функциях алгебры логики", *Сб. Проблемы кибернетики*, **13**, Наука, Москва, 1965.

[16] Ансель Ж., "О числе монотонных булевых функций от n переменных", *Кибернетич. сб. Новая серия.*, **5**, Мир, М., 1968, 53–57.

[17] N. J. A. Sloane, "Covering arrays and intersecting codes.", *J. Comb. Des.*, **1** (1993.), 51–63.

[18] D. M. Cohen, S. R. Dalal, M. L. Fredman, G. C. Patton, "The AETG System: An Approach to Testing Based on Combinatorial Design.", *IEEE TRANSACTIONS ON SOFTWARE ENGINEERING*, **23**:7 (1997), 437–444.

[19] A. Hartman, "Software and Hardware Testing Using Combinatorial Covering Suites.", *Graph Theory, Combinatorics and Algorithms.*, Operations Research/Computer Science Interfaces Series, **34**, eds. Golumbic M.C., Hartman I.BA., Springer, Boston, MA.

[20] W. S. Lim and S. Alpern, “Minimax rendezvous on the line”, *SIAM J. Control and Optim*, **34** (1996), 1650–1665.

[21] S. Gal, “Rendezvous search on a line”, *Operations Research*, **47** (1999), 974–976.

[22] D.J.Kleitman, J.Spencer, “Families of k - independent sets”, *Discrete Mathematics*, **6** (1973), 255-262.

[23] J.Lawrence, R.N.Kacker, Y.Lei, R.Kuhn, M.Forbes, “A survey of Binary Covering Arrays.”, *The electronic journal of combinatorics*, **18** (2011).

[24] L. Gargano, J. Korner, U. Vaccaro, “Sperner capacities”, *Graph. Combinator.*, **9** (1993), 31–46.

[25] K. Sarkar, C.J.Colbourn, A.D. Bonis, U. Vaccaro, “Partial Covering Arrays: Algorithms and Asymptotics”, International Workshop on Combinatorial Algorithms IWOCA 2016: Combinatorial Algorithms, 437–448.

[26] S.Das, T. Meszaros, “A Semi-Random Construction of Small Covering Arrays”, 2017, arXiv: 1703.05252.

[27] В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов, *Математический анализ. Начальный курс*, Издательство Московского университета, 1985.

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от 29.05.2020г.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «О классах устойчивой изотопической связности полярных поверхностных каскадов» являются: Теорема 1.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:
- поиск результатов на тематику работы в сети Интернет;

- исследования в области динамических систем и приложений;

- также мной были изучены следующие исследования:

1) Починка О., Ноздринова Е. «О существовании гладкой дуги без бифуркаций, соединяющих диффеоморфизмы источник-сток на 2-сфере»;

2) Починка О., Ноздринова Е. «О динамике бифуркационных диффеоморфизмов простой дуги»;

3) Grines V., Medvedev Timur, Pochinka O. «Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds»

4) S. Newhouse, J. Palis, and F. Takens «Stable arcs of diffeomorphisms»

- консультации с научным руководителем - профессором Починкой Ольгой Витальевной, а также с преподавателем Ноздриновой Еленой Вячеславовной.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится/состоялась 15.06.2020г.
На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.

Подпись Логинова Анастасия Сергеевна

29.05.2020г.
г.Нижний Новгород, Россия

Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет “Высшая школа
экономики”

Нижегородский филиал

Факультет математики, информатики и компьютерных наук
Бакалаврская образовательная программа «Математика»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему: **О классах устойчивой изотопической связности полярных поверхностных каскадов**

Выполнила:
Студентка 4 курса группы 16 ФМ
Логинова Анастасия Сергеевна
Научный руководитель:
Профессор, доктор физико-математических наук
Починка Ольга Витальевна
Научный консультант:
Научный сотрудник МЛ ДСП
Елена Вячеславовна Ноздринова
Рецензент:

Нижний Новгород 2020

Содержание

1. **Введение и формулировка результата** **1**

2. **Вспомогательные определения и факты** **3**

3. **Диффеоморфизмы Морса-Смейла** **3**

4. **Устойчивые дуги в пространстве диффеоморфизмов** **4**

5. **Приведение замыкания седловых сепаратрис 2-диффеоморфизма в каноническое положение** **6**

6. **Построение модельных отображений** **8**

7. **Диффеоморфизмы класса G** **8**

8. **Построение модельных функций** **10**

9. **Доказательство основного результата** **13**

1. Введение и формулировка результата

Проблема существования дуги с не более, чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса-Смейла) на многообразиях вошла в список пятидесяти проблем Палиса-Пью [21] под номером 33.

В 1976 году Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом, Ф. Такенсом [18] было введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Такая дуга не меняет своих качественных свойств при малом шевелении. В том же году Ш. Ньюхаус и М. Пейшото [19] доказали существование простой дуги (содержащей лишь элементарные бифуркации) между любыми двумя потоками Морса-Смейла. Из результата работы Ж. Флейтас [5] вытекает, что простую дугу, построенную Ньюхаусом и Пейшото всегда можно заменить на устойчивую. Для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на многообразиях любой размерности известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении инварианта, однозначно определяющего класс эквивалентности диффеоморфизма Морса-Смейла относительно отношения связанности устойчивой дугой (*компоненту устойчивой связанности*).

Согласно [17], для диффеоморфизмов замкнутого многообразия M^n с конечным предельным множеством, устойчивость дуги $\{f_t \in Diff(M^n),\, t \in [0,1]\}$ характеризуется конечным числом бифуркационных значений $0 < b_1 < \cdots < b_k < 1$, при этом бифуркационный диффеоморфизм $\varphi_{b_i}, i \in \{1, \ldots, m\}$ обладает следующими свойствами:

1) все инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма φ_{b_i} пересекаются трансверсально;

2) диффеоморфизм φ_{b_i} не имеет циклов и имеет ровно одну негиперболическую периодическую орбиту, а именно флипп или некритический седло-узел, при этом дуга проходит через бифуркационное значение типично.

Будем говорить, что диффеоморфизмы $f_0, f_1 : M^n \to M^n$ принадлежат одному и тому же классу *устойчивой изотопической связанности*, если в пространстве диффеоморфизмов они могут быть соединены дугой с описанными выше свойствами. В частности, из определения типично проходящей седло-узловой бифуркации или бифуркации удвоения периода следует, что градиентно-подобный диффеоморфизм на поверхности не соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом Морса-Смейла, имеющим гетероклинические точки.

Классификация с точки зрения введенного отношения эквивалентности нетривиальна уже для сохраняющих ориентацию диффеоморфиз-

мов окружности S^1, где появляется счетное множество таких классов, каждый из которых однозначно определяется числом вращения грубого преобразования окружности [20].

Начиная с размерности два появляются дополнительные препятствия к существованию устойчивых дуг между изотопными диффеоморфизмами. Они связаны с наличием периодических точек [2], [19], гетероклинических пересечений [14], диких вложений сепаратрис [9] и др. На шестимерной сферы известны примеры диффеоморфизмов источник-сток, не соединяющихся никакой гладкой дугой [4], что, собственно, и стало источником для построения различных гладких структур на сфере размерности 7. В размерности два и три нетривиальный факт существования пути без бифуркаций между двумя системами источник-сток установлен в работах [22], [4].

Естественным обобщением систем источник-сток, которые существуют только на сфере, являются *полярные диффеоморфизмы* — градиентно-подобные диффеоморфизмы с единственным источником и единственным стоком. Из теории Морса следует, что такие диффеоморфизмы существуют на любых многообразиях.

В настоящей работе рассматривается класс G изотопных тождественному полярных диффеоморфизмов на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, в предположении, что все неблуждающие точки неподвижны и имеют положительный тип ориентации. Простейшим примером такого диффеоморфизма является прямое произведение двух копий диффеоморфизма источник-сток на окружности $\mathbb{S}^1$, обозначим его через f_0. Диффеоморфизм f_0, кроме источника и стока, имеет две седловые точки, замыкания инвариантных многообразий каждой из которых являются окружностями, лежащими в классе образующих

$$a = \{0\} \times \mathbb{S}^1 =< 1, 0 >; \; b = \mathbb{S}^1 \times \{0\} =< 0, 1 > .$$

Однако, в общем случае у диффеоморфизма $f \in G$ замыкания инвариантных многообразий являются нестягиваемыми кривыми, имеющими любые гомотопические типы $< \mu_1, \nu_1 >$, $< \mu_2, \nu_2 >$, удовлетворяющие условию

$$|\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1| = 1.$$

Откуда следует, что в общем случае не существует дуги без бифуркаций, соединяющей два диффеоморфизма рассматриваемого класса.

Основным результатом работы является доказательство следующего результата.

Теорема 1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется с диффеоморфизмом f_0 устойчивой дугой с конечным числом седло-узловых бифуркаций.*

2. Вспомогательные определения и факты

3. Диффеоморфизмы Морса-Смейла

Пусть диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ задан на гладком замкнутом (компактном без края) n-многообразии ($n \geq 1$) M^n с метрикой d.

Точка $x \in M^n$ называется *блуждающей* для f, если существует открытая окрестность U_x точки x, такая что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f.

Например, неблуждающими являются все предельные точки диффеоморфизма. Напомним, что точка $y \in M^n$ называется *ω-предельной* точкой для точки $x \in M^n$, если существует последовательность $t_k \to +\infty$, $t_k \in \mathbb{Z}$ такая, что $\lim\limits_{t_k \to +\infty} d(f^{t_k}(x), y) = 0$. Множество $\omega(x)$ всех ω-предельных точек для точки x называется ее *ω-предельным множеством*. Заменой $+\infty$ на $-\infty$ определяется *α-предельное множество* $\alpha(x)$ точки x. Множество $L_f = cl\,(\bigcup\limits_{x \in M^n} \omega(x) \cup \alpha(x))$ называется *предельным множеством* диффеоморфизма f.

Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $p \in \Omega_f$ является периодической, обозначим через $m_p \in \mathbb{N}$ период периодической точки p. С любой периодической точкой p связаны *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, определяемые следующим образом

$W_p^s = \{x \in M^n : \lim\limits_{k \to +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\}$,

$W_p^u = \{x \in M^n : \lim\limits_{k \to +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}$.

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Говорят, что периодические орбиты $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k$ образуют *цикл*, если $W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_{i+1}} \neq \emptyset$ для $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $\mathcal{O}_{k+1} = \mathcal{O}_1$.

Периодическая точка $p \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)|_p$ по модулю не равны по модулю единице. Если собственные значения по модулю меньше (больше) единицы, то p называют *стоковой* (*источниковой*) *точкой*. Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является *узловой*, то она называется *седловой*

точкой.

Из гиперболической структуры периодической точки p следует, что ее устойчивое W^s_p и неустойчивое W^u_p многообразия являются инъективными иммерсиями пространств $\mathbb{R}^{q_p}$ и $\mathbb{R}^{n-q_p}$, где q_p число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы. Число ν_p, равное $+1(-1)$, если отображение $f^{m_p}|_{W^u_p}$ сохраняет (меняет) ориентацию W^u_p, называется *типом ориентации* точки p. Компонента линейной связности множества $W^u_p \setminus p$ ($W^s_p \setminus p$) называется *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой* точки p.

Замкнутое f-инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int\, U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k\geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей или изолирующей. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}. Дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность дуального репеллера.

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;

2) многообразия W^s_p, W^u_q пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q.

Диффеоморфизм Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если из условия $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2} \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $dim\ W^u_{\sigma_1} < dim\ W^u_{\sigma_2}$.

4. Устойчивые дуги в пространстве диффеоморфизмов

Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов (*дугу*) $\varphi_t : M^n \to M^n, t \in [0,1]$. Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество дуг $\{\varphi_t\}$, которые начинаются и заканчиваются в диффеоморфизмах Морса-Смейла и любой диффеоморфизм φ_t имеет конечное предельное множество.

Согласно [17], дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги $\{\varphi_t\}$, $\{\varphi'_t\} \in \mathcal{Q}$ называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $h : [0,1] \to [0,1], H_t : M^n \to M^n$ такие, что $h(b_i) = b'_i, i \in \{1, \ldots, m\}$, $H_t\varphi_t = \varphi'_{h(t)}H_t, t \in [0,1]$ и H_t непрерывно зависит от t.

В работе [17] также установлено, что дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ является устойчивой тогда и только тогда, когда все ее точки являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами за исключением конечного числа бифуркационных точек, $\varphi_{b_i}, i = 1, \ldots, m$ таких, что φ_{b_i}:

1) не имеет циклов;

2) имеет единственную негиперболическую периодическую орбиту, которая является седло-узлом или флипом;

3) инвариантные многообразия всех периодических точек диффеоморфизма φ_{b_i} пересекатся трансверсально;

4) переход через φ_{b_i} является типично проходящей бифуркацией седло-узел или удвоения периода.

Напомним определение типично проходящих бифуркаций для случаев неподвижного седло-узла или флипа, в случае, когда негиперболическая точка имеет период $k > 1$, аналогичное определение дается для дуги φ_t^k.

Говорят, что дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ *проходит типично через седло-узловую бифуркацию* φ_{b_i} (см. рисуноки 1), если в некоторой окрестности негиперболической точки (p, b_i) дуга φ_t сопряжена дуге

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{t}}(x_1, x_2, \ldots, x_{1+n_u}, x_{2+n_u}, \ldots, x_n) =$$

$$\left(x_1 + 2x_1^2 + \tilde{t}, \pm 2x_2, \ldots, \pm 2x_{1+n_u}, \frac{\pm x_{2+n_u}}{2}, \ldots, \frac{\pm x_n}{2}\right),$$

где $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| < 1/2$, $|\tilde{t}| < 1/10$.

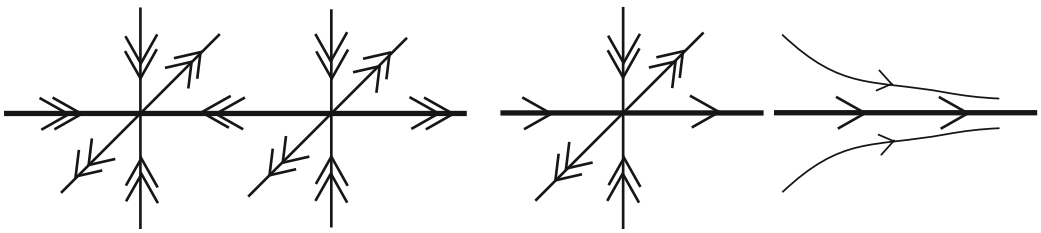


Рис. 1. Седло-узловая бифуркация

В локальных координатах $(x_1, \ldots, x_n, \tilde{t})$ бифуркация происходит в момент времени $\tilde{t} = 0$ и начало координат $O \in \mathbb{R}^n$ является седло-узловой точкой. При этом ось Ox_1 является *центральным многообразием*, полупространство является *устойчивым многообразием*, полупространство является *неустойчивым многообразием* точки O.

Говорят, что дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ *проходит типично через бифуркацию удвоения периода (флип)* φ_{b_i} (см. рисунок 2), если в некоторой окрестно-

сти негиперболической точки (p, b_i) дуга φ_t сопряжена дуге

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{t}}(x_1, x_2, \ldots, x_{1+n_u}, x_{2+n_u}, \ldots, x_n) =$$
$$\left(-x_1(1 \pm \tilde{t}) + x_1^3, \pm 2x_2, \ldots, \pm 2x_{1+n_u}, \frac{\pm x_{2+n_u}}{2}, \ldots, \frac{\pm x_n}{2}\right),$$

где $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| < 1/2$, $|\tilde{t}| < 1/10$ и

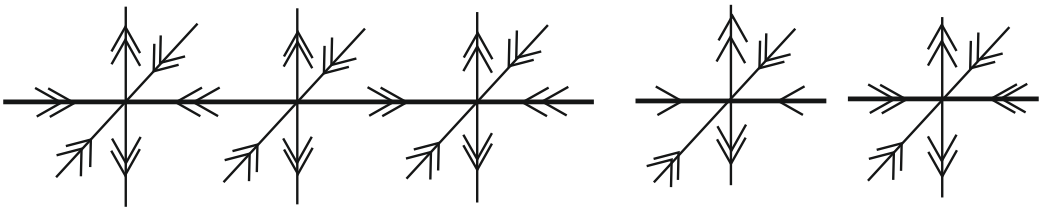


Рис. 2. Бифуркация удвоения периода (флип)

Будем говорить, что диффеоморфизмы f_0, f_1 принадлежат одному и тому же классу *устойчивой изотопической связанности*, если в пространстве диффеоморфизмов они могут быть соединены дугой с описанными выше свойствами.

5. Приведение замыкания седловых сепаратрис 2-диффеоморфизма в каноническое положение

Для построения дуги, проходящей типично через бифуркацию седло-узел или удвоение периода необходимо привести к каноническому виду объекты слияния. В настоящем разделе мы приводим необходимые факты, позволяющие, без уменьшения общности считать любой диффеоморфизм линейным в окрестности гиперболической точки, а замыкание любой неустойчивой седловой сепаратрисы 2-диффеоморфизма, лежащей на гладкой дуге.

Предложение 1. [16, Theorem 5.8 (Теорема о продолжении изотопии)] *Пусть Y — гладкое многообразие без границы, X — гладкое компактное подмногообразие Y и $\{f_t : X \to Y, t \in [0,1]\}$ — гладкая изотопия такая, что f_0 — отображение включения X в Y. Тогда для любого компактного множества $A \subset Y$, содержащего носитель изотопии*[1] *supp$\{f_t\}$*

[1] *Носителем supp$\{f_t\}$ изотопии $\{f_t\}$* называется замыкание множества $\{x \in X : f_t(x) \neq f_0(x)$ для некоторого $t \in [0,1]\}$.

существует гладкая изотопия $\{g_t \in Diff(Y),\, t \in [0,1]\}$ *такая, что* $g_0 = id$, $g_t|_X = f_t|_X$ *для любого* $t \in [0,1]$ *и,* $supp\{g_t\}$ *принадлежит* A.

Предложение 2. [11, Теорема 1 (Потраекторная лемма Фрэнкса)] *Пусть диффеоморфизм* $\varphi_0 : M^n \to M^n$ *имеет изолированную гиперболическую точку* r_0 *периода* m_0, *и пусть* (U_0, h) *— локальная карта многообразия* M^n *такая, что* $r_0 \in U_0$, $h(r_0) = O$. *Тогда для любого гиперболического автоморфизма* Q, *имеющего такой же индекс, что и автоморфизм* $(D\varphi_0^{m_0})_{r_0}$, *существуют окрестности* U_1, U_2 *точки* r_0, $U_2 \subset U_1 \subset U_0$, *и дуга* $\varphi_t : M^n \to M^n, t \in [0,1]$ *без бифуркаций такая, что:*

1) диффеоморфизм φ_t, $t \in [0,1]$, *совпадает с диффеоморфизмом* φ_0 *вне множества* $\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(U_1)$;

2) $\mathcal{O}_{r_0} = \bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(r_0)$ *– изолированная гиперболическая орбита периода* m_0 *того же индекса, что и автоморфизм* $(D\varphi_0^{m_0})_{r_0}$, *для каждого* φ_t;

3) $W^s_{\mathcal{O}_{r_0}}(\varphi_t) = W^s_{\mathcal{O}_{r_0}}(\varphi_0)$ *и* $W^u_{\mathcal{O}_{r_0}}(\varphi_t) = W^u_{\mathcal{O}_{r_0}}(\varphi_0)$ *вне множества* $\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(U_1)$;

4) диффеоморфизм $h\varphi_1^m h^{-1}$ *совпадает с диффеоморфизмом* Q *на множестве* $h(U_2)$.

Предложение 3. [15, Лемма 2] *Пусть диффеоморфизм* $\varphi_0 : M^2 \to M^2$ *имеет изолированный гиперболический сток* ω_0 *и изолированное гиперболическое седло* σ_0 *такие, что неустойчивая сепаратриса* γ_{φ_0} *седла* σ_0 *лежит в бассейне стока* $W^s_{\omega_0}$ *и имеет тот же период* m, *что и сток* ω_0. *Пусть* (U_0, ψ_0) *— локальная карта многообразия* M^2 *такая, что диффеоморфизм* $\psi_0\varphi_0^m\psi_0^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *совпадает с линейным сжатием* $g(x_1, x_2) = (x_1/2, x_2/2)$. *Тогда существуют окрестности* V_1, V_2 *точки* ω_0 *такие, что* $V_2 \subset V_1 \subset U_0$ *и дуга* $\varphi_t : M^2 \to M^2, t \in [0,1]$ *без бифуркаций со следующими свойствами:*

1) диффеоморфизм φ_t, $t \in [0,1]$ *совпадает с диффеоморфизмом* φ_0 *вне множества* $\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(V_1)$ *и* $\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(\omega_0)$ *является гиперболической стоковой орбитой периода* m *для всех* φ_t;

2) диффеоморфизм φ_1 *совпадает с диффеоморфизмом* φ_0 *на множестве* $\bigcup\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(V_2)$ *и* $\psi_0(\gamma_{\varphi_1} \cap V_2) \subset OX_1$, *где* γ_{φ_1} *неустойчивая сепаратриса седла* σ_0 *относительно диффеоморфизма* φ_1.

Предложение 4. [1, Лемма о фрагментации] *Пусть* $U = \{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — *открытое покрытие многообразия* X *и* $\varphi : X \to X$ — *гладко изотопный тождественному отображению диффеоморфизм. Тогда существуют гладко изотопные тождественному отображению диффеоморфизмы* $\varphi_i : X \to X,\ i = 1, \dots, q < \infty$ *такие, что:*

1) для каждого $i = \overline{1, q}$ *существует элемент покрытия* $U_{j(i)} \in U$ *такой, что* $supp\{\varphi_{i,t}\}$ *принадлежит* $U_{j(i)}$, *где* $\{\varphi_{i,t}\}$ — *гладкая дуга, соединяющая тождественное отображение и* φ_i*;*

2)$\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_q$.

6. Построение модельных отображений

7. Диффеоморфизмы класса G

В настоящей работе рассматривается класс G изотопных тождественному полярных градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, в предположении, что все неблуждающие точки неподвижны и имеют положительный тип ориентации. Опишем конструкцию диффеоморфизмов рассматриваемого класса.

Простейшим примером такого диффеоморфизма является прямое произведение двух копий диффеоморфизма источник-сток на окружности $\mathbb{S}^1$, обозначим его через f_0. Сначала построим диффеоморфизм источник-сток на окружности. Для этого расссмотрим функцию $\bar{\phi}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную формулой:

$$\bar{\phi}_0(x) = x - \tfrac{1}{4\pi} sin\left(2\pi\left(x - \tfrac{1}{4}\right)\right).$$

По построению $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$ – неподвижные точки отображения $\bar{\phi}_0$ на отрезке $[0, 1]$ (см. Рисунок 3).

Рассмотрим проекцию $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ заданную формулой $\pi(x) = e^{2\pi i x}$. В силу того, что функция $\bar{\phi}_0$ является строго монотонно возрастающей и периодической с периодом 1, она допускает проекцию на окружность в виде диффеоморфизма

$$\phi_0 = \pi\bar{\phi}\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1.$$

По построению диффеоморфизм ϕ_0 имеет неподвижный гиперболический сток в точке $N = \pi\left(\frac{1}{4}\right)$ и неподвижный гиперболический источник в точке $S = \pi\left(\frac{3}{4}\right)$.

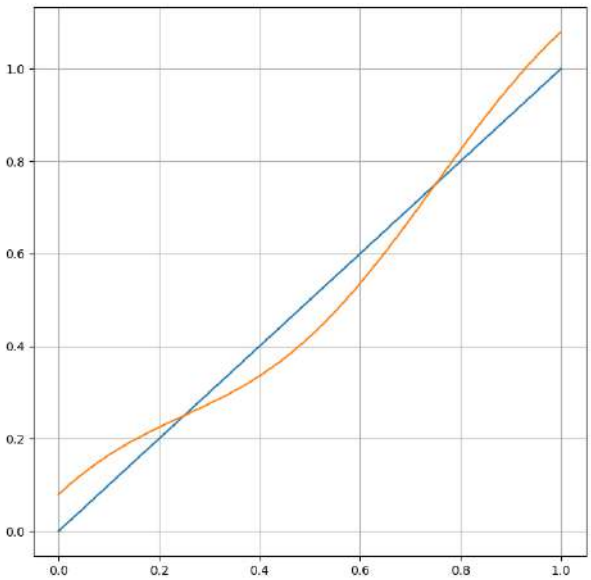


Рис. 3. График отображения $\bar{\phi}_0$

Определим диффеоморфизм $f_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ формулой (см. Рисунок 4)

$$f_0(z, w) = (\phi_0(z), \phi_0(w)),\ z, w \in \mathbb{S}^1.$$

По построению диффеоморфизм f_0 имеет неподвижный гиперболический сток в точке $\omega = (N, N)$, гиперболический источник $\alpha = (S, S)$ и имеет две седловые точки $\sigma_1 = (N, S), \sigma_2 = (S, N)$ (см. Рисунок 5). При этом, замыкания инвариантных многообразий каждой из которых являются окружностями, лежащими в классе образующих

$$a = \{\pi(0)\} \times \mathbb{S}^1 =< 1, 0 >;\ b = \mathbb{S}^1 \times \{\pi(0)\} =< 0, 1 > .$$

Именно, $cl\, W^u_{\sigma_1} = \{N\} \times \mathbb{S}^1, cl\, W^s_{\sigma_1} = \mathbb{S}^1 \times \{S\}, cl\, W^u_{\sigma_2} = \mathbb{S}^1 \times \{N\}, cl\, W^s_{\sigma_2} = \{S\} \times \mathbb{S}^1$.

Определим линейный диффеоморфизм $\gamma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $f_1 = \gamma f_0 \gamma^{-1}$ (см. рисунок 6).

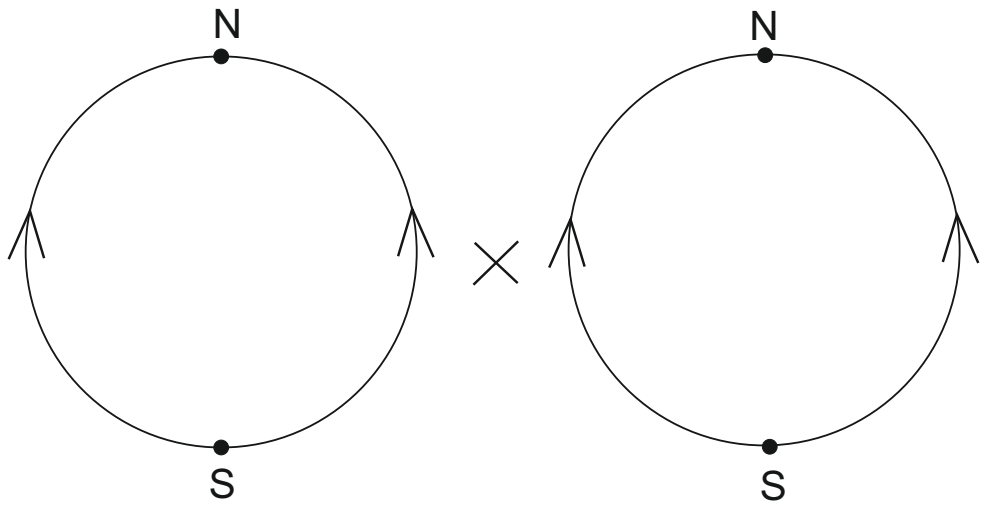


Рис. 4. Декартов квадрат диффеоморфизма ϕ_0

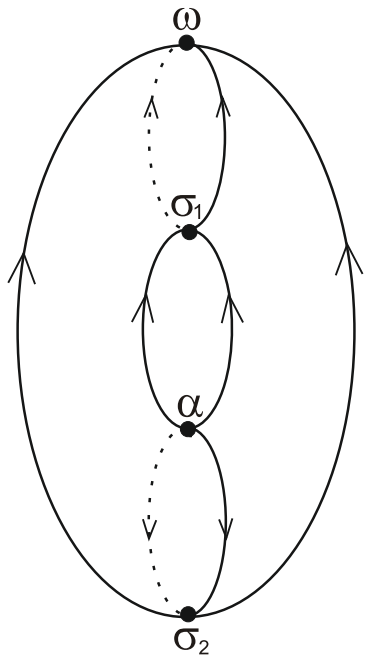


Рис. 5. Диффеоморфизм f_0.

8. Построение модельных функций

В этом разделе мы строим модельные функции, которые в дальнейшем будут использованы в построении устойчивой дуги, соединяющей

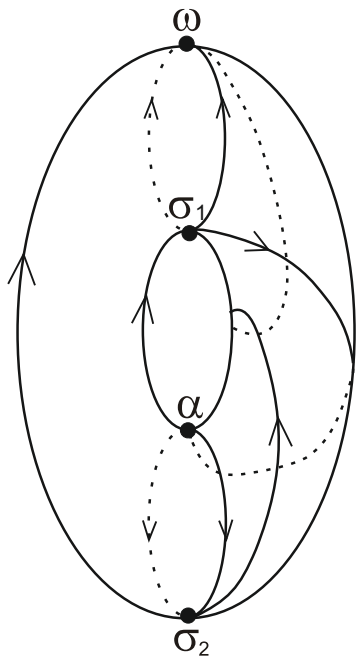


Рис. 6. Диффеоморфизм f_1

диффеоморфизм f_0 с диффеоморфизмом f_1. В основе построения лежит принцип склейки бесконечно гладких функций посредством следующей *сигмоид-функции.*

Пусть $a < b$ и $\delta_{a;b} : \mathbb{R} \to [0,1]$ сигмоид-функция, определенная формулой (см. рисунок 7)

$$\delta_{a;b}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{1+\exp\left(\frac{(a+b)/2-x}{(x-a)^2(x-b)^2}\right)}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Определим функцию $\bar{\phi}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой (см. Рисунок 8).

$$\bar{\phi}_1(x) = x - \frac{1}{12\pi} sin\left(6\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right).$$

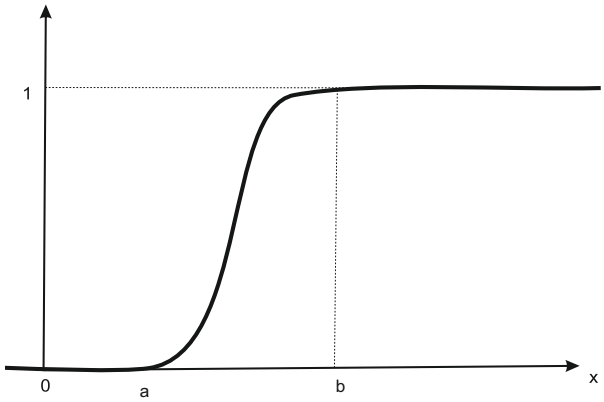


Рис. 7. График сигмоид-функции

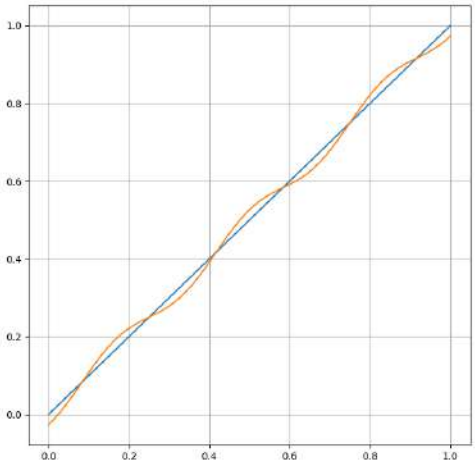


Рис. 8. График фукции $\bar{\phi}_1(x)$

Определим функцию $\bar{g}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой (см. Рисунок 9)

$$\bar{g}_1(x) = \begin{cases} \bar{\phi}_0(x),\ 0 \le x \le 0,26, \\ (1 - \delta_{0,26;0,27}(x))\bar{\phi}_0(x) + \delta_{0,26;0,27}(x)\bar{\phi}_1(x),\ 0,26 < x < 0,27, \\ \bar{\phi}_1(x),\ 0,27 \le x \le 0,76, \\ (1 - \delta_{0,76;0,77}(x))\bar{\phi}_1(x) + \delta_{0,76;0,77}(x)\bar{\phi}_0(x),\ 0,76 < x < 0,77, \\ \bar{\phi}_0(x),\ 0,77 \le x \le 1 \end{cases}.$$

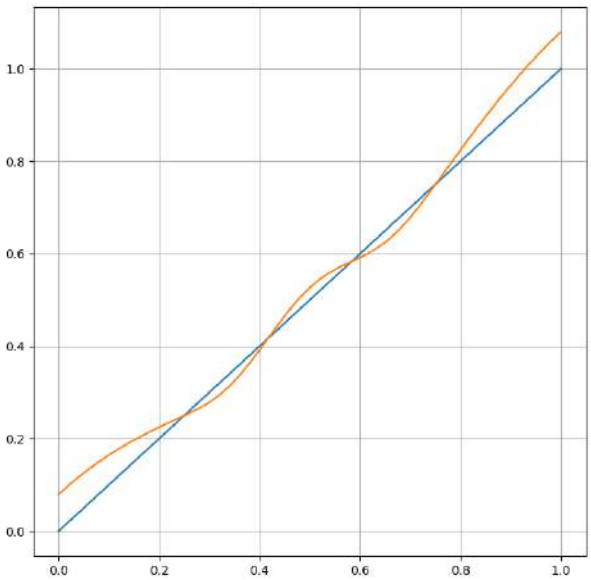


Рис. 9. График функции $\bar{g}_1(x)$

Определим функцию $\bar{\phi}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой (см. Рисунок 10).

$$\bar{\phi}_2(x) = x + \frac{1}{4\pi} sin\left(\frac{5}{6}\pi\left(x - \frac{5}{12}\right)\right).$$

Определим функцию $\bar{g}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой (см. Рисунок 11)

$$\bar{g}_2(x) = \begin{cases} \bar{g}_1(x),\ 0 \le x \le 0,42, \\ (1 - \delta_{0,42;0,43}(x))\bar{g}_1(x) + \delta_{0,42;0,43}(x)\bar{\phi}_2(x),\ 0,42 < x < 0,43, \\ \bar{\phi}_2(x),\ 0,43 \le x \le 0,98, \\ (1 - \delta_{0,98;0,99}(x))\bar{\phi}_2(x) + \delta_{0,98;0,99}(x)\bar{g}_1(x),\ 0,98 < x < 0,99, \\ \bar{g}_1(x),\ 0,99 \le x \le 1 \end{cases}.$$

9. Доказательство основного результата

Везде далее в этом разделе отображения без черты являются проекциями на $\mathbb{S}^1$ посредством π отображения с чертой, заданного на прямой

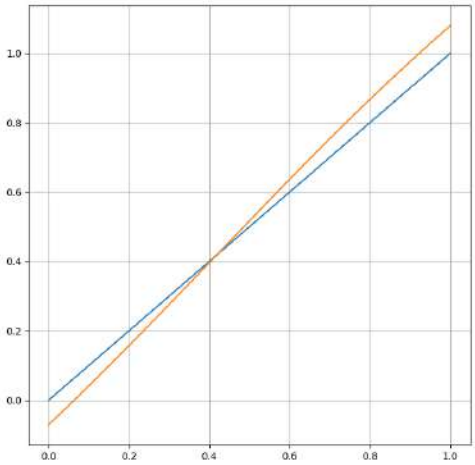


Рис. 10. График фукции $\bar{\phi}_2(x)$

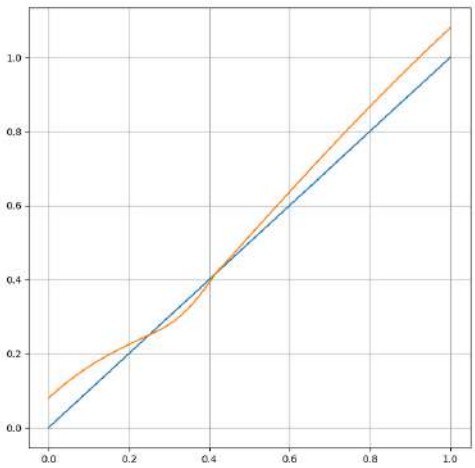


Рис. 11. График фукции $\bar{g}_2(x)$

$\mathbb{R}$. Устойчивая дуга, соединяющая диффеоморфизм f_0 с диффеоморфизмом f_1 проходит через две седло-узловые бифуркации и является произведением дуг, построенных в шаге 1 и шаге 2 ниже.

Шаг 1. Первая седло-узловая бифуркация.

1. Рождение седло-узловой точки.

Начнем с диффеоморфизма $f_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, определенного формулой:

$$f_0(z, w) = (\phi_0(z), \phi_0(w)),\ z, w \in \mathbb{S}^1.$$

Положим

$$\bar{\eta}_t^1(x) = (1-t)\bar{\phi}_0(x) + t\bar{g}_1(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]$$

и

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^1(x) = (1-\tau)\bar{\eta}_t^1(x) + \tau\bar{\phi}_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1],\ \tau \in [0,1].$$

Определим гладкую дугу $H_t^1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$ формулой:

$$H_t^1(w, z) = \begin{cases} (\phi_0(\pi(x)), \eta_{t,|8x-2|}^1(z)),\ x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right),\ z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), z),\ x \in \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right),\ z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

При $t = \frac{3}{4}$, диффеоморфизм $H_{\frac{3}{4}}^1$ имеет седло-узловую точку $p = (N, \pi(0))$, чье устойчивое многообразие диффеоморфно полуплоскости, границей которой является дуга γ_p (см. рисунок 12).

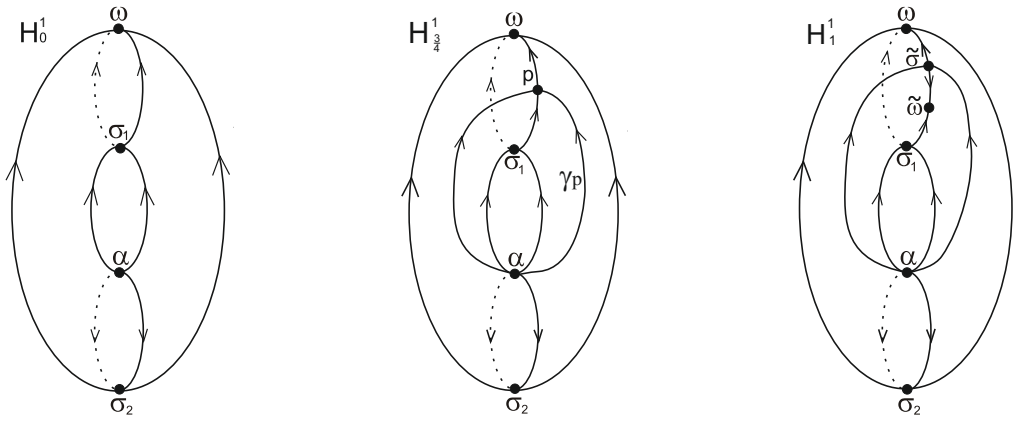


Рис. 12. Изотопия H_t^1 на торе

2. Поворот сепаратрисы седла σ_2.

Рассмотрим фундаментальную область $K = \left[\pi(0), \pi\left(\frac{1}{4\pi}\right)\right] \times \mathbb{S}^1$ ограничения диффеоморфизма f_0 на $V = \left[\pi\left(-\frac{1}{4}\right), \pi\left(\frac{1}{4}\right)\right] \times \mathbb{S}^1$. Положим $\hat{V} = V/f_0$. Тогда $\hat{V}$ – двумерный тор, полученный из K отождествлением границ в силу отображения f_0. Обозначим через $q : V \to \hat{V}$ естественную проекцию. Положим $\hat{\gamma}_2 = q(W_{\sigma_2}^u \cap V)$ и $\hat{\gamma}_1 = q(W_{\sigma_1}^s \cap V)$. Поскольку диффеоморфизм H_t при всех $t \in [0,1]$ совпадает с f_0 на кольце $\left[\pi(-\frac{1}{4}), \pi\left(\frac{1}{8}\right)\right] \times \mathbb{S}^1$, то корректно определена окружность $\hat{\gamma}_p = q(\gamma_p \cap K)$.

Положим $W = \left[\pi\left(-\frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{1}{4}\right)\right] \times \left[\pi\left(-\frac{1}{4}\right); \pi\left(\frac{1}{4}\right)\right]$ и $\hat{W} = p(W)$. По построению окружность $\hat{\gamma}_p$ делит кольцо $\hat{W}$ на два кольца, замыкания которых обозначим через $\hat{W}_1, \hat{W}_2$, полагая, что $\hat{\gamma}_1 \subset \hat{W}_1$ и $\hat{\gamma}_2 \subset \hat{W}_2$ (см. рисунок 13).

Выберем не гомотопную нулю окружность $\hat{\gamma} \subset int\, \hat{W}_1$. Согласно работе [23], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\hat{h}_1 : \hat{V} \to \hat{V}$ такой, что $\hat{h}_1(\hat{\gamma}_2) = \hat{\gamma}$.

Для $x_i \in [-\frac{1}{4}; 0]$ положим $K_i = [\pi(x_i); (\pi(\bar{\phi}_0^{-1}(x_i))] \times \mathbb{S}^1$. Выберем открытое покрытие $D = \{D_1, \ldots, D_{k_1}\}$ тора $\mathbb{T}^2$ такое, что компонента связности $\bar{D}_i$ множества $q^{-1}(D_i)$ является подмножеством K_i для некоторых $x_i < \bar{\phi}_0^{-1}(x_{i-1})$. Согласно предложению 4 существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{k_1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:

i) для каждого $i \in \{1, \ldots, k_1\}$ существует гладкая изотопия $\{\hat{w}_{i,t}\}$, тождественная вне D_i и соединяющая тождественное отображение и $\hat{w}_i$;

ii) $\hat{h}_1 = \hat{w}_1 \ldots \hat{w}_{k_1}$.

Пусть $w_{i,t} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, который совпадает с $(q|_{K_i})^{-1}\hat{w}_{i,t}q$ на K_i и совпадает с тождественным отображением вне K_i. Положим

$$\zeta_t = w_{1,t} \ldots w_{k_1,t} f_0, \quad G_t^1 = \begin{cases} \zeta_{2t}, \ 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ \zeta_1, \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} .$$

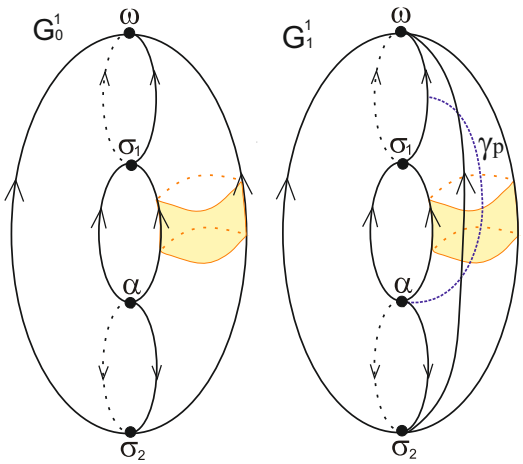


Рис. 13. Изотопия G_t^1 на торе

3. Объединение изотопий H_t^1 и G_t^1.

Определим гладкую дугу $\Gamma_t^1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$ формулой (см. рисунок 14):

$$\Gamma_t^1(z,w) = \begin{cases} H_t^1(\pi(x),w),\ x \in \left(\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right),\ z \in \mathbb{S}^1, \\ G_t^1(\pi(x),w),\ x \in \left(-\frac{1}{4},0\right),\ z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x),w),\ x \in \left[-\frac{5}{8},-\frac{1}{4}\right] \cup [0;\frac{3}{8}],\ z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

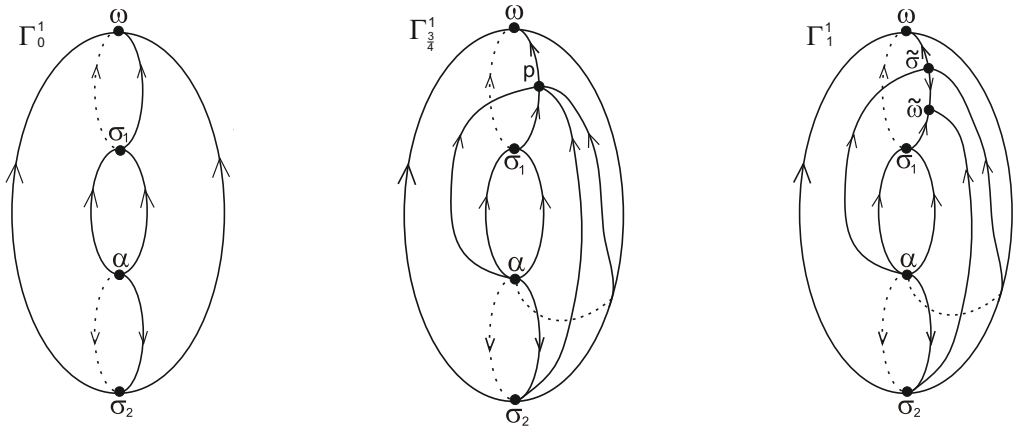


Рис. 14. Изотопия Γ_t^1 на торе

Шаг 2. Вторая седло-узловая бифуркация.

1. Слияние седловой и узловой точек.

Для всех $t \in [0;1]$ положим $\bar{\eta}_t^2(x) = t\bar{g}_2(x) + (1-t)\bar{g}_1(x), x \in \mathbb{R}$ и

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^2(x) = (1-\tau)\bar{\eta}_t^2(x) + \tau\bar{\phi}_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1],\ \tau \in [0,1].$$

Определим гладкую дугу $H_t^2 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$ формулой:

$$H_t^2(w,z) = \begin{cases} (\phi_0(\pi(x)), \eta_{t,|8x-2|}^2(z)),\ x \in \left(\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right),\ z \in \mathbb{S}^1, \\ \Gamma_1(\pi(x),z),\ x \in \left(-\frac{5}{8},\frac{1}{8}\right),\ z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

Дуга H_t^2 реализует слияние стока $\tilde{\omega}$ и седла σ_1 в седло-узловую точку $\tilde{p}$ в момент времени $t = \frac{3}{4}$ и дальнейшее ее исчезновение. Обозначим через $\beta_{\tilde{p}}$ границу устойчивого многообразия седло-узла $\tilde{p}$.

2. Поворот сепаратрисы седла σ_2.

Поскольку диффеоморфизм H_t^2 при всех $t \in [0,1]$ совпадает с f_0 на кольце K, то корректно определены окружности $\hat{\beta}_2 = q(W_{\sigma_2}^u \cap K)$, $\hat{\beta}_1 = q(W_{\tilde{\sigma}}^s \cap K)$ и $\hat{\beta}_{\tilde{p}} = q(\beta_{\tilde{p}} \cap K)$.

Положим $\hat{W}_3 = \hat{V} \setminus \hat{W}$. Выберем не гомотопную нулю окружность $\hat{\beta} \subset int\,\hat{W}_3$. Согласно работе [23], существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\hat{h}_2 : \hat{V} \to \hat{V}$ такой, что $\hat{h}_2(\hat{\beta}_2) = \hat{\beta}$ и $\hat{h}_2(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_1$.

Выберем открытое покрытие $U = \{U_1, \dots, U_{k_2}\}$ тора $\mathbb{T}^2$ такое, что компонента связности $\bar{U}_i$ множества $q^{-1}(U_i)$ является подмножеством K_i для некоторых $x_i < \bar{\phi}_0^{-1}(x_{i-1})$. Согласно предложению 4 существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{k_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:

i) для каждого $i \in \{1, \dots, k_2\}$ существует гладкая изотопия $\{\hat{v}_{i,t}\}$, тождественная вне U_i и соединяющая тождественное отображение и $\hat{v}_i$;

ii) $\hat{h}_2 = \hat{v}_1 \dots \hat{v}_{k_2}$.

Пусть $v_{i,t} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, который совпадает с $(q|_{K_i})^{-1}\hat{v}_{i,t}q$ на K_i и совпадает с тождественным отображением вне K_i. Положим

$$\xi_t = v_{1,t} \dots v_{k_2,t}\Gamma_1, \quad G_t^2 = \begin{cases} \xi_{2t},\ 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ \xi_1,\ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

3. Объединение изотопий H_t^2 и G_t^2.

Определим гладкую дугу $\Gamma_t^2 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$ формулой (см. рисунок 14):

$$\Gamma_t^2(z,w) = \begin{cases} H_t^2(\pi(x), w),\ x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right),\ z \in \mathbb{S}^1, \\ G_t^2(\pi(x), w),\ x \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right),\ z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), w),\ x \in \left[-\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}\right] \cup [0; \frac{3}{8}],\ z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

4. Изотопия к диффеоморфизму f_1.

Положим

$$\bar{\eta}_t^3(x) = (1-t)\bar{g}_2(x) + t\bar{\phi}_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]$$

и

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^3(x) = (1-\tau)\bar{\eta}_t^3(x) + \tau\bar{\phi}_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1],\ \tau \in [0,1].$$

Определим гладкую дугу $\Lambda_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$ формулой:

$$\Lambda_t(w,z) = \begin{cases} (\phi_0(\pi(x)), \eta_{t,|8x-2|}^3(z)),\ x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right),\ z \in \mathbb{S}^1, \\ \Gamma_1^2(\pi(x), z),\ x \in \left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right),\ z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

5. Построение в общем случае

У произвольного диффеоморфизма $f \in G$ замыкания инвариантных многообразий являются нестягиваемыми кривыми, имеющими любые гомотопические типы $< \mu_1, \nu_1 >$, $< \mu_2, \nu_2 >$, удовлетворяющие условию $|\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1| = 1$.

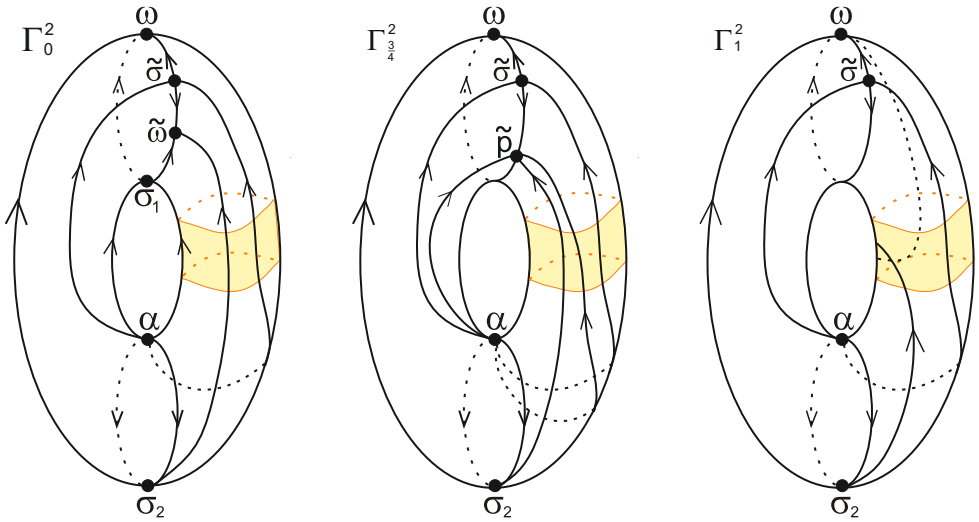


Рис. 15. Изотопия Γ_t^2 на торе

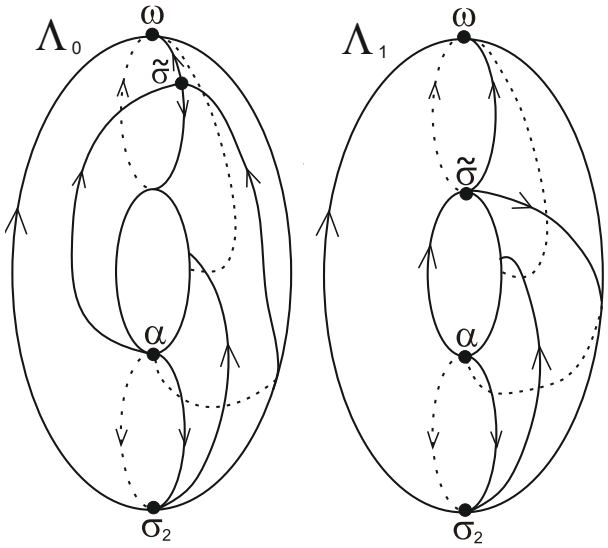


Рис. 16. Изотопия Λ_t на торе

Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется с диффеоморфизмом f_0 устойчивой дугой с конечным числом седло-узловых бифуркаций. Поиск искомой дуги опирается на показанное выше построение дуги между f_0 и f_1 и применение алгоритма Евклида.

Список литературы

[1] Banyaga, A.The structure of the group of equivariant diffeomorphism 16, Topology,1977, 279-283.

[2] P. Blanchard. Duke Mathematical Journal, (1980), 47:1, 33-46.

[3] A.N. Bezdenezhykh and V.Z. Grines. Dynamical Properties and Topological Classification of Gradient-Like Diffeomorphisms on Two-Dimensional Manifolds I. Sel. Math. Sov. 1992. V. 11, 1, 1–11.

[4] Х. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев, О.В. Починка. Бифуркации диффеоморфизмов Морса–Смейла с дико вложенными сепаратрисами. Труды МИ РАН, (2007), 256, 54-69.

[5] Fleitas G. Replacing tangencies by saddle-nodes. Bol. Soc. Brasil. Mat., 8, No. 1, 47–51 (1977).

[6] J. Franks. Necessary conditions for the stability of diffeomorphisms, Trans. A. M. S. 158 (1971), 301–308.

[7] В. Гринес, В. Медведев, О. Починка, Е. Жужома. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла. Труды МИАН им. В.А. Стеклова, 2010, т. 271, с. 111–133.

[8] V. Grines V., T. Medvedev, O. Pochinka, Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland, Springer International Publishing. (2016).

[9] В.З. Гринес, О.В. Починка. О простом изотопическом классе диффеоморфизма “источник-сток” на 3-сфере // Математические заметки. 2013. Т. 94. № 6. С. 828-845.

[10] Grines V., Pochinka O., Van Strien S. On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli // Moscow Mathematical Journal. 2016. Vol. 16. No. 4. P. 727-749.

[11] Gourmelon N., A Franks' lemma that preserves invariant manifolds. Ergodic Theory and Dynamical Systems, (2016). Vol. 36, № 4, pp. 1167-1203

[12] M. W. Hirsh, C. C. Pugh, M. Shub. Invariant manifolds. Springer Lecture Notes in Math., 583 (1977).

[13] B. von Kerekjarto. Math. Ann, (1919-1920), 80, 36-38.

[14] S. Matsumoto. There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs, Inventiones mathematical, vol. 51, pp. 1-7, (1979).

[15] Medvedev T. V., Nozdrinova E., Pochinka O., Shadrina E. V. On a class of isotopic connectivity of gradient-like maps of the 2-sphere with saddles of negative orientation type // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15. No. 2. P. 199-211.

[16] Milnor J. 1965 *Lectures on the h-cobordism theorem.* (Princeton university press)

[17] S.E. Newhouse, J. Palis, F. Takens. Publications mathematiques de l' I.H.E.S, (1983), 57, 5-71.

[18] S. Newhouse, J. Palis, and F. Takens. Stable arcs of diffeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc., **82**, No. 3, 499–502 (1976).

[19] S. Newhouse, M. Peixoto. There is a simple arc joining any two Morse-Smale fows, Asterisque, 31, 15–41 (1976).

[20] E. Nozdrinova. Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle. Russian Journal of Nonlinear Dynamics, (2018), 14:4, 543-551.

[21] J. Palis, C. Pugh. Lecture Notes in Math. (1975), 468, 345-353.

[22] Pochinka O., Nozdrinova E. On the existence of a smooth arc without bifurcations joining source-sink diffeomorphisms on the 2-sphere // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 990. No. 1. P. 1-7.

[23] Rolfsen D. *Knots and links.* 1977. vol 83, 5 (Bull. Amer. Math. Soc.) pp 931–35

в Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Пуховой Алины
Сергеевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «О топологии плоских вещественных распадающизся кривых степени 7» являются: 1). Выделение класса кривых, подлежащих исследованию (см. условия 1-6 в конце первого параграфа); 2). Результаты о топологической классификации кривых рассматриваемого класса (формулировка в параграфе 4, доказательство в параграфах 2, 3).

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- Ознакомление с результатами на близкую тему по практически исчерпывающему списку работ по топологии распадающихся алгебраических кривых к статье статье Борисов И.М., Полотовский Г.М. «О топологии плоских вещественных распадающизся кривых степени 8» (2020, в печати) и по статье Горская В.А, Полотовкий Г.М. «О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости» (Журнал СВМО. 2020. Т.22, №1. С.24-37).
- Консультации с моим научным руководителем Полотовским Григорием Михайловичем.
- Выступление на семинаре по топологии вещественных алгебраических многообразий, работающим под руководством доцентов В.И. Звонилова (ННГУ) и Г.М. Полотовского (ВШЭ).

Подтверждаю, что являюсь автором представляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 15.06.2020. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Пухова

Пухова Алина Сергеевна
20 мая 2020
г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”
НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ

Факультет математики, информатики и компьютерных наук

Пухова Алина Сергеевна

О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 7

Выпускная квалификационная работа - БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
по направлению подготовки 01.03.01 Математика
образовательная программа “Математика”

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент
В.И. Звонилов

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Г.М. Полотовский

Нижний Новгород, 2020

1 Введение и постановка задачи

В 1900 году на II Конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт сформулировал 23 математические проблемы (см. [1]), которые, как он считал, должны были занимать математиков в XX веке. Шестнадцатая проблема Гильберта называется "Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей". В первой части этой проблемы Д. Гильберт поставил задачу о классификации взаимного расположения овалов неособой вещественной алгебраической кривой в вещественной проективной плоскости, а также изучения соответствующих вопросов об алгебраических поверхностях в трёхмерном пространстве. В эту проблематику включают вопросы топологии вещественных алгебраических многообразий с особенностями и вопросы топологии вещественных алгебраических многообразий в пространствах высших размерностей.

Задача о систематическом исследовании топологии вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых, впервые была поставлена Д.А. Гудковым в 1969 году (см. [2]) для случая степени 6 – первого (т. е. низшей степени) нетривиального случая. Эта задача при дополнительных условиях максимальности и общего положения кривых-сомножителей была решена Г.М. Полотовским в 1979 году. В последующие годы было проведено исследование аналогичной задачи для кривых степени 7, которое оказалось значительно сложнее и потребовало привлечения новых методов. В данной работе мы будем рассматривать случай, когда кривая седьмого порядка распадается на неособые кубику C_3 и две коники C_2, $\tilde{C}_2$.

Постановка задачи

Напомним основные определения и некоторые известные сведения из теории плоских алгебраических кривых (подробности см. в [3]).

Определение 1. *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m* называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.

Определение 2. Множество $\mathbb{R}C_m$ точек $(x_0 : x_1 : x_2)$ вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, удовлетворяющих уравнению $C_m(x_0, x_1, x_2) = 0$, называется *множеством вещественных точек кривой C_m*.

Определение 3. Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

Каждая компонента связности множества $\mathbb{R}C_m$ вещественных точек неособой кривой C_m (коротко – вещественная ветвь кривой) гомеоморфна окружности. Если степень кривой чётна, то каждая такая окружность делит $\mathbb{R}P^2$ на две области: гомеоморфную диску и гомеоморфную листу Мёбиуса. Такая компонента называется *овалом*. Для данного овала область первого типа считается внутренней, а второго – внешней. Если степень кривой C_m нечётна, то среди

компонент связности множества $\mathbb{R}C_m$ имеется ровно одна, вложенная в $\mathbb{R}P^2$ односторонне, она называется *нечётной ветвью.*

Оценку на возможное число ветвей неособой кривой даёт классическая

Теорема Харнака (1876). *Пусть N – число компонент связности вещественной кривой степени m в $\mathbb{R}P^2$. Тогда $N \leqslant \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, причём эта оценка точна для любого m.*

Определение 4. *Схема неособой кривой* – число и взаимное расположение её ветвей.

Кривые с максимально возможным по теореме Харнака числом ветвей называются *M-кривыми*, а их схемы – *M-схемами.*

Таким образом, для M-кривой C_3 множество $\mathbb{R}C_3$ состоит из нечётной ветви и одного овала, а для M-кривой C_2 множество $\mathbb{R}C_2$ представляет собой один овал.

Цель работы: найти топологическую классификацию кривых степени 7, распадающихся на кубику и две коники, т. е. кривых, определяемых многочленом вида $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$, при следующих условиях:

1. C_3, C_2, $\tilde{C}_2$ являются M-кривыми;
2. $|C_3 \cap C_2| = 6$, $|C_3 \cap \tilde{C}_2| = 6$, $|C_2 \cap \tilde{C}_2| = 4$;
3. Нет точек, общих для всех трёх рассматриваемых кривых;
4. Все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики;
5. Все 6 точек пересечения кубики с одной коникой и все 6 точек пересечения кубики с другой коникой лежат на одной внешней из четырех дуг, на которые эта коника разбивается точками её пересечения со второй коникой, причем, двигаясь по нечётной ветви, мы не можем пройти все 6 точек одной внешней дуги, а потом все 6 точек другой внешней дуги (т. е. 6 точек одной дуги "перемежаются" с 6 точками другой дуги);
6. Из какой-то точки на внешней дуге горизонтальной коники дуга нечётной ветви идёт на внешнюю дугу вертикальной коники, пересекает её шесть раз и возвращается на внешнюю дугу горизонтальной коники.

2 Перечисление моделей

Возможны два изотопических различных типа пересечения двух коник в четырёх точках в $\mathbb{R}P^2$, показанные на рис. 1.

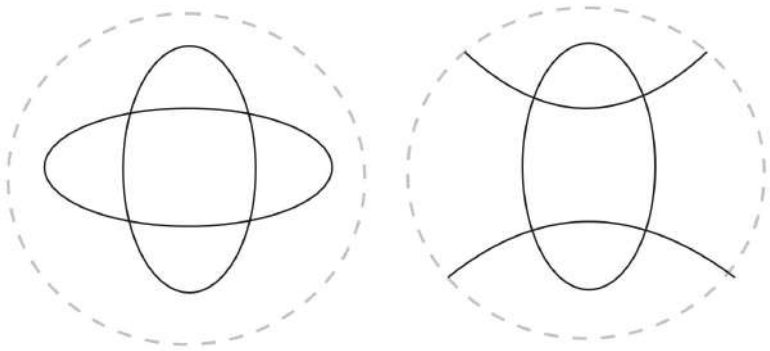


Рис. 1:

Известно [4], [5], что существует только 3 изотопически различных расположения M-кубики и коники, в которых нечётная ветвь кубики пересекает конику в шести вещественных точках – см. рис. 2.

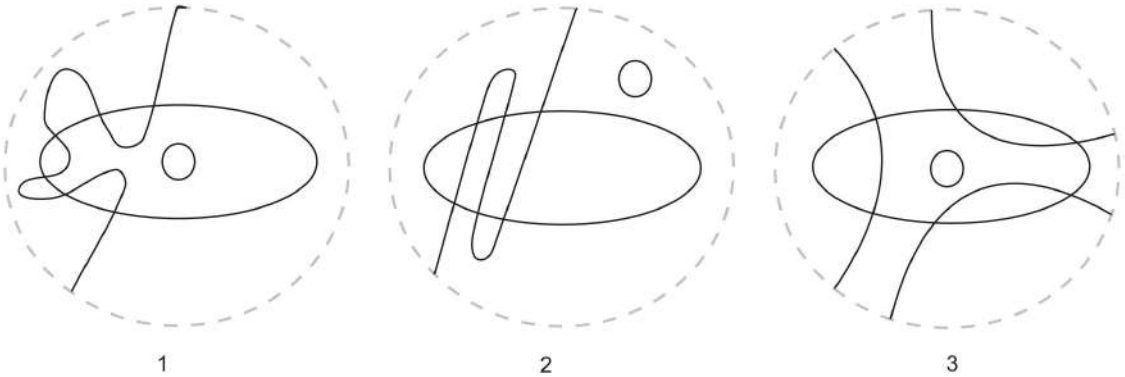


Рис.2

Пусть C_2 – одна из пересекающихся коник ("горизонтальная"), а $\tilde{C}_2$ – вторая ("вертикальная"). Точками пересечения каждая коника разбивается на четыре части: A, B, C, D и a, b, c, d соответственно – см. рис. 3. В данной работе будет рассматриваться случай 1 рис. 1, и при этом каждая коника пересекается с нечётной ветвью кубики одним из двух способов 1 или 2 рис. 2. Для определённости будем считать, что нечётная ветвь пересекает дуги A и a.

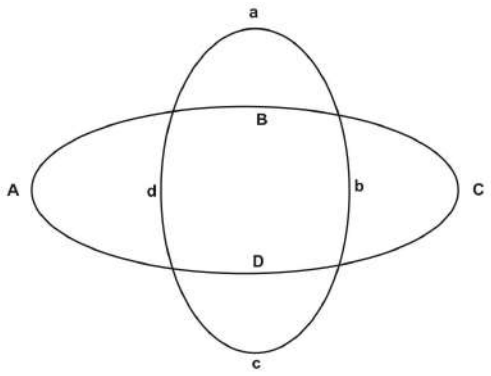


Рис.3

Опишем алгоритм перечисления всех логически возможных вариантов пересечения кубики с внешней дугой горизонтальной коники, удовлетворяющих условиям 1.-6. На дуге горизонтальной коники рассмотрим 6 точек нечётной ветви, учитывая следующие условия: 1) мы считаем, что в точке a_1 нечётная ветвь "входит" внутрь коники – точнее, что дуга (a_1, a_2), лежит внутри коники, a_k– k-ый символ перестановки; 2) какую-то внешнюю по отношению к конике дугу (или дуги) (a_k, a_{k+1}) $(k > 1)$ надо будет "разорвать", чтобы уйти на другую конику. В перестановке, описывающей порядок пересечения нечётной ветви с дугой коники, рядом не могут стоять номера точек с одинаковой чётностью (т. к. нечётная ветвь не имеет двойных точек) и можно считать, что перестановка начинается с нечётного номера. Рассмотрим случай, когда перестановка начинается с цифры 1. Допустимы варианты 1.-3. (рис. 4).

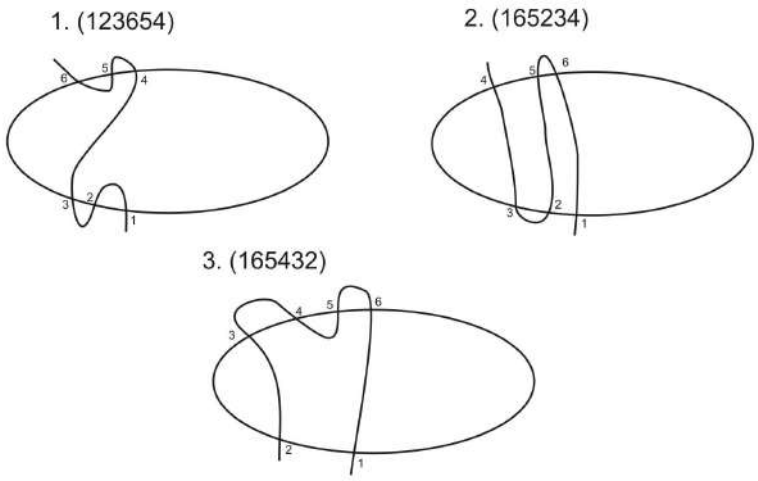


Рис.4

Если первой из шести точек пересечения кубики и коники будет точка 3, то возможны варианты 4.-6. (рис. 5).

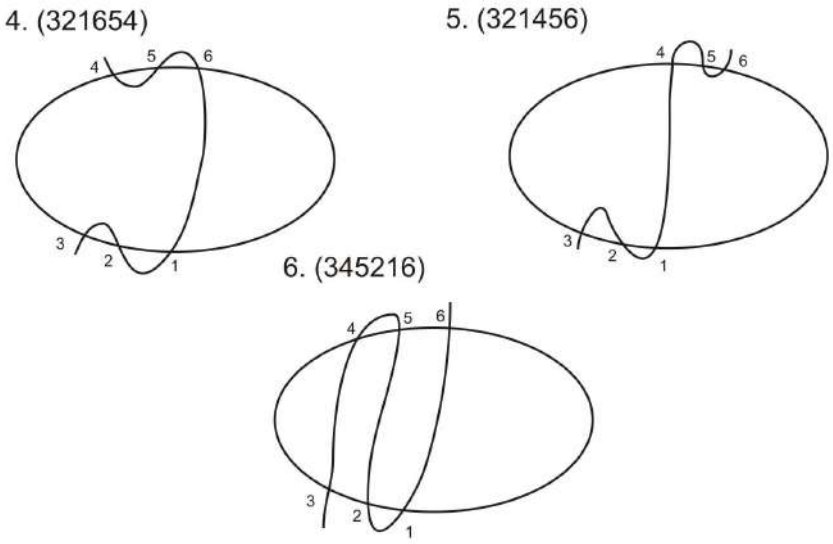


Рис.5

Если первая из шести точек пересечения кубики и коники точка 5, то возможен один вариант 7. – см. рис. 6.

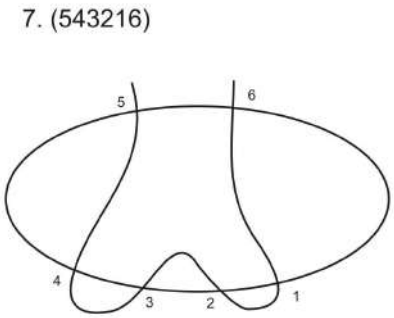


Рис.6

Так как с внешней дуги вертикальной коники нет "перепрыгивания" на внешнюю дугу горизонтальной коники, то на внешней дуге вертикальной коники возможны такие же варианты 1.-7., и к ним добавится еще перестановка (123456) (для внешней дуги горизонтальной коники эта перестановка недопустима, так как будет "самопересечение").

Теперь будем объединять эти варианты между собой. Каждый из семи вариантов пересечения с дугой A попытаемся объединить с каждым из восьми вариантов пересечения с дугой a. Ясно, что всего имеется 7*8=56 вариантов. Однако некоторые случаи объединения в пары невозможны, так как возникнет самопересечение нечётной ветви. Например, перестановку (321456) на дуге A и перестановку (123456) на дуге a объединить нельзя – см. рис. 7.

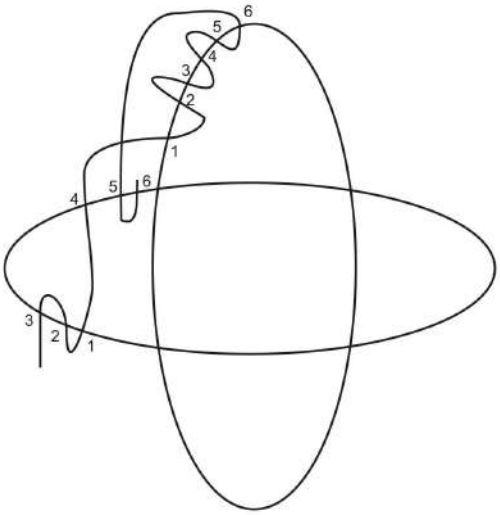


Рис.7

Если на дуге A будет перестановка (321456), то в любом случае будет самопересечение. Аналогично, перестановки (345216) и (543216) на дуге A нельзя объединить ни с одной из восьми перестановок на дуге a.

Каждая из 8 перестановок имеет обратную (например, обратная для перестановки (123654) перестановка (456321)). Однако легко убедиться, что при объединении в пары обратной перестановки с обратной или обратной с прямой получим самопересечения.

Например, попытка соединить перестановку (456321) (обратную для (123654)) и (432561) (обратную для (165234)) показана на рис. 8 слева, а попытка объединить (456321) с прямой (123654) показана на рис. 8 справа.

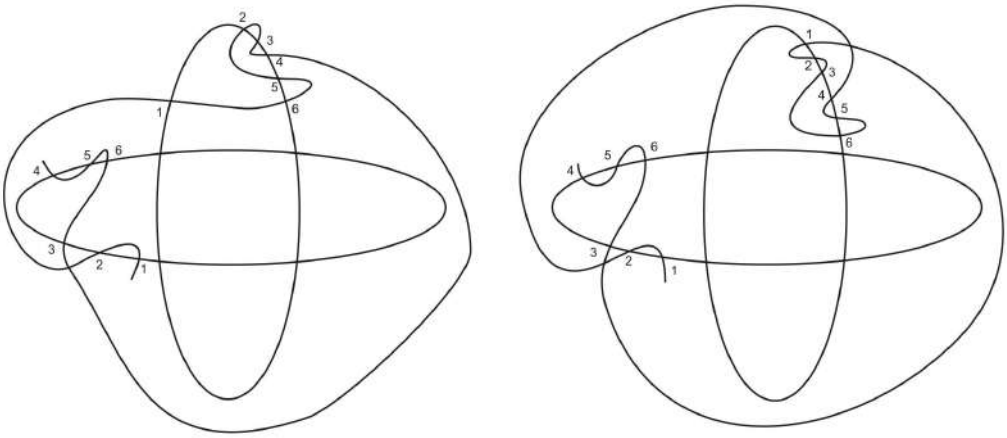


Рис.8

Таким образом, остаётся рассмотреть допустимые объединения в пары прямых перестановок с прямыми. Таких случаев 32:

Дуга A	Дуга B
(123654)	(123456), (123654), (165234), (165432), (321654), (321456), (345216), (543216)
(165234)	(123456), (123654), (165234), (165432), (321654), (321456), (345216), (543216)
(165432)	(123456), (123654), (165234), (165432), (321654), (321456), (345216), (543216)
(321654)	(123456), (123654), (165234), (165432), (321654), (321456), (345216), (543216)

Теперь рассмотрим, где может располагаться овал кубики. Мы знаем, что овал кубики может располагаться только так, как показано на рис. 2. Заштрихуем в соответствии с рис. 2.1 область, где может находиться овал по отношению к горизонтальной конике, и заштрихуем область, где может находиться овал относительно вертикальной коники. Ясно, что поскольку овал один, он должен лежать там, где эти области пересекаются.

В шести случаях нет пересечения областей для попадания овалов, поэтому эти случаи мы исключаем (см. пример на рис. 9).

Для некоторых картинок есть 2 области для попадания овалов: (области X, Y на рис. 10).

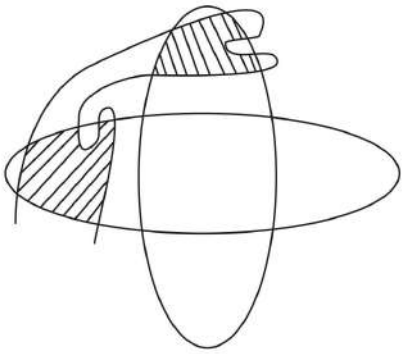


Рис.9

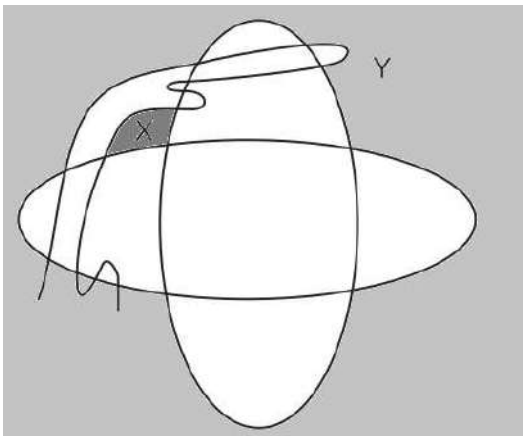


Рис.10

Докажем, что в области X овал кубики лежать не может. Это удобно сделать с помощью следующей классической теоремы.

Теорема Брюзотти (1921) (см. например [3]). *Пусть кривая C_m не имеет кратных компонент и все её особые точки простые двойные. Тогда с помощью малых изменений коэффициентов кривой C_m можно получить вещественную кривую степени m, которая в окрестности каждой уединённой особой точки (случай w_1 рис. 11) будет иметь один из заранее выбранных видов A, B, C, и в окрестности особой точки типа "крест" (случай w_2 рис. 11) (трансверсальное пересечение ветвей) – один из заранее выбранных видов A, B, C.*

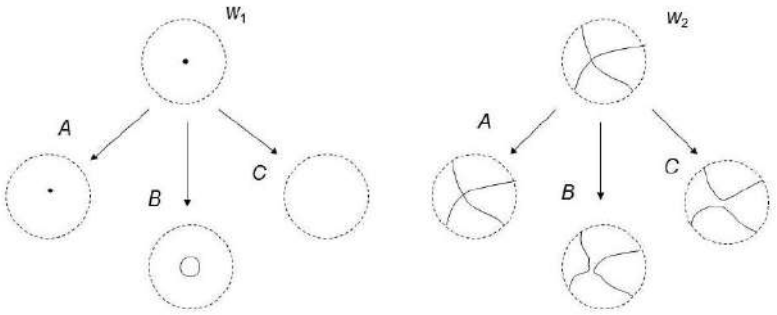


Рис.11

Допустим, овал расположен в области X. Устраняем двойные точки так, как показано на рис. 12 слева, что возможно в силу теоремы Брюзотти. После устранения получаем расположения овалов, показанное на рис. 12 справа. По теореме Безу кривая седьмой степени пересекается с кривой первой степени не более, чем в 7 точках. Прямая, проходящая через какую-либо точку внутри самого внутреннего овала α и через какую-либо точку овала β пересекается кривую степени 7 в 9 точках. Следовательно, расположение овала кубики в области X невозможно.

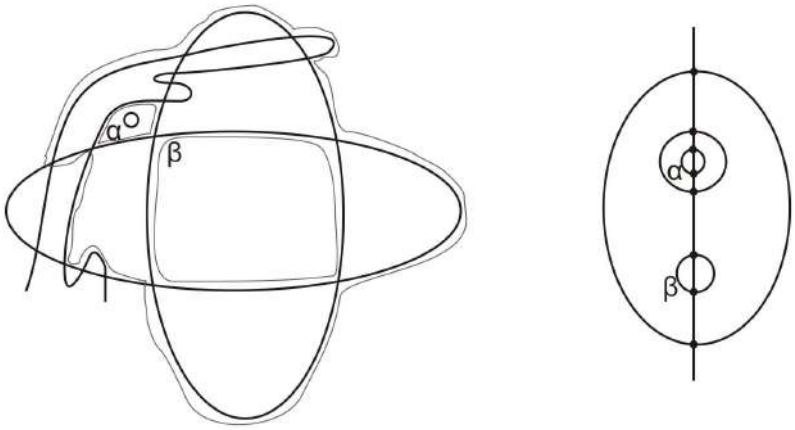


Рис.12

После аналогичных рассуждений у нас осталось 15 допустимых расположений кривых $C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$, удовлетворяющих условиям 1. - 6. На каждом из них есть только одна допустимая область для попадания овала.

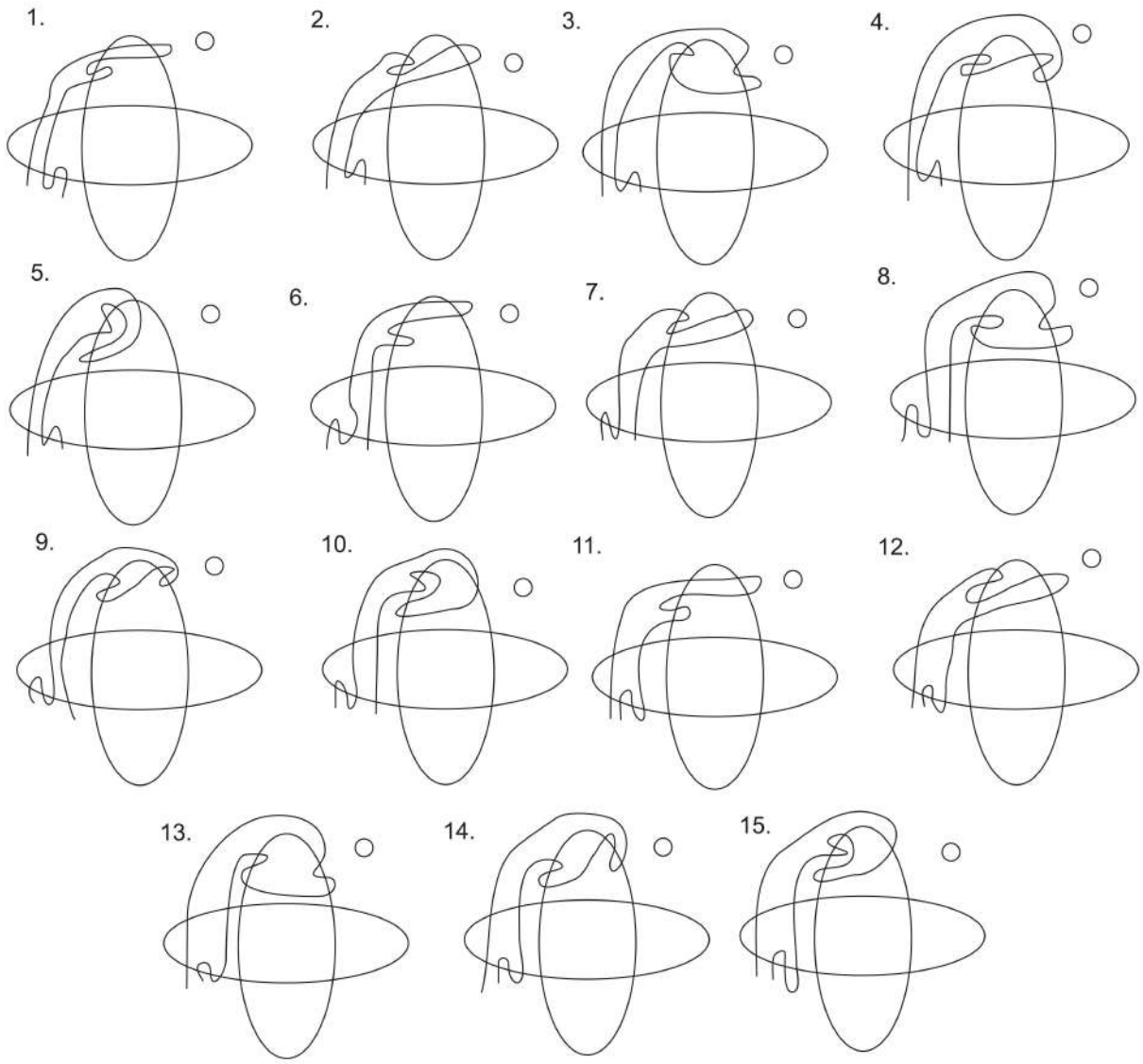


Рис.13

2.1 Запреты, вытекающие из теоремы Безу

Лемма 1. *Модель 2, показанная на рис. 13, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*

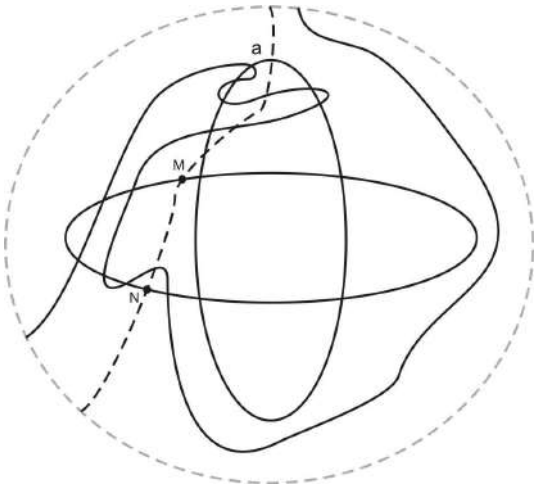


Рис.14

Доказательство. Пусть эта модель, которая ещё раз нарисована на рис. 14, реализуется как схема некоторой кривой степени 7. Выберем две точки, M и N, так, как показано на рис. 14. В силу теоремы Безу прямая MN может проходить только так, как показано на рисунке (пунктирная линия). Будем поворачивать прямую MN против часовой стрелки вокруг точки M. При этом точка N будет двигаться против часовой стрелки по конике C_2 и в какой-то момент должна дойти до коники $\tilde{C}_2$. Но это возможно только после того, как точки пересечения прямой с дугой a вертикальной коники сольются и исчезнут. И прямая должна будет пересечь дугу нечётной ветви кубики внутри коники $\tilde{C}_2$, что невозможно, так как по крайней мере до того, как точка N дойдет до коники $\tilde{C}_2$, три точки пересечения прямой с нечётной ветвью будут сохраняться.

С помощью приёма, описанного в лемме 2.5, мы запретили картинки 2.-15. на рис. 13.

Таким образом, остался открытым вопрос о реализуемости случая 1 рис. 13. Для решения этого вопроса мы применим другой метод.

2.2 Метод Оревкова

Далее будем применять метод Оревкова (см. [2]), основанный на теории кос и зацеплений.

Пусть C_m – кривая, все особенности которой – невырожденные двойные точки. Предположим, что существует точка $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus RC_m$ такая, что пучок L_p прямых с центром в этой точке обладает следующими свойствами:

1) в L_p найдётся прямая l^0, пересекающая кривую $\mathbb{R}C_m$ в m различных точках (*максимальная прямая*) – прямая v на рис. 15;

2) любая прямая $l \in L_p$ пересекает кривую $\mathbb{R}C_m$ не менее, чем в $m-2$ различных точках – прямая u на рис. 15;

3) каждая прямая пучка имеет не более одной точки двукратного пересечения с $\mathbb{R}C_m$, т. е. каждая прямая, имеющая точку двукратного пересечения с $\mathbb{R}C_2$ – назовём такую прямую *критической* – либо касается $\mathbb{R}C_m$, либо пересекает $\mathbb{R}C_m$ в её двойной точке без касания.

Пучок, удовлетворяющий условиям 1) – 3), будем называть *максимальным*. Заметим, что выполнения условия 3) всегда можно добиться малым шевелением центра пучка.

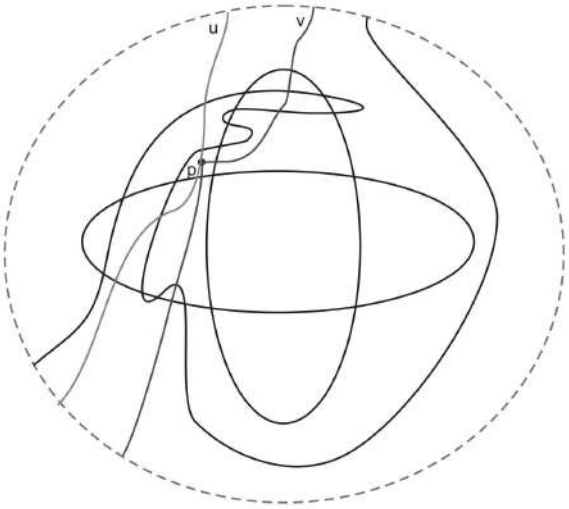


Рис.15

Сопоставление схеме кривой косы происходит следующим образом. Пусть $\mathbb{C}C_m$ – множество комплексных точек кривой, $\mathbb{C}L_p$ – пучок комплексных прямых с центром в точке p. Рассмотрим на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ множество $\mathbb{C}C_m \cap \mathbb{C}L_p$, оно гомеоморфно набору окружностей, которые попарно склеены в двойных точках множества $\mathbb{R}C_m$ вещественных точек кривой и в точках касания $\mathbb{R}L_p$ с $\mathbb{R}C_m$ – см. рис. 16, 17.

Рис.16

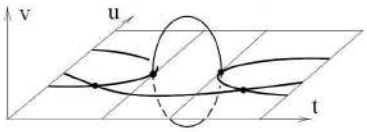


Рис.17

Устранив все точки склейки некоторым стандартным образом получим зацепление $K(C_m, p)$ (рис. 18).

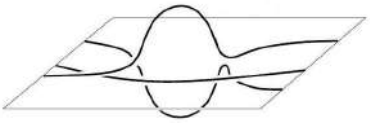


Рис.18

Пусть $b(C_m, p)$ – коса из m нитей, замыкание которой совпадает с $K(C_m, p)$. Для дальнейшего важно, что, в силу предположения о максимальности пучка, коса $b(C_m, p)$ однозначно (с точностью до сопряжянности в группе B_m кос из m нитей) определяется взаимным расположением в $\mathbb{R}P^2$ кривой $\mathbb{R}C_m$ и пучка L_p. Напомним, что группа B_m имеет копредставление через стандартные образующие σ_k:

$\langle \sigma_1, ..., \sigma_{m-1} | \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ при $|i-j| > 1, \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j$ при $|i-j| = 1\rangle$.

Из [7] известно, что полученная описанным выше способом коса $b(C_m, p)$ должна быть *квазиположительной*, т.е. допускать запись в виде $\prod_{j=1}^{k} w_j\sigma_{ij}^{-1}w_j$, где w_j, $j \in \{1, 2, ..., k\}$, – некоторые слова в алфавите $\left\{\sigma_1, ..., \sigma_{m-1}, \sigma_1^{-1}, ..., \sigma_{m-1}^{-1}\right\}$. Следовательно, если для топологической модели гипотетической кривой $\mathbb{R}C_m$ при каждом возможном взаимном расположении пучка L_p и этой модели коса $b(C_m, p)$ не является квазиположительной, то эта модель не может быть реализована алгебраической кривой степени m.

Выберем афинные координаты (x, y) так, чтобы прямая l^0 (а следовательно, и точка p) оказалась в бесконечности и L_p превратился в пучок параллельных прямых l_t, где l_t – прямая, заданная уравнением $x = t$.

Пусть $l_{t_1}, ..., l_{t_s}$ – набор всех критических прямых, упорядоченных по возрастанию t_i. Схема расположения кривой $\mathbb{R}C_m$ относительно пучка L_p кодируется словом $u_1...u_s$, где буква u_i характеризует расположение кривой $\mathbb{R}C_m$ в окрестности прямой l_{t_i} и принимает одно из значений $\supset_k$, $\subset_k$, $\times_k$ $(k \in 1, ..., m-1)$ в соответствии с рис. 19; пару расположенных подряд символов $\subset_k$, $\supset_k$ будем заменять одним символом o_k ("свободный овал в $(k-1)$-й полосе, считая снизу"), а кодирующее слово называть X-кодом.

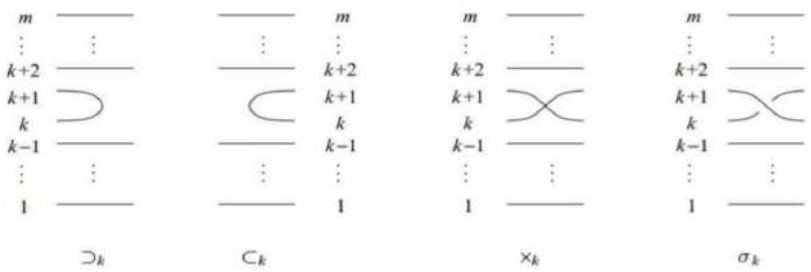


Рис.19

Выбирая центром максимального пучка некоторую точку p, получаем развёртку. Развёртка описывается X-кодом, содержащим символы $\supset_k$, $\subset_k$, $\times_k$ $(k \in 1, ..., m-1)$. Затем X-код по известным правилам переводится в слово из стандартных образующих группы кос.

Доказательства нереализуемости вещественных схем по методу Оревкова состоит в реализации следующей схемы построений и вычислений:

1. Выбирается центр максимального пучка прямых, то есть точка p в $\mathbb{R}P^2$ такая, что каждая прямая, проходящая через p, имеет со схемой изучаемой кривой степени m не менее $m-2$ точек пересечения, и хотя бы одна из прямых пучка пересекает исследуемую схему в m точках

2. Паре (вещественная схема, точка p) сопоставляется набор кос из m нитей так, как описано в [6]. Это сопоставление проводится в два этапа:

а) Вещественная картинка расположения изучаемой схемы кривой относительно пучка прямых с центром в точке p (далее будем называть это развёрткой) кодируется так называемым X-кодом, как это предложено в [6].

б) По правилам, изложенным в [6], по X-коду записывается коса как слово из стандартных образующих группы кос.

3. Проверяем эту косу на квазиположительность.

С.Ю. Оревков предложил следующие способы проверки на квазиположительность.

Неравенство Мурасуги-Тристрама. *Если $b = \prod \sigma_i^{k_i}$ – квазиположительная коса из m нитей, то для её замыкания выполняется неравенство*

$$| \sigma(b) | + m - e(b) - n(b) \leqslant 0,$$

где $\sigma(b)$ и $n(b)$ – сигнатура и дефект замыкания косы b, $e(b) = \Sigma k_j$ – алгебраическая степень косы b, т. е. k_j – показатели степеней в записи косы в виде произведения стандартных образующих группы кос.

Условия Фокса-Милнора. *Пусть b – квазиположительная коса из m нитей. Если $e(b) = m - 1$, то должен существовать многочлен $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такой, что многочлен Александера $\Delta_L(t)$ замыкания L косы b представляется в виде $\Delta_L(t) \doteq f(t) \cdot f(t^{-1})$, где $\doteq$ означает равенство с точностью до умножения на единицы кольца $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$; если $e(b) < m-1$, то должно выполняться равенство $\Delta_L(t) = 0$.*

Утверждение 1. *Для того, чтобы многочлен Александера удовлетворял условию Фокса-Милнора, его значение при $t = -1$ должно быть полным квадратом.*

Утверждение 2. *Если среди неприводимых множителей разложения многочлена Александера есть симметричный многочлен в нечётной степени, то многочлен Александера не представляется в виде, указанном в условии Фокса-Милнора.*

2.3 Применение метода Оревкова

Таким образом, для допустимого расположения, полученного после выполнения действий, описанных выше, найдём максимальный пучок, и применим метод Оревкова.

а) Проверяем сначала выполнение неравенства Мурасуги-Тристрама.

б) Если оно выполняется, то вычисляем многочлен Александера и проверяем выполнение условия Фокса-Милнора.

Построим "развёртку" для случая 1 рис. 13, показанную на рис. 20, где области, в которых может располагаться свободный овал, закрашены.

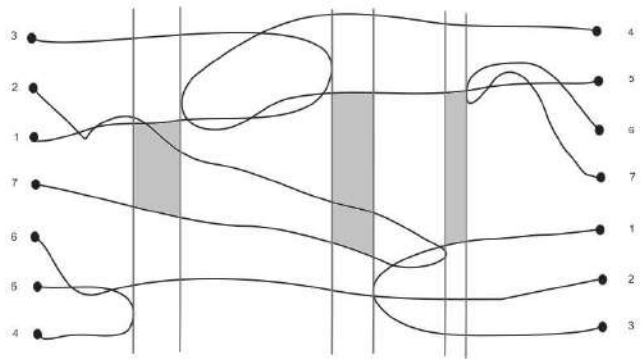


Рис.20

Распадающаяся кривая степени 7 на рис. 20 и на картинке 1 рис. 13 – это фактически два разных изображения одного и того же.

$\times$-код для рис. 20 имеет следующий вид:

$\times_2\times_5\times_2\times_5 \supset_1 \ldots\times_3\ldots \subset_5 \times_4\times_6\times_4\times_4 \supset_5 \ldots \subset_3 \times_2\times_4\times_1 \supset_3 \ldots \subset_4 \times_5\times_4\times_4\times_5$, где многоточия – места в $\times$-коде для кода свободного овала.

Имеются программы, которые по заданному $\times$-коду вычисляют левую часть неравенства Мурасуги-Тристрама. Для проверки выполнения неравенства Мурасуги-Тристрама мы пользуемся программой, написанной М.А. Гущиным, которая успешно применялась при исследовании распадающихся кривых меньших степеней. Далее, если неравенство Мурасуги-Тристрама выполняется, проверяем условие Фокса-Милнора с помощью программы, написанной И.М. Борисовым.

Для картинки 1 рис. 13 проверим неравенство Мурасуги-Тристрама.

У нас есть 4 области в $\times$-коде для попадания свободного овала кубики (многоточия в $\times$-коде). Для каждой из четырёх областей неравенство Мурасуги-Тристрама не выполняется (левая часть неравенства равна 2 или 4, что противоречит неравенству Мурасуги-Тристрама), значит, такого расположения овала быть не может, то есть, эта модель запрещается. Получаем, что все наши возможности, показанные на рис. 13, запретились.

3 Изучение расположений, для которых не выполняется условие 6.

В заключение посмотрим, что даёт описанный выше метод для более широкого класса кривых – для расположений, удовлетворяющих только условиям 1. – 5., но не удовлетворяющих условию 6. Рассмотрим несколько примеров таких расположений (рис. 21).

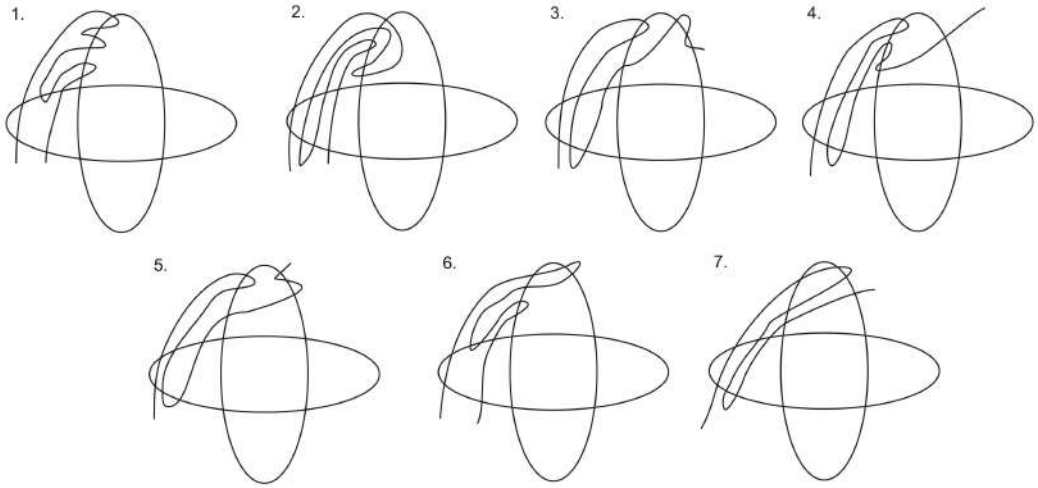


Рис.21

Картинки 1, 2, 5, 6 на рис. 21 запретились такими же рассуждениями, как в лемме 1. Для случаев 3 и 4 запишем $\times$-коды:

3. $\times_4 \supset_4 \ldots \subset_3 \times_3 \times_1 \times_3 \supset_2 \ldots \subset_5 \times_4 \times_4 \times_6 \times_4 \times_2 \times_4 \times_4 \times_5 \times_1 \times_5 \times_3 \times_5$

4. $\times_4 \times_1 \times_1 \times_3 \times_1 \times_2 \supset_3 \ldots \subset_5 \times_4 \times_4 \times_6 \times_4 \supset_5 \ldots \subset_3 \times_2 \times_4 \times_1 \times_4 \times_3 \times_5$

Неравенство Мурасуги-Тристрама для обоих случаев не выполняется (левая часть неравенства принимает значения 2, 4 или 6).

Расположение на картинке 7 реализуется кривой степени 7 рассматриваемого вида, опишем её построение.

Как уже упоминалось в начале работы, расположение рис. 22.1 реализуется объединением кубики и коники. Поэтому есть прямая l, которая пересекает кубику в трёх точках. Рассмотрим точку A и пошевелим нашу прямую l так, чтобы она продолжала пересекать кубику в трёх точках, – получим прямую m (рис. 22.2). Из отрезков прямых l и m делаем эллипсы – рис. 22.3, и получаем картинку 7 рис. 21.

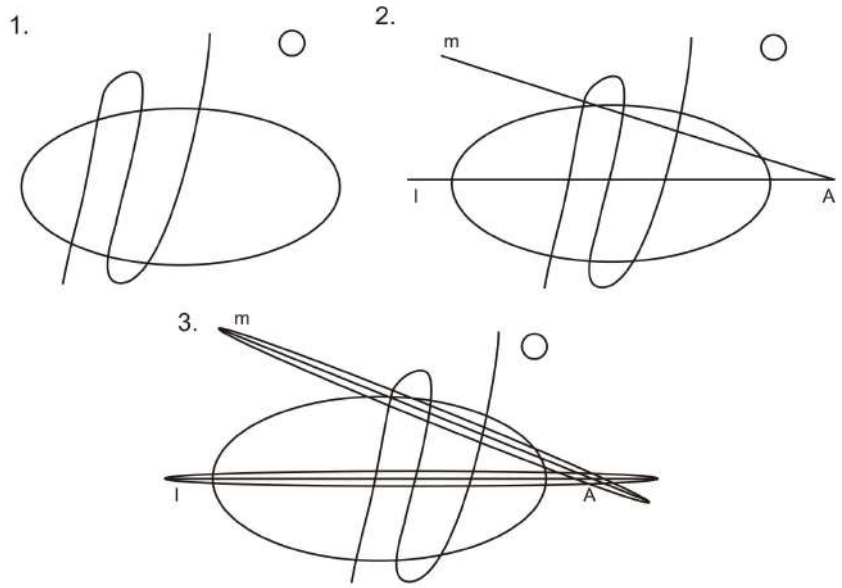


Рис.22

Покажем для контроля наших вычислений, что данное расположение не запрещается ни неравенством Мурасуги-Тристрама, ни условием Фокса-Милнора.

Построим "развёртку", где области, в которых может располагаться свободный овал, закрашены (см. рис. 23).

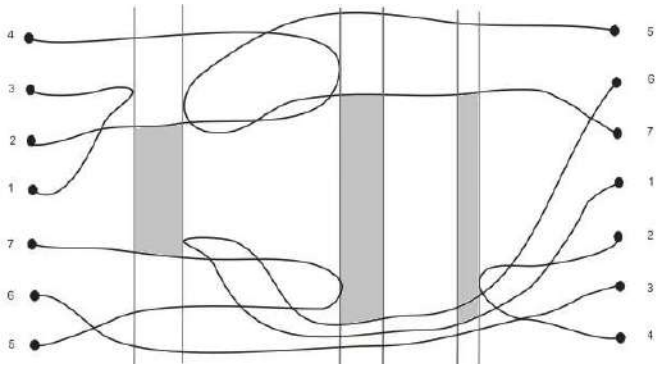


Рис.23

$\times$-код имеет следующий вид:

$\times_1 \times_4 \supset_5 \ldots \subset_4 \times_3 \times_4 \times_2 \times_3 \supset_4 \ldots \subset_5 \times_4 \times_4 \times_6 \times_4 \supset_5 \ldots \subset_4 \times_3 \times_2 \times_4 \times_3 \times_1 \times_5$

У нас есть 3 области в $\times$-коде для попадания свободного овала кубики. Два расположения запрещаются с помощью неравенства Мурасуги-Тристрама. А если мы поместим овал (o_4) в первую область, то неравенство Мурасуги-Тристрама будет выполняться (левая часть неравенства равна 0, что не противоречит неравенству Мурасуги-Тристрама) – см. скриншот выдачи результата программой MTO - Checker на рис. 24.

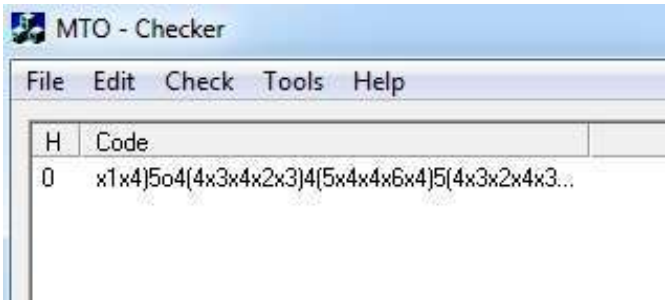


Рис.24

После этого проверим условие Фокса-Милнора. В данном случае многочлен Александера получается нулевым, значит, условие Фокса-Милнора выполнено, картинка 7, показанная на рис. 13, не запрещается, и заодно мы определили область, в которой расположен овал кубики: этот овал лежит снаружи двух коник и кубики (на рис. 21.7).

4 Результаты

В результате описанных выше рассмотрений доказана следующая

Теорема. *Распадающиеся кривые степени* 7 *вида* $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$, *удовлетворяющие условиям*

1. C_3, C_2, $\tilde{C}_2$ *являются* M*-кривыми*;
2. $|C_3 \cap C_2| = 6$, $|C_3 \cap \tilde{C}_2| = 6$, $|C_2 \cap \tilde{C}_2| = 4$;
3. *Нет точек, общих для всех трёх рассматриваемых кривых*;
4. *Все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики*;
5. *Все* 6 *точек пересечения кубики с одной коникой и все* 6 *точек пересечения кубики с другой коникой лежат на одной внешней из четырех дуг, на которые эта коника разбивается точками её пересечения со второй коникой, причем, двигаясь по нечётной ветви, мы не можем пройти все* 6 *точек одной внешней дуги, а потом все* 6 *точек другой внешней дуги (т. е.* 6 *точек одной дуги "перемежаются" с* 6 *точками другой дуги)*;
6. *Из какой-то точки на внешней дуге горизонтальной коники дуга нечётной ветви идёт на внешнюю дугу вертикальной коники, пересекает её шесть раз и возвращается на внешнюю дугу горизонтальной коники*

не существуют.

Кроме этого, мы доказали нереализуемость кривыми степени 7 шести схем кривых, удовлетворяющих условиям 1. – 5. (но без выполнения условия 6.) и построили реализацию одной из таких схем алгебраической кривой степени 7.

Список литературы

[1] Проблемы Гильберта: сб. / под ред. Александрова П.С. – М.: Наука, 1969. – 240 с.

[2] Гудков Д.А., Уткин Г.А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта)// Ученые записки Горьковского ун-та. 1969. Вып. 87. С. 1 – 214.

[3] Гудков Д.А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий// УМН. 1974. Вып. 29. С. 3 – 79.

[4] Полотовский Г.М. Топологическая классификация распадающихся кривых 6-го порядка // Дисс. на соиск. степ. канд. ф-м. наук, Горький, 1979. 261 с.

[5] Kuzmenko T., Polotovsky G. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position // AMS Translations, Ser. 2, Vol. 173 "Topology of real algebraic Varieties and Related Topics". 1996. P.165-177.

[6] Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve//Topology. 1999. 38 . P. 779 – 810.

[7] Lee Rudolf, Algebraic functions and closed braids//Topology. 1983. №22. P. 191 – 202.

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Пучковой Натальи Дмитриевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4» являются: 1). Выделение класса кривых, подлежащих исследованию (см. главу 2); 2). Результаты о топологической классификации некоторых кривых рассматриваемого класса (глава 3); 3). Построение некоторых кривых рассматриваемого класса (глава 4).

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

· Ознакомление с результатами на близкую тему по практически исчерпывающему списку работ по топологии распадающихся алгебраических кривых к статье статье Борисов И.М., Полотовский Г.М. «О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8» (2020, в печати) и по статье Горская В.А, Полотовкий Г.М. «О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости» (Журнал СВМО. 2020. Т.22, №1. С.24-37).

· Консультации с моим научным руководителем Полотовским Григорием Михайловичем.

Подтверждаю, что являюсь автором представляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась 18.06.2019. На Смотр представлен текст работы.

Подпись

Пучкова Наталья Дмитриевна 25 мая 2020 г. Нижний Новгород, Россия

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра: Алгебры, геометрии и дискретной математики

Направление подготовки: «Математика и компьютерные науки»
Профиль подготовки: «Математическое и компьютерное моделирование»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Тема:
«О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4»

Выполнила:
студентка группы 381505
Пучкова Наталья Дмитриевна

_____
(подпись)

Научный руководитель:
доцент, к.ф.-м.н.
Полотовский Григорий Михайлович

_____
(подпись)

Нижний Новгород
2019

Оглавление

Введение **3**

1 Предварительные сведения **4**

2 Пересечение типа «Змея, обвивающаяся вокруг овала» **8**

3 Перестановка (1,2,3,4,5,6,8,7) **13**

3.1 Овалы для «змеи» 13

3.2 Овалы с номером 2 14

3.3 Объединение полученных результатов 15

3.4 Применение метода С.Ю. Оревкова 16

4 Построение некоторых кривых **25**

Вывод **29**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 30

ПРИЛОЖЕНИЯ **31**

Введение

Задача топологической классификации плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта. На данный момент известна классификация для кривых до седьмой степени включительно.

Эта работа посвящена исследованию такого взаимного расположения двух кривых степени 4 с максимальным числом ветвей, что все точки пересечения лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой, их число максимально. Далее в работе вводится определенный тип пересечения ветвей, рассмотрением которого ограничимся ввиду большого числа всех возможных взаимных расположений пересекающихся ветвей.

Рассматривается этап решения задачи, состоящий в перечислении всех допустимых, то есть не запрещаемых известными на данный момент методами, расположений, применении метода Оревкова и построении некоторых существующих взаимных расположений кривых.

ГЛАВА 1

Предварительные сведения

Определение 1. Действительная алгебраическая кривая C_m степени m в проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ задается уравнением $C_m \equiv \sum_{\alpha+\beta+\gamma=m} A_{\alpha\beta} x_0^\gamma x_1^\alpha x_2^\beta = 0$, где m – фиксированное натуральное число; α, β, γ – целые неотрицательные числа; $A_{\alpha\beta}$ – действительные коэффициенты; $(x_0 : x_1 : x_2)$ – координаты точки в $\mathbb{R}P^2$.

Везде далее неособую плоскую действительную алгебраическую кривую C_m будем называть кривой степени m или кривой C_m для краткости изложения.

Определение 2. Если многочлен C_m можно представить в виде произведения двух многочленов C_{m-k} и C_k: $C_m = C_{m-k} \cdot C_k$, то говорят, что кривая C_m распадается на кривые C_{m-k} и C_k.

В своей работе я буду исследовать расположение распадающихся кривых вида $C_8 = C_4 \cdot C_4$ в вещественной проективной плоскости.

В 1876 году А. Харнак доказал теорему о числе компонент связности («кусков») неособой кривой.

Теорема Харнака (см. [1]). Пусть N — число ветвей неособой кривой степени m. Тогда $N \leqslant \dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + 1 = M$, и эта оценка точная для любого m.

Определение 3. Если кривая состоит из наибольшего возможного числа ветвей M, то она называется M-кривой.

По этой теореме M–кривая степени 4 состоит из четырех ветвей. Ее изображение показано на рисунке 1.1, где в качестве модели проективной плоскости рассматривается круг с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности.

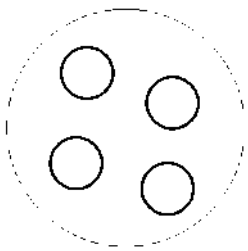


Рисунок 1.1. M-кривая степени 4.

Будем исследовать такие расположения двух кривых степени 4, что все точки пересечения лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой, и их число максимально. В этом нам поможет следующая теорема.

Теорема Безу (см. [1]). Если кривые степеней m и n не имеют общих компонент, то они имеют не более mn общих точек.

В нашем случае максимальное число точек пересечения $4 \cdot 4 = 16$.

Чтобы запрещать некоторые логические возможности расположения кривых, нам понадобится следующая теорема о независимости возмущений простых двойных точек.

Теорема Брюзотти (см. [1]). Пусть вещественная алгебраическая кривая не имеет кратных компонент и все её особые точки – простые двойные. Тогда с помощью малых изменений коэффициентов этой кривой мы получим вещественную кривую той же степени, которая

1) в окрестности изолированной точки может иметь один из видов A, B или C первой строки рисунка 1.2 по нашему выбору.

2) в окрестности трансверсального пересечения ветвей может иметь один из видов A, B или C второй строки рисунка 1.2 по нашему выбору.

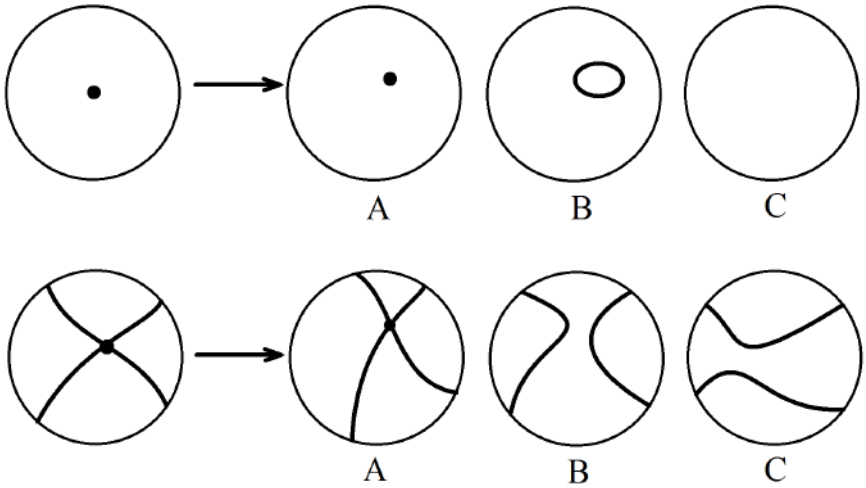


Рисунок 1.2

Следуя Гудкову (см.[1]), введем следующее соглашение: запись вида $\frac{k}{1}l$ описывает такое взаимное расположение четных ветвей, что $k+l$ овалов лежат вне друг друга и еще один овал (главный), охватывает k из этих овалов (внутренних) и оставляет вне l овалов (внешних).

Д. Гильберт ввёл понятие «гнезда веса s».

Определение 4. Кривая C_m имеет гнездо веса s, если у этой кривой существует s овалов, вложенных последовательно друг в друга.

Таким образом, можно сказать, что пустой овал является гнездом веса 1.

Известно, что теорема Безу допускает только следующие схемы расположения овалов неособой кривой степени 8:
1) α овалов вне друг друга, $0 \leqslant \alpha \leqslant 22$ (т. е. α отдельных гнёзд веса 1);
2) один овал с непустой внутренней областью («непустой овал»), внутри и вне которого расположены остальные овалы вне друг друга («одно гнездо веса 2»);
3) два непустых овала вне друг друга, внутри и вне которых лежат ещё сколько-то овалов вне друг друга («два гнезда веса 2»);
4) аналогично случаю 3) – три гнезда веса 2;
5) три «концентрических» овала и ещё сколько-то овалов вне друг друга, расположенных в компонентах дополнения к этим трём овалам («гнездо веса 3»);
6) четыре овала, образующие одно гнездо веса 4;
7) восемь овалов, образующих четыре отдельных гнезда веса 2.

Известно также ([2]), что M–кривая степени 8 может иметь только одну из следующих схем расположения овалов:
1) один овал, внутри и вне которого расположены остальные 21 овалов вне друг друга («одно гнездо веса 2»);
2) два гнезда веса 2 с разными внешними овалами;
3) три гнезда веса 2 с разными внешними овалами;
4) одно гнездо веса 3.

В [2] приведён список всех незапрещённых схем M–кривых степени 8, содержащий 83 схемы, реализованные M–кривыми степени 8, и ещё 6 схем, реализуемость которых M–кривыми степени 8 в настоящее время неизвестна.

Идея запрета с помощью теоремы Брюзотти заключается в следующем: устранить особенности так, чтобы получилась схема степени 8, не входящая в приведенный список.

Кроме того, будем пытаться запрещать схемы расположения рассматриваемых распадающихся кривых степени 8 с помощью метода, который описал С.Ю. Оревков, см.[3]. Исследуемому расположению в соответствие ставится коса. Если коса не является квазиположительной, то такое расположение не реализуется кривой степени 8. В качестве проверки на квазиположительность используется следующее неравенство.

Неравенство Мурасуги-Тристрама. Если коса $b \in B_m$ квазиположительна, то для её замыкания выполняется неравенство

$$h = |\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leqslant 0,$$

где $\sigma(b) = \sigma(L) = \sigma(V + V^T)$ – сигнатура;
$n(b) = n(L) = 1 + n(V + V^T)$ – дефект; V – матрица Зейферта;
L – замыкание косы $b = \prod \sigma_i^{k_i}$;
$e(b) = \Sigma_{i=1}^{k} \varepsilon_i$ – сумма всех показателей степеней в разложении косы b по образующим

группы кос B_m.

Подробнее опишем данный метод для конкретного расположения позже.

ГЛАВА 2

Пересечение типа «Змея, обвивающаяся вокруг овала»

Определение 5. Пусть имеем овал и пересекающуюся с ним в 8 точках незамкнутую дугу без самопересечений, которую будем называть образующей дугой. Рассмотрим границу ε-окрестности этой дуги с таким малым ε, что точек пересечения этой границы с овалом будет ровно 16 без точек касания. Это будет четная ветвь второй кривой. Границу такой ε-окрестности будем называть «змеей», а взаимное расположение двух четных ветвей – пересечением ветвей типа «змея, обвивающаяся вокруг овала».

Для удобства изложения каждой из двух пересекающихся кривых степени 4 присвоим номер. В типе «Змея, обвивающаяся вокруг овала» "змею" будем считать овалом первой кривой (с номером 1), а овал, вокруг которого она обвивается, – овалом второй кривой (с номером 2). Оставшиеся три овала каждой кривой, которые нужно еще «дорисовать», будут иметь тот же номер, что и пересекающаяся ветвь кривой. Так как рассматриваем M–кривые степени 4, то овалы с одним номером лежат вне друг друга.

Так как мы имеем дело с пересечением овала образующей дугой в восьми местах, полезно отметить на нем 8 точек и занумеровать подряд – это будут точки пересечения овала и дуги. Тогда можно рассматривать перестановки 8-го порядка и тем самым перебирать все возможные взаимные расположения кривых. Отметим, что от выбора первой точки ничего не зависит, поэтому ее номер можно всегда считать равным 1.

На данном этапе рассмотрим такие кривые, которым соответствуют перестановки 8-го порядка, что, если пронумеровать на овале кривой степени 4 (с номером 2) подряд восемь точек и соединить их образующей дугой в порядке заданном перестановкой, выполнялись бы следующие условия:
1) дуга, соединяющая первые две точки пересечения, соответствующие первым двум числам из перестановки, лежала внутри овала с номером 2;
2) точку на овале с номером "1"можно соединить дугой с границей модели проективной плоскости так, что эта дуга пересекает ровно один раз объединение рассматриваемых кривых степени 4.

Получим $7! = 5040$ перестановок и, соответственно, взаимных расположений кривых.

Учтем следующий факт. Разделим овал восьмью точками и пронумеруем следующим образом — рисунок 2.1. Нетрудно заметить, что если мы рассмотрим перестановки со вторым элементом, значение которого равно 2, то перестановки со вторым элементом, равным 8, рассматривать уже не нужно, так как расположения ветвей для них будут симметричны, а, следовательно, топологически эквивалентны, см. рисунок 2.2. Применяя аналогичные рассуждения к остальным значениям элемента под номером 2 нашей последовательности, приходим к выводу, что достаточно рассмотреть только перестановки со

вторым элементом, значение которого $\leqslant 5$, см. рисунок 2.3.

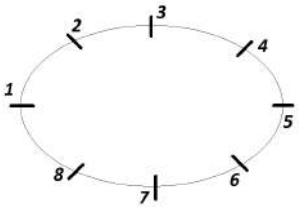


Рисунок 2.1

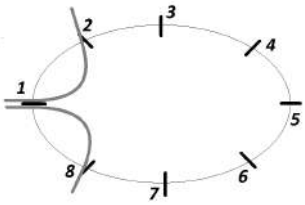


Рисунок 2.2

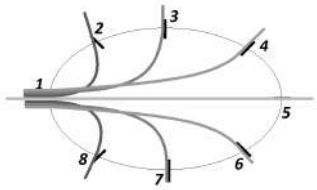


Рисунок 2.3

В ходе исследования поведения кривых были найдены некоторые необходимые условия существования кривой для перестановок, отвечающих расположениям распадающихся кривых изучаемого вида.

Условие 1. Если в перестановке есть два элемента, идущих друг за другом, значения которых отличаются на 2, то ещё двух элементов, отвечающих этим условиям, быть не должно, иначе кривая неминуемо пересечет себя. См. рисунок 2.4.

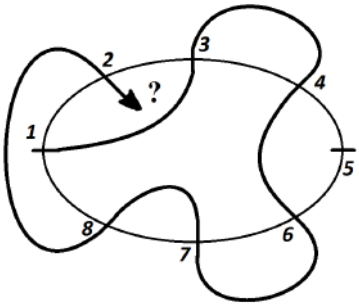


Рисунок 2.4. Расположение образующей дуги для перестановки $(1, 3, 4, 6, 7, 8, 2, \ldots)$

Условие 2. Если в перестановке встречается элемент, значение которого лежит между значениями двух предыдущих, то либо это последний элемент перестановки, либо значение следующего элемента тоже лежит между значениями двух предыдущих. См. рисунок 2.5.

Условие 3. Если в перестановке есть два элемента, идущих друг за другом, значения которых отличаются на 2, 4 или 6, то есть на четное число, то значение последнего элемента должно лежать между значениями этих двух элементов. См. рисунки 2.4 и 2.6.

Условие 4. Если в перестановке есть два элемента, идущих друг за другом, значения которых отличаются на 3, то значения следующих двух элементов должны либо оба лежать между значениями двух предыдущих, либо оба лежать вне их значений. См. рисунок 2.5.

С помощью этих условий мы отсечем значительную часть ненужных перестановок.

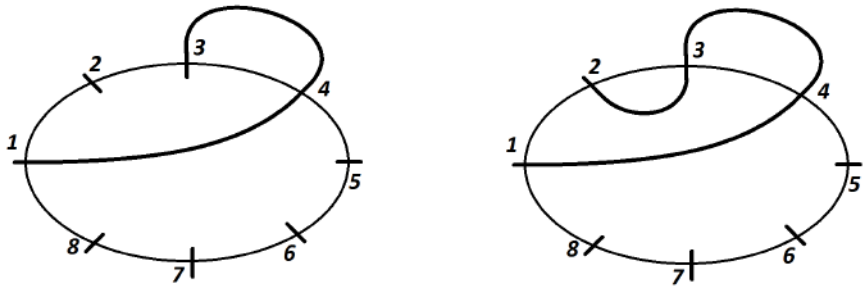


Рисунок 2.5. Расположение образующей дуги для перестановки $(1, 4, 3, \ldots)$

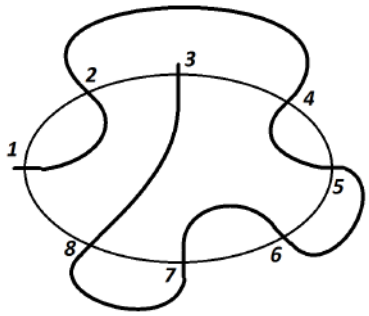


Рисунок 2.6. Расположение образующей дуги для перестановки $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 3)$

Мной была составлена программа, перебирающая в лексикографическом порядке перестановки, удовлетворяющие условиям 1 - 4. Листинг файла и результат работы программы см. в приложении А.

В программе учтены необходимые, но не достаточные условия, поэтому перестановок значительно больше, чем имеется попарно негомеоморфных расположений рассматриваемого вида. Такую программу удобно использовать при переборе перестановок большего порядка. В нашем случае для перестановок 8-го порядка нетрудно перебрать их вручную в лексикографическом порядке, в котором их перебирает и программа.

При ручном переборе ненужные перестановки отсеются «сами собой», их просто не нужно будет выписывать.

У нас получится 87 перестановок:

1. $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$	8. $(1, 2, 3, 4, 8, 5, 7, 6)$	15. $(1, 2, 3, 8, 4, 5, 6, 7)$	22. $(1, 2, 3, 8, 7, 4, 6, 5)$
2. $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)$	9. $(1, 2, 3, 4, 8, 7, 5, 6)$	16. $(1, 2, 3, 8, 4, 5, 7, 6)$	23. $(1, 2, 3, 8, 7, 6, 4, 5)$
3. $(1, 2, 3, 4, 5, 8, 6, 7)$	10. $(1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5)$	17. $(1, 2, 3, 8, 4, 7, 5, 6)$	24. $(1, 2, 3, 8, 7, 6, 5, 4)$
4. $(1, 2, 3, 4, 5, 8, 7, 6)$	11. $(1, 2, 3, 6, 5, 4, 7, 8)$	18. $(1, 2, 3, 8, 4, 7, 6, 5)$	25. $(1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 3)$
5. $(1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 5)$	12. $(1, 2, 3, 6, 5, 4, 8, 7)$	19. $(1, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 4)$	26. $(1, 2, 4, 5, 8, 7, 6, 3)$
6. $(1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 8)$	13. $(1, 2, 3, 6, 7, 8, 4, 5)$	20. $(1, 2, 3, 8, 6, 5, 4, 7)$	27. $(1, 2, 4, 7, 6, 5, 8, 3)$
7. $(1, 2, 3, 4, 8, 5, 6, 7)$	14. $(1, 2, 3, 6, 7, 8, 5, 4)$	21. $(1, 2, 3, 8, 7, 4, 5, 6)$	28. $(1, 2, 5, 4, 3, 6, 7, 8)$

29. $(1,2,5,4,3,6,8,7)$
30. $(1,2,5,4,3,8,6,7)$
31. $(1,2,5,4,3,8,7,6)$
32. $(1,2,5,6,7,4,3,8)$
33. $(1,2,5,6,8,3,4,7)$
34. $(1,2,6,5,3,8,7,4)$
35. $(1,2,6,5,4,7,8,3)$
36. $(1,2,6,7,8,3,4,5)$
37. $(1,2,6,7,8,3,5,4)$
38. $(1,2,6,7,8,5,3,4)$
39. $(1,2,6,7,8,5,4,3)$
40. $(1,2,7,4,5,6,3,8)$
41. $(1,2,7,6,3,4,5,8)$
42. $(1,2,7,6,5,4,3,8)$
43. $(1,2,8,3,4,5,6,7)$
44. $(1,2,8,3,4,5,7,6)$
45. $(1,2,8,3,4,7,5,6)$
46. $(1,2,8,3,4,7,6,5)$
47. $(1,2,8,3,5,6,7,4)$
48. $(1,2,8,3,6,5,4,7)$
49. $(1,2,8,3,7,4,5,6)$
50. $(1,2,8,3,7,4,6,5)$
51. $(1,2,8,3,7,6,4,5)$
52. $(1,2,8,3,7,6,5,4)$
53. $(1,2,8,5,4,3,6,7)$
54. $(1,2,8,5,4,3,7,6)$
55. $(1,2,8,5,6,7,3,4)$
56. $(1,2,8,5,6,7,4,3)$
57. $(1,2,8,7,3,4,5,6)$
58. $(1,2,8,7,3,4,6,5)$
59. $(1,2,8,7,3,6,4,5)$
60. $(1,2,8,7,3,6,5,4)$
61. $(1,2,8,7,4,5,6,3)$
62. $(1,2,8,7,5,4,3,6)$
63. $(1,2,8,7,6,3,4,5)$
64. $(1,2,8,7,6,3,5,4)$
65. $(1,2,8,7,6,5,3,4)$
66. $(1,2,8,7,6,5,4,3)$
67. $(1,4,3,2,5,6,7,8)$
68. $(1,4,3,2,5,6,8,7)$
69. $(1,4,3,2,5,8,6,7)$
70. $(1,4,3,2,5,8,7,6)$
71. $(1,4,3,2,6,7,8,5)$
72. $(1,4,3,2,7,6,5,8)$
73. $(1,4,3,2,8,5,6,7)$
74. $(1,4,3,2,8,5,7,6)$
75. $(1,4,3,2,8,7,5,6)$
76. $(1,4,3,2,8,7,6,5)$
77. $(1,4,5,6,3,2,7,8)$
78. $(1,4,5,6,3,2,8,7)$
79. $(1,4,5,6,7,8,2,3)$
80. $(1,4,5,6,7,8,3,2)$
81. $(1,4,5,8,2,3,6,7)$
82. $(1,4,5,8,2,3,7,6)$
83. $(1,4,5,8,7,6,2,3)$
84. $(1,4,5,8,7,6,3,2)$
85. $(1,4,6,7,3,2,8,5)$
86. $(1,4,7,6,5,8,2,3)$
87. $(1,4,7,6,5,8,3,2)$

Если двум перестановкам соответствуют гомеоморфные расположения кривых, то оставим из них ту, что встречается раньше. У нас получится 49 перестановок:

1. $(1,2,3,4,5,6,7,8)$
2. $(1,2,3,4,5,6,8,7)$
3. $(1,2,3,4,5,8,6,7)$
4. $(1,2,3,4,5,8,7,6)$
5. $(1,2,3,4,6,7,8,5)$
6. $(1,2,3,4,7,6,5,8)$
7. $(1,2,3,4,8,5,6,7)$
8. $(1,2,3,4,8,5,7,6)$
9. $(1,2,3,4,8,7,5,6)$
10. $(1,2,3,4,8,7,6,5)$
11. $(1,2,3,6,5,4,7,8)$
12. $(1,2,3,6,5,4,8,7)$
13. $(1,2,3,6,7,8,4,5)$
14. $(1,2,3,6,7,8,5,4)$
15. $(1,2,3,8,4,5,7,6)$
16. $(1,2,3,8,4,7,5,6)$
17. $(1,2,3,8,4,7,6,5)$
18. $(1,2,3,8,5,6,7,4)$
19. $(1,2,3,8,6,5,4,7)$
20. $(1,2,3,8,7,4,5,6)$
21. $(1,2,3,8,7,4,6,5)$
22. $(1,2,3,8,7,6,4,5)$
23. $(1,2,4,5,6,7,8,3)$
24. $(1,2,4,5,8,7,6,3)$
25. $(1,2,4,7,6,5,8,3)$
26. $(1,2,5,4,3,6,8,7)$
27. $(1,2,5,4,3,8,6,7)$
28. $(1,2,5,6,7,4,3,8)$
29. $(1,2,5,6,8,3,4,7)$
30. $(1,2,6,5,4,7,8,3)$
31. $(1,2,6,7,8,3,5,4)$
32. $(1,2,6,7,8,5,3,4)$
33. $(1,2,7,4,5,6,3,8)$
34. $(1,2,7,6,3,4,5,8)$
35. $(1,2,7,6,5,4,3,8)$
36. $(1,2,8,3,4,5,7,6)$
37. $(1,2,8,3,4,7,5,6)$
38. $(1,2,8,3,5,6,7,4)$
39. $(1,2,8,3,6,5,4,7)$
40. $(1,2,8,3,7,4,6,5)$
41. $(1,2,8,3,7,6,4,5)$
42. $(1,2,8,7,3,4,6,5)$
43. $(1,2,8,7,4,5,6,3)$
44. $(1,2,8,7,5,4,3,6)$
45. $(1,2,8,7,6,5,3,4)$
46. $(1,4,3,2,6,7,8,5)$
47. $(1,4,3,2,7,6,5,8)$
48. $(1,4,5,8,2,3,7,6)$
49. $(1,4,6,7,3,2,8,5)$

Теперь с помощью теоремы Брюзотти докажем, что расположения, отвечающие некоторым из этих перестановок, не могут быть реализованы кривыми 8-го порядка. Покажем на примере, как мы это осуществляем. Предположим, у нас есть перестановка $(1,2,3,4,5,8,6,7)$. Ей отвечает взаимное расположение кривых, представленное на рисунке 2.7. Устраним каждую точку переечения по теореме Брюзотти так, чтобы гнёзда были как можно большего веса и овалов было как можно больше, например, как показано на рисунке 2.8. На нем видно, что у нас получилось гнездо веса 3 и веса 2, такая схема неособой кривой степени 8 невозможна (см. список возможных схем выше). Значит, такую

перестановку мы можем убирать из списка.

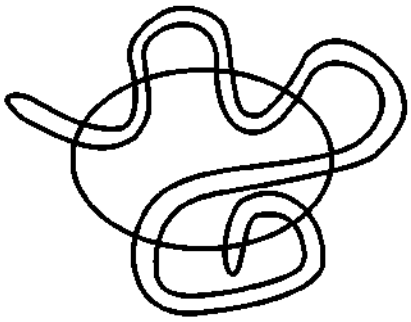


Рисунок 2.7

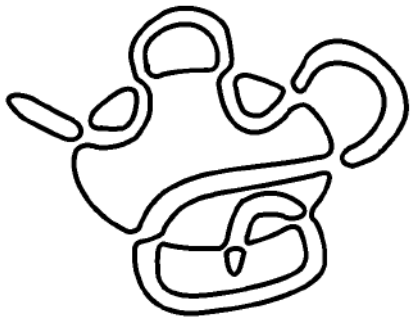


Рисунок 2.8

В результате такого отсеивания получим список из 16 перестановок:

1. $(1,2,3,4,5,6,7,8)$
2. $(1,2,3,4,5,6,8,7)$
3. $(1,2,3,4,5,8,7,6)$
4. $(1,2,3,4,6,7,8,5)$
5. $(1,2,3,4,7,6,5,8)$
6. $(1,2,3,4,8,7,6,5)$
7. $(1,2,3,6,5,4,7,8)$
8. $(1,2,3,6,5,4,8,7)$
9. $(1,2,3,6,7,8,5,4)$
10. $(1,2,3,8,7,4,5,6)$
11. $(1,2,4,5,6,7,8,3)$
12. $(1,2,5,6,7,4,3,8)$
13. $(1,2,6,5,4,7,8,3)$
14. $(1,2,7,6,5,4,3,8)$
15. $(1,4,3,2,6,7,8,5)$
16. $(1,4,3,2,7,6,5,8)$

ГЛАВА 3

Перестановка (1,2,3,4,5,6,8,7)

Так как задача объемная, сузим ее, и найдем все возможные расположения овалов для конкретного взаимного расположения пересекающихся ветвей, которое соответствует конкретной перестановке. Возьмем, например, перестановку $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)$, см. рисунок 3.1.

Распределим сначала отдельно овалы с каждым номером, затем отсечем из полученных логически возможных недопустимые случаи по теореме Брюзотти и методом С.Ю. Оревкова.

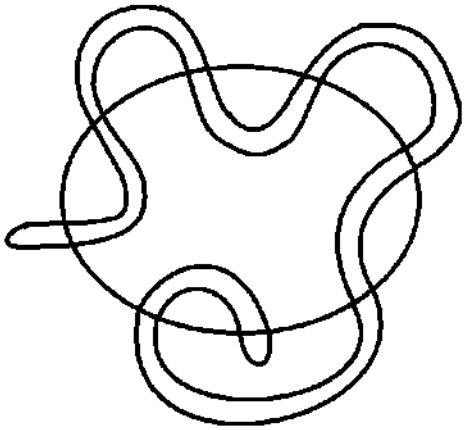


Рисунок 3.1. Расположение, отвечающее перестановке $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)$.

3.1 Овалы для «змеи»

Найдем сначала все возможные расположения трёх овалов с номером 1.

Обратимся к взаимному расположению пересекающихся ветвей. Дополнение к нарисованным (пересекающимся) овалам до проективной плоскости вне змеи состоит из 9 областей, в которых могут располагаться эти овалы с номером 1. Пронумеруем эти области номерами от 1 до 9, см. рисунок 3.2. Все логически возможные расположения овалов представлены в приложении Б.

Постепенно будем отсекать невозможные случаи. Здесь слово "постепенно" означает, что мы будем сначала рассматривать, допустимо ли при применении теоремы Брюзотти добавление хотя бы одного овала в пронумерованную область. Затем из оставшихся номеров областей составим пары и будем добавлять по одному овалу в каждую область из пары и снова исключать лишнее. Аналогично с тройками.

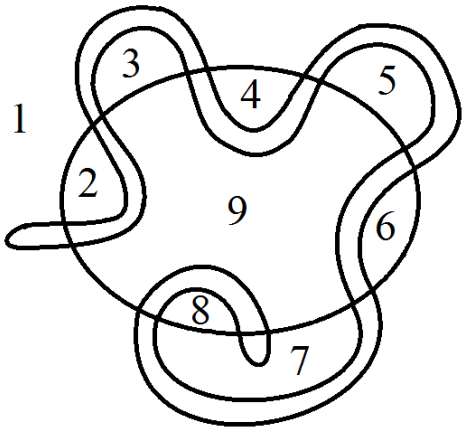


Рисунок 3.2

Так, для взаимного расположения на рисунке 3.2 невозможным является добавление хотя бы одного овала в области с номерами 2, 3, 4, 5, 6 и 8 (см. рисунки 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 и 3.8; например, на рисунке 3.3 образовались гнёзда веса 2 и веса 3, чего не может быть – см.выше). Остается одна пара областей $(7, 9)$.

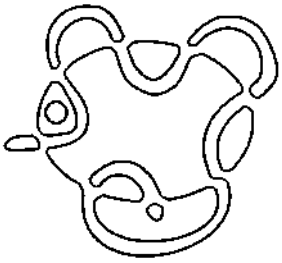


Рисунок 3.3

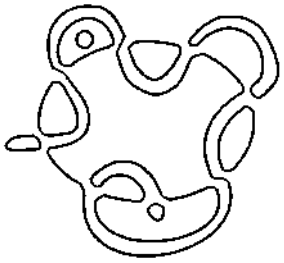


Рисунок 3.4

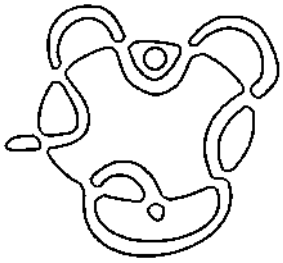


Рисунок 3.5

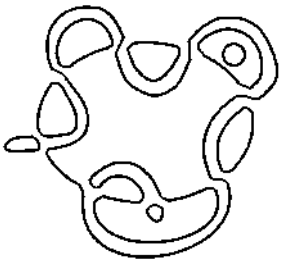


Рисунок 3.6

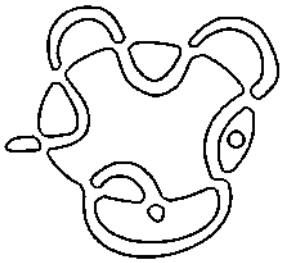


Рисунок 3.7

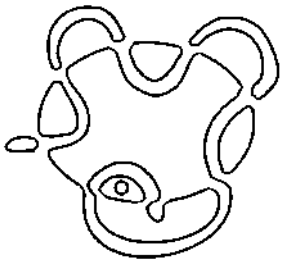


Рисунок 3.8

Если мы оставим только те расположения, которые не могут отсечься с помощью теоремы Брюзотти, получим список, представленный в таблице в приложении B.

3.2 Овалы с номером 2

Аналогично предыдущему пункту найдем все возможные расположения трёх овалов с номером 2.

Снова имеются 9 областей, в которых могут располагаться уже овалы с номером 2. Пронумеруем эти области номерами от 1 до 9, см. рисунок 3.9. Все возможные расположения овалов представлены в том же приложении Б, так как число областей осталось то же.

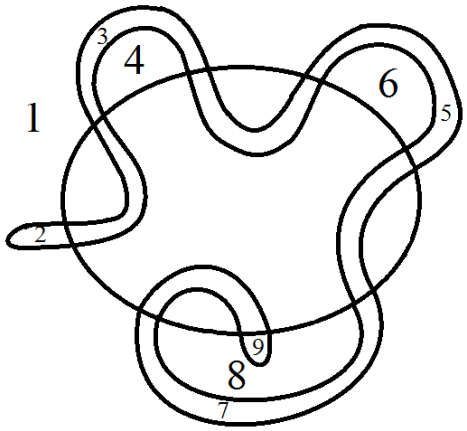


Рисунок 3.9

По тем же причинам, что и раньше, здесь не может быть даже по одному овалу в областях 2, 3, 4, 5, 6 и 9. Осталась одна возможная пара областей (7,8).

Таким образом, если мы оставим только те расположения овалов с номером 1, которые не могут отсечься с помощью теоремы Брюзотти, получим список, представленный в таблице в приложении В.

3.3 Объединение полученных результатов

Чтобы получить полную картину, нам нужно объединить результаты двух предыдущих подразделов 3.1 и 3.2. Стоит учесть, что добавленные овалы могут быть один в другом, если они с разным номером, то есть относятся к разным кривым степени 4. Для таких случаев будем использовать кодировку, описанную в главе 1 данной работы. Затем отсеем неподходящие расположения с помощью теоремы Брюзотти.

Снова обратимся к взаимному расположению пересекающихся ветвей. Пронумеруем области, в которых может быть хотя бы один овал любого номера, как на рисунке 3.10.

Теперь будем заполнять таблицу расположений овалов с номерами 1 и 2 на одном рисунке. Для этого выполним «декартово произведение» таблиц из приложения В. Заполнять таблицу расположений будем таким образом, что число овалов с номером 1 будет отмечено числом с индексом 1, а число овалов с номером 2 – числом с индексом 2. Тогда после запрета неподходящих расположений с помощью теоремы Брюзотти у нас получится таблица в приложении Г.

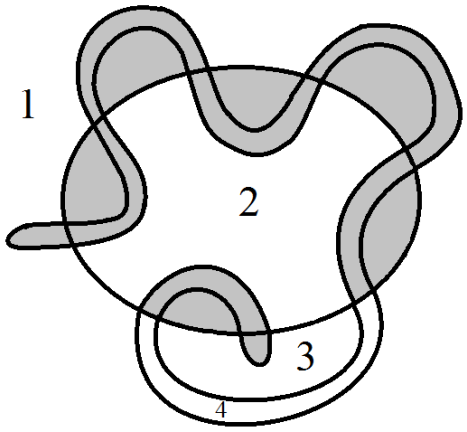


Рисунок 3.10

3.4 Применение метода С.Ю. Оревкова

Применим метод, упомянутый в первой главе, предложенный и описанный С.Ю. Оревковым, см [3].

Для удобства и наглядности изобразим исследуемое взаимное пересечение так, как показано на рисунке 3.11. Это ничему не противоречит, так как овал кривой степени 4 не обязан быть выпуклым.

Возьмем точку P в проективной плоскости, не лежащую на кривой, такую, чтобы каждая прямая пучка прямых с центром в точке P пересекала бы нашу кривую не менее, чем в $n-2=8-2=6$ точках, и нашлась бы максимальная прямая l_M, которая пересекала бы эту кривую в $n=8$ точках, см. рисунок 3.11. Разрежем модель $\mathbb{R}P^2$ по этой максимальной прямой l_M и склеим половинки по частям граничной окружности, учитывая отождествление диаметрально противоположных точек, см. рисунок 3.12. Таким образом, l_M будет новой «бесконечно удаленной прямой», то есть будет изображаться границей круга на новой модели.

Изобразим рисунок 3.12 в виде «развёртки» (у С.Ю. Оревкова – послойное расположение), изображенной на рисунке 3.13 (здесь точка P – «бесконечно удаленная на оси OY»).

Ее можно закодировать с помощью x-кода, двигаясь слева направо и используя блоки $\subset_i, \supset_i, o_i, x_i,\ i \in (1,2,\ldots,7)$ в соответствии с рисунком 3.14.

Тогда нашу развёртку можно описать следующим x-кодом:

$$x_5x_6x_4x_5 \supset_4 \ldots \subset_3 x_2x_1 \supset_2 \ldots x_5 \ldots x_4 \ldots \subset_4 x_3x_4x_4x_3x_3x_4x_4x_3$$

где вместо многоточия будут показаны положения шести овалов, имеющих индексы 3, 4, 5 или 6, в зависимости от области, в которой они находятся. Эти расположения овалов мы будем брать из таблицы в приложении Г.

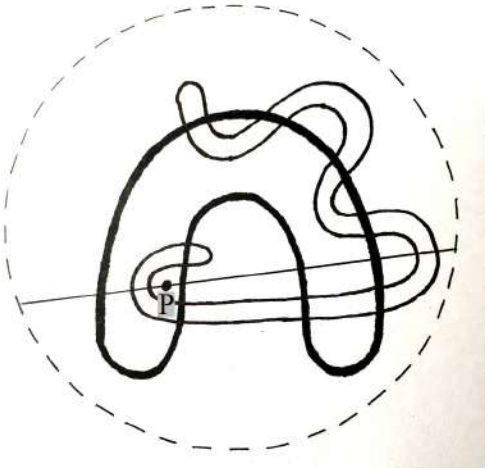


Рисунок 3.11

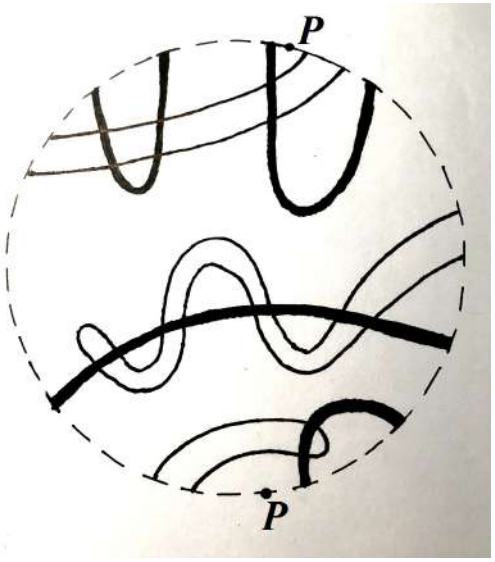


Рисунок 3.12

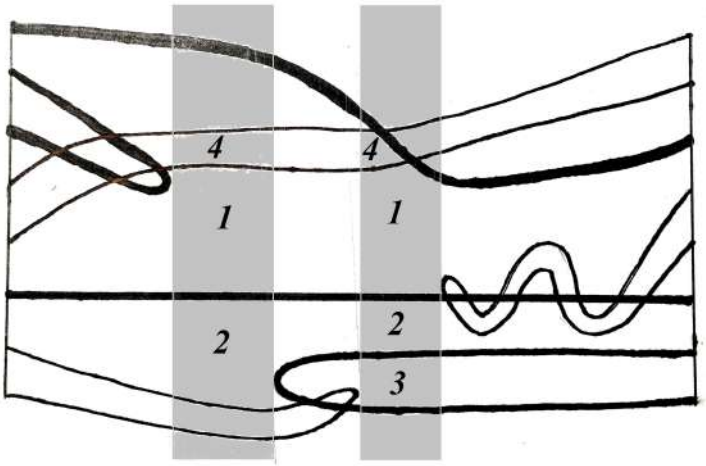


Рисунок 3.13

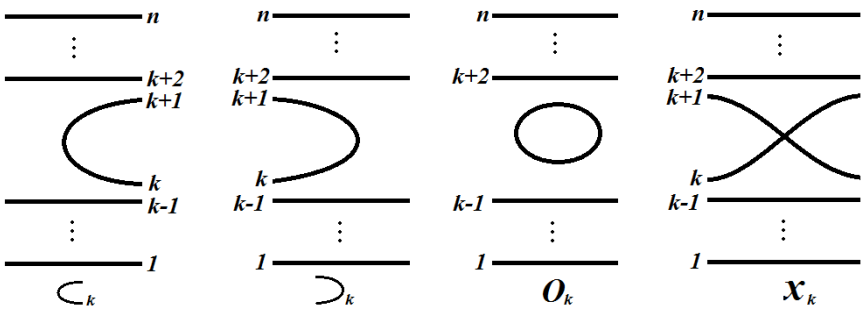


Рисунок 3.14

В заштрихованных на рисунке 3.13 вертикальных полосах где-то должны располагаться 6 свободных овалов, которые при движении прямой пучка (вертикальной прямой на рис. 3.13) пересекаются поочерёдно (в силу теоремы Безу). Число овалов в k-ой снизу горизонтальной полосе будем обозначать строчной латинской буквой с индексом k (a_k, b_k и т. д.). Сумма всех этих параметров с индексами равна 6, перечисление всех возмож-

ных разбиений числа 6 в сумму неотрицательных значений этих параметров производит программа «МТО - Checker», составленная М.А. Гущиным, число свободных овалов (в данном случае 6) указывается в виде входного параметра программы.

Для удобства результаты выполнения программы «МТО - Checker» представлены в таблице 3.1, где x-код записан в том виде, в каком требуется в программе (все символы и индексы записаны подряд; в квадратных скобках число свободных овалов). В первом столбике указаны номера строк из приложения Г.

Таблица 3.1. Все x-коды для перестановки (1,2,3,4,5,6,8,7)

№	x-код	h
1	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4x5c4x4d4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [6]	2
2, 7, 21, 24, 27, 42, 44, 47, 91, 92, 94	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4e2x5c4f2x4d4g2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [6]	2
3	x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2c4x5d4x4e4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4o5c4x5d4x4e4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4x5c4o5d4x4e4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	4 4 4
5	x5x6x4x5)4a4o5b4o5c4(3x2x1)2d4x5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2c4o5d4x5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2c4x5d4o5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4o5c4x5d4o5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4x5c4o5d4o5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4 4 4 4 4
6, 8, 23, 26, 28, 43, 46, 48, 93, 96	x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2f2c4x5g2d4x4h2e4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2f2b4o5c4x5g2d4x4h2e4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2f2b4x5g2c4o5d4x4h2e4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	4 4 4
9, 25	x5x6x4x5)4a4o5b4o5c4(3x2x1)2g2d4x5h2e4x4i2f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
29, 45 49, 95	x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2g2c4o5d4x5h2e4x4i2f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2g2c4x5h2d4o5e4x4i2f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2g2b4o5c4o5d4x5h2e4x4i2f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2g2b4o5c4x5h2d4o5e4x4i2f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2g2b4x5h2c4o5d4o5e4x4i2f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4 4 или 6 4 4 4

10	x5x6x4x5)4a4o5b4o5c4o5d4(3x2x1)2e4x5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a4o5b4o5c4(3x2x1)2d4o5e4x5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a4o5b4o5c4(3x2x1)2d4x5e4o5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2c4o5d4o5e4x5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2c4o5d4x5e4o5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a4o5b4(3x2x1)2c4x5d4o5e4o5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4o5c4o5d4o5e4x5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4o5c4o5d4x5e4o5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4o5c4x5d4o5e4o5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2b4x5c4o5d4o5e4o5f4x4g4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
11, 12, 14, 17, 51, 54, 57, 52, 81, 82, 84, 87	x5x6x4x5)4a4o3b4(3x2x1)2c4f2x5d4g2x4e4h2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2c4f2o3b4i2x5d4g2x4e4h2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2c4f2x5d4g2o3b4i2x4e4h2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2c4f2x5d4g2x4e4h2o3b4i2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	4
13	x5x6x4x5)4a4o3b4o5c4(3x2x1)2d4x5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4b4o5c4(3x2x1)2a4o3d4x5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4b4o5c4(3x2x1)2d4x5a4o3e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4b4o5c4(3x2x1)2d4x5e4x4a4o3f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a4o3b4(3x2x1)2d4o5c4x5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4b4(3x2x1)2a4o3d4o5c4x5e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4b4(3x2x1)2d4o5c4x5a4o3e4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4

	x5x6x4x5)4b4(3x2x1)2d4o5c4x5e4x4a4o3f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a4o3b4(3x2x1)2d4x5e4o5c4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4b4(3x2x1)2a4o3d4x5e4o5c4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4b4(3x2x1)2d4x5a4o3e4o5c4x4f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4b4(3x2x1)2d4x5e4o5c4x4a4o3f4(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
15, 33, 61	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3o4c5i3o4d5j3(3x2x1)2e5k3x5f5l3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3o4c5i3(3x2x1)2e5k3o4d5j3x5f5l3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2, 4 или 6
	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3o4c5i3(3x2x1)2e5k3x5f5l3o4d5j3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2, 4 или 6
	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3o4c5i3(3x2x1)2e5k3x5f5l3x4m3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3(3x2x1)2e5k3o4c5i3o4d5j3x5f5l3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3(3x2x1)2e5k3o4c5i3x5f5l3o4d5j3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2, 4 или 6
	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3(3x2x1)2e5k3o4c5i3x5f5l3x4m3o4d3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2, 4 или 6
	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3(3x2x1)2e5k3x5f5l3o4c5i3o4d5j3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2, 4 или 6

	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3(3x2x1)2e5k3x5f5l3o4c5i3x4m3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a5g3o4b5h3(3x2x1)2e5k3x5f5l3x4m3o4i3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3o4b5h3o4c5i3o4d5j3x5f5l3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3o4b5h3o4c5i3x5f5l3o4d5j3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3o4b5h3o4c5i3x5f5l3x4m3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3o4b5h3x5f5l3o4c5i3o4d5j3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3o4b5h3x5f5l3o4c5i3x4m3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3o4b5h3x5f5l3x4m3o4i3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3x5f5l3o4b5h3o4c5i3o4d5j3x4m3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3x5f5l3o4b5h3o4c5i3x4m3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a5g3(3x2x1)2e5k3x5f5l3o4b5h3x4m3o4i3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
	x5x6x4x5)4a5b3(3x2x1)2c5d3x5e5f3x4g3o4h3o4i3o4j3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4
20, 35, 63	x5x6x4x5)4a3g5o4b3h5o4c3i5(3x2x1)2d3j5x5e3k5x4f3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4a3g5o4b3h5(3x2x1)2d3j5o4c3i5x5e3k5x4f3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4a3g5o4b3h5(3x2x1)2d3j5o4c3i5x5e3k5x4f3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2, 4 или 6
	x5x6x4x5)4a3g5o4b3h5(3x2x1)2d3j5x5e3k5o4c3i5x4f3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2, 4 или 6
	x5x6x4x5)4a3g5o4b3h5(3x2x1)2d3j5x5e3k5x4f3o4c3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a3g5(3x2x1)2d3j5o4b3h5o4c3i5x5e3k5x4f3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2, 4 или 6

	x5x6x4x5)4a3g5(3x2x1)2d3j5o4b3h5x5e3k5o4c3i5x4f3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2, 4 или 6
	x5x6x4x5)4a3g5(3x2x1)2d3j5o4b3h5x5e3k5x4f3o4c3(4x3x4x4x3x3x4x4x3[4]	2, 4 или 6
	x5x6x4x5)4a3g5(3x2x1)2d3j5x5e3k5o4b3h5o4c3i5x4f3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4 или 6
	x5x6x4x5)4a3g5(3x2x1)2d3j5x5e3k5o4b3h5x4f3o4c3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a3g5(3x2x1)2d3j5x5e3k5x4f3o4b3o4c3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
31, 32, 34, 37,	x5x6x4x5)4a4o3b4o3c4(3x2x1)2d4g2x5e4h2x4f4i2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4a4o3b4(3x2x1)2d4g2o3c4j2x5e4h2x4f4i2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
71, 72,	x5x6x4x5)4a4o3b4(3x2x1)2d4g2x5e4h2o3c4j2x4f4i2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
74, 77	x5x6x4x5)4a4o3b4(3x2x1)2d4g2x5e4h2x4f4i2o3c4j2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	2 или 4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2d4g2o3b4k2o3c4j2x5e4h2x4f4i2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2d4g2o3b4k2x5e4h2o3c4j2x4f4i2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2d4g2o3b4k2x5e4h2x4f4i2o3c4j2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4 или 6
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2d4g2x5e4h2o3b4k2o3c4j2x4f4i2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2d4g2x5e4h2o3b4k2x4f4i2o3c4j2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
	x5x6x4x5)4a4(3x2x1)2d4g2x5e4h2x4f4i2o3b4k2o3c4j2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4
40, 65	x5x6x4x5)4a3f5o4b3g5(3x2x1)2c3h5x5d3i5x4e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	2 или 4

	x5x6x4x5)4a3f5(3x2x1)2c3h5o4b3g5x5d3i5x4e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5] x5x6x4x5)4a3f5(3x2x1)2c3h5x5d3i5o4b3g5x4e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5] x5x6x4x5)4a3f5(3x2x1)2c3g5x5d3h5x4e3o4b3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	4 или 6 4 или 6 4
67	x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3o2c3o2d3o2e3x5f3x4g3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3o2c3o2d3x5f3o2e3x4g3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3o2c3o2d3x5f3x4g3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3o2c3x5f3o2d3o2e3x4g3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3o2c3x5f3o2d3x4g3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3o2c3x5f3x4g3o2d3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3x5f3o2c3o2d3o2e3x4g3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3x5f3o2c3o2d3x4g3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3x5f3o2c3x4g3o2d3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3] x5x6x4x5)4a3(3x2x1)2b3x5f3x4g3o2c3o2d3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [3]	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
70	x5x6x4x5)4a3e5(3x2x1)2b3f5x5c3g5x4d3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [6]	4
68, 79, 90	x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3o2d3o2e3f5x5g3h5x4i3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3o2d3f5x5g3o2e3h5x4i3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3o2d3f5x5g3h5x4i3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3f5x5g3o2d3o2e3h5x4i3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3f5x5g3o2d3h5x4i3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4] x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3f5x5g3h5x4i3o2d3o2e3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [4]	4 4 или 6 4 или 6 4 4 или 6
69, 80	x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3o2d3e5x5f3g5x4h3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5] x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3e5x5f3o2d3g5x4h3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5] x5x6x4x5)4a3b5(3x2x1)2c3e5x5f3g5x4h3o2d3(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [5]	4 4 или 6 4
97, 98, 99, 100	x5x6x4x5)4a5(3x2x1)2b5e2x5c5f2x4d5g2(4x3x4x4x3x3x4x4x3 [6]	2, 4 или 6

В каждой строке этой таблицы неравенство Мурасуги-Тристрама не выполняется. Значит, рассматриваемое взаимное разположение ветвей типа «Змея, обвивающаяся вокруг овала» не реализуется кривой степени 8.

ГЛАВА 4

Построение некоторых кривых

Полезно знать, существуют ли какие-то представители изучаемых кривых.

Д. Гильберт построил взаимное расположение кривых степени 2 и 4, представленные на рисунке 4.1, где кривая степени 2 нарисована жирнее, чем кривая степени 4.

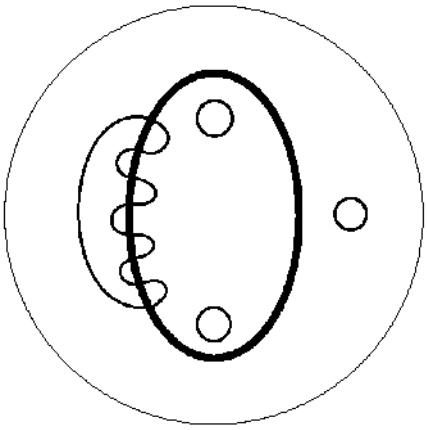


Рисунок 4.1. Взаимные расположения кривых степени 2 и 4.

Покажем на примере данного взаимного расположения этих кривых, каким образом мы будем доказывать существование некоторых взаимных расположений двух кривых степени 4.

Кривая степени 2 точками пересечения с ветвью кривой степени 4 делится на 8 дуг: $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA$, как показано на рисунке 4.2.

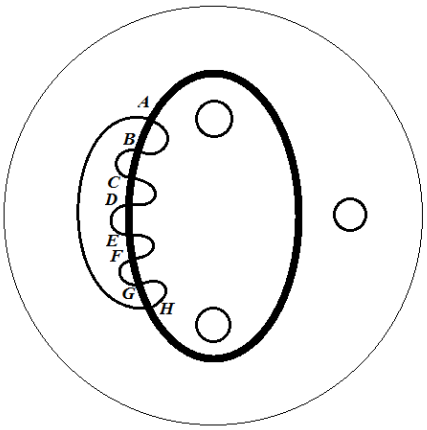


Рисунок 4.2

На дуге HA отметим точки r_1, r_2, r_3, r_4, как показано на рисунке 4.3. Через точки r_1

и r_2, r_3 и r_4 проведем 2 прямые l_1 и l_2 соответственно, см. рисунок 4.4. Рассмотрим кривую степени 2, которая определяется уравнением $\widetilde{C_2} = C_2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0$. Для достаточно малого ε она будет лежать близко к исходной кривой $_2$ и пересекать ее в точках r_1, r_2, r_3, r_4 (видно из уравнения). Получим расположение кривых как на рисунке 4.5.

Теперь с помощью малых изменений коэффициентов мы можем добиться возмущения некоторых простых двойных точек кривой, как на рисунке 4.6. Уравнение получившейся кривой можно записать следующим образом: $\widetilde{C_4} = C_2 \cdot \widetilde{C_2} + \varepsilon_1 D_4 = 0$ для достаточно малого ε_1, где D_4 – некоторая кривая степени 4 без действительных точек. Итак, мы получили взаимное расположение двух кривых степени 4.

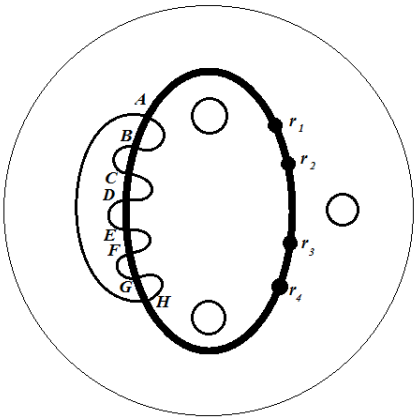


Рисунок 4.3

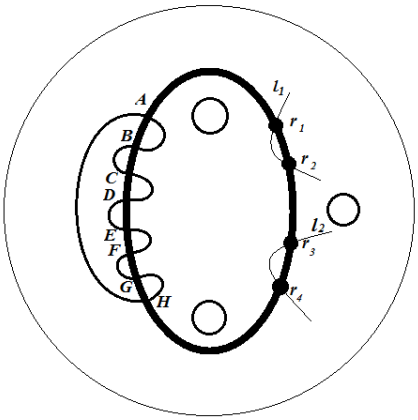


Рисунок 4.4

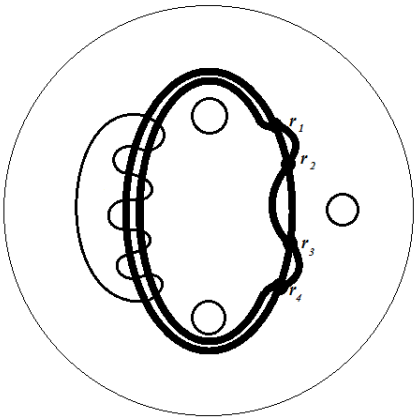


Рисунок 4.5

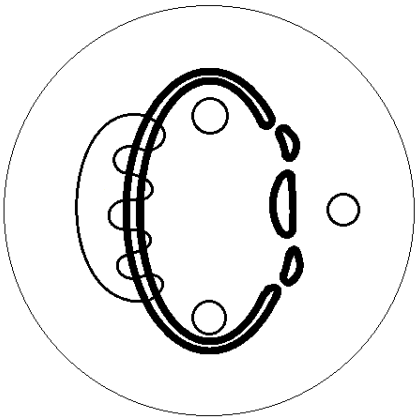


Рисунок 4.6

Если мы изобразим овал, выделенный более жирно, выпуклым, то получим рисунок 4.7. Это пересечение двух кривых степени 4, но из рисунка видно, что оно не типа «змея, обвивающаяся вокруг овала».

Однако данным способом можно получить пересечение типа «змея, обвивающаяся вокруг овала» для некоторых исходных пересечений кривых степени 2 и 4, построенных

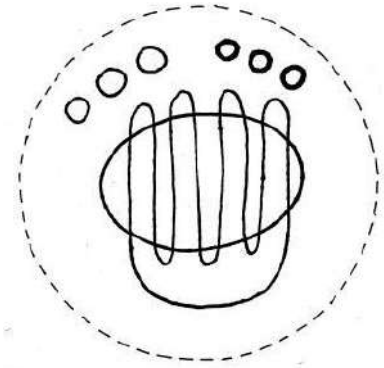


Рисунок 4.7

Г.М. Полотовским (см. [4]), и определенных выбранных дуг. Это показано на рисунках 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12.

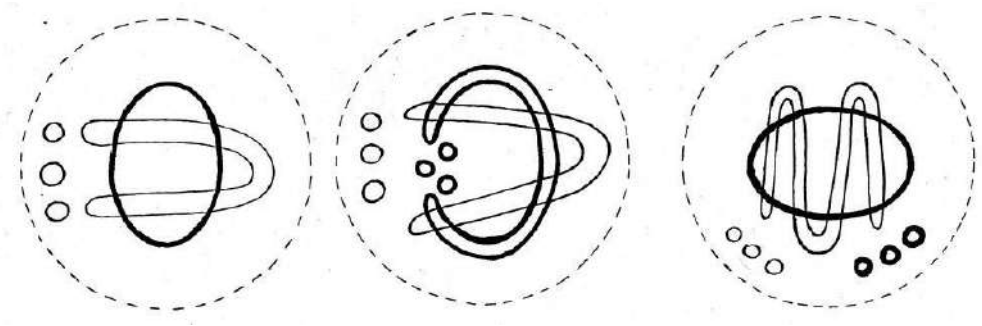


Рисунок 4.8

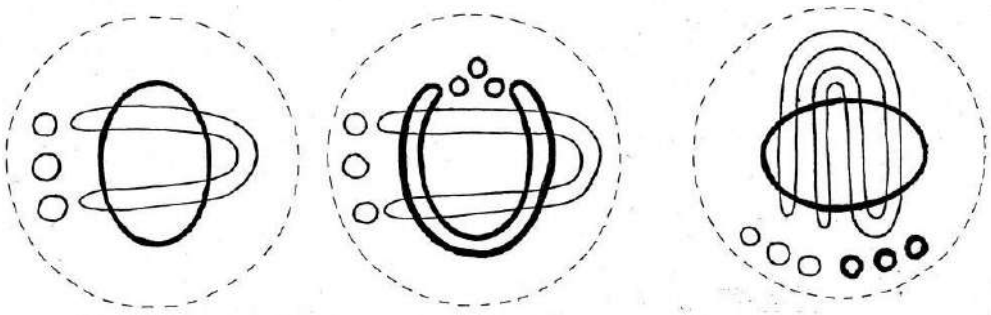


Рисунок 4.9

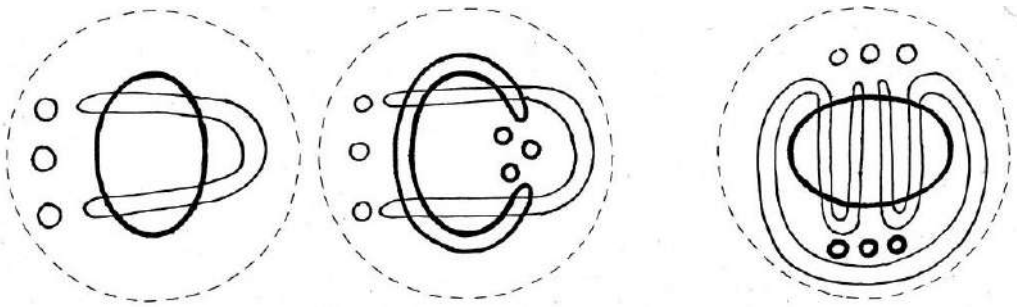


Рисунок 4.10

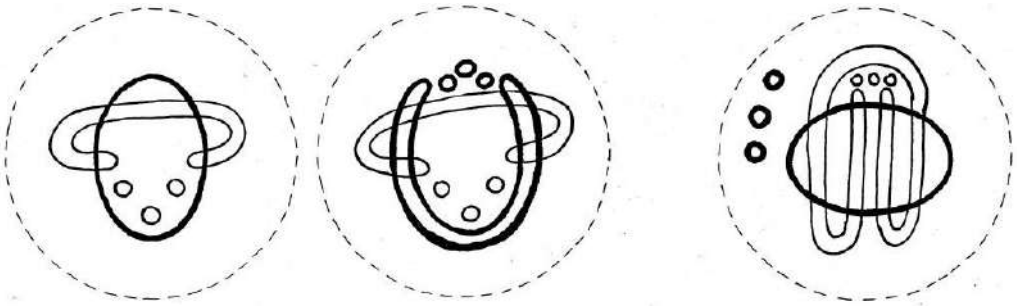


Рисунок 4.11

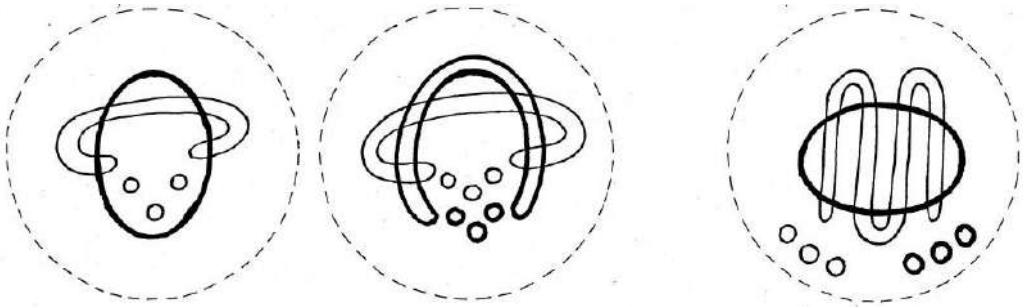


Рисунок 4.12

Это доказывает существование некоторых видов кривых типа «змея, обвивающаяся вокруг овала».

Вывод

При решении задачи исследования взаимного расположения двух кривых степени 4 рассмотрен тип пересечения ветвей «змея, обвивающаяся вокруг овала», в котором образующая дуга отвечает определенным условиям, см. главу 2. В ходе работы были запрещены некоторые схемы с помощью теоремы Брюзотти, получен список из 16-ти перестановок, отвечающих разным взаимным расположениям кривых степени 4. Для одной из них была получена таблица возможных расположений свободных овалов, все строки которой затем запретились методом С.Ю. Оревкова. Из данного списка перестановок еще не менее, чем к восьми, применим данный метод. Это будет сделано в следующих работах.

Кроме того, в работе показано построение пяти схем взаимных расположений рассматриваемого в работе класса расположений двух кривых степени 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков, Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий / Д.А. Гудков // УМН. – 1974. – том №29, выпуск №4(178). – С. 3-79.
2. Orevkov S.Yu. Classification flexible M-curves of degree 8 up to isotopy// GAFA, Geom. funct. anal. – 2002. – V.12, №4. – С. 723-755.
3. S. Yu. Orevkov, Link theory and oval arrangements of real algebraic curves", Topology, 38:4 (1999), 779–810
4. Полотовский, Г.М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка / Г. М. Полотовский // Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка, Докл. АН СССР, 236:3 (1977), 548–551.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программа перебора перестановок

Листинг файла main.cpp:

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

void swap(int *a, int i, int j)
{
        int s = a[i];
        a[i] = a[j];
        a[j] = s;
}

bool NextSet(int *a, int n)
{
        int j = n - 2;
        while (j != -1 && a[j] >= a[j + 1]) j--;
        if (j == -1)
                return false;
        int k = n - 1;
        while (a[j] >= a[k]) k--;
        swap(a, j, k);
        int l = j + 1, r = n - 1;
        while (l<r)
                swap(a, l++, r--);
        return true;
}

void Print(int *a, int n)
{
        static int num = 1;
        cout.width(3);
        cout << num++ << ":␣";
        for (int i = 0; i < n; i++)
                cout << a[i] << "␣";
        cout << endl;
}

int main()
{
        int i, k, n,
                *a, *P,
                Subtraction_Two,
                Num_of_8,
                Max_of_2;
        bool IsRight;
        cout << "N␣=␣";
        cin >> n;
        a = new int[n-1];
        P = new int[n];
        P[0] = 1;
        for (i = 0; i < n - 1; i++)
                P[i + 1] = a[i] = i + 2;
        Print(P, n);
        while (NextSet(a, n-1))
        {
                for (i = 0; i < n - 1; i++)
                        P[i + 1] = a[i];
                IsRight = true;

        Max_of_2 = floor(n/2)+1;
        if(P[1]>Max_of_2) break;

                Subtraction_Two = 0;
                Num_of_8 = -1;
                for (i = 1; i < n; i++)
                {
                        if (P[i] == 8) Num_of_8 = i;
                        if (abs(P[i] - P[i - 1]) == 2)
                        {
                                if (((P[n - 1]<P[i])
```

```
                                && (P[n - 1]>P[i - 1]))
                    || ((P[n - 1]>P[i])
                                && (P[n - 1] < P[i - 1])))
                                Subtraction_Two++;
                            else IsRight = false;
                        }
                        if (abs(P[i] - P[i - 1]) == 4)
                        {
                            if (!(((P[n - 1]<P[i])
                                && (P[n - 1]>P[i - 1]))
                    || ((P[n - 1]>P[i])
                                && (P[n - 1] < P[i - 1]))))
                            {
                                IsRight = false;
                            }
                        }
                        if (abs(P[i] - P[i - 1]) == 6)
                        {
                            if (!(((P[n - 1]<P[i])
                                && (P[n - 1]>P[i - 1]))
                    || ((P[n - 1]>P[i])
                                && (P[n - 1] < P[i - 1]))))
                            {
                                IsRight = false;
                            }
                        }
                    }
                    if (Subtraction_Two>1) IsRight = false;

                    for (i = 1; i < n - 2; i++)
                    {
                        if ((P[i] - P[i - 1]) == 3)
                        {
                            if (((P[i + 1]<P[i])
                                && (P[i + 1]>P[i - 1]))
                    && ((P[i + 2] > P[i])
                                || (P[i + 2]<P[i - 1])))
                                IsRight = false;
                            if (((P[i + 2]<P[i])
                                && (P[i + 2]>P[i - 1]))
                    && ((P[i + 1]>P[i])
                                || (P[i + 1] < P[i - 1])))
                                IsRight = false;
                        }
                        if ((P[i - 1] - P[i]) == 3)
                        {
                            if (((P[i + 1]>P[i])
                                && (P[i + 1]<P[i - 1]))
                    && ((P[i + 2] < P[i])
                                || (P[i + 2]>P[i - 1])))
                                IsRight = false;
                            if (((P[i + 2]>P[i])
                                && (P[i + 2]<P[i - 1]))
                    && ((P[i + 1]<P[i])
                                || (P[i + 1] > P[i - 1])))
                                IsRight = false;
                        }
                    }

                    for (k = 2; k < n - 1; k++)
                    {
                        if ((P[k]<P[k - 2] && P[k]>P[k - 1])
                            && (P[k + 1] > P[k - 2]
                            || P[k + 1] < P[k - 1]))
                            IsRight = false;
                        if ((P[k]>P[k - 2] && P[k] < P[k - 1])
                            && (P[k + 1] < P[k - 2]
                            || P[k + 1] > P[k - 1]))
                            IsRight = false;
                    }
                    if (IsRight)
                        Print(P, n);
                }
                return 0;
}
```

Результат выполнения программы при N=8:

1: 1 2 3 4 5 6 7 8
2: 1 2 3 4 5 6 8 7
3: 1 2 3 4 5 8 6 7
4: 1 2 3 4 5 8 7 6
5: 1 2 3 4 6 7 8 5
6: 1 2 3 4 7 6 5 8
7: 1 2 3 4 8 5 6 7
8: 1 2 3 4 8 5 7 6
9: 1 2 3 4 8 7 5 6
10: 1 2 3 4 8 7 6 5
11: 1 2 3 6 5 4 7 8
12: 1 2 3 6 5 4 8 7
13: 1 2 3 6 7 8 4 5
14: 1 2 3 6 7 8 5 4
15: 1 2 3 7 6 4 8 5
16: 1 2 3 7 8 4 5 6
17: 1 2 3 7 8 4 6 5
18: 1 2 3 8 4 5 6 7
19: 1 2 3 8 4 5 7 6
20: 1 2 3 8 4 7 5 6
21: 1 2 3 8 4 7 6 5
22: 1 2 3 8 5 6 7 4
23: 1 2 3 8 6 5 4 7
24: 1 2 3 8 7 4 5 6
25: 1 2 3 8 7 4 6 5
26: 1 2 3 8 7 6 4 5
27: 1 2 3 8 7 6 5 4
28: 1 2 4 5 6 7 8 3
29: 1 2 4 5 8 7 6 3
30: 1 2 4 7 6 5 8 3
31: 1 2 5 4 3 6 7 8
32: 1 2 5 4 3 6 8 7
33: 1 2 5 4 3 8 6 7
34: 1 2 5 4 3 8 7 6
35: 1 2 5 6 7 4 3 8
36: 1 2 5 6 7 8 3 4
37: 1 2 5 6 8 3 4 7
38: 1 2 5 7 8 4 3 6
39: 1 2 5 8 7 6 3 4
40: 1 2 6 4 3 7 8 5
41: 1 2 6 5 3 8 7 4
42: 1 2 6 5 4 7 8 3
43: 1 2 6 7 3 8 4 5
44: 1 2 6 7 3 8 5 4
45: 1 2 6 7 4 3 8 5
46: 1 2 6 7 8 3 4 5
47: 1 2 6 7 8 3 5 4
48: 1 2 6 7 8 5 3 4
49: 1 2 6 7 8 5 4 3
50: 1 2 7 4 3 8 5 6
51: 1 2 7 4 5 6 3 8
52: 1 2 7 5 4 8 3 6
53: 1 2 7 6 3 4 5 8
54: 1 2 7 6 4 3 8 5
55: 1 2 7 6 5 4 3 8
56: 1 2 7 6 5 8 3 4
57: 1 2 7 8 3 4 5 6
58: 1 2 7 8 3 4 6 5
59: 1 2 7 8 3 6 4 5
60: 1 2 7 8 3 6 5 4
61: 1 2 7 8 4 3 6 5
62: 1 2 7 8 5 4 3 6
63: 1 2 8 3 4 5 6 7
64: 1 2 8 3 4 5 7 6
65: 1 2 8 3 4 7 5 6
66: 1 2 8 3 4 7 6 5
67: 1 2 8 3 5 6 7 4
68: 1 2 8 3 6 5 4 7
69: 1 2 8 3 7 4 5 6
70: 1 2 8 3 7 4 6 5
71: 1 2 8 3 7 6 4 5
72: 1 2 8 3 7 6 5 4
73: 1 2 8 4 3 7 5 6
74: 1 2 8 4 3 7 6 5
75: 1 2 8 4 5 7 3 6
76: 1 2 8 5 4 3 6 7
77: 1 2 8 5 4 3 7 6
78: 1 2 8 5 6 7 3 4
79: 1 2 8 5 6 7 4 3
80: 1 2 8 7 3 4 5 6
81: 1 2 8 7 3 4 6 5
82: 1 2 8 7 3 6 4 5
83: 1 2 8 7 3 6 5 4
84: 1 2 8 7 4 5 6 3
85: 1 2 8 7 5 4 3 6
86: 1 2 8 7 6 3 4 5
87: 1 2 8 7 6 3 5 4
88: 1 2 8 7 6 5 3 4
89: 1 2 8 7 6 5 4 3
90: 1 4 3 2 5 6 7 8
91: 1 4 3 2 5 6 8 7
92: 1 4 3 2 5 8 6 7
93: 1 4 3 2 5 8 7 6
94: 1 4 3 2 6 7 8 5
95: 1 4 3 2 7 6 5 8
96: 1 4 3 2 7 8 5 6
97: 1 4 3 2 8 5 6 7
98: 1 4 3 2 8 5 7 6
99: 1 4 3 2 8 7 5 6
100: 1 4 3 2 8 7 6 5
101: 1 4 5 6 2 7 8 3
102: 1 4 5 6 3 2 7 8
103: 1 4 5 6 3 2 8 7
104: 1 4 5 6 3 8 2 7
105: 1 4 5 6 7 2 8 3
106: 1 4 5 6 7 8 2 3
107: 1 4 5 6 7 8 3 2
108: 1 4 5 6 8 3 2 7
109: 1 4 5 7 2 8 3 6
110: 1 4 5 7 8 2 3 6
111: 1 4 5 8 2 3 6 7
112: 1 4 5 8 2 3 7 6
113: 1 4 5 8 3 2 7 6
114: 1 4 5 8 7 6 2 3
115: 1 4 5 8 7 6 3 2
116: 1 4 6 7 3 2 8 5
117: 1 4 6 7 3 8 2 5
118: 1 4 6 7 8 3 2 5
119: 1 4 7 6 5 8 2 3
120: 1 4 7 6 5 8 3 2
121: 1 4 7 8 2 3 6 5
122: 1 4 7 8 3 2 5 6
123: 1 4 7 8 3 2 6 5
124: 1 5 4 2 6 7 8 3
125: 1 5 4 2 8 7 6 3
126: 1 5 6 2 7 8 3 4
127: 1 5 6 2 8 3 7 4
128: 1 5 6 2 8 7 3 4
129: 1 5 6 2 8 7 4 3
130: 1 5 6 3 2 8 7 4
131: 1 5 6 3 8 2 7 4
132: 1 5 6 7 2 8 3 4
133: 1 5 6 7 4 2 8 3
134: 1 5 6 7 8 2 3 4
135: 1 5 6 7 8 2 4 3
136: 1 5 8 3 2 6 7 4
137: 1 5 8 7 6 2 3 4
138: 1 5 8 7 6 2 4 3

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Список всех возможных расположений трёх овалов по девяти областям

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3								
2	2	1							
3	2		1						
4	2			1					
5	2				1				
6	2					1			
7	2						1		
8	2							1	
9	2								1
10	1	2							
11			2						
12				2					
13					2				
14						2			
15							2		
16								2	
17									2
18	1	1	1						
19	1	1		1					
20	1	1			1				
21	1	1				1			
22	1	1					1		
23	1	1						1	
24	1	1							1
25	1		1	1					
26	1		1		1				
27	1		1			1			
28	1		1				1		
29	1		1					1	
30	1		1						1
31	1			1	1				
32	1			1		1			
33	1			1			1		
34	1			1				1	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
35	1			1					1
36	1				1	1			
37	1				1		1		
38	1				1			1	
39	1				1				1
40	1					1	1		
41	1					1		1	
42	1					1			1
43	1						1	1	
44	1						1		1
45	1							1	1
46		3							
47		2	1						
48		2		1					
49		2			1				
50		2				1			
51		2					1		
52		2						1	
53		2							1
54		1	2						
55		1		2					
56		1			2				
57		1				2			
58		1					2		
59		1						2	
60		1							2
61		1	1	1					
62		1	1		1				
63		1	1			1			
64		1	1				1		
65		1	1					1	
66		1	1						1
67		1		1	1				
68		1		1		1			

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
69		1		1			1		
70		1		1				1	
71		1		1					1
72		1			1	1			
73		1			1		1		
74		1			1			1	
75		1			1				1
76		1				1	1		
77		1				1		1	
78		1				1			1
79		1					1	1	
80		1					1		1
81		1						1	1
82			3						
83			2	1					
84			2		1				
85			2			1			
86			2				1		
87			2					1	
88			2						1
89			1	2					
90			1		2				
91			1			2			
92			1				2		
93			1					2	
94			1						2
95			1	1	1				
96			1	1		1			
97			1	1			1		
98			1	1				1	
99			1	1					1
100			1		1	1			
101			1		1		1		
102			1		1			1	
103			1		1				1
104			1			1	1		
105			1			1		1	
106			1			1			1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
107			1				1	1	
108			1				1		1
109			1					1	1
110				3					
111				2	1				
112				2		1			
113				2			1		
114				2				1	
115				2					1
116				1	2				
117						2			
118							2		
119								2	
120									2
121				1	1	1			
122				1	1		1		
123				1	1			1	1
124				1		1	1		
125				1		1		1	
126				1		1			1
127				1			1	1	
128				1			1		1
129				1			1		
130				1				1	1
131					3				
132					2	1			
133					2		1		
134					2			1	
135					2				1
136					1	2			
137					1		2		
138					1			2	
139					1				2
140					1	1	1		
141					1	1		1	
142					1	1			1
143					1		1	1	
144					1		1		1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
145						3			
146						2	1		
147						2		1	
148						2			1
149						1	2		
150						1		2	
151						1			2
152						1	1	1	
153						1	1		1
154						1		1	1
155							3		
156							2	1	
157							2		1
158							1	2	
159							1		2
160							1	1	1
161								3	
162								2	1
163								1	2
164									3

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Возможные расположения трех овалов с номером 1 и 2 для перестановки (1,2,3,4,5,6,8,7)

Возможные расположения трех овалов с номером 1.

№	1	7	9
1	3		
2	2	1	
3	2		1
4	1	2	
5	1		2
6	1	1	1
7		3	
8		2	1
9		1	2
10			3

Возможные расположения трех овалов с номером 2.

№	1	7	8
1	3		
2	2	1	
3	2		1
4	1	2	
5	1		2
6	1	1	1
7		3	
8		2	1
9		1	2
10			3

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Возможные расположения шести непересекающихся овалов для перестановки (1,2,3,4,5,6,8,7)

№	1	2	3	4
1	$3_1 3_2$			
2	$3_1 2_2$		1_2	
3	$3_1 2_2$			1_2
4	$3_1 1_2$		2_2	
5	$3_1 1_2$			2_2
6	$3_1 1_2$		1_2	1_2
7	3_1		3_2	
8	3_1		2_2	1_2
9	3_1		1_2	2_2
10	3_1			3_2
11	$2_1 3_2$	1_1		
12	$2_1 2_2$	1_1	1_2	
13	$2_1 2_2$	1_1		1_2
14	$2_1 1_2$	1_1	2_2	
15	$2_1 1_2$	1_1		2_2
16	$2_1 1_2$	1_1	1_2	1_2
17	2_1	1_1	3_2	
18	2_1	1_1	2_2	1_2
19	2_1	1_1	1_2	2_2
20	2_1	1_1		3_2
21	$2_1 3_2$		1_1	
22	$2_1 2_2$		$1_1 1_2$	
23	$2_1 2_2$		1_1	1_2
24	$2_1 1_2$		$1_1 2_2$	
25	$2_1 1_2$		1_1	2_2
26	$2_1 1_2$		$1_1 1_2$	1_2
27	2_1		$1_1 3_2$	
28	2_1		$1_1 2_2$	1_2
29	2_1		$1_1 1_2$	2_2
30	2_1		1_1	3_2

№	1	2	3	4
31	$1_1 3_2$	2_1		
32	$1_1 2_2$	2_1	1_2	
33	$1_1 2_2$	2_1		1_2
34	$1_1 1_2$	2_1	2_2	
35	$1_1 1_2$	2_1		2_2
36	$1_1 1_2$	2_1	1_2	1_2
37	1_1	2_1	3_2	
38	1_1	2_1	2_2	1_2
39	1_1	2_1	1_2	2_2
40	1_1	2_1		3_2
41	$1_1 3_2$		2_1	
42	$1_1 2_2$		$2_1 1_2$	
43	$1_1 2_2$		2_1	1_2
44	$1_1 1_2$		$2_1 2_2$	
45	$1_1 1_2$		2_1	2_2
46	$1_1 1_2$		$2_1 1_2$	1_2
47	1_1		$2_1 3_2$	
48	1_1		$2_1 2_2$	1_2
49	1_1		$2_1 1_2$	2_2
50	1_1		2_1	3_2
51	$1_1 3_2$	1_1	1_1	
52	$1_1 2_2$	1_1	$1_1 1_2$	
53	$1_1 2_2$	1_1	1_1	1_2
54	$1_1 1_2$	1_1	$1_1 2_2$	
55	$1_1 1_2$	1_1	1_1	2_2
56	$1_1 1_2$	1_1	$1_1 1_2$	1_2
57	1_1	1_1	$1_1 3_2$	
58	1_1	1_1	$1_1 2_2$	1_2
59	1_1	1_1	$1_1 1_2$	2_2
60	1_1	1_1	1_1	3_2

№	1	2	3	4
61	3_2	3_1		
62	2_2	3_1	1_2	
63	2_2	3_1		1_2
64	1_2	3_1	2_2	
65	1_2	3_1		2_2
66	1_2	3_1	1_2	1_2
67		3_1	3_2	
68		3_1	2_2	1_2
69		3_1	1_2	2_2
70		3_1		3_2
71	3_2	2_1	1_1	
72	2_2	2_1	$1_1 1_2$	
73	2_2	2_1	1_1	1_2
74	1_2	2_1	$1_1 2_2$	
75	1_2	2_1	1_1	2_2
76	1_2	2_1	$1_1 1_2$	1_2
77		2_1	$1_1 3_2$	
78		2_1	$1_1 2_2$	1_2
79		2_1	$1_1 1_2$	2_2
80		2_1	1_1	3_2
81	3_2	1_1	2_1	
82	2_2	1_1	$2_1 1_2$	
83	2_2	1_1	2_1	1_2
84	1_2	1_1	$2_1 2_2$	
85	1_2	1_1	2_1	2_2
86	1_2	1_1	$2_1 1_2$	1_2
87		1_1	$2_1 3_2$	
88		1_1	$2_1 2_2$	1_2
89		1_1	$2_1 1_2$	2_2
90		1_1	2_1	3_2

№	1	2	3	4
91	3_2		3_1	
92	2_2		$3_1 1_2$	
93	2_2		3_1	1_2
94	1_2		$3_1 2_2$	
95	1_2		3_1	2_2
96	1_2		$3_1 1_2$	1_2
97			$3_1 3_2$	
98			$3_1 2_2$	1_2
99			$3_1 1_2$	2_2
100			3_1	3_2

Приложение
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Степанова Ильи Данииловича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием "Миграционная устойчивость замощений плоскости" являются: теорема 3.8, следствие 3.14, теоремы 4.3, 4.6, лемма 5.5, следствие 5.6, теоремы 5.7, 5.8, 6.2 и 6.3.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Мусатовым Даниилом Владимировичем, к.ф.м.н., сотрудником кафедры дискретной математики МФТИ.
- Тема выбрана на стыке теории замощений плоскости многоугольниками и теоретико-игровой экономической модели об устойчивом разбиении на коалиции. По словам Мусатова Д.В., этим ещё никто не занимался. (в этой постановке)
- Выступил на 62-й конференции МФТИ, для слушателей материал оказался новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась 24 июня 2019 г. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Степанов Илья Данилович

Подпись ФИО полностью

31.05.2020

Дата

Долгопрудный, Россия

город, страна

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра дискретной математики

Направление подготовки / специальность: 01.03.02 Прикладная математика и информатика (бакалавриат)
Направленность (профиль) подготовки: Прикладная математика и информатика (общий)

МИГРАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМОЩЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

(бакалаврская работа)

Студент:
Степанов Илья Даниилович

_____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Мусатов Даниил Владимирович,
канд. физ.-мат. наук

_____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)***:**
_____
_____
(подпись консультанта)

Москва 2019

Аннотация

В данной работе рассматривается теория миграционной устойчивости разбиения пространства на коалиции для различных замощений плоскости. Ставятся и разрешаются некоторые вопросы о существовании или отсутствии (не-)устойчивых замощений, где все фигуры замощения могут быть одинаковы, иметь равную площадь или быть совершенно произвольными. Определяются необходимые и достаточные условия миграционной стабильности. Показывается, что в устойчивом замощении все фигуры должны быть равновеликими выпуклыми многоугольниками. Доказывается отсутствие некоторых стабильных замощений, где не все фигуры были бы равны. Перечисляются все треугольники и параллелограммы, которыми можно стабильно замостить плоскость. Также приводятся примеры устойчивых замощений некоторыми другими типами многоугольников.

Содержание

1 Введение **3**

2 Предварительные сведения **5**

3 Требования выпуклости **9**

4 Неоднородные замощения **13**

5 Однородные замощения **15**

6 Простые замощения **19**

7 Избранные замощения **24**

8 Итоги и дальнейшая работа **28**

1 Введение

Классическая задача формирования коалиций формулируется следующим образом (см. [6]): для некоторого конечного множества агентов, имеющих локации в некотором метрическом пространстве, нужно открыть несколько благ (школ, университетов, театров или музеев), а затем разбить всех агентов на коалиции (множества), каждая из которых прикрепляется к определённому благу. Разумеется, открытие и поддержание каждого открытого объекта – дело затратное, так что есть смысл открывать как можно меньше точек. С другой стороны, граждане не желают далеко ездить для реализации повседневных целей. С этой точки зрения, благ нужно открыть как можно больше (в идеале – по одному на каждого агента), чтобы жители не тратили время на транспорт. Оптимизационная задача заключается в достижении баланса между этими крайностями и отыскании такого разбиения на коалиции и выбора прикреплённых к ним благ, чтобы минимизировать функционал $gK + \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, h(x_i))$, где K – количество открытых объектов, открытие каждого из которых стоит $g > 0$ единиц, n – количество агентов, а $\rho(x_i, h(x_i))$ является расстоянием между i-м агентом и соответствующим благом. Два человека x_i и x_j лежат в одной коалиции, если $h(x_i) = h(x_j)$, то есть количество коалиций K должно быть равно числу открытых благ K и, соответственно, размеру образа $|\operatorname{Im} h|$ функции прикрепления.

В настоящей же работе такая постановка обобщается на случай бесконечного числа агентов и изучаются вопросы стабильности разбиений на коалиции. Простое обобщение исходной задачи на случай бесконечного множества жителей приводит к всюду бесконечному минимизируемому функционалу. Если же агенты заселяют некоторую ограниченную область пространства, функционал имеет смысл переписать в виде интеграла. Однако (как и в настоящей работе) порой игроки равномерно населяют всё пространство, так что даже такой переход к интегрированию оставит оптимизационную задачу бессмысленной. Поэтому имеет смысл изучать именно локальное поведение агентов. В изучаемой поставноке нужно предъявить (или показать, что не существует) такое разбиение на коалиции и прикрепление коалиций к объектам блага, что никакому агенту не выгодно переметнуться в другую коалицию. В данной работе изучается именно такая, миграционная, устойчивость, где угрозы представляют отдельные игроки. Также можно рассматривать коалиционные угрозы (см. [6]), когда любые группы людей могут отделиться от своих назначенных групп и образовать новую коалицию. В последней постановке парировать нужно угрозы, когда все отделяющиеся игроки получают выгоду в количестве затрачиваемых ресурсов.

Отметим, что при фиксированном разбиении пространства игроков на коалиции каждую группу имеет смысл прикреплять только к так называемой медиане этого множества, то есть к точке, которая даёт наименьшие суммарные транспортные издержки для всех агентов коалиции. Так, например, медианой трёх точек на плоскости является точка Ферма-Торричелли треугольника с вершинами в этих точках. В работе [7]

показывается, однако, что точные координаты медианы для (почти любого) множества из пяти точек не выражаются явным образом через координаты самих точек. Поэтому ожидать, что в многомерном случае медиана равномерно заселённого многоугольника выражается явным образом через координаты его вершин, не приходится. В данной работе, однако, освещаются некоторые известные свойства геометрической медианы многоугольных областей (см. [3] и [4]), а также приводятся новые вспомогательные результаты.

Другой основой настоящей работы выступает теория замощений плоскости. Основным направлением теории является отыскание всех выпуклых многоугольников, которыми можно как-либо замостить плоскость. На данный момент изучены все простые замощения плоскости (то есть такие, где все фигуры равны) выпуклыми n-угольниками для $n \leqslant 6$ и доказано, что не существует замощений для $n \geqslant 7$. Давно известно и просто доказать, что для всякого треугольника и всякого четырёхугольника существует простое замощение с таким модельным многоугольником. В 1918 г. в [13] были изучены все выпуклые шестиугольники, замощающие плоскость (оказалось, что есть всего три типа таких шестиугольников). Дело с пятиугольниками обстояло сложнее. Только в 2017 г. появилась статья (см. [12]), использующая компьютерные вычисления, которая описывает 15 типов пятиугольников, замощающих плоскость, и доказывает, что других нет. Вероятно, статья ещё частично находится на рецензировании, поэтому этот результат нельзя считать окончательным.

Таким образом, вопрос описания всех простых замощений плоскости выпуклыми фигурами закрыт. С другой стороны, изучение невыпуклых замощений не столь интересно, потому что из любого замощения выпуклыми фигурами можно получить сколь угодно много замощений невыпуклыми (можно произвольным образом разрезать каждый многоугольник). В данной работе рассматриваются некоторые конкретные примеры замощений и изучается их миграционнуя стабильность в описанном выше смысле. Также мы не ограничиваемся простыми замощениями, и обращаем внимание на замощения разными фигурами.

В смысле коалиционной устойчивости наилучшим замощением плоскости выступает замощение правильными шестиугольниками с определённой длиной стороны (см. [8] и [10]). Более того, в этих работах и в [6] показывается, что не существует коалиционно стабильных замощений плоскости, а замощение шестиугольниками лишь минимизирует “помощь извне”. По большей части, это закрывает вопрос о коалиционной стабильности замощений плоскости, так что данная работа полностью посвящена миграционной устойчивости.

Настоящая работа включает 8 разделов. Раздел 1 описывает общую проблематику вопроса. Раздел 2 строго вводит основные определения и доказывает важные свойства интегральной функции издержек. Следующая секция, 3-я, освещает вопросы выпуклости коалиций и даёт первые требования и достаточные условия на миграционную стабильность замощения. Далее, раздел 4 вводит определение неоднородного замоще-

ния и показывает, что не существует устойчивых неоднородных замощений плоскости. Расположенная ниже секция 5, используя некоторые вспомогательные сведения о геометрической медиане, доказывает, что если стабильное замощение состоит только из треугольников, то все треугольники равны. Раздел 6 находит все треугольники и параллелограммы, которыми можно стабильно замостить плоскость. Далее расположена секция 7, которая содержит информацию о стабильности некоторых избранных замощений плоскости. Наконец, в разделе 8 подводятся итоги и содержится информация о том, каким образом можно обобщать данные определения и в каких направлениях можно двигаться для дальнейшего изучения темы.

2 Предварительные сведения

Договоримся об обозначениях: $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, а g – произвольное положительное число.

Определение 2.1. (Транспортными) *интегральными издержками* (по передвижению) для точки x относительно множества S называется значение

$$e(x, S) = \int\limits_{t \in S} \rho(x, t)\, dt.$$

Точка x называется *центром* (также медианой, геометрической медианой или точкой Ферма) множества S, если значение интегральных издержек для точки x минимально относительно S среди всех точек пространства. В дальнейшем всюду предполагаем, что S – замкнутое ограниченное (то есть компактное в случае $\mathbb{R}^2$) измеримое множество плоскости положительной меры.

Определение 2.2. *Мощностью* (мерой, площадью) измеримого множества S назовём

$$|S| = \int\limits_{S} 1\, dx = \mu(S).$$

Лемма 2.3. *Для всякого S функция $e(x) = e(x, S)$ является непрерывной и выпуклой.*

Доказательство. Пусть x_1, x_2 – две точки плоскости. Тогда $|e(x_1) - e(x_2)| \leqslant \int\limits_{t \in S} |\rho(x_1, t) - \rho(x_2, t)|\, dt \leqslant \rho(x_1, x_2) \cdot |S|$. Таким образом, функция $e(\cdot)$ липшицева, значит, непрерывна.

Для доказательства выпуклости непрерывной функции достаточно показать, что для любых x_1 и x_2 выполняется неравенство $2e\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant e(x_1) + e(x_2)$. Для этого достаточно показать, что для всякого t имеет место неравенство $2\rho\left(t, \frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \rho(t, x_1) + \rho(t, x_2)$. Это следует из неравенства треугольника: $\rho(t, x_1) + \rho(t, x_2) = \rho(t, x_1) + \rho(x_1, x_1 + x_2 - t) \geqslant \rho(t, x_1 + x_2 - t) = \rho\left(t, \frac{x_1+x_2}{2}\right) + \rho\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_1 + x_2 - t\right) = 2\rho\left(t, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, где предпоследнее равенство следует из того, что $\frac{x_1+x_2}{2}$ является серединой отрезка $[t, x_1 + x_2 - t]$. $\square$

Лемма 2.4. *Интеграл Лебега положительной измеримой функции на множестве положительной меры положителен: если $f : E \to (0, +\infty)$ является измеримой, причём $\mu(E) > 0$, то $\int\limits_E f(x)\, d\mu(x) > 0$.*

Доказательство. Поскольку $f > 0$ на E, то $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$. Далее, раз $\mu(E) > 0$, то $\mu(E_{n_0}) > 0$ для некоторого n_0 (ведь иначе E представлено в виде объединения счётного числа множеств нулевой меры, так что и само имеет нулевую меру в силу счётной аддитивности меры Лебега). Но тогда

$$\int\limits_E f(x)\, d\mu(x) \geqslant \int\limits_{E_{n_0}} f(x)\, d\mu(x) \geqslant \frac{\mu(E_{n_0})}{n_0} > 0.$$

□

Замечание 2.5. На самом деле, функция $e(\cdot)$ является строго выпуклой. Это следует из того, что неравенство треугольника из доказательства леммы 2.3 обращается в строгое, коль скоро векторы $x_1 - t$ и $x_2 - t$ не коллинеарны, то есть t не лежит на прямой, проходящей через x_1 и x_2. Значит, $2e\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < e(x_1) + e(x_2)$ на множестве положительной меры. Значит, неравенство сохранится и при взятии интегралов по лемме 2.4.

Отсюда следует в частности, что медиана коалиции S определена однозначно: если бы их было две, то на отрезке между ними значение функции транспортных издержек было бы ещё меньше. В силу единственности медианы, введём её обозначение: $m[S]$.

Теорема 2.6. *Пусть S – многоугольник. Тогда $e(x, S)$ является непрерывно дифференцируемой функцией аргумента x.*

Доказательство. Для начала докажем следующий факт. Пусть $B = (0, 0), A = (0, \ell)$, а $V(\delta)$ есть прямоугольник с вершинами A, B и $C = (\delta, 0), D = (\delta, \ell)$. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{\int_{V(\delta)} f(x)\, dx}{\delta} = \int\limits_{P \in [A,B]} f(P)\, dP.$$

Рассуждения ниже проводим в терминах интеграла Римана. Для каждого δ, а также натуральных N, M определим $f_{ij} = f\left(i\frac{\delta}{M}, j\frac{\ell}{N}\right)$ при $i \in \{0, 1, \ldots, M-1\}, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, то есть прямоугольник $ABCD$ разбили сеткой из N горизонтальных линий и M вертикальных, а f_{ij} равно функции f в нижнем левом углу некоторой клетки разбиения. Тогда

$$\int\limits_{V(\delta)} f(x)\, dx = \lim_{\substack{N \to +\infty \\ M \to +\infty}} \frac{\sum_{i,j} f_{ij}}{NM} \delta\ell.$$

Фиксируем теперь некоторое $\varepsilon > 0$. Ввиду непрерывности функции f, для всех $\delta \leqslant \delta_0(\varepsilon)$, а также для всех i, j будет выполняться неравенство $|f_{ij} - f_{0j}| \leqslant \varepsilon$, то есть в

каждом горизонтальном ряду все значения f почти равны (с точностью до ε) значению в самой левой точке этого ряда. Тогда

$$\frac{\sum_{i,j} f_{ij}}{NM}\delta\ell = \frac{\sum_j (f_{0j} \pm \varepsilon)}{N}\delta\ell.$$

Деля на δ и устремляя N к $+\infty$, получим $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\sum_j f_{0j}}{N}\ell \pm \varepsilon\ell$, что равно интегралу $\int\limits_{P\in[A,B]} f(P)\,dP$ с точностью до поправки $\varepsilon\ell$. Значит, требуемое равенство имеет место.

Пусть теперь вновь $A = (0,\ell), B = (0,0)$, а $U(\delta)$ является параллелограммом с вершинами A, B и $C = (\delta\sin\alpha, \delta\cos\alpha), D = (\delta\sin\alpha, \delta\cos\alpha + \ell)$. Тогда

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{\int_{U(\delta)} f(x)\,dx}{\delta\sin\alpha} = \int\limits_{P\in[A,B]} f(P)\,dP.$$

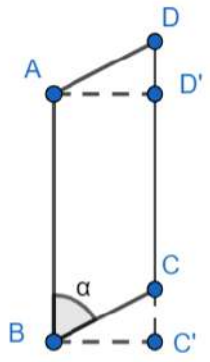


Рис. 2.1: Параллелограмм и прямоугольник

Это немедленно следует из того, что $\int\limits_{U(\delta)} f(x)\,dx = \int\limits_{V(\delta\sin\alpha)} f(x)\,dx + o(\delta)$ при $\delta \to +0$. Это в свою очередь вытекает из того, что области интегрирования отличаются на множество меры порядка $O(\delta^2)$, а подынтегральная функция равномерно ограничена при $\delta \in [0,1]$ (см. рисунок 2.1).

Докажем, наконец, исходное утверждение. Пусть v – произвольное направление, покажем, что производная $e(x)$ по нему существует и непрерывна. Сдвиг x на вектор $-u$ равносилен сдвигу всего многоугольника на u. Тогда изменение значения e складывается из интегралов по параллелограммам, стороны которых – исходные рёбра многоугольника и отрезки, равные u (см. рисунок 2.2). Отсюда и из доказанного выше следует, что производная по направлению существует и равна сумме (возможно, с отрицательными знаками) интегралов по сторонам, умноженных на синусы соответствующих углов. Непрерывность следует из непрерывности интегралов вида $\int\limits_{P\in[A,B]} \rho(x,P)\,dP$ как функции от x. □

Определение 2.7. Пусть множество X разбито на коалиции из $\{S_j \mid j \in J\}$, то есть

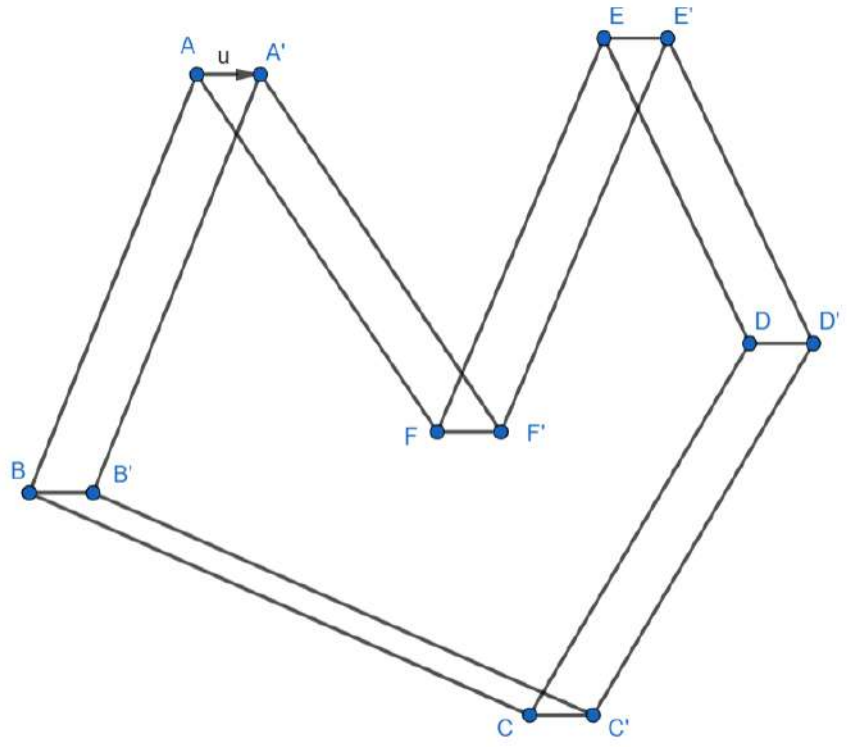


Рис. 2.2: Сдвиг многоугольника

$X = \bigcup\limits_{j \in J} S_j$. Набор функций $\{\gamma_j : X \to \mathbb{R}_+ \,|\, j \in J\}$ назовём *подходящим* для данного разбиения, если $\forall j \in J \forall x \in S_j$ неравенство $\gamma_j(x) \leqslant \gamma_i(x)$ выполнено для всех $i \neq j$. Замощение $\{S_j \,|\, j \in J\}$ называется *миграционно устойчивым* при равнодолевом распределении издержек (также просто устойчивым или стабильным), если набор функций, заданных правилом $\gamma_j(x) = \rho(x, m[S_j]) + \frac{g}{|S_j|}$, является подходящим. Замощение называется *миграционно устойчивым в общем случае*, если существует такой подходящий набор функций $\{\gamma_j \,|\, j \in J\}$, что $\forall j \in J \int\limits_S \gamma_j(x)\, dx = g + e(m[S], S)$.

В этой работе мы рассматриваем только равнодолевой принцип распределения издержек. Ясно, что устойчивость влечёт и устойчивость в общем случае.

Замечание 2.8. Данное определение вполне гибко: в нём необязательно требовать пустоту пересечения любой пары коалиций. В настоящей работе это особенно важно, поскольку в ней изучаются замощения плоскости замкнутыми фигурами, некоторые из которые пересекаются по участкам границ. В частности, из данного определения следует, что если $x \in S_j$ для всех $j \in J_x$, то все значения $\gamma_j(x)$ по $j \in J_x$ совпадают. Будем называть точку x *стабильной* или устойчивой, если для всякого $j \in J$ под условием $x \in S_j$ выполняется неравенство $\gamma_j(x) \leqslant \gamma_i(x)$ для любого $i \in J$.

Определение 2.9. Пусть множество X разбито на коалиции из $\{S_j \,|\, j \in J\}$, то есть $X = \bigcup\limits_{j \in J} S_j$. Набор функций $\{\gamma_j : X \to \mathbb{R}_+ \,|\, j \in J\}$ назовём *ε-подходящим* для данного разбиения, если $\forall j \in J \forall x \in S_j$ неравенство $(1 - \varepsilon)\gamma_j(x) \leqslant \gamma_i(x)$ выполнено для всех

$i \neq j$. Замощение $\{S_j \mid j \in J\}$ называется *ε-миграционно устойчивым* (или миграционно устойчивым с субсидией ε) при равнодолевом распределении издержек, если набор функций, заданных правилом $\gamma_j(x) = \rho(x, m[S_j]) + \frac{g}{|S_j|}$, является ε-подходящим. Замощение называется *ε-миграционно устойчивым в общем случае*, если существует такой ε-подходящий набор функций $\{\gamma_j \mid j \in J\}$, что $\forall j \in J \int\limits_S \gamma_j(x)\, dx = g + e(m[S], S)$.

Настоящая работа занимается лишь миграционными вопросами, так что всюду ниже под стабильностью и устойчивостью подразумевается именно миграционная.

Определение 2.10. Пусть $\{S_j \mid j \in J\}$ – семейство замкнутых ограниченных измеримых множеств плоскости положительной меры. Такое семейство называется *замощением*, если выполнены все условия:

1. $\forall i, j \in J, i \neq j$ выполнено $\mu(S_i \cap S_j) = 0$;
2. (свойство локальной финитности) всякий круг на плоскости пересекается лишь с конечным числом множеств семейства;
3. $\forall x \in \mathbb{R}^2\, \exists i \in J : S_i \ni x$, то есть $\bigcup\limits_{j \in J} S_j = \mathbb{R}^2$.

Замечание 2.11. В пункте 2 этого определения “всякий круг” можно заменить на “всякое ограниченное множество”.

3 Требования выпуклости

Лемма 3.1. *Пусть множество S имеет ось симметрии. Тогда его центр лежит на этой оси.*

Доказательство. Пусть x_1 – некоторая точка, не лежащая на оси симметрии фигуры S. Пусть x_2 – симметричная к x_1 точка относительно этой оси симметрии. Легко видеть, что $e(x_1) = e(x_2)$. Значит, минимум функции издержек не может достигаться в точке вне оси симметрии. □

Следствие 3.2. *Если фигура S имеет две оси симметрии, то центром S является точка пересечения этих осей.*

Лемма 3.3. *Пусть никакая вершина многоугольника S не лежит в дополнении к выпуклому множеству C. Тогда весь многоугольник S целиком лежит в C.*

Доказательство. Условие леммы равносильно тому, что все вершины S лежат в выпуклом C. Но всякий многоугольник вложен в выпуклую оболочку множества своих вершин: $S \subset co(V)$, где V – множество вершин S. С другой стороны, C содержит все выпуклые комбинации своих точек, так что $C \supset co(V)$. Из двух вложений немедленно следует требуемое. □

Лемма 3.4. *Пусть S_1, S_2 – выпуклые ограниченные замкнутые множества, которые пересекаются по множеству нулевой меры. Тогда их пересечение – пустое множество, точка или отрезок.*

Доказательство. Пересечение выпуклых фигур – выпуклое множество. Если $S_1 \cap S_2$ целиком содержится на некоторой прямой, то их пересечение есть пустое множество, точка или отрезок ввиду ограниченности и замкнутости множеств. В противном случае в $S_1 \cap S_2$ есть три точки, не лежащие на одной прямой. Из выпуклости, S_1 и S_2 целиком содержат треугольник, натянутый на эти три общие точки. Но тогда мера пересечения фигур положительна, то есть ненулевая. □

Лемма 3.5. *Пусть S – замкнутое ограниченное выпуклое множество плоскости. Тогда центр $m[S]$ лежит внутри этого множества: $m[S] \in S$.*

Доказательство. Пусть $y \notin S$, а x – проекция y на S. Тогда для всякого $z \in S$ выполнено $||z-y||^2 \geqslant ||x-y||^2$. Далее, $||z-y||^2 = ||z-x+x-y||^2 = ||z-x||^2 + ||x-y||^2 + 2(z-x, x-y)$. Отсюда $||z-x||^2 + 2(z-x, x-y) \geqslant 0$. Рассмотрим теперь $w(t) = x+t(z-x)$. При $t \in [0,1]$ точка $w(t)$ лежит в S в силу выпуклости. Подставляя $w(t)$ вместо z в неравенство выше, получим $t^2||z-x||^2 + 2t(z-x, x-y) \geqslant 0$. Деля на t и устремляя t к $+0$, получим, что $(z-x, x-y) \geqslant 0$, то есть угол при x в треугольнике на вершинах x, y, z тупой или прямой, то есть $||z-y|| \geqslant ||z-x||$. Но если всякая точка $z \in S$ находится к x (нестрого) ближе, чем к y, то $e(y, S) \geqslant e(x, S)$.

Итак, для всякой точки $y \notin S$ найдётся точка $x \in S$, для которой интегральные издержки по передвижению не превосходят таковых для y. В силу единственности центра, y не может быть медианой S. □

Следствие 3.6. *Центр любой фигуры S лежит внутри выпуклой оболочки S.*

Доказательство. Именно, если x лежит вне $co(S)$, то проекция x на это $co(S)$ не увеличивает транспортные издержки, то есть x не может быть центром. □

Определение 3.7. Замощение называется *однородным*, если все фигуры равновелики, то есть имеют одинаковую меру.

Теорема 3.8. *Если однородное замощение плоскости миграционно устойчиво, то все фигуры разбиения выпуклы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное миграционно устойчивое замощение, пусть $\{c_1, c_2, \ldots\}$ – сетка центров, то есть множество медиан всех фигур замощения. Если все фигуры равновелики, то для достижения устойчивости каждый агент плоскости должен быть прикреплён к самому близкому открытому центру (к любому из них, если таковых несколько). Это объясняется тем, что вклад на поддержание блага (отношение g к площади фигуры) одинаков по всем группам замощения. Но тогда немедленно получаем, что каждая группа является ячейкой диаграммы Вороного для системы точек

$\{c_1, c_2, \ldots\}$. Ячейка Вороного – это пересечение полуплоскостей, задаваемых условиями $\rho(x, c_i) \leqslant \rho(x, c_j)$, что, конечно же, является выпуклым множеством. Итак, все группы замощения выпуклы, что и требовалось. □

Определение 3.9. Замощение многоугольниками $\{S_j \mid j \in J\}$ имеет тип *ребро в ребро*, если любые два многоугольника либо не пересекаются, либо пересекаются по точке, которая является вершиной обоих многоугольников, либо пересекаются по отрезку, который является стороной обоих многоугольников.

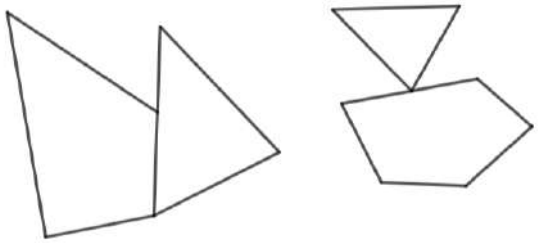


Рис. 3.1: Примеры замощений не ребро в ребро

Теорема 3.10. *Однородное устойчивое замощение многоугольниками имеет тип ребро в ребро.*

Доказательство. Однородное замощение должно быть диаграммой Вороного сетки медиан, чтобы быть стабильным. Однако в диаграмме Вороного все стыки имеют вид ребро в ребро. Именно, рассмотрим ячейку Вороного S_1 с центром в C_1 и её сторону AB, которая является частью серединного перпендикуляра к отрезку C_1C_2, где C_2 – некоторый центр. Покажем, что AB также является стороной многоугольника S_2, ассоциированного с C_2. Рассмотрим произвольную точку X на прямой AB. Эта точка принадлежит ячейке S_2 тогда и только тогда, когда $|XC_2| \leqslant |XC_i|$ для всех i. Но $|XC_2| = |XC_1|$, поэтому это выполняется ровно в том случае, когда X принадлежит S_1. Стало быть, со всей прямой AB фигура S_2 содержит только отрезок AB, что и требовалось. □

Лемма 3.11. *В однородном миграционно устойчивом замощении для двух фигур, разделяющих общий кусок границы (который является точкой или отрезком в силу леммы 3.4), этот кусок является частью серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему центры этих фигур.*

Доказательство. Пусть S_1 и S_2 – данные фигуры, которым отвечают функции $\gamma_1(\cdot)$ и $\gamma_2(\cdot)$ соответственно из определения 2.7. Тогда всякая общая точка этих фигур должна быть стабильна, то есть $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ для всех общих точек x. В силу однородности, слагаемые вида $\frac{g}{|S|}$ сокращаются, и остаётся равенство $\rho(x, m[S_1]) = \rho(x, m[S_2])$, то есть x

действительно лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему центры фигур. □

Определение 3.12. Две фигуры замощения назовём *соседними*, если они имеют общий кусок границы.

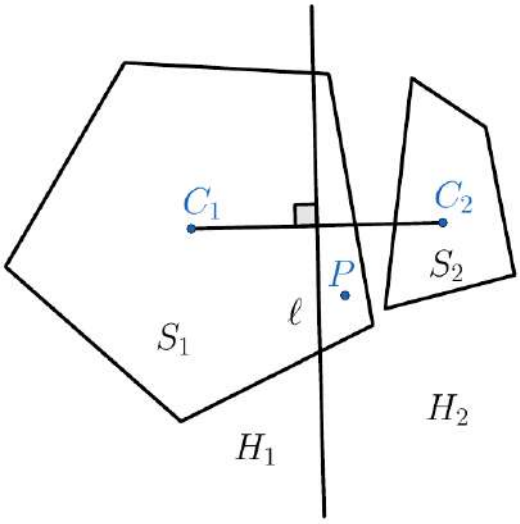


Рис. 3.2: Стабильность вершин

Теорема 3.13. *Рассмотрим однородное замощение плоскости выпуклыми многоугольниками. Если каждая вершина каждого многоугольника стабильна, то такое замощение миграционно устойчиво.*

Доказательство. Иллюстрация приведена на рисунке 3.2. Предположим, что замощение обладает описанным свойством, но не является миграционно устойчивым. Итак, существуют многоугольники S_1 и S_2 с центрами C_1 и C_2 и функциями издержек $\gamma_1(\cdot)$ и $\gamma_2(\cdot)$ соответственно, а также точка $P \in S_1$ такая, что $\gamma_1(P) > \gamma_2(P)$, то есть $\rho(C_1, P) > \rho(C_2, P)$. Пусть H_1, H_2 – полуплоскости, задаваемые серединным перпендикуляром ℓ к C_1C_2, причём $C_i \in H_i$ для обоих i. Тогда $P \in \operatorname{int} H_2$. По лемме 3.3 и при условии стабильности всех вершин, ни одна из них не лежит в $\operatorname{int} H_2$, что является дополнением к выпуклому множеству. Но тогда и весь многоугольник (и точка P) лежит вне $\operatorname{int} H_2$, что приводит нас к противоречию. □

Следствие 3.14. *Рассмотрим однородное замощение плоскости многоугольниками. Необходимым условием его стабильности является выпуклость всех многоугольников. Также для стабильности необходимо, чтобы любые две соседние фигуры имели общий участок границы частью серединного перпендикуляра к отрезку, который соединяет их медианы. Достаточным условием стабильности в этих условиях является стабильность всех вершин всех многоугольников.*

Замечание 3.15. Для устойчивости, конечно, необходима устойчивость всех вершин, так что в условиях выпуклости получен критерий миграционной устойчивости: все вершины стабильны. Условия же о серединных перпендикулярах несколько упрощают рассуждения в конкретных примерах.

Лемма 3.16. *Если две фигуры замощения симметричны относительно некоторой прямой, то они не представляют друг для друг угроз миграционной природы.*

Доказательство. Воспользуемся таким фактом: если $ABCD$ – равнобокая трапеция с основаниями AB и CD или параллелограмм, то $|AD| < |AC| = |BD|$. В любом случае $\angle ADC > \angle ACD$, поскольку $\angle ADC = \angle BCD$. Значит, в треугольнике ACD против большего угла лежит большая сторона: $|AC| > |AD|$.

Пусть теперь две фигуры замощения симметричны относительно прямой. Пусть A – медиана первой фигуры, B – второй, D – произвольная точка первой фигуры, а C – симметричная к ней. Если $A = B$ или $D = C$, то $|AD| \leqslant |BD|$. Иначе $ABCD$ – равнобокая трапеция или прямоугольник. Отсюда немедленно следует, что $|AD| < |BD|$, так что D не хочет примкнуть ко второй фигуре. Итак, две фигуры действительно не представляют друг для друга угроз. □

4 Неоднородные замощения

Настоящий раздел показывает, что для стабильности замощения многоугольниками необходимо, чтобы все фигуры имели одну и ту же площадь, то есть что неоднородных стабильных замощений многоугольниками не существует.

Определение 4.1. Пусть $V = \{S_j \,|\, j \in J\}$ – замощение плоскости многоугольниками. Введём граф $G = (V, E)$, где $E = \{\{S_i, S_j\} : i \neq j$ и многоугольники S_i и S_j граничат по отрезку положительной длины$\}$. Тогда граф G называется *графом замощения* V.

Лемма 4.2. *Граф G всякого замощения многоугольниками $V = \{S_j \,|\, j \in J\}$ является связным, то есть между любыми двумя вершинами есть путь конечной длины.*

Доказательство. Пусть вершины S_a и S_b не соединены путём. Определим $d(S_i, S_j) = \min\{\rho(A, B) : A \in S_i, B \in S_j\}$. Рассмотрим круг K, который целиком содержит многоугольники S_a и S_b. Пусть $\mathcal{R}$ – множество многоугольников, которые пересекаются с этим кругом. Это множество конечно в силу локальной финитности. Выберем теперь два многоугольника S_u и S_v из $\mathcal{R}$, которые не соединены путём в графе, на которых достигается минимальное значение $d(S_u, S_v)$. Такая пара существует в силу конечности $\mathcal{R}$ и существования валидной пары (S_a, S_b).

Пусть $d(S_u, S_v) > 0$. Ввиду замкнутости обоих множеств, расстояние между ними равно длине некоторого отрезка AB, где A принадлежит многоугольнику S_u, а B – многоугольнику S_v. Интервал AB целиком лежит в круге K, так что он содержится

в объединении многоугольников из $\mathcal{R}$. Значит, найдётся некоторый многоугольник S_w, который содержит точку из интервала AB. Но тогда $d(S_u, S_w) < d(S_u, S_v)$ и $d(S_v, S_w) < d(S_u, S_v)$. В силу выбора S_u и S_v, вершины S_u и S_w, а также S_w и S_v соединены путями. Но тогда и S_u с S_v соединены путём.

Наконец, пусть $d(S_u, S_v) = 0$, то есть многоугольники имеют общую точку p, но не общий отрезок (иначе они связаны ребром). Рассмотрим все многоугольники, содержащие p, и упорядочим их по полярному углу. Тогда соседние многоугольники разделяют кусок стороны, то есть все они образуют цикл. Значит, S_u и S_v связаны путём, что и требовалось. □

Теорема 4.3. *Не существует неоднородных устойчивых замощений плоскости многоугольниками.*

Доказательство. Пусть в замощении найдётся два многоугольника разной площади, которые граничат по некоторому отрезку (положительной длины). Покажем, что стабильности быть не может. Именно, всякая их общая точка x должна удовлетворять равенству $\rho(x, C_1) + \frac{g}{|S_1|} = \rho(x, C_2) + \frac{g}{|S_2|}$, то есть $\rho(x, C_1) - \rho(x, C_2) = \theta \neq 0$. Таким уравнением задаётся одна из ветвей гиперболы. Однако ветвь гиперболы не содержит отрезков, поэтому не может целиком содержать отрезок пересечения данных фигур.

Отсюда получаем, что любые фигуры, граничащие по невырожденному отрезку, имеют равную площадь. Значит, в графе данного замощения любые две вершины, соединённые ребром, отвечают многоугольникам равной площади. Ввиду связности данного графа, все многоугольники равновелики.

□

Теорема 4.4. *Не существует (даже нестабильных) замощений плоскости выпуклыми фигурами, где хотя бы одна из фигур не является многоугольником.*

Доказательство. Покажем, что если некоторая точка является граничной точкой некоторой фигуры замощения, то она принадлежит хотя бы двум фигурам. Именно, пусть $x \in \partial A$, где A – некоторая фигура замощения. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ шар $B_\varepsilon(x)$ радиуса ε с центром в точке x содержит точки вне A. В силу локальной финитности замощения, круг $B_1(x)$ пересекается только с конечным числом фигур: $A, S_1, \ldots, S_k$. Пусть ни одно из множеств $S_1, \ldots, S_k$ не содержит точку x. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ точка x лежит в $\overline{S_i}$, что является открытым множеством. Значит, существует $\varepsilon_i > 0$ такое, что $B_{\varepsilon_i}(x) \subset \overline{S_i}$. Пусть теперь $\varepsilon = \min\{1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Тогда шарик $B_\varepsilon(x)$ не пересекается ни с одним из множеств $S_1, \ldots, S_k$, значит, должен целиком содержаться в A. С другой стороны, этот шар содержит точки вне A. Полученное противоречие означает, что выбранный x обязательно лежит хотя бы в двух фигурах замощения.

Рассмотрим теперь произвольную фигуру M замощения и её границу. В силу локальной финитности, граница этого множества пересекается лишь с конечным числом других фигур: $T_1, \ldots, T_m$. В силу леммы 3.4, пересечение T_i и M для всех i является

точкой или отрезком. Значит, $\partial M \subset (T_1 \cap M) \cup \ldots \cup (T_m \cap M)$, что является объединением отрезков. Значит, граница множества M – объединение отрезков, то есть является ломаной. Отсюда M – многоугольник. $\square$

Следствие 4.5. *Не существует стабильных неоднородных замощений плоскости многоугольниками. Не существует стабильных неоднородных замощений плоскости выпуклыми фигурами.*

Теорема 4.6. *(см. [2], [9] и [11]) Не существует (даже нестабильных) замощений плоскости выпуклыми фигурами, каждая из которых является многоугольником хотя бы с семью вершинами, где площади всех фигур ограничены снизу положительным числом, а периметры всех фигур ограничены сверху конечным числом.*

Гипотеза 4.7. Не существует такого устойчивого замощения, где все фигуры были бы выпуклыми многоугольниками хотя бы с 7 вершинами.

Если такое замощение существует, то площади всех фигур равны (в силу однородности всех устойчивых замощений), то есть периметры (а значит, и диаметры) должны принимать сколь угодно большие значения.

5 Однородные замощения

Определение 5.1. Замощение назовём *простым* (monohedral), если все фигуры в нём равны. В противном случае назовём такое замощение *составным*.

Центральный факт настоящего раздела – теорема об отсутствии составных стабильных замощений треугольниками. Иными словами, если замощение плоскости треугольниками устойчиво, то все треугольники равны. Для доказательства потребуется несколько промежуточных результатов.

Панов в [3] показал, что медиана измеримого ограниченного выпуклого множества лежит внутри этого множества: $m[S] \in \operatorname{int} S$. Совместно с Савватеевым в [4] они показали, что точка m является медианой многоугольника $P = P_1P_2 \ldots P_n$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda(m, P) := \sum_{i=1}^{n} \frac{d(m, P_iP_{i+1})}{|P_iP_{i+1}|} \overrightarrow{P_iP_{i+1}} = 0,$$

где

$$d(m, AB) = \int\limits_{P \in [A,B]} \rho(m, P)\, dP,$$

а $P_{n+1} = P_1$. В частности, точка M является медианой треугольника ABC, если и только если

$$\frac{d(M, AB)}{|AB|} = \frac{d(M, BC)}{|BC|} = \frac{d(M, CA)}{|CA|}.$$

Лемма 5.2. *Пусть S_1 и S_2 – два выпуклых многоугольника, пересекающиеся по общему ребру. Тогда $m[S_1] \neq m[S_2]$ и $m[S_1] \neq m[S_1 \cup S_2]$.*

Доказательство. Первое неравенство немедленно следует из того, что медиана выпуклого множества лежит в его внутренности, а внутренности данных многоугольников не пересекаются.

Далее, пусть S_1 задаётся вершинами $A_1, \ldots, A_n$, многоугольник S_2 – $B_1, \ldots, B_m$, причём $A_1 = B_2$, и $A_2 = B_1$. Пусть $M = m[S_1] = m[S_1 \cup S_2]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(M, A_iA_{i+1})}{|A_iA_{i+1}|} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(M, A_iA_{i+1})}{|A_iA_{i+1}|} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{d(M, B_jB_{j+1})}{|B_jB_{j+1}|} \overrightarrow{B_jB_{j+1}}.$$

Второе равенство имеет место, поскольку слагаемые с A_1A_2 и B_1B_2 сократятся, превратив правую часть в $\lambda(M, S_1 \cup S_2)$. Таким образом, и $\lambda(M, S_2) = 0$, то есть M должна быть медианой многоугольника S_2, что неверно. □

Замечание 5.3. Доказать эту лемму можно и без применения аппарата из [4]. Именно, $e(x, S_1 \cup S_2) = e(x, S_1) + e(x, S_2)$. В силу дифференцируемости функции e для многоугольных областей, точка x является медианой $S_1 \cup S_2$ тогда и только тогда, когда все частные производные $e(x, S_1 \cup S_2)$ равны нулю. С другой стороны, если $m[S_1 \cup S_2] = m[S_1]$, то частные производные $e(x, S_1 \cup S_2)$ и $e(x, S_1)$ обнуляются в одной точке, значит, в ней же обнуляются и производные функции $e(x, S_2)$, то есть $m[S_1] = m[S_2]$, чего быть не может.

Лемма 5.4. *Пусть $\mathcal{M}$ – многоугольник, а $P \notin \mathcal{M}$. Пусть ℓ – произвольная прямая, проходящая через P, такая, что весь $\mathcal{M}$ лежит в одной замкнутой полуплоскости относительно ℓ. Пусть v – вектор единичной длины, направление которого ортогонально ℓ, направленный в противоположную полуплоскость. Тогда производная функции $e(x, \mathcal{M})$ в точке P по направлению v положительна.*

Доказательство. Пусть $P' = P + \lambda v$. Тогда для всякого $X \in \mathcal{M}$ верно неравенство $\rho(X, P) \leqslant \rho(X, P')$, так как угол при P в треугольнике XPP' – прямой или тупой. Пусть $\mathcal{M}'$ – это все точки X многоугольника $\mathcal{M}$ такие, что $\cos \angle XPP' \leqslant -\varphi$, где φ – некоторое маленькое положительное число, не зависящее от λ. При достаточно малом φ площадь $\mathcal{M}'$ составляет хотя бы половину площади $\mathcal{M}$. С другой стороны, для всякого $X \in \mathcal{M}'$ имеет место неравенство $|XP'| \geqslant \sqrt{|XP|^2 + \lambda^2 + 2\,|XP|\,\lambda\varphi}$ в силу теоремы косинусов. Наконец, при достаточно малом λ это неравенство можно огрубить до $|XP'| \geqslant |XP| \left(1 + \lambda\frac{\varphi}{2}\right)$. Значит, $e(P', \mathcal{M}) - e(P, \mathcal{M}) \geqslant \int\limits_{\mathcal{M}'} \lambda\frac{\varphi}{2}\, dx \geqslant \mu(\mathcal{M})\lambda\frac{\varphi}{4}$. Стало быть, производная по направлению v положительна и составляет хотя бы $\mu(\mathcal{M})\frac{\varphi}{4}$, что и требовалось. □

Лемма 5.5. *Пусть A, B, C – три выпуклых многоугольника, причём A и B пересекаются по стороне, B и C пересекаются по стороне, а A и C имеют не более одной общей точки. Более того, $A \cup B$ и $C \cup B$ – выпуклые. Тогда $m[A \cup B] \neq m[B \cup C]$.*

Доказательство. Пусть, напротив, $M = m[A \cup B] = m[B \cup C]$. Тогда $M \in \operatorname{int} B$. Ввиду выпуклости $A \cup B$ и $B \cup C$, существует прямая ℓ через M, (нестрого) разделяющая A

и C. Пусть v – направление, ортогональное ℓ, ориентированное в сторону C. Тогда по лемме 5.4 производная $e(x, A)$ в точке M по направлению v положительна, а производная $e(x, C)$ – отрицательна. Если производная $e(x, B)$ в той же точке по тому же направлению равна нулю или положительна, то M не может быть медианой $A \cup B$, так как все производные в медиане обнуляются (а здесь положительна). Если же производная $e(x, B)$ отрицательна, то M не может быть медианой $B \cup C$, так как в этой точке производная отрицательна. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следствие 5.6. *Существует не более одного треугольника площади S, геометрической медианой которого является точка M, а одной из сторон выступает отрезок AB.*

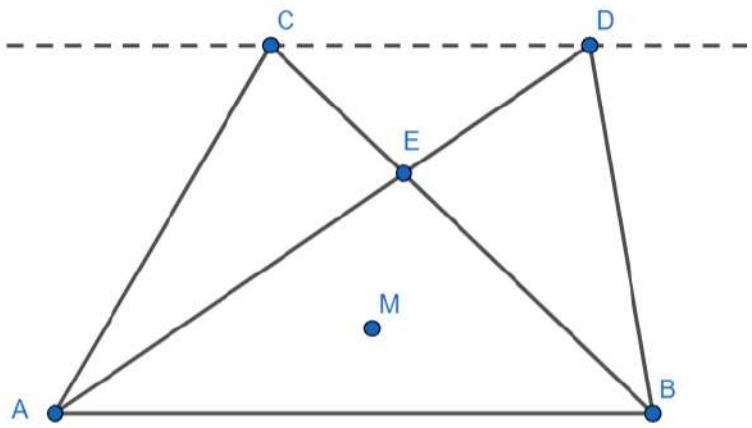


Рис. 5.1: Два треугольника

Доказательство. Иллюстрация приведена на рисунке 5.1. Поскольку M не может лежать на прямой AB (так как медиана лежит во внутренности), то третья вершина треугольника (при фиксированной площади) может пробегать только по некоторой прямой, параллельной AB. Пусть C и D – две произвольные точки на этой прямой. Пусть отрезки AD и BC пересекаются в точке E. Тогда фигуры ACE, AEB и EDB – выпуклы и подходят на роль множеств из леммы 5.5. Но тогда немедленно $m[ACB] \neq m[ADB]$, так что M действительно является медианой не более чем одного треугольника. □

Теорема 5.7. *Если замощение плоскости треугольниками миграционно устойчиво, то все треугольники равны.*

Доказательство. Как мы знаем, устойчивость требует однородности, так что все треугольники замощения равновелики. Рассмотрим одну фигуру замощения ABC с центром M' на рисунке 5.2. Пусть точка M симметрична M' относительно AB. Тогда граничить с ABC по стороне AB (как известно, стык должен идти именно ребро в

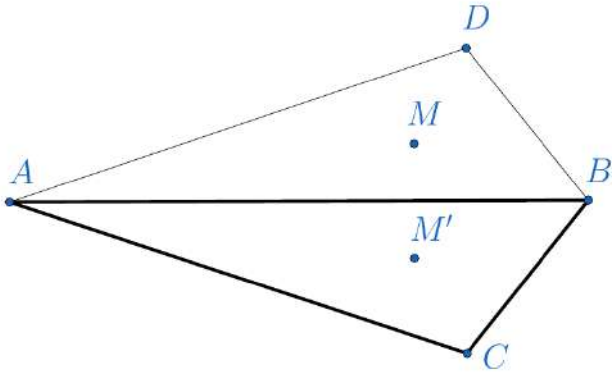


Рис. 5.2: Граничащие треугольники

ребро по лемме 3.10) должен некий треугольник той же площади с центром в M. С одной стороны, таким треугольником может быть треугольник ABD, полученный при отражении ABC относительно AB. С другой стороны, такой треугольник не более чем единствен. Стало быть, именно симметричный к ABC (а значит, равный) должен граничить с ABC.

Таким образом, мы показали, что если два треугольника разделяют участок границы положительной длины, то они равны. Для завершения доказательства остаётся вспомнить лемму 4.2 о связности графа замощения. □

Теорема 5.8. *Не существует стабильных замощений плоскости, где все фигуры – прямоугольники и треугольники, причём есть хотя бы один прямоугольник и хотя бы один треугольник.*

Доказательство. Пусть прямоугольник со сторонами $2a$ и b граничит с треугольником по стороне длины $2a$. Медиана прямоугольника расположена в точке пересечения его диагоналей, значит, медиана треугольника находится на расстоянии $\frac{b}{2}$ от основания, причём лежит эта медиана на серединном перпендикуляре к этому самому основанию. Значит, треугольник должен быть равнобедренным. Иначе его отражение относительно серединного перпендикуляра даст новый треугольник той же площади, с тем же основанием и той же медианой, что невозможно по следствию 5.6. Ввиду однородности, высота этого треугольника должна составлять $h := 2b$. Итак, нужно найти такое соотношение на a и b, что медиана равнобедренного треугольника с основанием $2a$ и высотой $h = 2b$ лежит на расстоянии $\frac{h}{4}$ от основания. Пусть, не умаляя общности, $a = 1$.

В [3] приводится уравнение на расстояние y от медианы до основания через a и

h:

$$\frac{a\sqrt{a^2+y^2}+y^2\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{y}\right)}{2}-\frac{a(a^2+hy)\sqrt{a^2+y^2}+ah(h-y)^2}{2(a^2+h^2)}+$$
$$+\frac{a^3(h-y)^2\ln\left(\frac{(h-y)\left(\sqrt{a^2+h^2}-h\right)}{a^2+hy+\sqrt{a^2+h^2}\sqrt{a^2+y^2}}\right)}{2\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

При $y=\frac{1}{4}h$ ресурс www.wolframalpha.com сообщает об отсутствии нетривиальных ($h\neq 0$) решений. Это же описывается в той же работе [3], где при $a=1$ показывается, что функция $\frac{y(h)}{h}$ с ростом h убывает к $1-\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{4}$. Итак, искомого треугольника не существует, значит, прямоугольник обязан граничить только с прямоугольниками. Но тогда все фигуры замощения – прямоугольники. □

Гипотеза 5.9. Не существует устойчивых составных замощений четырёхугольниками и треугольниками.

Гипотеза 5.10. Не существует устойчивых составных замощений.

6 Простые замощения

Следующая теорема напрямую следует из теоремы 4.6.

Теорема 6.1. *Не существует простого (даже нестабильного) замощения, модельным многоугольником которого является выпуклый n-угольник с $n\geqslant 7$.*

Теорема 6.2. *В простом устойчивом замощении плоскости треугольниками модельный треугольник имеет набор углов* $(60^\circ,60^\circ,60^\circ),(90^\circ,60^\circ,30^\circ),(90^\circ,45^\circ,45^\circ)$ *или* $(120^\circ,30^\circ,30^\circ)$. *Обратно, для каждого треугольника с таким набором углов существует простое стабильное замощение плоскости.*

Доказательство. Для устойчивости простого замощения требуется, чтобы все соседние треугольники получались друг из друга отражением относительно общей стороны. Тогда градусная мера каждого угла треугольника должна быть делителем 360° (в общем случае делитель не обязан быть целым числом). Это следует из того, что при многократном отражении треугольника относительно стороны с фиксированной вершиной, треугольник обязан вернуться в исходное положение. Тогда максимальный угол треугольника обязательно равен $60^\circ,72^\circ,90^\circ$ или 120°.

Если максимальный угол треугольника равен 60°, то треугольник является равносторонним.

Если максимальный угол равен 72°, то модельный треугольник должен быть равнобедренным (с углом при вершине 72°). Это следует из того, что при пятикратном

отражении относительно стороны с фиксированной вершиной треугольник должен перейти сам в себя, но его стороны поменяются местами. Значит, углы должны составлять $(72°, 54°, 54°)$. Однако 54 не является делителем 360, поэтому треугольники с углом 72° не дают стабильных замощений.

Пусть максимальный угол равен 90°. Пусть один из оставшихся углов имеет градусную меру $\frac{360}{k}$, а второй $\frac{360}{m}$, причём $k \leqslant m$, где $k, m \in \mathbb{Z}$. Тогда $90 - \frac{360}{k} = \frac{360}{m}$, то есть $km - 4m = 4k$. Левая часть кратна m, значит, $4k$ кратно m. Поскольку $k \leqslant m$, то имеет место одно из четырёх равенств: $m = k, m = \frac{4}{3}k, m = 2k$ или $m = 4k$. В случае $k = m$ треугольник превращается в равнобедренный, то есть имеет набор углов $(90°, 45°, 45°)$. Если $m = \frac{4}{3}k$, то $k = 7$, то есть нечётно, так что треугольник должен быть равнобедренным с одним из углов при основании 90°, чего быть не может. В случае $m = 2k$ набор углов есть $(90°, 60°, 30°)$. Наконец, если $m = 4k$, то один из углов равен 72°. Однако в предыдущем абзаце показано, что такие треугольники нас не интересуют.

Наконец, если максимальный угол равен 120°, то треугольник обязан быть равнобедренным с углом при вершине 120° (поскольку $\frac{360}{120} = 3$ – нечётное число). Это условие даёт набор углов $(120°, 30°, 30°)$.

Осталось показать, что данные треугольники действительно стабильно замощают плоскость.

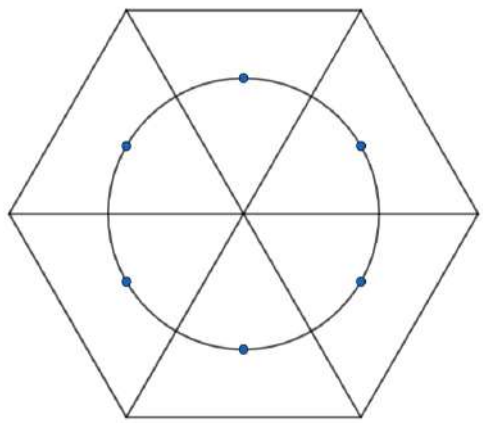


Рис. 6.1: $(60°, 60°, 60°)$

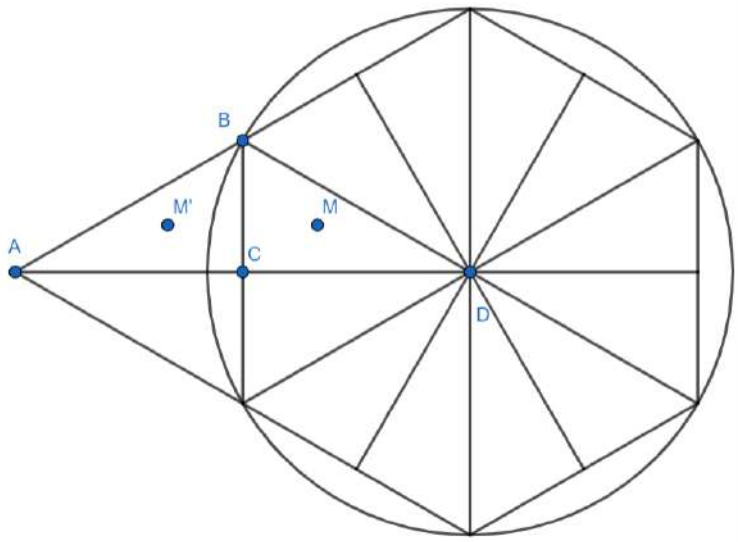


Рис. 6.2: $(90°, 60°, 30°)$, угол 30°

60-60-60. Пусть длина равностороннего треугольника на рисунке 6.1 равна a. Тогда расстояние от любой вершины до ближайшей медианы равно $\frac{2}{3}a$, но круг такого радиуса целиком содержится в шести прилегающих треугольниках. Значит, угрозы стабильности могут представлять только ближайшие шесть треугольников, но такие угрозы парируются тем, что соседние треугольники симметричны.

90-60-30. Случай $(90°, 60°, 30°)$ требует более аккуратного анализа. Мы не будем находить точные координаты медианы такого треугольника и докажем стабильность,

где бы она ни находилась. Рассмотрим сначала вершину D при угле в $30°$ с рисунка 6.2. Поскольку медиана M треугольника BCD лежит внутри него, достаточно показать, что все треугольники замощения, пересекающие внутренность круга с центром D и радиусом $|DB|$, не представляют угроз миграции для точки D. Радиус взят таким, чтобы весь треугольник BCD (а значит, и его медиана) лежал в этом круге. Ввиду общей симметрии, достаточно проверить, что точка M', являющаяся медианой ABC, лежит от D дальше, чем M. Но это верно ввиду того, что треугольники BCD и ACB получены друг из друга отражением относительно одной из сторон. Итак, вершины при угле в $30°$ стабильны.

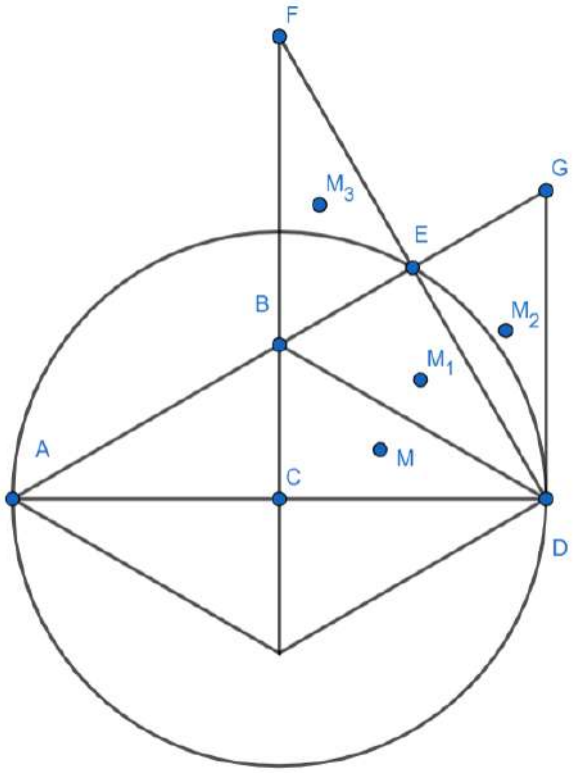


Рис. 6.3: $(90°, 60°, 30°)$, угол $90°$

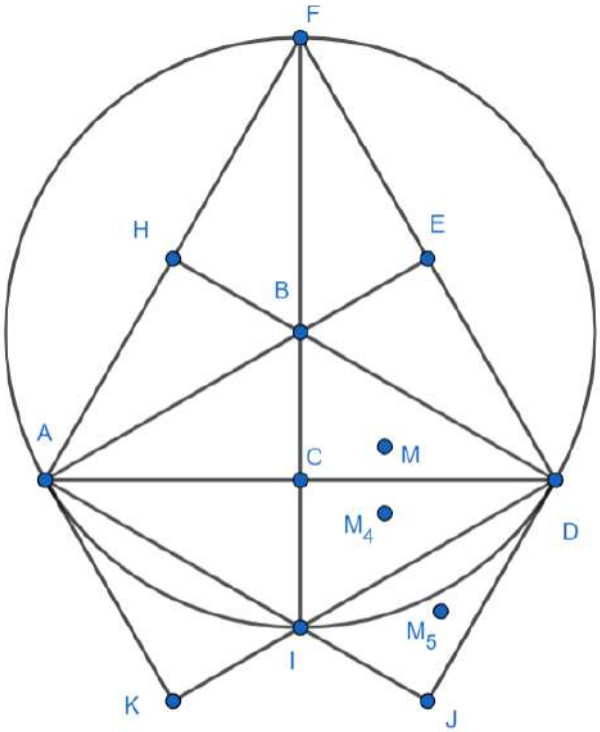


Рис. 6.4: $(90°, 60°, 30°)$, угол $60°$

Изучим теперь вершину при угле в $90°$ на рисунке 6.3. Окружность с центром в C и радиусом $|CD|$ целиком содержит треугольник BCD. Из симметрии, достаточно проверить стабильность C относительно треугольников BED, BFE и EGD. Во-первых, BED с медианой M_1 не представляет угроз, так как он симметричен BCD относительно общего ребра. Во-вторых, пусть M_3 – медиана треугольника BEF. Тогда M_3 симметрична M_1 относительно BE, причём BE выступает серединным перпендикуляром к M_1M_3. Но точка C лежит по ту же сторону от BE, что и M_1, значит, $|CM_1| \leqslant |CM_3|$. Но $|CM| \leqslant |CM_1|$, так что и M_3 не представляет угрозы.

В-третьих, пусть M_2 – медиана EGD. Точки M_2 и M_1 симметричны относительно ED, а C и M_1 лежат по одну сторону от этой прямой. Точно так же, как и в предыдущем абзаце, M_2 не представляет угроз.

Итак, осталось разобрать вершину при угле в $60°$. На рисунке 6.4 проведена

окружность с центром в B радиуса $|BD|$, целиком накрывающая треугольник BCD. Из симметрии, достаточно проверить отсутствие угроз от треугольников DCI и IJD. Первый из них, DCI с медианой M_4, симметричен BCD относительно общей стороны, так что угроз не несёт. Пусть теперь M_5 – медиана треугольника DIJ. Точки M_5 и M_4 симметричны относительно DI, а M_4 и B лежат по одну сторону от этой прямой. Значит, $|BM| \leqslant |BM_4| \leqslant |BM_5|$. Итак, данное замощение стабильно в каждой вершине, значит, стабильно вообще.

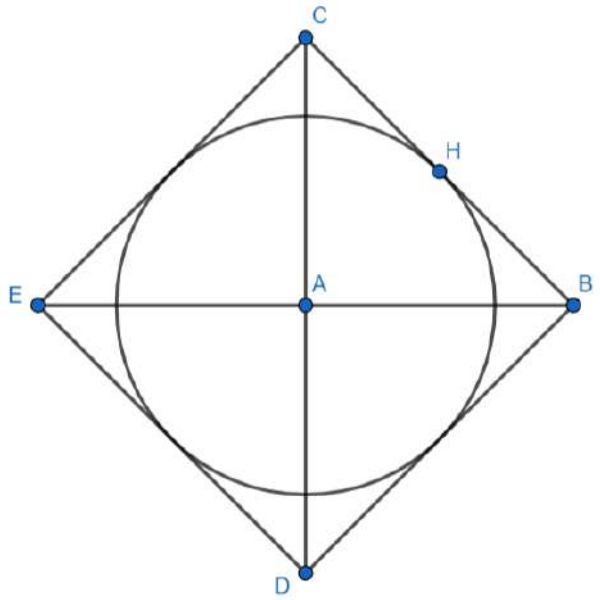


Рис. 6.5: $(90°, 45°, 45°)$, угол $90°$

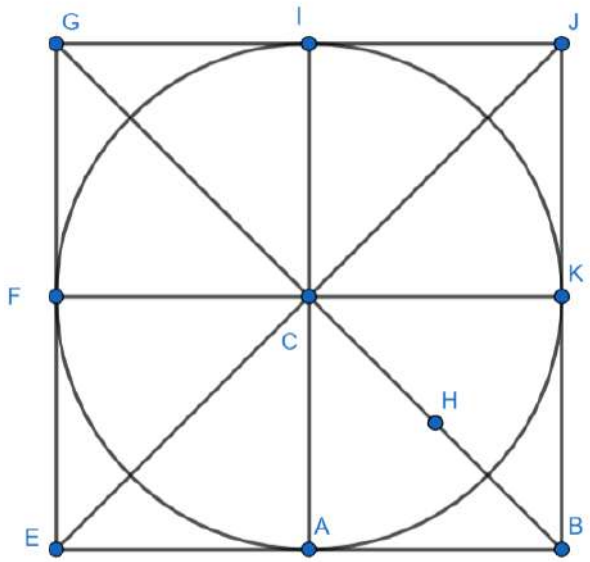


Рис. 6.6: $(90°, 45°, 45°)$, угол $90°$

90-45-45. На рисунке 6.5 представлен модельный треугольник ABC с высотой AH. Как известно, медиана равнобедренного треугольника лежит на высоте, опущенной на основание, то есть на AH. Круг с центром A и радиусом $|AH|$ пересекает по внутренности только четыре соседних треугольника, каждый из которых не представляет угроз миграции для точки A. Значит, вершина прямого угла стабильна.

Рисунок 6.6 представляет вершину при угле в $45°$. Самой далёкой точкой на отрезке AH от точки C является A, так что достаточно проверить стабильность относительно треугольников, которые задевает круг с центром в C и радиусом $|AC|$. Но точка C равноудалена от медиан всех восьми треугольников ввиду их симметрии относительно общих рёбер.

120-30-30. В случае $(120°, 30°, 30°)$, если CH – высота в модельном треугольнике CBD, то круг с центром в C радиуса $|CH|$ (см. рисунок 6.7) целиком лежит в трёх треугольниках, а медиана лежит где-то на CH. Легко понять, как и в случае $(90°, 45°, 45°)$, что стабильность не нарушается.

Вершина B на рисунке 6.8 при угле в $30°$ также стабильна. Самая удалённая точка от B на отрезке CH есть C, так что нас интересуют только треугольники, пересекающие внутренность круга с центром в B и радиусом $|BC|$. Из симметрии нужно проверить только треугольник BED, который, очевидно, не несёт угроз.

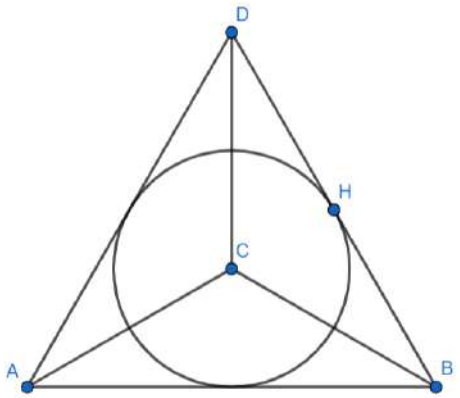


Рис. 6.7: $(120°, 30°, 30°)$, угол $120°$

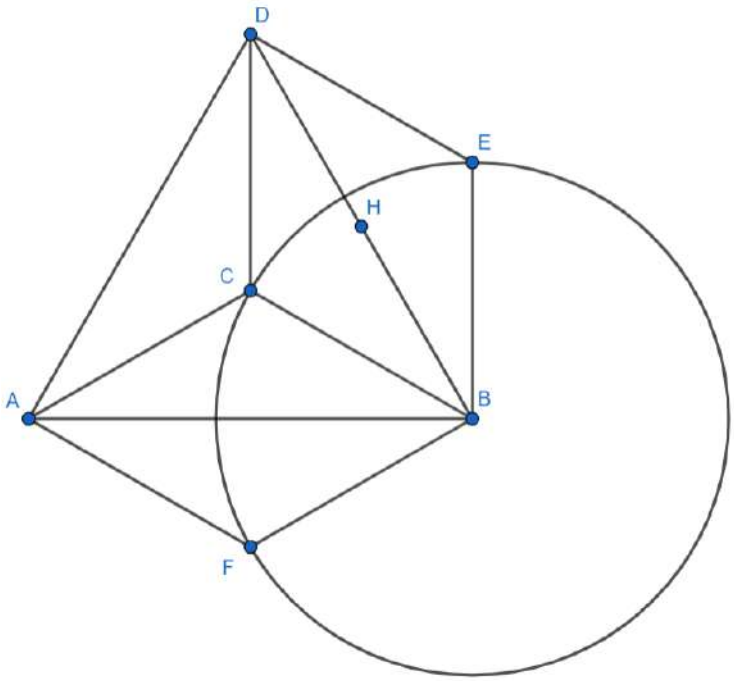


Рис. 6.8: $(120°, 30°, 30°)$, угол $30°$

□

Теорема 6.3. *В простом устойчивом замощении плоскости параллелограммами модельный параллелограмм является ромбом с углом* $120°$ *или прямоугольником. Обратно, для каждого такого параллелограмма существует простое стабильное замощение плоскости.*

Доказательство. Здесь вновь все углы должны быть делителями $360°$. Тогда максимальный угол параллелограмма составляет $90°$ или $120°$.

В случае, когда максимальный угол равен $90°$, параллелограмм немедленно превращается в прямоугольник.

Если же максимальный угол равен $120°$, то параллелограмм должен быть ромбом, так как он должен перейти в себя при трёхкратном отражении относительно стороны при фиксированной вершине.

Рассмотрим простое замощение прямоугольниками в виде с рисунка 6.9. Медианы образуют сетку с шагами, равными длинам сторон прямоугольника. Значит, проверять на угрозы стабильности нужно только две ближайшие вертикальные прямые сетки и две горизонтальные. Так, для точки A нужно проверить только медианы M_1, M_2, M_3, M_4, которые, очевидно, угроз не представляют.

Рисунок 6.10 показывает замощение плоскости ромбами с углом $120°$. Легко видеть, что окружности с центрами в вершинах и радиусами, равными соответствующим расстояниям до медианы, заключены целиком в нескольких соседних ромбах, которые получены друг из друга отражением относительно общих сторон с фиксированной вершиной. Значит, все вершины такого замощения стабильны, следовательно, и всё замощение устойчиво. □

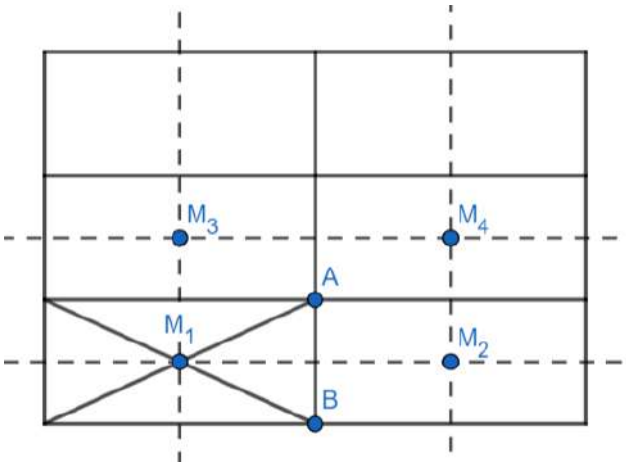


Рис. 6.9: Прямоугольник

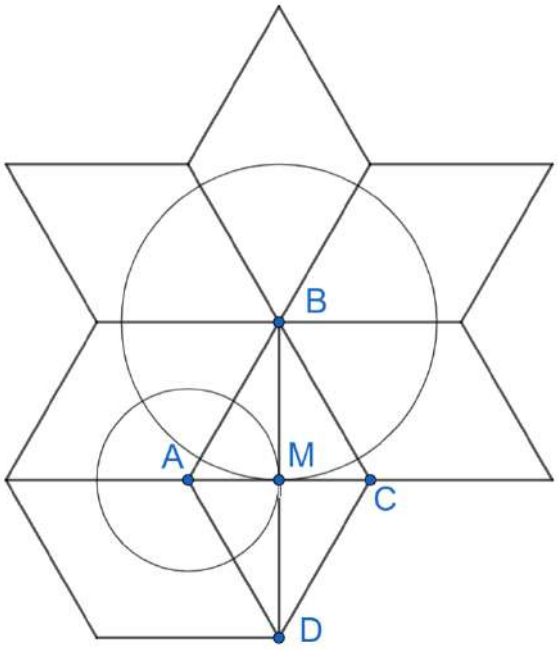


Рис. 6.10: Ромб с углом 120°

7 Избранные замощения

Определим $F(a) = \int\limits_0^a \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{a^2+1} + \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right)$.

Пусть задан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, длина катета AC равна h, а длина BC равна d. Тогда интеграл расстояния от A до BC равен $\psi(h,d) = \int\limits_{x=0}^{d} \sqrt{h^2+x^2}\,dx = \int\limits_{x=0}^{d} \sqrt{h^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{h}\right)^2}\,dx = h\int\limits_{x=0}^{d} \sqrt{1+\left(\frac{x}{h}\right)^2}\,dx = \left|y=\frac{x}{h}\right| = h^2\int\limits_{y=0}^{d/h} \sqrt{1+y^2}\,dy = h^2 F\left(\frac{d}{h}\right)$.

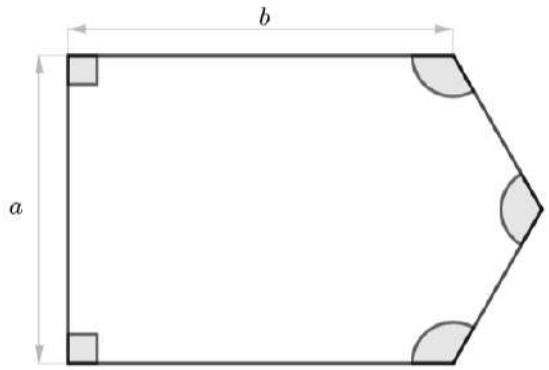


Рис. 7.1: Модельный пятиугольник

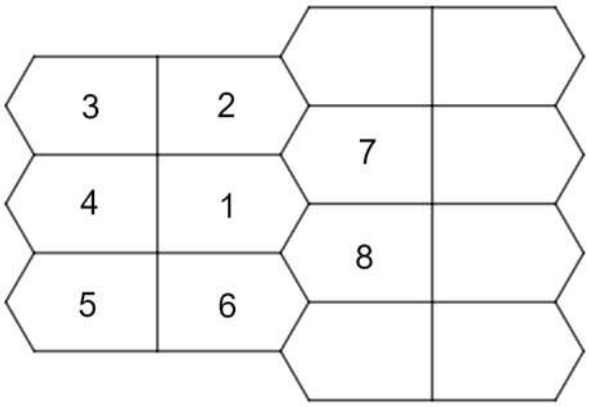


Рис. 7.2: Замощение

Пример 7.1. Рассмотрим замощение плоскости пятиугольниками с рисунка 7.1 в виде, изображённом на рисунке 7.2. Цель заключается в выяснении, при каких соотношениях на длины a и b (которыми полностью задаётся такое замощение) достигается

стабильность. Изучим стабильность всех вершин многоугольника 1. Отметим, что многоугольники $2, 3, 4, 5, 6$ получаются из 1 отражением относительно соответствующих общих участков границы. Но тогда свойство о серединных перпендикулярах из следствия 3.14 выполняется для этих соседей. Проверим для пятиугольника номер 7, для 8-го аналогично.

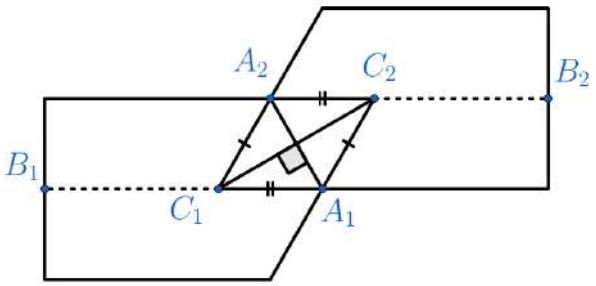


Рис. 7.3: Необходимые условия

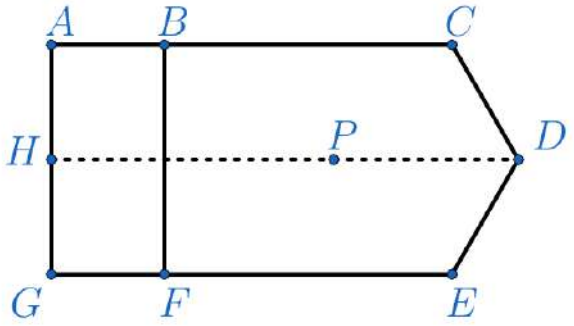


Рис. 7.4: Зависимость от $\frac{b}{a}$

Обратимся к рисунку 7.3. Оба пятиугольника имеют горизонтальную ось симметрии, то есть их центры C_1 и C_2 лежат где-то на отрезках A_1B_1 и A_2B_2. В силу равенства фигур, отрезки A_1C_1 и A_2C_2 равны. Также равны отрезки A_2C_1 и A_1C_2. Стало быть, $A_2C_2A_1C_1$ – параллелограмм. Необходимым условием миграционной стабильности является перпендикулярность диагоналей этого параллелограмма, но тогда он должен быть ромбом. Далее, $\angle A_2A_1C_1 = 60°$, так что $\angle A_1C_1C_2 = 30°$. Отсюда угол при вершине C_1 составляет $60°$, то есть треугольник $A_2C_1A_1$ – равносторонний.

Покажем, что такое может выполняться только при одном соотношении на a и b. Более конкретно, покажем, что величина угла $A_1A_2C_1$ с рисунка 7.3 является строго монотонной функцией от $\frac{b}{a}$ и принимает значения как меньше, так и больше $60°$. А именно, при фиксированном значении a рассмотрим для параметра b значения b_1 и b_2, причём $b_1 < b_2$. Пусть $\mathcal{M} = BCDEF$ – пятиугольник с $BC = b_1$ и медианой P, расширенный до $\mathcal{M}' = ACDEG$ с $AC = b_2$ (см. рисунок 7.4). По лемме 5.2, медиана P' расширенного многоугольника отличается от P, но по лемме 3.1 P' по-прежнему лежит на HD, где H – середина AG. Покажем, что на самом деле P' лежит на отрезке PH (отсюда и следует строгая монотонность угла DCP). Именно, если P' лежит на PD (и не совпадает с P), то $e(P', \mathcal{M}') = e(P', \mathcal{M}) + e(P', ABFG) > e(P, \mathcal{M}) + e(P, ABFG) = e(P, \mathcal{M}')$. Здесь отражено то, что P является медианой для многоугольника $\mathcal{M}$, и потому её интегральные издержки меньше таковых для P'. Также точка P находится ближе ко всем точкам прямоугольника $ABFG$, чем P'. Так, P' не может быть центром. Наконец, при $b = 0$, пятиугольник вырождается в треугольник, а угол DCP становится меньше $30°$. При неограниченном росте b при фиксированном a пятиугольник становится всё больше похож на прямоугольник, вклад треугольника CDE становится всё незначительнее, так

что медиана стремится к медиане прямоугольника, а угол DCP – к $75°$. Итак, лишь при одном соотношении $\frac{b}{a}$ желанный угол может составлять $60°$.

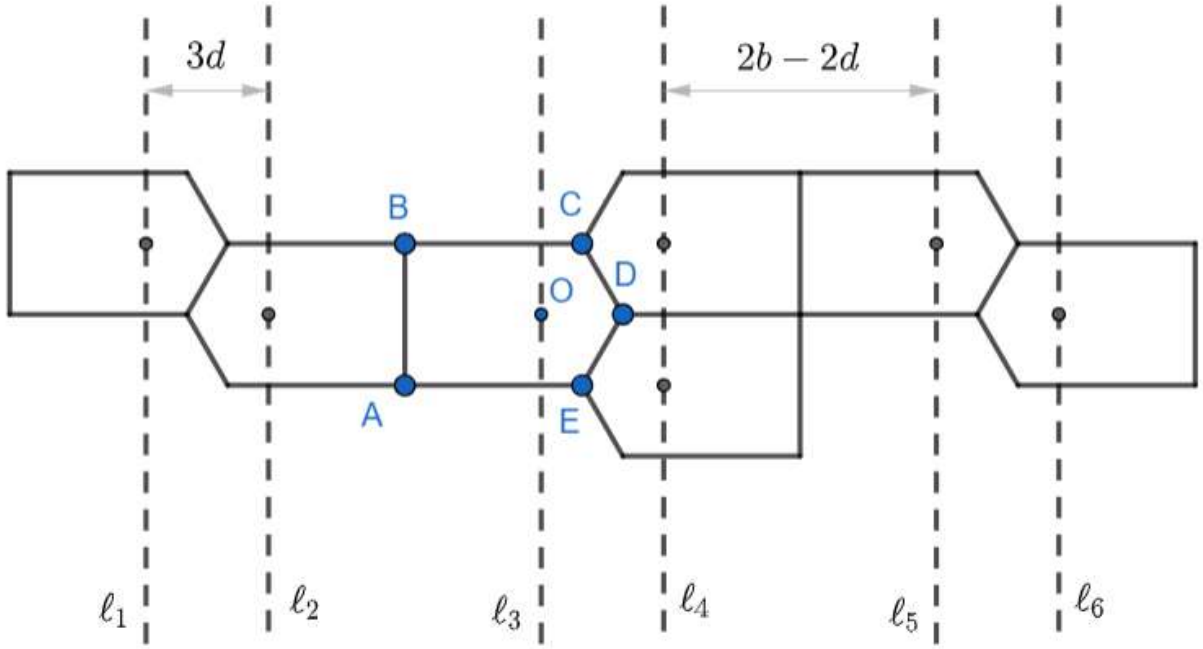


Рис. 7.5: Сетка центров

Таким образом, установлено, что только для одного соотношения на a и b (алгебраический вид которого будет уточнён ниже) данное замощение может быть устойчивым. Покажем сначала, что миграционная стабильность действительно имеет место. Обратимся к рисунку 7.5. Пусть $2d$ – длина отрезка OC, то есть сторона равностороннего треугольника из рассуждения выше. Тогда все центры лежат на пунктирных прямых, расстояния между которыми чередуются: $3d, 2b - 2d$. Покажем, что для вершин B, C, D ни одна из этих прямых не является привлекательной, то есть все вершины устойчивы (вершины A и E – симметрично).

Итак, расстояние от D до ближайшего центра составляет $2d$. Расстояние до ℓ_6 составляет $d + (2b - 2d) + 3d = 2b + 2d \geqslant 2d$. Значит, D не хочет сбежать на прямые правее ℓ_5. Аналогично, расстояние от D до ℓ_2 составляет $2d + (2b - 2d) = 2b \geqslant 2d$, так как $b \geqslant d$. Таким образом, точка D может быть заинтересована перебежать только на прямые ℓ_3, ℓ_4, ℓ_5. Легко однако убедиться, что D никуда не сбежит: расстояние до ℓ_3 равно $2d$, расстояние до ℓ_4 равно d, но центры на ней расположены с таким шагом, что минимальное расстояние от D до любого центра на этой прямой – ровно $2d$. Наконец, центры на ℓ_5 расположены так же, как и на ℓ_4, но она находится дальше от D, так что угрозы не представляет. Итак, точка D – стабильна.

Аналогичными рассуждениями легко понять, что для C потенциальные угрозы лежат только на ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4, но все такие угрозы устранены выбором соотношения на a и

b. Наконец, расстояние от B до точки O не превосходит $b+2d$ (из треугольника BCO), поэтому угрозы могут быть только на прямых ℓ_2 и ℓ_3, но их нет ввиду симметрии. Таким образом, полученное замощение действительно стабильно.

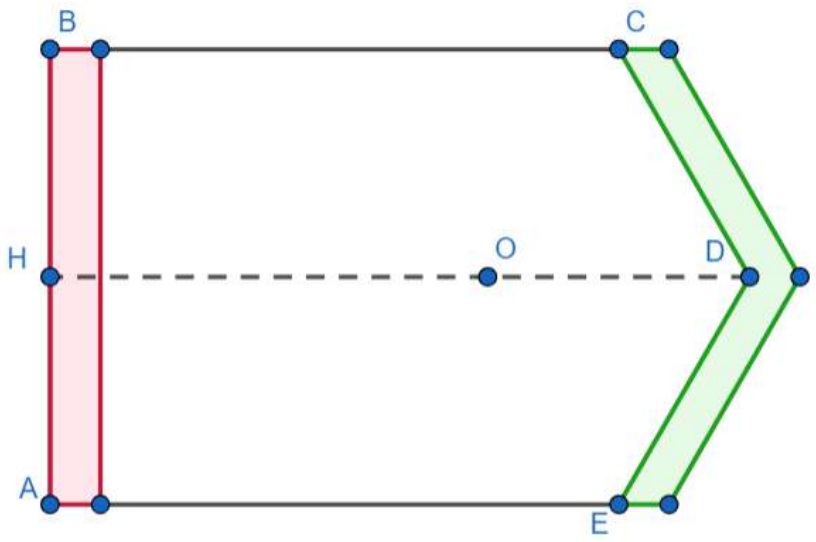


Рис. 7.6: Сдвиг пятиугольника

Найдём точное соотношение на a и b. Для этого надо установить (см. рисунок 7.6), когда производная $e(x)$ по направлению DH обращается в ноль. Рассуждения ниже похожи на рассуждения из теоремы 2.6 о дифференцируемости функции e. Сдвиг центра O в сторону вершины H на расстояние δ эквивалентен сдвигу всего пятиугольника на δ в противоположную сторону. Для равенства производной нулю интегралы по цветным (красной и зелёной) областям должны совпадать (с точностью до малых второго порядка по δ).

Если треугольник CDO – равносторонний, то длина CD есть $\frac{a}{\sqrt{3}}$, а расстояние от O до AB составляет $b-\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Тогда интеграл по красной области (с точностью до малых второго порядка по δ) равен $2\delta\cdot\psi\left(b-\frac{a}{2\sqrt{3}},\frac{a}{2}\right)$. В зелёной области высота треугольника CDO, опущенная на CD имеет длину $\frac{a}{2}$, так что интеграл равен $4\delta'\cdot\psi\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$, где δ' – ширина полоски, то есть $\delta'=\delta\cdot cos(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\delta$.

Итак, стабильность достигается при выполнении равенства

$$2\delta\psi\left(b-\frac{a}{2\sqrt{3}},\frac{a}{2}\right)=4\frac{\sqrt{3}}{2}\delta\psi\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2\sqrt{3}}\right).$$

Обозначая $h=b-\frac{a}{2\sqrt{3}}$ и расписывая ψ через F, придём к равенству

$$h^2\cdot F\left(\frac{a}{2h}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Наконец, если $t=\frac{a}{2h}$, то $F(t)=\sqrt{3}F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot t^2$. Свободный сервис решения уравнений www.wolframalpha.com находит $t\approx 1.122$. В исходных обозначениях

$b = a\frac{\sqrt{3}+t}{2\sqrt{3}t} \approx 0.73a$.

Резюмируя, при $b \approx 0.73a$ полученное замощение будет миграционно устойчивым.

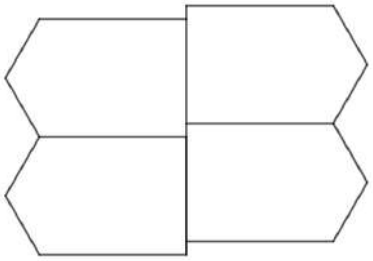


Рис. 7.7: Нестабильное замощение

Пример 7.2. В миграционно устойчивом замощении в примере 7.1 не имеют места сдвиги полос. То есть если стыки пятиугольников идут не ребро в ребро (см. рисунок 7.7), то устойчивости быть не может. Это немедленно следует из теоремы 3.10.

Пример 7.3. Мозаики Пенроуза нестабильны. Первые две из них содержат невыпуклые фигуры, но состоят только из многоугольников, так что автоматически не могут быть устойчивыми. Третья же мозаика состоит из ромбов с одинаковыми сторонами, но наименьшими углами 36° и 72°, чьи площади, конечно, неравны. Стало быть, такое замощение неоднородно, значит, неустойчиво.

8 Итоги и дальнейшая работа

В этой работе мы привели несколько примеров простых устойчивых замощений: теоремы 6.2 и 6.3, пример 7.1. Отсюда же можно получить множество простых неустойчивых замощений.

Следствие 4.5 говорит о том, что неоднородное замощение многоугольниками всегда нестабильно. Неоднородное замощение приведено в примере 7.3.

Открытый вопрос сформулирован в виде гипотезы 5.10 об отсутствии составных однородных стабильных замощений. Однако в теоремах 5.7 и 5.8 показывается, что такие замощения определённого вида не существуют. Примером составного однородного неустойчивого замощения может служить разбиение плоскости на полосы, каждая из которых заполнена прямоугольниками или одинаковыми равнобедренными треугольниками.

Разумеется, было бы интересно доказать или опровергнуть выдвинутые гипотезы: 4.7, 5.9 и 5.10, которые не удалось доказать в рамках настоящей работы.

Естественным обобщением стало бы изучение устойчивости в общем случае из определения 2.7, то есть изучение вопроса существования какого-либо семейства функций $\{\gamma_j(\cdot) \mid j \in J\}$ для достижения стабильности.

Другое направление работы связано с введением плотности расселения агентов на плоскости. Данная работа изучает только равномерное расселение, в то время как введение дополнительной функции расселения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ позволяет моделировать более сложное устройство жизни на плоскости. В этом случае функция транспортных издержек превращается в $e(x, S) = \int\limits_{t \in S} \rho(x, t) \cdot f(t)\, dt$, мера множества изменяется на $|S| = \int\limits_S f(t)\, dt$, а в определении 2.7 интеграл заменяется на $\int\limits_S \gamma_i(x) \cdot f(x)\, dx$.

Также можно изучать ε-устойчивость, вывести, для каких точек достаточно проверить стабильность (как в случае $\varepsilon = 0$ доказано, что достаточно проверить стабильность вершин в теореме 3.13).

При таких обобщениях можно так же, как и в настоящей работе, изучать взаимосвязь стабильности, однородности и простоты.

Список литературы

[1] Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. – Москва, МФТИ, 2010. – 559 с.

[2] Гервер М.Л. Теоремы о разбиениях на многоугольники // Матем. сб. – 2003. – Т. 194. – №. 6. – С. 87–104.

[3] Панов П.А. О геометрической медиане выпуклых, а также треугольных и других многоугольных областей // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2018. – Т. 26. – С. 62–75.

[4] Панов П.А., Савватеев А.В. О геометрической медиане треугольной области и других медианоподобных точках, 2018 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/1811.07306.pdf, свободный.

[5] Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 416 с.

[6] Савватеев А.В. Задача многомерного размещения и её приложения: теоретико-игровой подход: диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. – Москва, РАН, 2013.

[7] Bajaj C. Proving geometric algorithm non-solvability: An application of factoring polynomials // Journal of Symbolic Computation. – 1986. – Т. 2. – №. 1. – С. 99-102.

[8] Drèze, J., Le Breton, M., Savvateev, A. and Weber S. “Almost” subsidy-free spatial pricing in a multi-dimensional setting // Journal of Economic Theory. – 2008. – Т. 143. – №. 1. – С. 275-291.

[9] Fulton C. Tessellations // The American Mathematical Monthly. – 1992. – Т. 99. – №. 5. – С. 442-445.

[10] Haimovich M., Magnanti T. L. Extremum properties of hexagonal partitioning and the uniform distribution in Euclidean location // SIAM journal on discrete mathematics. – 1988. – Т. 1. – №. 1. – С. 50-64.

[11] Niven I. Convex Polygons that Cannot Tile the Plane // The American Mathematical Monthly. – 1978. – Т. 85. – №. 10. – С. 785-792.

[12] Rao M. Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane, 2017 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://perso.ens-lyon.fr/michael.rao/publi/penta.pdf, свободный.

[13] Reinhardt K. Über die Zerlegung der Ebene in Polygone. – Inaugural-Disstertation, Univ. Frankfurt a.M. – R. Noske, Borna and Leipzig. – 1918.

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Ткачук Елизаветы Алексеевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Вычисление меры максимальной энтропии» являются: Вычисление меры методом максимальной энтропии.
Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 20 октября 2019 года по 15 марта 2020 года мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google по следующим ключевым словам: динамическая система, локализация цепно-рекуррентного множества, алгоритм Тарьяна поиска компонент сильной связности, энтропия динамической системы, инвариантная мера, нахождение собственного значения и собственного вектора для матрицы больших размеров. В выдаче поисковиков было исследовано 7 статей, 2 монографии, 4 веб-ресурса (список см. в приложении 1 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Осипенко Георгием Сергеевичем, доктором физико-математических наук, профессором Филиала МГУ в г. Севастополе.
- Проведено заочное участие в научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020» с публикацией тезисов в сборнике материалов в секции «ЕСТЕСТВЕННЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ: Фундаментальная и прикладная математика» на тему «Вычисление меры максимальной энтропии». Сборник доступен по ссылке https://sev.msu.ru/nauchnye-konferencii/ (Ломоносов-2020).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором, предоставляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась 28.05.2020 года на оценку «отлично». На Смотр представлен текст работы.

Ткачук Елизавета Алексеевна

29 мая 2020
г. Севастополь, Россия

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЛИАЛ МГУ В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

Направление подготовки: 01.03.02

«Прикладная математика и информатика», квалификация «бакалавр»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕРЫ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Выполнила: Ткачук Елизавета Алексеевна

студентка учебной группы ПМ-401

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь

2020

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ 3
ВВЕДЕНИЕ 4
РАЗДЕЛ I ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 6
РАЗДЕЛ II ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ 10
2. 1 Построение меры, приближенной к инвариантной 10
2.2 Метод построение потока на графе, основанный на использовании семейства периодических путей 13
2.3 Метод балансировки 14
РАЗДЕЛ III ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 19
3.1 Построение символического образа 19
3.2 Выделение классов эквивалентности возвратных вершин 20
3.3 Локализация цепно-рекуррентного множества 21
3.4 Построение инвариантной меры и вычисление энтропии 22
РАЗДЕЛ IV ОПИСАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ 25
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 40
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ 41
ПРИЛОЖЕНИЯ 43

АННОТАЦИЯ

В данной работе описываются построение символического образа динамической системы, выделение классов эквивалентности, локализация цепно-рекуррентного множества, различные способы вычисления инвариантной меры динамической системы и вычисления энтропии.

Инвариантная мера – одна из важнейших характеристик динамической системы.

ВВЕДЕНИЕ

В наше время математической моделирование обретает все большую популярность, при помощи исследования математической модели некоторого объекта можно предсказать его поведение в реальности. Компьютерное моделирование – один из инструментов математического моделирования, оно позволяет представлять реальный объект с помощью программных средств, производить различные вычисления. Благодаря описанным методам решаются многие современные задачи во всех областях нашей жизни.

Одной из видов математических моделей является динамическая система. Основателями теории динамических систем считают А. Пуанкаре и А. М. Ляпунов, она зародилась в конце 19 в.-начале 20 в, когда был выявлен и исследован класс задач, в которых необходимо знать поведение не только одного отдельно взятого решения системы обыкновенных уравнений, а всех (или почти всех) решений, которые в свою очередь соответствуют разным начальным состояниям некоторой реальной системы.

Изучением теории динамических систем активно занимаются достаточно большое число современных ученых. Так в работах доктора физико-математических наук Осипенко Г. С., Ампиловой Н. Б., Петренко Е. И. описываются хорошие методы решения задач анализа динамических систем.

Так была создана и развита, и развивается в наше время глубокая теория динамических систем, которая дает верные представления о природе детерминистских процессов и позволяет исследовать многие модели реальных процессов и объектов.

Цель данной работы заключается в вычислении инвариантной меры, для которой энтропия будет максимальной, а также реализации компьютерной программы, которая выполняет данную задачу с возможностью визуального представления символического образа дискретной динамической системы и её инвариантной меры.

Объект исследования – дискретная динамическая система. Предмет исследования – инвариантная мера.

Актуальность работы состоит в том, что инвариантная мера дискретной динамической системы даёт статистические характеристики расположения траектории.

РАЗДЕЛ I
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поставленная задача – создать программный продукт для вычисления инвариантной меры максимальной энтропии.

Раскроем смысл понятий, которые будут использоваться в работе.

Определение 1.1. Динамическая система — множество элементов, для которого задана функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве каждого элемента системы. Различают системы с дискретным временем и системы с непрерывным временем. Дискретная динамическая система задается разностным уравнением:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1.1}$$

где f – гомеоморфизм (т. е. f есть непрерывное отображение и существует обратное отображение f^{-1}, которое является непрерывным) $f: M \to M$, M является ограниченной замкнутой областью в R^d или компактным многообразием [1, с. 8]. Эволюция состояния системы определяется последовательностью точек $\{x_n | x_{n+1} = f(x_n), n \in \boldsymbol{Z}\}$, именуемой траекторией или орбитой точки x_0.

Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ – конечное покрытие многообразия M замкнутыми подмножествами, множество $M(i)$ будем называть ячейкой индекса i.

Определение 1.2. [1, с. 18] Символический образ динамической системы (1.1) для покрытия C – ориентированный граф G с вершинами $\{i\}$, соответствующими ячейкам $\{M(i)\}$. Вершины i и j связаны дугой $i \to j$ тогда и только тогда, когда

$$f\big(M(i)\big) \cap M(j) \neq \emptyset.$$

Определение 1.3. Мера – это отображение вида $\mu: A \to \mu(A)$, где A – измеримое множество, для которого выполняется:

1) $\mu(A) \geq 0$;

2) $\mu(A_1 + A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Мера μ называется инвариантной для системы $x_{n+1} = f(x_n)$, если выполнено равенство $\mu(A) = \mu\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(f(A))$ [1, с. 75], то есть мера сохраняется при итерировании.

В теории динамических систем, энтропия динамической системы — число, выражающее степень хаотичности её траекторий. Различают метрическую энтропию и топологическую энтропию. Первая описывает хаотичность динамики в системе с инвариантной мерой для случайного выбора начального условия по этой мере, а вторая – хаотичность динамики без предположения о законе выбора начальной точки.

Пусть f – непрерывное отображение, $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ – открытое покрытие многообразия M. Пусть есть последовательность чисел $w = w_1 w_2 \dots w_N$, где w_k – целое число от 1 до n, N – целое положительное. Построим пересечение $M(w) = M(w_1) \cap f^{-1}\left(M(w_2)\right) \cap \dots \cap f^{-N+1}\left(M(w_N)\right)$ – открытое множество. Последовательность w кодирует отрезок траектории $\{f^k(x), k = \overline{0,\ N-1}\}$. $\{w\}$ – все допустимые кодировки длины N, $C^N = \{M(w)\}$ – семейство множеств, которое образует конечное покрытие. C_N – конечное подпокрытие, выделенное из C^N, минимальное по числу элементов. $|C_N|$ - число элементов в C_N.

Согласно лемме Полиа, существует данный предел $H(C) = \lim_{N\to\infty} \frac{\log|C_N|}{N}$ [3, с. 6].

Определение 1.4. Топологической энтропией отображения $f: M \to M$ называется число $h(f) = \sup_C H(C)$, где верхняя грань берется по всем открытым покрытиям C [3, с. 6].

Также энтропия отображения определяется как $h(f) = \lim_{n\to\infty} H(C_n)$ [3, с. 7].

Пусть μ – нормированная инвариантная мера гомеоморфизма $f: M \to M$ и $C = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ – измеримое разбиение многообразия M.

Определение 1.5. Энтропия разбиения C находится как

$$H(C) = -\sum_i \mu(A_i) \ln \mu(A_i).$$

Пусть C^N – покрытие, которое состоит из непустых пересечений вида $A_{i_1} \cap f^{-1}(A_{i_2}) \cap \ldots \cap f^{-N+1}(A_{i_N})$.

Определение 1.6. [3, с. 16] Метрическая энтропия отображения f для покрытия C находится как

$$H(f, C) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} H(C^N).$$

Существование предела следует из теоремы Полиа.

Определение 1.7. Энтропия отображение f для инвариантной меры μ есть $h(f, \mu) = \sup_C H(f, C)$, где верхняя грань берется по всем измеримым конечным разбиениям [3, с. 16].

Топологическая энтропия есть верхняя грань метрических энтропий $h(f) = \sup_\mu h(f, \mu)$ [3, с. 17].

Определение 1.8. Матрица инцидентности (смежности или допустимых переходов) $\Pi = (\pi_{ij})$, однозначно определяющая ориентированный граф G, называется квадратная матрица, размерностью $n \times n$, где n – число вершин графа G, такая, что

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если существует ориентированная дуга } i \to j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}.$$

Пусть b_n – число допустимых на G путей длины n.

Определение 1.9. Энтропией графа G называется число $h(G) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln b_n}{n}$.

Также по теореме 3 из [3, с. 10] энтропия графа G равна логарифму максимального собственного числа матрицы допустимых переходов $h(G) = \ln \lambda$. Существование такого максимального λ обеспечивается теоремой Перрона-Фробениуса [3, с. 9].

Для построения меры максимальной энтропии было использовано отображение Жюлиа. Множество Жюлиа полинома $f(z) = z^2 + c$ – это такое подмножество множества комплексных чисел, для каждой точки которого поведение функции под действием итераций является хаотичным, т.е. не-

большие изменения в начальных условиях в некоторой небольшой окрестности начальной точки значительно влияют на траекторию. Данное множество названо именем французского математика Гастона Жюлиа, положившего начало исследованию голоморфной динамики в начале XX века.

В двумерном случае данное отображение задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + a \\ 2xy + b \end{pmatrix}.$$

РАЗДЕЛ II
ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ

2. 1 Построение меры, приближенной к инвариантной

Согласно определению 1.3 мера μ на M инвариантна для гомеоморфизма $f: M \to M$ компактного многообразия M, если для любого измеримого множества $A \subset M$ выполняется равенство:

$$\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(A) = \mu\left(f(A)\right).$$

Теорема Крылова-Боголюбова [8, 9] гарантирует существование инвариантной меры μ, которая является нормированной на M: $\mu(M) = 1$.

Пусть $\mathcal{M}(f)$ – множество всех -инвариантных нормированных мер. Любая – инвариантная мера μ и множество $\mathcal{M}(f)$ могут быть построены с помощью последовательности символических образов, причем диаметр покрытий сходится к нулю. Покажем это.

Если μ_1, μ_2 лежат в $\mathcal{M}(f)$, $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$, то

$$\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \qquad (2.1)$$

также лежит в $\mathcal{M}(f)$. Это значит, что мера μ является суммой мер μ_1 и μ_2.

Мера μ эргодична, если для любого инвариантного измеримого множества A или $\mu(A) = 0$, или $\mu(M \backslash A) = 0$. Точка μ выпуклого компакта $\mathcal{M}(f)$ называется крайней, если ее нельзя представить как (2.1), где $\mu_1 \neq \mu_2$. В [8, с. 149, лемма 4.1.10] показывается, что крайние точки выпуклого множества $\mathcal{M}(f)$ есть эргодические меры.

Далее будет строиться всё множество инвариантных мер $\mathcal{M}(f)$, причем данная техника позволяет строить индивидуальную инвариантную меру, которая, возможно, будет наделена некоторыми особенными свойствами.

Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ – конечное покрытие области M, G – символический образ. Определим на дугах G вероятностное распределение m_{ij}, обладающее некоторыми свойствами инвариантности. Оно дает возможность приписать меру ячейкам и получить приближение к инвариантной мере.

Множество всех распределений $\{m = (m_{ij})\}$ на G образует выпуклый многогранник $\mathcal{M}(G)$, являющийся приближением для множества инвариантных мер $\mathcal{M}(f)$. Далее рассматривается последовательность подразбиений исходного разбиения и максимальный диаметр ячеек устремляется к нулю. Таким образом получается последовательность символических образов $\{G_k\}$, на них определена последовательность распределений $\{\mathcal{M}_k\}$. Перейдя к пределу по k, получается искомое семейство мер $\mathcal{M}(f)$ [2, с. 53].

Если фиксировать распределение m_k на каждом символическом зе G_k, то существует последовательность $\{m_{k_m}\}$, сходящаяся к инвариантной мере μ. Кроме того, с помощью описанного предельного перехода может быть получена любая инвариантная мера.

Пусть -инвариантная нормированная мера μ существует на многообразии M и ячейки покрытия C являются многогранниками, которые пересекаются по граничным дискам; при построении разбиения C^* граничные диски будут приписываться к одной из соседних ячеек. Поэтому можно приписать меру каждой дуге $i \to j$ графа G:

$$m_{ij} = \mu(M(i) \cap f^{-1}))) = \mu(f(M(i)) \cap M(j)).$$

Данное равенство и равенства, представленные ниже, вытекают из инвариантности меры μ:

$$\sum_k m_{ki} = \sum_k \mu(f(M(k)) \cap M(i))) = \mu\big(M(i)\big) = \sum_j \mu(M(i) \cap f^{-1}(M(j))) =$$
$$= \sum_j m_{ij}.$$

$\sum_k m_{ki}$ – поток, входящий в вершину i, $\sum_j m_{ij}$ – исходящий из i поток. Равенство этих потоков есть закон Киргофа, по которому входящий и исходящий потоки равны. Также распределение m_{ij} является нормированным или вероятностным.

Следовательно, существование инвариантной меры μ порождает на G распределение m_{ij}, удовлетворяющее равенствам:

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}$$

и

$$\sum_{ij} m_{ij} = \mu(M) = 1.$$

Отсюда получим определение потока.

Определение 2.1. Пусть G – ориентированный граф, тогда поток на G есть распределение $\{m_{ij}\}$ на дугах $\{i \to j\}$, для которого выполняются следующие условия:

- $m_{ij} \geq 0$;
- $\sum_{ij} m_{ij} = 1$ или $m(G) = 1$;
- $\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}, \forall$вершины i.

Итак, было показано, что по инвариантной мере строится поток на символическом образе. Проведем обратную операцию.

Пусть G – символический образ, на котором определен поток $m = \{m_{ij}\}$. Можно определить меру μ на области M:

$$\mu(A) = \sum_i \frac{m_i v\big(A \cap M(i)\big)}{v\big(M(i)\big)},$$

v – нормированная на М мера Лебега; мера Лебега каждой ячейки отлична от нуля, в то время как мера пересечения двух разных ячеек напротив равна нулю, то есть:

$$v\big(M(i)\big) \neq 0 \text{ и } v\big(M(i) \cap M(j)\big) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

При выполнении данных условий мера ячейки $M(i)$ равна мере вершины i:

$$\mu\big(M(i)\big) = m_i.$$

Полученная мера граничных дисков равна нулю и мера ячейки не зависит от того, принадлежат ли граничные диски ей или нет – это следует из того, что v – мера Лебега.

Построенная мера μ есть приближение к инвариантной мере при стремлении максимального диаметра ячеек к нулю.

Также есть и иной способ построения меры на многообразии: в каждой ячейке $M(i)$ фиксируется точка $x(i)$, не принадлежащая другим ячейкам: $\{m_{ij}\}$ – поток на G. Мера вершины i:

$$m_i = \sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}.$$

μ^* – мера, сосредоточенная в точках $x(i)$:

$$\mu^* = \sum_i m_i \delta\big(x(i)\big),$$

$\delta(x(i))$ – стандартная дельта-мера, сосредоточенная в точке $x(i)$. Значит:

$$\mu^*(A) = \sum_{x(i)\in A} m_i.$$

В [2] показано, что данная мера сходится к инвариантной мере при стремлении диаметра ячейки к нулю.

2.2 Метод построение потока на графе, основанный на использовании семейства периодических путей

Пусть на графе G существует семейство периодических путей $w_1, w_2, \dots, w_r$ с периодами $p_1, p_2, \dots, p_r$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ такие, что $\alpha_t \geq 0$, $\sum_t \alpha_t = 1$. Тогда на графе G имеется такой поток m, что

$$m_{it} = \sum_{t=1}^{r} \alpha_t \frac{k_{ij}^t}{p_t},$$

где k_{ij}^t – число проходов пути w_t через дугу $i \to j$ [2, Утверждение 10, с. 65].

Любой поток из $\mathcal{M}(G)$ может быть построен данным способом, что следует из [2, Теорема 7, с. 73]

2.3 Метод балансировки

Данный метод был разработан в 40-х годах XX века архитектором Г. В. Шелейховским при проектировании станций метро в Ленинграде. С помощью данного метода он решил задачу прогнозирования устойчивости расселения жителей по районам, т. е. он решил транспортную задачу с линейными ограничениями. Суть этого метода заключается в том, что, исходя из произвольного распределения, его меняют так, чтобы удовлетворялось только одно равенство, а остальные могут не выполняться. Повторяя это действ циклически, получается последовательность распределений, которая быстро сходится искомому решению. Через некоторое время Л. М. Брэгман доказал сходимость данного метода, независимость результата от порядка выбора строк и столбцов, а И. В. Романовский показал, что построенный стационарный поток максимизирует взвешенную энтропию.

Метод Шелейховского или метод балансировки позволяет сбалансировать произвольный поток на графе и получить инвариантный поток из любого неинвариантного распределения итеративным способом, обладающий некоторыми экстремальными свойствами.

Пусть $P = (p_{ij})$ – матрица, задающая произвольное распределение неотрицательных чисел на ребрах графа G. За $G(P^+) = \{i \to j \mid p_{ij} > 0\}$ обозначим множество ребер, при чем только тех, где распределение P положительно. Это множество $G(P^+) = \{i \to j \mid p_{ij} > 0\}$ называется носителем распределения P [2]. Необходимым условием существования потока на $G(P^+)$ является наличие какого-либо периодического пути в носителе.

Рассмотрим некоторый произвольный граф G, который имеет n вершин. Матрица $x = (x_{ij})$ задает поток (см. определение 2.1) на графе G тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $x_{ij} \geq 0$;
- $\sum_{ij} x_{ij} = 1$;
- $\sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki}$ для $i = \overline{1, n}$.

Важно, чтобы носитель потока лежал в $G(P^+)$, для этого должно выполняться условие: $x_{ij} = 0$ при $p_{ij} = 0$.

Матрица $x = (x_{ij})$ задается n^2 числами, поток накладывает $n + 1$ условие (т. е. всего $n + 1$ уравнений) на эти числа. Тем самым, можно сделать вывод, что имеется некоторая свобода выбора для решения экстремальной задачи.

Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 2.1. [2, с. 86] Пусть $P = (p_{ij})$ – произвольное неотрицательное распределение, для которого в носителе $G(P^+)$ содержится цикл. В этом случае существует такой поток $Q = (q_{ij})$, что его носитель $G(Q^+) \subset G(P^+)$ и сам он максимизирует функцию

$$g(x) = \sum_{ij} x_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{x_{ij}} = \sum_{ij} x_{ij} \ln p_{ij} - \sum_{ij} x_{ij} \ln x_{ij}.$$

Доказательство

d – число входящих в носитель $G(P^+)$ дуг, $d < n^2$. В случае, когда ненулевые элементы матрицы $x = (x_{ij})$ (причем $x_{ij} > 0$ при $p_{ij} > 0$, $x_{ij} = 0$ при $p_{ij} = 0$) упорядочены $(ij) \to k = \overline{1, d}$ (например, строки – в порядке возрастания сверху вниз), тогда x может рассматриваться как точка в пространстве $S = \{x \in R^d \mid x_k = x_{ij} > 0\}$. Введем обозначения:

$$B_0 = \{x \in R^d \mid x_{ij} \geq 0, \sum_{ij} x_{ij} = 1\},$$

$$B_i = \{x \in R^d \mid x_{ij} \geq 0, \sum_{j} x_{ij} = \sum_{k} x_{ki}\}, i = \overline{1, n}.$$

Пересечение $\mathrm{D} = \mathrm{B}_0 \cap_{\mathrm{i}} \mathrm{B}_{\mathrm{i}}$ лежит в замыкании $\bar{\mathrm{S}}$ и значит, функция g достигает своего максимума. Задача состоит именно в нахождении точки, в которой достигается максимум.

Пусть $f(x)$ – строго выпуклая, непрерывно дифференцируемая на выпуклом множестве $S \subset R^d$ и непрерывная на замыкании $\bar{S}$ функция. Нужно минимизировать функцию f при следующих линейных ограничениях:

$Ax = b, x \in \bar{S}$, где $b \in R^m$ и $A -$ матрица размерности d x m. Применим результаты работы [5] к $f = -g$. Линейные ограничения состоят из $n + 1$ уравнения, первое из них дает нормировку: $\sum_{ij} x_{ij} = 1$, а оставшиеся n уравнений описывают инвариантность (или иными словами, закон Кирхгофа):

$$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0, \text{где } i = \overline{1, n}.$$

Теперь рассмотрим итерационный процесс:

1 шаг – выбирается произвольная точка $x^0 \in S$;

2 шаг – если точка x^t известна, то выбирается p_t-е уравнение и находится такая точка $x^{t+1} \in B_{p_t}$ что она обязательно должна удовлетворять выбранному уравнению, но не обязательно удовлетворяет остальным уравнениям. Важно отметить, что за один цикл нужно перебрать все $n + 1$ уравнений. Полученная последовательность $\{x^t\}$ называется релаксационной последовательностью, а последовательность номеров $\{p_t\}$ – управлением релаксацией. Можно сначала решать уравнение нормировки, а потом подряд уравнения инвариантности и далее повторять весь цикл снова.

Точка x^{t+1} находится методом Лагранжа:

$$grad\, f(x^{t+1}) = grad\, f(x^t) + \lambda A_p,$$

$$\left(A_p, x^{t+1}\right) = b_p,$$

где $grad\, f$- градиент f, λ – неизвестный параметр, $\left(A_p, x^{t+1}\right)$ – скалярное произведение, где A_p – строка коэффициентов левой части -го уравнения, b_p- правая часть этого уравнения, следовательно, x^{t+1} – решение p-го уравнения.

Для функции $f(x) = -g(x) = \sum_{ij} x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{p_{ij}}$ выполняется:

$$(grad\, f(x))_{ij} = \ln \frac{x_{ij}}{p_{ij}} + p_{ij}$$

и для уравнения нормировки $\sum_{ij} x_{ij} = 1$ получается равенство:

$$\ln \frac{x_{ij}^{t+1}}{p_{ij}} = \ln \frac{x_{ij}^{t}}{p_{ij}} + \lambda,$$

$$\sum_{ij} x_{ij}^{t+1} = 1.$$

Отсюда получается преобразование нормировки:

$$x_{ij}^{t+1} = \frac{x_{ij}^{t}}{\sum_{kl} x_{kl}^{t}}. (2.2)$$

Из -го уравнения инвариантности получается система равенств:

$$\ln \frac{x_{ij}^{t+1}}{p_{ij}} = \ln \frac{x_{ij}^{t}}{p_{ij}} + \lambda,$$

$$\ln \frac{x_{ki}^{t+1}}{p_{ki}} = \ln \frac{x_{ki}^{t}}{p_{ki}} - \lambda,$$

$$\sum_{j \neq i} x_{ij}^{t+1} - \sum_{k \neq i} x_{ki}^{t+1} = 0.$$

Тогда

$$\exp \lambda = \left(\frac{\sum_{k \neq i} x_{ki}^{t}}{\sum_{j \neq i} x_{ij}^{t}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

получаются формулы преобразования:

$$x_{ij}^{t+1} = x_{ij}^{t} \left(\frac{\sum_{m \neq i} x_{mi}^{t}}{\sum_{l \neq i} x_{il}^{t}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ для } j \neq i, (2.3)$$

$$x_{ki}^{t+1} = x_{ki}^{t} \left(\frac{\sum_{l \neq i} x_{il}^{t}}{\sum_{m \neq i} x_{mi}^{t}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ для } k \neq i, (2.4)$$

причем

$$x_{ii}^{t+1} = x_{ii}^{t}. (2.5)$$

Формулы (2.3), (2.4), (2.5) описывают преобразование элементов -й строки и i-го столбца, другие элементы не меняются.

Согласно работе [5], полученная последовательность имеет предел, если функция $D(x, y) = \sum_{ij} p_{ij}(y_{ij} - x_{ij}) + \sum_{ij} x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{y_{ij}}$ является такой, что $D(x, y_k) \to 0$, при $y_k \to x, x \in \bar{S}$ и $y_k \in S$.

В этом случае предел зависит только от начального значения x^0. Чтобы предельное значение $Q = \lim_{t\to\infty} x^t$ решало рассматриваемую экстремальную задачу, достаточно взять $x_{ij}^0 = p_{ij}\exp(-1)$. С учетом нормировки, итерационный процесс начинается с $x_{ij}^0 = p_{ij}$.

Теорема доказана.

Данное доказательство дает формулы (2.2), (2.3), (2.4) и (2.5), по которым, итерируя матрицу допустимых переходов до тех пор, пока ее элементы не будут соответствовать условиям потока:

- $m_{ij} \geq 0$;
- $\sum_{ij} m_{ij} = 1$;
- $\sum_j m_{ij} = \sum_k m$ для $\forall i$,

построим инвариантную меру.

РАЗДЕЛ III
ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В данной работе ставятся следующие задачи, которые ведут к достижению поставленной цели:

1. Построение символического образа;
2. Выделение классов эквивалентности возвратных вершин;
3. Локализация цепно-рекуррентного множества;
4. Построение инвариантной меры и вычисление энтропии.

Рассмотрим каждую задачу более детально.

3.1 Построение символического образа

Построение символического образа основано на построении образа ячейки. Существует несколько способов его построения. В данной работе был использован так называемый точечный метод. Его идея заключается в том, что изначально прямоугольная область, которая задается координатами верхнего правого и нижнего левого углов, разбивается на ячейки: указывается ширина и высота каждой ячейки. Далее в каждой ячейке равномерно берутся n точек. К каждой полученной точке применяется некоторое отображение. В данной работе для этого используется отображение Жюлиа, которое описывалось ранее в Разделе I. Образом ячейки называется набор ячеек, в которые попали образы равномерно брошенных точек (рис. 3.1, [6]):

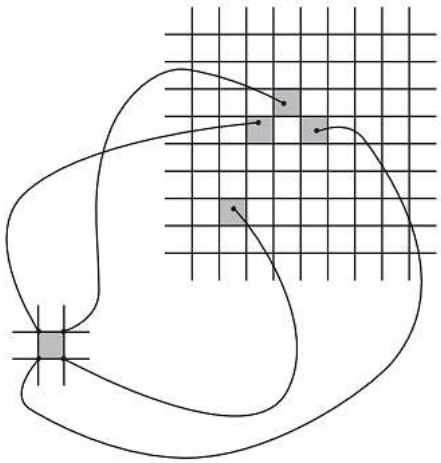


Рис. 3.1 Построение образа ячейки

Важно отметить, что результат, а также время работы метода зависит от выбора значения количества точек в одной ячейке.

Далее строится символический образ (определение 1.2 Раздела I). Символический образ представляет собой ориентированный граф.

Ориентированный граф однозначно описывается матрицей допустимых переходов (определение 1.8 Раздела I).

Существование дуги i → j гарантирует существование точки x в ячейке $m(i)$ такой, что ее образ $f(x)$ лежит в ячейке $m(j)$. Если дуги $i \to j$ не существует, то нет точки $x \in m(i)$, образ которой $f(x)$ находился бы в $m(j)$.

Символический образ можно рассматривать как конечную дискретную аппроксимацию динамической системы, причем более мелкое покрытие порождает более точную аппроксимацию. С помощью процесса последовательного подразбиения элементов покрытия можно строить последовательность символических образов и, тем самым, уточнять структурные характеристики системы.

3.2 Выделение классов эквивалентности возвратных вершин

Определение 3.1. Вершина символического образа называется возвратной, если существует периодический путь, проходящий через нее.

Определение 3.2. Две вершины символического образа называются эквивалентными, если существует периодический путь, проходящий через них.

Определение 3.3. Две вершины символического образа называют сильно связными, если существуют пути из первой во вторую и наоборот.

Согласно определениям, множество возвратных вершин разбивается на несколько классов эквивалентности. Ясно, что каждый периодический путь ξ находится в некотором классе, который однозначно определяется по ξ.

Задача нахождения этих классов эквивалентности возвратных вершин на символическом образе есть задача нахождения компонент сильной связности на ориентированном графе. Для решения поставленной задачи используется алгоритм Тарьяна [7], который обладает достаточно хорошей оценкой

сложности: $O(n+m)$, где n – количество узлов, m – количество ребер. Данный алгоритм позволяет выделять компоненты сильной связности в неориентированном графе.

Алгоритм основан на том, что вершины рассматриваются в обратном топологическом порядке, поэтому в конце рекурсивной функции для исходной вершины не будет встречено ни одной вершины из той же сильной компоненты, так как все вершины, достижимые из исходной, уже обработаны.

Обратные связи в дереве дают второй путь из одной вершины в другую и связывают сильные компоненты.

Алгоритм Тарьяна – вариация алгоритма поиска в глубину. Посещение вершины происходит при движении от корня к листьям, а окончание обработки вершины — на обратном пути. При посещении вершины она проталкивается во вспомогательный стек, а выталкивается при окончании обработки.

Кроме дополнительного стека используются следующие векторы: в векторе id хранятся индексы компонент связности всех вершин, в векторе low – вершина с наименьшим номером в прямом порядке обхода, достижимой из каждой вершины через последовательность прямых путей, а в векторе pre – момент времени посещения вершины.

После посещения вершины, она помещается в стек, после ее обработки она выталкивается из него. На обратном обходе графа для его вершины v проверяется равенство $pre[v] = low[v]$: если оно выполняется, то данная вершина, а также вершины, выше ее, выталкиваются из стека и всем им присваивается номер следующей компоненты сильной связности.

На выходе получается множество наборов индексов вершин графа – компоненты сильной связности.

3.3 Локализация цепно-рекуррентного множества

После того, как были выделены компоненты сильной связности, можно перейти к задаче локализации цепно-рекуррентного множества.

Отметим, что если множество возвратных вершин пустое, значит, локализуемое цепно-рекуррентное множество является пустым и процесс его локализации прекращается. Иначе происходит построение подразбиения $M(i)$, т.е. ячейки, в которых вершины являются возвратными, подвергаются разбиению, а остальные ячейки выбрасываются; таким образом, определяется новое покрытие. Далее для полученного покрытия строится символический образ. Если размеры получившихся ячеек недостаточно малы, то повторяются операции выделения классов эквивалентности возвратных вершин и локализации цепно-рекуррентного множества.

Стоит отметить, что выбрасывание невозвратных вершин является важной, так как в противном случае получается слишком большое количество ячеек, которые в дальнейшем все подвергаются обработке, что, несомненно, сказывается на скорости работы программы, делая ее медленнее во много раз.

3.4 Построение инвариантной меры и вычисление энтропии

После того, как размеры полученных ячеек стали достаточно малы, можно начать построение инвариантной меры и вычисление энтропии.

Пусть $\Pi = (\pi_{ij})$ – матрица допустимых переходов, размерности $n \times n$, причем $n \to \infty$. Из определения 1.8 следует, что матрица П состоит только из 0 и 1.

Далее, итерационным методом будем находить максимальное собственное значение λ_{max} и соответствующий ему собственный вектор v. Как упоминалось выше, в Разделе I, существование максимального собственного значения λ_{max} обеспечивается теоремой Перрона-Фробениуса.

Находить собственное значение будем с помощью метода степенных итераций, предложенного в 1929 году Рихардом фон Мизесом и Полячек-Герингером [10].

Возьмем некоторый вектор v_0, размерности $n \times 1$ и строим $v_1 = \Pi v_0$. После этого выполним нормировку вектора v_1 (это необходимо, так как длина вектора с каждой итерацией будет постепенно расти):

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|}.$$

Далее снова построим $v_2 = \Pi e_1$, выполним нормировку v_2 и т. д.

Будем проводить данные действия k раз. При достаточно большом k, то есть при $k \to \infty$ получим, что $\lambda_{max} = \frac{e_k^T \Pi e_k}{e_k^T e_k}$.

Обозначим найденный на k-той итерации вектор e_k как e.

По найденным λ_{max} и e можем вычислить меру и энтропию.

Как уже упоминалось ранее, было получено цепно-рекуррентное множество. Оно представляет собой набор ячеек. Каждая ячейка имеет свой номер. По этому номеру можно однозначно найти координаты ячейки (i, j).

Для каждой ячейки вычислим меру:

$$m_{ij} = \frac{\pi_{ij} e_j}{\lambda_{max}},$$

где e_j - j-тая координата вектора e.

После этого просуммируем полученные m_{ij} и получим искомую меру m_i ячейки i:

$$m_i = \sum_j m_{ij}.$$

Если изобразить схематично, то m_i – объем параллелепипеда, в основании которого лежит i-тая ячейка (Рис. 3.2).

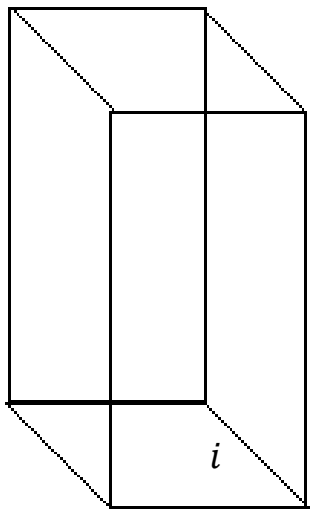


Рис. 2. Мера – объем параллелепипеда

Мера оценивает, какую часть времени траектория (определение 1.1 Раздела I) конкретной динамической системы пребывает в данной ячейке.

Энтропия находится по формуле, описанной в Разделе I, как натуральный логарифм максимального собственного значения:

$$h = \ln \lambda_{max}.$$

Данная энтропия является максимальной.

РАЗДЕЛ IV
ОПИСАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Для решения поставленной задачи использовались следующие языки программирования: C++ [11] и Python 3 [12]. С помощью первого был построен символический образ, локализовано цепно-рекуррентное множество, построена инвариантная мера и вычислена энтропия; второй язык программирования использовался для визуализации двухмерных полученных результатов: построения цепно-рекуррентного множества.

Также использовался веб-ресурс [13] для визуализации трехмерных данных: построения инвариантной меры.

Инвариантная мера строилась для отображения Жюлиа, которое имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + a \\ 2xy + b \end{pmatrix},$$

где $a = 0$, $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Отображение Жюлиа задается в тексте программы «Program.cpp» (строки 231-232) (Рис. 4.1):

```
229        //FUNCTION
230
231        x_n = x * x - y * y;
232        y_n = 2 * x * y - (1 / (2 * sqrt(2)));
```

Рис. 4.1 Задание отображения

Исходная область локализации – прямоугольник $M = [-2; 2]$ x $[-2; 2]$, каждая ячейка – квадрат со стороной 2. Количество точек, равномерно расположенных, в одной точке – 100.

Все эти данные вводятся пользователем. При запуске программы «Program.cpp» пользователь видит следующее диалоговое окно (Рис. 4.2):

```
Введите координаты нижнего левого угла исходной области (a1, b1):
два значения, разделенные пробелом, без скобок и запятых
-2 -2
Введите координаты верхнего правого угла исходной области (a2, b2):
два значения, разделенные пробелом, без скобок и запятых
2 2
Введите ширину и высоту ячейки h1, h2: два значения, разделенные пробелом, без скобок и запятых
2 2
Введите количество точек в одной ячейке
100
Введите количество итераций при локализации цепно-рекуррентного множества
7
```

Рис. 4.2 Диалоговое окно: ввод данных

После задания количества итераций для локализации цепно-рекуррентного множества, начинается сам процесс локализации и пользователь может увидеть время, затраченное на каждую итерацию (в секундах) (Рис. 4.3):

```
ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЦЕПНО-РЕКУРРЕНТНОГО МНОЖЕСТВА
Время 1-й итерации: 0.0015232
Время 2-й итерации: 0.0022699
Время 3-й итерации: 0.0050517
Время 4-й итерации: 0.0194741
Время 5-й итерации: 0.0989943
Время 6-й итерации: 0.449309
Время 7-й итерации: 1.67512
```

Рис. 4.3 Диалоговое окно: локализация цепно-рекуррентного множества, время

Все итерации хранятся в файлах «file№.txt», где № - номер итерации. Чтобы построить цепно-рекуррентное множество, нужно запустить программу «Print.py». После запуска пользователь увидит следующее диалоговое окно (Рис. 4.4):

```
Введите координату x левого нижнего угла области:
-2
Введите координату y левого нижнего угла области:
-2
Введите координату x правого верхнего угла области:
2
Введите координату y правого верхнего угла области:
2
Введите начальную длину ячейки:
2
Введите начальную ширину ячейки:
2
Введите номер итерации для локализации цепно-рекуррентного множества, которую
желаете визуализировать:
7
```

Рис. 4.4 Диалоговое окно: визуализация цепно-рекуррентного множества, ввод данных

В данном диалоговом окне (Рис. 4.4) пользователю необходимо продублировать те данные, которые были введены при запуске программы «Program.cpp» (Рис. 4.2).

После времени работы программы для разных итераций локализации цепно-рекуррентного множества выводится размерность области: количество ячеек по вертикали и горизонтали, а также размер одной ячейки после завершения локализации цепно-рекуррентного множества (Рис. 4.5):

```
Размерность: 128 x 128
Ширина ячейки и высота ячейки: 0.03125 x 0.03125
```

Рис. 4.5 Диалоговое окно: размерность области, размер ячейки

В конце необходимо ввести количество итерации для вычисления инвариантной меры и энтропии заданной системы; после завершения данного процесса будут выведены значение энтропии и время вычисления инвариантной меры и энтропии данной системы (Рис. 4.6):

```
Энтропия = 0.528425
Время вычисления инвариантной меры для 1000 итераций: 1.19322
```

Рис. 4.6 Диалоговое окно: значение энтропии, время работы

Полученные результаты можно визуализировать с помощью [13], воспользовавшись результатами, которые сохраняются в файле «filecells.txt».

Результаты работы программы на этапе локализации цепно-рекуррентного множества представлены в таблице и на рисунках ниже:

Таблица 4.1

Характеристики работы программы на этапе локализации цепно-рекуррентного множества

Количество итераций	Время работы программы, с	Длина стороны ячейки	Количество возвратных вершин	Номер рисунка

1	0.0006269	2	4	Рис. 4.7
2	0.0011678	1	13	Рис. 4.8
3	0.0073035	0.5	32	Рис. 4.9
4	0.0184563	0.25	83	Рис. 4.10
5	0.103098	0.125	174	Рис. 4.11
6	0.443213	0.0625	329	Рис. 4.12
7	1.57511	0.03125	677	Рис. 4.13
8	6.43791	0.015625	1328	Рис. 4.14
9	24.9233	0.0078125	2841	Рис. 4.15
10	113.955	0.00390625	5738	Рис. 4.16
11	463.15	0.00195312	12048	Рис. 4.17
12	1963.18	0.000976563	25044	Рис. 4.18

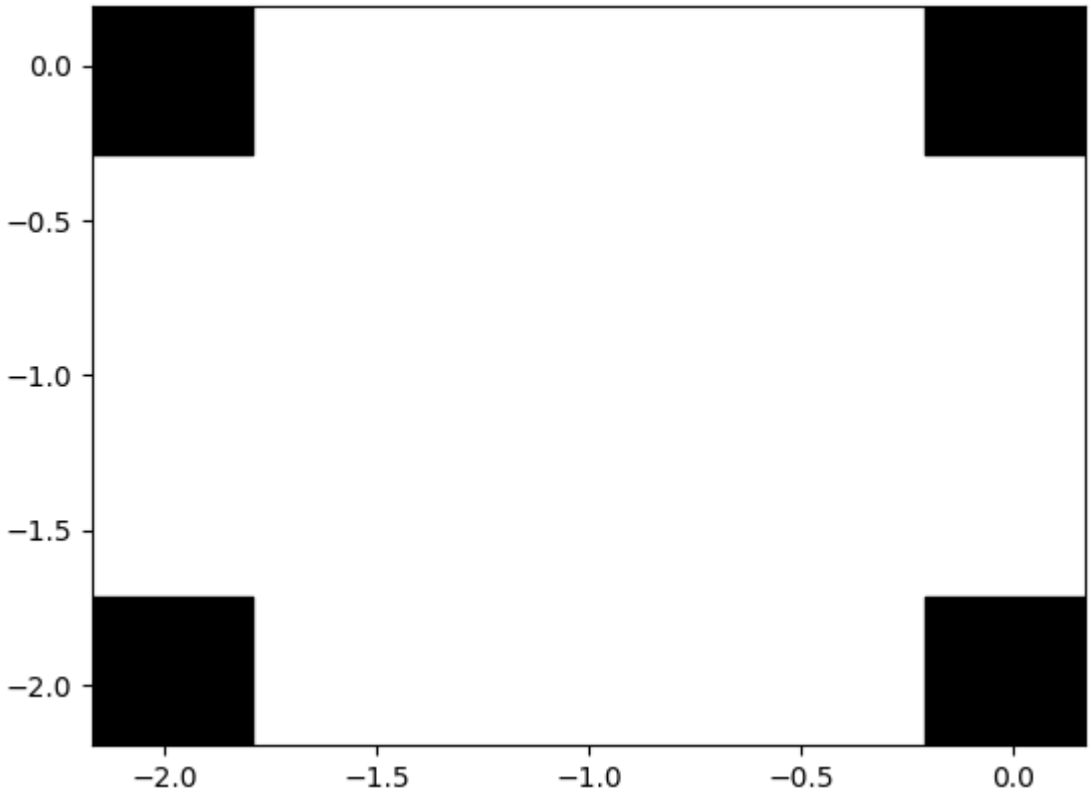


Рис. 4.7 Итерация 1

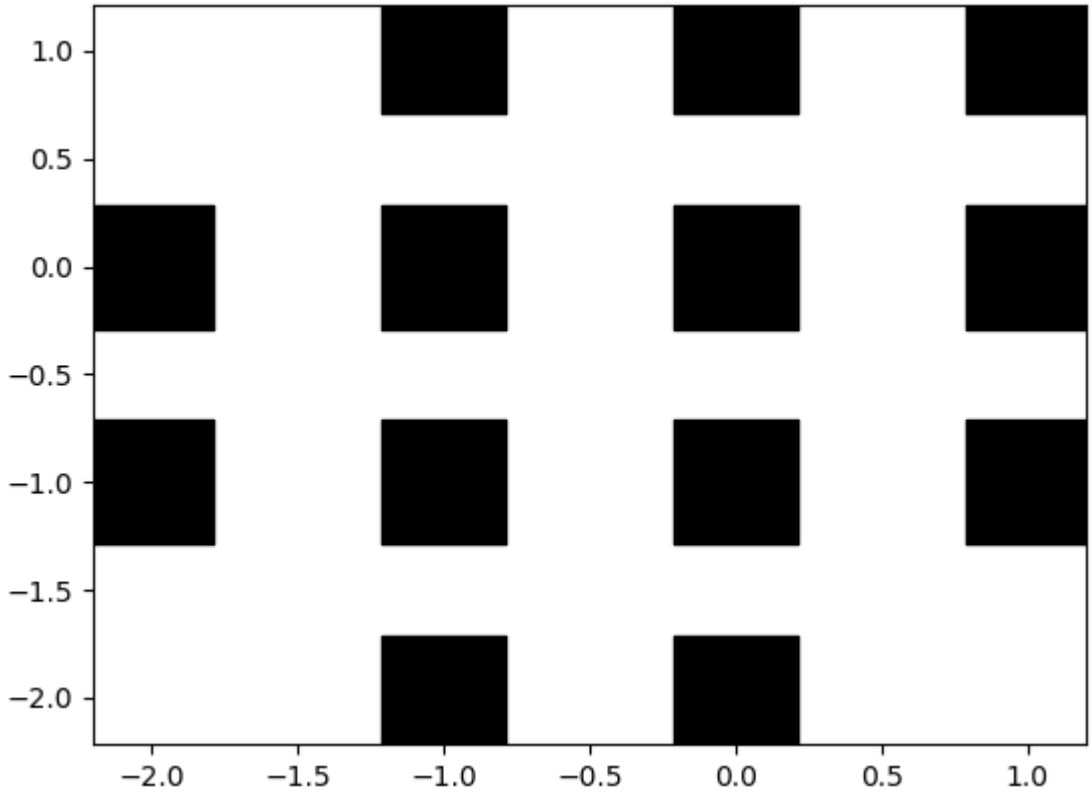


Рис. 4.8 Итерация 2

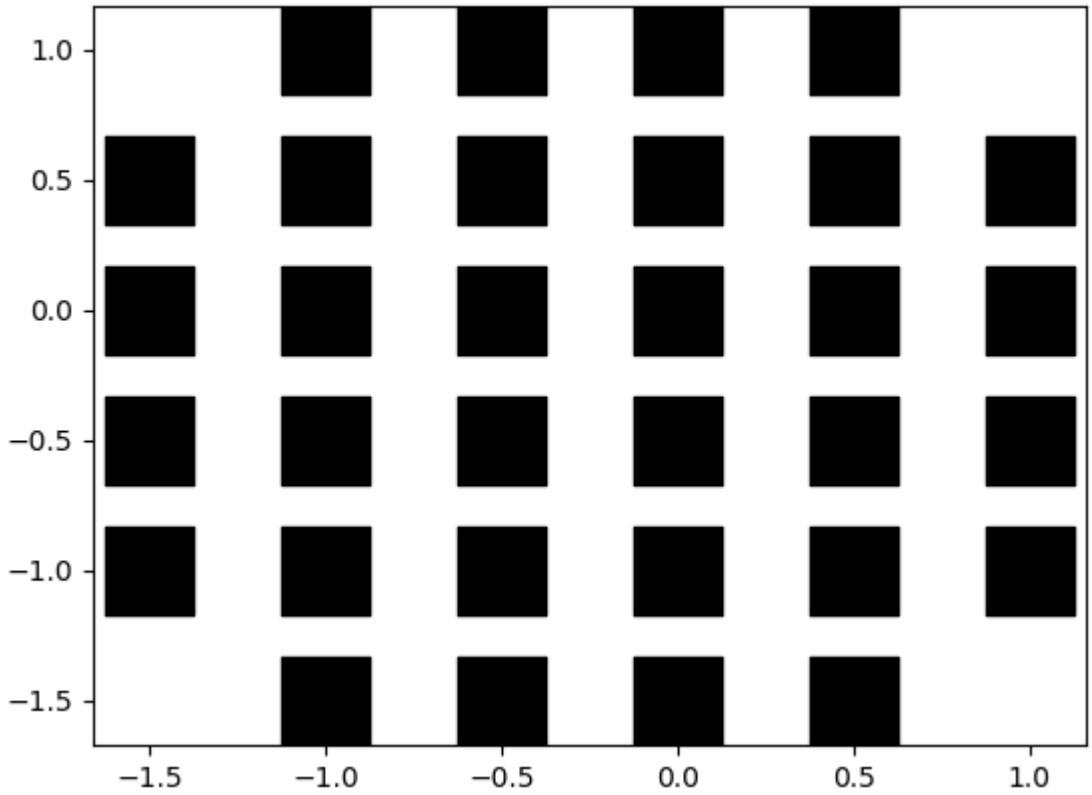


Рис. 4.9 Итерация 3

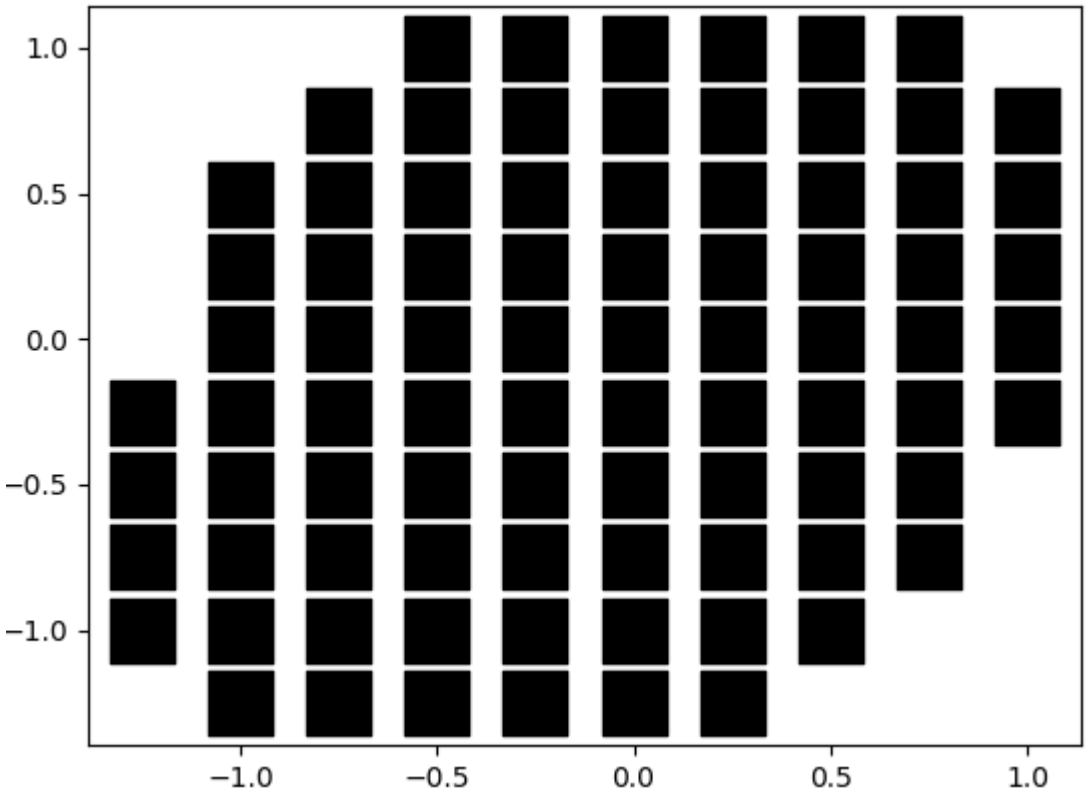


Рис. 4.10 Итерация 4

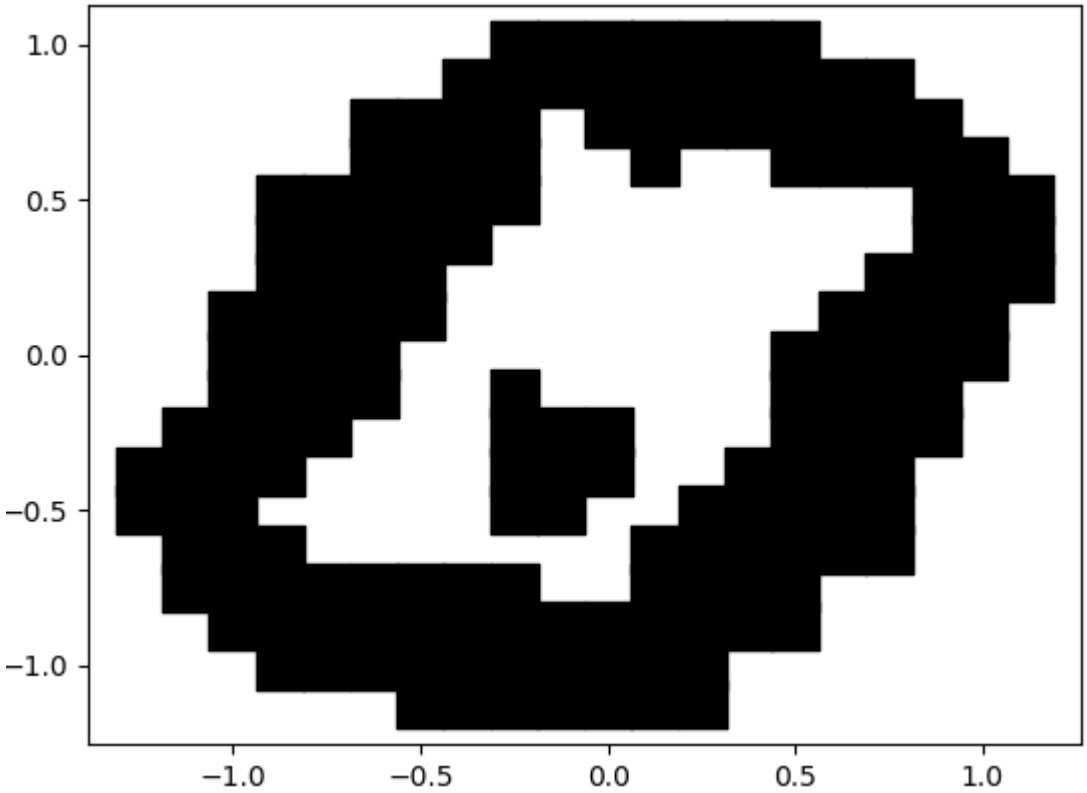


Рис. 4.11 Итерация 5

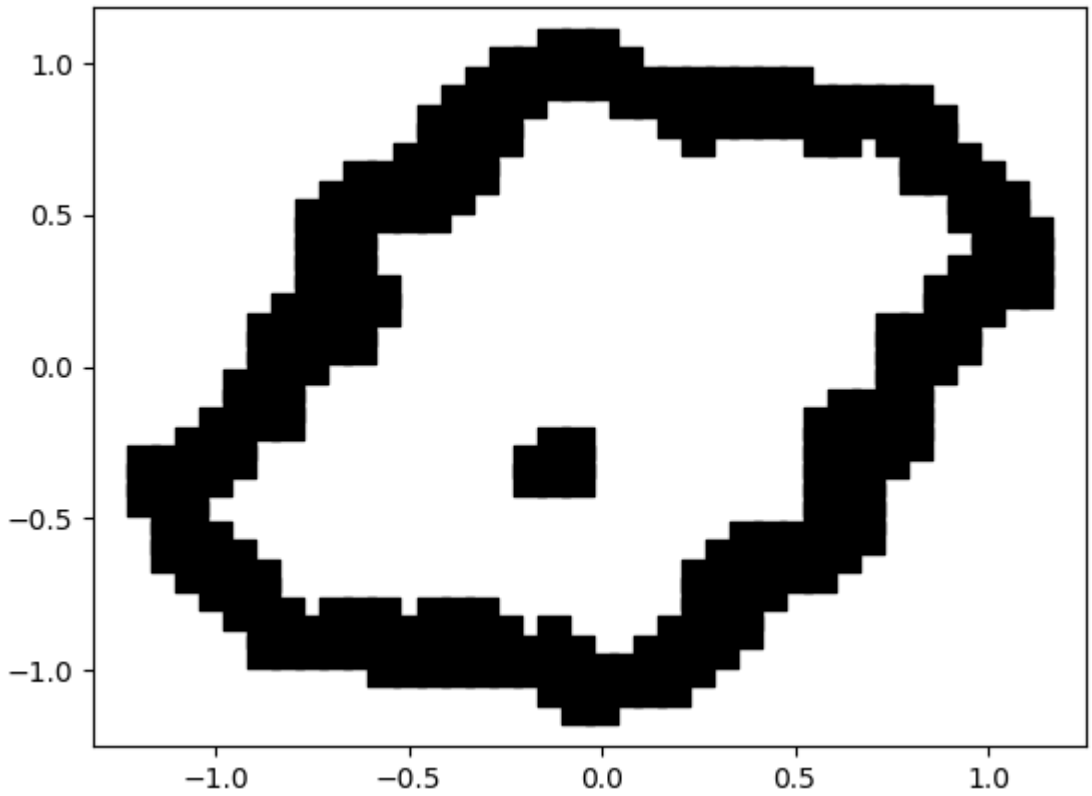


Рис. 4.12 Итерация 6

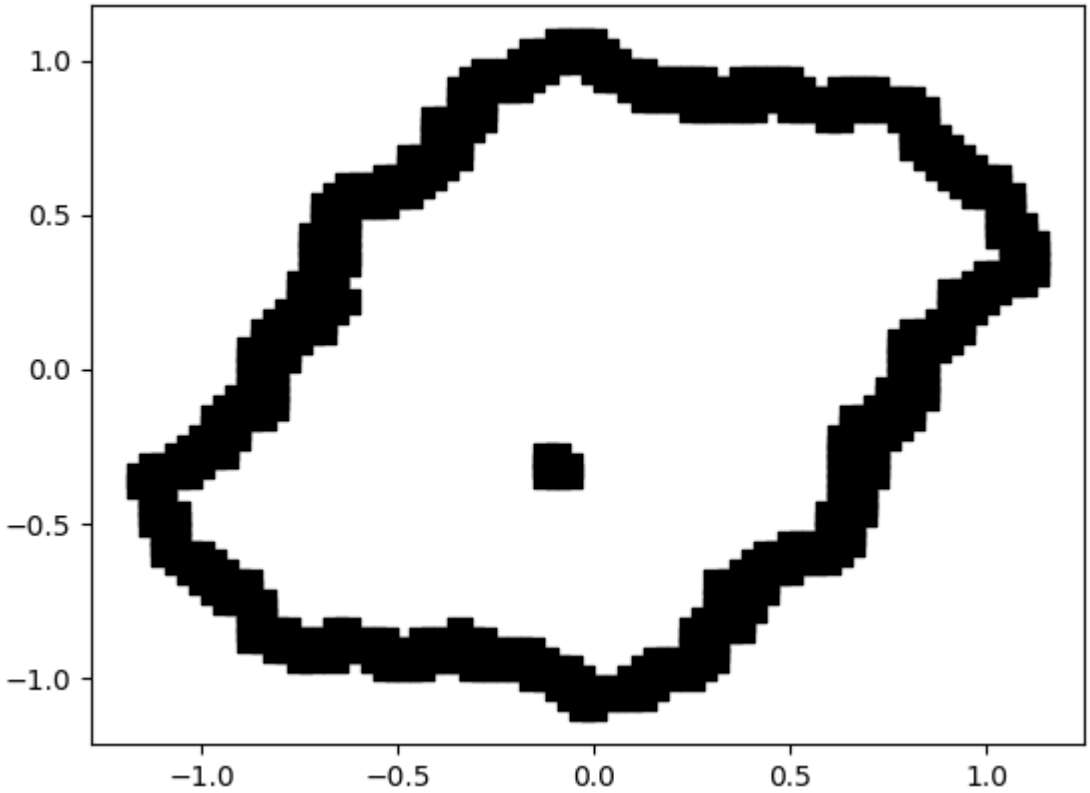


Рис. 4.13 Итерация 7

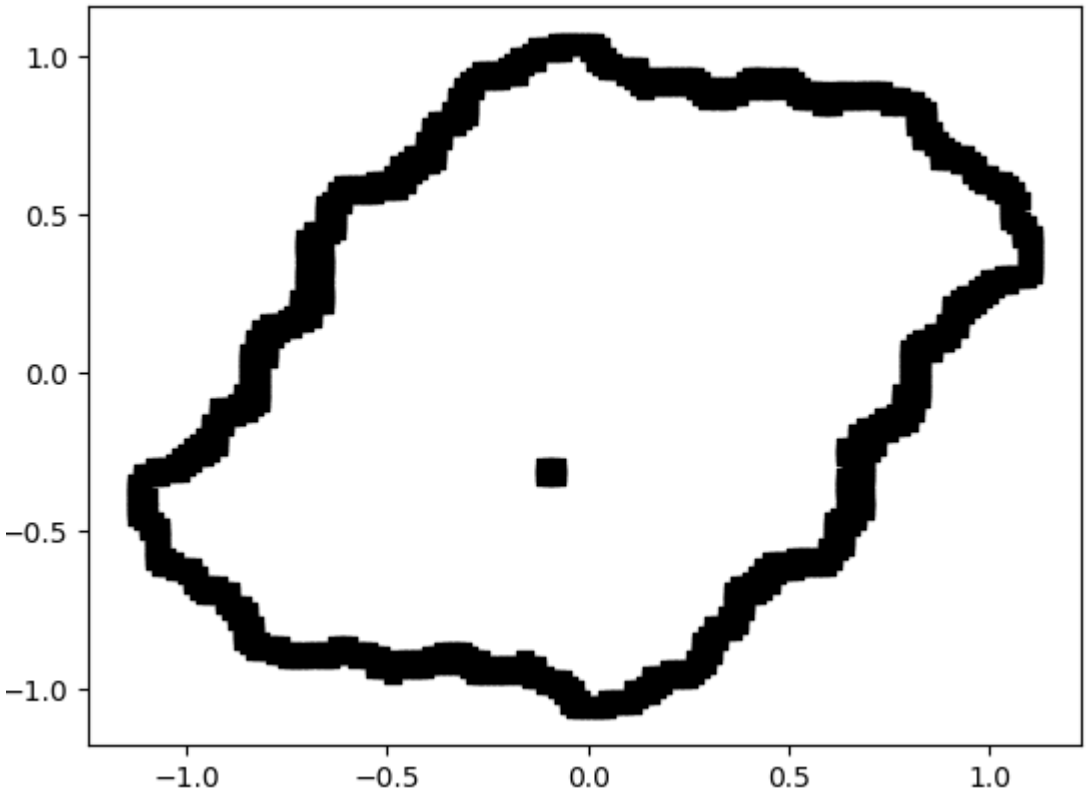


Рис. 4.14 Итерация 8

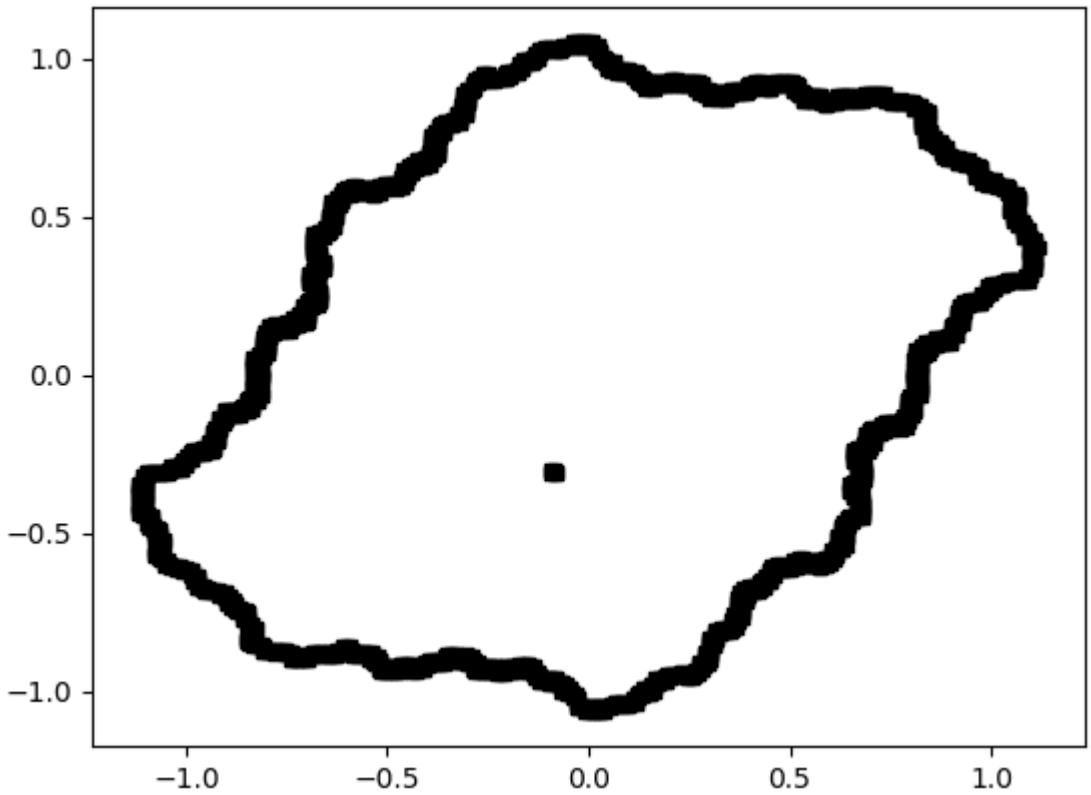


Рис. 4.15 Итерация 9

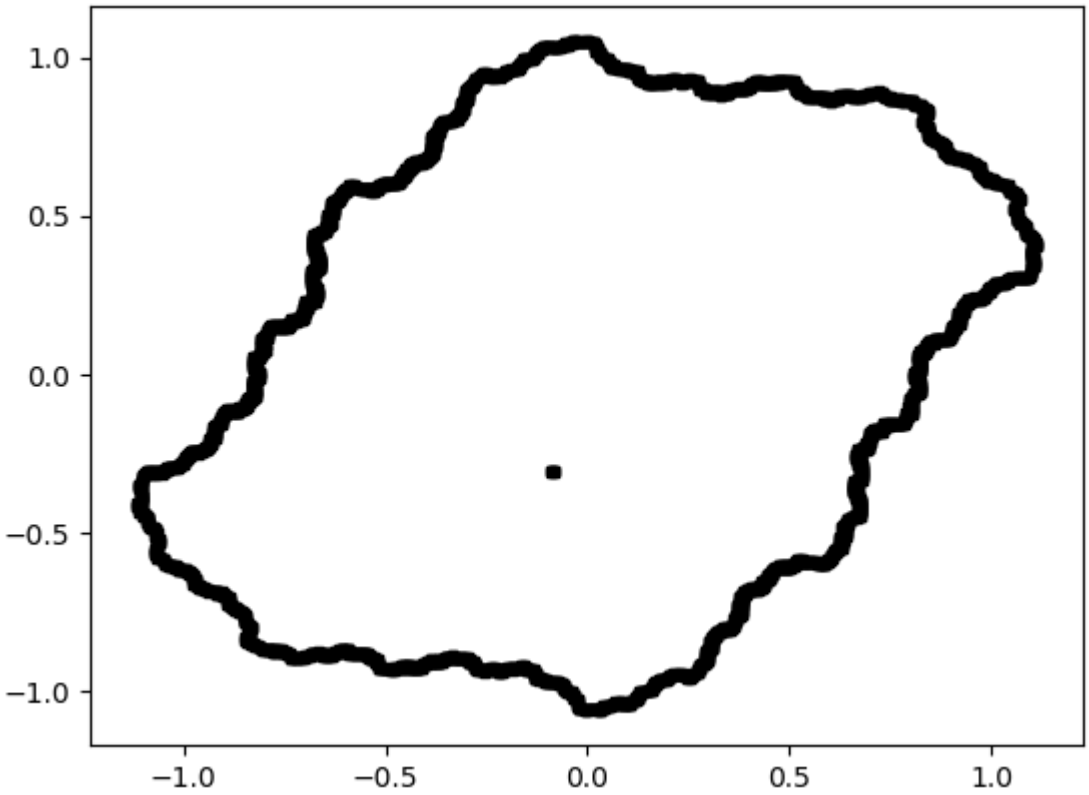


Рис. 4.16 Итерация 10

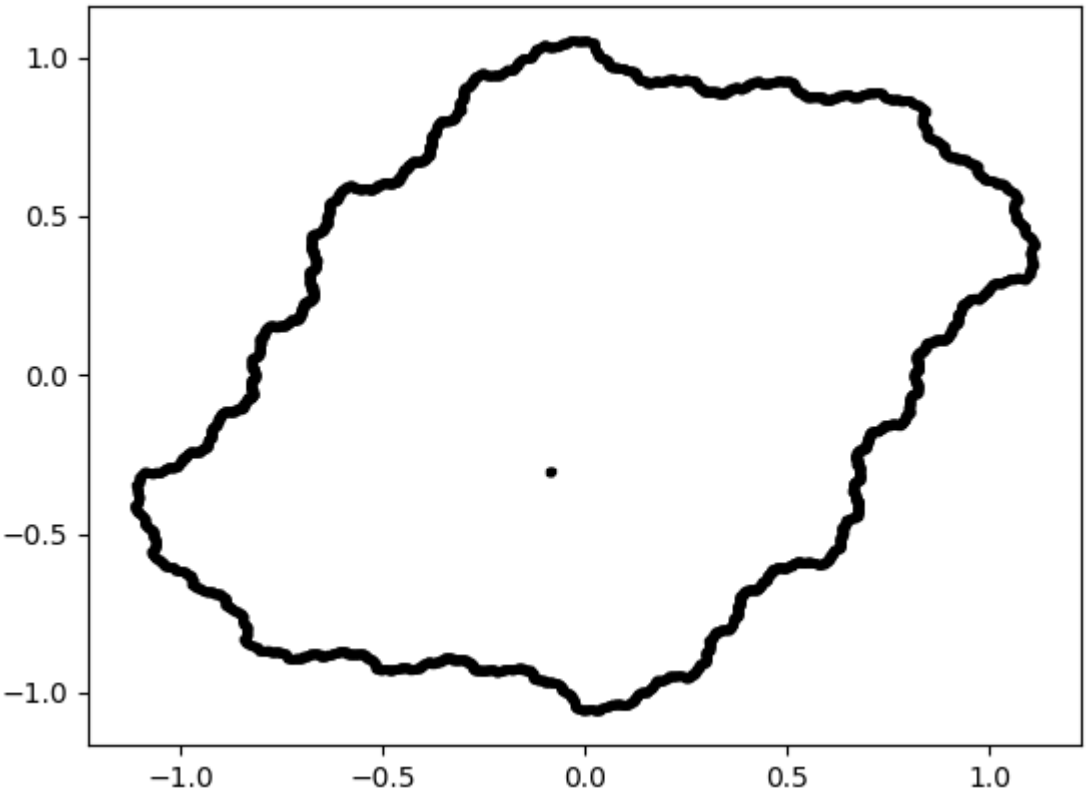


Рис. 4.17 Итерация 11

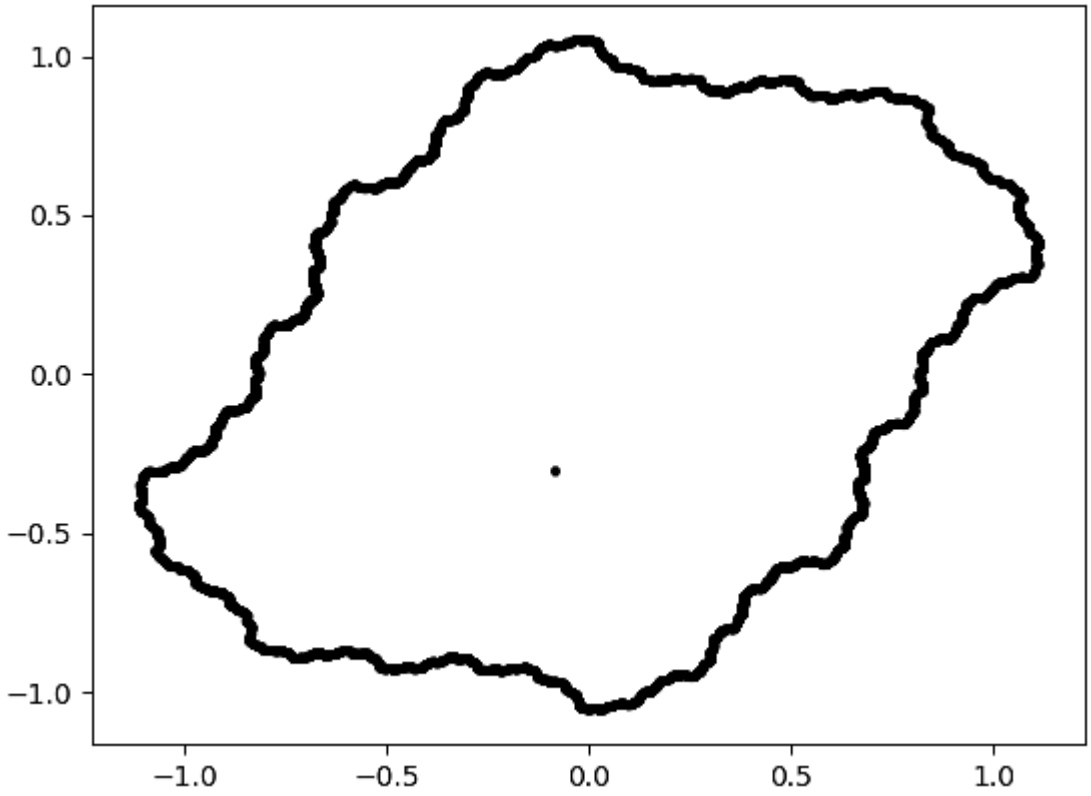


Рис. 4.18 Итерация 12

Ниже представлены результаты работы на этапе вычисления энтропии и инвариантной меры методом, описанным в Разделе III.

Распределение строится над плоскостью, в которой лежит цепно-рекуррентное множество.

Отметим, что $m = \frac{m_i}{s}$, где s – площадь ячейки.

Таблица 4.2

Характеристики работы программы на этапе построения инвариантной меры и вычисления энтропии

Количество итераций на этапе локализации цепно-рекуррентного множества	Количество итераций на этапе вычисления инвариантной меры и энтропии	Время работы программы, с	Диаметр ячейки	Энтропия	Номер рисунка
9	1000	2.7012	0.0078125	0.507939	Рис. 4.19
9	10000	26.9663	0.0078125	0.507939	Рис. 4.20

9	100000	279.895	0.0078125	0.507939	Рис. 4.21
10	1000	4.97114	0.00390625	0.545219	Рис. 4.22
10	10000	52.7823	0.00390625	0.545219	Рис. 4.23
10	100000	500.044	0.00390625	0.545219	Рис. 4.24
11	1000	10.2547	0.00195313	0.5289	Рис. 4.25
11	10000	101.312	0.00195313	0.5289	Рис. 4.26
12	10000	232.773	0.00097656	0.568267	Рис. 4.27

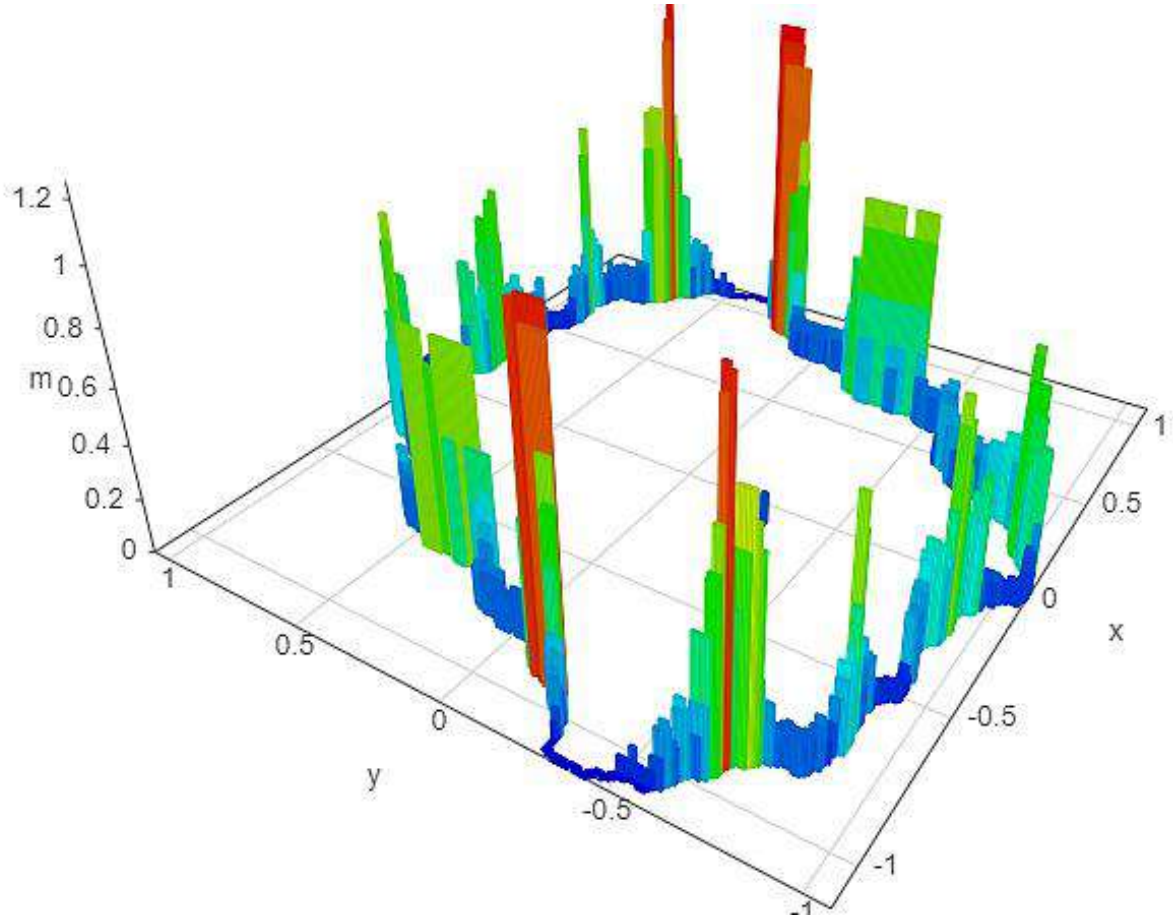


Рис. 4.19 Цепно-рекуррентное множество: 9 итераций; вычисление инвариантной меры: 1000 итераций

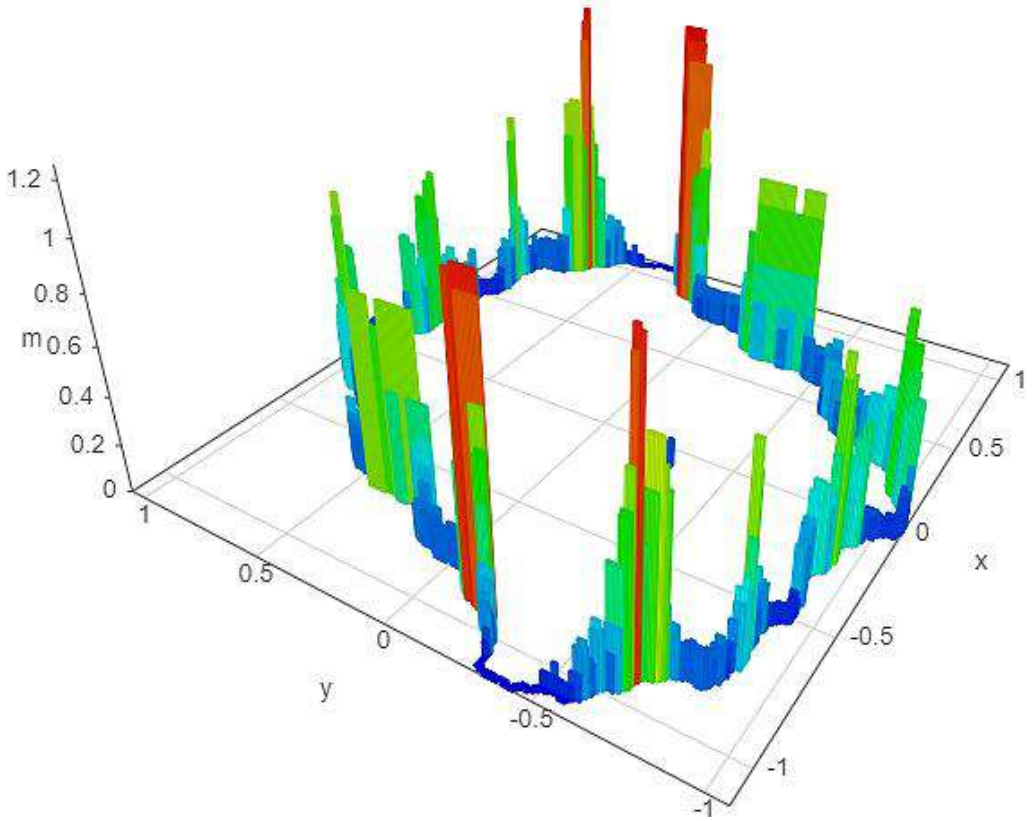


Рис. 4.20 Цепно-рекуррентное множество: 9 итераций; вычисление инвариантной меры: 10000 итераций

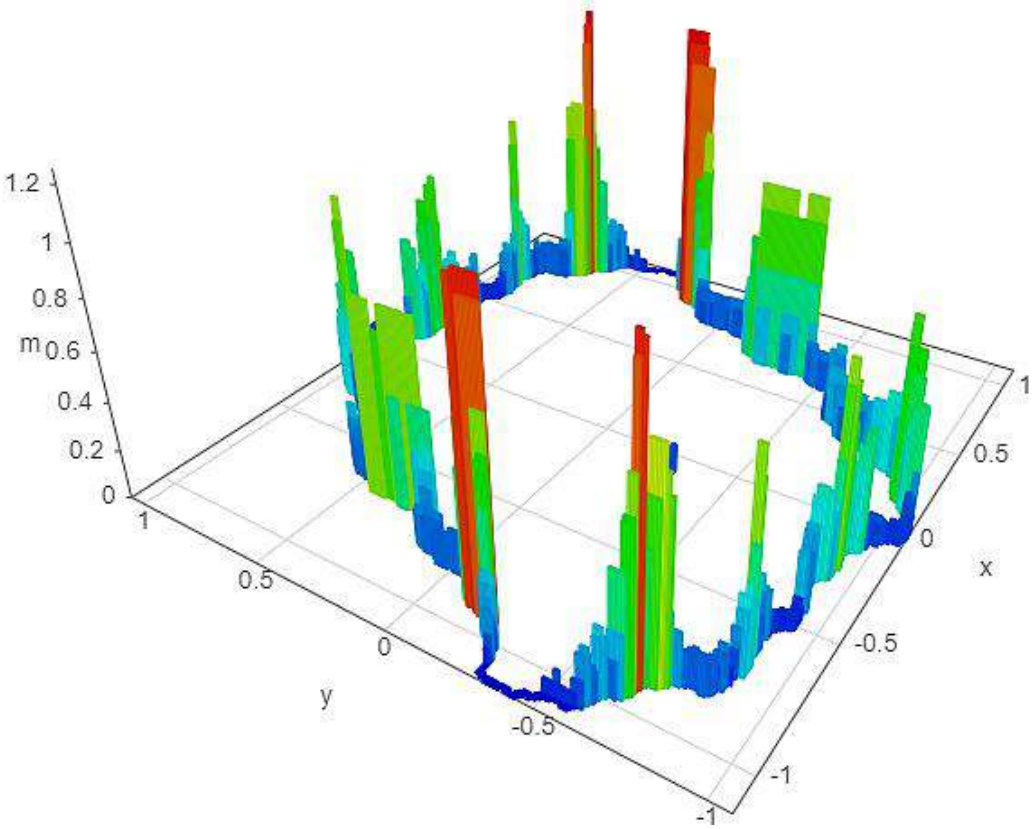


Рис. 4.21 Цепно-рекуррентное множество: 9 итераций; вычисление инвариантной меры: 100000 итераций

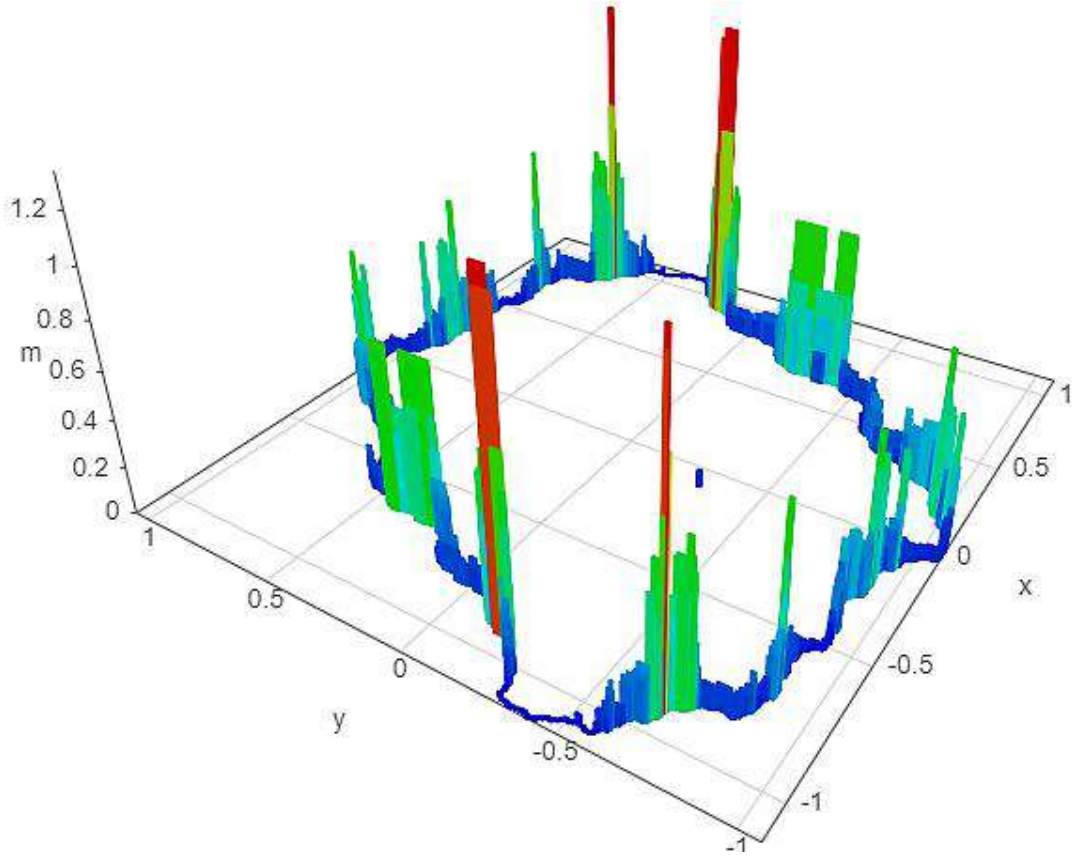


Рис. 4.22 Цепно-рекуррентное множество: 10 итераций; вычисление инвариантной меры: 1000 итераций

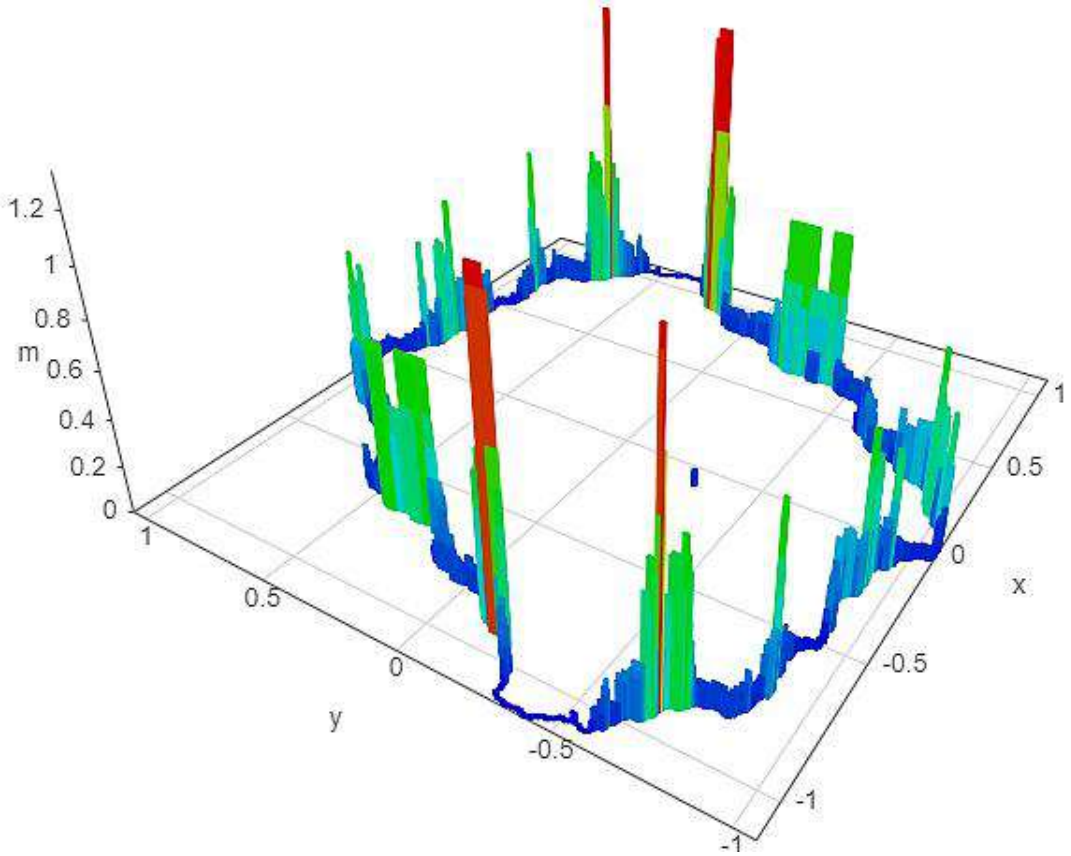


Рис. 4.23 Цепно-рекуррентное множество: 10 итераций; вычисление инвариантной меры: 10000 итераций

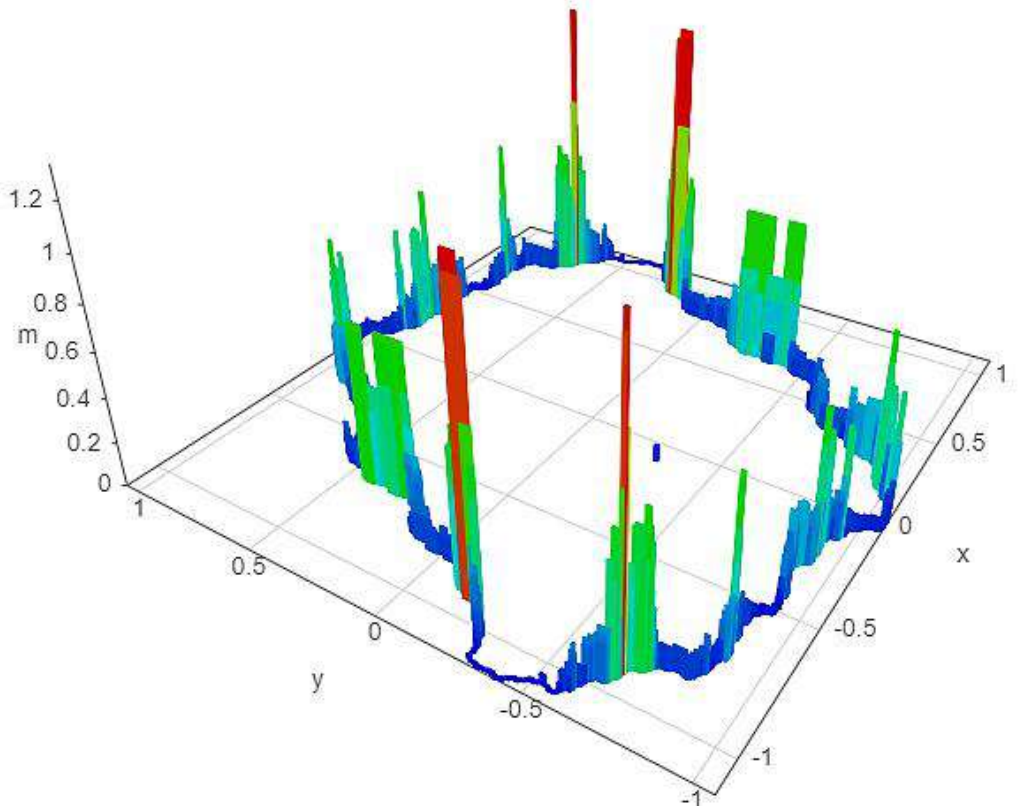


Рис. 4.24 Цепно-рекуррентное множество: 10 итераций; вычисление инвариантной меры: 100000 итераций

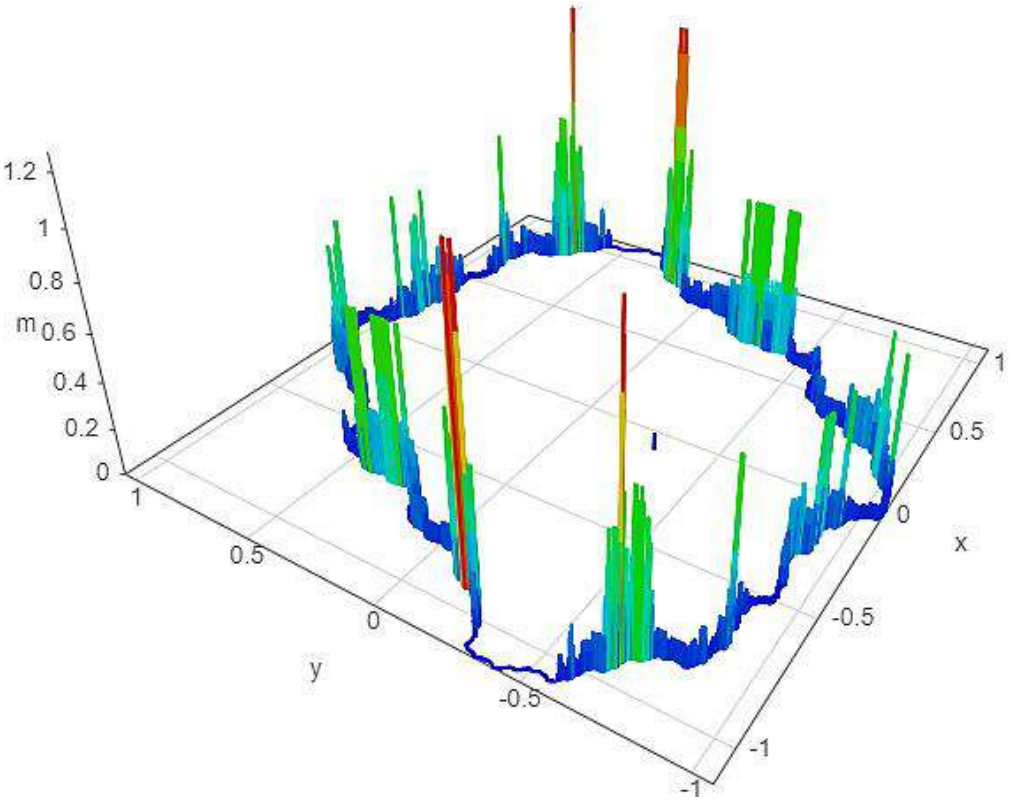


Рис. 4.25 Цепно-рекуррентное множество: 11 итераций; вычисление инвариантной меры: 1000 итераций

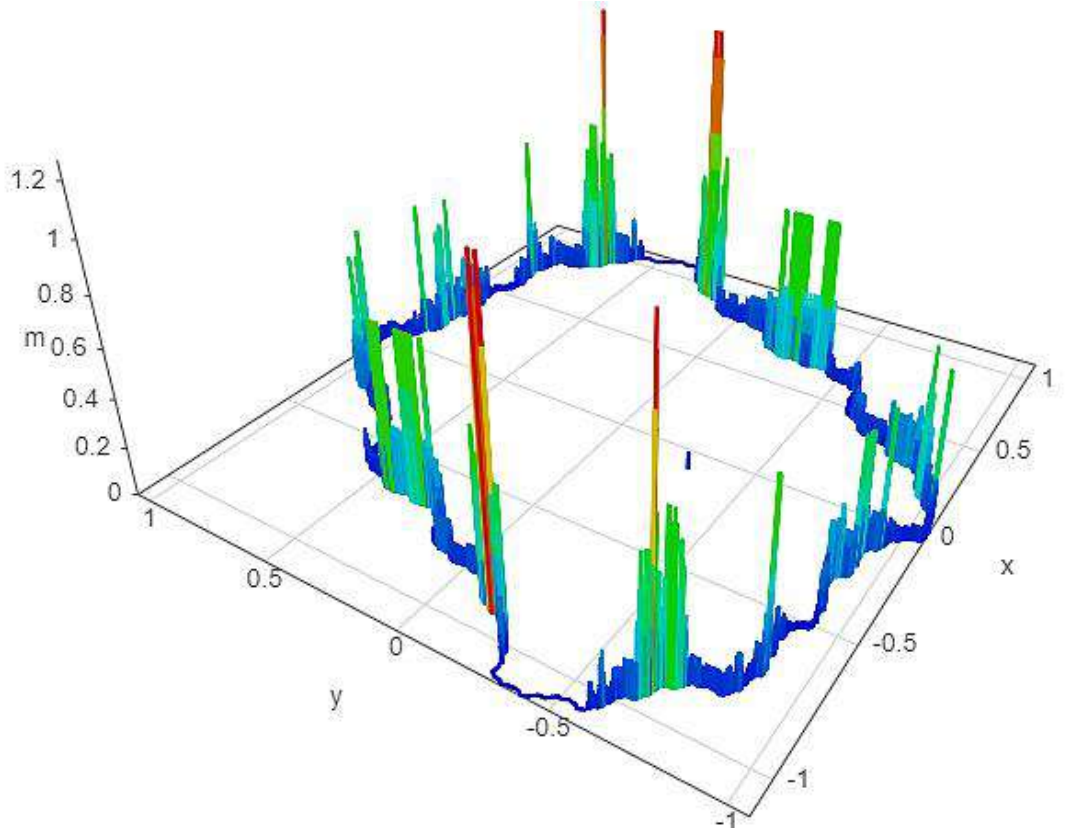


Рис. 4.26 Цепно-рекуррентное множество: 11 итераций; вычисление инвариантной меры: 10000 итераций

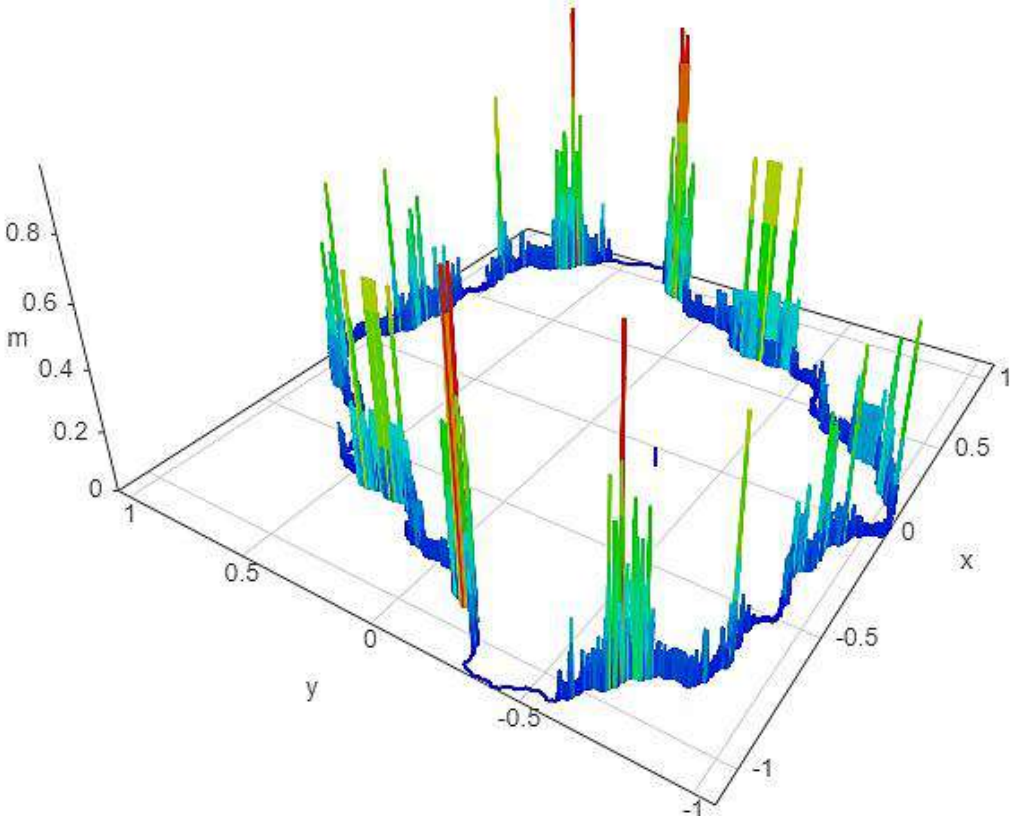


Рис. 4.27 Цепно-рекуррентное множество: 12 итераций; вычисление инвариантной меры: 10000 итераций

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы были определены цели и задачи, согласно которым была вычислена мера максимальной энтропии заданной динамической системы. Были выполнены все шаги, ведущие к достижению поставленной цели.

Произведен обзор существующих методов вычисления меры динамической системы.

Была написана программа на языке C++ для вычисления меры максимальной энтропии итерационным методом, программа на языке Python 3 с использованием библиотеки matplotlib для создания графики.

Результаты визуализированы с помощью веб-ресурса [13].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Осипенко Г. С. Символический образ динамической системы. Севастополь 2019.

[2] Осипенко Г. С. «Дискретизация динамических систем»- Севастополь: Филиал МГУ в городе Севастополе, 2019.-208 с.

[3] Осипенко Г. С., Ампилова Н. Б. «Энтропия символического образа динамической системы», 2019.-22 с.

[4] Брэгман Л. М. Доказательство сходимости метода Г. В. Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, № 1. С. 147–156.

[5] Брэгман Л. М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, № 3. С. 620–631

[6] Е. И. Петренко Разработка и реализация алгоритмов построения символического образа // Дифференциальные уравнения и процессы управления № 3, 2006 Электронный журнал, рег. № П23275 от 07.03.97

[7] Интернет-ресурс: www.geeksforgeeks.org.

[8] A. Katok, B. Hasselblat, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1995.

[9] A. Kryloff, N. Bogoliouboff, La theorie generale de la mesure dans son application a l’etude das systemes dynamiques de la mecanique non lineaire, Ann. Math., v. 38 (1937), no. 1, 65-113.

[10] Richard von Mises and H. Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM — Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 9, 152—164 (1929).

[11] Среда разработки программного обеспечения C++ https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/

[12] Интегрированная среда разработки и обучения на языке Python https://docs.python.org/3/library/idle.html

[13] Веб-ресурс для визуализации трехмерных данных
http://almende.github.io/chap-links-library/js/graph3d/playground/

ПРИЛОЖЕНИЯ

Программы доступны по ссылке:

https://drive.google.com/drive/folders/1c5nFQHBgijb1YPRh20a8r8M5ocI0HXX9

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Николаевой Марии Андриановны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Численное исследование одного метода отсечений с обновлением аппроксимирующих множеств» являются: Исследование наиболее благоприятного обновления аппроксимирующих множеств с помощью отбрасывания определенного числа формирующих их отсечений уже известного метода, а также программа, реализованная для исследования этого метода.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:
1. Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Заботиным И.Я., доктором физ.-мат. наук, профессором кафедры анализа данных и исследования операций Казанского Федерального Университета.
2. Во время подготовки к защите мною был произведён поиск в поисковых системах по следующим ключевым словам: аппроксимирующие множества, методы отсечений, симплекс-метод. Было найдено несколько работ аспиранта моего научного руководителя конкретно о методе, взятом за основу в моей дипломной работе. В использованной литературе данные работы указаны. Эти работы не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового.
3. Представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым, так как работ и исследований, которые позволяли бы отбрасывать аппроксимирующие плоскости и давали бы определенные рекомендации по этому поводу, не существует.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась в июне 2017 года. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись Николаева Мария Андриановна

20 мая 2020
г. Казань, Россия

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА АНАЛИЗА ДАННЫХ И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Направление: 38.03.05 - Бизнес – информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(бакалаврская работа)

Численное исследование одного метода отсечений с обновлением аппроксимирующих множеств

Работа завершена:

"___"_____ 2017 г. _____ М.А.Николаева

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
д-р физ.-мат. наук, профессор
"___"_____ 2017 г. _____ И.Я.Заботин

Заведующий кафедрой
д –р физ. – мат. наук, профессор
"___"_____ 2017 г. _____ М.Д.Миссаров

Казань – 2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 2

1. ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ ОТСЕЧЕНИЙ 4

2. ИССЛЕДУМЫЙ МЕТОД ОТСЕЧЕНИЙ С ОБНОВЛЕНИЕМ АППРОКСИМИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ 5

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ 6

3.1. Постановка задачи 6

3.2. Метод отсечений 6

4. РАБОТА С ПРОГРАММОЙ 9

4.1. Описание работы с программой 9

4.2. Подтверждение работоспособности программы на тестовых примерах. . 11

4.3. Результаты численных экспериментов 14

5. РЕШЕНИЕ ИССЛЕДУЕМЫМ МЕТОДОМ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ 20

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 25

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА 26

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 27

ВВЕДЕНИЕ

Дипломная работа посвящена численному исследованию одного из методов выпуклого программирования. Методы решения задач математического программирования востребованы и довольно часто используются на практике. Поэтому создание новых и численное исследование старых остается актуальным и в наше время.

Один из известных классов методов решения задач математического программирования образуют так называемые методы отсечений (см. например, [1-10]).

Класс методов отсечений достаточно широк. Условно можно разделить их на три группы. В методах первой группы при построении приближений используется аппроксимация области ограничений исходной задачи. Методы такого типа удобны в том случае, когда целевая функция является линейной или выпуклой квадратичной.

В методах второй группы аппроксимируется надграфик функции цели многогранными множествами. Такие методы удобны, соответственно, тогда, когда линейными функциями задана допустимая область.

Самая малочисленная – третья группа, которую образуют те, в которых используется аппроксимация как надграфика, так и области ограничений. В методах такого типа для построения приближений решаются вспомогательные задачи линейного программирования, несмотря на то, что нелинейны и целевая функция, и функции, задающие ограничения.

Дипломная работа посвящена численному исследованию одного из методов третьей группы [10]. Данный метод включает аппроксимацию и области ограничений, и надграфика целевой функции. Отсечения итерационных точек осуществляется плоскостями, которые строятся в методе с помощью субградиентов функций цели и ограничений. Каждая такая итерационная точка отыскивается путем решения задачи линейного программирования. Во время решения задачи происходит накопление отсекающих плоскостей, что делает

задачу трудоемкой, необходимо достаточно большое количество времени для ее решения. Поэтому в данном методе, в отличие от большинства известных методов отсечений, реализована процедура обновления аппроксимирующих множеств.

Для исследования упомянутого метода отсечений в дипломной работе программно реализован данный метод на языках C++, C#. С помощью этой программы проведена серия экспериментов с использованием тестовых примеров различной размерности. На основе экспериментов сделаны выводы по выбору некоторых параметров метода, а также по способам обновления аппроксимирующих множеств. Проверена работоспособность исследуемого метода на оптимизационной экономической задаче.

1. ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ ОТСЕЧЕНИЙ

Как уже было сказано во введении, известно достаточно много методов отсечений, аппроксимирующих надграфик функции, допустимую область задачи или и то и другое. Приведу примеры некоторых из них.

Одним из первых методов решения задачи минимизации выпуклой функции на выпуклом многограннике был метод секущих плоскостей Келли. Метод Келли заключается в сведении исходной задачи выпуклого программирования к последовательности задач линейного программирования. С каждой новой итерацией в данном методе происходит накапливание линейных ограничений, что с вычислительной точки зрения неэффективно. В. П. Булатов был одним из первых, кто стал исследовать вопрос о возможном отбрасывании неактивных вспомогательных линейных ограничений с сохранением свойства сходимости. В дальнейшем, исследование метода секущих плоскостей без вложения привело к разработке метода опорного конуса и различных его модификаций[1].

Методы чебышёвских центров [1] и симплексных погружений принадлежат к так называемому классу методов центрированных сечений. Неформально, такие методы можно представлять, как обобщение метода деления отрезка пополам на многомерный случай. Вычислительные процедуры, основанные на использовании чебышёвских точек, особенно эффективны в задачах минимизации «пологих» функций, связанных, например, с задачами стохастического программирования.

В работах научного руководителя и Р.С.Яруллина было разработан общий принцип построения методов отсечений с обновлением аппроксимирующих множеств[6, 9-10], и с использованием этого принципа построено несколько методов отсечений с аппроксимацией надграфика целевой функции или области ограничений. В [10] предложен метод, использующий одновременно аппроксимацию и надграфика и область ограничений, в котором заложена возможность обновления аппроксимирующих множеств за счет периодического отбрасывания отсекающих плоскостей.

2. ИССЛЕДУМЫЙ МЕТОД ОТСЕЧЕНИЙ С ОБНОВЛЕНИЕМ АППРОКСИМИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ

Метод, исследуемый в дипломе, относится к третьей из названных групп. В данном методе происходит отбрасывание накапливающихся ограничений, за счет чего происходит периодическое обновление аппроксимирующих множеств. Для практического применения такое обновление аппроксимирующих множеств очень важно, так как от шага к шагу увеличивается трудоемкость решения вспомогательных задач за счет того, что растет число отсекающих плоскостей.

Стратегия обновления аппроксимирующих множеств следующая. С использованием двух введенных параметров на каждом шаге метода оценивается качество аппроксимации многогранными множествами области ограничений и надграфика целевой функции в окрестности текущей итерационной точки. На тех итерациях, где качество аппроксимации обоих аппроксимируемых множеств становится удовлетворительным, происходит фиксирование основных итерационных точек и обновление аппроксимирующих множеств путем отбрасывания любого числа формирующих их отсечений.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Далее в работе представлен алгоритм [10].

3.1. Постановка задачи

Пусть f(x), F(x) – выпуклые в R_n функции, $D = \{x \in R_n : F(x) \le 0\}$, функция f(x) достигает на множестве D минимального значения. Решается задача

$$\min\{ f(x) : x \in D\}. \tag{1}$$

Положим $f^* = \min\{ f(x) : x \in D\}$, $X^* = \{ x \in D : f(x) = f^*\}$, $D_\varepsilon = \{x \in R_n : F(x) \le \varepsilon\}$, $X^*(\varepsilon) = \{ x \in D : f(x) \le f^* + \varepsilon\}$, где $\varepsilon \ge 0$. Пусть, кроме того, $x^* \in X^*$, $epi(f, G) = \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : x \in G, \gamma \ge f(x)\}$, где $G \in R_n$, $\partial f(x)$ и $\partial F(x)$ – субдифференциалы в точке $x \in R_n$ функций f(x) и F(x) соответственно, $K = \{0, 1, \ldots\}$.

3.2. Метод отсечений

Метод решения задачи (1) заключается в следующем. Выбираются выпуклые замкнутые множества $M_0 \subset R_n$, $G_0 \subset R_{n+1}$ такие, что

$$D \subset M_0,\ epi(f, R_n) \subset G_0,$$

и для любой точки $(x, \gamma) \in G_0$, где $x \in M_0$, выполняется неравенство

$$\gamma \ge \bar{y} > -\infty.$$

Задаются последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, $\{\sigma_k\}$, $k \in K$, такие, что

$$\varepsilon_k \to 0,\ k \to \infty,\ \sigma_k \to 0,\ k \to \infty,$$

и полагается i=0, k=0.

1. Отыскивается точка (y_i, γ_i), где $y_i \in R_n$, $\gamma_i \in R_1$, как решение задачи

$$\gamma \to \min \tag{2}$$

$$x \in M_i,\ (x, \gamma) \in G_i. \tag{3}$$

Если

$$y_i \in D, \tag{4}$$

и

$$f(y_i) = \gamma_i, \tag{5}$$

то $y_i \in X^*$, и задача (1) решена. Если выполняется включение (4) и

$$f(y_i) - \gamma_i \le \sigma_k, \tag{6}$$

то $y_i \in X^*(\sigma_k)$, и найдено σ_k-решение задачи (1).

2. Выбираются конечные множества $B_i \subset \partial f(y_i)$ и $A_i \subset \partial F(y_i)$, если $y_i \notin D$.
3. Строится множество M_{i+1} следующим образом. Если $y_i \in D$, то полагается

$$M_{i+1} = Q_i = M_i.$$

В противном случае полагается

$$M_{i+1} = Q_i \cap \{x \in R_n : F(y_i) + \langle a, x - y_i \rangle \le 0 \ \forall\ a \in A_i\},$$

где $Q_i = M_i$, если $y_i \notin D_{\varepsilon k}$,

$Q_i = M_i$, если $y_i \in D_{\varepsilon k} \setminus D$ и $f(y_i) - \gamma_i > \sigma_k$,

$Q_i = M_{ri}$, $0 \le r_i \le i$, если $y_i \in D_{\varepsilon k} \setminus D$ и $f(y_i) - \gamma_i \le \sigma_k$.

4. Строится множество G_{i+1} в виде

$$G_{i+1} = S_i \cap \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : f(y_i) + \langle b, x - y_i \rangle \le \gamma \ \forall\ b \in B_i\},$$

где $S_i = G_i$, если $y_i \notin D_{\varepsilon k}$,

$S_i = G_i$, если $y_i \in D_{\varepsilon k}$ и $f(y_i) - \gamma_i > \sigma_k$,

$S_i = G_{li}$, $0 \le l_i \le i$, если $y_i \in D_{\varepsilon k}$ и $f(y_i) - \gamma_i \le \sigma_k$.

5. Если точка (y_i, γ_i) такова, что одновременно выполняется включение

$y_i \in D_{\varepsilon k}$ и неравенство (6), то полагается i_k=i,

$$x_k = y_{ik},\ \sigma_k = \gamma_{ik},$$

значение k увеличивается на единицу и следует переход к п. 6. Иначе сразу выполняется п. 6.

6. Значение i увеличивается на единицу и следует переход к п.1.

4. РАБОТА С ПРОГРАММОЙ

4.1. Описание работы с программой

Программа была реализована на двух языках. Сам алгоритм и все функции на языке C++, интерфейс реализован на языке C#.

Ввод данных и сам расчет осуществляются в следующей форме на «Рис.1».

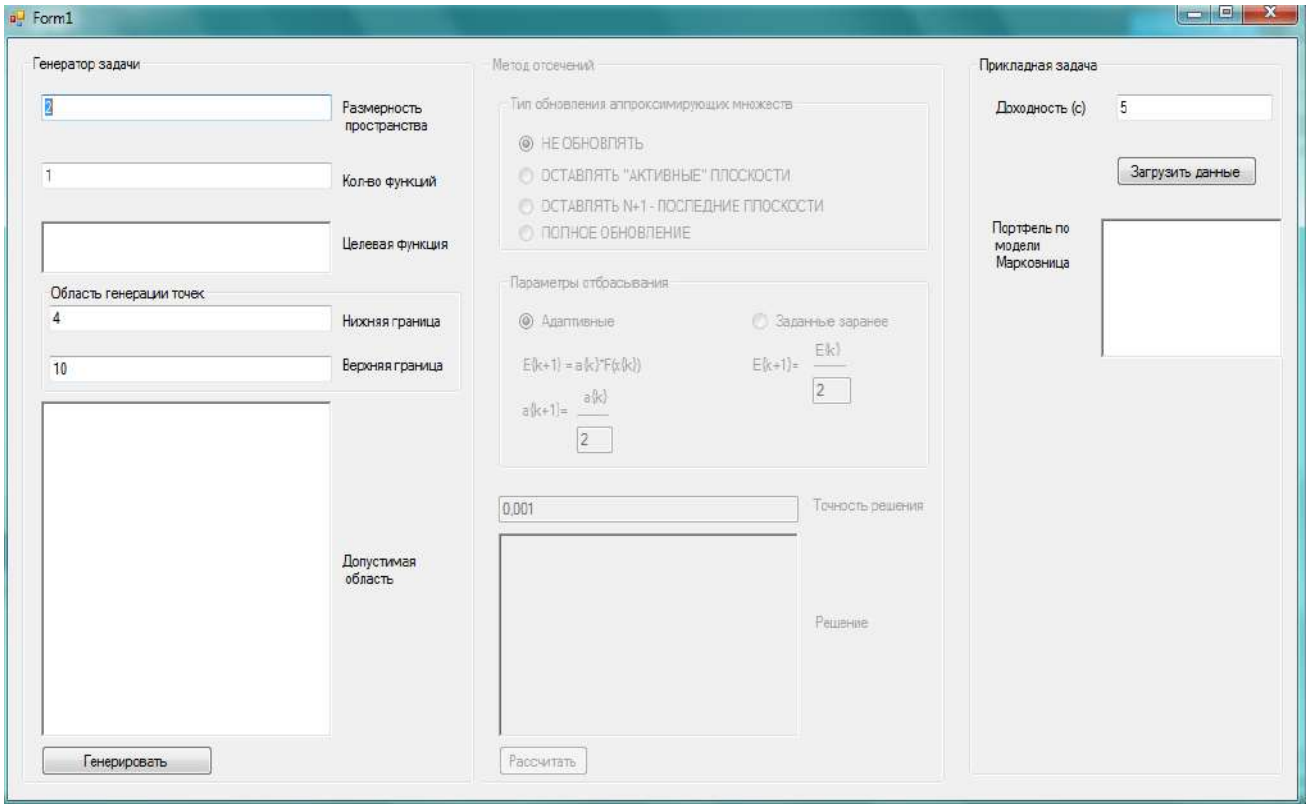


Рис.1

Данная форма позволяет ввести размерность пространства и количество функций допустимой области.

Для генерации коэффициентов в неравенствах, задающих допустимую область, на форме представлено поле «Область генерации точек».

Целевая функция генерируется следующим образом:

- Если размерность пространства равно 2, то функция выглядит 1x[1]^2+2x[2]^2;
- Если размерность пространства равно 3, то функция выглядит 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2;

- Если размерность пространства равно 3, то функция выглядит 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2 и т.д.

Область генерации точек необходима для случайного генерирования всех числовых коэффициентов допустимой области.

После того, как мы задаем размерность задачи, количество функций, заполняем поля в области генерации точек, необходимо нажать кнопку «Генерировать». Автоматически заполняются, согласно введенным условиям, поля «Целевая функция» и «Допустимая область».

Далее мы переходим к самому методу отсечений. В программе реализована возможность выбора одного из типов обновления аппроксимирующих множеств:

- Без обновления
- Оставить только «активные» плоскости.
- Оставить N+1 последние плоскости
- Полное обновление
-

Также можно выбрать параметры отбрасывания:

- Фиксированные или заданные заранее (задаются в начале решения задачи и по мере ее решения не меняются).
- Адаптивные (изменяются при каждом отбрасывании ограничений).

Как можно увидеть из формы, адаптивный параметр задается следующим образом:

$$\varepsilon_{k+1} = a_k * F(x_k), \text{ где } a_{k+1} = a_k/2$$

Такой же принцип задания параметров отбрасывания действует и для σ_{k+1}.

Программа позволяет выбрать точность решения. По умолчанию она задается числом 0,001, что я посчитала наиболее удобным в тестировании примеров.

Также на форме возможно загрузить данные прикладной задачи и программа сделает расчёт.

4.2. Подтверждение работоспособности программы на тестовых примерах.

С помощью программы было протестировано несколько примеров двумерных задач.

Пример 1.

1x[1]^2+2x[2]^2 → min

g1(x) = (x[1]-2)^2 + (x[2]-2)^2<=4

Была найдена точка минимума, также значение функции, показанное на «Рис.2».

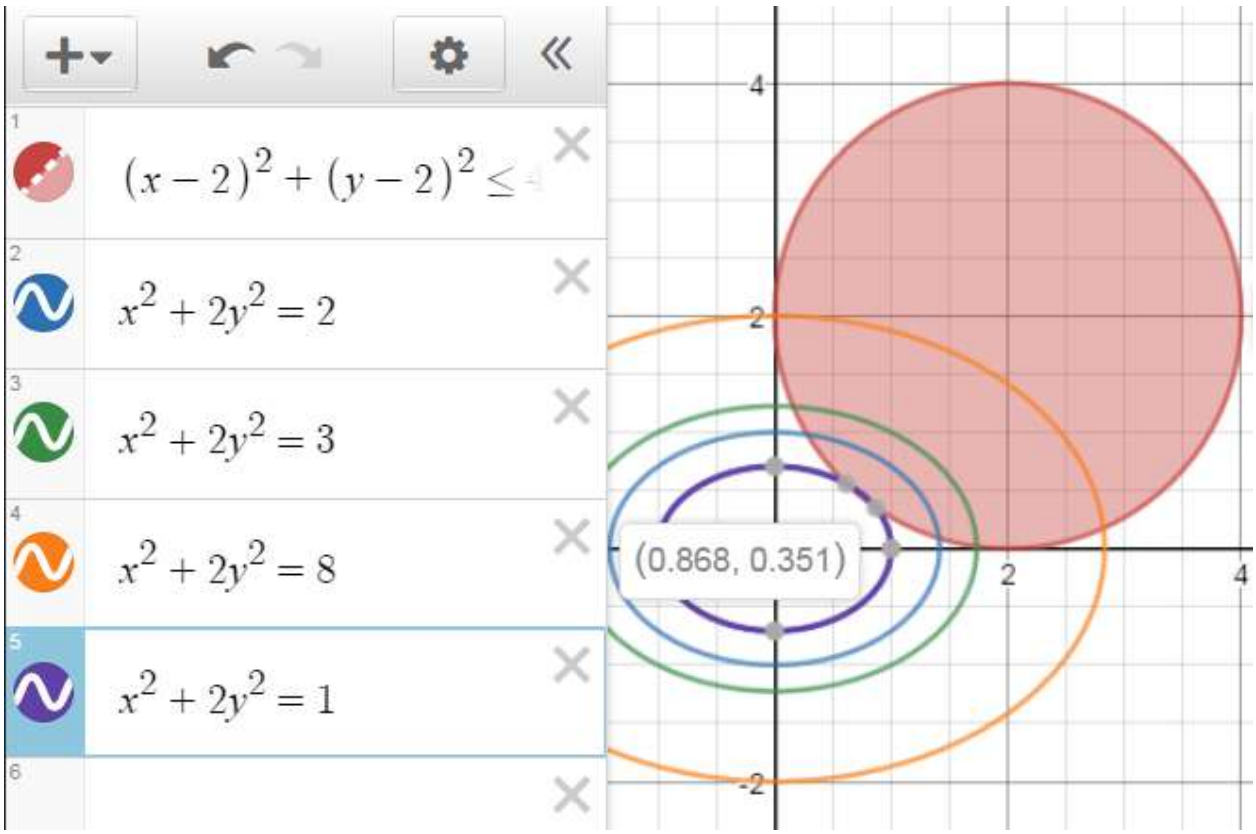


Рис.2

Значение целевой функции = 1,001232

Координаты точки минимума и значение функции, найденные с помощью программы:

Значение целевой функции = 1,06208633273267

Координаты точки минимума 0,890924293581593; 0,335581019575538;

Пример 2.

1x[1]^2+2x[2]^2

g1(x) = (x[1]-3)^2 + (x[2]-2)^2<=4

g2(x) = (x[1]-3)^2 + (x[2]-3)^2<=4

Была найдена точка минимума, также значение функции, показанное на «Рис.3».

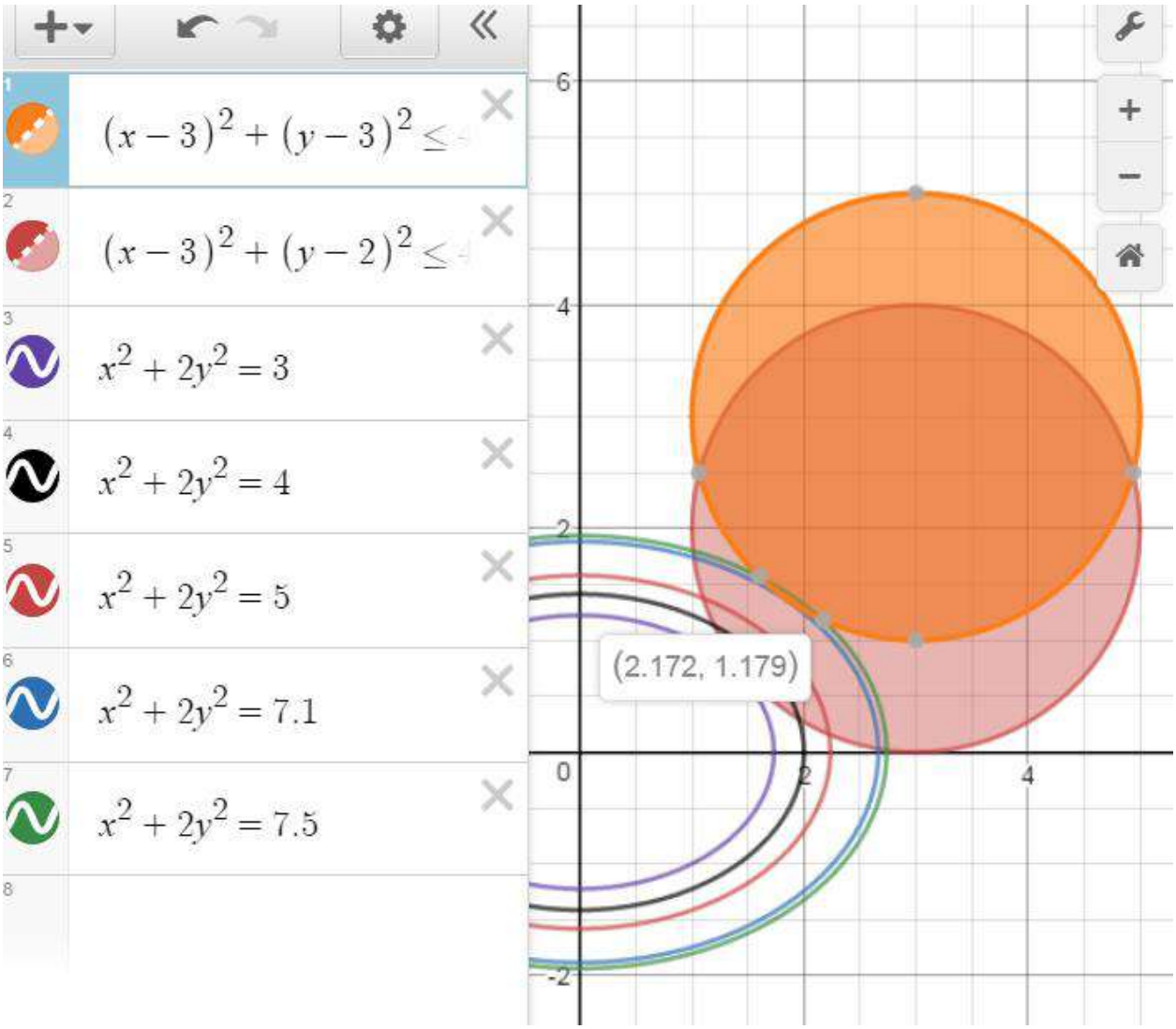


Рис.3

Значение целевой функции = 7,492

Координаты точки минимума и значение функции, найденные с помощью программы:

Значение целевой функции = 7,52977485901838

Координаты точки минимума 2,16130939597274; 1,18423273152282;

Пример 3.

1x[1]^2+2x[2]^2

g1(x) = (x[1]-7)^2 + (x[2]-6)^2<=49

Была найдена точка минимума, также значение функции, показанное на «Рис.4».

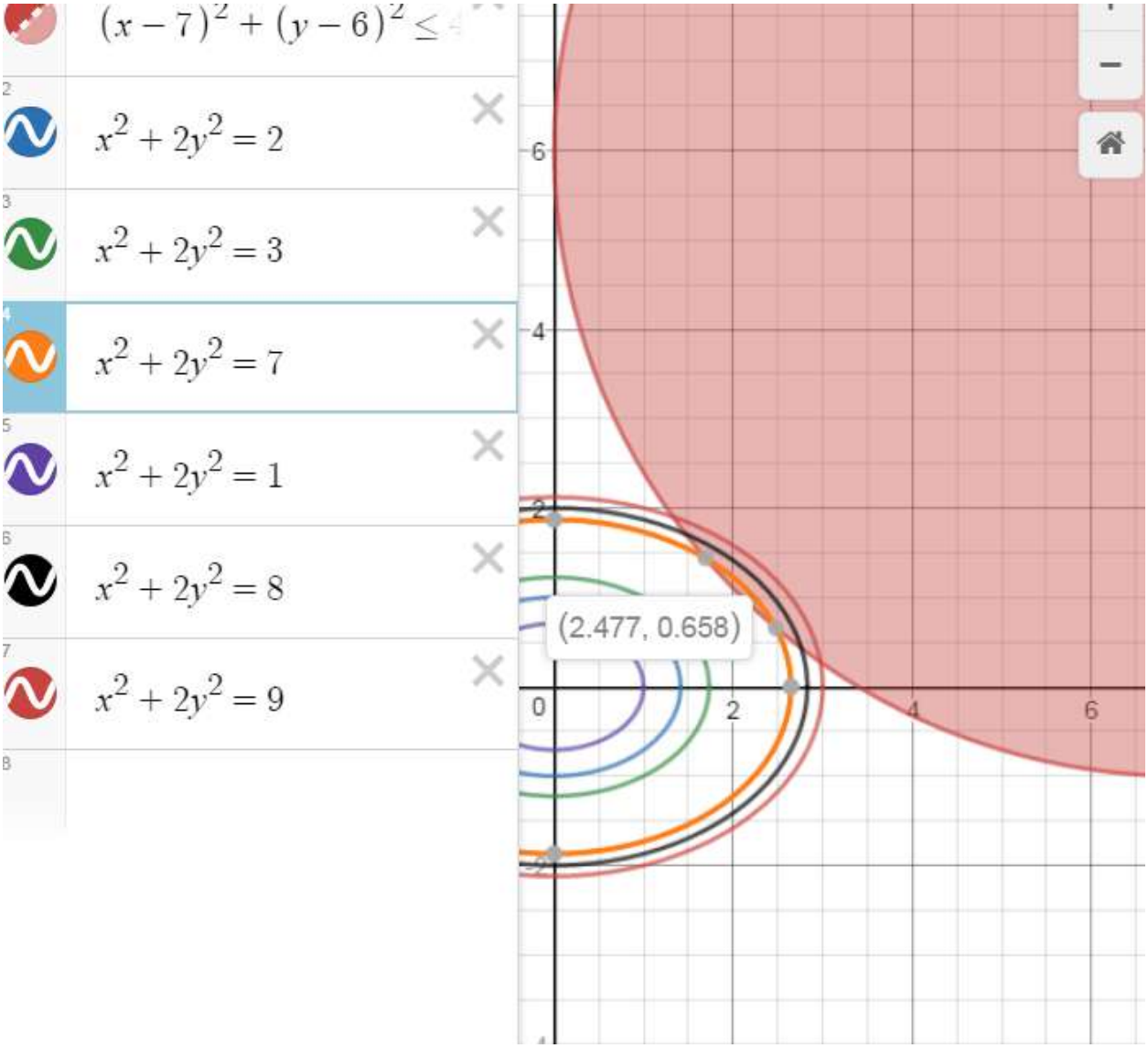


Рис.4

Значение целевой функции = 7,001457

Координаты точки минимума и значение функции, найденные с помощью программы:

Значение целевой функции = 7,02344528894893

Координаты точки минимума 2,43248122283472; 0,695482033057106

4.3. Результаты численных экспериментов

Далее представлены примеры тестированных задач. Время, которое тратит программа на решение при различных параметрах отбрасывания и типах обновления аппроксимирующих множеств представлено в таблице (Приложение2).

1) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2 min

g1(x) = (x[1]-6)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-5)^2<=25

g2(x) = (x[1]-8)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-7)^2<=25

g3(x) = (x[1]-5)^2 + (x[2]-8)^2 + (x[3]-6)^2<=25

Значение = 24,2977085921591

Координаты 6,67075829243351; 4,43275498632544; 2,92048010902491;

2) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2 min

g1(x) = (x[1]-13)^2 + (x[2]-19)^2 + (x[3]-17)^2<=100

g2(x) = (x[1]-17)^2 + (x[2]-15)^2 + (x[3]-19)^2<=100

g3(x) = (x[1]-14)^2 + (x[2]-19)^2 + (x[3]-14)^2<=100

Значение= 67,8977819763827

Координаты 14,1157214638023; 12,0595486619243; 9,88765439624393;

3) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2

g1(x) = (x[1]-16)^2 + (x[2]-19)^2 + (x[3]-19)^2 + (x[4]-15)^2<=100

g2(x) = (x[1]-15)^2 + (x[2]-18)^2 + (x[3]-18)^2 + (x[4]-12)^2<=100

g3(x) = (x[1]-13)^2 + (x[2]-14)^2 + (x[3]-15)^2 + (x[4]-15)^2<=100

g4(x) = (x[1]-10)^2 + (x[2]-11)^2 + (x[3]-13)^2 + (x[4]-10)^2<=100

Значение= 116,706292042945

Координаты 15,1692182896566; 15,5982311093299; 12,753930104239; 8,01970530547781;

4) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2

g1(x) = (x[1]-14)^2 + (x[2]-17)^2 + (x[3]-16)^2 + (x[4]-16)^2<=100

g2(x) = (x[1]-15)^2 + (x[2]-13)^2 + (x[3]-17)^2 + (x[4]-10)^2<=100

Значение= 105,636069833765

Координаты 13,23704852521; 13,8078767337208; 10,5158077705644; 8,30896113235499;

5) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2

g1(x) = (x[1]-6)^2 + (x[2]-2)^2 + (x[3]-14)^2 + (x[4]-14)^2<=324

g2(x) = (x[1]-16)^2 + (x[2]-11)^2 + (x[3]-16)^2 + (x[4]-9)^2<=324

g3(x) = (x[1]-6)^2 + (x[2]-9)^2 + (x[3]-15)^2 + (x[4]-8)^2<=324

g4(x) = (x[1]-9)^2 + (x[2]-15)^2 + (x[3]-16)^2 + (x[4]-6)^2<=324

g5(x) = (x[1]-12)^2 + (x[2]-4)^2 + (x[3]-9)^2 + (x[4]-9)^2<=324

Значение= 30,1136026111107

Координаты 10,0523004923179; 3,80479790385652; 2,88252958404841; 0,951029389733634;

6) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2

g1(x) = (x[1]-9)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-8)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-8)^2<=25

g2(x) = (x[1]-9)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-9)^2 + (x[4]-8)^2 + (x[5]-7)^2<=25

g3(x) = (x[1]-9)^2 + (x[2]-9)^2 + (x[3]-9)^2 + (x[4]-5)^2 + (x[5]-5)^2<=25

g4(x) = (x[1]-9)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-5)^2 + (x[4]-5)^2 + (x[5]-7)^2<=25

g5(x) = (x[1]-5)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-9)^2 + (x[4]-7)^2 + (x[5]-5)^2<=25

g6(x) = (x[1]-6)^2 + (x[2]-5)^2 + (x[3]-6)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-7)^2<=25

g7(x) = (x[1]-9)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-5)^2 + (x[4]-7)^2 + (x[5]-5)^2<=25

Значение= 84,510417376048

Координаты 8,72188633477953; 5,3285447107196; 6,23639809200048; 5,99326967962077; 4,48983372506894;

7) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2

g1(x) = (x[1]-9)^2 + (x[2]-15)^2 + (x[3]-10)^2 + (x[4]-16)^2 + (x[5]-2)^2<=324

g2(x) = (x[1]-4)^2 + (x[2]-12)^2 + (x[3]-14)^2 + (x[4]-10)^2 + (x[5]-17)^2<=324

g3(x) = (x[1]-12)^2 + (x[2]-19)^2 + (x[3]-15)^2 + (x[4]-13)^2 + (x[5]-10)^2<=324

g4(x) = (x[1]-12)^2 + (x[2]-9)^2 + (x[3]-4)^2 + (x[4]-2)^2 + (x[5]-9)^2<=324

g5(x) = (x[1]-16)^2 + (x[2]-4)^2 + (x[3]-4)^2 + (x[4]-8)^2 + (x[5]-9)^2<=324

g6(x) = (x[1]-13)^2 + (x[2]-16)^2 + (x[3]-7)^2 + (x[4]-17)^2 + (x[5]-10)^2<=324

g7(x) = (x[1]-19)^2 + (x[2]-4)^2 + (x[3]-5)^2 + (x[4]-15)^2 + (x[5]-3)^2<=324

g8(x) = (x[1]-16)^2 + (x[2]-3)^2 + (x[3]-16)^2 + (x[4]-18)^2 + (x[5]-8)^2<=324

Значение= 80,432137403613

Координаты 9,7162030629911; 6,87034133807775; 7,40971333481666; 4,93172431613177; 3,00384287909787;

8) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2

g1(x) = (x[1]-4)^2 + (x[2]-4)^2 + (x[3]-4)^2 + (x[4]-7)^2 + (x[5]-5)^2<=36

g2(x) = (x[1]-4)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-5)^2 + (x[4]-6)^2 + (x[5]-4)^2<=36

g3(x) = (x[1]-5)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-4)^2 + (x[4]-6)^2 + (x[5]-7)^2<=36

g4(x) = (x[1]-6)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-6)^2 + (x[4]-8)^2 + (x[5]-7)^2<=36

Значение= 243,424532371

5,69589493528736; 4,90955354058361; 4,00081529139728; 4,23850569284276; 2,92897901326647;

9) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2+6x[6]^2

g1(x) = (x[1]-8)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-16)^2 + (x[4]-2)^2 + (x[5]-18)^2 + (x[6]-10)^2<=324

g2(x) = (x[1]-15)^2 + (x[2]-2)^2 + (x[3]-11)^2 + (x[4]-13)^2 + (x[5]-11)^2 + (x[6]-12)^2<=324

g3(x) = (x[1]-5)^2 + (x[2]-14)^2 + (x[3]-4)^2 + (x[4]-15)^2 + (x[5]-10)^2 + (x[6]-9)^2<=324

g4(x) = (x[1]-11)^2 + (x[2]-18)^2 + (x[3]-16)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-2)^2 + (x[6]-9)^2<=324

g5(x) = (x[1]-14)^2 + (x[2]-12)^2 + (x[3]-14)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-18)^2 + (x[6]-17)^2<=324

Значение= 140,259808981579

Координаты 13,1330509672824; 9,49749046374985; 8,78799004556251; 4,38289669226819; 6,79735092166945; 5,04157759544827;

10) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2+6x[6]^2

g1(x) = (x[1]-12)^2 + (x[2]-33)^2 + (x[3]-18)^2 + (x[4]-21)^2 + (x[5]-7)^2 + (x[6]-32)^2<=841

g2(x) = (x[1]-12)^2 + (x[2]-25)^2 + (x[3]-28)^2 + (x[4]-16)^2 + (x[5]-27)^2 + (x[6]-28)^2<=841

g3(x) = (x[1]-32)^2 + (x[2]-22)^2 + (x[3]-32)^2 + (x[4]-10)^2 + (x[5]-10)^2 + (x[6]-28)^2<=841

g4(x) = (x[1]-23)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-28)^2 + (x[4]-10)^2 + (x[5]-22)^2 + (x[6]-19)^2<=841

Значение= 246,187399104349

Координаты 14,561140203301; 20,6287665493604; 18,4054705835416; 8,14779525112552; 9,23950677913834; 9,39393319191805;

11) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2+6x[6]^2

g1(x) = (x[1]-8)^2 + (x[2]-9)^2 + (x[3]-8)^2 + (x[4]-5)^2 + (x[5]-9)^2 + (x[6]-6)^2<=36

g2(x) = (x[1]-5)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-4)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-6)^2 + (x[6]-6)^2<=36

g3(x) = (x[1]-6)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-7)^2 + (x[4]-6)^2 + (x[5]-4)^2 + (x[6]-8)^2<=36

g4(x) = (x[1]-8)^2 + (x[2]-9)^2 + (x[3]-8)^2 + (x[4]-5)^2 + (x[5]-8)^2 + (x[6]-5)^2<=36

g5(x) = (x[1]-5)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-6)^2 + (x[4]-7)^2 + (x[5]-8)^2 + (x[6]-8)^2<=36

Значение= 100,950061251653

6,01650123572076; 7,02542153081302; 5,45939822430358; 4,35241879487871; 5,01899127737077; 3,66664845250443;

12) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2+6x[6]^2

g1(x) = (x[1]-14)^2 + (x[2]-9)^2 + (x[3]-6)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-10)^2 + (x[6]-6)^2<=121

g2(x) = (x[1]-8)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-10)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-12)^2 + (x[6]-7)^2<=121

g3(x) = (x[1]-13)^2 + (x[2]-4)^2 + (x[3]-5)^2 + (x[4]-12)^2 + (x[5]-13)^2 + (x[6]-13)^2<=121

g4(x) = (x[1]-14)^2 + (x[2]-14)^2 + (x[3]-7)^2 + (x[4]-11)^2 + (x[5]-9)^2 + (x[6]-5)^2<=121

g5(x) = (x[1]-13)^2 + (x[2]-10)^2 + (x[3]-5)^2 + (x[4]-11)^2 + (x[5]-4)^2 + (x[6]-7)^2<=121

g6(x) = (x[1]-4)^2 + (x[2]-11)^2 + (x[3]-10)^2 + (x[4]-7)^2 + (x[5]-4)^2 + (x[6]-13)^2<=121

Значение= 139,193790825853

9,65966429961845; 5,83359968118474; 5,50198925111783; 7,36516790192772; 6,12025842418641; 6,88316594697818;

13) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2+6x[6]^2

g1(x) = (x[1]-4)^2 + (x[2]-2)^2 + (x[3]-16)^2 + (x[4]-8)^2 + (x[5]-18)^2 + (x[6]-17)^2<=324

g2(x) = (x[1]-5)^2 + (x[2]-5)^2 + (x[3]-3)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-8)^2 + (x[6]-14)^2<=324

g3(x) = (x[1]-2)^2 + (x[2]-10)^2 + (x[3]-14)^2 + (x[4]-12)^2 + (x[5]-12)^2 + (x[6]-16)^2<=324

Значение= 116,089665425003

3,7485967631572; 1,57155110190315; 9,99778481968742; 3,86989390471203; 6,74734326023734; 4,9980533464904;

14) 1x[1]^2+2x[2]^2+3x[3]^2+4x[4]^2+5x[5]^2+6x[6]^2+7x[7]^2

g1(x) = (x[1]-7)^2 + (x[2]-8)^2 + (x[3]-4)^2 + (x[4]-9)^2 + (x[5]-6)^2 + (x[6]-4)^2 + (x[7]-9)^2<=36

g2(x) = (x[1]-4)^2 + (x[2]-5)^2 + (x[3]-7)^2 + (x[4]-6)^2 + (x[5]-9)^2 + (x[6]-6)^2 + (x[7]-8)^2<=36

g3(x) = (x[1]-8)^2 + (x[2]-8)^2 + (x[3]-7)^2 + (x[4]-6)^2 + (x[5]-5)^2 + (x[6]-7)^2 + (x[7]-4)^2<=36

g4(x) = (x[1]-8)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-6)^2 + (x[4]-6)^2 + (x[5]-8)^2 + (x[6]-5)^2 + (x[7]-7)^2<=36

g5(x) = (x[1]-8)^2 + (x[2]-7)^2 + (x[3]-9)^2 + (x[4]-4)^2 + (x[5]-8)^2 + (x[6]-8)^2 + (x[7]-5)^2<=36

g6(x) = (x[1]-7)^2 + (x[2]-6)^2 + (x[3]-8)^2 + (x[4]-5)^2 + (x[5]-6)^2 + (x[6]-4)^2 + (x[7]-4)^2<=36

Значение= 768,530776445436

6,49406261291863; 6,59891127664492; 5,77869206590958; 5,54330125078107; 5,70961090621294; 4,06674831075186; 4,68958011683739;

5. РЕШЕНИЕ ИССЛЕДУЕМЫМ МЕТОДОМ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Важнейшими характеристиками любой ценной бумаги являются ее доходность и показатель риска. Риск – это неполучение ожидаемого дохода, вложенного в определенную ценную бумагу. Обычно если ценная бумага обладает низким показателем риска, то она дает небольшую доходность, если же ценная бумага может дать большой доход, она имеет значительные показатели риска.

Если инвестору доступны n ценных бумаг, каждая со своей ожидаемой доходностью, то найдется только одна комбинация ценных бумаг в портфеле, минимизирующая риск портфеля при каждом заданном значении ожидаемой доходности портфеля.

Задача инвестора в модели Марковица такова: из набора портфелей с ожидаемой нормой отдачи необходимо найти такой, который бы обеспечил минимальный уровень риска. Задачу можно свести к решению следующей системы в общем виде:

$$\sigma_p = \sqrt{X^T \cdot \overline{COV} \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} x_i \times x_j \times r_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j} \Rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i \geq m_p$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Доходность каждой ценной бумаги можно рассчитывать по следующему принципу

$$R_t = P_t - P_{t-1} / P_{t-1}, \qquad (7)$$

где, P_t – цена ценной бумаги в период t.

Матрица ковариаций представлена на «Рис.5».

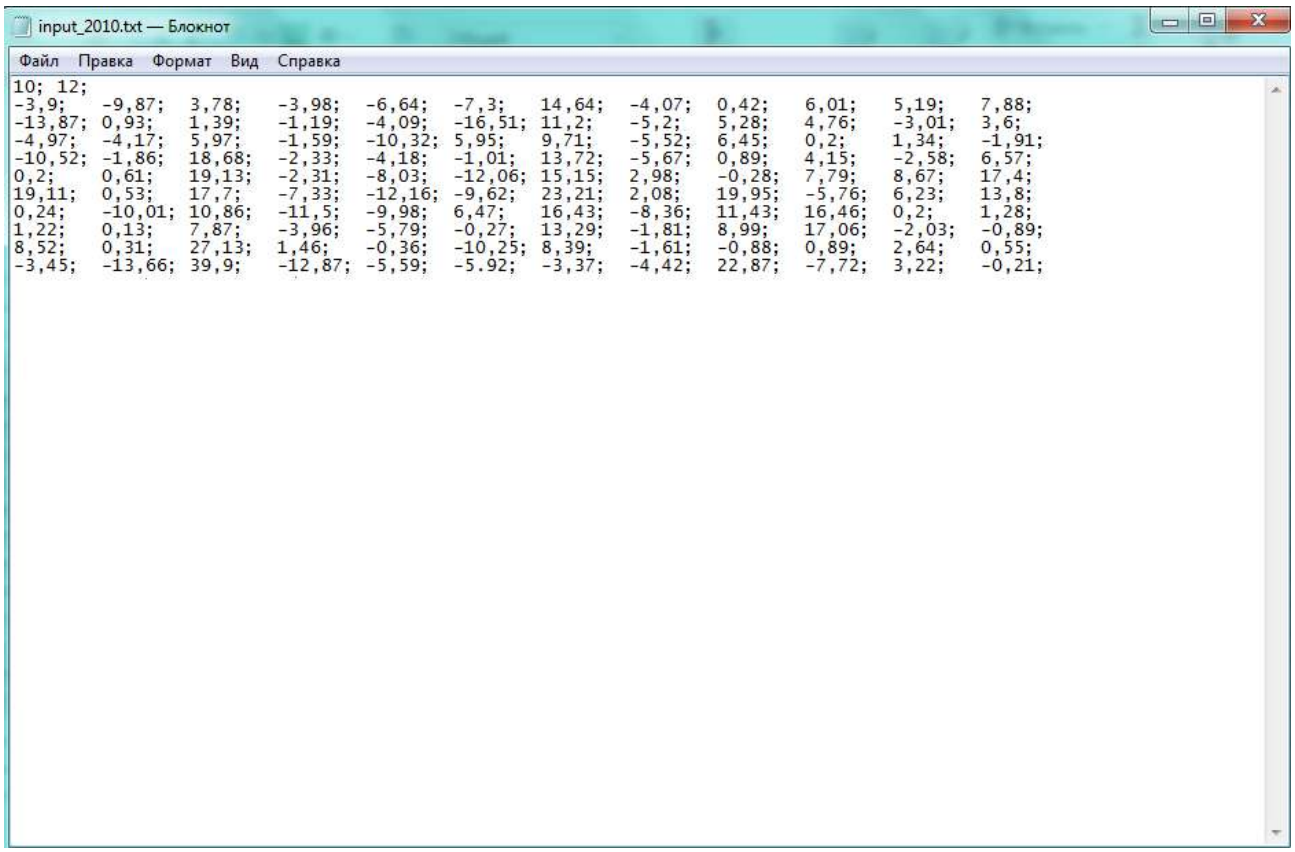
$$\begin{pmatrix} cov(x_1, x_1) & cov(x_1, x_2) & cov(x_1, x_3) \\ cov(x_2, x_1) & cov(x_2, x_2) & cov(x_2, x_1) \\ cov(x_3, x_1) & cov(x_1, x_2) & cov(x_3, x_3) \end{pmatrix}.$$

Рис.5

Для загрузки прикладной задачи, необходимо создать текстовый файл с данными, в котором:

В первой строке размерность данной матрицы, то есть количество строк и столбцов. У нас 10 предприятий, в которые мы готовы вложить деньги и 12 месяцев.

Далее Рассчитывается доходность ценных бумаг каждого предприятия по месяцам по формуле (7). На «Рис.6» представлен подготовленный текстовый файл.


input_2010.txt — Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```
10; 12;
-3,9;   -9,87;  3,78;   -3,98;  -6,64;  -7,3;   14,64;  -4,07;  0,42;   6,01;   5,19;   7,88;
-13,87; 0,93;   1,39;   -1,19;  -4,09;  -16,51; 11,2;   -5,2;   5,28;   4,76;   -3,01;  3,6;
-4,97;  -4,17;  5,97;   -1,59;  -10,32; 5,95;   9,71;   -5,52;  6,45;   0,2;    1,34;   -1,91;
-10,52; -1,86;  18,68;  -2,33;  -4,18;  -1,01;  13,72;  -5,67;  0,89;   4,15;   -2,58;  6,57;
0,2;    0,61;   19,13;  -2,31;  -8,03;  -12,06; 15,15;  2,98;   -0,28;  7,79;   8,67;   17,4;
19,11;  0,53;   17,7;   -7,33;  -12,16; -9,62;  23,21;  2,08;   19,95;  -5,76;  6,23;   13,8;
0,24;   -10,01; 10,86;  -11,5;  -9,98;  6,47;   16,43;  -8,36;  11,43;  16,46;  0,2;    1,28;
1,22;   0,13;   7,87;   -3,96;  -5,79;  -0,27;  13,29;  -1,81;  8,99;   17,06;  -2,03;  -0,89;
8,52;   0,31;   27,13;  1,46;   -0,36;  -10,25; 8,39;   -1,61;  -0,88;  0,89;   2,64;   0,55;
-3,45;  -13,66; 39,9;   -12,87; -5,59;  -5.92;  -3,37;  -4,42;  22,87;  -7,72;  3,22;   -0,21;
```

Рис. 6

После ввода данных программа находит портфель, обеспечивающий минимальный уровень риска при заданной доходности.

Для проверки работоспособности этой части программы я взяла уже существующие расчеты с акциями крупнейших предприятий российской фондовой биржи по состоянию за 2010 год из работы [11]:

0. Газпром
1. Роснефть
2. Лукойл
3. СургутНГ
4. НорНикель ГМК
5. Северсталь
6. Сбербанк России
7. Банк ВТБ
8. РусГидро
9. Интер РАО ЕЭС

Полученные мной результаты представлены на «Рис.7».

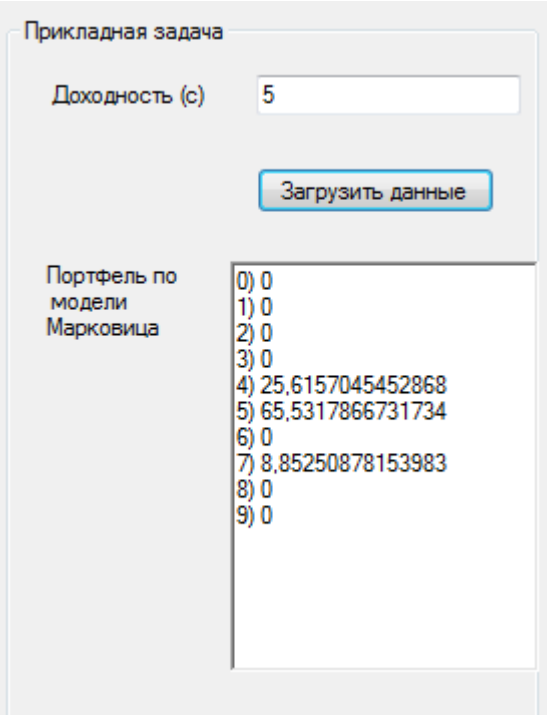


Рис.7

Результаты означают, что 25,615% средств в 2011 году необходимо вложить в акции предприятия №4, то есть в «НорНикель ГМК», 65,531% в акции «Северсталь», и 8,85% в предприятие №7, а именно в акции «Банка ВТБ».

Результаты, полученные в работе [11], представлены на «Рис.8».

Полученный результат может быть интерпретирован так: гарантированный 5-процентный доход требует 65,16% капитала вложить в акции Северстали, 26,12% – в акции НорНикель ГМК, 8,72% – в акции Банка ВТБ. При этом доходность составит 5%, а риск – 10,49%.

Рис.8

Данные за 2015 и 2016 год взяты с сайта [12].

Результаты, полученные с помощью программы на основе данных за 2015 год, представлены на «Рис.9».

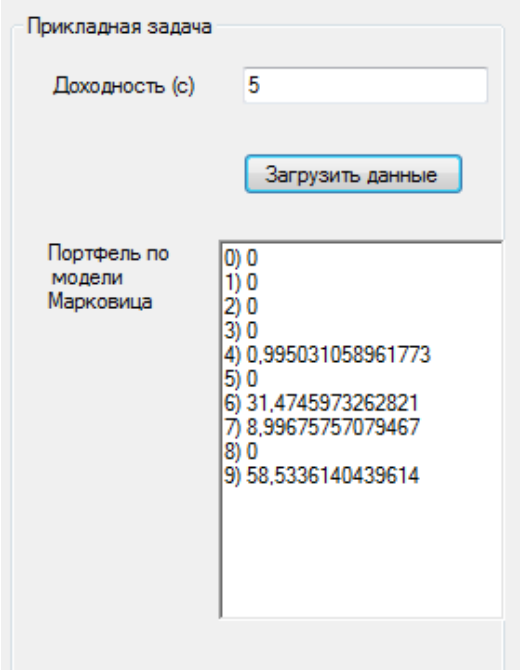


Рис.9

Мы видим, что в 2016 году следует вложить средства в акции «НорНикель ГМК», «Сбербанк России», «Банк ВТБ», «Интер РАО ЕЭС».

Результаты, полученные с помощью программы за 2016 год, представлены на «Рис.10».

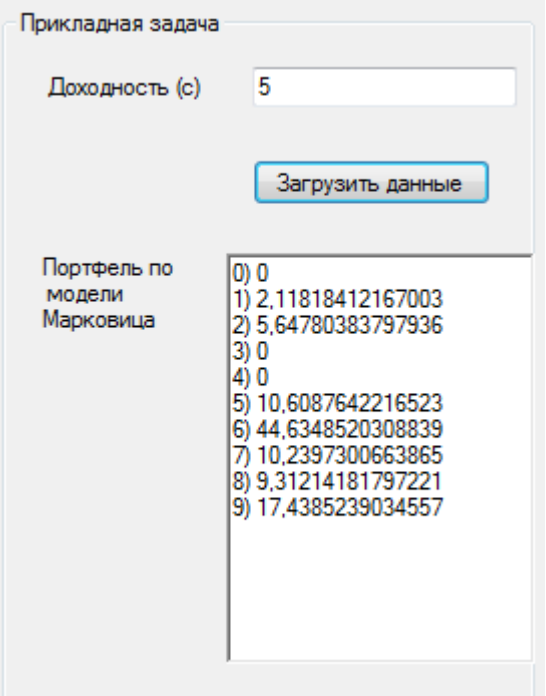


Рис. 10

В 2017 году, исходя из результата программы, мы должны вложить:

2,11% средств в «Роснефть»

5,64% средств в «Лукойл»

10,68% средств в «Северсталь»

44,63% средств в «Сбербанк России»

10,23% средств в «Банк ВТБ»

9,31% средств в «Рус Гидро»

17,43% средств в «Интер РАО ЕЭС».

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Были сделаны следующие выводы:

1. Были изучены известные методы отсечений.
2. Был изучен новый метод отсечений, допускающий периодические обновления аппроксимирующих множеств за счет отбрасывания секущих плоскостей.
3. На языках C++, C# был реализован данный метод отсечений с аппроксимацией как надграфика, так и области ограничений выпуклой функции.
4. Было протестировано некоторое количество примеров различных размерностей, результаты были занесены в таблицу (Приложение1).
5. По протестированным примерам можно сделать следующие рекомендации:
   5.1. Рекомендуется оставлять только «активные» плоскости, так как в этом случае программа работает наиболее быстро.
   5.2. Не рекомендуется использовать полное обновление аппроксимирующих множеств, так как в этом случае программа решает задачу дольше, чем при выборе других типов обновления.
   5.3. Рекомендуется использовать ε_k и σ_k в качестве адаптивных параметров, т.е изменять их при каждом отбрасывании согласно заданному принципу.
   5.4. Чем меньше значение параметров ε_k и σ_k, тем быстрее программа решает данные задачи.
6. Общая рекомендация: Использовать адаптивные параметры ε_k и σ_k и оставлять только «активные» множества.
7. Исследуемым методом была решена некоторая экономическая оптимизационная задача.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Специальная литература:

1. Булатов В.П. Методы погружения в задачах оптимизации
2. В.Ф.Демьянов, Л.В. Васильев. Недифференцируемая оптимизация.
3. Ю.Е. Нестеров. Введение в выпуклую оптимизацию.
4. И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин. Методы отсечений с использованием процедур аппроксимации допустимой области.
5. И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин. Метод отсечений на основе аппроксимации допустимой области семейством опорных плоскостей без вложения погружающих множеств.
6. И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин. Метод отсечений с отбрасыванием секущих плоскостей и возможностью построения на его основе смешанных алгоритмов.
7. И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин. Методы отсечений с одновременной аппроксимацией допустимой области и надграфика целевой функции.
8. И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин. Метод с аппроксимацией области ограничений и надграфика на основе обобщенно-опорных отсекающих плоскостей.
9. И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин. Метод с аппроксимацией допустимой области и надграфика, использующий обновление погружающих множеств.
10. И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин. Метод минимизации с аппроксимацией области ограничений и надграфика целевой функции.
11. И. Большакова, М. Куприянова. Оптимизация портфеля ценных бумаг.

II. Интернет-ресурсы:

12. https://www.finam.ru/ - инвестиционная компания, фондовая биржа.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

```
// MathOptimization_DLL.cpp : Defines the exported functions for the DLL application.
//

#include "stdafx.h"
#include "glpk.h"
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include "SquareFunction.h"
#include "Algorithm.h"
#include "CuttingPlaneMethod.h"
#include "DoubleStepCuttingPlaneMethodWithSubgradient.h"
#include <time.h>

//Создание целевой функции
//dimSpace - размерность пространства
//cObj - коэффициенты целевой функции
Function* CreateObjectiveFunction(int dimSpace, double cObj[])
{
	vector<double> kVal, bVal, aVal;
	for (int i = 0; i < dimSpace; i++)
	{
		kVal.push_back(1);
		aVal.push_back(cObj[i]);
		bVal.push_back(0);
	}
	return new SquareFunction(dimSpace, kVal, bVal, aVal);
}
//Создание функций, задающие допустимую область
//constrSize - кол-во функций
//dimSpace - размерность пространства
//gConstr[] - коэффициенты функций
//radius - радиус сферы
vector<Function*> CreateConstraintFunctions(int constrSize, int dimSpace, double gConstr[], double radius)
{
	vector<Function*> constraintsFunc;
	for (int i = 0; i < constrSize; i++)
	{
		vector<double> kVal, aVal, bVal;
		for (int j = 0; j < dimSpace; j++)
		{
			kVal.push_back(1);
			aVal.push_back(1);
			bVal.push_back(-gConstr[i * dimSpace + j]);
		}
		constraintsFunc.push_back(new SquareFunction(dimSpace, kVal, bVal, aVal, radius));
	}
	return constraintsFunc;
}
// Создание целевой функции для вспомогательной задачи линейного программирования
vector<double> CreateLinearFunctionForAuxiliaryLP(int dimSpace)
{
	vector<double> cObjective;
	for (int i = 0; i < dimSpace; i++)
		cObjective.push_back(-1);
	return cObjective;
}

// Функция решения основной задачи нелинейного программирования
// dimSpace - размерность пространства
// constrSize - количество ограничений
// res1 - результат решения задачи нелинейного программирования
// cObj - коэффициенты целевой функции
// gConstr - коэффициенты функций, задающие вспомогательную область
// radius - радиус сферы
// typeUpdating - тип обновления аппроксимирующих множеств
// isUpdatingTypeAdaptive - признак применения адаптированного параметра обновления аппроксимирующих множеств
// decreasingValue - значение параметра, использующийся в процедурах обновления
// totalAccurancy - значение точночти решения задачи нелинейного программирования
```

```
extern "C" __declspec(dllexport) void __stdcall DoMinimization(
	int dimSpace,
	int constrSize,
	double res1[],
	double cObj[],
	double gConstr[],
	double radius,
	int typeUpdating,
	bool isUpdatingTypeAdaptive,
	double decreasingValue,
	double totalAccurancy)
{
	vector<double> cObjective = CreateLinearFunctionForAuxiliaryLP(dimSpace);
	vector<Function*> constraintsFunc = CreateConstraintFunctions(constrSize, dimSpace, gConstr, radius);
	Function *func = CreateObjectiveFunction(dimSpace, cObj);

	DroppingConstraintParam *eps = NULL;
	DroppingConstraintParam *delta = NULL;
	//Определение типа параметра, использующегося в процедурах обновления аппроксимирующих множеств
	if (typeUpdating == 0)
	{
		// параметры, участвующие в процедуре, в которых аппроксимирующие множества НЕ обновляются
		eps = new  NoneDroppingConstraintParam;
		delta = new  NoneDroppingConstraintParam;
	}
	else
	{
		if (isUpdatingTypeAdaptive)
		{
			//создание адаптированных параметров процедуры обновления аппроксимирующих множеств
			eps = new AdaptiveDroppingConstraintParam(decreasingValue);
			delta = new AdaptiveDroppingConstraintParam(decreasingValue);
		}
		else
		{
			//создание фиксированных параметров процедур обновления аппроксимрующих множеств
			eps = new NonAdaptiveDroppingConstraintParam(decreasingValue);
			delta = new NonAdaptiveDroppingConstraintParam(decreasingValue);
		}
	}

	//создание экземпляра метода отсечений
	Algorithm *algo = new DoubleStepCuttingPlaneMethodWithSubgradient(-10000, 10000, -100000, totalAccurancy, constraintsFunc,
cObjective, eps, delta);
	// запуск метода отсечений
	double* res = algo->doMinimize(func, typeUpdating);

	for (int i = 0; i < dimSpace; i++)
		res1[i] = res[i];

	//удаление из памяти всмогательных объектов
	if (algo != NULL)
		delete algo;
	if (func != NULL)
		delete func;
	if (eps != NULL)
		delete eps;
	if (delta != NULL)
		delete delta;
	for (int i = 0; i < constraintsFunc.size(); i++)
	{
		if (constraintsFunc[i] != NULL)
			delete constraintsFunc[i];
	}
}
```

Создание интерфейса

Создание форм

```
namespace WinOpt
{
   partial class Form1
   {
      /// <summary>
      /// Required designer variable.
      /// </summary>
      private System.ComponentModel.IContainer components = null;

      /// <summary>
      /// Clean up any resources being used.
      /// </summary>
      /// <param name="disposing">true if managed resources should be disposed; otherwise, false.</param>
      protected override void Dispose(bool disposing)
      {
         if (disposing && (components != null))
         {
            components.Dispose();
         }
         base.Dispose(disposing);
      }

      #region Windows Form Designer generated code

      /// <summary>
      /// Required method for Designer support - do not modify
      /// the contents of this method with the code editor.
      /// </summary>
      private void InitializeComponent()
      {
         this.groupBox1 = new System.Windows.Forms.GroupBox();
         this.groupBox2 = new System.Windows.Forms.GroupBox();
         this.upper_textBox2 = new System.Windows.Forms.TextBox();
         this.lower_textBox1 = new System.Windows.Forms.TextBox();
         this.label11 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.label10 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.m_label1 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.m_textBox1 = new System.Windows.Forms.TextBox();
         this.g_label1 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.g_richTextBox2 = new System.Windows.Forms.RichTextBox();
         this.c_label1 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.c_richTextBox1 = new System.Windows.Forms.RichTextBox();
         this.generate_button2 = new System.Windows.Forms.Button();
         this.n_label1 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.n_textBox1 = new System.Windows.Forms.TextBox();
         this.do_button1 = new System.Windows.Forms.Button();
         this.method_groupBox2 = new System.Windows.Forms.GroupBox();
         this.label9 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.richTextBox1 = new System.Windows.Forms.RichTextBox();
         this.label8 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.eps_textBox3 = new System.Windows.Forms.TextBox();
         this.drop_groupBox4 = new System.Windows.Forms.GroupBox();
         this.fixedParam_textBox2 = new System.Windows.Forms.TextBox();
         this.label7 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.label6 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.label5 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.fixed_radioButton2 = new System.Windows.Forms.RadioButton();
         this.adapParam_textBox1 = new System.Windows.Forms.TextBox();
         this.label4 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.label3 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.label2 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.label1 = new System.Windows.Forms.Label();
         this.adaptive_radioButton1 = new System.Windows.Forms.RadioButton();
         this.groupBox3 = new System.Windows.Forms.GroupBox();
         this.radioButton1 = new System.Windows.Forms.RadioButton();
```

```
this.last_radioButton3 = new System.Windows.Forms.RadioButton();
this.active_radioButton2 = new System.Windows.Forms.RadioButton();
this.not_radioButton1 = new System.Windows.Forms.RadioButton();
this.groupBox1.SuspendLayout();
this.groupBox2.SuspendLayout();
this.method_groupBox2.SuspendLayout();
this.drop_groupBox4.SuspendLayout();
this.groupBox3.SuspendLayout();
this.SuspendLayout();
//
// groupBox1
//
this.groupBox1.Controls.Add(this.groupBox2);
this.groupBox1.Controls.Add(this.m_label1);
this.groupBox1.Controls.Add(this.m_textBox1);
this.groupBox1.Controls.Add(this.g_label1);
this.groupBox1.Controls.Add(this.g_richTextBox2);
this.groupBox1.Controls.Add(this.c_label1);
this.groupBox1.Controls.Add(this.c_richTextBox1);
this.groupBox1.Controls.Add(this.generate_button2);
this.groupBox1.Controls.Add(this.n_label1);
this.groupBox1.Controls.Add(this.n_textBox1);
this.groupBox1.Location = new System.Drawing.Point(12, 12);
this.groupBox1.Name = "groupBox1";
this.groupBox1.Size = new System.Drawing.Size(412, 547);
this.groupBox1.TabIndex = 0;
this.groupBox1.TabStop = false;
this.groupBox1.Text = "Генератор задачи";
this.groupBox1.Enter += new System.EventHandler(this.groupBox1_Enter);
//
// groupBox2
//
this.groupBox2.Controls.Add(this.upper_textBox2);
this.groupBox2.Controls.Add(this.lower_textBox1);
this.groupBox2.Controls.Add(this.label11);
this.groupBox2.Controls.Add(this.label10);
this.groupBox2.Location = new System.Drawing.Point(16, 172);
this.groupBox2.Name = "groupBox2";
this.groupBox2.Size = new System.Drawing.Size(378, 82);
this.groupBox2.TabIndex = 10;
this.groupBox2.TabStop = false;
this.groupBox2.Text = "Область генерации точек";
//
// upper_textBox2
//
this.upper_textBox2.Location = new System.Drawing.Point(7, 54);
this.upper_textBox2.Name = "upper_textBox2";
this.upper_textBox2.Size = new System.Drawing.Size(239, 20);
this.upper_textBox2.TabIndex = 3;
//
// lower_textBox1
//
this.lower_textBox1.Location = new System.Drawing.Point(7, 16);
this.lower_textBox1.Name = "lower_textBox1";
this.lower_textBox1.Size = new System.Drawing.Size(239, 20);
this.lower_textBox1.TabIndex = 2;
//
// label11
//
this.label11.AutoSize = true;
this.label11.Location = new System.Drawing.Point(252, 54);
this.label11.Name = "label11";
this.label11.Size = new System.Drawing.Size(93, 13);
this.label11.TabIndex = 1;
this.label11.Text = "Верхняя граница";
//
// label10
//
this.label10.AutoSize = true;
this.label10.Location = new System.Drawing.Point(252, 21);
this.label10.Name = "label10";
```

```
this.label10.Size = new System.Drawing.Size(91, 13);
this.label10.TabIndex = 0;
this.label10.Text = "Нижняя граница";
//
// m_label1
//
this.m_label1.AutoSize = true;
this.m_label1.Location = new System.Drawing.Point(268, 88);
this.m_label1.Name = "m_label1";
this.m_label1.Size = new System.Drawing.Size(87, 13);
this.m_label1.TabIndex = 9;
this.m_label1.Text = "Кол-во функций";
//
// m_textBox1
//
this.m_textBox1.Location = new System.Drawing.Point(16, 81);
this.m_textBox1.Name = "m_textBox1";
this.m_textBox1.Size = new System.Drawing.Size(246, 20);
this.m_textBox1.TabIndex = 8;
this.m_textBox1.TextChanged += new System.EventHandler(this.m_textBox1_TextChanged);
//
// g_label1
//
this.g_label1.AutoSize = true;
this.g_label1.Location = new System.Drawing.Point(268, 373);
this.g_label1.Name = "g_label1";
this.g_label1.Size = new System.Drawing.Size(114, 13);
this.g_label1.TabIndex = 7;
this.g_label1.Text = "Допустимая область";
this.g_label1.Click += new System.EventHandler(this.g_label1_Click);
//
// g_richTextBox2
//
this.g_richTextBox2.Location = new System.Drawing.Point(16, 260);
this.g_richTextBox2.Name = "g_richTextBox2";
this.g_richTextBox2.Size = new System.Drawing.Size(246, 252);
this.g_richTextBox2.TabIndex = 6;
this.g_richTextBox2.Text = "";
//
// c_label1
//
this.c_label1.AutoSize = true;
this.c_label1.Location = new System.Drawing.Point(268, 135);
this.c_label1.Name = "c_label1";
this.c_label1.Size = new System.Drawing.Size(97, 13);
this.c_label1.TabIndex = 5;
this.c_label1.Text = "Целевая функция";
//
// c_richTextBox1
//
this.c_richTextBox1.Location = new System.Drawing.Point(16, 125);
this.c_richTextBox1.Name = "c_richTextBox1";
this.c_richTextBox1.Size = new System.Drawing.Size(246, 40);
this.c_richTextBox1.TabIndex = 4;
this.c_richTextBox1.Text = "";
this.c_richTextBox1.TextChanged += new System.EventHandler(this.c_richTextBox1_TextChanged);
//
// generate_button2
//
this.generate_button2.Location = new System.Drawing.Point(16, 518);
this.generate_button2.Name = "generate_button2";
this.generate_button2.Size = new System.Drawing.Size(145, 23);
this.generate_button2.TabIndex = 3;
this.generate_button2.Text = "Генерировать";
this.generate_button2.UseVisualStyleBackColor = true;
this.generate_button2.Click += new System.EventHandler(this.generate_button2_Click);
//
// n_label1
//
this.n_label1.AutoSize = true;
this.n_label1.Location = new System.Drawing.Point(268, 33);
```

```
this.n_label1.Name = "n_label1";
this.n_label1.Size = new System.Drawing.Size(80, 26);
this.n_label1.TabIndex = 2;
this.n_label1.Text = "Размерность\r\n пространства";
//
// n_textBox1
//
this.n_textBox1.Location = new System.Drawing.Point(16, 30);
this.n_textBox1.Name = "n_textBox1";
this.n_textBox1.Size = new System.Drawing.Size(246, 20);
this.n_textBox1.TabIndex = 1;
this.n_textBox1.TextChanged += new System.EventHandler(this.n_textBox1_TextChanged);
//
// do_button1
//
this.do_button1.Location = new System.Drawing.Point(15, 517);
this.do_button1.Name = "do_button1";
this.do_button1.Size = new System.Drawing.Size(75, 23);
this.do_button1.TabIndex = 0;
this.do_button1.Text = "Рассчитать";
this.do_button1.UseVisualStyleBackColor = true;
this.do_button1.Click += new System.EventHandler(this.do_button1_Click);
//
// method_groupBox2
//
this.method_groupBox2.Controls.Add(this.label9);
this.method_groupBox2.Controls.Add(this.richTextBox1);
this.method_groupBox2.Controls.Add(this.label8);
this.method_groupBox2.Controls.Add(this.eps_textBox3);
this.method_groupBox2.Controls.Add(this.drop_groupBox4);
this.method_groupBox2.Controls.Add(this.groupBox3);
this.method_groupBox2.Controls.Add(this.do_button1);
this.method_groupBox2.Location = new System.Drawing.Point(440, 13);
this.method_groupBox2.Name = "method_groupBox2";
this.method_groupBox2.Size = new System.Drawing.Size(404, 546);
this.method_groupBox2.TabIndex = 1;
this.method_groupBox2.TabStop = false;
this.method_groupBox2.Text = "Метод отсечений";
//
// label9
//
this.label9.AutoSize = true;
this.label9.Location = new System.Drawing.Point(280, 418);
this.label9.Name = "label9";
this.label9.Size = new System.Drawing.Size(52, 13);
this.label9.TabIndex = 6;
this.label9.Text = "Решение";
//
// richTextBox1
//
this.richTextBox1.Location = new System.Drawing.Point(15, 358);
this.richTextBox1.Name = "richTextBox1";
this.richTextBox1.Size = new System.Drawing.Size(254, 153);
this.richTextBox1.TabIndex = 5;
this.richTextBox1.Text = "";
this.richTextBox1.TextChanged += new System.EventHandler(this.richTextBox1_TextChanged);
//
// label8
//
this.label8.AutoSize = true;
this.label8.Location = new System.Drawing.Point(278, 330);
this.label8.Name = "label8";
this.label8.Size = new System.Drawing.Size(101, 13);
this.label8.TabIndex = 4;
this.label8.Text = "Точность решения";
//
// eps_textBox3
//
this.eps_textBox3.Location = new System.Drawing.Point(15, 330);
this.eps_textBox3.Name = "eps_textBox3";
this.eps_textBox3.Size = new System.Drawing.Size(254, 20);
```

```
this.eps_textBox3.TabIndex = 3;
//
// drop_groupBox4
//
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.fixedParam_textBox2);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.label7);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.label6);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.label5);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.fixed_radioButton2);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.adapParam_textBox1);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.label4);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.label3);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.label2);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.label1);
this.drop_groupBox4.Controls.Add(this.adaptive_radioButton1);
this.drop_groupBox4.Location = new System.Drawing.Point(15, 163);
this.drop_groupBox4.Name = "drop_groupBox4";
this.drop_groupBox4.Size = new System.Drawing.Size(383, 147);
this.drop_groupBox4.TabIndex = 2;
this.drop_groupBox4.TabStop = false;
this.drop_groupBox4.Text = "Параметры отбрасывания";
//
// fixedParam_textBox2
//
this.fixedParam_textBox2.Location = new System.Drawing.Point(266, 78);
this.fixedParam_textBox2.Name = "fixedParam_textBox2";
this.fixedParam_textBox2.Size = new System.Drawing.Size(32, 20);
this.fixedParam_textBox2.TabIndex = 10;
//
// label7
//
this.label7.AutoSize = true;
this.label7.Location = new System.Drawing.Point(264, 62);
this.label7.Name = "label7";
this.label7.Size = new System.Drawing.Size(34, 13);
this.label7.TabIndex = 9;
this.label7.Text = "---------";
//
// label6
//
this.label6.AutoSize = true;
this.label6.Location = new System.Drawing.Point(265, 51);
this.label6.Name = "label6";
this.label6.Size = new System.Drawing.Size(28, 13);
this.label6.TabIndex = 8;
this.label6.Text = "E{k}";
//
// label5
//
this.label5.AutoSize = true;
this.label5.Location = new System.Drawing.Point(212, 62);
this.label5.Name = "label5";
this.label5.Size = new System.Drawing.Size(46, 13);
this.label5.TabIndex = 7;
this.label5.Text = "E{k+1}=";
//
// fixed_radioButton2
//
this.fixed_radioButton2.AutoSize = true;
this.fixed_radioButton2.Location = new System.Drawing.Point(215, 27);
this.fixed_radioButton2.Name = "fixed_radioButton2";
this.fixed_radioButton2.Size = new System.Drawing.Size(121, 17);
this.fixed_radioButton2.TabIndex = 6;
this.fixed_radioButton2.TabStop = true;
this.fixed_radioButton2.Text = "Заданные заранее";
this.fixed_radioButton2.UseVisualStyleBackColor = true;
this.fixed_radioButton2.CheckedChanged += new System.EventHandler(this.fixed_radioButton2_CheckedChanged);
//
// adapParam_textBox1
//
this.adapParam_textBox1.Location = new System.Drawing.Point(66, 115);
```

```
this.adapParam_textBox1.Name = "adapParam_textBox1";
this.adapParam_textBox1.Size = new System.Drawing.Size(30, 20);
this.adapParam_textBox1.TabIndex = 5;
//
// label4
//
this.label4.AutoSize = true;
this.label4.Location = new System.Drawing.Point(63, 99);
this.label4.Name = "label4";
this.label4.Size = new System.Drawing.Size(34, 13);
this.label4.TabIndex = 4;
this.label4.Text = "---------";
//
// label3
//
this.label3.AutoSize = true;
this.label3.Location = new System.Drawing.Point(69, 86);
this.label3.Name = "label3";
this.label3.Size = new System.Drawing.Size(27, 13);
this.label3.TabIndex = 3;
this.label3.Text = "a{k}";
//
// label2
//
this.label2.AutoSize = true;
this.label2.Location = new System.Drawing.Point(17, 96);
this.label2.Name = "label2";
this.label2.Size = new System.Drawing.Size(45, 13);
this.label2.TabIndex = 2;
this.label2.Text = "a{k+1}=";
//
// label1
//
this.label1.AutoSize = true;
this.label1.Location = new System.Drawing.Point(17, 62);
this.label1.Name = "label1";
this.label1.Size = new System.Drawing.Size(107, 13);
this.label1.TabIndex = 1;
this.label1.Text = "E{k+1} = a{k}*F(x{k})";
//
// adaptive_radioButton1
//
this.adaptive_radioButton1.AutoSize = true;
this.adaptive_radioButton1.Location = new System.Drawing.Point(17, 27);
this.adaptive_radioButton1.Name = "adaptive_radioButton1";
this.adaptive_radioButton1.Size = new System.Drawing.Size(87, 17);
this.adaptive_radioButton1.TabIndex = 0;
this.adaptive_radioButton1.TabStop = true;
this.adaptive_radioButton1.Text = "Адаптивные";
this.adaptive_radioButton1.UseVisualStyleBackColor = true;
this.adaptive_radioButton1.CheckedChanged += new System.EventHandler(this.adaptive_radioButton1_CheckedChanged);
//
// groupBox3
//
this.groupBox3.Controls.Add(this.radioButton1);
this.groupBox3.Controls.Add(this.last_radioButton3);
this.groupBox3.Controls.Add(this.active_radioButton2);
this.groupBox3.Controls.Add(this.not_radioButton1);
this.groupBox3.Location = new System.Drawing.Point(15, 29);
this.groupBox3.Name = "groupBox3";
this.groupBox3.Size = new System.Drawing.Size(383, 118);
this.groupBox3.TabIndex = 1;
this.groupBox3.TabStop = false;
this.groupBox3.Text = "Тип обновления аппроксимирующих множеств";
//
// radioButton1
//
this.radioButton1.AutoSize = true;
this.radioButton1.Location = new System.Drawing.Point(17, 95);
this.radioButton1.Name = "radioButton1";
this.radioButton1.Size = new System.Drawing.Size(151, 17);
```

```
    this.radioButton1.TabIndex = 3;
    this.radioButton1.TabStop = true;
    this.radioButton1.Text = "ПОЛНОЕ ОБНОВЛЕНИЕ";
    this.radioButton1.UseVisualStyleBackColor = true;
    this.radioButton1.CheckedChanged += new System.EventHandler(this.radioButton1_CheckedChanged);
    //
    // last_radioButton3
    //
    this.last_radioButton3.AutoSize = true;
    this.last_radioButton3.Location = new System.Drawing.Point(17, 75);
    this.last_radioButton3.Name = "last_radioButton3";
    this.last_radioButton3.Size = new System.Drawing.Size(264, 17);
    this.last_radioButton3.TabIndex = 2;
    this.last_radioButton3.TabStop = true;
    this.last_radioButton3.Text = "ОСТАВЛЯТЬ N+1 - ПОСЛЕДНИЕ ПЛОСКОСТИ";
    this.last_radioButton3.UseVisualStyleBackColor = true;
    this.last_radioButton3.CheckedChanged += new System.EventHandler(this.last_radioButton3_CheckedChanged);
    //
    // active_radioButton2
    //
    this.active_radioButton2.AutoSize = true;
    this.active_radioButton2.Location = new System.Drawing.Point(17, 52);
    this.active_radioButton2.Name = "active_radioButton2";
    this.active_radioButton2.Size = new System.Drawing.Size(236, 17);
    this.active_radioButton2.TabIndex = 1;
    this.active_radioButton2.TabStop = true;
    this.active_radioButton2.Text = "ОСТАВЛЯТЬ \"АКТИВНЫЕ\" ПЛОСКОСТИ";
    this.active_radioButton2.UseVisualStyleBackColor = true;
    this.active_radioButton2.CheckedChanged += new System.EventHandler(this.active_radioButton2_CheckedChanged);
    //
    // not_radioButton1
    //
    this.not_radioButton1.AutoSize = true;
    this.not_radioButton1.Location = new System.Drawing.Point(17, 28);
    this.not_radioButton1.Name = "not_radioButton1";
    this.not_radioButton1.Size = new System.Drawing.Size(111, 17);
    this.not_radioButton1.TabIndex = 0;
    this.not_radioButton1.TabStop = true;
    this.not_radioButton1.Text = "НЕ ОБНОВЛЯТЬ";
    this.not_radioButton1.UseVisualStyleBackColor = true;
    this.not_radioButton1.CheckedChanged += new System.EventHandler(this.not_radioButton1_CheckedChanged);
    //
    // Form1
    //
    this.AutoScaleDimensions = new System.Drawing.SizeF(6F, 13F);
    this.AutoScaleMode = System.Windows.Forms.AutoScaleMode.Font;
    this.ClientSize = new System.Drawing.Size(856, 571);
    this.Controls.Add(this.method_groupBox2);
    this.Controls.Add(this.groupBox1);
    this.Name = "Form1";
    this.Text = "Form1";
    this.Load += new System.EventHandler(this.Form1_Load);
    this.groupBox1.ResumeLayout(false);
    this.groupBox1.PerformLayout();
    this.groupBox2.ResumeLayout(false);
    this.groupBox2.PerformLayout();
    this.method_groupBox2.ResumeLayout(false);
    this.method_groupBox2.PerformLayout();
    this.drop_groupBox4.ResumeLayout(false);
    this.drop_groupBox4.PerformLayout();
    this.groupBox3.ResumeLayout(false);
    this.groupBox3.PerformLayout();
    this.ResumeLayout(false);

}

#endregion

private System.Windows.Forms.GroupBox groupBox1;
private System.Windows.Forms.TextBox n_textBox1;
private System.Windows.Forms.Button do_button1;
```

```
        private System.Windows.Forms.Label n_label1;
        private System.Windows.Forms.Button generate_button2;
        private System.Windows.Forms.GroupBox method_groupBox2;
        private System.Windows.Forms.RichTextBox g_richTextBox2;
        private System.Windows.Forms.Label c_label1;
        private System.Windows.Forms.RichTextBox c_richTextBox1;
        private System.Windows.Forms.Label g_label1;
        private System.Windows.Forms.Label m_label1;
        private System.Windows.Forms.TextBox m_textBox1;
        private System.Windows.Forms.GroupBox groupBox3;
        private System.Windows.Forms.RadioButton active_radioButton2;
        private System.Windows.Forms.RadioButton not_radioButton1;
        private System.Windows.Forms.RadioButton last_radioButton3;
        private System.Windows.Forms.GroupBox drop_groupBox4;
        private System.Windows.Forms.TextBox adapParam_textBox1;
        private System.Windows.Forms.Label label4;
        private System.Windows.Forms.Label label3;
        private System.Windows.Forms.Label label2;
        private System.Windows.Forms.Label label1;
        private System.Windows.Forms.RadioButton adaptive_radioButton1;
        private System.Windows.Forms.RadioButton fixed_radioButton2;
        private System.Windows.Forms.Label label8;
        private System.Windows.Forms.TextBox eps_textBox3;
        private System.Windows.Forms.TextBox fixedParam_textBox2;
        private System.Windows.Forms.Label label7;
        private System.Windows.Forms.Label label6;
        private System.Windows.Forms.Label label5;
        private System.Windows.Forms.Label label9;
        private System.Windows.Forms.RichTextBox richTextBox1;
        private System.Windows.Forms.RadioButton radioButton1;
        private System.Windows.Forms.GroupBox groupBox2;
        private System.Windows.Forms.TextBox upper_textBox2;
        private System.Windows.Forms.TextBox lower_textBox1;
        private System.Windows.Forms.Label label11;
        private System.Windows.Forms.Label label10;
    }
}
```

Продолжение

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Windows.Forms;
using System.Runtime.InteropServices;

namespace WinOpt
{
    public partial class Form1 : Form
    {
        double eps;
        double bParam;
        int typeUpdatingParam;
        Random rand;
        int dimSpace;
        int count;
        int lowerBound = 4, upperBound = 10;
        List<double> c;
        List<List<double>> g;
        //double[][] g;
        public Form1()
        {
            InitializeComponent();
            rand = new Random();
            dimSpace = 2;
```

```
    count = 1;
    bParam = 2;
    typeUpdatingParam = 0;
    eps = 0.001;

    n_textBox1.Text = dimSpace.ToString();
    m_textBox1.Text = count.ToString();
    eps_textBox3.Text = eps.ToString();
    adapParam_textBox1.Text = bParam.ToString();
    fixedParam_textBox2.Text = bParam.ToString();
    c = new List<double>();
    g = new List<List<double>>();

    method_groupBox2.Enabled = false;
    not_radioButton1.Checked = true;
    adaptive_radioButton1.Checked = true;
    drop_groupBox4.Enabled = false;
    lower_textBox1.Text = lowerBound.ToString();
    upper_textBox2.Text = upperBound.ToString();
}

private void Form1_Load(object sender, EventArgs e)
{

}

private void g_label1_Click(object sender, EventArgs e)
{

}

private void n_textBox1_TextChanged(object sender, EventArgs e)
{

}

private bool IsEqual(List<List<double>> list1, List<double> list2)
{
    for (int i = 0; i < list1.Count; i++)
    {
        bool flag = true;
        for (int j = 0; j < list1[i].Count; j++)
        {
            if (Math.Abs(list1[i][j] - list2[j]) > 0.000000001)
                flag = false;
        }
        if (flag)
            return true;
    }
    return false;
}
private void generateObjectiveFunctionAndFeasibleSet()
{
    c.Clear();
    g.Clear();
    for (int i = 0; i < dimSpace; i++)
        c.Add((double)(i + 1));

    for (int i = 0; i < count; i++)
    {
        List<double> list = new List<double>();
        for (int j = 0; j < dimSpace; j++)
            list.Add(Convert.ToDouble(rand.Next(lowerBound, upperBound)));

        double iter = 0.1;
        while (IsEqual(g, list))
        {
            int pos = rand.Next(0, dimSpace);
            if (pos == dimSpace)
                pos--;
            list[pos] = Convert.ToDouble(lowerBound) + iter;
```

```
            iter = iter / 10;
        }
        g.Add(list);
    }
}

private void printObjectiveFunctionAndFeasibleSet()
{
    c_richTextBox1.Text = "";
    g_richTextBox2.Text = "";

    string str = "";
    if (dimSpace > 0)
        str += c.First().ToString() + "x[1]^2";
    for (int i = 1; i < dimSpace; i++)
        str += ((c[i] >= 0) ? "+" + c[i].ToString() : c[i].ToString()) + "x[" + (i + 1).ToString() + "]^2";
    c_richTextBox1.Text += str;


    for (int i = 0; i < count; i++)
    {
        str = "g" + (i + 1).ToString() + "(x) = ";
        if (dimSpace > 0)
            str += string.Format("(x[1]{0})^2", g[i].First() >= 0 ? "-" + g[i].First().ToString() : "+" + ((-1) * g[i].First()).ToString());// g[i].First().ToString() +
"x[1]^2";
        for (int j = 1; j < dimSpace; j++)
        {
            //str += ((g[i][j] >= 0) ? "+" + g[i][j].ToString() : g[i][j].ToString()) + "x[" + (j + 1).ToString() + "]^2";
            str += string.Format(" + (x[{0}]{1})^2", j + 1, (g[i][j] >= 0) ? "-" + g[i][j].ToString() : "+" + ((-1) * g[i][j]).ToString());
        }
        str += "<=" + Math.Pow(upperBound - lowerBound, 2).ToString();
        g_richTextBox2.Text += str + "\n";
    }

}

private void groupBox1_Enter(object sender, EventArgs e)
{

}

private void m_textBox1_TextChanged(object sender, EventArgs e)
{

}

private void generate_button2_Click(object sender, EventArgs e)
{
    try
    {
        if (!Int32.TryParse(n_textBox1.Text, out dimSpace))
            throw new System.ArgumentException("Ошибка!!! Ошибка ввода dimSpace (размерность пространства)!!!");

        if (dimSpace <= 0)
            throw new System.ArgumentException("Ошибка!!! dimSpace <= 0(размерность пространства)!!!");

        if (!Int32.TryParse(m_textBox1.Text, out count))
            throw new System.ArgumentException("Ошибка!!! Ошибка ввода count (количество функций, задающих допустимую область)!!!");

        if (count <= 0)
            throw new System.ArgumentException("Ошибка!!! count <= 0 (количество функций, задающих допустимую область)!!!");

        if (!int.TryParse(lower_textBox1.Text, out lowerBound))
            throw new System.ArgumentException("Ошибка!!! Неправильный формат поля 'Нижняя граница'");

        if (!int.TryParse(upper_textBox2.Text, out upperBound))
            throw new System.ArgumentException("Ошибка!!! Неправильный формат поля 'Верхняя граница'");

        if (lowerBound >= upperBound)
            throw new System.ArgumentException("Ошибка!!! Значение поля 'Нижняя граница' должна быть строго меньше значения поля
'Верхняя граница'");
```

```
        generateObjectiveFunctionAndFeasibleSet();
        printObjectiveFunctionAndFeasibleSet();

        method_groupBox2.Enabled = true;
    }
    catch (Exception exp)
    {
        MessageBox.Show(exp.Message);
    }

}

private void not_radioButton1_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
{
    drop_groupBox4.Enabled = false;
    typeUpdatingParam = 0;//не обновлять
}

private void active_radioButton2_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
{
    drop_groupBox4.Enabled = true;
    typeUpdatingParam = 1;//оставлять активные плоскости

}
private void radioButton1_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
{
    drop_groupBox4.Enabled = true;
    typeUpdatingParam = 3;//полное обновление

}

private void last_radioButton3_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
{
    drop_groupBox4.Enabled = true;
    typeUpdatingParam = 2;//остлавлять последние плоскости
}

private void adaptive_radioButton1_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
{
    adapParam_textBox1.Enabled = true;
    fixedParam_textBox2.Enabled = false;
}



private void fixed_radioButton2_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
{
    adapParam_textBox1.Enabled = false;
    fixedParam_textBox2.Enabled = true;
}

private void do_button1_Click(object sender, EventArgs e)
{
    try
    {
        richTextBox1.Text = "";
        if (!double.TryParse(eps_textBox3.Text, out eps))
            throw new ArgumentException("Ошибка при считывании параметра 'Точность решения'!!!");

        if (!(eps > 0 && eps < 1))
            throw new ArgumentException("Ошибка!!! Параметр 'Точность решения' должен принадлежать интервалу (0,1)!!!");

        if (adaptive_radioButton1.Checked)
        {
            if (!double.TryParse(adapParam_textBox1.Text, out bParam))
                throw new ArgumentException("Ошибка при считывании  адаптивного параметра!!! ");

            if (!(bParam > 1))
                throw new ArgumentException("Адаптивный параметр должен быть > 1!!!");
```

```
            }

            if (fixed_radioButton2.Checked)
            {
                if (!double.TryParse(fixedParam_textBox2.Text, out bParam))
                    throw new ArgumentException("Ошибка при считывании  'Заранее заданного параметра'!!! ");

                if (!(bParam > 1))
                    throw new ArgumentException("'Заранее заданный параметр' должен быть > 1!!!");
            }

            int size = g.Count * g[0].Count;
            double[] res = new double[size];

            for (int i = 0; i < g.Count; i++)
            {
                for (int j = 0; j < g[i].Count; j++)
                {
                    res[i * dimSpace + j] = g[i][j];
                }
            }
            double[] pRes = new double[dimSpace];
            DateTime t1 = DateTime.Now;


            DoMinimization(
                dimSpace,
                g.Count,
                pRes,
                c.ToArray(),
                res,
                Math.Pow(upperBound - lowerBound, 2),
                typeUpdatingParam,
                adaptive_radioButton1.Checked,
                bParam,
                eps);

            DateTime t2 = DateTime.Now;
            TimeSpan ts = t2 - t1;

            string resq = "Время = " + ts.TotalSeconds + " сек. \n Значение= ";
            string res2 = "\n";
            double f = 0;
            for (int i = 0; i < dimSpace; i++)
            {
                f += pRes[i] * c[i];
                res2 += pRes[i] + ";  ";
            }
            richTextBox1.Text = resq + f + res2;

            MessageBox.Show("Рассчет закончен!!!");
        }
        catch (Exception exp)
        {
            MessageBox.Show(exp.Message);
        }
    }


    //[DllImport("MyDll.dll", CallingConvention = CallingConvention.StdCall)]
    //public static extern void methodSupportElemForFeasibleSet(int dimSpace, double[] pC, int pCount, double[] pG, double pEps, double[] pRes,
int funcType, bool adapParam, double bParam);

    [DllImport("Math_Optimization.dll", CallingConvention = CallingConvention.StdCall)]
    public static extern void DoMinimization(
        int dimSpace,
        int constrSize,
        double[] res1,
        double[] cObj,
        double[] gConstr,
        double radius,
```

```
            int typeUpdating,
            bool isUpdatingTypeAdaptive,
            double decreasingValue,
            double totalAccurancy);

        private void richTextBox1_TextChanged(object sender, EventArgs e)
        {

        }

        private void c_richTextBox1_TextChanged(object sender, EventArgs e)
        {

        }


    }
}
```

Номер тестируемой задачи	Размерность пространства	Параметры	Вариант 1:Не обновлять аппроксимирующие множества	Вариант 2: Оставлять только активные множества									Вариант 3: Оставлять N+1 количество множеств									Вариант 4: Полное обновление множеств								
				Адапт.	Адапт.	Адапт.	Адапт.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.	Адапт.	Адапт.	Адапт.	Адапт.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.	Адапт.	Адапт.	Адапт.	Адапт.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.	Фиксир.
1	3	Время работы	1.8841078	3.2261845	2.8261617	2.0151152	1.8271045	8.2194701	4.4102522	4.4202529	2.4031375	1.6290931	3.6102065	2.8271617	2.4031375	1.8071034	39.6452676	10.2335853	13.024745	2.0231157	1.6130923	6.4243674	5.4053091	3.8082178	3.4191956	64.4886886	30.2447299	18.6350659	6.0103438	3.4231958
2	3		1.2280702	2.6181498	2.4201385	1.8321048	1.8201041	12.40671	6.4013661	3.216184	2.2091264	2.011115	3.0331735	2.0211156	1.8131037	2.0401167	34.6329809	10.6206074	9.0315166	2.0331163	2.0151153	5.2142983	4.4112523	3.2191841	2.0201155	48.2987625	23.6503527	13.8307911	3.8132181	3.2141839
3	4		2.832162	5.2092979	4.4122524	3.8292191	3.830219	22.817305	13.835791	9.2195273	4.2292419	4.0052291	4.4312534	4.2152411	3.8052176	3.4241959	82.8837407	41.4293697	20.411168	4.0232301	3.8202185	13.229757	10.032574	8.8395056	6.0263447	137.803882	61.4515148	40.0502907	12.2306996	9.2305279
4	4		2.6251502	5.2192985	4.6022633	3.6212071	3.006172	24.422397	12.015687	8.4134812	4.4282532	4.0512317	4.4282532	4.0152296	4.8062749	3.4161954	99.6466995	35.0320037	25.839478	5.2062978	3.8242187	12.209698	9.6175501	8.4334824	6.4323679	142.911174	65.0597212	40.2433018	12.8307339	8.2254704
5	4		2.2341277	4.8282762	3.6142067	3.410195	3.2211842	24.108379	12.06069	8.4184815	4.826276	3.8242187	4.8162754	5.2262989	3.4321963	2.4161382	73.2541899	39.4692575	9.8225618	4.0182299	3.2301847	14.33982	10.250586	7.6294363	4.422253	134.843713	62.9275992	36.8581081	11.4236534	7.4364253
6	5		4.3102465	8.8325052	6.2273562	5.436311	5.4223101	38.865223	18.827077	12.439712	6.6163784	6.0283448	9.6220158	9.2320142	5.8310082	4.8300068	172.901251	68.237097	39.643056	8.0200112	6.2100087	22.252031	17.345039	12.430039	8.8590173	239.561441	105.26915	63.8460908	22.0210309	14.22102
7	5		4.6092636	8.235471	6.030345	4.6442657	4.0132295	35.565034	18.319048	13.268759	5.8383339	5.0382882	6.8513919	6.2643583	6.0633468	4.8392768	101.169787	24.8904237	17.865022	6.0353452	5.2352994	17.466999	11.058633	10.291589	7.2784163	174.205964	80.7706198	46.0436336	15.7138988	9.8415629
8	5		10.9910154	21.237039	15.434023	13.744043	12.42402	89.656136	47.035067	33.823048	16.221023	14.02102	17.231024	12.223018	20.635031	12.21502	391.087843	115.525608	81.889684	21.021202	14.661839	56.056206	38.860223	29.485687	22.623294	558.149924	264.150109	159.253109	56.086208	37.042119
9	6		5.4443114	12.018687	8.6334938	9.6235504	6.8463916	57.944314	29.246673	19.037089	9.0365169	7.4324251	12.248701	11.459656	7.4334252	9.0145156	229.56613	79.9255715	47.259703	11.625665	7.2314136	33.080892	33.080892	18.299047	12.843735	364.770864	166.96255	103.729933	32.69387	20.838192
10	6		4.4222529	10.005572	7.3143174	8.6114563	5.8260141	52.8221	27.077044	17.470033	8.2721674	7.0690188	11.11503	7.670023	8.0640271	5.6620175	155.459806	73.8082216	26.883538	7.4514262	7.2484146	24.639409	16.876965	14.240815	9.844563	252.018415	118.062753	69.8259938	21.4602274	14.442826
11	6		5.6803249	10.815619	8.6434944	9.2465289	6.6343794	57.402283	27.459571	18.929083	9.0475175	7.6254362	12.435711	11.853678	8.6654956	6.4183671	217.565444	87.3639969	40.298305	10.679611	9.2945316	29.7207	21.466228	17.644009	11.077634	328.196772	146.261366	87.5000047	29.6866979	17.861022
12	6		5.472313	11.690669	7.8184471	7.8424486	5.6363224	58.090323	29.320677	18.837077	8.829505	7.8354482	10.629608	11.842677	8.6504948	6.2223559	174.526982	94.0473792	42.257417	9.5375455	7.2324137	28.48863	20.671182	16.07692	11.654667	308.668655	150.123587	88.782078	28.67364	17.090978
13	6		5.2352995	11.427654	8.4304822	8.2144699	6.6203787	57.926313	27.556576	20.615179	10.038574	7.6454373	11.847678	10.709613	8.8425058	6.277359	236.673537	68.902941	50.950914	11.411653	7.6494375	34.472094	24.214035	18.021025	12.633019	356.093543	168.895264	96.4451392	34.0330478	20.421029
14	7		17.3569927	42.991459	36.571092	32.727872	22.586292	235.82349	124.52312	76.877397	35.445027	25.679469	51.771961	45.381596	31.507802	23.347335	731.143819	321.855409	143.01918	40.39331	31.540804	114.61256	76.39737	59.735417	44.827564	1132.82379	498.060488	299.734798	104.219961	58.91837
15	7																													
16	7																													
17	7																													

Адаптир	1.2	1.5	2	10	
Фиксир	1.2	1.5	2	10	100

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Усика Вадима Анатольевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Моделирование вертикального распределения объектов плоской подсистемы Галактики» являются: Построение метода параметрического моделирования искривления диска Галактики и выявления значимых его отклонений от плоской модели в рамках общего вида модели порядка n средней поверхности диска Галактики, задаваемого выражением (2), с применением нелинейной оптимизации (9) модельных параметров и с оптимизацией сглаженности этой модели (раздел 3), а также предложение нелинейной оптимизации (23) в случае значительной неопределенности гелиоцентрических расстояний.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

1. Поиск по ключевым словам работы в сети интернет с 1 февраля по 25 мая 2018 года как на русском, так и на английском языках не показал наличия опубликованных исследований в варианте, описанном в работе.
2. Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Игорем Ивановичем Никифоровым, доцентом кафедры небесной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.
3. Проведена серия обсуждений с Ангелиной Владимировной Веселовой, аспирантом (ныне младшим научным сотрудником) кафедры небесной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.
4. Тщательно исследована литература, представленная в работе. Это показало, что, для решения задачи, поставленной в ВКР, ранее не применялась модель в том виде, в котором она применена в работе. В ряде работ было обнаружено априорное использование аппроксимации плоскостью, что, в терминах ВКР, соответствует модели первого порядка, однако исследований об оптимальности именно такой модели там не предложено. Стоит отметить, что в ВКР показано, что исследование оптимального порядка модели имеет важнейшее значение для определения исследуемых параметров.
5. Выступление на конференции «Современная звездная астрономия — 2019».

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась 05.06.2018. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись

Усик Вадим Анатольевич

24.05.2020

г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Усик Вадим

Моделирование вертикального распределения объектов плоской подсистемы Галактики

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Допущен к защите.
Заведующий кафедрой:
д.ф.-м.н., проф. К.В. Холшевников

_____

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент И.И. Никифоров

_____

Рецензент:
А.А. Смирнов

_____

Санкт-Петербург
2018

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

DEPARTMENT OF CELESTIAL MECHANICS

Ussik Vadim

Modelling the vertical distribution of the Milky Way's flat subsystem objects

GRADUATION THESIS

Admitted for defence.
Head of Department:
Prof. Dr. K.V. Kholshevnikov

Scientific supervisor:
Assoc. Prof. Dr. I.I. Nikiforov

Reviewer:
A.A. Smirnov

Saint Petersburg
2018

Содержание

Введение **4**

1. Основные методы **5**
1.1. Модель 5
1.2. Методы оптимизации 6
1.2.1. Метод наименьших квадратов 7
1.2.2. Метод наибольшего правдоподобия 8
1.3. Метод исключения выбросов в данных 8
1.4. Критерий согласия Пирсона 9

2. Данные о классических цефеидах **10**
2.1. Каталог 10
2.2. Термины 10
2.3. Формирование рабочей выборки 11
2.4. Выделение локальной выборки 11

3. Результаты оптимизации отклонения объектов от модели средней поверхности по Z-координате **13**
3.1. Рабочая выборка 14
3.2. Рабочая выборка без выбросов 15
3.3. Локальная выборка 17
3.4. Локальная выборка без выбросов 18

4. Результаты оптимизации отклонения объектов по нормали к модели средней поверхности **28**
4.1. Рабочая выборка 28
4.2. Рабочая выборка без выбросов 30
4.3. Локальная выборка 39
4.4. Локальная выборка без выбросов 39

5. Обсуждение **39**

Заключение **40**

Литература **42**

Введение

Для получения информации о происхождении, эволюции и динамике нашей Галактики важно исследовать характеристику вертикального распределения объектов разных подсистем. Для корректного определения этой величины необходимо учитывать множество возможных факторов и в таком виде задача на данный момент не решалась. Смещение Солнца относительно плоскости диска Галактики учитывается в большинстве работ, посвященных оценке характеристики вертикального распределения, помимо этого фактора, внимания заслуживает учет искривления диска Галактики и ошибок в определении расстояний, возможная зависимость характеристики вертикального распределения от расстояния до центра Галактики, определение оптимального закона вертикального распределения объектов.

Существование смещения Солнца относительно плоскости нашей Галактики известно давно, первые его оценки по анализу близких звезд $z_\odot = 13.5 \pm 1.7$ пк приводятся в работе [18] (van Tulder, 1942). Свидетельства в пользу искривления диска Галактики приводятся в работе [16] (Oort, Kerr, Westerhout, 1958). Для корректного определения вертикальной дисперсии объектов той или иной плоской галактической подсистемы необходимо учитывать эти эффекты.

Впоследствии в ряде работ оценивали как расстояние от Солнца до плоскости Галактики, так и искривление диска Галактики разными методами и по разным объектам. Среди недавних работ можно отметить следующие. В работе [12] приводится оценка $z_\odot = 25 \pm 5$ пк, полученная по данным Слоановского цифрового небесного обзора. Обзорная работа [6] рекомендует этот результат как оптимальное значение смещения Солнца на данный момент. В работе [3] по планетарным туманностям получена оценка $z_\odot = 40 \pm 9$ пк, также исследована зависимость результата от предполагаемой модели вертикального распределения и от того, до какого расстояния учитываются объекты выборки. В другой работе [9] отмечается существенная разница получаемых результатов в зависимости от типа опорных объектов. В работе [13] $z_\odot = 26 \pm 3$ пк по совокупности данных о классических цефеидах и цефеидах II типа населения, но статус этого результата неясен, так как использованы объекты разных подсистем. По рассеянным скоплениям в [10] получена оценка $z_\odot = 18.5 \pm 1.2$ пк. В одной из последних работ [20] выводится оценка $z_\odot = 13.4 \pm 4.4$ пк, которая получена по пульсарам. В работе [17] представлена трехмерная карта распределения молекулярного газа, по которой можно сделать выводы об искривлении плоскости Галактики.

Приведенные примеры оценок $z_\odot$ показывают, что полученные по разным объектам результаты значимо отличаются, это ставит вопрос о том, одинаково ли значение $z_\odot$ для разных типов опорных объектов и составляющих диска. Чем больше различных результатов по разным подсистемам

получено, тем больше можно сказать о форме средней поверхности диска Галактики и величине $z_{\odot}$. Результаты для выборок объектов разных возрастов могут дать информацию о динамике и эволюции Галактики.

Цель данной работы — совместное определение дисперсии объектов плоской галактической подсистемы и смещения Солнца относительно средней поверхности данной подсистемы, а также построение модели этой поверхности с учетом искривления диска Галактики. В предыдущих работах решались частные задачи по нахождению упомянутых характеристик, что может приводить к систематическим ошибкам результатов. Полная задача, сформулированная выше, ранее не решалась.

1. Основные методы

1.1. Модель

В данной работе используется гелиоцентрическая декартова система координат, изображенная на рис. 1,

$$\begin{aligned} X &= r\cos l\cos b, \\ Y &= r\sin l\cos b, \\ Z &= r\sin b, \end{aligned} \tag{1}$$

где r — гелиоцентрическое расстояние, l — галактическая долгота, b — галактическая широта. Ось X направлена в центр Галактики, ось Y — по направлению вращения Галактики (по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса), ось Z направлена на северный полюс Галактики.

В качестве общего вида модели ζ_n порядка n, аппроксимирующей среднюю поверхность диска Галактики по данным о пространственном распределении объектов рассматриваемой подсистемы, было принято разложение функции зависимости средней Z-координаты от положения на диске

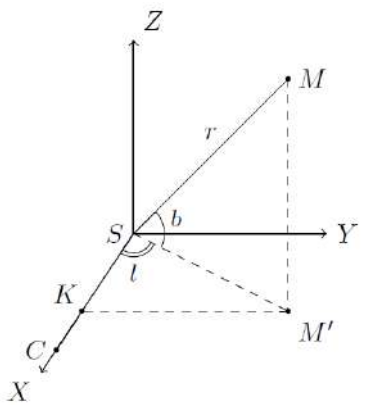


Рис. 1. Гелиоцентрическая декартова система координат.

Галактики в ряд Маклорена в окрестности Солнца.

$$\zeta_n(X,Y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} z_{i-j,j}X^{i-j}Y^j = z_{00} + z_{10}X + z_{01}Y + \\ + z_{20}X^2 + z_{11}XY + z_{02}Y^2 + \ldots + z_{n0}X^n + \ldots + z_{0n}Y^n. \tag{2}$$

Вектор параметров $\mathbf{z}$ составлен из параметров z_{ij} в порядке их написания в уравнении (2). Компоненты вектора в дальнейшем оптимизируются, причем $z_{\odot} = -z_{00}$ отвечает за смещение Солнца относительно средней поверхности диска Галактики, а остальные параметры — за искривление галактического диска.

В работе рассматривались два вида оптимизации.

1. Оптимизация отклонений по Z: оптимизация оценки параметров $\mathbf{z}$, минимизирующая сумму квадратов отклонений объектов от модели средней поверхности диска Галактики по Z-координате. Плотность вероятности для Z как случайной величины в данном случае предполагается следующей:

$$f(Z) = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\Delta Z^2}{2\sigma_z^2}}, \qquad \Delta Z = \zeta_n(X,Y) - Z. \tag{3}$$

2. Оптимизация отклонений по ρ: оптимизация оценки параметров $\mathbf{z}$, минимизирующая сумму квадратов отклонений объектов по нормали к модели средней поверхности (ρ). Плотность вероятности для ρ как случайной величины в данном случае предполагается следующей:

$$f(\rho) = \frac{1}{\sigma_\rho\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_\rho^2}}. \tag{4}$$

Очевидно, что при нулевом порядке модели результаты оптимизаций совпадают.

1.2. Методы оптимизации

Возможность использования метода наименьших квадратов (МНК) зависит от сложности моделирования; так, например, для моделирования по ΔZ применение МНК является корректным в случае предположения о нормальном вертикальном распределении. Также МНК можно применить и для моделирования по ρ, однако, в целях подготовки к планируемому учету ошибок измерения расстояний в выборках, было решено использовать метод наибольшего правдоподобия (МНП) для этого моделирования. Из основных их отличий стоит отметить тот факт, что в МНК стандартное

отклонение определяется уже после определения остальных параметров и учитывает число степеней свободы, в МНП же стандартное отклонение является таким же параметром, как и остальные, и оптимизируется с ними, соответственно, не учитывается число степеней свободы. Это приводит к тому, что МНП имеет тенденцию к занижению стандартного отклонения, как правило, незначимому. Подробнее об алгоритмах МНК и МНП можно узнать в [1] и [4] соответственно.

1.2.1. Метод наименьших квадратов

При определении неизвестных параметров средней поверхности диска Галактики $\mathbf{z}$ получается следующая система для поверхности n-го порядка:

$$\zeta_n(X_i, Y_i) = Z_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

где N — количество объектов в выборке. Для надежного определения параметров объем выборки должен быть *много больше* или, хотя бы, больше количества параметров, поэтому и число уравнений превышает число неизвестных. Таким образом, данную систему нельзя решить в смысле поиска точных значений параметров, однако, можно найти наилучший из всех неточных наборов параметров. Иными словами, сумма квадратов разности правых и левых частей системы (5) должна быть минимальна.

Запишем систему (5) в матричном виде.

$$A_n\mathbf{z} = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \left\{Z_i\right\}_{i=1}^{N}, \tag{6}$$

где в каждой строке матрицы стоят множители у параметров $\mathbf{z}$ в порядке написания в уравнении (2). Минимизация $|\mathbf{z} - A_n\mathbf{Z}|^2$ дает оценки параметров.

Стандартное отклонение σ_z и стандартные ошибки параметров вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{gathered} \sigma_z^2 = \frac{|\mathbf{z} - A_n\mathbf{Z}|^2}{N-k}, \quad \mathbf{z}_{\text{err}} = \left\{\sqrt{C_{ii}}\right\}_{i=1}^{k}, \\ C = \sigma_z^2 (A^T A)^{-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь k — количество параметров, разность $N-k$ — число степеней свободы, C — ковариационная матрица, $\mathbf{z}_{\text{err}}$ — вектор стандартных ошибок параметров. Стандартная неопределенность оценки σ_z и прогноза модели ζ_n, σ_{σ_z} и $\sigma_{\zeta_n}(X, Y)$ соответственно, вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{gathered} \sigma_{\sigma_z} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{2(N-k)}}, \\ \sigma_{\zeta_n}(X, Y) = \sigma_z \sqrt{\mathbf{a}_n^T(X, Y)\, C\, \mathbf{a}_n(X, Y)}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\mathbf{a}_n(X, Y) = \left\{X^{i-j}Y^j\right\}_{i=0\ \ j=0}^{n\ \ \ i}$ — строка матрицы A_n в точке (X, Y).

1.2.2. Метод наибольшего правдоподобия

Для некоторых наблюдаемых данных об объектах какой-либо подсистемы можно получить такие параметры модели, при которых вероятность получения этих данных максимальна. В этом состоит сущность МНП. Математически принцип метода выражается в максимизации функции правдоподобия — совместной плотности вероятности выборки, которая составляется в предположении о каком-либо законе распределения случайной величины в рассматриваемой задаче, в данном случае предполагается нормальный закон распределения ρ. Функция правдоподобия L и логарифмическая функция правдоподобия $\mathcal{L}$ в данной модели имеют вид

$$\begin{gathered} L = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\rho} e^{-\frac{\rho_i^2}{2\sigma_\rho^2}}, \\ \mathcal{L} = -\ln L = \frac{N}{2}\ln(2\pi) + N\ln\sigma_\rho + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i^2}{\sigma_\rho^2}. \end{gathered} \tag{9}$$

Оптимальный набор параметров $\mathbf{z}$ соответствует минимуму функции $\mathcal{L}$. В случае МНП количество неизвестных параметров k для одного и того же порядка будет на один больше, чем в МНК, так как в МНП, как указано выше, стандартное отклонение является одним из оптимизируемых параметров. Поместим σ_ρ в начало вектора параметров $\mathbf{z}$: $z_1 = \sigma_\rho$.

Стандартные ошибки для параметров вычисляются, как и в МНК, через диагональные элементы ковариационной матрицы. Отличия от МНК будут в способе получения ковариационной матрицы, здесь для этого используется матрица Гессе, подробнее см. в [19].

$$\begin{gathered} \mathbf{z}_{\text{err}} = \left\{\sqrt{C_{ii}}\right\}_{i=1}^{k} \\ C = H^{-1}, \qquad H(\mathcal{L})_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \mathbf{z}_i \partial \mathbf{z}_j}, \quad i = 1, \ldots, k, \ j = 1, \ldots, k, \end{gathered} \tag{10}$$

где $H(\mathcal{L})$ — матрица Гессе. Стандартная неопределенность прогноза модели оценивается по формуле

$$\sigma_{\zeta_n}(X, Y) = \sigma_\rho \sqrt{\mathbf{a}_n^T(X, Y)\, C\, \mathbf{a}_n(X, Y)}. \tag{11}$$

1.3. Метод исключения выбросов в данных

При решении задачи оптимизации параметров важно уметь определять наличие выбросов — объектов с невязками, значительно превышающими величину стандартного отклонения. Такие объекты могут оказать существенное влияние на параметры модели, перед окончательным моделированием следует их исключить. Для этого будет использоваться итеративный

метод, учитывающий объем проверяемой выборки, так как с ростом количества объектов растет и шанс появления выброса, подробнее см. в [15].

Величина критерия $\varkappa_\gamma$ с необходимой величиной параметра γ получается из уравнения

$$\begin{gathered}\big(1-\psi(\varkappa_\gamma)\big)N=\gamma,\\ \psi(\varkappa_\gamma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\varkappa_\gamma} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.\end{gathered} \tag{12}$$

Найдем число объектов L с модулями невязок, превышающими $\varkappa_1$. Если их больше L', то нужно исключить $L-L'$ объектов с максимальными модулями невязок. Выбор $L'=3$ обусловлен тем, что вероятность случайного появления 4-х или больше выбросов приблизительно равна 2%, $L'=2$ — 8%, $L'=1$ — 26%. В данной работе используется значение $L'=3$. Модули невязок оставшихся объектов проверяются уже с величиной $\varkappa_{0.05}$ и удаляются при её превышении.

Если L изначально меньше L', то эти объекты сразу проверяются по критерию с величиной $\varkappa_{0.05}$. Процесс повторяется итеративно до тех пор, пока либо L не будет изначально нулевым, либо за итерацию не будет исключено ни одного объекта. Важно отметить, что на каждой итерации параметры модели снова определяются для новой выборки.

1.4. Критерий согласия Пирсона

Данный критерий, известный также как критерий хи-квадрат (χ^2), позволяет определить вероятность того, что гипотеза о виде функции плотности вероятности согласуется с данными. Подробнее см. в [1].

Разобьем весь интервал возможных значений на k промежутков с наблюдаемыми значениями m_i и математическими ожиданиями Np_i:

$$\begin{gathered}[x_{i-1},x_i],\quad i=1,\dots,k,\\ p_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,\quad i=1,\dots,k,\\ \sum_{i=1}^{k} m_i=\sum_{i=1}^{k} Np_i=N,\end{gathered} \tag{13}$$

где $f(x)$ — модельная плотность вероятности.

$$\begin{gathered}P(U,\varkappa)=\frac{1}{2^{\varkappa/2}\Gamma(\varkappa/2)}\int_U^{\infty} t^{\varkappa/2-1}e^{-t/2}\,dt,\\ U=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-Np_i)^2}{Np_i},\quad \varkappa=k-l-1,\end{gathered} \tag{14}$$

где l — количество определяемых параметров модели, $P(U, \varkappa)$ — вероятность получения такого значения U для данной гипотезы при верности последней, Γ — гамма-функция. Чем больше эта вероятность, тем с большей уверенностью можно говорить о случайности отклонений величин m_i от Np_i и, следовательно, о согласовании гипотезы с данными. Гипотеза может быть принята при $P(U, \varkappa) > 0.05$ [1].

2. Данные о классических цефеидах

2.1. Каталог

В качестве объектов, по которым определялись параметры средней поверхности диска Галактики, рассматривались классические цефеиды. Данные о цефеидах были взяты из каталога Бердникова и др. [5] после нескольких улучшений и обновлений, подробнее см. в [14]. Данный каталог содержит информацию о наибольшем количестве цефеид (674 объекта), по этой причине в нашем исследовании мы выбрали именно его. Калибровка шкалы расстояний для объектов данного каталога, полученная Бердниковым и др. в [2], соответствует модулю расстояний до Большого Магелланова Облака $d_{\mathrm{LMC}} = 18.25 \pm 0.05$ зв. вел. Современная калибровка, полученная по совокупности других работ в [11] $d_{\mathrm{LMC}} = 18.49 \pm 0.09$ зв. вел. Таким образом, для приведения оригинальной шкалы расстояний [2] к современной калибровке необходимо умножить расстояния на следующий коэффициент:

$$\frac{r + \Delta r}{r} = 10^{0.2\Delta d} = 1.117^{+0.053}_{-0.050}\,, \tag{15}$$

где Δd — разность между модулями расстояний до БМО в [11] и [2].

2.2. Термины

В данной работе проводится оптимизация параметров по разным выборкам, для которых введены приведенные ниже термины.

Полная выборка — выборка, составленная из всех объектов используемого каталога.

Рабочая выборка — полная выборка за исключением явно изолированных объектов и объектов, величины z которых не согласуются с вертикальным масштабом.

Рабочая выборка без выбросов — рабочая выборка после применения алгоритма устранения выбросов в данных.

Локальная выборка — часть рабочей выборки, представляющая наибольшую окрестность Солнца со свойством относительной полноты выявленности опорных объектов.

Локальная выборка без выбросов — локальная выборка после применения алгоритма устранения выбросов в данных.

2.3. Формирование рабочей выборки

Необходимость такой операции возникает на фоне наличия изолированных объектов или их групп, которые могут изначально исказить модель настолько, что последующее устранение выбросов приведет к тому, что «хорошие» объекты могут быть удалены, а «плохие» — остаться в выборке. Чтобы этого избежать, из полной выборки вручную удаляются выделяющиеся объекты путем анализа положений объектов на всех четырех диаграммах рис. 2. Результат представлен на рис. 2.

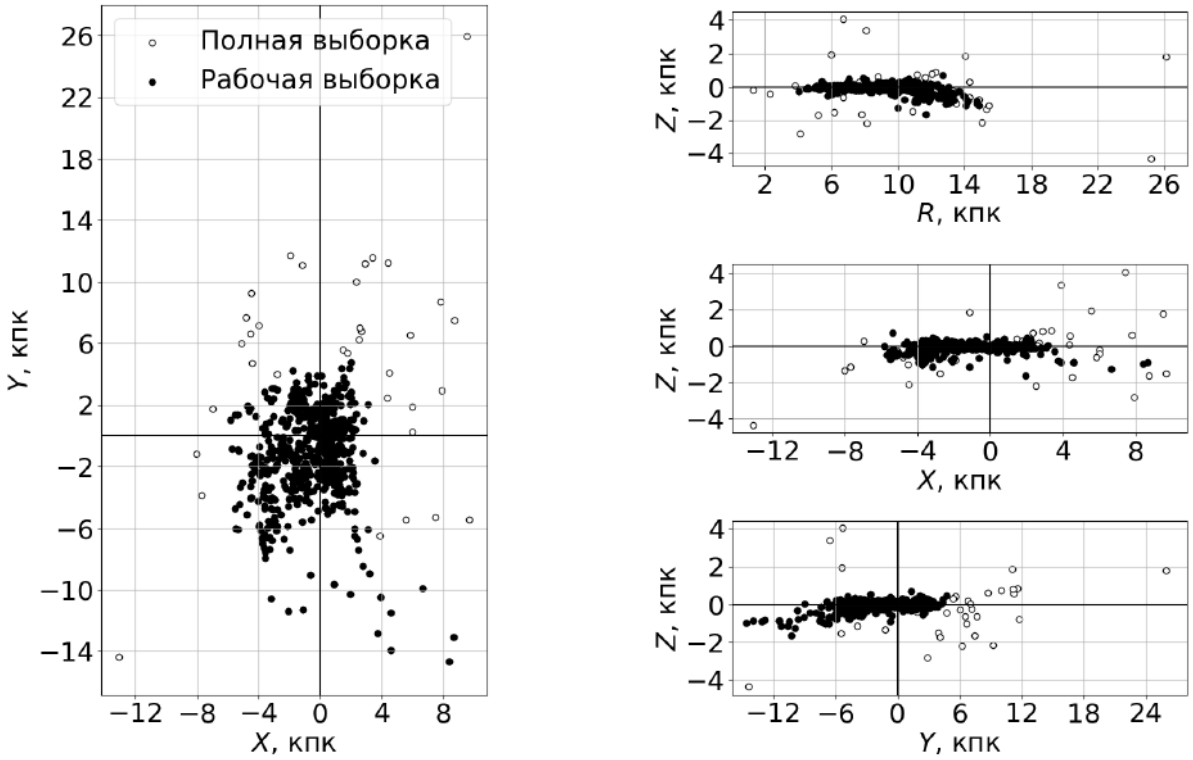


Рис. 2. Левая панель: проекция объектов полной и рабочей выборки на плоскость XY; правая панель: проекции объектов полной и рабочей выборки на плоскости RZ, XZ, YZ.

2.4. Выделение локальной выборки

Выделение локальной выборки позволяет оценить величину $z_{\odot}$, уменьшая влияние возможных ошибок в определении расстояний, селективности наблюдений. Обычно, для выделения локальной выборки используют набор концентрических колец, однако у рабочей выборки наблюдается асимметрия относительно начала координат на плоскости XY. По этой причине было принято решение использовать набор прямоугольных рамок, изображенный на левой панели рис. 3, увеличивая каждую сторону относительно общего масштаба в данном направлении таким образом, что отношения расстояний от начала координат до краев рамок остаются постоянными.

С линейным ростом площади при переходе от рамки к рамке количество объектов тоже должно расти линейно. На правой панели рис. 3 наблюдается линейный рост в пределах первых трех бинов, которые отмечены красным, объекты в данных рамках и приняты за локальную выборку, которая изображена на рис. 4.

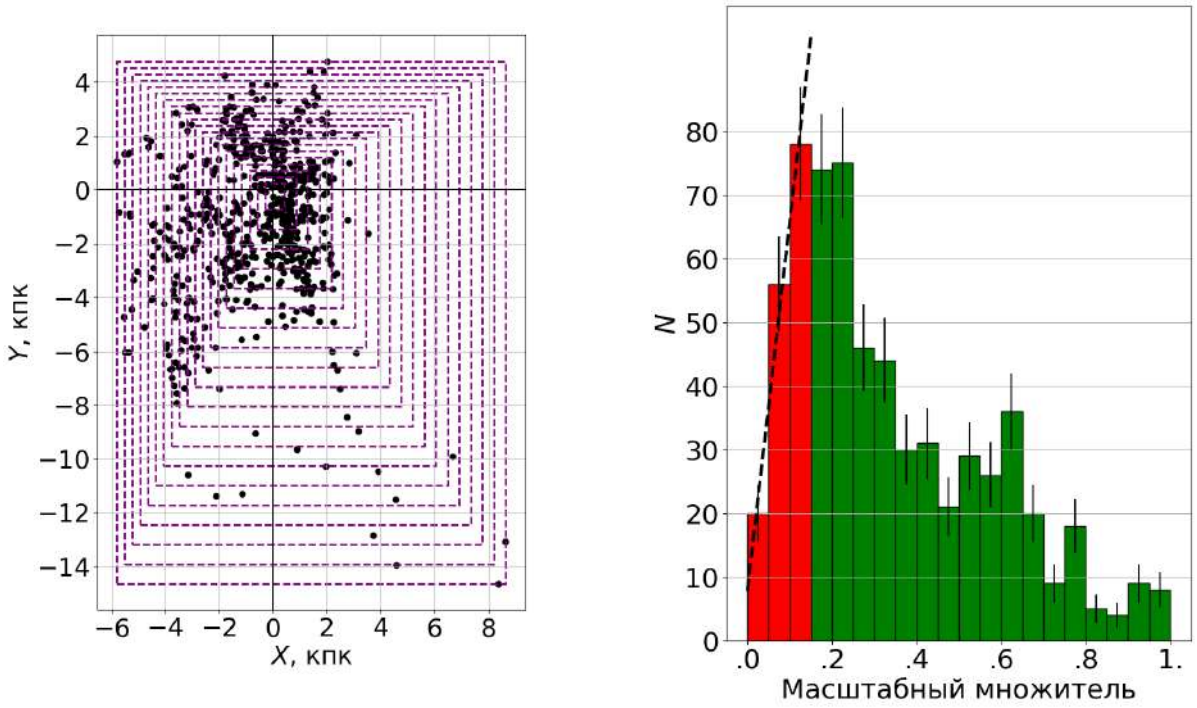


Рис. 3. Левая панель: прямоугольные рамки на плоскости XY и проекция объектов рабочей выборки на плоскость XY; правая панель: гистограмма распределения объектов рабочей выборки по рамкам прямоугольников.

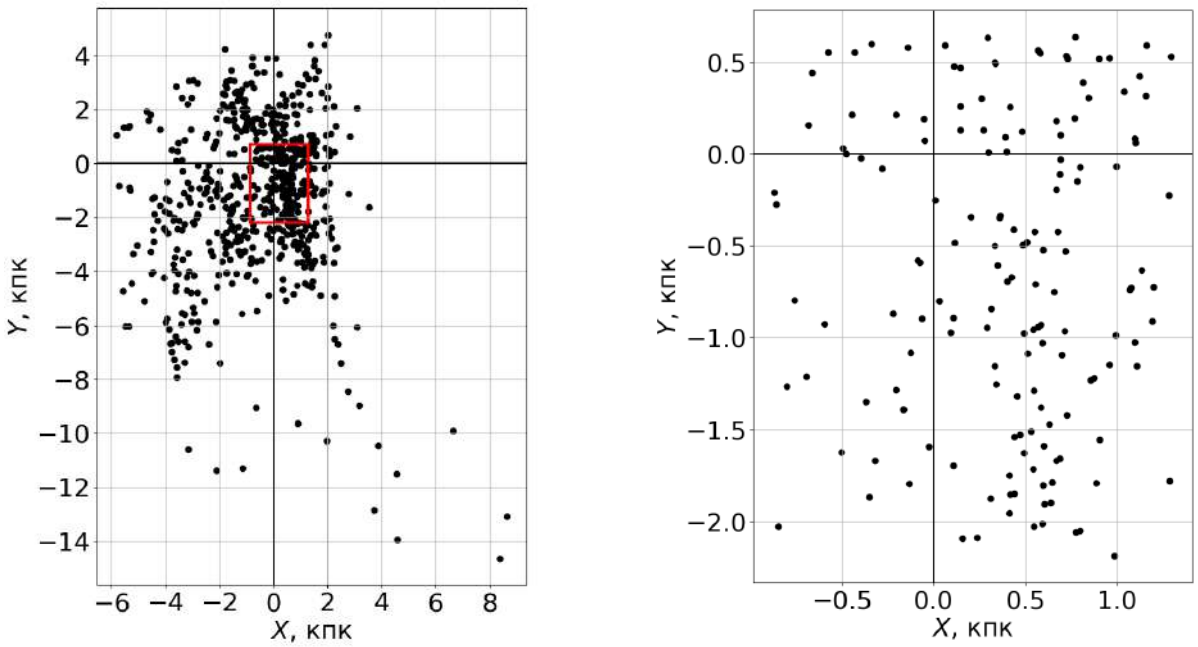


Рис. 4. Левая панель: проекция объектов рабочей выборки на плоскость XY, красной рамкой отмечена граница локальной выборки; правая панель: проекция объектов локальной выборки на плоскость XY.

3. Результаты оптимизации отклонения объектов от модели средней поверхности по Z-координате

В результате моделирования получается определенное количество оценок параметров, зависящее от порядка модели. Вопрос определения оптимального порядка очень важен и, в тоже время, на данный момент не существует универсального метода его определения. С одной стороны, если взять недостаточно высокий порядок, то можно не выявить каких-либо среднемасштабных и мелкомасштабных значимых структур. С другой стороны, если взять слишком высокий порядок, то особенности полиномиального приближения выделят на самом деле не существующую структуру как следствие аппроксимационных эффектов на краю области представленной данными. В данной работе при выборе оптимального порядка в первую очередь внимание обращается на количество параметров модели порядка n со значимостью выше маргинальной $|z_i|/\sigma_{z_i} \geq 2$ (в таблицах приведено значение $\sigma_{z_i}/|z_i|$ и строка выделена жирным шрифтом при выполнении данного условия). Также необходимо наличие хотя бы одного такого значимого параметра z_{ij} , что $i + j = n$. Когда намечен оптимальный порядок, для него проверяется отсутствие аномального поведения модели в покрытыми данными областях. Если явных аномалий – не обусловленных данными экстремальных точек модельной поверхности – нет, то намечен-

ный порядок можно считать оптимальным, в противном случае в качестве кандидата берется порядок на один меньше.

Размерность отличается у параметров разных порядков и в таблицах она не будет указываться. Параметры σ_z и z_{00} имеют размерность кпк, размерность остальных параметров определяется из следующего выражения:

$$\dim z_{ij} = \text{кпк}^{1-i-j}. \tag{16}$$

3.1. Рабочая выборка

Моделирование поверхности проводится с использованием ранее определенной рабочей выборки. В табл. 1–6 представлены параметры модели до пятого порядка включительно.

На рис. 6–8 представлена эволюция функции распределения отклонений объектов по Z-координате по мере изменения порядка модели. По ним видно, что выбросы присутствуют независимо от порядка, что наглядно показывает, насколько важно устранять выбросы в данных.

На рис. 5 можно проследить изменение параметров z_{00} и σ_z в зависимости от порядка модели. График на правой панели подчеркивает, насколько важно верно определить оптимальный порядок. Форма зависимости на графике на левой панели позволяет предположить, что оптимальным ожидается порядок старше 2-го.

На рис. 9–13 представлена эволюция модели средней поверхности диска Галактики с увеличением порядка. На правых панелях рисунков изображены проекции каждого объекта на плоскости XZ и YZ, значение модельной поверхности от граничных значений координаты, вдоль которой строится проекция, а также значения модельной поверхности в локальном экстремуме при его наличии. Таким образом, мы смотрим на поверхность по направлению оси Y и против направления оси X соответственно, отмечаем все объекты, значения модельной поверхности на ближнем и дальнем краю линиями темных оттенков и меньшего размера и значения в локальных экстремумах линиями светлых оттенков и больше размера при их наличии. Локальных экстремумов одного типа может быть больше одного вдоль луча зрения. Эти рисунки важны для правильного понимания того, какие детали модельной поверхности обусловлены данными, а какие — аппроксимационными эффектами.

По таблицам видно, что наибольшим количеством значимых параметров обладает четвертый порядок, также среди значимых параметров присутствуют параметры непосредственно четвертого порядка. По рисункам модельной поверхности для этого порядка можно заметить отсутствие аномального поведения в населенных объектами областях. Таким образом, четвертый порядок принят оптимальным и для него будут устраняться выбросы, которые можно увидеть на левой панели рис. 8.

Таблица 1. Значения оценок параметров, $N = 639,\ n = 0,\ k = 2$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.2361 \pm 0.0066}$	**0.03**
z_{00}	$\mathbf{-0.0763 \pm 0.0093}$	**0.12**

Таблица 2. Значения оценок параметров, $N = 639,\ n = 1,\ k = 4$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.1952 \pm 0.0054}$	**0.03**
z_{00}	$\mathbf{-0.0182 \pm 0.0086}$	**0.47**
z_{10}	0.0039 ± 0.0038	0.97
z_{01}	$\mathbf{0.0459 \pm 0.0026}$	**0.06**

3.2. Рабочая выборка без выбросов

После удаления выбросов в выборке осталось 617 объектов, на рис. 14 цветом отмечены выбросы. Оптимальным порядком остался четвертый, дальнейшие результаты приведены только для него. В таблице 7 приведены значения параметров.

На левой панели рис. 15 черными крестиками отмечены относительный максимум и минимум. Появление данных результатов не предвиделось на начальном этапе моделирования. Далее мы оценили значимость полученных экстремумов.

$$S_{\zeta_n}(X,Y) = \frac{\zeta_n(X,Y) - z_{00}}{\sigma_{\zeta_n}(X,Y)}, \tag{17}$$

где S — значимость. Координаты экстремумов и их величина значимости оказались следующими:

$$\begin{gathered} X_{\text{loc_max}} = -3.1 \text{ кпк},\ Y_{\text{loc_max}} = 0.7 \text{ кпк}, \\ \zeta_4(X_{\text{loc_max}}, Y_{\text{loc_max}}) = 54.0 \pm 15.0 \text{ пк}, \\ S_{\zeta_4}(X_{\text{loc_max}}, Y_{\text{loc_max}}) = 5.13, \\ X_{\text{loc_min}} = 1.4 \text{ кпк},\ Y_{\text{loc_min}} = 0.5 \text{ кпк}, \\ \zeta_4(X_{\text{loc_min}}, Y_{\text{loc_min}}) = -54.3 \pm 11.0 \text{ пк}, \\ S_{\zeta_4}(X_{\text{loc_min}}, Y_{\text{loc_min}}) = -2.63. \end{gathered} \tag{18}$$

Относительная их значимость — 5.82. Эти экстремумы значимо отличны от нулевой плоскости. Используя формулу (17), можно построить карту значимости поверхности, которая отображена на левой панели рис. 17. На ней пунктирной линией обозначен уровень маргинальной значимости (2σ), сплошной линией — уровень 3σ.

Таблица 3. Значения оценок параметров, $N = 639,\ n = 2,\ k = 7$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.1703 \pm 0.0047}$	**0.03**
z_{00}	$\mathbf{0.0189 \pm 0.0081}$	**0.43**
z_{10}	$\mathbf{-0.0174 \pm 0.0053}$	**0.30**
z_{01}	0.0072 ± 0.0036	0.50
z_{20}	$\mathbf{-0.0067 \pm 0.0013}$	**0.19**
z_{11}	$\mathbf{-0.00722 \pm 0.00097}$	**0.13**
z_{02}	$\mathbf{-0.00625 \pm 0.00053}$	**0.08**

Таблица 4. Значения оценок параметров, $N = 639,\ n = 3,\ k = 11$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.1660 \pm 0.0046}$	**0.03**
z_{00}	-0.009 ± 0.010	1.11
z_{10}	$\mathbf{-0.0233 \pm 0.0058}$	**0.25**
z_{01}	0.0026 ± 0.0036	1.38
z_{20}	-0.0013 ± 0.0026	2.00
z_{11}	0.0015 ± 0.0021	1.40
z_{02}	-0.0016 ± 0.0012	0.75
z_{30}	$\mathbf{0.00102 \pm 0.00045}$	**0.44**
z_{21}	$\mathbf{0.00182 \pm 0.00044}$	**0.24**
z_{12}	$\mathbf{0.00128 \pm 0.00025}$	**0.20**
z_{03}	$\mathbf{0.00043 \pm 0.00012}$	**0.28**

На рис. 15 пунктирным прямоугольником обозначена область локальной выборки, примечательно, что линия узлов проходит почти по диагонали этого прямоугольника, а сам он содержит почти монотонную часть поверхности. Сейчас из этого можно сделать предположение, что, скорей всего, для локальной выборки оптимальным порядком будет первый или нулевой.

На рис. 16 изображены разрезы поверхности, проходящие через локальный максимум и локальный минимум соответственно, на них отмечены проекции положений объектов в полосе ± 1 кпк, модельная поверхность, стандартное отклонение модели и стандартная ошибка модельной поверхности. Эта ошибка наглядно показывают, что экстремумы значимы.

На правой панели рис. 17 изображено распределение объектов по ΔZ, красным отмечены выбросы, а также построена функция плотности вероятности. Можно проверить гипотезу о нормальном распределении с най-

Таблица 5. Значения оценок параметров, $N = 639,\ n = 4,\ k = 16$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.1618 \pm 0.0045}$	**0.03**
z_{00}	$\mathbf{-0.021 \pm 0.010}$	**0.48**
z_{10}	$\mathbf{-0.0245 \pm 0.0082}$	**0.33**
z_{01}	$\mathbf{-0.0182 \pm 0.0054}$	**0.30**
z_{20}	-0.0010 ± 0.0032	3.20
z_{11}	-0.0008 ± 0.0023	2.88
z_{02}	-0.0002 ± 0.0014	7.00
z_{30}	0.0003 ± 0.0011	3.67
z_{21}	$\mathbf{0.0040 \pm 0.0012}$	**0.30**
z_{12}	$\mathbf{0.00234 \pm 0.00072}$	**0.31**
z_{03}	$\mathbf{0.00186 \pm 0.00037}$	**0.20**
z_{40}	-0.00012 ± 0.00016	1.33
z_{31}	0.00011 ± 0.00018	1.64
z_{22}	$\mathbf{0.00041 \pm 0.00013}$	**0.32**
z_{13}	$\mathbf{0.000159 \pm 0.000062}$	**0.39**
z_{04}	$\mathbf{0.000092 \pm 0.000026}$	**0.28**

денными параметрами на достоверность. По формуле (14) вероятность оказывается равной $2 \cdot 10^{-16}$, что свидетельствует о плохом соответствии наблюдаемых данных и предполагаемой модели. Однако, на распределении заметна выделяющаяся группа объектов справа, можно оценить вероятность принятия гипотезы без учета нескольких последних бинов, но и в таком случае вероятность составляет всего $2 \cdot 10^{-10}$. Эти результаты говорят о том, что для моделирования на больших гелиоцентрических расстояних следует предполагать другую гипотезу о вертикальном распределении объектов.

3.3. Локальная выборка

Для локальной выборки оптимальным порядком оказался нулевой. Это значит, что, как было предположено ранее, в такой окрестности нет никаких мелкомасштабных структур. Также это значит, что многие изображения стали неинформативными. Табл. 8 содержит значения оценок параметров, левая панель рис. 18 отображает распределение по ΔZ, правая панель рис. 18 показывает изменение дисперсии с порядком, которое заметно отличается от того, что было для рабочей выборки; вероятно ожидать, что оптимальный порядок будет нулевой или первый. Крайний левый объект, вероятно, является выбросом, так как он резко выделяется на фоне

Таблица 6. Значения оценок параметров, $N = 639,\ n = 5,\ k = 22$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.1608 \pm 0.0045}$	**0.03**
z_{00}	$\mathbf{-0.035 \pm 0.012}$	**0.34**
z_{10}	-0.0131 ± 0.0098	0.75
z_{01}	-0.0083 ± 0.0068	0.82
z_{20}	0.0063 ± 0.0051	0.81
z_{11}	0.0047 ± 0.0043	0.91
z_{02}	0.0040 ± 0.0023	0.57
z_{30}	-0.0023 ± 0.0015	0.65
z_{21}	$\mathbf{0.0046 \pm 0.0014}$	**0.30**
z_{12}	$\mathbf{0.00328 \pm 0.00089}$	**0.27**
z_{03}	0.00102 ± 0.00051	0.50
z_{40}	$\mathbf{-0.00120 \pm 0.00048}$	**0.40**
z_{31}	-0.00083 ± 0.00061	0.73
z_{22}	0.00040 ± 0.00047	1.17
z_{13}	0.00010 ± 0.00022	2.20
z_{04}	-0.00018 ± 0.00011	0.61
z_{50}	-0.000062 ± 0.000054	0.87
z_{41}	$\mathbf{-0.000168 \pm 0.000076}$	**0.45**
z_{32}	-0.000063 ± 0.000061	0.97
z_{23}	0.000013 ± 0.000038	2.92
z_{14}	-0.000009 ± 0.000015	1.67
z_{05}	$\mathbf{-0.0000165 \pm 0.0000063}$	**0.38**

остальных. Следовательно, нет особого смысла вычислять вероятность достоверности гипотезы о нормальном распределении.

3.4. Локальная выборка без выбросов

После использования алгоритма устранения выбросов из выборки был удален один объект, заметное отклонение которого было отмечено ранее. Оптимальным порядком также остался нулевой. Теперь же, на рис. 19 видно близкое к модельному наблюдаемое распределение. Оценка вероятности согласия наблюдаемых данных с гипотезой дает значение 44%. Можно принять гипотезу о нормальном распределении объектов вдоль оси Z в области, покрытой объектами локальной выборки.

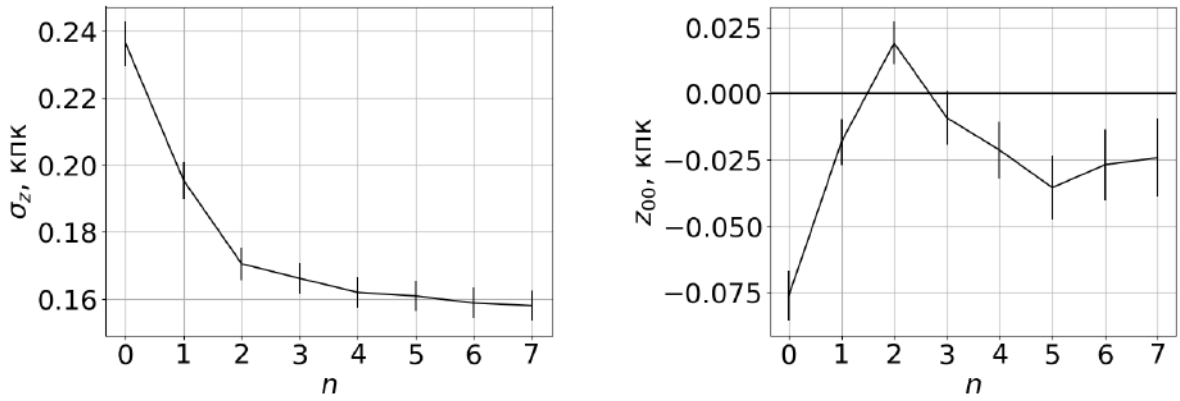


Рис. 5. Левая панель: зависимость σ_z от n; правая панель: зависимость z_{00} от n.

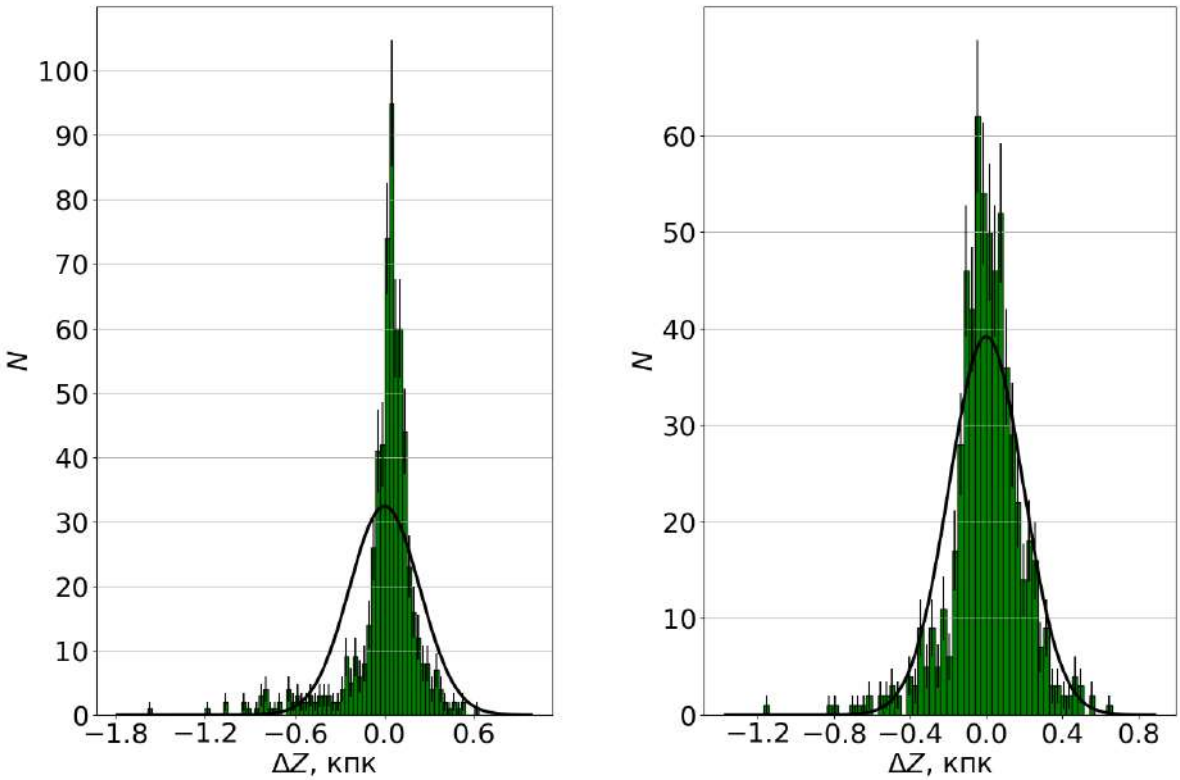


Рис. 6. Наблюдаемое и модельное распределение объектов по ΔZ, $n = 0$ на левой панели, $n = 1$ на правой панели.

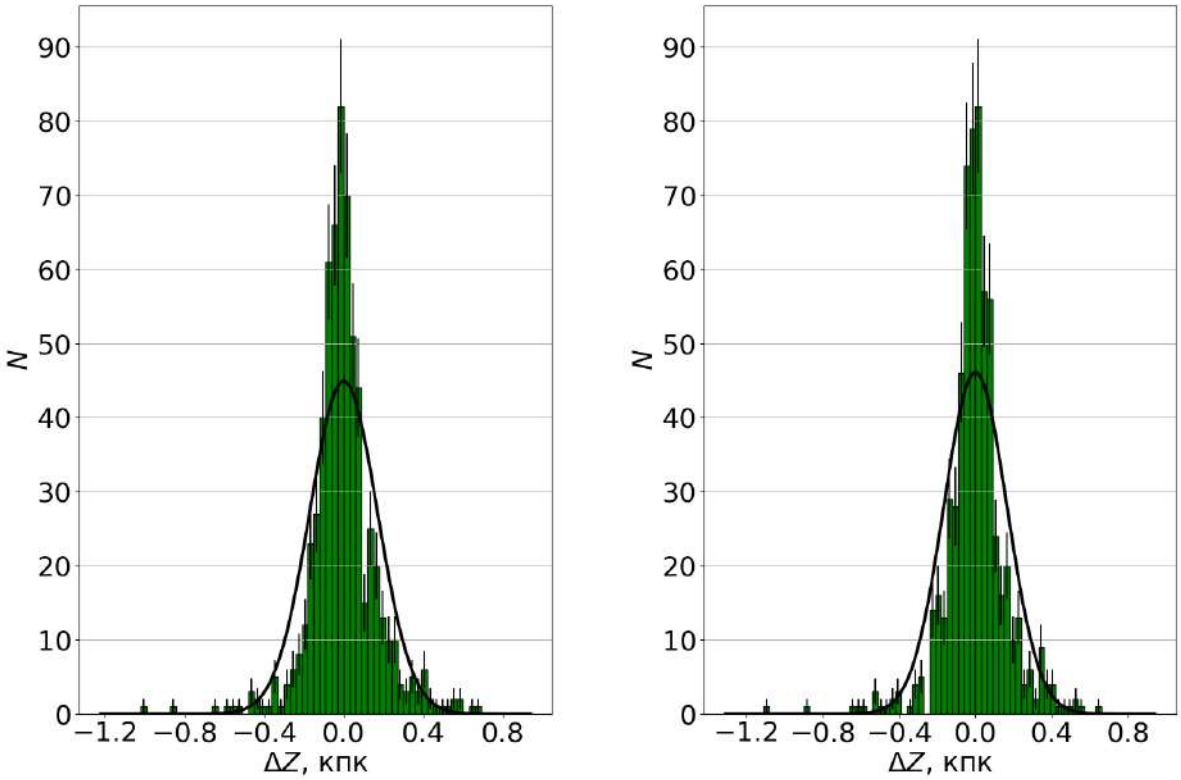


Рис. 7. То же, что и на рис. 6, но при $n = 2$ на левой панели, $n = 3$ на правой панели.

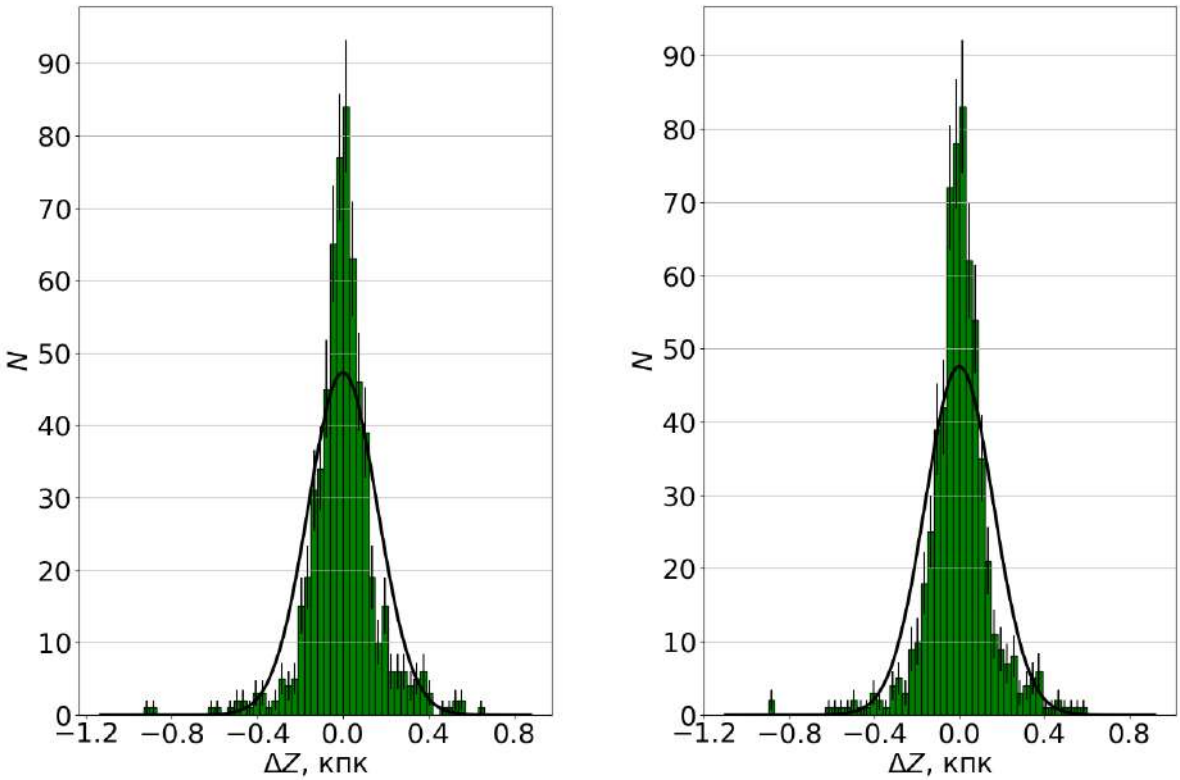


Рис. 8. То же, что и на рис. 7, но при $n = 4$ на левой панели, $n = 5$ на правой панели.

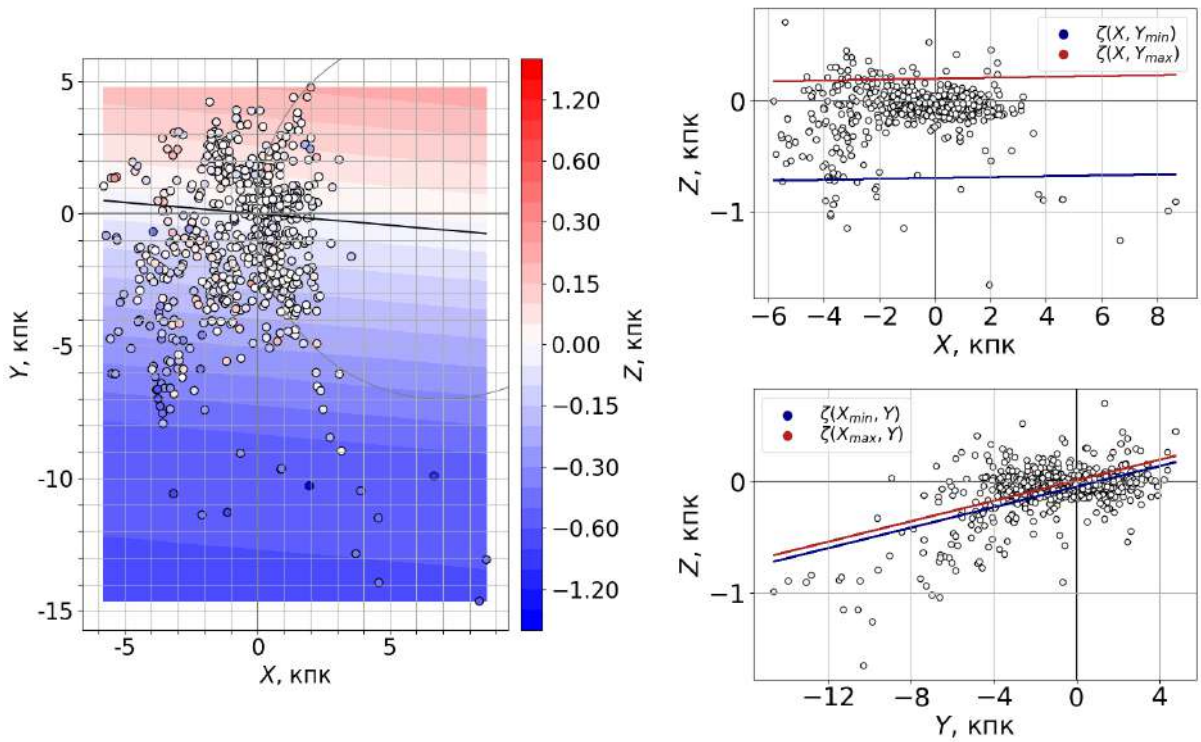


Рис. 9. Левая панель: ζ_1, проекция рабочей выборки, черной линией указан уровень z_{00}, серой — солнечный круг; правая панель: проекции части поверхности ζ_1 и рабочей выборки на плоскости XZ и YZ.

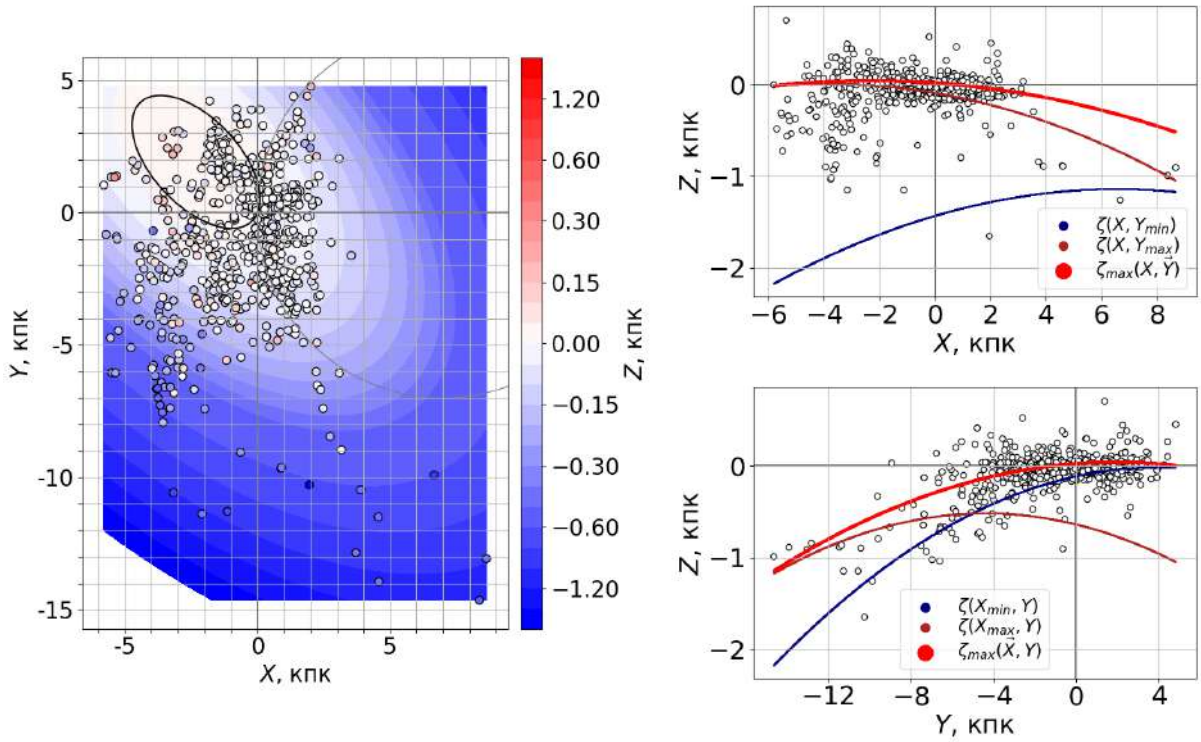


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, но при $n = 2$.

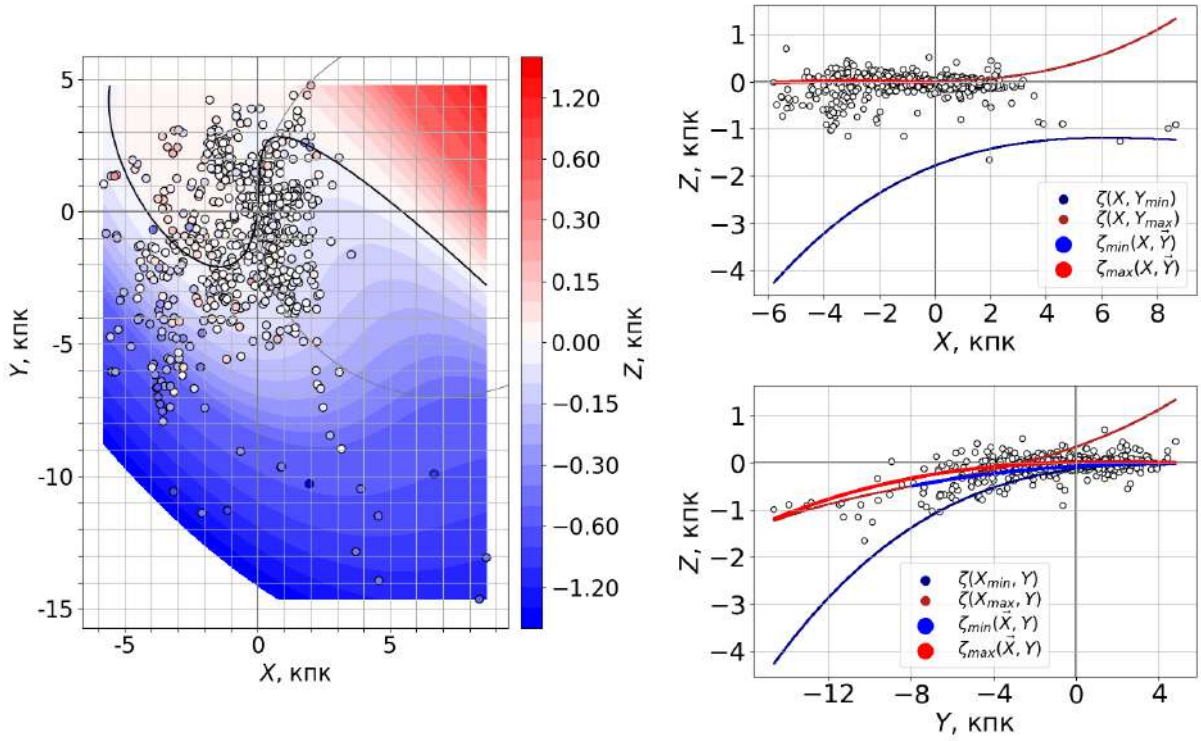


Рис. 11. То же, что и на рис. 9, но при $n = 3$.

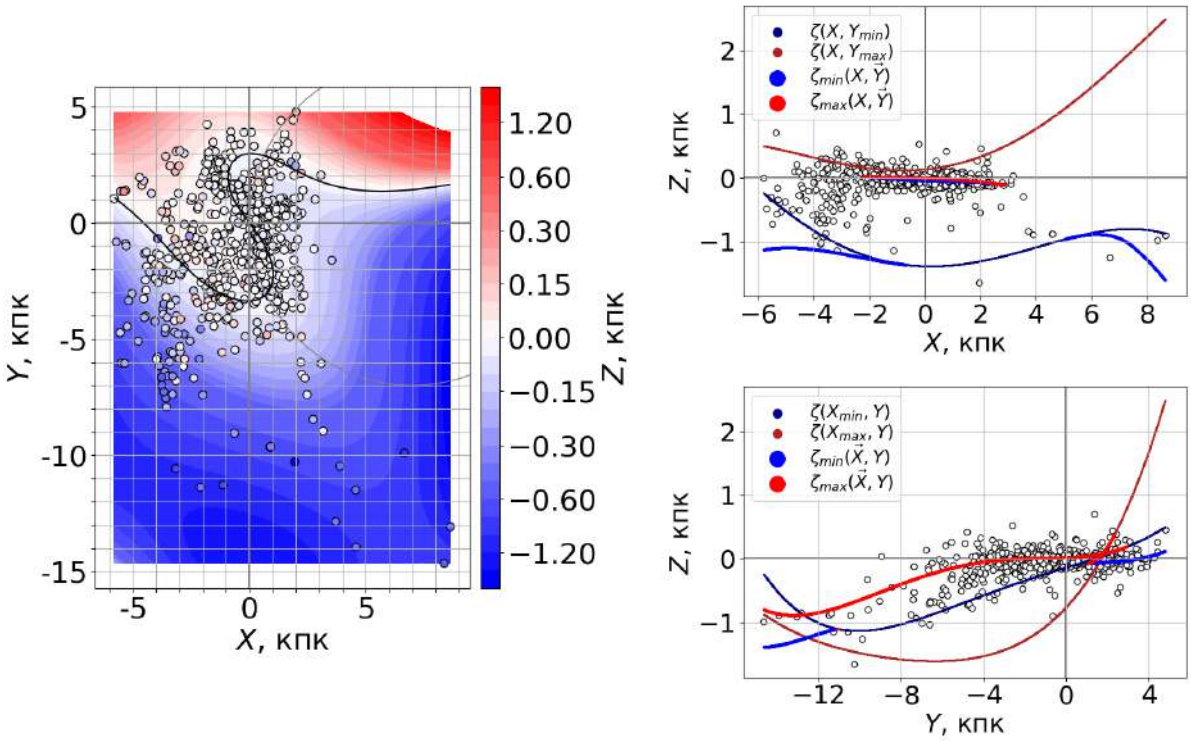


Рис. 12. То же, что и на рис. 9, но при $n = 4$, оптимальный порядок.

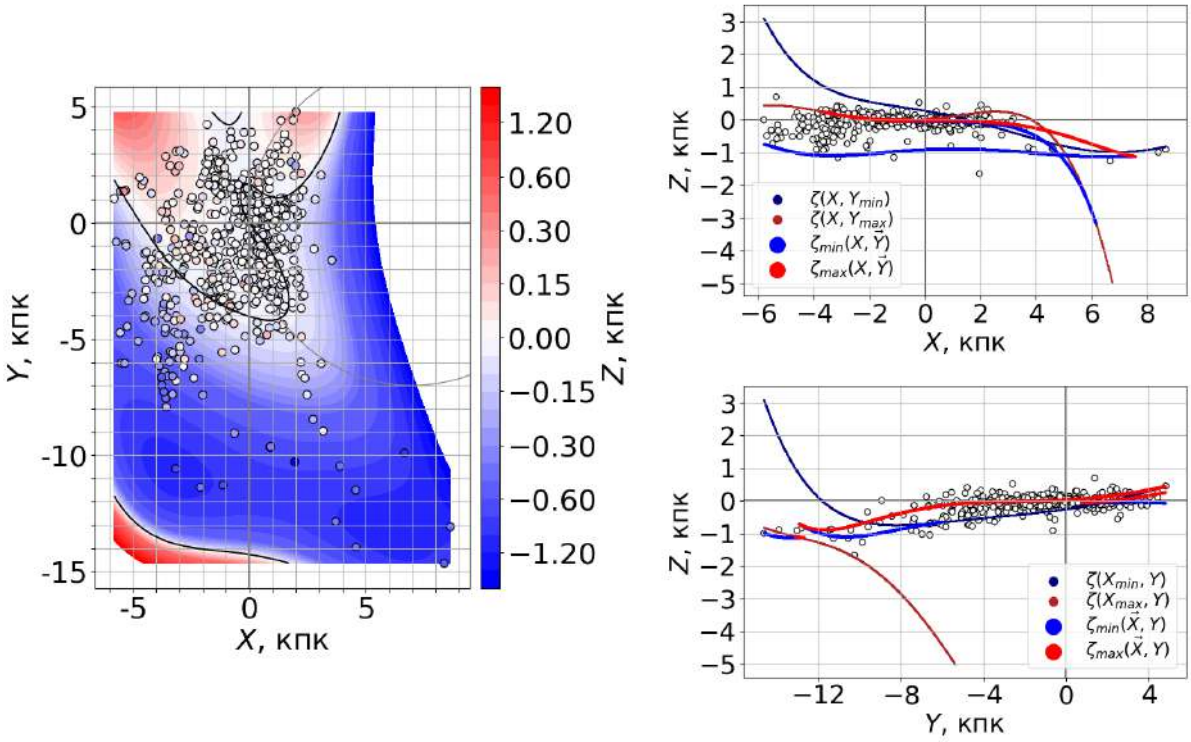


Рис. 13. То же, что и на рис. 9, но при $n = 5$.

Таблица 7. Значения оценок параметров, $N = 617,\ n = 4,\ k = 16$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.1226 \pm 0.0035}$	**0.03**
z_{00}	$\mathbf{-0.0249 \pm 0.0082}$	**0.33**
z_{10}	$\mathbf{-0.0310 \pm 0.0063}$	**0.20**
z_{01}	$\mathbf{-0.0127 \pm 0.0041}$	**0.32**
z_{20}	$\mathbf{0.0053 \pm 0.0026}$	**0.49**
z_{11}	0.0009 ± 0.0018	2.00
z_{02}	-0.0005 ± 0.0010	2.00
z_{30}	$\mathbf{0.00202 \pm 0.00089}$	**0.44**
z_{21}	$\mathbf{0.00289 \pm 0.00097}$	**0.34**
z_{12}	$\mathbf{0.00270 \pm 0.00056}$	**0.21**
z_{03}	$\mathbf{0.00176 \pm 0.00029}$	**0.16**
z_{40}	-0.00011 ± 0.00012	1.09
z_{31}	0.00014 ± 0.00014	1.00
z_{22}	$\mathbf{0.00022 \pm 0.00010}$	**0.45**
z_{13}	$\mathbf{0.000170 \pm 0.000049}$	**0.29**
z_{04}	$\mathbf{0.000094 \pm 0.000021}$	**0.22**

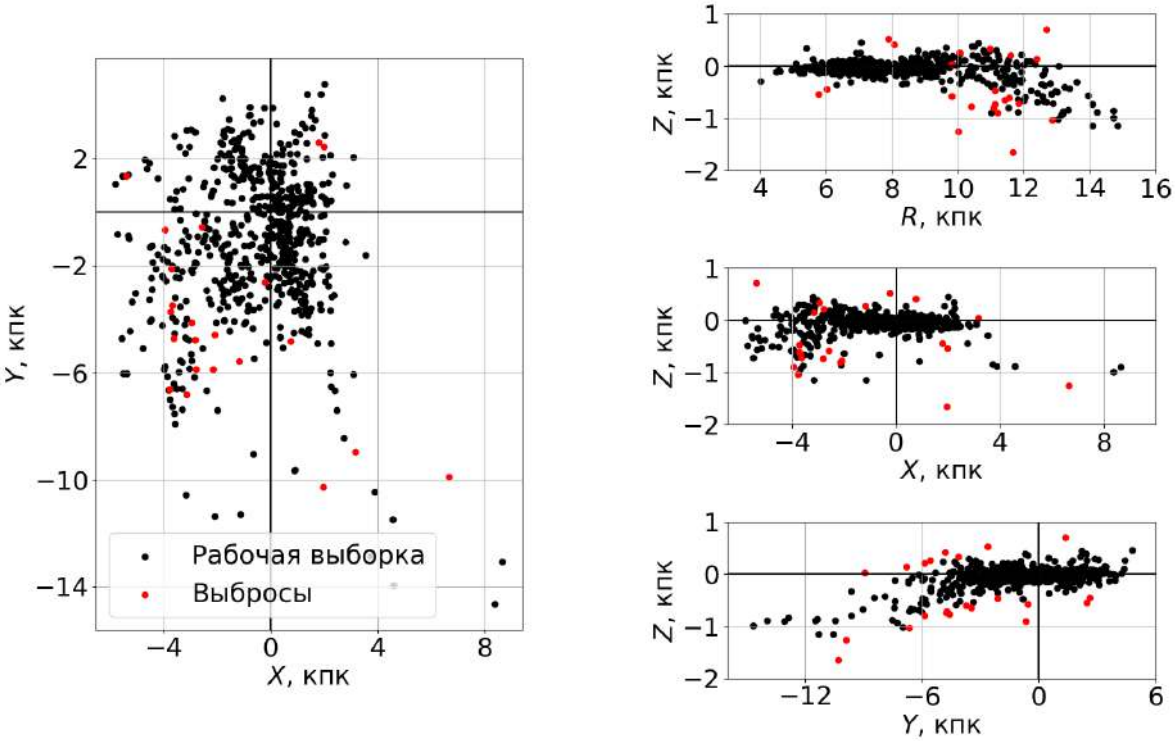


Рис. 14. Левая панель: проекция рабочей выборки и выбросов на плоскость XY; правая панель: на плоскости RZ, XZ и YZ.

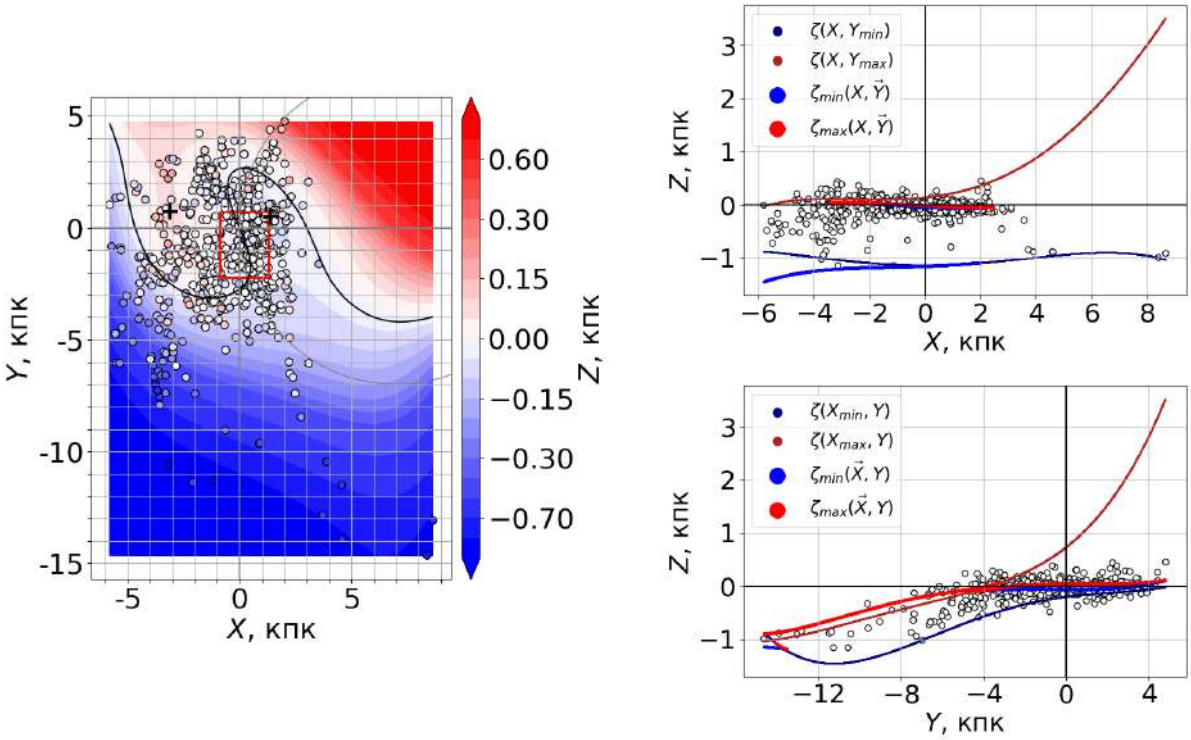


Рис. 15. Левая панель: ζ_4, проекция рабочей выборки без выбросов, черной линией указан уровень z_{00}, серой — солнечный круг; правая панель: проекции части поверхности ζ_4 и рабочей выборки без выбросов на плоскости XZ и YZ.

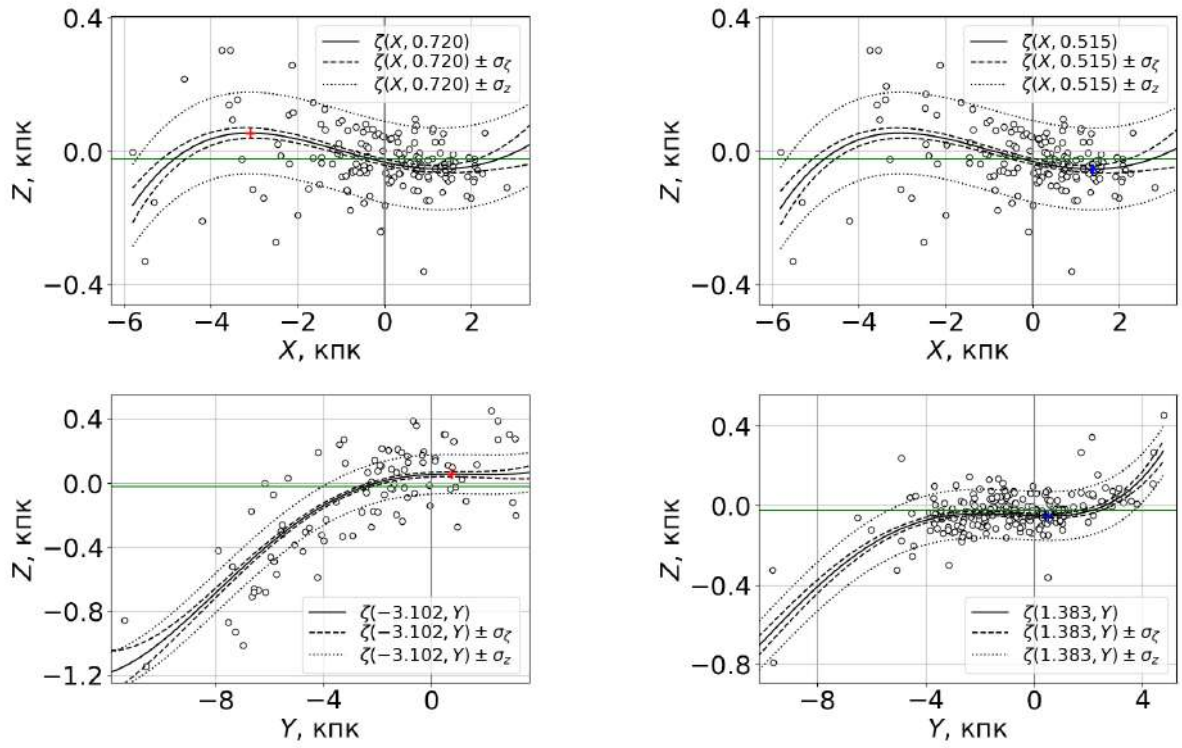


Рис. 16. Левая панель: разрез поверхности, проходящий через локальный максимум; правая панель: разрез поверхности, проходящий через локальный максимум; проекции положений объектов из полосы ±1 кпк от линии разреза.

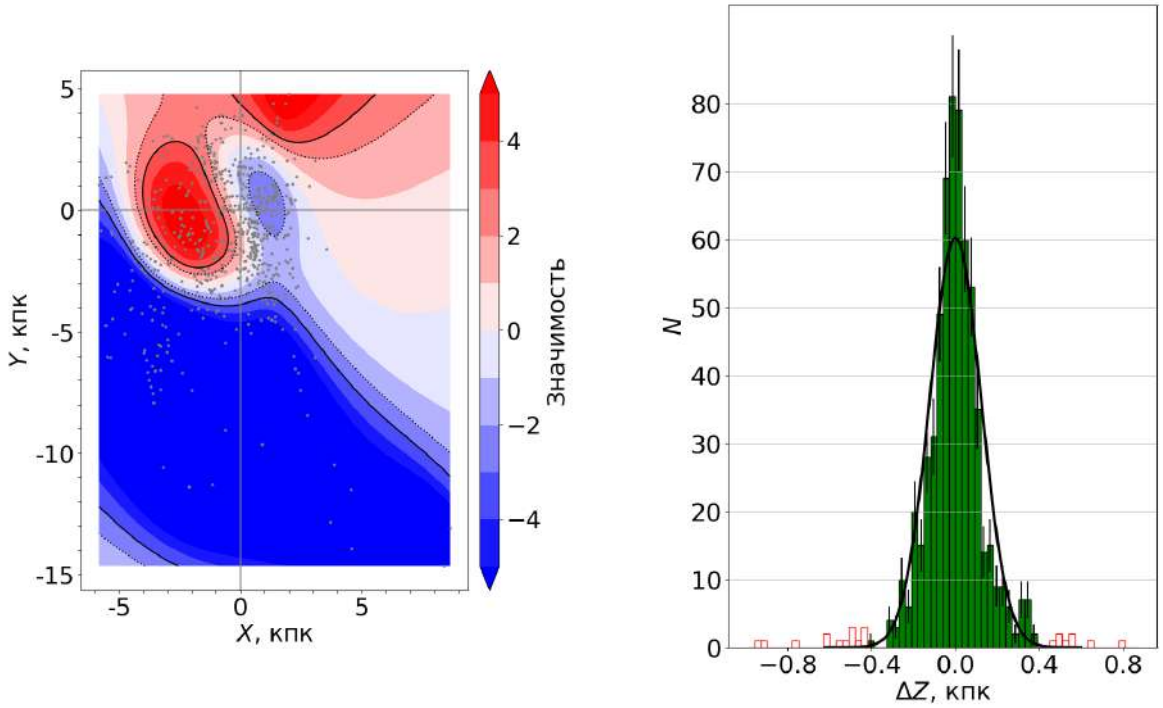


Рис. 17. Левая панель: карта значимости ζ_4, пунктирная линия — уровень значимости 2σ, сплошная — 3σ; правая панель: наблюдаемое и модельное распределение объектов по ΔZ, $n = 4$.

Таблица 8. Значения оценок параметров, $N = 154,\ n = 0,\ k = 2$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.0736 \pm 0.0042}$	**0.06**
z_{00}	$\mathbf{-0.0274 \pm 0.0059}$	**0.22**

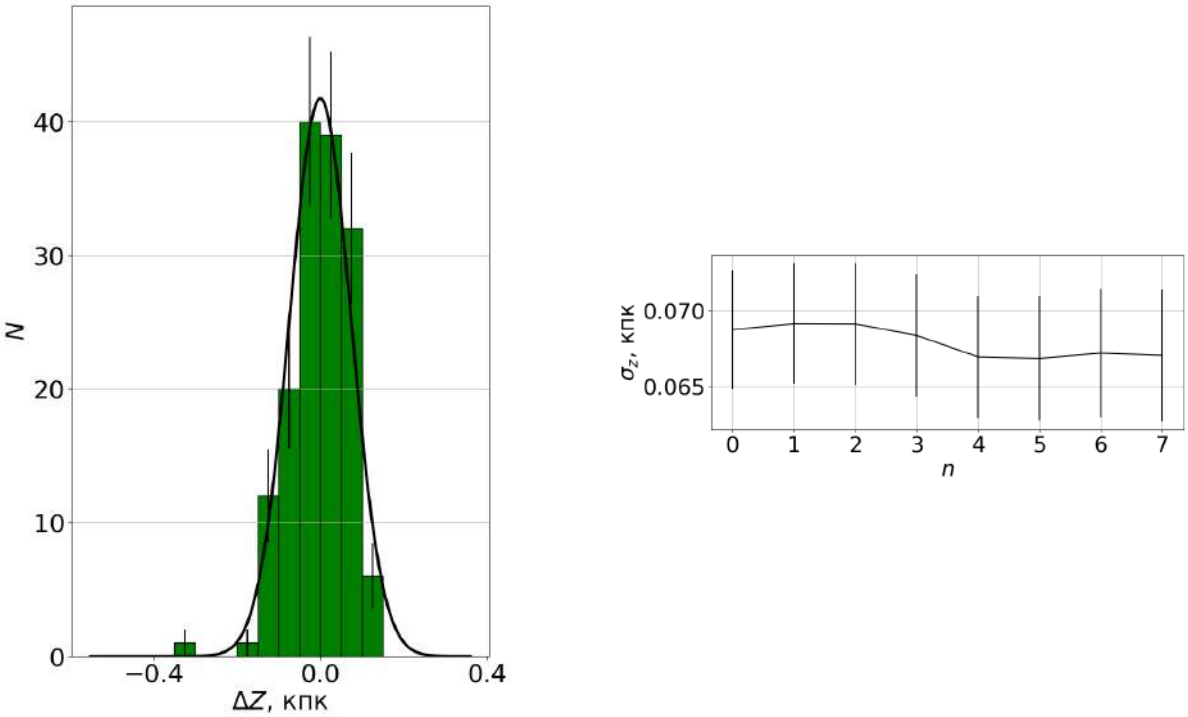


Рис. 18. Левая панель: наблюдаемое и модельное распределение объектов по ΔZ, $n = 0$; правая панель: зависимость σ_z от n.

Таблица 9. Значения оценок параметров, $N = 153,\ n = 0,\ k = 2$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_z	$\mathbf{0.0687 \pm 0.0039}$	**0.06**
z_{00}	$\mathbf{-0.0252 \pm 0.0055}$	**0.22**

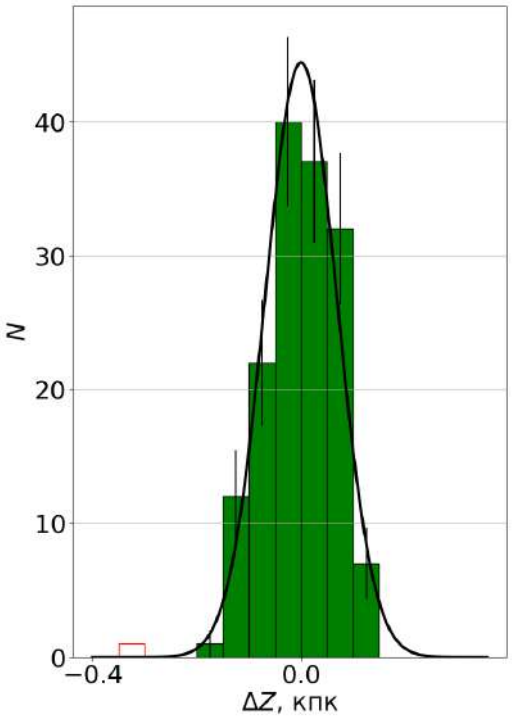


Рис. 19. Наблюдаемое и модельное распределение объектов по ΔZ, $n = 0$.

4. Результаты оптимизации отклонения объектов по нормали к модели средней поверхности

Оптимизация по ρ вместо ΔZ должна привести к снижению стандартного отклонения модели. Это может сказаться на количестве объектов рабочей выборки без выбросов: оно может уменьшиться или быть таким же, как и в случае моделирования по ΔZ. Оптимальный порядок определяется так же, как и раньше, по совокупности факторов.

4.1. Рабочая выборка

Для рабочей выборки оптимальным оказался четвертый порядок. Так как основный интерес представляют результаты по выборкам без выбросов, не будем подробно останавливаться на результатах для рабочей выборки, однако приведем некоторые из них. Табл. 10 содержит значения параметров, на рис. 20 изображена модельная поверхность. На рис. 21 хорошо видно, что исключение выбросов важно и в случае оптимизации по нормали к модельной поверхности, поскольку в данном случае также присутствует ряд объектов с большими значениями ρ.

Таблица 10. Значения оценок параметров, $N = 639,\ n = 4,\ k = 16$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_ρ	$\mathbf{0.1589 \pm 0.0044}$	**0.03**
z_{00}	$\mathbf{-0.022 \pm 0.010}$	**0.45**
z_{10}	$\mathbf{-0.0237 \pm 0.0081}$	**0.34**
z_{01}	$\mathbf{-0.0180 \pm 0.0053}$	**0.29**
z_{20}	-0.0002 ± 0.0032	16.00
z_{11}	-0.0005 ± 0.0022	4.40
z_{02}	-0.0001 ± 0.0013	13.00
z_{30}	0.00007 ± 0.00115	16.43
z_{21}	$\mathbf{0.0040 \pm 0.0012}$	**0.30**
z_{12}	$\mathbf{0.00240 \pm 0.00071}$	**0.30**
z_{03}	$\mathbf{0.00183 \pm 0.00036}$	**0.20**
z_{40}	-0.00021 ± 0.00016	0.76
z_{31}	0.00006 ± 0.00018	3.00
z_{22}	$\mathbf{0.00043 \pm 0.00013}$	**0.30**
z_{13}	$\mathbf{0.000163 \pm 0.000061}$	**0.37**
z_{04}	$\mathbf{0.000088 \pm 0.000026}$	**0.30**

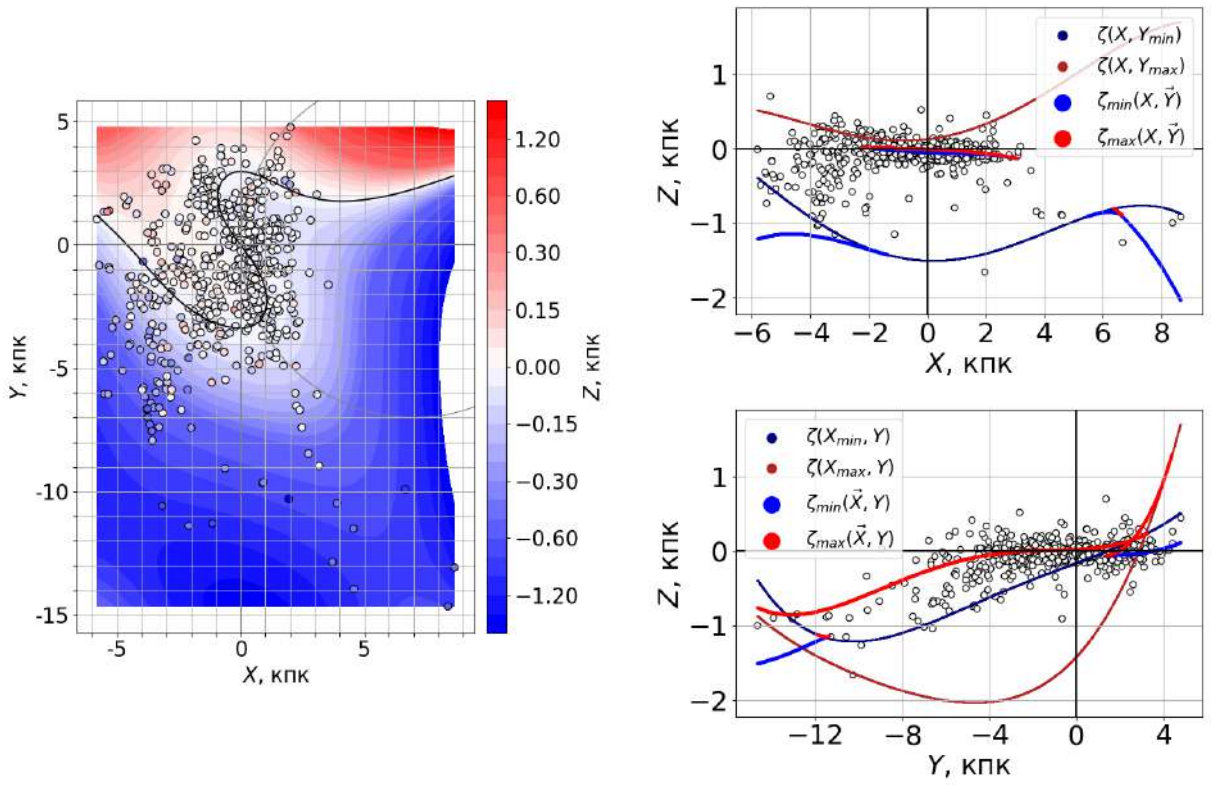


Рис. 20. Левая панель: ζ_4, проекция рабочей выборки, черной линией указан уровень z_{00}, серой — солнечный круг; правая панель: проекции части поверхности ζ_4 и рабочей выборки на плоскости XZ и YZ.

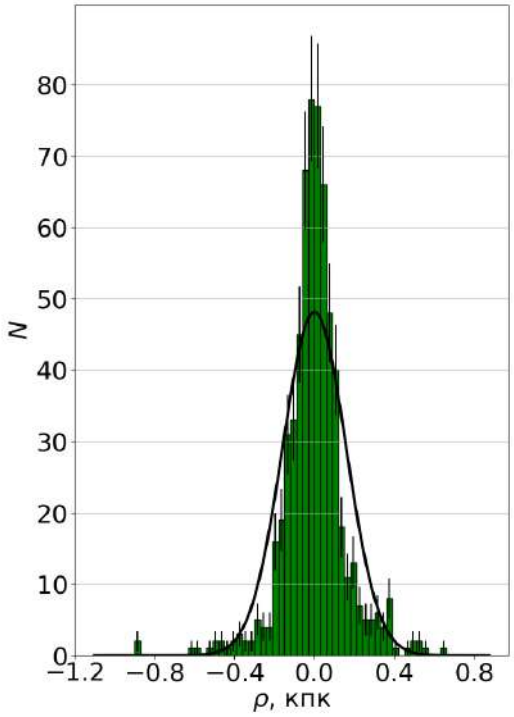


Рис. 21. Наблюдаемое и модельное распределение объектов по ρ, $n = 4$.

4.2. Рабочая выборка без выбросов

После устранения выбросов осталось 615 объектов, что на два меньше, чем осталось после устранения выбросов при моделировании по ΔZ. На рис. 22 цветом отмечены выбросы. Оптимальным порядком остался четвертый, дальнейшие результаты приведены только для него. В табл. 11 приведены значения всех параметров.

При таком моделировании тоже появились локальный максимум и минимум и примерно в тех же местах, они обозначены на рис. 23 черным крестиком. Проверим их значимость по формуле (17).

$$\begin{gathered} X_{\text{loc_max}} = -3.1 \text{ кпк}, \; Y_{\text{loc_max}} = 0.6 \text{ кпк}, \\ \zeta_4(X_{\text{loc_max}}, Y_{\text{loc_max}}) = 58.4 \pm 15.0 \text{ пк}, \\ S_{\zeta_4}(X_{\text{loc_max}}, Y_{\text{loc_max}}) = 5.43, \\ X_{\text{loc_min}} = 1.4 \text{ кпк}, \; Y_{\text{loc_min}} = 0.6 \text{ кпк}, \\ \zeta_4(X_{\text{loc_min}}, Y_{\text{loc_min}}) = -55.0 \pm 11.0 \text{ пк}, \\ S_{\zeta_4}(X_{\text{loc_min}}, Y_{\text{loc_min}}) = -2.81. \end{gathered} \tag{19}$$

Относительная их значимость — 6.10. На рис. 28 показана карта значимости модельной поверхности.

На рис. 29 построено распределение объектов по ρ, выделяющаяся группа объектов наблюдается и в данном случае, вероятность достоверности гипотезы о распределении при рассмотрении вместе с этой группой — $3 \cdot 10^{-18}$, без неё — $7 \cdot 10^{-8}$.

На рис. 25 виден наклон модельной поверхности относительно номинальной плоскости (плоскость XY галактической системы координат). Поскольку сейчас проводилось моделирование по ρ, можно вычислить значение $\rho_\odot$, после чего можно получить оценку угла наклона локальной средней поверхности диска Галактики к номинальной плоскости:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\rho_\odot}{z_\odot}\right) = 1.79^{+0.34}_{-0.33} \text{ град.} \tag{20}$$

Оценка ошибки угла вычисляется статистическим моделированием методом Монте-Карло на основе формирования 50 случайных выборок с заранее заданными параметрами, совпадающими с параметрами модели 4-го порядка рабочей выборки без выбросов. Для всех объектов рабочей выборки без выбросов определяются расстояния до поверхности. Затем в эти расстояния вносится случайная нормально распределенная ошибка с дисперсией, равной модельной. Далее по новым расстояниям получаются координаты X', Y', Z' объектов, из которых потом формируется выборка. В конце оптимизируются параметры по сформированной выборке и вычисляется угол γ. Этот процесс повторяется 50 раз. Величины σ_γ^+ и σ_γ^- соответствуют таким значениям, что в интервал $[\mathsf{Me}\,\gamma - \sigma_\gamma^-, \mathsf{Me}\,\gamma + \sigma_\gamma^+]$ попадает 68.3% (уровень 1σ) вычисленных значений углов.

Таблица 11. Значения оценок параметров, $N = 615,\ n = 4,\ k = 16$

Параметр	Оценка	$\sigma_{z_i}/\lvert z_i\rvert$
σ_ρ	$\mathbf{0.1187 \pm 0.0033}$	**0.03**
z_{00}	$\mathbf{-0.0243 \pm 0.0079}$	**0.33**
z_{10}	$\mathbf{-0.0320 \pm 0.0061}$	**0.19**
z_{01}	$\mathbf{-0.0131 \pm 0.0040}$	**0.31**
z_{20}	$\mathbf{0.0055 \pm 0.0025}$	**0.45**
z_{11}	0.0008 ± 0.0018	2.25
z_{02}	-0.0007 ± 0.0010	1.43
z_{30}	$\mathbf{0.00203 \pm 0.00087}$	**0.43**
z_{21}	$\mathbf{0.00289 \pm 0.00094}$	**0.33**
z_{12}	$\mathbf{0.00288 \pm 0.00055}$	**0.19**
z_{03}	$\mathbf{0.00180 \pm 0.00028}$	**0.16**
z_{40}	-0.00012 ± 0.00012	1.00
z_{31}	0.00013 ± 0.00014	1.08
z_{22}	$\mathbf{0.00022 \pm 0.00010}$	**0.45**
z_{13}	$\mathbf{0.000185 \pm 0.000048}$	**0.26**
z_{04}	$\mathbf{0.000099 \pm 0.000020}$	**0.20**

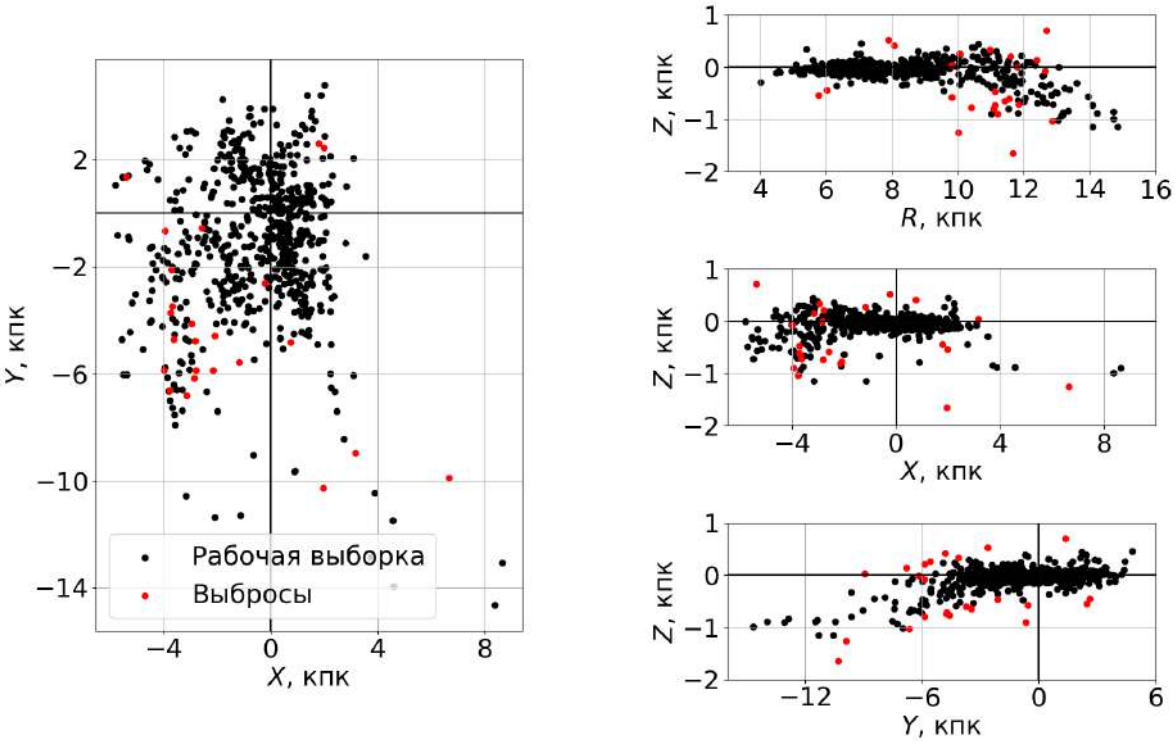


Рис. 22. Левая панель: проекция рабочей выборки и выбросов на плоскость XY; правая панель: на плоскости RZ, XZ и YZ.

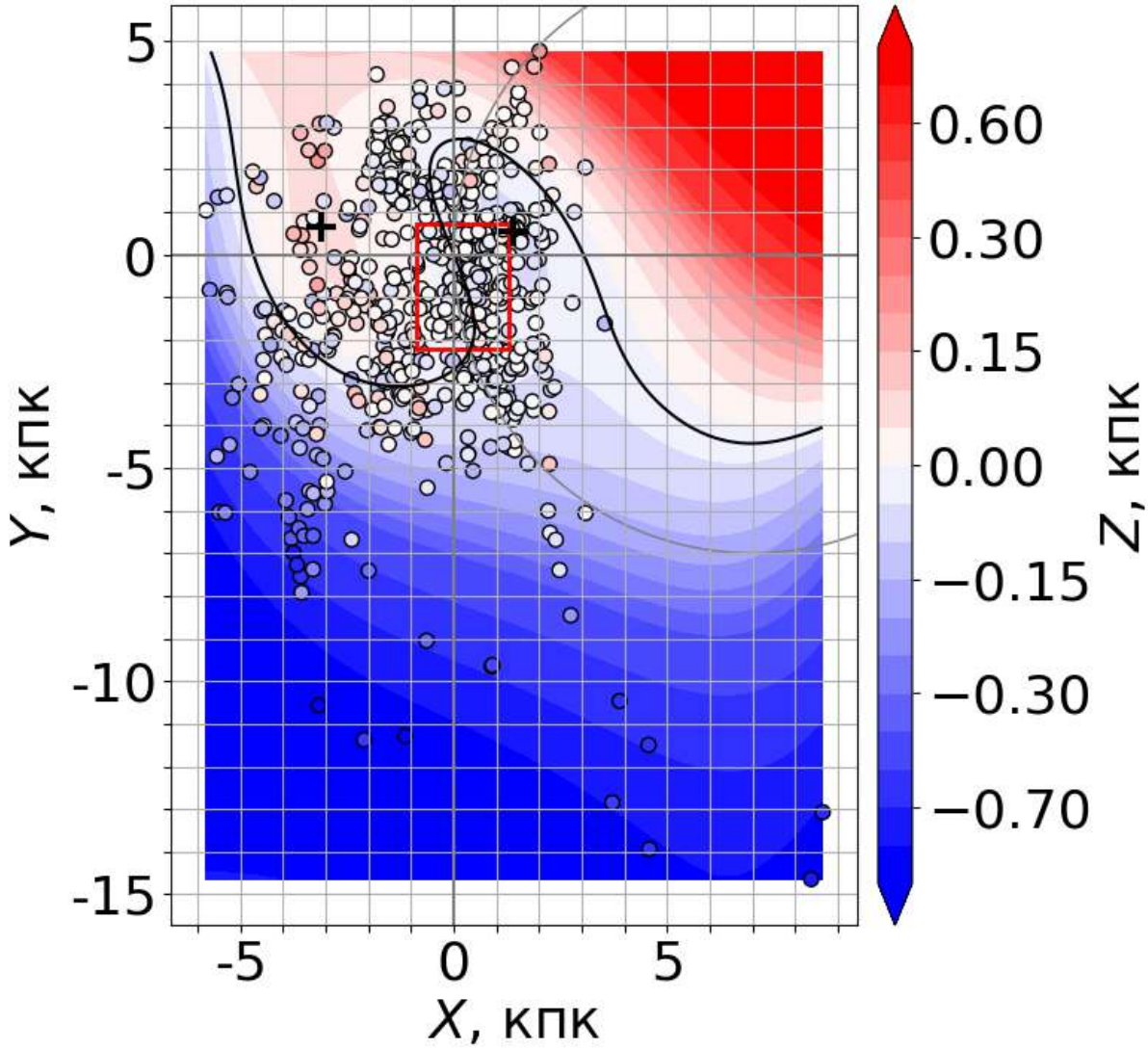


Рис. 23. ζ_4, проекция рабочей выборки без выбросов, черной линией указан уровень z_{00}, серой — солнечный круг.

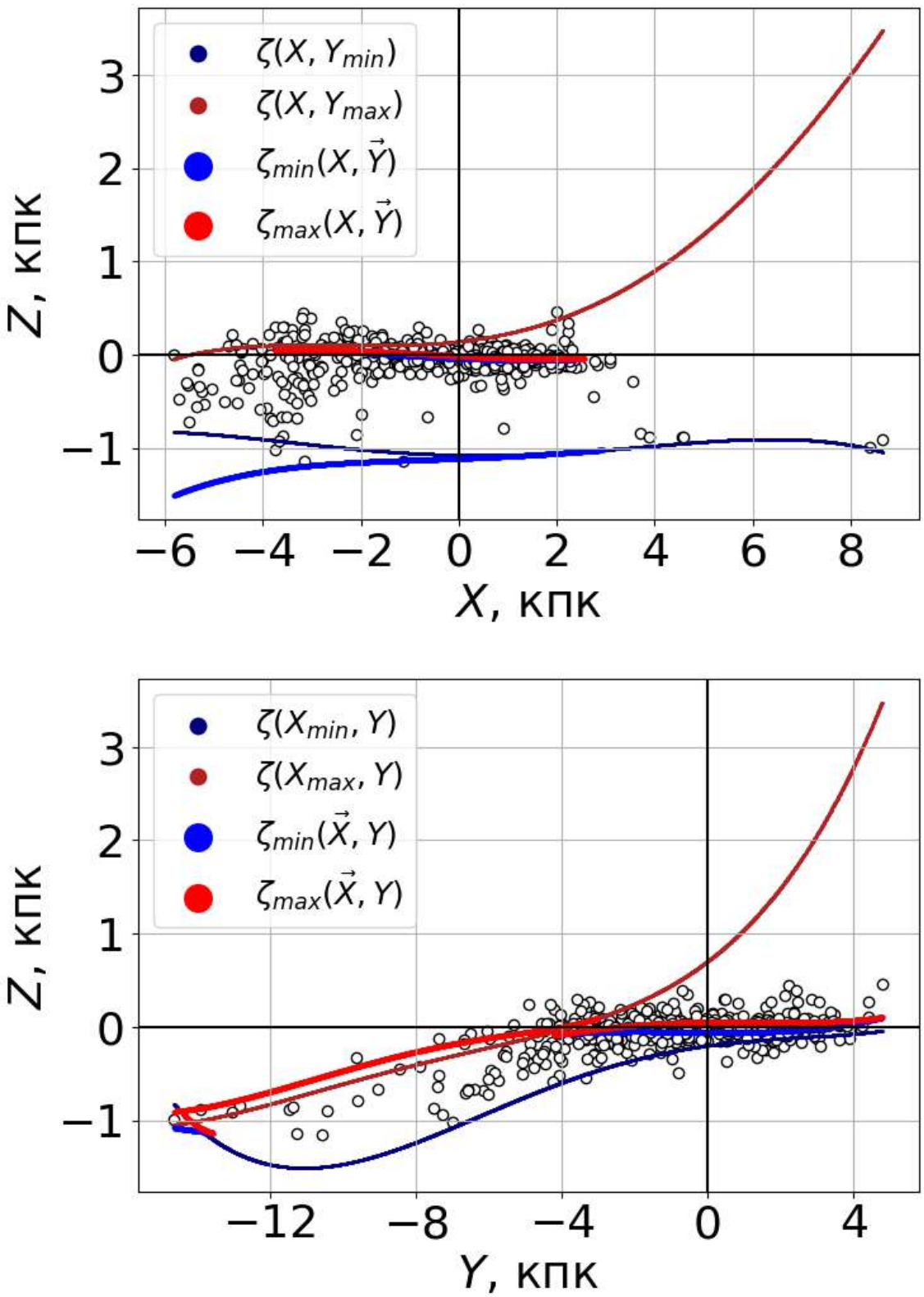


Рис. 24. Проекция части модельной поверхности при $n = 4$ и рабочей выборки без выбросов на плоскости XZ и YZ.

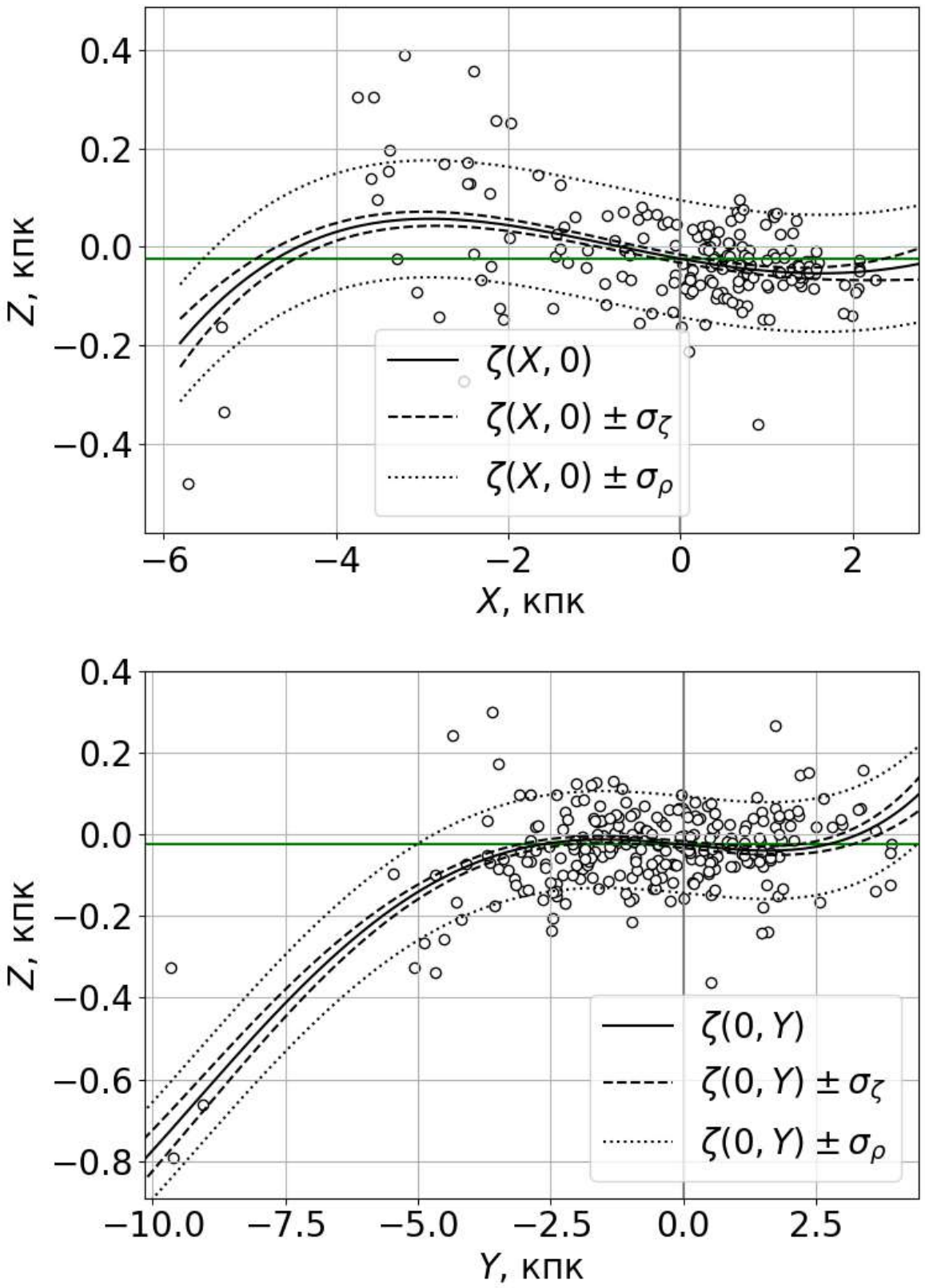


Рис. 25. Разрез поверхности, проходящий через начало координат и проекции объектов из полосы ±1 кпк от линии разреза.

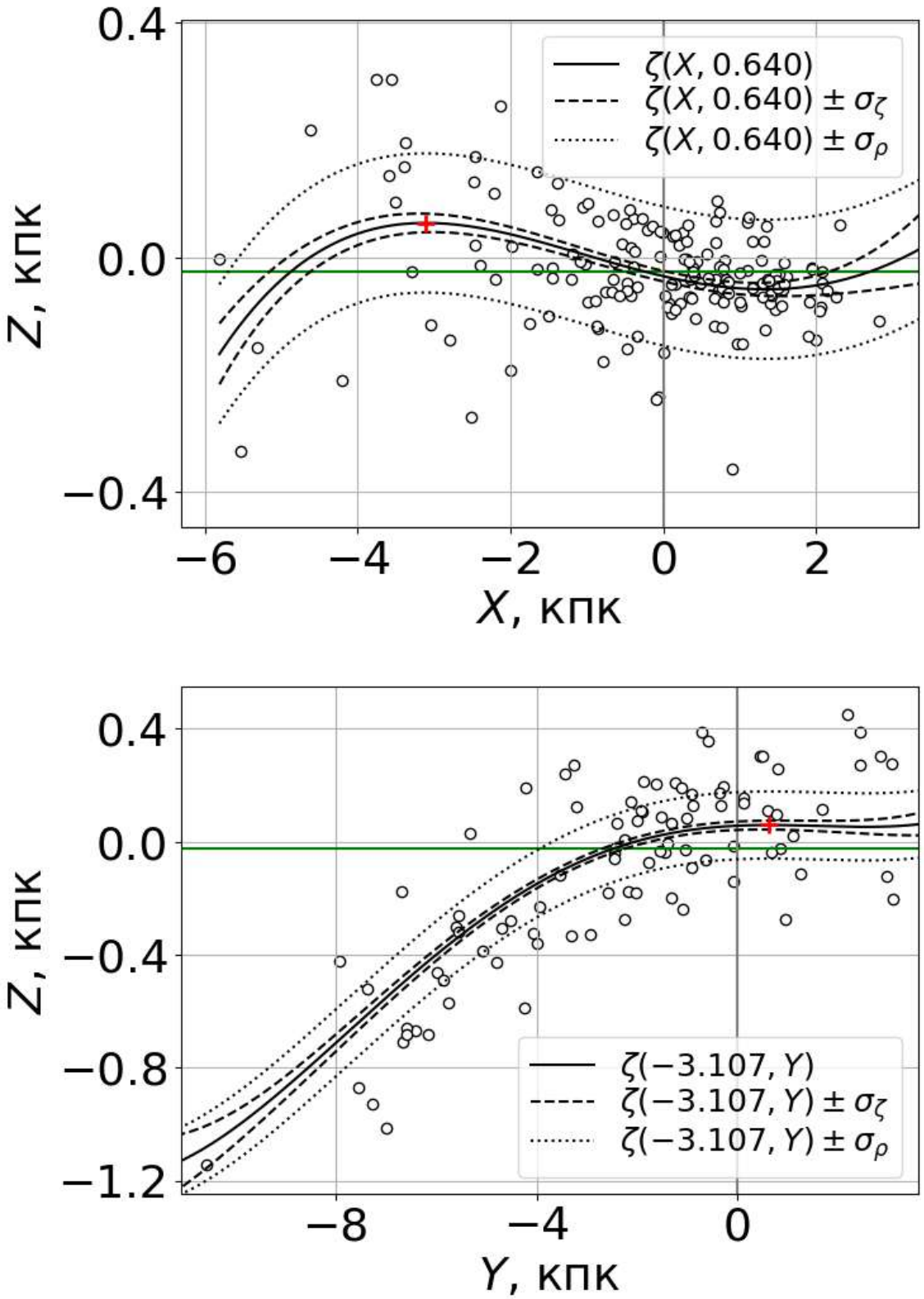


Рис. 26. Разрез поверхности, проходящий через локальный максимум, и проекции объектов из полосы ±1 кпк от линии разреза.

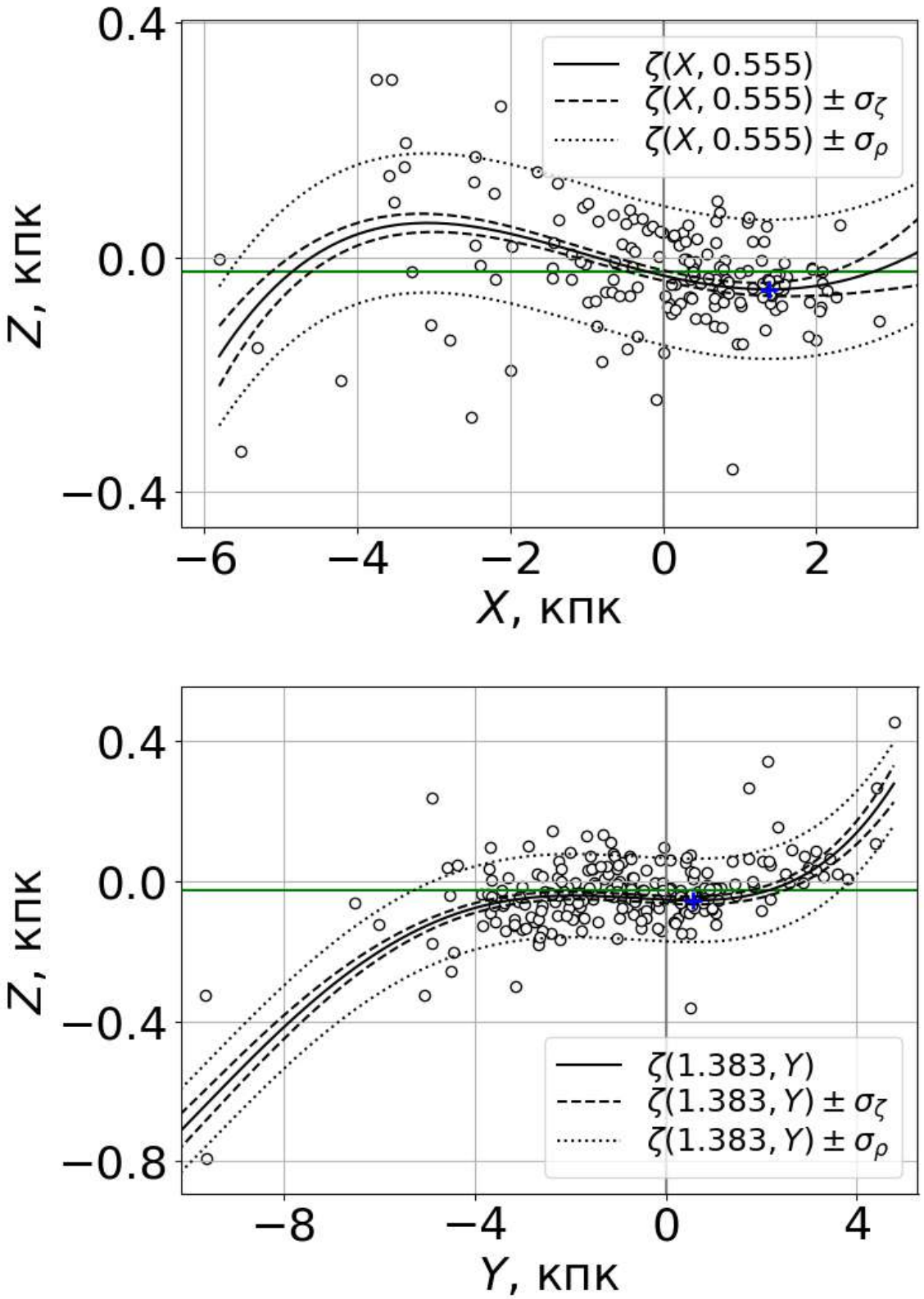


Рис. 27. Разрез поверхности, проходящий через локальный минимум, и проекции объектов из полосы ±1 кпк от линии разреза.

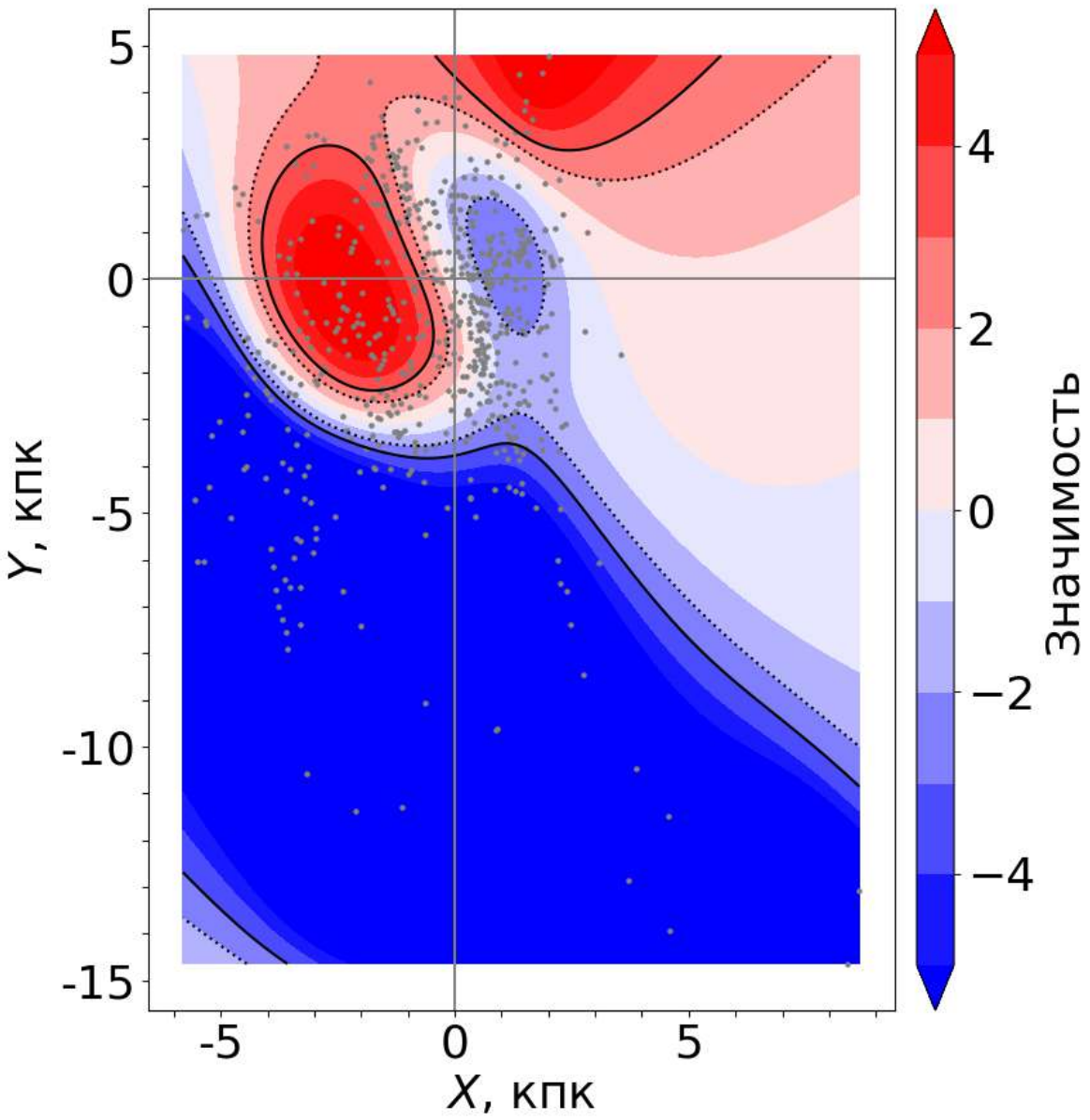


Рис. 28. Карта значимости ζ_4, пунктирная линия — уровень значимости 2σ, сплошная — 3σ.

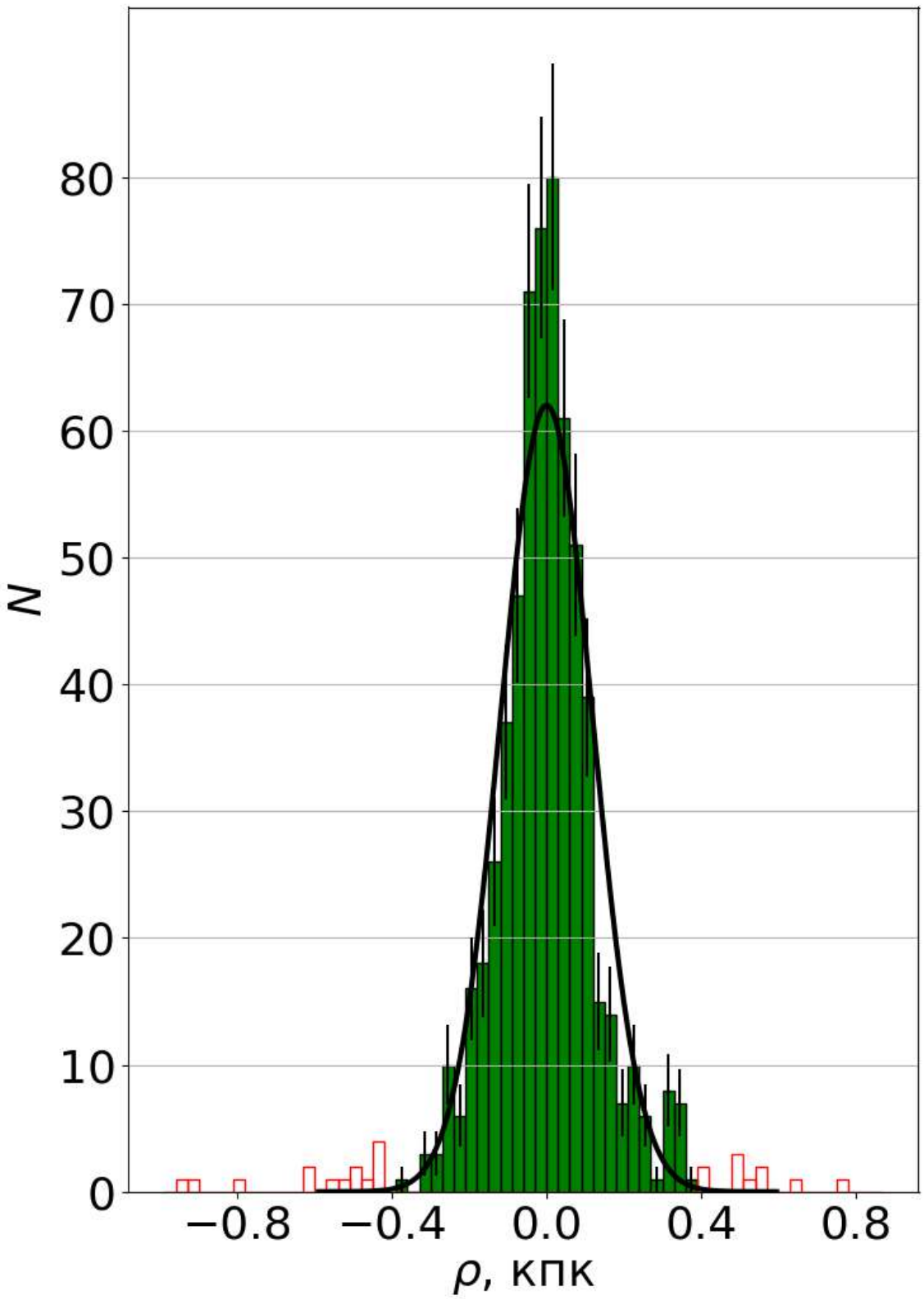


Рис. 29. Наблюдаемое и модельное распределение объектов по ρ, $n = 4$.

4.3. Локальная выборка

Оптимальным порядком оказался нулевой порядок. Ранее уже отмечался тот факт, что для нулевого порядка моделирование по ΔZ и ρ дает одинаковые результаты, которые приведены в 3.3.

4.4. Локальная выборка без выбросов

В методе наибольшего правдоподобия на один определяемый параметр больше, а, следовательно, значение $\varkappa$ в формуле (14) на один меньше, это приведет к уменьшению вероятности, вычисляемой в той же формуле. Все результаты повторяют результаты из 3.4., за исключением того, что вероятность принятия гипотезы оказалась $\approx 30\%$.

5. Обсуждение

В силу того, что результаты при оптимизации по ρ математически более корректны, а так же незначимости отличий результатов при оптимизации по ρ и Z, в качестве окончательных результатов приводятся только оценки параметров, полученные при оптимизации по ρ. Используя коэффициент из формулы (15), приведем основные оценки к современной шкале. Локальные оценки:

$$\begin{aligned} z_\odot = 25.2 \pm 5.5 \text{ пк} \;&\rightarrow\; z_\odot = 28.1 \pm 6.1\big|_{\text{stat}}{}^{+1.3}_{-1.3}\big|_{\text{cal}} \text{ пк}, \\ \sigma_\rho = 68.5 \pm 3.9 \text{ пк} \;&\rightarrow\; \sigma_\rho = 76.5 \pm 4.4\big|_{\text{stat}}{}^{+3.6}_{-3.4}\big|_{\text{cal}} \text{ пк}. \end{aligned} \tag{21}$$

Нелокальные оценки:

$$\begin{aligned} z_\odot = 24.3 \pm 7.9 \text{ пк} \;&\rightarrow\; z_\odot = 27.1 \pm 8.8\big|_{\text{stat}}{}^{+1.3}_{-1.2}\big|_{\text{cal}} \text{ пк}, \\ \sigma_\rho = 118.2 \pm 3.3 \text{ пк} \;&\rightarrow\; \sigma_\rho = 132.0 \pm 3.7\big|_{\text{stat}}{}^{+6.3}_{-5.9}\big|_{\text{cal}} \text{ пк}. \end{aligned} \tag{22}$$

Факт согласования локальной и нелокальной оценки смещения Солнца относительно средней поверхности диска Галактики говорит в пользу того, что оптимальный порядок был выбран верно.

В работе [7] была предпринята попытка создания модели средней поверхности диска Галактики по цефеидам. Использовалась линейная модель, при которой средняя поверхность представляется плоскостью, наклоненной относительно номинальной плоскости. Получена оценка величины $z_\odot = 23 \pm 5$ пк в локальной области с $r \leq 4$ кпк по цефеидам. Несмотря на то, что этот результат согласуется в пределах неопределенности с полученным в данной работе, его статус неясен, так как без определения оптимального порядка можно получить неверную оценку величины $z_\odot$, это проиллюстрировано на правой панели рис. 5. Полученная форма средней поверхности диска галактики в работе [7] подтверждает ранее известный

результат о понижении в III квадранте, но, в силу своей линейности, не может обнаружить других структур.

В работе [8] получена оценка $\sigma_z = 76.6 \pm 1.9$ пк без учета искривления диска при $r \leq 4$ кпк по цефеидам. Данная оценка приведена в калибровке [2], поэтому её следует сравнивать с оценкой $\sigma_\rho = 68.5 \pm 3.9$ пк. Эти оценки не противоречат друг другу в пределах погрешности. Авторы отмечают тот факт, что для объектов с $r > 4$ кпк искривление диска Галактики значительно влияет на оценку величины σ_z. Левая панель рис. 5 отражает важность учета искривления диска Галактики и выбора оптимального порядка для рабочей выборки.

В рамках исследования формы средней поверхности диска Галактики возможны разные направления. Следует выяснить, сохраняются ли полученные особенности в I и II квадрантах для других опорных объектов; усложнить предположение о вертикальном распределении; учитывать ошибки в определении расстояний до объектов, зависимость дисперсии от расстояния до центра Галактики и т.д. В планах на ближайшую работу — использование других опорных объектов и определение оптимальных параметров с учетом ошибок измерения расстояний. Учет ошибок измерения расстояний следует осуществить в первую очередь, так как эти ошибки способны значительно искажать наблюдаемое распределение объектов, что может стать причиной получения оценки вероятности принятия гипотезы о форме распределения с ошибкой. После внесения учета ошибок в измерении расстояний в модель будет проще принять решение о следующем шаге, будь то рассмотрение других предположений о вертикальном распределении, например распределение по экспоненциальному закону или закону гиперболического секанса в квадрате.

С учетом случайных ошибок измерения расстояний в случае классических цефеид с фотометрическими расстояниями логарифмическая функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = N \ln(2\pi) + N \ln \sigma_\rho + N \ln \sigma_d + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\rho_i^2}{\sigma_\rho^2} + \frac{\Delta d_i^2}{\sigma_d^2} \right), \qquad (23)$$

где ρ_i рассчитывается от приведенного положения объекта, найденного в результате оптимизации положения объекта на луче зрения с учетом дисперсии измерения модуля расстояния σ_d^2, Δd_i — отклонение измеренного модуля расстояния от приведенного.

Заключение

1. Получена нелокальная оценка смещения Солнца относительно средней поверхности диска Галактики $z_\odot = 27.1 \pm 8.8\Big|_{\text{stat}}{}^{+1.3}_{-1.2}\Big|_{\text{cal}}$ пк и локальная оценка (по объектам в области $X \in [-0.87, 1.30]$ кпк, $Y \in [-2.20, 0.72]$ кпк) этого параметра $z_\odot = 28.1 \pm 6.1\Big|_{\text{stat}} \pm 1.3\Big|_{\text{cal}}$ пк. Они согласуются в пределах неопределенности между собой и с современной наилучшей оценкой $z_\odot = 25 \pm 5$ пк [6],[12].

2. Нелокальная оценка вертикального стандартного отклонения классических цефеид $\sigma_\rho = 132.0 \pm 3.7\Big|_{\text{stat}}{}^{+6.3}_{-5.9}\Big|_{\text{cal}}$ пк и локальная оценка этого параметра $\sigma_\rho = 76.5 \pm 4.4\Big|_{\text{stat}}{}^{+3.6}_{-3.4}\Big|_{\text{cal}}$ пк значимо отличаются, что ставит вопрос о необходимости учета ошибок в измерении расстояний, использования более сложных моделей вертикального распределения вне окрестности Солнца, возможной зависимости дисперсии от расстояния до центра Галактики.

3. Построена новая модель средней поверхности диска Галактики по данным о классических цефеидах. Модель показывает наличие значимых локальных экстремумов — минимума в I квадранте и максимума во II квадранте. Подтверждается ранее известный результат о понижении средней поверхности диска Галактики в III квадранте. Оценен угол локального наклона средней поверхности диска Галактики к плоскости XY галактической системы координат $\gamma = 1.79^{+0.34}_{-0.33}$ град.

4. Гипотеза о нормальном вертикальном распределении объектов не противоречит только наблюдаемым данным об объектах локальной выборки без выбросов. Это является еще одним аргументом в пользу введения более сложной модели вертикального распределения, а также учета факторов, искажающих наблюдаемое вертикальное распределение.

Список литературы

1. Агекян Т.А., Теория вероятностей для астрономов и физиков. Москва. 1974. 264 с.
2. Бердников Л.Н., Возякова О.В., Дамбис А.К. Письма в Астрон. Журн. 1996. Т. 22. С. 936
3. Бобылев В.В., Байкова А.Т. Письма в Астрон. Журн. 2017. Т. 43. С. 341
4. Худсон Д., Статистика для физиков. Второе дополненное издание. Перевод с английского. Москва, 1970. 295 с.
5. Berdnikov L.N., Dambis A.K., Vozyakova O.V. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 2000. V. 143. P. 211
6. Bland-Hawthorn J., Gerhard O. Annual Rev. Astron. Astrophys. 2016 V. 54. P. 529
7. Bobylev V.V. Astron. Let. 2013. V. 39. P. 753
8. Bobylev V.V., Bajkova A.T. Astron. Let. 2016. V. 42. P. 1
9. Bobylev V.V., Bajkova A.T. Astron. Let. 2016. V. 42. P. 182
10. Buckner A. S. M., Froebrich D. MNRAS. 2014. M. 444. З. 290
11. de Grijs R., Wicker J.E., Bono G. Astron. J. 2014. V. 147. P. 122
12. Jurić M., Ivezić Ž., Brooks A., Lupton R.H., Schlegel D., et al. Astrophys. J. 2008. V. 673. P. 864
13. Majaess D.J., Turner D.G., Lane D.J. MNRAS. 2009. V. 398. P. 263
14. Mel'nik A.M., Rautiainen P., Berdnikov L.N., Dambis A.K., Rastorguev A.S. Astron. Nachr. 2015. V. 336. P. 70
15. Nikiforov I.I. Astron. Astrophys. Trans. 2012. V. 27. P. 537
16. Oort J.H., Kerr F.J., Westerhout G. MNRAS. 1958. V. 118. P. 379
17. Pohl M., Englmaier P., Bissantz N. Astrophys. J. 2008. V. 677. P. 283
18. van Tulder J.J.M., Bull. Astron. Inst. Netherlands. 1942. V. 9. P. 315
19. Wall J.W., Jenkins C.R., Practical statistics for astronomers. Second Edition. New York: Cambridge University Press. 2012 (reprinted 2014). xix+353 p.
20. Yao J.M., Manchester R.N., Wang N. MNRAS, 2017. V. 468. P. 3289

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Чернова Андрея Александровича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «О структуре неблуждающего множества градиентно-подобных потоков на проективно-подобных многообразиях» являются: Лемма 3.1 с доказательством, Лемма 3.2 с доказательством, Предложение 3.1, Теорема 1 с доказательством.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Была пройдена проверка на плагиат в системе LMS. Процент заимствования составил 29, но основную массу заимствований составляет общепринятая терминология в изучаемой научной области, упоминание имен ученых, занимающихся схожей проблематикой и математические штампы (обороты типа «рассмотрим», «доказательство» и т.п.). Терминологию и «штампы» менять не представляется возможным, так как в противном случае работа не будет понятна специалистам. Необходимость обзора литературы и упоминания ученых, занимающихся сходной проблематикой, продиктована форматом работы;
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Гуревич Еленой Яковлевной, кандидатом физико-математических наук, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук НИУ ВШЭ.

Таким образом, считаю, что представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 15.06.2020. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись Чернов Андрей Александрович

28.05.2020

г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Чернов Андрей Александрович

О СТРУКТУРЕ НЕБЛУЖДАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ НА ПРОЕКТИВНО-ПОДОБНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Выпускная квалификационная работа - БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
по направлению 01.03.01 Математика
образовательная программа «Математика»

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Е.В. Круглов

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Е.Я. Гуревич

Нижний Новгород, 2020

Содержание

1 Введение и формулировка результатов **3**

2 Вспомогательные определения и факты **4**

2.1 Топология 4

2.2 Динамика 6

3 Структура неблуждающего множества потока $f^t \in G$ **8**

4 Заключение **13**

Список литературы **14**

1 Введение и формулировка результатов

Поток f^t, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n, называется потоком *Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и замкнутых траекторий либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Поток Морса-Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным*.

Пусть M^n – топологическое замкнутое n-мерное многообразие, $n \geq 2$, и Σ^k — топологически вложенная в M^n сфера размерности k $(1 \leq k \leq n-1)$. Сфера Σ^k называется *локально плоской*, если для любой точки $z \in \Sigma^k$ существует окрестность $U(z) = U \subset M^n$ и гомеоморфизм $\varphi_z : U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_z(\Sigma^k \cap U) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Заметим, что проективная плоскость представляется как объединение не пересекающихся между собой топологически вложенной окружности S^1 и двумерного открытого диска B^2. При этом окружность, топологически вложенная в двумерное многообразие, всегда локально плоско вложена (см. например, [11]).

Из [1] следует, что для любого градиенто-подобного потока f^t множество Ω_{f^t} содержит по крайней мере один источник и один сток. Если множество Ω_{f^t} исчерпывается этими двумя точками, то несущее многообразие M^n является сферой, и все такие потоки топологически эквивалентны. Многообразия, допускающие градиентно-подобные потоки, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех состояний равновесия, изучались в работах [7], [3]. В [7] доказано, что размерность такого многообразия принимает значения $n \in \{2, 4, 8, 16\}$, размерность неустойчивых многообразий состояния равновесия принимает значения $0, \frac{n}{2}, n$, а само многообразие является объединением открытого n-мерного шара и сферы размерности $\frac{n}{2}$. При $n = 2$ это многообразие является проективной плоскостью. По аналогии с проективной плоскостью такие многообразия высшей размерности были названы в работе [3] *проективно-подобными*. В [3] доказано, что при $n = 4$ все потоки на проективно-подобном многообразии, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех гиперболических состояний равновесия, топологически эквивалентны, откуда следует, что все четырехмерные проективно-подобные многообразия гомеоморфны (что не так при $n > 4$ в силу [7]).

В этой работе изучается структура неблужающего множества градиентно-подобных потоков на проективно-подобном многообразии размерности 4 в предположении, что инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются. Обозначим через G класс таких потоков. Основной результат выпускной квалификационной работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1 *Пусть $f^t \in G$. Тогда множество седловых точек потока f^t содержит в точности одно седловое состояние равновесия индекса 2. Если l — число стоковых и источниковых состояний равновесия и k — число седловых состояний равновесия потока f^t, то выполняется соотношение*

$$l = 1 + k.$$

2 Вспомогательные определения и факты

2.1 Топология

Пусть X – множество точек, тогда система τ состоящая из подмножеств X называется *топологией* на X если эта эта система удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$;
2. Если $U_\alpha \in \tau$, $\forall \alpha \in A$, тогда $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. Если $U_i \in \tau$, $i = 1, 2, ..., n$, тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_\alpha \in \tau$.

Пара (X, τ) называется топологическим пространством.

Подмножество $U \in \tau$ называется *открытым* множеством топологического пространства (X, τ).

Подмножество F топологического пространства (X, τ) называется *замкнутым*, если $X \setminus F$ открыто.

Подмножество N топологического пространства (X, τ), содержащее точку $x \in X$, называется *окрестностью* точки x, если найдется открытое множество U, такое, что $x \in U \subset N$. Окрестность N точки x называется *открытой (замкнутой)*, если множество N является открытым (замкнутым).

Хаусдорфово пространство – это топологическое пространство (X, τ), удовлетворяющее следующему условию: для любых двух различных точек $x, y \in X$, существуют окрестности $U_x, V_y \in \tau$, такие, что $U_x \cap V_y = \varnothing$.

Покрытием подмножества A топологического пространства X называется семейство подмножеств $\{U_j,\ j \in J\}$ множества X, такое, что $A \subset \bigcup\limits_{j \in J} U_j$. Если вдобавок индексирующее множество J конечно, то $\{U_j,\ j \in J\}$ называется *конечным покрытием.* Покрытие $\{U_j,\ j \in J\}$ называется *открытым покрытием* A, если каждое $U_j,\ j \in J$ открыто в X. Пусть $\{U_j,\ j \in J\}$ и $\{V_k,\ k \in K\}$ — покрытия подмножества $A \subset X$. Если для любого $j \in J$ найдется такое $k \in K$, что $U_j = V_k$, то говорят, что $\{U_j,\ j \in J\}$ — подпокрытие покрытия $\{V_k,\ k \in K\}$.

Подмножество A топологического пространства X называется *компактным* или компактом, если всякое открытое покрытие A обладает конечным подпокрытием.

Топологическим многообразием размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство M^n со счетной базой, для каждой точки x которого существует окрестность $U_x \in M^n$, гомеоморфная евклидову пространству $\mathbb{R}^n$.

Топологическое пространство X называется *связным*, если единственными подмножествами X, открытыми и замкнутыми одновременно, являются $\varnothing$ и X.

Связное компактное топологическое многообразие называется *замкнутым многообразием.* Замкнутые двумерные многообразия называются *поверхностями.*

Построенное $n-$мерное векторное пространство называется *касательным пространством* к многообразию M^n в точке x, оно обозначается T_xM^n, а его элементы называются касательными векторами.

Касательное векторное поле на M^n — это такое отображение $v : M^n \to T_xM^n$, что $v(x) \in T_xM^n$ для всех $x \in M^n$. Где T_xM^n — касательное пространство к многообразию M^n в точке x.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — некоторые отображения, для которых определены композиции $f \circ g$ и $g \circ f$. Отображение g называется *обратным* к f, если $f \circ g = id_Y$ и $g \circ f = id_X$. Для обозначения обратного к f отображения обычно используют символ f^{-1}.

Отображение $f : X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого в Y множества открыт в X.

Отображение $f : X \to Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) называют *гомеоморфизмом*, если выполняются следующие условия:

1. f является взаимно-однозначным;
2. f является непрерывным;
3. Отображение f^{-1} является непрерывным.

Пространства X и Y в таком случае называют *гомеоморфными* или *топологически эквивалентными*.

Отображение f называется *гладким или дифференцируемым класса* C^r, $r \geq 1$ в точке p, если каждая функция f_k, $k = 1, \ldots, m$ имеет все непрерывные частные производные на $\psi(U)$ до порядка r включительно.

Гладким многообразием называется топологическое многообразие M^n, допускающее такое открытое покрытие $\{U_j\}$ и гомеоморфизмы $\psi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$что для любых $U_j \cap U_i \neq \varnothing$ отображение перехода $\psi_i \psi_j^{-1} : \psi_j(U_j \cup U_i) \to \psi_i(U_j \cup U_i)$ является диффеоморфизмом. Пара (U_j, ψ_j) называется *картой* или *локальной системой координат* с областью определения $U_j \in \mathbf{U} = \{U_j, j \in J\}$, множество $\Phi = \{(U_j, \psi_j), j \in J\}$ всех карт называется *атласом* гладкого многообразия.

Гладкое многообразие X называется *ориентируемым*, если оно обладает атласом, в котором переходы от одних координат к другим имеют положительные якобианы. В противном случае многообразие называется неориентируемым.

Таким образом, для каждой точки x гладкого многообразия M^n существует окрестность U_x и гомеоморфизм $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ точка-образ $\varphi_x(x)$ может быть задана координатами $\varphi_x(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Отображение $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящее точку $\varphi_x(x)$ в точку $\varphi_y(y)$, может быть задано как $\psi = \varphi_y f \varphi_x^{-1}$, где $f : U_x \to U_y$ — отображение, переводящее точку $x \in M^n$ в точку $y \in M^n$.

Отображение $f : M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно-однозначно и для любых $i, j \in \{1, ..., n\}$ частные производные $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \psi_i^{-1}}{\partial x_j}$ непрерывны.

Напомним, что диффеоморфизм $f : X \to X$ называется *сохраняющим ориентацию*, если Якобиан $det\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$ в любой точке x положителен. Если Якобиан $det\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$ хотя бы в одной точке x отрицателен, то диффеоморфизм f называется *меняющим ориентацию*.

Будем называть сферой S^k многообразие, гомеоморфное стандартной сфере $\mathbb{S}^k = \{(x_1, ...x_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{k+1} |\ x_1^2 + ... + x_{k+1}^2 = 1\}$ и шаром B^n многообразие, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, ..., x_n) \subset \mathbb{R}^n |\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$.

Два элемента $x, y \in X$ связаны отношением *эквивалентности* $(x \sim y)$, если выполняются следующие условия:

1. $x \sim x$ для любого $x \in X$ (рефлексивность);
2. если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность);
3. если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивность).

Множество X распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов, или *классы эквивалентности*.

Множество $\{D_\alpha\}$ всех классов эквивалентности обозначим через X/R, где R обозначает эквивалентность в X. Множество X/R называется *фактормножеством* множества X по отношению эквивалентности R. Пусть (X, τ) — топологическое пространство, пусть в множестве X определено отношение эквивалентности R. Тогда на фактормножестве X/R можно ввести топологию следующим образом: подмножество $V \subset \{D_\alpha\}$, состоящее из элементов D_α, открыто тогда и только тогда, когда объединение множеств D_α как подмножеств X открыто в пространстве (X, τ); к открытым множествам относится и пустое множество. Эта совокупность открытых подмножеств в X/R является топологией и обозначается τ_R. Топология τ_R называется *фактортопологией*. Отображение $p : X \to X/R$,

которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие его класс эквивалентности из X/R, называется *естественной проекцией.*

Определение 2.1 *Определим на сфере* $\mathbb{S}^2$ *отношение эквивалентности* $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ *если* $(x_1, x_2) = (-y_1, -y_2)$. *Фактор-пространство* $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/_\sim$ *называется проективной плоскостью.*

Пусть K — лента Мебиуса, ∂K — ее граничная окружность и $\varphi : \mathbb{S}^1 \to K$ — гомеоморфизм, меняющий ориентацию. Назовем точки $x \in \mathbb{S}^1$ и $\varphi(x) \in \partial K$ эквивалентными.

Утверждение 2.1 *Фактор-пространство* $(K \cup \mathbb{B}^2)/\sim$ *по отношению эквивалентности* $x \sim \varphi(x)$ *гомеоморфно проективной плоскости.*

Доказательство. Докажем, что приклеивание диска к листу Мебиуса по его границе приводит к проективной плоскости.

Для этого рассмотрим развертку листа Мебиуса (рис. 1а), в которой отождествляемые стороны обозначены буквой a. Приклеиваемый диск изобразим в виде квадрата со сторонами b, b', c, c'. Разрежем его вдоль диагонали d; способ склейки двух половин квадрата показан стрелками (рис. 1б). Приклеим половины квадрата к свободным сторонам развертки листа Мебиуса, соблюдая порядок обхода сторон квадрата так, как показано на рис. 1в. Получим развертку проективной плоскости. ◇

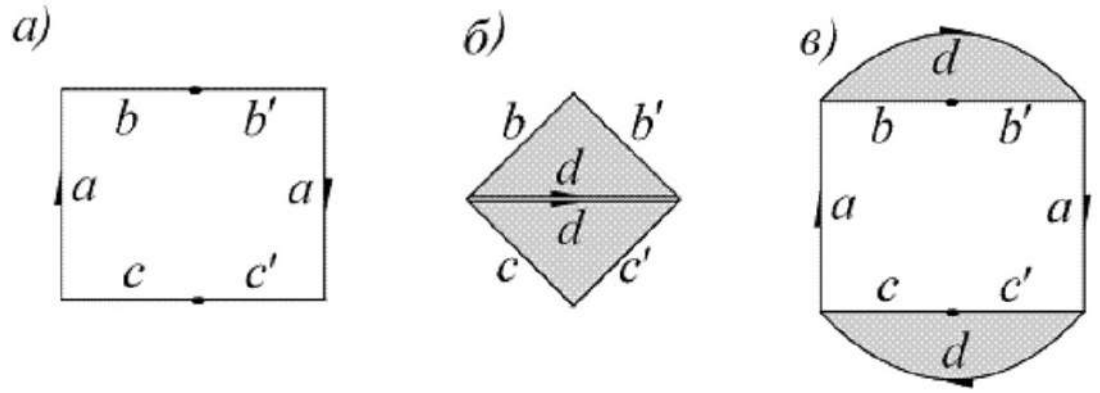


Рис. 1: Построение проективной плоскости

2.2 Динамика

Потоком на многообразии M^n называется непрерывное отображение $f^t : M^n \times \mathbb{R} \to X$ с групповыми свойствами
1) $f^0(x) = x$; для любого $x \in M^n$;
2)$f^s(f^t(x)) = f^{t+s}(x)$ для любых $x \in M^n, s, t \in \mathbb{R}$.

Множество $\mathcal{O}(x) = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$ называется *орбитой (траекторией)* точки $x \in M^n$.

Точка $x \in M^n$ называется *блуждающей точкой* потока f^t, если существует ее окрестность $U(x) \subset M^n$ такая, что $f^t(U(x)) \cap U(x) = \varnothing$ для любого $t > 1$. В противном случае точка называется неблуждающей. Будем обозначать множество неблуждающих точек потока f^t через Ω_{f^t}.

Точка $x \in M^n$ называется *состоянием равновесия* потока f^t, если $f^t(x) = x$.

Состояние равновесия $p \in M^n$ называется *гиперболическим*, если среди собственных чисел матрицы Якоби $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)|_p$, где $\varphi(x) = \frac{df^t}{dt}|_{t=0}$, нет чисел с нулевой вещественной частью.

Устойчивым многообразием гиперболической неподвижной точки x называется множество $W^s_x = \{y \in M^n | d(x, f^k(y)) \to 0 \text{ при } k \to +\infty\}$. ($d$ – метрика на M^n)
Неустойчивое многообразие W^u_x гиперболической неподвижной точки x определяется как устойчивое многообразие относительно потока f^{-t}.

Для гиперболической неподвижной или периодической точки p устойчивое или неустойчивое многообразие называется инвариантным многообразием этой точки, компонента связности множества $W^u_p \setminus p$ ($W^s_p \setminus p$) называется *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой.*

Пусть $f : M^n \to M^n$, $f' : M^n \to M^n$ — диффеоморфизмы. f и f' называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$, такой что $f' \circ h = h \circ f$

Состояние равновесия $p \in \Omega_{f^t}$, имеющее неустойчивое многообразие размерности $i_p = 0, n$ называется *стоковым, источниковым* соответственно. Если $0 < i_p < n$, то состояние равновесия p называется *седловым.*

Неподвижные гиперболические состояния равновесия и траектории вблизи них изображены на рис. 2.

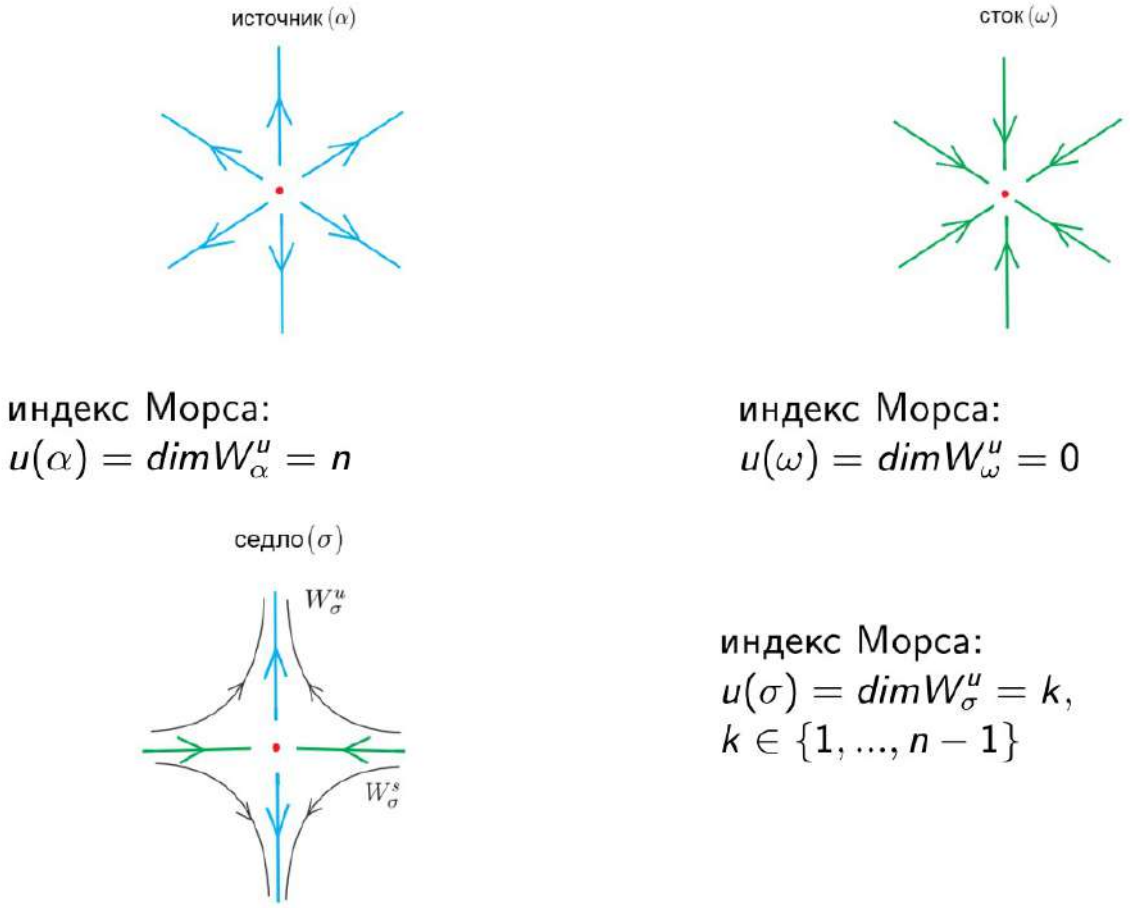


Рис. 2: Неподвижные гиперболические точки

Следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы Пуанкаре-Хопфа (см., например, [4]), определяет соотношение между структурой множества состояний равновесия градиетно-подобного потока f^t и эйлеровой характеристикой $\chi(M^n)$ многообразия M^n.

Утверждение 2.2 *Пусть f^t — градиентно-подобный поток на многообразии M^n. Тогда*

$$\sum_{p \in \Omega_{f^t}} (-1)^{i_p} = \chi(M^n).$$

3 Структура неблуждающего множества потока $f^t \in G$

Будем называть сферой S^k многообразие, гомеоморфное стандартной сфере $\mathbb{S}^k = \{(x_1, ...x_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{k+1} |\ x_1^2 + ... + x_{k+1}^2 = 1\}$ и шаром (открытым шаром) B^n многообразие, гомеоморфное стандартному шару (внутренности стандартного шара) $\mathbb{B}^n = \{(x_1, ..., x_n) \subset \mathbb{R}^n |\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$.

Следующее утверждение, вытекающее из [1, Theorem 2.3], является ключевым в понимании асимптотического поведения орбит градиентно-подобного потока.

Утверждение 3.1 *Пусть f^t — градиентно-подобный поток на замкнутом многообразии M^n. Тогда*

1. $M^n = \bigcup\limits_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^s = \bigcup\limits_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^u$.
2. *для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ многообразие W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^n.*
3. *для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ и любой компоненты связности l_p^u множества $W_p^u \setminus p$ верно равенство $cl\ l_p^u \setminus (l_p^u \cup p) = \bigcup\limits_{q \in \Omega_f : W_q^s \cap l_p^u \neq \varnothing} W_q^u$.*

Из пункта 1 утверждения 3.1 и того факта, что неустойчивое многообразие гиперболического состояния равновесия p является шаром размерности $ind_p \in \{0, \ldots, 4\}$ следует, что множество Ω_{f^t} любого градиентно-подобного потока f^t содержит по крайней мере один источник и один сток. Действительно, при отсутствии стоков (или источников), многообразие M^n размерности n представлялось бы в виде конечного объединения гладко вложенных шаров меньшей размерности, что невозможно.

Рассмотрим поток $g^t \in G(M^4)$, являющийся градиентным потоком функции Морса на многообразии M^4, множество критических точек которой состоит из трех точек. В силу [7] индексы этих точек равны $0, 2$ и 4. Из теоремы Пуанкаре-Хопфа следует справедливость следующего соотношения, называемого *формулой Пуанкаре-Хопфа*:

$$\bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} (-1)^{ind_p} = \chi(M^4),$$

где $\chi(M^4)$ — эйлерова характеристика многообразия M^4. Отсюда следует, что $\chi(M^4) = 3$.

Пусть $f^t \in G(M^4)$ — произвольный поток. Так как источники, стоки и седла индекса 2 потока $f^t \in G(M^4)$ вносят положительный вклад в левую часть формулы Пункаре-Хопфа, то из предположения, что множества $\Omega_{f^t}^1 \cup \Omega_{f^t}^3$ пусты, следует, что множество Ω_{f^t} состоит в точности из трех состояний равновесия: источника, стока и седла с индексом Морса равным двум. Таким образом, множество $\Omega_{f^t}^2$ непусто для любого потока $f^t \in G(M^4)$.

Обозначим через $\Omega_{f^t}^i$ множество всех состояний потока $f^t \in G$, размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Лемма 3.1 *Пусть $p \in \Omega_{f^t}^1$ ($p \in \Omega_{f^t}^3$). Тогда замыкание $cl\, W_p^s$ ($cl\, W_p^u$) устойчивого (неустойчивого) многообразия W_p^s (W_p^u) точки p является локально-плоской сферой размерности 3, которая делит многообразие M^4 на две компоненты связности.*

Доказательство. Предположим, что множество $\Omega_{f^t}^1$ непусто и докажем лемму для произвольной точки $p \in \Omega_{f^t}^1$ (доказательство для точки $p \in \Omega_{f^t}^{n-1}$ проводится аналогично). Из п.3 утверждения 3.1 следует, что для любой точки $p \in \Omega_{f^t}^1$ замыкание $cl\, W_p^s$ ее устойчивого многообразия W_p^s является объединением самого многообразия W_p^s и единственного источникового состояния равновесия α_p. Следовательно, $cl\, W_p^s$ является сферой размерности $(n-1)$. В силу п.2 утверждения 3.1 сфера $cl\, W_p^s$ является гладкой, и, следовательно,

локально-плоской во всех точках, принадлежащих W^s_p. Согласно [8] (утв. 3А.6) сфера S^{n-1}, вложенная в многообразие M^n размерности $n \geq 4$, либо является локально-плоской в каждой точке, либо имеет более чем счетное число точек дикости[1]. Следовательно, $cl\, W^s_p$ является локально-плоской сферой размерности $(n-1)$.

Покажем, что сфера $cl\, W^s_p$ делит многообразие M^4 на две компоненты связности. Поскольку, в силу [7], фундаментальная группа $\pi_1(M^4)$ тривиальна, то M^4 ориентируемо. В силу [5, Theorem 3] локально-плоская сфера S^{n-1} в ориентируемом многообразии M^n $(n \geq 3)$ является цилиндрически вложенной, что означает, что существует замкнутая окрестность $V \subset M^n$ сферы S^{n-1} и гомеоморфизм $h : \mathbf{S^{n-1}} \times [-1,1] \to V$ такой, что $h(\mathbf{S^{n-1}} \times \{0\}) = S^{n-1}$. Отсюда следует, что существует окрестность V_p сферы $cl\, W^s_p$, которая делится сферой $cl\, W^s_p$ на две части. Выберем точки x, y, принадлежащие разным компонентам связности $V_p \setminus cl\, W^s_p$ и соединим их гладкой дугой $l_p \subset V_p$, пересекающей сферу $cl\, W^s_p$ в единственной точке. Если $cl\, W^s_p$ не делит M^4, то существует дуга $b_p \subset M^4 \setminus M^4$, соединяющая точки x, y. По построению индекс пересечения дуги $\lambda_p = l_p \cup b_p$ и сферы $cl\, W^s_p$ равен 1 или -1 (в зависимости от выбора ориентации дуги λ_p). С другой стороны, поскольку $\pi_{n-1}(M^4)$ тривиальна, нетрудно выбрать сферу $S^{n-1} \subset M^4 \setminus \lambda_p$, гомотопную сфере $cl\, W^s_p$. Так как индекс пересечения является гомотопическим инвариантом, то индекс пересечения сферы S^{n-1} и дуги λ_p должен быть равен ± 1, но поскольку $S^{n-1} \cap \lambda_p = \varnothing$, он равен нулю. Полученное противоречие доказывает, что сфера $cl\, W^s_p$ делит многообразие M^4 на две компоненты связности. $\diamond$

Напомним, что множество A называется *аттрактором* потока f^t, если существует замкнутая окрестность (захватывающая окрестность) $V \subset M^n$, такая, что все траектории потока f^t пересекают её границу ∂V трансверсально, и $A = \bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$. Множество R называется *репеллером* потока f^t если оно является аттрактором для потока f^{-t}.

Положим $A_{f^t} = \bigcup\limits_{p \in \Omega^0_{f^t} \cup \Omega^1_{f^t}} W^u_p$, $R_{f^t} = \bigcup\limits_{p \in \Omega^3_{f^t} \cup \Omega^2_{f^t} \cup \Omega^4_{f^t}} W^s_p$.

Лемма 3.2 *Множество A_{f^t} является связным аттрактором с захватывающей окрестностью, диффеоморфной шару.*

Доказательство. Докажем, что A_{f^t} — аттрактор. Из [2, 10] следует, что существует функция Морса $\varphi : M^4 \to [0,4]$ такая, что множество критических точек функции φ совпадает с множеством Ω_{f^t}, $\varphi(p) = ind(p)$ для любого $p \in \Omega_{f^t}$ и $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$. Положим $V = \varphi^{-1}([0; 1,5])$ и покажем, что V является захватывающей окрестностью для A_{f^t}.

Из определения следует, что $A_{f^t} \subset V$. Так как A_{f^t} инвариантно, то $A_{f^t} \subset \bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$. Покажем, что $A_{f^t} = \bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$. Предположим противное. Тогда существует точка $x \in \bigcap\limits_{t>0} f^t(V) \setminus A_{f^t}$. Из утверждения 3.1 следует, что существует состояние равновесия $p \in \Omega_{f^t}$ такое, что $x \in W^u_p$. Так как множество $\bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$ замкнуто и инвариантно, то $p \in \bigcap\limits_{t>0} f^t(V) \setminus A_{f^t}$, что невозможно, так как множество V не содержит состояний равновесия, отличных от тех, что принадлежат A_{f^t}. Следовательно, $A_{f^t} = \bigcap\limits_{t>0} f^t(V)$.

Для доказательства связности A_f докажем связность его захватывающей окрестности V. Тогда A_f будет связным как пересечение связных компактных вложенных множеств. Предположим, что V несвязно, то есть представлется в виде объединения непересекающихся непустых инвариантных подмножеств E_1, E_2. Тогда объединение $\bigcup\limits_{p \in A_{f^t}} W^s_p =$

[1] В работе [8] отмечается, что это утверждение является следствием результатов А.В. Чернавского и Р. Кирби, полученных независимо в 1968 году. Ранее, в 1963 году, Дж. Кантреллом получено менее общее утверждение, которое может быть сформулировано следующим образом: если сфера $S^{n-1} \subset S^n$, $n \geq 4$, является дикой и B – множество точек такое, что S^{n-1} локально-плоская в каждой точке множества $S^{n-1} \setminus B$, то множество B состоит более чем из одной точки (см. [6]).

$\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} f^t(E_1 \cup E_2)$ является несвязным. В силу предложения 3.1 многообразие M^4 представляется в виде $M^4 = \bigcup\limits_{p\in A_{f^t}} W^s_p \cup R_{f^t}$, тогда $M^4 \setminus R_{f^t} = \bigcup\limits_{p\in A_{f^t}} W^s_p$, поэтому $M^n \setminus R_{f^t}$ несвязно. С другой стороны, так как размерность множества R_{f^t} не превышает 2, то R_{f^t} не делит M^4, следовательно множество $M^4 \setminus R_{f^t}$ связно. Полученное противоречие доказывает связность V.

Покажем, что A_{f^t} не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности. Предположим противное: пусть $c \subset A_{f^t}$ — простая замкнутая кривая. Из п.3 утверждения 3.1 следует, что множество $A_{f^t} \setminus \Omega^1_p$ представляет собой конечный набор пучков дуг, лежащих в несвязном объединении устойчивых многообразий стоковых точек. Поэтому из существования кривой c следует, что существует состояние равновесия $p \in \Omega^1_{f^t}$, принадлежащее этой кривой. В силу доказанного выше $cl\, W^s_p$ делит несущее многообразие M^4 на две компонены связности. Следовательно, $cl\, W^s_p$ делит и кривую c, поэтому найдется точка $x \in c \cap cl\, W^s_p$, отличная от p. Точка x не может быть источником, так как A_{f^t} по построению не содержит источников, поэтому $x \in W^s_p$. Точка x не может быть быть стоковой или седловой, так как множество $W^s_p \setminus p$ состоит из блуждающих точек. Следовательно, x приналежит одномерному неустойчивому многообразию некоторой точки $q \in \Omega^1_{f^t}$, но это противоречит условиям, определяющим класс $G(M^4)$.

Таким образом, множество A_{f^t} можно представить как связный граф без циклов, вершинами которого являются стоковые точки, а ребрами — одномерные неустойчивые многообразия седловых точек (рис. 3). Отсюда непосредственно следует, что $|\Omega^0_{f^t}| = |\Omega^1_{f^t}| + 1$. Из теории Морса следует, что множество V получено из объединения $|\Omega^0_{f^t}|$ попарно-непересекающися шаров приклеиванием $|\Omega^1_{f^t}|$ ручек индекса 1. По индукции доказывается, что V диффеомофно n-шару. $\diamond$

Положим $\tilde{R}_{f^t} = \bigcup\limits_{p\in\Omega^3_{f^t}\cup\Omega^4_{f^t}} W^s_p$. Перейдем к рассмотрению f^{-t} и применим лемму 3.2. Получим, что $\tilde{R}_{f^t}$ является связным аттрактором для f^{-t} (следовательно, является репеллером для f^t) с захватывающей окрестностью W, диффеоморфной шару.

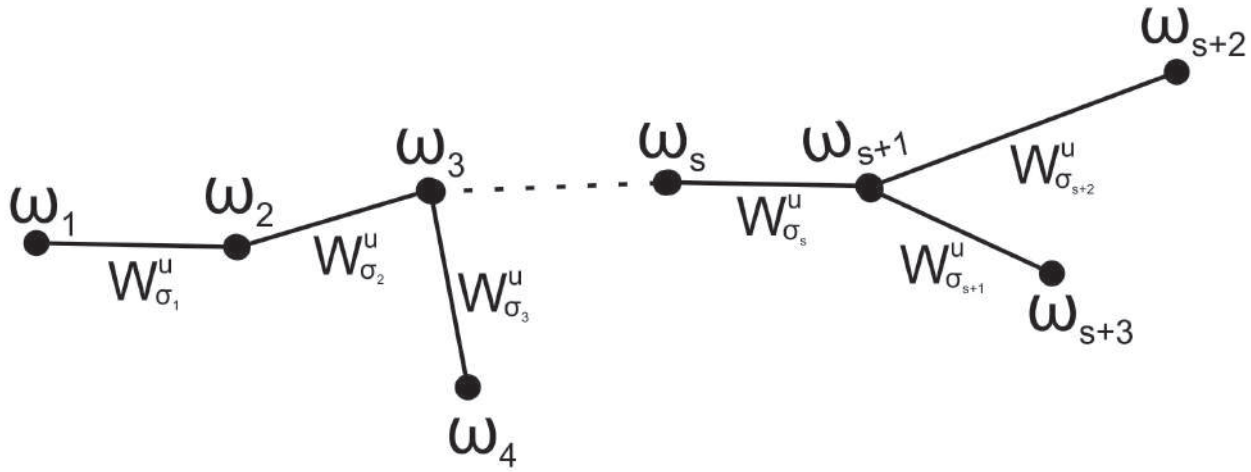


Рис. 3: Множество A_{f^t}, представленное в виде графа

Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 3.1 *Существуют гладко вложенные шары $V, W \subset M^4$ такие, что:*

1. $A_{f^t} \subset V$, $\tilde{R}_{f^t} \subset W$;
2. *траектории потока f^t трансверсальны к границам шаров V, W и направлены в шар V и из шара W соответственно;*
3. *неблуждающее множество ограничения потока f^t на множество $M^4 \setminus (V \cup W)$ состоит из состояний равновесия индекса 2.*

Напомним, что связной суммой гладких ориентируемых связных многообразий M_1^n, M_2^n называется многообразие $M_1^n \sharp M_2^n$, полученное следующим образом (пример на рис. 4). Пусть $e_1 : \mathbb{B}^n \to M_1^n, e_2 : \mathbb{B}^n \to M_1^n$ — вложения стандартных дисков такие, что e_1 является сохраняющим ориентацию, а e_2 — меняющим ориентацию (то есть якобиан отображения e_1 больше нуля, а якобиан отображения e_2 меньше нуля). Тогда многообразие $M_1^n \sharp M_2^n$ есть результат склеивания многообразий с краем $M_1^n \setminus e_1(int\ \mathbb{B}^n), M_2^n \setminus e_2(int\ \mathbb{B}^n)$ по диффеоморфизму $h : e_1(\mathbb{S}^{n-1}) \to e_2(\mathbb{S}^{n-1})$, такому, что $h = e_2 e_1^{-1} | e_1(\mathbb{S}^{n-1})$.

Согласно [9] (Lemm 2.1) гладкое многообразие, получающееся в результате операции связной суммы, определяется однозначно (с точностью до диффеоморфизма) и не зависит от выбора вложений e_1, e_2.

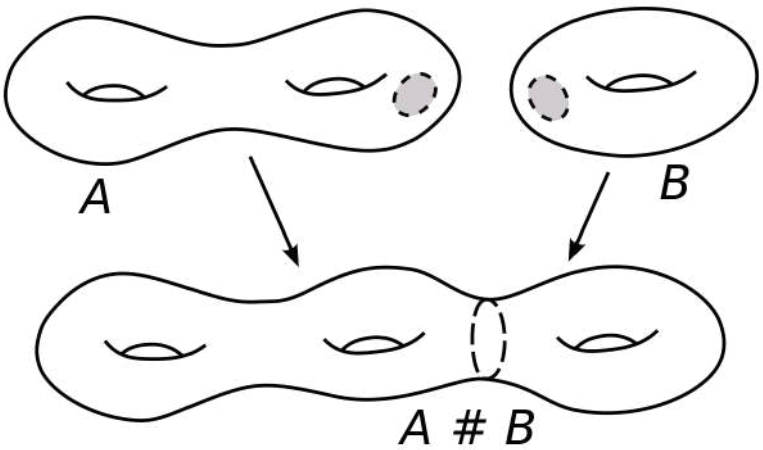


Рис. 4: Связная сумма многообразий A и B

Доказательство теоремы 1

Покажем, что множество седловых состояний равновесия потока f^t содержит в точности одно состояние равновесия, индекс Морса которого равен двум. Тогда соотношение между числом узловых и седловых точек непосредственно следует из формулы Пуанкаре-Хопфа.

Удалим из многообразия M^4 внутренности шаров W, V, описанных в предложении 3.1 и приклеим к получившемуся многообразию с краем два стандартных n-шара, на одном из которых задано векторное поле $\dot{x} = x$, а на втором — поле $\dot{x} = -x$, $x \in \mathbb{B}^n$ по некоторому обращающему естественную ориентацию края диффеоморфизму $\varphi : \partial\,(M^4 \setminus int(W \cup V)) \to \partial\mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^0$. Диффеомофизм φ можно выбрать таким образом, чтобы на получившемся многообразии $\tilde{M}^4$ был корректно определен поток $\tilde{f}^t \in G(M^4)$, неблужающее множество которого состоит из источника, стока и $|\Omega^2_{f^t}|$ седел индекса 2. Операция приклеивания шаров эквивалентна взятию операции связной суммы с двумя сферами, поэтому многообразие $\widetilde{M}^4$ диффеоморфно исходному многообразию M^4. Тогда из формулы Пуанкаре-Хопфа следует, что $|\Omega^2_{f^t}| = 1$. Доказательство закончено.

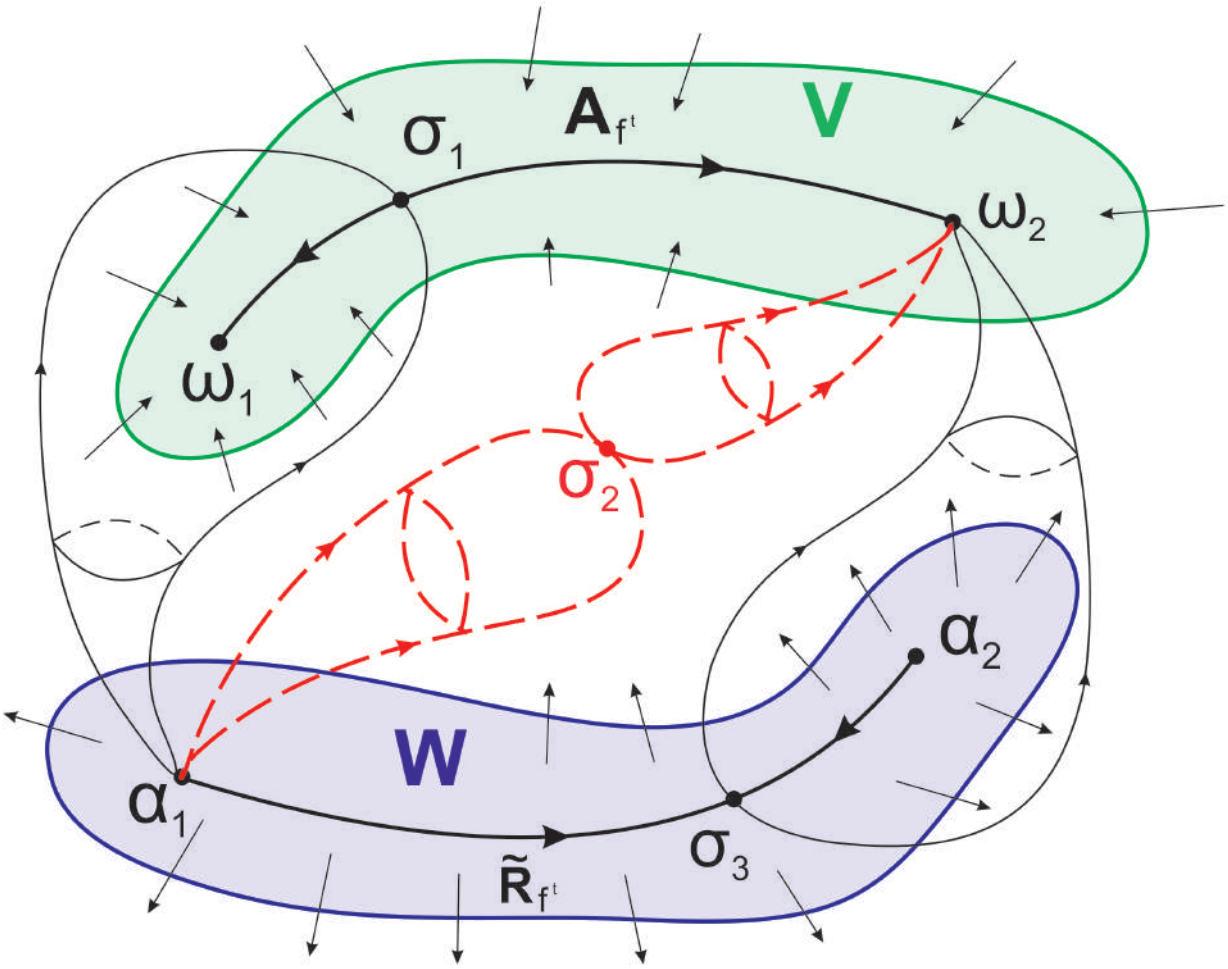


Рис. 5: Фазовый портрет системы, иллюстрирующий доказательство

4 Заключение

В работе изучена структура неблуждающего множества градиентно-подобных потоков, заданных на проективно-подобных многообразиях размерности 4 в предположении, что инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f^t \in G$. Тогда множество седловых точек потока f^t содержит в точности одно седловое состояние равновесия индекса 2. Если l — число стоковых и источниковых состояний равновесия и k — число седловых состояний равновесия потока f^t, то выполняется соотношение*

$$l = 1 + k.$$

Список литературы

[1] *Smale S.* Differentiable dynamical systems //*Bulletin of the American Mathematical Society* Volume 73, Number 6 (1967), 747-817. [Перевод: *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы //*Успехи мат. наук.* 1970, том 25, выпуск 1(151), страницы 113–185]

[2] *Smale S.* On Gradient Dynamical Systems //*The Annals of Mathemti'cs, Second Series.* Second Series, Vol. 74, No. 1 (Jul., 1961), pp. 199-206.

[3] *Е. В. Жужома, В. С. Медведев.* Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия //*Матем. сб.* 2016, том 207, номер 5, 69–92.

[4] *Гринес В. З., Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три //*Математика и механика. М.-Ижевск: Издательство «РХД».* 2011, 424 с. ISBN978-5-93972-922-2

[5] *Brown M.* Locally flat imbeddings of topological manifolds //*Ann. of Math*, 1962. - V. 75, № 2. - P. 331-341.

[6] *Cantrell J.C.* Almost locally flat sphere S^{n-1} in S^n/ J.C.Cantrell //*Proceeding of the American Mathematical society*, 1964.- V. 15, №4. - P. 574-578.

[7] *J. Eells, N. Kuiper*, Manifolds which are like projective planes //*Institut des Haute studes Scientifiques Publications Mathematiques*, **14**, 1962, 5–46.

[8] *Daverman R.J.* Embeddings of (n-1)-spheres in Euclidean n-spase //*Bulleting of the American Mathematical society*, 1978.-V. 84, № 3. - P.377-405.

[9] *Kervaire M. A., Milnor J. W.* Groups of homotopy spheres: I //*The Annals of Mathematics* 2nd Ser., Vol. 77, No. 3. (May, 1963), pp. 504-537.

[10] *K.R. Meyer* Energy Functions for Morse Smale Systems //*American Journal of Mathematics*, **9**0:4, 1968, 1031–1040.

[11] *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство //*Тр. МИАН.* 1966. Т. 81. С. 3–184.

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Щепаловой Анастасии Сергеевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Эволюция орбитального движения астероидов: метрический подход» являются: сравнение разных расстояний и субрасстояний в Солнечной системе, вычисленных с помощью различных метрик и субметрик, предположение об отождествлении двух астероидов на основе анализа расстояний между их орбитами в различных метриках. Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 28 февраля 2018 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, elibrary.ru, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: расстояний между орбитами астероидов, сравнение расстояний между орбитами. По результатам поиска было исследовано множество статей (подробнее см. в списке литературы выпускной квалификационной работы) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [8], [12] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Холшевниковым Константином Владиславовичем, профессором кафедры небесной механики Санкт-Петербургского Государственного Университета.
- Проведено выступление на 46-ой студенческой научной конференции "Физика Космоса" в 2017 году.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами и выступления на конференции следует, что, скорее всего, представленный в моей выпускной квалификационной работе математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором, предоставляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась 06.06.2018. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись

Щепалова Анастасия Сергеевна 25 мая 2020 г. Санкт-Петербург Россия.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Кафедра небесной механики

Щепалова Анастасия Сергеевна

Эволюция орбитального движения астероидов: метрический подход

Дипломная работа

Допущена к защите.
Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н., проф. К.В. Холшевников

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. К.В. Холшевников

Рецензент:
д.ф.-м.н.,Э.Д. Кузнецов

Санкт-Петербург
2018

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics & Mechanics Faculty

Chair of Celestial Mechanics

Anastasia Shchepalova

Evolution of asteroids orbital motion: metrical approach

Graduation Thesis

Admitted for defence.
Head of the chair:
Professor Konstantin Kholshevnikov

Scientific supervisor:
Professor Konstantin Kholshevnikov

Reviewer:
Assistant professor Eduard Kuznetsov

Saint Petersburg
2018

Содержание

1 Введение **4**

2 Субметрики **5**

2.1 Критерий D_1 5

2.2 Критерий D_2 7

2.3 Критерий D_3 8

3 Современные метрики **10**

3.1 Метрика ϱ 10

3.2 Метрики в фактор-пространствах 12

3.2.1 Фактор-пространство $\mathbb{H}/\Omega$ 12

3.2.2 Фактор-пространство $\mathbb{H}/g$ 13

3.2.3 Фактор-пространство $\mathbb{H}/(\Omega, g)$ 14

4 Модельные примеры **15**

5 Расстояния между орбитами **17**

5.1 Расстояния между орбитами планет Солнечной системы 17

5.2 Расстояния между орбитами астероидов 21

5.3 Челябинское тело 23

Список литературы **28**

1 Введение

Настоящая дипломная работа посвящена исследованию свойств некоторых метрик и субметрик с помощью вычисления соответствующих расстояний и субрасстояний между орбитами тел Солнечной системы.

Во многих областях астрономии требуется оценить схожесть кеплеровских орбит $\mathcal{E}_s$ как точек в некотором 5-мерном пространстве орбит (положение на орбите мы опускаем, но направление движения по орбите учитываем). Этой цели служит введение некоторой функции $\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, задающей меру близости, причем критерием близости выступает неравенство

$$\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) < \varepsilon. \tag{1}$$

Значение ε зависит от рассматриваемой задачи. В идеале ϱ должно представлять собой некоторое расстояние, т.е. удовлетворять трем аксиомам метрического пространства [1, 2]:

1. $\varrho(x_1, x_2) \geqslant 0$, причем $\varrho(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;
2. $\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_2, x_1)$;
3. $\varrho(x_1, x_3) \leqslant \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)$ (аксиома треугольника).

Однако с середины прошлого века до последнего времени были известны только субметрики [3, 4, 5, 6] (см. также обзор [7]), где субрасстояние ϱ удовлетворяет первым двум аксиомам, но не третьей: неравенство треугольника нарушается для некоторых троек орбит [8, 9].

Замечание. Здесь мы ввели термин *субметрика*, поскольку термины *псевдометрика, квазиметрика, полуметрика* уже заняты [1].

В 2004 году появилась и настоящяя метрика [10], действующая в пространстве $\mathbb{H}_0$ ограниченных орбит (эллиптических и прямолинейно–эллиптических). В приложениях же наибольший интерес представляют околопараболические орбиты. Поэтому вскоре были предложены метрики [11, 8, 9], действующие в пространстве $\mathbb{H}$ непрямолинейных орбит и в пространстве $\mathbb{H}^\star$ всех кеплеровых орбит. Соответствующие метрики индуцируются евклидовым расстоянием в пространствах $\mathbb{R}^6$ и $\mathbb{R}^7$, в которые вкладываются 5-мерные пространства $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^\star$. Эти метрики уже используются в задачах отождествления и поиска генетически связанных семейств небесных тел [9, 12, 13]. В 2010 г. Дж.Маруськин [14] предложил риманову метрику в пространстве $\mathbb{H}_0$. Примеров применения этой метрики пока нет.

В данной работе были вычислены расстояния между орбитами всех планет Солнечной системы с помошью разных субметрик и метрик, выявлены их сравнительные достоинства и недостатки. Воспользовавшись одной из них, мы нашли наименьшие расстояния между парами орбит всех нумерованных астероидов. Соответствующие пары

могут представлять собой в действительности один объект, или быть осколками одного астероида. Кроме того, оказалось, что орбита Челябинского метеорита определена недостаточно надежно, чтобы выявить его родительское тело среди нумерованных астероидов.

2 Субметрики

2.1 Критерий D_1

Исторически первые две субметрики были предложены Саутвортом и Хокинзом [3, 7] и названы D-критерием. Если обозначить через a, q, p, e, i, g, Ω большую полуось, перицентрическое расстояние, фокальный параметр, эксцентриситет, наклон, аргумент перицентра и долготу восходящего узла, то для первого субрасстояния Саутворта–Хокинза справедливо

$$D_1^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + 4\sin^2\frac{I}{2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2\frac{\Pi}{2}\,. \tag{2}$$

Здесь L — масштабный множитель размерности длины. Обычно его опускают, подразумевая равным 1 а.е. Но это неправильно: для транснептуновых объектов, например, более приемлемо $L = 30$ а.е. Далее, I — взаимный наклон, $\Pi = \lambda_1 - \lambda_2$ — разность долгот в орбите для перицентров, считаемых от взаимного узла. Выбор одного из двух таких узлов безразличен, поскольку при смене узлов каждая из долгот меняется на $\pm\pi$, а их разность на 0 или $\pm 2\pi$, что оставляет инвариантным $|\sin(\Pi/2)|$.

Замечание. Обычно под словам «критерий» понимают некий отличительный признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо. В данном случае авторы словом «критерий» назвали саму метрику, хотя критерием близости она является только при условии существования предела, ниже которого орбиты принимаются близкими.

Для вычисления второго и четвертого слагаемого (2) можно воспользоваться формулами [3, 7]

$$\cos I = c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos\Delta, \qquad \sin^2\frac{I}{2} = \sin^2\frac{i_1 - i_2}{2} + s_1 s_2 \sin^2\frac{\Delta}{2}\,, \tag{3}$$

где $c = \cos i$, $s = \sin i$, $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$;

$$\Pi = g_1 - g_2 \pm 2\arcsin\xi, \qquad \xi = \cos\frac{i_1 + i_2}{2}\sin\frac{\Delta}{2}\sec\frac{I}{2}\,. \tag{4}$$

Знак минус отвечает случаю $|\Delta| > \pi$ при соглашении $0 \leqslant \Omega < 2\pi$ (или $-\pi < \Omega \leqslant \pi$).

Докажем первую формулу (4) для случая $0 < \Delta < \pi$, $0 < i_1 < i_2 < \pi/2$. На рисунке (1) изображены две орбиты $\mathcal{E}_1$ (синяя), $\mathcal{E}_2$ (красная) и основная плоскость (черная) в проекции на небесную сферу, центр которой совпадает с притягивающим центром (Солнцем в случае планет и астероидов).

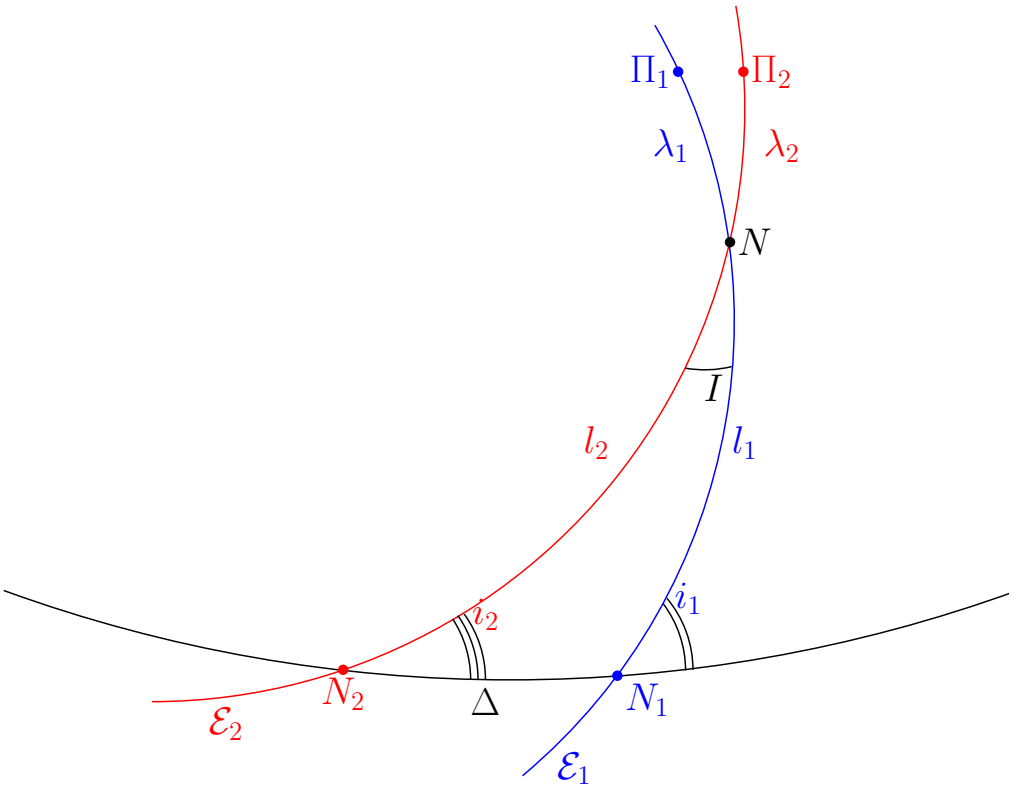


Рис. 1: Положение орбит $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на небесной сфере

Обозначим через Π_s перицентры орбит $\mathcal{E}_s$, N_s — восходящие узлы, N — взаимный узел. Из рисунка видно, что $N_2N_1 = \Delta = \Omega_1 - \Omega_2$, $\quad N_s\Pi_s = g_s$, $\quad \lambda_s = g_s - l_s$, где $l_s = N_sN$, $\quad \Pi = \lambda_1 - \lambda_2$.

По формуле Деламбра–Гаусса для сферического треугольника N_2N_1N:

$$\cos\frac{I}{2}\sin\frac{l_2 - l_1}{2} = \sin\frac{\Delta}{2}\sin\frac{(\pi - i_1) - i_2}{2} = \sin\frac{\Delta}{2}\cos\frac{i_1 + i_2}{2}\,, \tag{5}$$

откуда

$$\sin\frac{l_2-l_1}{2}=\sin\frac{\Delta}{2}\cos\frac{i_1+i_2}{2}\sec\frac{I}{2}=\xi. \tag{6}$$

В нашем случае $0<l_s<\pi, \quad l_2>l_1$ (против большего угла лежит большая сторона), $i_1+i_2<\pi, \quad I<\pi$ (как угол между векторами). Поэтому $0<l_2-l_1<\pi, \quad \xi>0$, так что

$$l_2-l_1=2\arcsin\xi.$$

Окончательно получаем:

$$\Pi=\lambda_1-\lambda_2=g_1-l_1-g_2+l_2=g_1-g_2+l_2-l_1\,,$$

$$\Pi=g_1-g_2+2\arcsin\xi. \tag{7}$$

Формула (4) доказана в указанном случае.

По принципу аналитического продолжения она остается справедливой и при расширении области задания аргументов, пока не встретятся особые точки. Найдем их. Прежде всего изучим функцию:

$$\Phi=\left(\cos\frac{i_1+i_2}{2}\sec\frac{I}{2}\right)^2=\frac{1+\cos(i_1+i_2)}{1+\cos I}=\frac{1+c_1c_2-s_1s_2}{1+c_1c_2+s_1s_2\cos\Delta}.$$

Числитель и знаменатель неотрицательны. Неравенство $\cos\Delta\leqslant 0$ в силу неотрицательности наклонов влечет $\Phi\leqslant 1$, т.е. Φ особенностей не имеет.

Однако, $\arcsin\xi$ имеет особенность при $\xi^2=1$, что возможно только при

$$\Phi=1, \quad \sin\frac{\Delta}{2}=\pm 1. \tag{8}$$

Из второго равенства (8) следует, что $\Delta=\pm\pi$, тогда автоматически выполняется и первое.

Итак, формула (7) верна при $|\Delta|\leqslant\pi$. При $|\Delta|>\pi$ вместо $\arcsin\xi$ следует взять $\pi-\arcsin\xi$. Поскольку углы определены с точностью до 2π, это равносильно замене $2\arcsin\xi$ на $-2\arcsin\xi$. Формула (4) доказана полностью.

2.2 Критерий D_2

При $i_1=i_2=0$, а также при $\Delta=0$ формула (4) упрощается.

Рассмотрим случай $i_1=i_2=0$.

В формулах (3) $c_1=c_2=1, \quad s_1=s_2=0$, поэтому

$$\cos I=c_1c_2+s_1s_2\cos\Delta=1\,,$$

$$\cos^2\frac{I}{2}=\frac{1+\cos I}{2}=1, \quad \cos\frac{I}{2}=\pm 1\,,$$

$$\xi=\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{I}{2}}=\pm\sin\frac{\Delta}{2}\,,$$

$$\Pi = g_1 - g_2 \pm 2\left(\pm\frac{\Delta}{2}\right),$$
$$\Pi = g_1 - g_2 + \Omega_1 - \Omega_2\,.$$

Окончательно,

$$\Pi = (\Omega_1 + g_1) - (\Omega_2 + g_2). \tag{9}$$

Также в этом случае обнуляется второе слагаемое в формуле (2):

$$\sin^2\frac{I}{2} = \sin^2\frac{i_1 - i_2}{2} + s_1 s_2 \sin^2\frac{\Delta}{2} = 0\,.$$

Следовательно, формула (2) упрощается:

$$D_2^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2\left(\frac{(\Omega_1 + g_1) - (\Omega_2 + g_2)}{2}\right). \tag{10}$$

Теперь рассмотрим случай $\Delta = 0$.

В формулах (3) $\sin\frac{\Delta}{2} = 0$, поэтому

$$\xi = \frac{\cos\frac{i_1+i_2}{2}\sin\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{I}{2}} = 0\,,$$
$$\arcsin\xi = 0\,,$$
$$\Pi = g_1 - g_2 \pm 2\arcsin\xi = g_1 - g_2 = g_1 - g_2 + \Omega_1 - \Omega_2,$$

так как разность $\Omega_1 - \Omega_2 = \Delta = 0$.

В этом случае взаимный узел орбит совпадает с их восходящими узлами $N = N_1 = N_2$. Формула (2) выглядит следующим образом:

$$D_2^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + 4\sin^2\frac{I}{2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2\left(\frac{g_1 - g_2}{2}\right). \tag{11}$$

Эти обстоятельства побудили авторов [3] ввести второй критерий:

$$D_2^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + 4\sin^2\frac{I}{2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2\left(\frac{(\Omega_1 + g_1) - (\Omega_2 + g_2)}{2}\right). \tag{12}$$

Он совпадает с D_1 в указанных в начале раздела случаях, но в общем случае эти два критерия различны.

2.3 Критерий D_3

Некоторая модификация функций D_1, D_2 была предложена Драммондом [4, 5]:

$$D_3^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \left(\frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}\right)^2 + \left(\frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2}\right)^2 + I^2 + \left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2 P^2. \tag{13}$$

Здесь P — угол между векторами Лапласа–Рунге–Ленца, направленными из притягивающего центра в перицентры орбит:

$$\cos P = s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2 + (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2)\cos\Delta +$$
$$+ (c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2)\sin\Delta. \tag{14}$$

Поскольку $0 \leqslant P \leqslant \pi$, угол P однозначно определяется своим косинусом. Проверим, не является ли D_3 квазиметрикой. Для квазиметрик справедлива ослабленная аксиома треугольника:

$$\varrho(x_1, x_3) \leqslant A[\varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)] \tag{15}$$

при некоторой постоянной A.

Исследуем подробнее критерий Драммонда (13). Рассмотрим три орбиты с параметрами:

$$q_1 = q_2 = q_3\,, \qquad 0 < e_1 = x, \qquad 0 < e_2 = e_3 = y < x, \qquad i_1 = i_2 = i_3 = 0,$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \qquad g_1 = g_2 = 0, \qquad g_3 = 1.$$

Тогда

$$P_{12} = 0, \qquad P_{13} = P_{32} = 1,$$
$$D_{12}^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 P_{12}^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2,$$
$$D_{23}^2 = y^2 P_{23}^2 = y^2,$$
$$D_{13}^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 P_{13}^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Предположим, что существует положительная постоянная A, такая, что выполняется (15). Тогда

$$\sqrt{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \leqslant A\left(\frac{x-y}{x+y} + y\right). \tag{16}$$

При фиксированном y и $x \to \infty$ левая часть (16) стремится к бесконечности, а правая — к $A(1+y)$. Следовательно функция D_3 не является квазиметрикой, так как не удовлетворяет даже (15).

Легко установить следующие свойства функций $D_s(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ (см. [8, 9]).

- Функция D_3 зависит лишь от самих орбит, тогда как D_1, D_2 зависят еще и от выбора основной плоскости.

- Введем пространство $\mathbb{H}$ всех непрямолинейных кеплеровских орбит. Функции D_s, $s = 1, 2, 3$, определены лишь на части пространства $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Именно, следует исключить случаи, когда хотя бы одна из двух орбит круговая.

- Для D_s, $s = 1, 2$, следует исключить случай, когда $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ совпадают, но проходятся в противоположных направлениях.

- Функция D_3 почти не различает орбиты при фиксированном q_1 и большими, но разными q_2, аналогично при фиксированном q_2, и маленькими, но разными q_1.

- Ни одна из функций D_s не удовлетворяет аксиоме треугольника и, следовательно, является лишь субрасстоянием.

Перейдем к настоящим метрикам. Удивительно, что их не предложили раньше. Дело, скорее всего, в том, что субметрики применялись только к близким друг к другу орбитам с большими эксцентриситетами, когда указанные недостатки практически не сказываются.

3 Современные метрики

3.1 Метрика ϱ

В статье [11] показано, что все используемые в астрономии пространства кеплеровских орбит могут быть метризованы без особенностей. В частности, там введены метрики в 5-мерном пространстве $\mathbb{H}^\star$ всех кеплеровских орбит и в 5-мерном пространстве $\mathbb{H}$ всех непрямолинейных орбит. Пространство $\mathbb{H}^\star$ редко встречается в практике астрономических исследований, метрика там сложнее, поэтому сосредоточим свое внимание на пространстве $\mathbb{H}$, открытом и локально-компактном. Его главный недостаток (с математической точки зрения) — неполнота, вызванная исключением прямолинейных орбит, но этот факт не влияет на астрономические приложения. Однако предложенная в [11] метрика, как и D_1, содержит произвольный параметр L. Здесь будет использоваться слегка модифицированная метрика [8, 9], свободная уже от всех вышеуказанных недостатков.

Каждая орбита $\mathcal{E} \in \mathbb{H}$ однозначно определяется двумя ортогональными векторами $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, пропорциональными вектору момента импульса (вектору площадей) и вектору Лапласа–Рунге–Ленца, соответственно. Обратно, каждая пара ортогональных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ при условии $|\mathbf{u}| > 0$ определяет непрямолинейную орбиту $\mathcal{E} \in \mathbb{H}$. Пусть

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{p}, \quad |\mathbf{v}| = e\sqrt{p}, \tag{17}$$

$$\mathbf{uv} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0, \qquad |\mathbf{u}| > 0. \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_x &= \sqrt{p}\sin i \sin\Omega, & v_x &= e\sqrt{p}(\cos g\cos\Omega - \cos i \sin g \sin\Omega),\\ u_y &= -\sqrt{p}\sin i\cos\Omega, & v_y &= e\sqrt{p}(\cos g\sin\Omega + \cos i\sin g\cos\Omega),\\ u_z &= \sqrt{p}\cos i, & v_z &= e\sqrt{p}\sin i\sin g. \end{aligned} \tag{19}$$

Орбита $\mathcal{E}$ взаимно-однозначно определяется набором шести чисел $u_x, \ldots, v_z$, связанных условиями (18). Пять кеплеровских элементов также определяют орбиту однозначно. Обратное верно с необходимыми оговорками. Во-первых, примем $0 \leqslant i \leqslant \pi$. Во-вторых, при $i = 0$ или $i = \pi$ считаем $\Omega = 0$. В третьих, если $e = 0$, считаем $g = 0$.

Пространство $\mathbb{H}$ вложено в $\mathbb{R}^6$. Согласно (18) $\mathbb{H}$ является частью 5-мерной поверхности второго порядка

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0. \tag{20}$$

Эта поверхность содержит начало координат и вместе с каждой отличной от начала координат точкой $(a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z)$ содержит всю одномерную прямую

$$u_x = a_x\, t, \quad v_x = b_x\, t, \quad u_y = a_y\, t, \quad v_y = b_y\, t, \quad u_z = a_z\, t, \quad v_z = b_z\, t,$$

параметризованную величиной $t \in (-\infty, \infty)$. По определению такая поверхность называется конусом. Из конуса надо исключить 3-мерную плоскость

$$u_x = u_y = v_z = 0. \tag{21}$$

Определим расстояние в пространстве $\mathbb{H}$ как евклидово расстояние в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6$:

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}, \tag{22}$$

где $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(\mathcal{E}_k)$, $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}(\mathcal{E}_k)$.

Замечание. Здесь сохраняется нумерация метрик из [9]. Индекс 2, отвечающий основному случаю, иногда будем опускать.

Функция (22) определена и не имеет особенностей во всем пространстве $\mathbb{H}$, включающем все эллиптические, параболические и гиперболические орбиты. Эта метрика превращает $\mathbb{H}$ в неполное, пятимерное, алгебраическое, открытое, локально-компактное, линейно-связное пространство без особых точек. Физическая размерность ϱ — корень из единицы длины. Например,

$$(\text{а.е.})^{1/2} = 153.149\,264\,8 R_{\oplus}^{1/2} = 386.778\,891\,7\,(\text{Мм})^{1/2} = \\ 12\,231.022\,49\,(\text{км})^{1/2} = 386\,778.891\,7\,(\text{м})^{1/2}, \tag{23}$$

где $R_{\oplus} = 6\,378\,164\,222$ мм — экваториальный радиус общего земного эллипсоида [16]. Разумеется, можно предложить метрику, где расстояния измеряется в единицах длины. Достаточно в (17, 18, 19) заменить $\sqrt{p}$ на p. Но мы не будем делать этого ради сохранения физического смысла вектора u — момента импульса с точностью до постоянного нормирующего множителя.

Выведем формулу для вычисления расстояния по известным элементам.

Из формул (19) получаем:

$$(\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2})^2 = p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}(c_1 c_2 + s_1 s_2(\sin\Omega_1 \sin\Omega_2 + \cos\Omega_1 \cos\Omega_2)) =$$

$$= p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}(c_1 c_2 + s_1 s_2(\cos(\Omega_1 - \Omega_2)) = p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}(c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos\Delta),$$

так что

$$(\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2})^2 = p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}\cos I.$$

Аналогично для вектора $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$:

$$(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2})^2 = e_1^2 p_1 + e_2^2 p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} e_1 e_2 (s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2 + (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2)\cos\Delta +$$

$$+(c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2) \sin \Delta),$$

поэтому

$$(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2})^2 = e_1^2 p_1 + e_2^2 p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} e_1 e_2 \cos P.$$

Так как

$$\varrho_2^2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2,$$

то для ϱ_2 (и всех вводимых ниже расстояний ϱ_s) искомая формула имеет вид

$$\varrho_s^2 = (1 + e_1^2) p_1 + (1 + e_2^2) p_2 - 2\zeta_s \sqrt{p_1 p_2}. \tag{24}$$

Для $s = 2$

$$\zeta_2 = \cos I + e_1 e_2 \cos P, \tag{25}$$

где $\cos I, \cos P$ даются выражениями (3, 14).

3.2 Метрики в фактор-пространствах

3.2.1 Фактор-пространство $\mathbb{H}/\Omega$

Часто, хотя и не всегда, узлы орбит имеют большие вековые возмущения, тогда как остальные 4 элемента орбиты меняются незначительно. Полезно поэтому иногда игнорировать узлы, или, что то же, отождествлять орбиты с одинаковыми p, e, i, g вне зависимости от значений Ω. Это достигается введением 4-мерного фактор пространства $\mathbb{H}/\Omega$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, g и всевозможными значениями Ω.

Фактор-пространство метрического пространства само является метрическим с хаусдорфовой метрикой [17]. Как показано в [18], последнюю можно представить в простом виде:

$$\varrho_3 = \min_{\Omega_1, \Omega_2} \varrho_2. \tag{26}$$

Наименьшее значение существует в силу компактности тора.

Выразим ϱ_3 (26) через элементы. Соотношение (24) имеет вид

$$\varrho^2 = A_0 + A_1 \cos \Delta + A_2 \sin \Delta, \tag{27}$$

где A_k не зависят от Δ. Приведем выражения для A_k

$$A_0 = (1 + e_1^2) p_1 + (1 + e_2^2) p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} (c_1 c_2 + e_1 e_2 s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2)\,,$$

$$A_1 = -2\sqrt{p_1 p_2} (s_1 s_2 + e_1 e_2 (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2))\,,$$

$$A_2 = -2\sqrt{p_1 p_2} e_1 e_2 (c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2).$$

Так как $A_1 \cos\Delta + A_2 \sin\Delta = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin\left(\Delta + \arctan\frac{A_2}{A_1}\right)$, то наименьшее по Δ значение правой части (27) равно

$$\varrho_3^2 = A_0 - \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,.$$

Далее,

$$A_1^2 + A_2^2 = 4p_1p_2\left[e_1^2e_2^2(c_2\cos g_1\sin g_2 - c_1\sin g_1\cos g_2)^2 + e_1^2e_2^2(\cos g_1\cos g_2 + c_1c_2\sin g_1\sin g_2)^2 + \right.$$

$$\left. + s_1^2s_2^2 + 2e_1e_2s_1s_2(\cos g_1\cos g_2 + c_1c_2\sin g_1\sin g_2)\right] =$$

$$= 4p_1p_2\left[s_1^2s_2^2 + e_1^2e_2^2(1 - s_2^2\sin^2 g_2)(1 - s_1^2\sin^2 g_1) + 2e_1e_2s_1s_2(\cos g_1\cos g_2 + c_1c_2\sin g_1\sin g_2)\right].$$

Мы приходим к (24) при

$$\zeta_3 = c_1c_2 + e_1e_2s_1s_2\sin g_1\sin g_2 + \sqrt{s_1^2s_2^2 + A}, \tag{28}$$

где

$$A = e_1^2e_2^2(1 - s_1^2\sin^2 g_1)(1 - s_2^2\sin^2 g_2) + 2e_1e_2s_1s_2(\cos g_1\cos g_2 + c_1c_2\sin g_1\sin g_2)\,.$$

3.2.2 Фактор-пространство $\mathbb{H}/g$

Возможна ситуация, когда быстрее изменяются направления перицентров. Напомним, что перигей орбиты Луны движется существенно быстрее узла. Поэтому разумно ввести фактор-пространство $\mathbb{H}/g$, элементом которого является класс орбит с фиксированными p, e, i, Ω и всевозможными значениями g. Как показано в [18], метрика в этом пространстве дается формулой

$$\varrho_4 = \min_{g_1, g_2} \varrho. \tag{29}$$

В соотношении (24) от g_s зависит лишь $\cos P$:

$$\cos P = s_1s_2\sin g_1\sin g_2 + (\cos g_1\cos g_2 + c_1c_2\sin g_1\sin g_2)\cos\Delta +$$

$$+ (c_2\cos g_1\sin g_2 - c_1\sin g_1\cos g_2)\sin\Delta.$$

Придадим ему вид

$$\cos P = B_1\cos\varphi + B_2\sin\varphi + B_3\cos\psi + B_4\sin\psi, \tag{30}$$

где $\varphi = g_1 - g_2, \quad \psi = g_1 + g_2,$

$$2B_1 = s_1s_2 + (1 + c_1c_2)\cos\Delta, \qquad 2B_2 = -(c_1 + c_2)\sin\Delta,$$

$$2B_3 = -s_1s_2 + (1 - c_1c_2)\cos\Delta, \qquad 2B_4 = (c_1 - c_2)\sin\Delta.$$

Наибольшее значение правой части (30) равно сумме амплитуд гармоник:

$$\max\cos P = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} + \sqrt{B_3^2 + B_4^2}.$$

Прямые вычисления дают

$$4(B_1^2+B_2^2)=(1+c_1c_2+s_1s_2\cos\Delta)^2,\quad 4(B_3^2+B_4^2)=(1-c_1c_2-s_1s_2\cos\Delta)^2.$$

Согласно (3) $c_1c_2+s_1s_2\cos\Delta=\cos I$, так что

$$2\sqrt{B_1^2+B_2^2}=1+\cos I\geqslant 0,\qquad 2\sqrt{B_3^2+B_4^2}=1-\cos I\geqslant 0.$$

В результате $\sqrt{B_1^2+B_2^2}+\sqrt{B_3^2+B_4^2}=1$. Искомый максимум $\cos P$ равен единице, $P=0$. Это ясно и без вычислений. От аргументов перицентров зависит лишь второе слагаемое под знаком корня в (22). При постоянных $|\mathbf{v}_s|$ оно минимально при нулевом угле между векторами, что достигается их поворотом в орбитальных плоскостях так, чтобы оба вектора были направлены в один из взаимных узлов.

Окончательно, опять приходим к (24) при

$$\zeta_4=e_1e_2+\cos I. \tag{31}$$

3.2.3 Фактор-пространство $\mathbb{H}/(\Omega,g)$

Можно идти и дальше, игнорируя и узлы, и перицентры. Достаточно ввести трехмерное фактор-пространство $\mathbb{H}/(\Omega,g)$ с метрикой

$$\varrho_5^2=\min_{\Omega_1,\Omega_2,g_1,g_2}\varrho^2. \tag{32}$$

Легко проверяется, что наименьшее значение ϱ (наибольшее значение косинусов I и P) достигается при одинаковых значениях узлов и перицентров:

$$\Omega_1-\Omega_2=0,\qquad g_1=g_2=0. \tag{33}$$

Проверим:

$$\max\cos I=\max(c_1c_2+s_1s_2\cos\Delta)=c_1c_2+s_1s_2=\cos(i_1-i_2),$$

максимум $\cos I$ достигается при $\cos\Delta=1$, следовательно, при $\Delta=\Omega_1-\Omega_2=0$. Далее, $\cos P$ при условиях (33) равен единице, т.е. наибольшему возможному значению.

В результате опять приходим к (24) при

$$\zeta_5=e_1e_2+\cos(i_1-i_2). \tag{34}$$

Метрики ϱ_2,ϱ_4 инвариантны относительно выбора основной плоскости. Напротив, ϱ_3,ϱ_5 зависят от ее выбора, но инвариантны относительно начала отсчета долгот.

4 Модельные примеры

Приведем несколько примеров в простейших случаях.

1. Если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, то $\varrho = 0$ и обратно.

2. Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ представляют собой одно и то же коническое сечение, проходимое в противоположных направлениях.

   Тогда $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, и $i_2 = \pi - i_1$, $\Omega_2 = \pi + \Omega_1$, $g_2 = \pi - g_1$, $I = \pi$, $P = 0$, следовательно $\cos I = -1$, $\cos P = 1$, $c_1 c_2 = -c^2$, $s_1 s_2 = s^2$, $\cos g_1 \cos g_2 = -\cos^2 g$, $\sin g_1 \sin g_2 = \sin^2 g$.

   Мы опускаем индексы у величин $p, e, |c|, s, \sin g, |\cos g|$, общих у обеих орбит. Подставляя эти значения в формулы (25,31,34), получаем

$$\zeta_2 = \zeta_4 = e^2 - 1,$$

$$\zeta_5 = e^2 + \cos(i_1 - i_2) = e^2 + \cos(i_1 - \pi + i_1) = e^2 - \cos(2i) = e^2 + 1 - 2c^2.$$

   Без труда находим

$$\varrho_s^2 = 2p(1 + e^2) - 2p(e^2 - 1) = 4p, \qquad s = 2, 4,$$

$$\varrho_5^2 = 2p(1 + e^2) - 2p(e^2 + 1 - 2c^2) = 4pc^2.$$

   Окончательно

$$\varrho_2 = \varrho_4 = 2\sqrt{p}, \qquad \varrho_5 = 2|c|\sqrt{p}.$$

   Ситуация с ϱ_3 сложнее. Согласно (24, 28)

$$A = e^4(1 - s^2 \sin^2 g)^2 - 2e^2 s^2(\cos^2 g + c^2 \sin^2 g) = e^4(1 - s^2 \sin^2 g)^2 - 2e^2 s^2(1 - s^2 \sin^2 g)\,,$$

$$\begin{aligned}\zeta_3 = -c^2 + e^2 s^2 \sin^2 g + \sqrt{s^4 + e^4(1 - s^2 \sin^2 g)^2 - 2e^2 s^2(1 - s^2 \sin^2 g)} \\ = -c^2 + e^2 s^2 \sin^2 g + |s^2 - e^2(1 - s^2 \sin^2 g)|,\end{aligned}$$

$$\varrho_3^2 = 2p(1 + e^2 - \zeta_3).$$

   При $s^2 \leqslant e^2(1 - s^2 \sin^2 g)$ получаем

$$\zeta_3 = -c^2 + e^2 s^2 \sin^2 g - s^2 + e^2(1 - s^2 \sin^2 g) = e^2 - 1, \quad \varrho_3^2 = 4p,$$

   а при $s^2 > e^2(1 - s^2 \sin^2 g)$

$$\zeta_3 = -c^2 + e^2 s^2 \sin^2 g + s^2 - e^2(1 - s^2 \sin^2 g) = 2e^2 s^2 \sin^2 g + s^2 - c^2 - e^2,$$

$$\varrho_3^2 = 2p(1 + e^2 - 2e^2 s^2 \sin^2 g + s^2 - c^2 - e^2) = 4p(e^2(1 - s^2 \sin^2 g) + c^2).$$

Итак, формула выглядит следующим образом

$$\varrho_3 = \begin{cases} 2\sqrt{p}, & \text{если} \quad s^2 \leqslant e^2(1 - s^2 \sin^2 g), \\ 2\sqrt{p[1 + e^2(1 - s^2 \sin^2 g) - s^2]}, & \text{если} \quad s^2 > e^2(1 - s^2 \sin^2 g). \end{cases}$$

Исходя из полученных выкладок, можно сделать вывод, что

$$\varrho_5 \leqslant \varrho_3 \leqslant \varrho_2.$$

Обратим внимание, что $\varrho_4 = \varrho_2$, так что никакие повороты линий апсид в орбитальной плоскости не могут сделать орбиты ближе друг к другу. Не меняющие наклона повороты орбитальных плоскостей могут сблизить орбиты лишь при $s^2 \leqslant e^2(1 - s^2 \sin^2 g)$. Наконец, комбинация указанных поворотов сближает орбиты (как точки в пятимерном метрическом пространстве) всегда, исключая случай $\sin i = 0$.

3. Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ лежат в одной ориентированной плоскости, так что $i_1 = i_2$, $\Omega_1 = \Omega_2 \quad \Delta = 0, \quad \cos I = 1, \quad \cos P = \cos(g_1 - g_2)$.

   Тогда в формулах (28,31,34,25),

$$\zeta_2 = \zeta_3 = 1 + e_1 e_2 \cos(g_1 - g_2), \qquad \zeta_4 = \zeta_5 = 1 + e_1 e_2. \tag{35}$$

   Естественно, наименьшее при фиксированных p_k, e_k расстояние достигается при $g_1 = g_2$, а наибольшее — при $g_1 = g_2 + \pi$ и не зависит от ориентации векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Метрики в таком случае во всех фактор-пространствах равны.

4. В примере 3 считаем орбиту $\mathcal{E}_2$ круговой, $e_2 = 0$. Тогда

$$\varrho^2 = (1 + e_1^2)p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2},$$

$$\varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = \varrho.$$

   В частности, если обе орбиты — круговые, то

$$\varrho = |\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}|.$$

5. Пусть орбиты $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — круговые с произвольной ориентацией ($e_1 = e_2 = 0$). Тогда

$$(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2})^2 = 0.$$

   Следовательно, из формулы (22) получаем

$$\varrho = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos I}.$$

   Аналогично

$$\varrho_3 = \varrho_5 = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos(i_1 - i_2)},$$

$$\varrho_4 = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}\cos I}.$$

При $I = 0$ мы получаем случай 4:

$$\varrho = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}} = |\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}|,$$

а при $I = \pi$ и $p_1 = p_2$ — случай 2 для круговых орбит:

$$\varrho = 2\sqrt{p} = \varrho_3 = \varrho_4, \quad \varrho_5 = 2|c|\sqrt{p}.$$

5 Расстояния между орбитами

5.1 Расстояния между орбитами планет Солнечной системы

Вычислим взаимные расстояния между орбитами всех планет Солнечной системы и Плутона в различных метриках и субметриках. Обратим внимание, что физическая размерность используемых расстояний принята равной корню из а.е. Субрасстояние D_3 безразмерно. Субрасстояния D_1, D_2 безразмерны; входящий в их определение параметр L принят равным 1 а.е.

В качестве входных данных использовались элементы орбит планет Солнечной системы и Плутона на эпоху 2000.0 [19]. Работа программы протестирована на модельных примерах предыдущего раздела.

Результаты приведены в таблицах 1 и 2.

Здесь и далее знаками ☿, ♀, ♁, ♂, ♃, ♄, ♅, ♆, ♇ обозначены планеты Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон, соответственно.

В таблице 1 первое число в каждой ячейке — расстояние $\varrho(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n)$ между орбитами соответствующих планет; второе и третье — значения векторов $|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_n|$ и $|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_n|$, соответственно. Эти три величины связаны соотношением (22):

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}.$$

Для каждой пары приводим три величины, чтобы можно было оценить вклад в ϱ от размеров орбит и ориентации их плоскостей, с одной стороны (вектор $\mathbf{u}$), и вклад от эксцентричности и ориентации линий апсид, с другой стороны (вектор $\mathbf{v}$).

Проанализируем таблицу 1.

У всех пар орбит бóльший вклад в расстояние вносят их размеры и ориентации плоскостей, вклад экцентричности мал, поскольку орбиты планет близки к круговым. Примерно на порядок или в несколько раз первое число больше второго, редко на 2 порядка: пары Нептун — Венера и Нептун — Земля. Только у планет Плутон — Нептун эти числа примерно равны. У Плутона в парах со всеми планетами сравнимый вклад вносят обе величины, максимум в 5 раз находится различие. Расстояние ϱ увеличивается с удалением планет друг от друга, что вполне логично.

Таблица 1: Расстояния $\varrho(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n)$ между орбитами планет на эпоху 2000.0

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆
♀	**0.2772** 0.2476 0.1246							
♁	**0.4261** 0.4024 0.1400	**0.1598** 0.1591 0.0155						
♂	**0.6515** 0.6249 0.1842	**0.3987** 0.3801 0.1206	**0.2617** 0.2319 0.1213					
♃	**1.6749** 1.6747 0.0278	**1.4335** 1.4292 0.1118	**1.2855** 1.2792 0.1273	**1.0627** 1.0505 0.1605				
♄	**2.4942** 2.4866 0.1951	**2.2475** 2.2410 0.1701	**2.0993** 2.0923 0.1714	**1.8861** 1.8635 0.2906	**0.8399** 0.8142 0.2062			
♅	**3.7816** 3.7710 0.2826	**3.5318** 3.5263 0.1981	**3.3812** 3.3760 0.1891	**3.1615** 3.1470 0.3022	**2.1166** 2.0974 0.2842	**1.2972** 1.2910 0.1267		
♆	**4.8762** 4.8750 0.1060	**4.6299** 4.6295 0.0567	**4.4800** 4.4795 0.0650	**4.2547** 4.2512 0.1737	**3.2024** 3.2007 0.1047	**2.3921** 2.3891 0.1204	**1.1251** 1.1107 0.1796	
♇	**5.7157** 5.4880 1.5974	**5.4608** 5.2541 1.4880	**5.3348** 5.1266 1.4758	**5.1076** 4.9062 1.4198	**4.2349** 3.9315 1.5739	**3.5603** 3.1816 1.5981	**2.7068** 2.2548 1.4975	**2.2689** 1.6686 1.5375

На диагонали таблицы находятся расстояния между соседними орбитами. Можно заметить, что чем больше орбиты (планеты дальше от Солнца), тем ϱ больше, даже между соседями.

Рассмотрим расстояния в фактор пространствах для орбит планет (Таблица 2).

Для всех планет расстояния в фактор-пространствах примерно равны расстоянию в основном пространстве и между собой. Расхождения чаще всего начинаются в третьем – четвертом знаках (иногда в пятом - шестом). Но есть пары, различающиеся уже во втором знаке. Например, все пары с Плутоном, кроме Земли, и еще несколько: Марс — Меркурий, Марс — Земля, Юпитер — Сатурн, Юпитер — Уран. Еще 2 пары: Земля — Меркурий, Земля — Марс имеют различие с основным расстоянием, но все расстояния в фактор-пространствах почти идентичны. Как видно из таблицы 2, рассматривать

Таблица 2: Расстояния $\varrho, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$ между орбитами планет на эпоху 2000.0

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆
♀	**0.277202**							
	0.274249							
	0.274936							
	0.273299							
♁	**0.426080**	**0.159823**						
	0.416841	0.159445						
	0.416807	0.159446						
	0.416806	0.159444						
♂	**0.651522**	**0.398733**	**0.261693**					
	0.630364	0.397972	0.251778					
	0.625026	0.395411	0.251777					
	0.625025	0.394855	0.251776					
♃	**1.674937**	**1.433547**	**1.285510**	**1.062666**				
	1.674929	1.433522	1.282691	1.050152				
	1.674763	1.433080	1.282690	1.050486				
	1.673874	1.432925	1.282690	1.049761				
♄	**2.494206**	**2.247485**	**2.099290**	**1.886059**	**0.839940**			
	2.484854	2.246976	2.098327	1.866663	0.821692			
	2.487081	2.247484	2.098326	1.864531	0.816776			
	2.484750	2.246880	2.098326	1.862925	0.816553			
♅	**3.781606**	**3.531812**	**3.381164**	**3.161505**	**2.116550**	**1.297177**		
	3.772855	3.531803	3.380996	3.149659	2.101958	1.294090		
	3.771830	3.531754	3.380996	3.148259	2.099375	1.291257		
	3.771716	3.531753	3.380996	3.148193	2.099221	1.289844		
♆	**4.876201**	**4.629855**	**4.479977**	**4.254743**	**3.202434**	**2.392088**	**1.125083**	
	4.873283	4.629123	4.479734	4.250844	3.200947	2.392024	1.124871	
	4.875460	4.629848	4.479734	4.251527	3.201106	2.391775	1.119566	
	4.873177	4.629061	4.479734	4.250162	3.200708	2.391303	1.115389	
♇	**5.715736**	**5.460799**	**5.334757**	**5.107574**	**4.234888**	**3.560362**	**2.706807**	**2.268931**
	5.680060	5.457127	5.332745	5.104126	4.204576	3.525956	2.600972	2.264444
	5.653889	5.458362	5.332646	5.093944	4.164526	3.440328	2.593808	2.192937
	5.641416	5.455603	5.332646	5.086813	4.164204	3.440206	2.585879	2.183259

расстояния в фактор-пространствах для планет Солнечной системы не имеет смысла, наклоны близки к нулю, эксцентриситеты тоже сравнительно малы. Только Плутон (и в меньшей степени Меркурий) немного выбивается из общего ряда, но и для них отличия

расстояний не столь значительны.

Приведем для сравнения таблицу 3 субрасстояний D_1, D_2, D_3. Первое число в графе равно D_1, второе — D_2, третье — D_3.

Таблица 3: Субрасстояния D_1, D_2, D_3

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆
♀	0.465200 0.483506 1.02238							
♁	0.732336 0.744039 1.02392	0.272372 0.271886 0.456437						
♂	1.10824 1.10739 0.790449	0.676777 0.676777 0.934342	0.416369 0.416369 0.724837					
♃	4.65127 4.64641 1.11131	4.23219 4.23205 1.06614	3.96735 3.96735 0.834523	3.56904 3.57044 0.645347				
♄	8.73378 8.73463 1.10458	8.32044 8.32034 1.16214	8.05561 8.05561 0.973583	7.65776 7.65897 0.778044	4.08907 4.08938 0.308144			
♅	17.9921 17.9929 1.16961	17.5797 17.5797 1.18850	17.3148 17.3148 1.01369	16.9174 16.9174 0.946168	13.3484 13.3484 0.584540	9.25965 9.25965 0.357114		
♆	29.3758 29.3755 1.34893	28.9635 28.9635 0.986667	28.6987 28.6987 0.956507	28.3008 28.3010 1.20295	24.7320 24.7321 0.949061	20.6434 20.6434 0.856166	11.3841 11.3840 0.659266	
♇	29.3351 29.3368 1.07109	28.9237 28.9244 1.37219	28.6593 28.6593 1.32006	28.2624 28.2608 1.16248	17.7370 17.7369 1.04865	20.6055 20.6055 0.921595	11.3473 11.3491 0.778680	0.436356 0.436325 1.00673

Проанализировав таблицу значений D_s, можно сделать следующие выводы.

1) При расчетах с помощью D_1 получаются значения, отличающиеся от ϱ примерно на порядок. Отчасти это связано с разной размерностью D_s и ϱ. Расстояния возрастают с удалением планет друг от друга, что вполне естественно.

2) Субрасстояния D_2 близки к D_1, как и предсказывает теория. Почти у всех пар они различаются только во втором и далее знаке после запятой. Это связано с тем, что наклоны орбит большинства планет близки друг к другу и малы. Для Плутона, наклон которого больше, чем у остальных (хотя вообще является тоже малым), отличие также

не превышает нескольких тысячных, что связано со схожей долготой его восходящего узла с другими планетами. Почти для всех пар орбит Земля — планета различия вплоть до 9-го знака после запятой незаметны. Данная картина наблюдается из-за практически нулевого наклона орбиты Земли.

3) Значения D_3 малы как для близких, так и для далеких планет, не наблюдается какой-либо закономерности. Это связано с тем, что в формуле (13) первое слагаемое стремится к 1 при $q_1 \to \infty$ и фиксированном q_2. В таком случае расстояния получатся одинаковыми при одном q_2 и при больших, но разных q_1 (аналогичная ситуация будет при фиксированном q_1 и при $q_2 \to 0$). Кроме того, для круговых орбит D_3 ведет себя плохо: при $e_1 = 0, e_2 \neq 0$ четвертое слагаемое правой части (13) не определено (для круговой орбиты вектор P, направленный из притягивающего центра в перицентр орбиты, не определен), а второе равно единице, что противоречит здравому смыслу. Все это приводит к значениям субрасстояний, заключенным между 0 и 1.4. Недостаток этой субметрики еще и в том, что расстояния не увеличиваются при удалении планет друг от друга, а имеют скачки, поэтому ее затруднительно использовать при сравнении орбит.

5.2 Расстояния между орбитами астероидов

В задаче отождествления родительских тел астероидно-метеороидных комплексов центральную роль играют метрики в пространстве кеплеровских орбит и в трех важнейших фактор-пространствах, полученных игнорированием долгот узлов, аргументов перицентров, или обоих этих углов.

В данной работе были найдены четыре указанных типа расстояний ϱ между орбитами всех $N = 464\,622$ нумерованных астероидов, всего $N(N-1)/2 = 107\,936\,569\,131$ пар. Параметры орбит взяты из ежегодника [20].

Величины ϱ_s имеют размерность квадратного корня из длины. Мы приводим их в системе, в которой за единицу длины принята астрономическая единица. Переход к другим единицам содержится в (23). Нас интересуют малые расстояния. Программа расчета выводит на печать пары астероидов, расстояния между их орбитами и фактор-орбитами, если они не превосходят $10^{-3}\,(\text{а.е.})^{1/2} = 0.153\,R_{\oplus}^{1/2} = 12.2\,(\text{км})^{1/2}$. Наименьшие найденные расстояния приведены в табл. 4.

Наименьшее расстояние, равное $3.634540 \cdot 10^{-5}$, принадлежит паре № 63440 и № 331933. Элементы орбит данных астероидов различаются лишь в шестом знаке (чуть хуже у аргумента перицентра). Напрашивается предварительный вывод: эти астероиды являются осколками одного, либо это вообще один и тот же астероид. Отдельно были рассмотрены метрики в трех фактор-пространствах. Наименьшие расстояния $\varrho_2 = 1.1463381 \cdot 10^{-5}$ (минимум по аргументам перицентра) и $\varrho_3 = 1.0753622 \cdot 10^{-5}$ (минимум по узлам и аргументам перицентра) принадлежат вышеуказанной паре. Однако наименьшее рас-

Таблица 4: Наименьшие расстояния между орбитами астероидов

№ (Абс. зв. величина)	**№ (Абс. зв. величина)**	**Расстояние**
63440 (15.2)	331933 (17.6)	$\varrho = 3,63 \cdot 10^{-5}$ (также малые ϱ_4, ϱ_5)
58411 (15.1)	144578 (15.5)	$\varrho_3 = 6.73 \cdot 10^{-5}$
21436 (15.4)	334916 (18.2)	$\varrho = 7.97 \cdot 10^{-5}$ (также малые ϱ_3, ϱ_4)
355258 (18.8)	404118 (17.9)	$\varrho_5 = 3.98 \cdot 10^{-5}$ (также малое ϱ_4)

стояние $\varrho_1 = 6.7338774 \cdot 10^{-5}$ (минимум по узлам) принадлежит паре астероидов № 58411 и № 145784, их орбиты в пространстве орбит таковыми не являются.

Для более точного анализа в табл. 4 приведны абсолютные звездные величины этих астероидов.

Большинство найденных минимальных расстояний между орбитами принадлежит астероидам с различными абсолютными звездными величинами, следовательно, можно предположить, что это осколки более крупного разрушенного астероида.

Из нескольких рассмотренных пар с достаточно малыми расстояниями между их орбитами были найдены 2 пары, абсолютные звездные величины которых приблизительно одинаковы (табл. 5).

Таблица 5: Расстояния между орбитами астероидов с приблизительно равными звездными величинами

№ (Абс. зв. величина)	**№ (Абс. зв. величина)**	**Расстояние**
180906 (17.6)	217266 (17.4)	$\varrho = 2.393 \cdot 10^{-4} (= 2.92\sqrt{km})$
100509 (15.1)	108692 (15.2)	$\varrho_3 = 1.076 \cdot 10^{-4} (= 1.32\sqrt{km})$

Приведем для более точного анализа элементы орбит данных астероидов (табл. 6).

Таблица 6: Элементы орбит астероидов с приблизительно равными звездными величинами

астерод	a, а.е.	e	i,°	g,°	Ω,°	M,°
180906	2.2359939	0.1156480	3.84085	197.19561	87.15577	204.45023
217266	2.2361541	0.1154993	3.84073	197.17917	87.14644	179.71038
100509	2.3502669	0.2238601	22.28812	93.47054	110.66002	200.34721
108692	2.4186526	0.1966817	21.11578	88.26485	327.08985	15.98486

Элементы первой пары отличаются лишь во втором – третьем знаке. Возможно, они представляют один и тот же объект. У второй пары элементы отличаются сильнее,

поэтому такое для них предположить нельзя.

В заключение раздела приведем вытекающие из определения неравенства между ϱ_s:

$$\varrho_5 \leqslant \varrho_3 \leqslant \varrho_2\,, \qquad \varrho_5 \leqslant \varrho_4 \leqslant \varrho_2\,. \tag{36}$$

Что же касается ϱ_3 , ϱ_4, то встречаются все три логически возможных варианта в проведенных численных расчетах. В разделе **Модельные примеры** показано, что $\varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5$ для совпадающих орбит и орбит, лежащих в одной ориентированной плоскости, одна из которых — круговая. Таблица 2 показывает, что среди планет в 8 случаях $\varrho_3 < \varrho_4$, в 26 случаях $\varrho_3 > \varrho_4$, и в 2 случаях $\varrho_3 = \varrho_4$ с принятой точностью. Среди 107 936 569 131 пар астероидов в 46% случаев $\varrho_3 < \varrho_4$, и в 54% случаев $\varrho_3 > \varrho_4$.

5.3 Челябинское тело

15 февраля 2013 года астероид диаметром около 17 метров и массой порядка 10^4 тонн (по расчётам НАСА) вошёл в атмосферу Земли на скорости около 18 км/с. Это был так называемый „Челябинский метеорит“. По данным различных наблюдений сразу были найдены элементы его предварительной орбиты [21]. Приведем их в табл. 7.

Таблица 7: Элементы орбиты Челябинского тела

a, а.е.	e	i,°	g,°	Ω,°
1.26 ± 0.05	0.52	2.984	95.5 ± 2	326.5 ± 0.3

Таблица 8 воспроизводит более точную орбиту с указанием погрешностей [22]. Правда, ошибка Ω не приводится, но из текста ясно, что ее значение — около 0.1°.

Таблица 8: Элементы орбиты Челябинского тела

a, а.е.	e	i,°	g,°	Ω,°
1.67 ± 0.10	0.57 ± 0.03	7.07 ± 0.54	106.28 ± 2.54	326.42 ± 0.10

Воспользовавшись данными табл. 8, вычислим четыре типа расстояний между орбитой челябинского тела и орбитами всех нумерованных астероидов. В таблице 9 для каждого типа приведены значения наименьшего и следующего за ним расстояния и номера соответствующих астероидов.

Как видим, все значения ϱ довольно большие. Расстояния в фактор-пространствах меньше, но несущественно.

Приведем более полную таблицу расстояний (таблица 10).

Берем все астероиды, расстояния до которых не превосходят конкретных величин. Для ϱ возьмем границу, равную 0.10, для ϱ_3 —0.07, для ϱ_4 —0.09, для ϱ_5 —0.05. Данные значения были взяты не случайно, они подбирались так, чтобы в выборку для каждого

Таблица 9: Наименьшие расстояния между орбитой Челябинского тела и орбитами астероидов

Метрика	**Астероид**	**Расстояние**
ϱ	86039	0.04492
	369057	0.12184
ϱ_3	86039	0.04385
	137126	0.05636
ϱ_4	86039	0.04428
	385605	0.05352
ϱ_5	257744	0.02151
	86039	0.02863

Таблица 10: Наименьшие расстояния между Челябинским астероидом и всеми остальными астероидами.

Метрика	**Астероид**	**Расстояние**
<0.10		
ϱ	86039	0.04492
<0.07		
ϱ_3	86039	0.04385
	137126	0.05636
	141614	0.05825
	69230	0.06939
	5011	0.06944
<0.09		
ϱ_4	86039	0.04428
	385605	0.05352
	330809	0.07633
	10145	0.08468
	90416	0.08713
<0.05		
ϱ_5	257744	0.02151
	86039	0.02863
	141614	0.03180
	385605	0.03540
	26379	0.04029
	137126	0.04434

попало хотя бы 5 астероидов. Для ϱ даже при условии большой границы получается только один астероид, границу больше брать уже совершенно бессмысленно.

Но насколько надежны эти данные? Для ответа на этот вопрос было проделано следующее.

1. Обозначим 5 элементов орбиты $\mathcal{E}$ челябинского тела через ϵ_s, а приведенные в табл. 8 погрешности через $\delta\epsilon_s$, $s = 1, \ldots, 5$. Наряду с орбитой $\mathcal{E}$ рассмотрим $3^5 = 243$ орбиты $\mathcal{E}_k$ с элементами $\epsilon_{sk_s} = \epsilon_s + k_s\delta\epsilon_s$, $k_s = -1, 0, 1$, $k = (k_1, \ldots, k_5)$. Вычислим 4 типа расстояний между орбитами $\mathcal{E}_k$ и орбитами указанных в табл. 9 астероидов. В табл. 11 приведены наименьшее, наибольшее и среднее из этих величин.

Таблица 11: Расстояния между варьированной орбитой Челябинского тела и орбитами астероидов

Метрика	**Астероид**	**Наименьшее**	**Среднее**	**Наибольшее**
ϱ	86039	0.03684	0.06337	0.09577
	369057	0.06925	0.12718	0.18284
ϱ_3	86039	0.03047	0.05836	0.09248
	137126	0.03303	0.06857	0.09182
ϱ_4	86039	0.03626	0.05843	0.08982
	385605	0.04896	0.06653	0.08942
ϱ_5	257744	0.01569	0.04336	0.07162
	86039	0.01250	0.04585	0.08325

2. Вычислим 4 типа расстояний между орбитой $\mathcal{E}$ и 243 орбитами $\mathcal{E}_k$. Наименьшее для каждого типа, естественно, равно нулю. В табл. 12 приведены наибольшее и среднее из этих значений.

Таблица 12: Наибольшее и среднее расстояния между орбитой $\mathcal{E}$ и 243 орбитами $\mathcal{E}_k$.

Метрика	**Среднее**	**Наибольшее**
ϱ	0.04421	0.06664
ϱ_3	0.03827	0.06092
ϱ_4	0.03749	0.06031
ϱ_5	0.03749	0.06031

Приведенные в таблицах 11 и 12 значения сравнимы по порядку величины. У многих пар орбит реальных астероидов расстояния на несколько порядков меньше. Заключаем, что орбита Челябинского тела определена не слишком уверенно для наших целей: можно указать с десяток астероидов, возможно являющихся родительским телом Челябинского метеорита, и выбор между ними невозможен.

Напоследок найдем расстояния между каждым астероидом и 243 вариациями орбиты Челябинского тела. Наименьшие из всех ($\varrho_s < 0.05$) приведены ниже в таблице 13.

Таблица 13: Наименьшие варианты расстояний между орбитами астероидов и варьированной орбитой Челябинского тела

Метрика	**Астероид**	**Расстояние**
ϱ	86039	0.03684
ϱ_3	136849	0.02982
	86039	0.03047
	137126	0.03303
	69230	0.03442
	5011	0.03944
	141614	0.04583
	363790	0.04772
ϱ_4	86039	0.03626
	385605	0.04896
	90416	0.04907
ϱ_5	86039	0.01250
	257744	0.01569
	141614	0.01638
	137126	0.01828
	456938	0.02267
	26379	0.02269
	136849	0.02614
	385605	0.02618
	414800	0.02678
	69230	0.02720
	159677	0.02926
	87311	0.03192
	330809	0.03259
	301011	0.03292
	1862	0.03493
	101869	0.03505
	9162	0.03520
	279744	0.03547
	171486	0.03565
	407324	0.03566
	358471	0.03617
	140039	0.03706

Таблица 13: Продолжение

Метрика	**Астероид**	**Расстояние**
ϱ_5	5011	0.03938
	363071	0.04055
	153267	0.04063
	369057	0.04372
	444584	0.04399
	144898	0.04470
	363790	0.04493
	162116	0.04650
	4450	0.04630
	179806	0.04694
	267729	0.04703
	152770	0.04762
	361689	0.04813
	90416	0.04906
	211871	0.04919
	447755	0.04977

Мы, конечно, рассмотрели не все возможные значения расстояний, поскольку использовали только среднее и граничные числа для элементов орбиты Челябинского тела. Но, исходя только из этих данных, видно, что все расстояния велики. Сложно предположить связь Челябинского с каким-либо другим известным телом Солнечной системы.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что Челябинское тело не являлось осколком какого-либо известного астероида. Скорее всего это маленький, не видимый ранее, астероид, либо осколок, отколовшийся давно и успевший сильно изменить свою орбиту, но точно утверждать что-либо нельзя, поскольку орбита метеороида определена плохо.

Список литературы

[1] *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. М.: Ижевск: Изд. ИКИ, 2004. 512 с.

[2] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 831 с.

[3] *Southworth R., Hawkins G.* Statistics of meteor streams // Smithson. Contrib. Astrophys. 1963. Vol. 7. P. 261-285.

[4] *Drummond J.D.* On meteor/comet orbital discriminant D // Proc. Southwest Regional Conf. Astron. Astrophys. (P.F.Gott, P.S.Riherd, Eds.), Little Rock AR. 1979. Vol. 5. P. 83-86.

[5] *Drummond J.D.* A test of comet and meteor shower associations // Icarus. 1981. Vol. 45. P. 545-553.

[6] *Jopek T.J.* Remarks on the meteor orbital similarity D-criterion // Icarus. 1993. Vol. 106, 2. P. 603–607.

[7] *Калинин Д.А.* О критериях общности в кометных метеороидных комплексах // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. Вып. 5. С. 3-9.

[8] *Холшевников К.В.* О метриках в пространствах кеплеровских орбит // Физика Космоса: Тр. 45-й Международ. студ. науч. конф., Екатеринбург, 1–5 февр. 2016 г. Екатеринбург: Изд. УрФУ, 2016. С. 168-185.

[9] *Kholshevnikov K.V., Kokhirova G.I., Babadzhanov P.B., Khamroev U.H.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // MNRAS. 2016. Vol. 462, 2. P. 2275–2283.

[10] *Kholshevnikov K.V., Vassiliev N.N.* Natural metrics in the spaces of elliptic orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2004. Vol. 89, 2. P. 119-125.

[11] *Kholshevnikov K.V.* Metric Spaces of Keplerian Orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. Vol. 100, 3. P. 169-179.

[12] *Кузнецов Э.Д., Сафронова В.С.* Приложение метрик пространства кеплеровых орбит для поиска астероидов на близких орбитах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. №4. Вып. 2. С. 86–92.

[13] *Kholshevnikov K.V., Kokhirova G.I., Khamroev U.H.* New approaches to measure the orbital similarity and its application to related objects // Planetary and Space Science. 2018 (in press).

[14] *Maruskin J.M.* Distance in the space of energetically bounded Keplerian orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2010. Vol. 108, 3. P. 265-274.

[15] *Noll K.S., Weaver H.A., Feldman P.D. (Eds.).* The Collision of Comet P/Shoemaker–Levy 9 and Jupiter. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, 388 p.

[16] *Аллен К.У.* Астрофизические величины, М.: Мир, 1977. 25 с.

[17] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: КомКнига, 2006. 304 с.

[18] *Milanov D.V.* Metrics in Keplerian orbits quotient spaces: the triangle inequality, isometric images in $\mathbb{R}^n$ and some properties // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2018 (in press).

[19] *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.

[20] *Железнов Н.Б., Кочетова О.М., Кузнецов В.Б., Медведев Ю.Д., Чернетенко Ю.А., Шор В.А.* Эфемериды малых планет на 2017 год. Санкт-Петербург: Изд. ИПА РАН, 2016.

[21] *Емельяненко В.В., Попова О.П., Чугай Н.Н., Шеляков М.А., Пахомов Ю.В., Шустов Б.М., Шувалов В.В., Бирюков Е.Е., Рыбнов Ю.С., Маров М.Я., Рыхлова Л.В., Нароенков С.А., Карташова А.П., Харламов В.А., Трубецкая И.А.* Астрономические и физические аспекты челябинского события 15 февраля 2013 г. // Астрономический вестник. 2013, Т. 47, вып. 4. С. 262–277.

[22] *Голубаев А.В.* Основные характеристики движения метеороида при выпадении Челябинского метеоритного дождя 15 февраля 2013 года // Астрономический вестник. 2015, Т. 49, вып. 3. С. 163–175.

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Логачева Андрея Николаевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Пороговые эффекты разрушения при действии комбинированных импульсных и высокочастотных нагрузок» является анализ модели адгезионной зоны, основанный на модели балки на упругом основании, с точки зрения критерия инкубационного времени.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org, ScienceDirect по следующим ключевым словам: адгезия, балка на упругом основании, критерий инкубационного времени. Все найденные публикации, приведенные в списке литературы ВКР, не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [2], [4 – 7], [13 – 14] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Юрием Викторовичем Петровым, профессором кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), а также с Григорием Александровичем Волковым доцентом кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.
Защита работы состоялась 04.06.2019. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись Логачев Андрей Николаевич

31 мая 2020
г. Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет

Логачев Андрей Николаевич

Выпускная квалификационная работа

Пороговые эффекты разрушения при действии комбинированных импульсных и высокочастотных нагрузок

Специалитет

01.05.01 «Фундаментальные математика и механика»

СМ.5007.2014 «Фундаментальная математика и механика»

Механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель:

чл.-корр. РАН, проф., д.ф.-м.н. Петров Ю. В.

Рецензент:

зав. кафедрой, д. ф.-м. н. Груздков А. А.

Санкт-Петербург

2019

Saint-Petersburg State University

Andrey Logachev

Graduation Thesis

Threshold effects of fracture under the action of combined pulsed and high-frequency loads

Specialist Programme

01.05.01 Fundamental Mathematics and Mechanics

CM.5007.2014 Fundamental Mathematics and Mechanics

Deformable body mechanics

Scientific supervisor:

Member (corr.) of the RAS, Prof., D. Sci. in Math. and Ph. Yuri Petrov

Reviewer:

Leading researcher, D. Sci. in Math. and Ph. Aleksey Gruzdkov

Saint-Petersburg

2019

Оглавление

Введение **4**

1. Основная часть **6**

1.1. Критерий инкубационного времени 6

1.2. Постановка задачи 6

1.3. Решение для произвольного нагружения 8

1.4. Решение для импульсной нагрузки с внешним вибрационным полем 9

2. Результаты **12**

2.1. Значение критической амплитуды 12

2.2. Влияние параметров материала 12

Заключение **15**

Список литературы **16**

Введение

Адгезионные силы возникают в зоне контакта двух тел и по своей физической природе связаны с межмолекулярным взаимодействием приграничного слоя. Они встречаются в различных областях деятельности человека: в науке, производстве и даже в повседневной жизни (поверхностное натяжение жидкости, трение покоя). Адгезионные эффекты оказывают большое влияние на прочность и долговечность лакокрасочных изделий, железнодорожных путей, композитных материалов, клеевых соединений. В связи с существенным прогрессом науки и техники на микромасштабном и наномасштабном уровнях, где силы межмолекулярного взаимодействия играют большую роль, появился еще ряд задач в наномеханике, нанотрибологии и других областях, требующий разработки методов, учитывающих эти силы [1].

Из-за столь широкого распространения в современном мире применения адгезионных эффектов исследование математических моделей, описывающих адгезионные зоны, является важной и актуальной задачей. В силу особой специфики этих задач требуются различные подходы для их математического описания[2]. Экспериментальное определение адгезионной прочности является непростой задачей, которая зависит не только от материалов, но также от вида и скорости нагружения [3]. По этой причине важное значение принимает теоретический подход к решению таких задач.

В данной работе для описания адгезионной зоны используется модель и основанная на балочном приближении, соответствующая динамическому нагружению балки Бернулли-Эйлера на упругом основании. Аналогичная модель используется для описания микроэлектромеханических систем (MEMS) [4]. Исследуется процесс деламинации поверхностного слоя при действии внешней нагрузки, представляющей собой комбинацию импульсного воздействия и внешнего вибрационного поля. В качестве критерия разрушения используется критерий инкубационного времени. В работах [5, 6] было показано, что такое внешнее поле снижает пороговую амплитуду нагрузки при определенных критиче-

ских частотах для модели струны на упругом основании. В данном исследовании проверяется наличие данного эффекта для предложенной модели адгезионной зоны [7], а также влияние изменения параметров материала на критические частоты.

1. Основная часть

1.1. Критерий инкубационного времени

В экспериментах по высокоскоростному нагружению был обнаружен ряд эффектов, которые нельзя объяснить с помощью классической теории разрушения. Разрешить данную проблему можно, предположив, что процесс разрушения носит не локальный во времени, а интегральный характер. Идейным фундаментом данного подхода служит концепция линейного размера разрушения, предложенная независимо Нейбером и Новожиловым [8]. В работах Петрова и Морозова [9, 10] была выдвинута концепция пространственно-временной ячейки разрушения, соответствующая дискретизации как пространственной, так и временной шкалы. Основу этого подхода составляет понятие инкубационного времени разрушения τ. Параметр материала τ — это характерное время релаксации процессов разрушения на микроуровне, предваряющих разрыв материала на данном участке d. Таким образом разрушение достигается при накоплении достаточного вклада напряжений на структурно-временной ячейке $d \times \tau$:

$$\frac{1}{\tau d} \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{0}^{d} \sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta \leqslant \sigma_c,$$

где $\sigma(x, t)$ — разрывающие напряжения в точке с координатами x в момент времени t, σ_c — статическая прочность, τ — инкубационное время.

1.2. Постановка задачи

Предполагаем, что адгезионная зона представляет собой балку Бернулли-Эйлера, лежащую на упругой подложке [7, 11]. Направим ось Ox вдоль оси стержня, а ось Oz вертикально вверх перпендикулярно адгезионной зоне. Прогиб оси балки в направлении Oz в точке с координатой x в момент времени t обозначим $w(x, t)$. Растягивающими усилиями пренебрежем в виду их относительной малости, тогда верно следующее

выражение для изгибающего момента [12]:

$$M = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где M — изгибающий момент, Q — перерезывающая сила, E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения относительно оси Oy. Продифференцировав уравнение (1) дважды по координате и приняв во внимание, что $M'' = q$, получим уравнение изгиба балки в перемещениях:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) = q(x,t), \tag{2}$$

где $q(x,t)$ — распределенная нормальная нагрузка. Считаем, что сила взаимодействия с подложкой подчиняется линейному закону, таким образом модель контактной зоны представляет собой упругое (Винклеровское) основание. Также учитываем влияние инерционных сил, которые через плотность ρ и площадь поперечного сечения S выражаются следующим образом:

$$q_{\text{ин}} = \rho S\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}.$$

С учетом внешних сил $P(x,t)$ распределенная нагрузка имеет вид:

$$q = -\rho S\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + P(x,t) - kw.$$

Считая, что жесткость балки на изгиб $EI = const$, после подстановки подстановки последнего выражения в (2) уравнение изгиба балки принимает вид:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + kw = P(x,t) - \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad x \in (0,l), \quad t > 0.$$

Введем обозначения $c^2 = EI/\rho S$, $\omega^2 = k/\rho S$, $f(x,t) = P(x,t)/\rho S$ и тогда получаем:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{c^2}w = f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{3}$$

где c – параметр, отвечающий за скорость распространения волны, ω

характеризует жесткость упругого основания.

Начальные условия соответствуют отсутствию начальных возмущений и скоростей:

$$w(x,0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{4}$$

Будем рассматривать граничные условия нескольких типов:

- Шарнирно опертая балка:

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0. \tag{5}$$

- Балка, закрепленная на концах:

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(l,t) = 0. \tag{6}$$

- Балка со свободными концами:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0,t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l,t) = 0. \tag{7}$$

1.3. Решение для произвольного нагружения

Решение уравнения (3) ищем при помощи метода разделения переменных $w(x,t) = U(x)V(t)$. В ходе решения получаем спектральную задачу с граничными условиями, соответствующими типу закрепления (5)–(7):

$$U^{IV} - \lambda^4 U = 0, \quad 0 < x < l. \tag{8}$$

Из этого уравнения, находим собственные значения и собственные функции, которые образуют ортогональный базис [13]. Для их записи удобно воспользоваться функциями Крылова, определяемые следующим образом [14]:

$$K_1(z) = (\operatorname{ch} z + \cos z)/2, \qquad K_2(z) = (\operatorname{sh} z + \sin z)/2,$$
$$K_3(z) = (\operatorname{ch} z - \cos z)/2, \qquad K_4(z) = (\operatorname{sh} z - \sin z)/2.$$

Тогда задача (8) будет иметь следующие решения:

- Для шарнирно опертой балки (5)

$$U_k = \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \pi k / l; \tag{9}$$

- для балки закрепленной на концах (6)

$$U_k = K_4(\lambda_k x) - \frac{K_4(\lambda_k l)}{K_3(\lambda_k l)} K_3(\lambda_k x), \tag{10}$$

  λ_k — корни трансцендентного уравнения $\mathrm{ch}(\lambda l)\cos(\lambda l) = 1$;

- для балки со свободными концами (7)

$$U_k = K_2(\lambda_k x) - \frac{K_4(\lambda_k l)}{K_3(\lambda_k l)} K_1(\lambda_k x), \tag{11}$$

  λ_k такие же, как для (10).

При помощи собственных функций решение может быть найдено в виде ряда Фурье $w(x,t) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) V_k(t)$. В ходе численных экспериментов было установлено, что при увеличении числа слагаемых решение с некоторого момента изменяется лишь незначительно. В силу этого факта достаточно ограничиться конечным числом слагаемых n в ряде Фурье. После некоторых преобразований получаем следующее решение для произвольной внешней нагрузки $f(x,t)$:

$$w(x,t) = c^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k(x)}{\Omega_k \|U_k\|^2} \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^l f(\xi,\eta) U_k(\xi) d\xi \right) \sin(\Omega_k (t-\eta)) d\eta, \tag{12}$$

где U_k определяются по формулам (9)–(11) в зависимости от типа граничных условий, $\Omega_k = \sqrt{\omega^2 + c^2 \lambda_k^4}$, $\|U_k\|^2 = \int_0^l \big(U_k(x)\big)^2 dx$.

1.4. Решение для импульсной нагрузки с внешним вибрационным полем

Предполагается, что разрушение происходит в точке $x = l/2$, в силу того, что рассматриваемые в данной работе импульсные нагрузки

приложены в центральной точке. Также будем считать, что поведение адгезионной зоны будет упругим вплоть до момента разрушения и перемещение в центральной точке будет пропорциональным разрывающему напряжению. Исходя из этих соображений можно использовать критерий инкубационного времени, записанный в следующем виде:

$$\max_{t\in[0,t_c]} \frac{1}{\tau} \int\limits_{t-\tau}^{t} w\left(\frac{l}{2}, \eta\right) d\eta \leqslant w_c, \tag{13}$$

где w_c соответствует критическому удлинению при квазистатическом нагружении.

В качестве внешней нагрузки рассматривается импульс бесконечной длительности, приложенный в центре адгезионной зоны при действии внешнего вибрационного поля:

$$f(x,t) = P\big(H(t)\delta\left(x - l/2\right) + r\sin\nu t\big), \tag{14}$$

где P — амплитуда нагрузки, $r \geqslant 0$ — отношение вибрационной амплитуды к амплитуде P, ν — частота вибрационного воздействия, $H(t)$ — функция Хевисайда, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Тогда из формулы (12) получим выражение для прогиба балки в центральной точке:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{l}{2}, t\right) = Pc^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k(l/2)}{\Omega_k \|U_k\|^2} \Bigg[\frac{U_k(l/2)}{\Omega_k}(1 - \cos(\Omega_k t)) + \\ + rg(\nu, \Omega_k, t) \int\limits_0^l U_k(\xi) d\xi \Bigg], \end{aligned} \tag{15}$$

где $g(\nu, \Omega, t)$ определяется следующим образом:

$$g(\nu, \Omega, t) = \begin{cases} \frac{\nu \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\nu t)}{\nu^2 - \Omega^2}, & \nu \neq \Omega; \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}\sin(\nu t) - t\cos(\nu t)\right), & \nu = \Omega. \end{cases}$$

Также рассмотрим в качестве внешней нагрузки импульс конечной

длительности и вибрационное воздействие:

$$f(x,t) = P\Big(\big(H(t) - H(t-t_0)\big)\delta\left(x - l/2\right) + r\sin\nu t\Big). \tag{16}$$

Тогда решение имеет вид:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{l}{2}, t\right) = Pc^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k(l/2)}{\Omega_k \|U_k\|^2} \Bigg[\frac{U_k(l/2)}{\Omega_k} \Big[\big(1 - \cos(\Omega_k t)\big) H(t) - \\ - \big[1 - \cos\big(\Omega_k (t - t_0)\big)\big] H(t - t_0) \Big] + rg(\nu, \Omega_k, t) \int\limits_0^l U_k(\xi) d\xi \Bigg]. \end{aligned} \tag{17}$$

2. Результаты

2.1. Значение критической амплитуды

Критическое значение P_c амплитуды P находится из условия достижения в (13) равенства. При этом используются равенства (15, 17) для соответствующих им типов нагружения. Обозначим за P_{0c} значение пороговой амплитуды при отсутствии вибрации ($r = 0$). Для построения зависимости относительной критической амплитуды P_c/P_{0c} от частоты внешнего вибрационного поля ν были использованы библиотеки NumPy и SciPy языка программирования Python, а визуализация данных производилась при помощи библиотеки Matplotlib. Для поиска максимума, входящего в (13) использован реализованный в NumPy алгоритм дифференциальной эволюции [15]. Рассматриваем следующие значения параметров: $n = 5$, $l = 1$ м, $c = 1$ м$^2/c$, $\omega = 0.5$ с$^{-1}$, $t_c = 25$ с. Для конечного импульса (16) считаем $t_0 = 0.1$ с.

Исходя из представленных на рис. 1 результатов, можно отметить значительное снижения пороговой амплитуды нагрузки при определенных значениях частот внешнего поля. Данный эффект наблюдается для обоих типов нагружения в случаях шарнирно опертой и закрепленной на концах балки. Тогда как для балки со свободными концами гармоническое поле не оказывает никакого существенного влияния на критическую амплитуду. Это происходит в силу того, что не учитывалось влияние растягивающих усилий, действующих вдоль оси балки. Балка со свободными концами в таком случаем никак не сопротивляются изгибу на концах.

2.2. Влияние параметров материала

Также рассмотрено, какое влияние на критические частоты будут оказывать различные значения параметров материала. Будем считать, что $\rho S = const$, тогда изменение изгибной жесткости EI соответствует изменению параметра c, а варьирование модуля упругого основания k — параметра ω. Рассмотрим шарнирно закрепленную балку при дей-

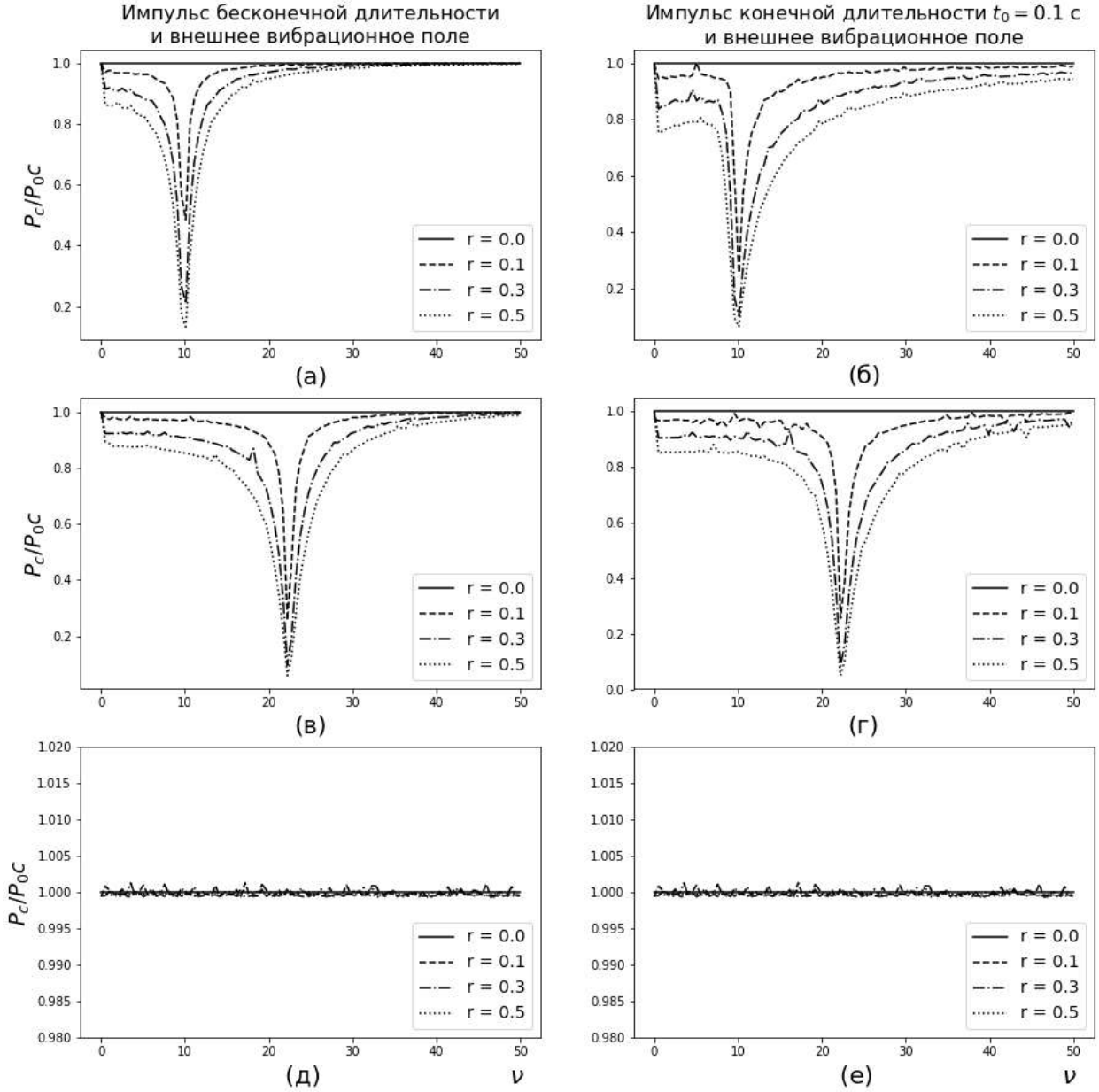


Рис. 1: Зависимость относительной критической нагрузки P_c/P_{0c} от частоты вибрационного поля ν. (а), (б) — случай шарнирного закрепления; (в), (г) — случай закрепленных концов; (д), (е) — случай свободных концов.

ствии нагрузки (14) и следующих значениях параметров: $n = 5$, $l = 1$ м, $t_c = 25$ с, $r = 0.3$. При изменении ω считаем $c = 1$ м$^2/c$, а для случая различных c берем $\omega = 0.5$ с$^{-1}$. Представленные на рис. 2 результаты позволяют сделать вывод о том, что увеличение и ω, и c приводит к повышению значения критической частоты, при которой происходит уменьшение критической амплитуды нагрузки.

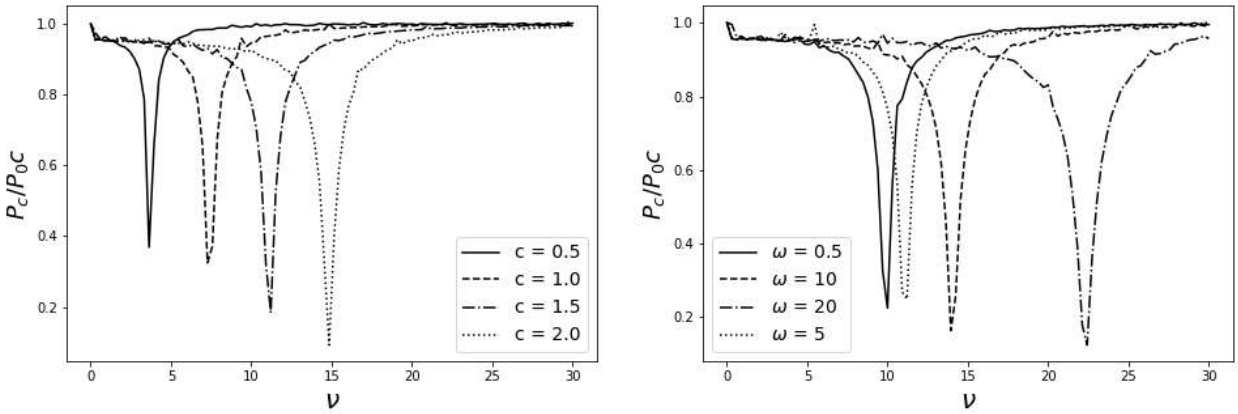


Рис. 2: Зависимость относительной критической нагрузки P_c/P_{0c} от частоты вибрационного поля ν. (а) — при различных значениях c, (б) — при различных значениях ω.

Заключение

В рамках данной работы дано обобщение эффекта представленного в работах [5, 6] на случай системы с изгибной жесткостью с различными граничными условиями. Показано, что имеется принципиальная возможность управления критическими характеристиками отрыва при помощи дополнительных высокочастотных фоновых воздействий. Установлено, что наличие гармонического воздействия определенной частоты даже незначительной амплитуды по сравнению с основным импульсом может существенно изменить критические значения параметров данного воздействия. Кроме того, исследован вопрос о влиянии значений параметров материала на величину пороговой амплитуды основной нагрузки. Увеличение изгибной жесткости или модуля упругого основания, приводит к повышению значения критической частоты, при которой наблюдается эффект снижения пороговой амплитуды.

Список литературы

[1] Дедков Г. В. Нанотрибология: экспериментальные факты и теоретические модели // Успехи физических наук. – 2000. – Т. 170. – №. 6. – С. 585-618.

[2] Dillard D. A. et al. A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications // Soft matter. – 2018. – Vol. 14. – No. 19. – P. 3669-3683.

[3] Мамонова М., Прудников В., Прудникова И. Физика поверхности. Теоретические модели и экспериментальные методы. // Litres, 2018.

[4] Zhao Y. P., Wang L. S., Yu T. X. Mechanics of adhesion in MEMS—a review // Journal of Adhesion Science and Technology. – 2003. – Vol. 17. – No. 4. – P. 519-546.

[5] Gorbushin N. A., Petrov Y. V. Effect of combined high-frequency and pulse-dynamic impact on adhesive-joint strength // Doklady Physics. – Pleiades Publishing, 2016. – Vol. 61. – No. 8. – P. 384-388.

[6] Gorbushin, N. A., Granichin, N. O., Logachev, A. N., Petrov, Y. V., Volkov, G. A. Destruction of the adhesion zone by combined pulsed-vibrational impacts // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – Vol. 36. – No. 1. – P. 114-120.

[7] Zhang Y., Zhao Y. P. Determining both adhesion energy and residual stress by measuring the stiction shape of a microbeam //Microsystem Technologies. – 2015. – Vol. 21. – No. 4 – P. 919-929.

[8] Novozhilov V. V. On the foundations of a theory of equilibrium cracks in elastic solids // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1969. – Vol. 33. – No. 5. – P. 777-790.

[9] Petrov Y. V., Morozov N. F. On the modeling of fracture of brittle solids // Journal of Applied Mechanics. – 1994. – Vol. 61. – No. 3. – P. 710-712.

[10] Morozov N., Petrov Y. Dynamics of fracture. // Springer Science & Business Media, 2013.

[11] Бидерман В. Л. Теория механических колебаний // М.: Высшая школа. – 1980. – 408 с.

[12] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – Учебное пособие для вузов. 2-е изд., – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.

[13] Тимошенко С. П. Курс теории упругости./Ред. Григолюк Э.И. – К.: Наукова думка. – 1972.

[14] Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании // Л.: АН СССР. – 1931. - 154 с.

[15] Storn R., Price K. Differential evolution–a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // Journal of global optimization. – 1997. – Vol. 11. – No. 4. – P. 341-359.

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Мясниковой Анастасии Юрьевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Преобразования функциональных интегралов» являются: теорема 3.1.1, теорема 3.3.1, глава 4.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 по 20 мая 2019 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом указанные выше теоремы являются уточнением теорем, изложенных в статье [4].
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Смоляновым Олегом Георгиевичем, профессором кафедры теории функций и функционального анализа МГУ им М.В. Ломоносова.
- Проведено выступление на научном семинаре профессора Смолянова Олега Георгиевича.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором, предоставляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоялась 28.05.2019. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись

Мясникова Анастасия Юрьевна 31 мая 2020 г. Москва, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО
АНАЛИЗА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Выполнила студентка
604 группы
Мясникова Анастасия Юрьевна

_____
подпись студента

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. Смолянов О.Г.

_____
подпись научного руководителя

Москва
2019

Содержание

1 Введение. **2**

2 Определения и вспомогательные факты. **2**

2.1 Обобщенные меры и их преобразования Фурье. 2

2.2 Дифференцируемость обобщенных мер и свойства их производных. 3

2.3 Обобщенная мера Фейнмана. 6

2.4 Инфинитезимальная теорема Рамера. 7

3 Явный вид якобиана замены переменных. **9**

3.1 Общий случай. 9

3.2 Логарифмическая производная обобщенной меры Фейнмана. 10

3.3 Якобиан замены переменных для обобщенной меры Фейнмана. 11

4 Вычисление якобиана замены переменных для гауссовой меры. **12**

4.1 Альтернативный способ вычисления. 12

5 Список литературы. **15**

1 Введение.

Функциональным интегралом называется интеграл по бесконечномерному пространству, при этом интегрирование может производиться как по счетно-аддитивным, так и по обобщенным мерам (определение понятия обобщенной меры приведено далее). Под преобразованием функциональных интегралов далее понимаются бесконечномерные аналоги формул, связанных с заменами переменных интегрирования.

Преобразования функциональных интегралов используются в объяснении квантовых аномалий. Как отмечается во введении [9], квантовой аномалией называется потеря инвариантности относительно некоторых преобразований при квантовании классической гамильтоновой или лагранжевой системы. Для описания этого явления используются интегрирование по обобщенной мере Фейнмана.

2 Определения и вспомогательные факты.

Многие из приведенных в этой главе определений и теорем содержатся в [2] и [3]

2.1 Обобщенные меры и их преобразования Фурье.

Пусть E - локально выпуклое пространство. Всюду далее, если не оговорено противное, будем подразумевать, что все локально выпуклые пространства вещественные и сепарабельные.

Обозначение 2.1.1. E' - пространство линейных функционалов на E, наделенное слабой топологией $\sigma(E', E)$.

Определение 2.1.1. Определим действие функционала $g \in E'$ на $x \in E$ как $\langle g, x\rangle = \langle x, g\rangle = g(x)$.

Обозначение 2.1.2. S - комплексное локально выпуклое пространство некоторых борелевских функций на E такое, что S содержит все функции вида $\varphi_g(x) = e^{ig(x)}$.

Последнее условие необходимо для определения далее преобразования Фурье обобщенной меры.

Определение 2.1.2. Обобщенной мерой Φ или распределением называется линейный функционал на S.

Определение 2.1.3. Преобразованием Фурье обобщенной меры Φ называется отображение $\widetilde{\Phi} : g \in E' \mapsto \Phi(\varphi_g) \in \mathbb{C}$.

Далее будем предполагать, что всякая обобщенная мера единственным образом восстанавливается по своему преобразованию Фурье. Более подробно этот вопрос рассматривается в [2].

2.2 Дифференцируемость обобщенных мер и свойства их производных.

Всюду далее S_1 - подпространство в S.

Определение 2.2.1. Функция $f : E \to \mathbb{C}$ называется S_1-мультипликатором, если для любой функции $\varphi \in S_1$ $f\varphi \in S$, где произведение f и φ понимается как поточечное.

Обозначение 2.2.1. $\mathcal{P}(S_1)$ - линейное пространство всех S_1-мультипликаторов.

Определение 2.2.2. Пусть f - S_1-мультипликатор, $\nu \in S'$. Тогда $f\nu$ - функционал на S_1, определяемый условием: для любой функции $\varphi \in S_1$ $\langle f\nu, \varphi\rangle = \langle \nu, f\varphi\rangle$.

Определение 2.2.3. Отображение $F : E \to E$ называется S_1-допустимым, если для любой функции $\psi \in S$ выполняется $\psi \circ F \in S$ и отображение $\psi \mapsto \psi \circ F$ непрерывно.

Определение 2.2.4. Пусть отображение $F : E \to E$ - S-допустимое. Тогда для всякой обобщенной меры $\nu \in S'$ определена мера $\nu F^{-1} \in S'$, называющаяся образом меры ν, такая, что для любой функции $\psi \in S$ выполняется $\langle \nu F^{-1}, \psi\rangle = \langle \nu, \psi \circ F\rangle$.

Определение 2.2.5. Отображение $g : (a, b) \in \mathbb{R} \to S'$ называется S_1-дифференцируемым в точке $t_0 \in (a, b)$, если для всякой функции $\varphi \in S_1$ функция $t \in (a, b) \mapsto \langle g(t), \varphi\rangle \in \mathbb{R}$ дифференцируема в точке t_0.

Определение 2.2.6. Отображение g называется S_1-дифференцируемым в смысле Фомина в точке t_0, если в условиях определения 2.2.5 существует функция $\rho(t_0, g) \in \mathcal{P}(S_1)$ такая, что $g'(t_0) = \rho(t_0, g)g(t_0)$. Тогда функция $\rho(t_0, g)$ называется логарифмической производной отображения g в

точке t_0.

Обозначение 2.2.2. $F : \mathbb{R} \times E \to E$ - отображение такое, что $F(t, \cdot) : g \in E \mapsto F(t, g) \in E$. При этом будем считать, что при всех $t \in \mathbb{R}$ отображение S-допустимо и $F(0, \cdot) = I$.

Определение 2.2.7. Обобщенная мера $\nu \in S'$ называется S_1-дифференцируемой вдоль F, если отображение $f_F^\nu : t \in \mathbb{R} \mapsto \nu F(t, \cdot)^{-1} \in S'$ S_1-дифференцируемо в точке $t = 0$.

Аналогично определяется обобщенная мера ν, дифференцируемая в смысле Фомина вдоль F и логарифимическая производная $\rho(0, f_F^\nu)$.

Обозначение 2.2.3. $\rho(0, f_F^\nu) = \beta_F^\nu$

Обозначение 2.2.4. $\vec{E}$ - линейное пространство векторных полей на E.

Обозначение 2.2.5. $F_h(t, x) = x - th(x)$, где $h \in \vec{E}$ и $F_h(t, x) : (t, x) \in (\mathbb{R} \times E) \mapsto E$.

Определение 2.2.8. Пусть все отображения $F_h(t, \cdot)$ S-допустимы. Тогда если обобщенная мера S_1-дифференцируема вдоль F_h, то она называется S_1-дифференцируемой вдоль векторного поля h.

Обозначение 2.2.6. Обозначим $\nu' h$ производную ν вдоль h (производную ν вдоль F_h).

Обозначение 2.2.7. $\beta_{F_h}^\nu = \beta_h^\nu$

Обозначение 2.2.8. $\nu F_h(t, \cdot)^{-1} = \nu_{th}$

Обозначение 2.2.9. Если $h(x) = h_0$ для всех $x \in E$, то используется обозначение $\nu_{th} = \nu_{th_0}$.

Обозначение 2.2.10. $\varphi' h$ - производная в $t = 0$ функции

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\cdot + th(\cdot)) \in (S, \sigma(S, S')).$$

В статье [3] отмечается, что в приведенных выше условиях $\varphi' h$ совпадает с обычной производной φ вдоль векторного поля h.

Предложение 2.2.1. Пусть обобщенная мера $\nu \in S'$ S_1-дифференцируема вдоль h, тогла ν имеет производную $\nu' h_0$ тогда и только тогда, когда $\forall \varphi \in S_1$ справедливо равенство

$$\langle \nu' h, \varphi \rangle = -\langle \nu, \varphi' h \rangle. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть ν имеет производную $\nu' h_0$, тогда

$$-\langle \nu, \varphi' h \rangle = \lim_{t\to 0} \langle \nu, \frac{\varphi(\cdot - th) - \varphi(\cdot)}{t} \rangle = \lim_{t\to 0} \langle \nu, \frac{F_h \circ \varphi - \varphi(\cdot)}{t} \rangle =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\langle \nu, F_h \circ \varphi \rangle - \langle \nu, \varphi \rangle) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\langle \nu F_h^{-1}, \varphi \rangle - \langle \nu, \varphi \rangle) = \lim_{t\to 0} \langle \frac{\nu F_h^{-1} - \nu}{t}, \varphi \rangle =$$

$$= \lim_{t\to 0} \langle \frac{\nu_{th} - \nu}{t}, \varphi \rangle = \langle \nu' h, \varphi \rangle.$$

Последнее равенство верно в силу дифференцируемости по условию обобщенной меры ν вдоль h. Чтобы доказать утверждение в обратную сторону, также используем вышеприведенные равенства. С одной стороны,

$$-\langle \nu, \varphi' h \rangle = \lim_{t\to 0} \langle \frac{\nu_{th} - \nu}{t}, \varphi \rangle.$$

С другой же, по условию

$$\langle \nu' h, \varphi \rangle = -\langle \nu, \varphi' h \rangle.$$

Таким образом, $\frac{\nu_{th} - \nu}{t} \to \nu' h$ в топологии $\sigma(S', S_1)$ при $t \to 0$, что по определению и означает S_1-дифференцируемость обобщенной меры ν.

Определение 2.2.9. Линейное подпространство H локально выпуклого пространства E называется гильбертовым, если в H задана гильбертова норма и H полно относительно неё и каноническое вложение $H \to E$ непрерывно.

Определение 2.2.10. Обобщенная мера $\nu \in S'$ называется S_1-дифференцируемой вдоль гильбертова подпространства H, если ν дифференцируема вдоль каждого элемента этого подпространства и отображение $h \in H \mapsto \nu' h \in S'$ непрерывно относительно топологи $\sigma(S', S_1)$.

Предложение 2.2.2. Пусть $\nu \in S'$ - обобщенная мера, $\widetilde{\nu}$- её преобразование Фурье, $h_0 \in E$, тогда справедливы утверждения:

1. Если ν S_1-дифференцируема вдоль h_0 , то для любого функционала $g \in E'$ справедливо равенство $\widetilde{\nu' h_0}(g) = -i\langle h_0, g \rangle \widetilde{\nu}(g)$.

2. Если существует обобщенная мера $\eta \in S'$ такя, что $\widetilde{\eta} = i\langle h_0, \cdot \rangle \widetilde{\nu}(\cdot)$, то ν дифференцируема вдоль h_0 и $\eta = -\nu' h_0$.

В следующих утверждениях отображение $g \in E' \mapsto \varphi_g \in (S, \sigma(S, S'))$ дифференцируемо по каждому направлению, а $g_0 \in E'$.

3. Если $i\langle \cdot, g_0\rangle \in \mathcal{P}(S1, S)$, $\mu = i\langle \cdot, g_0\rangle \nu$, то для всякого $\nu \in S'$ функция $\widetilde{\nu}$ дифференцируема вдоль g_0 и $\forall g \in E'$ справедливо равенство

$$\widetilde{\nu}'(g)g_0 = \widetilde{\mu}(g). \tag{2}$$

4. Пусть $\widetilde{\nu}$ дифференцируема вдоль g_0, тогда $i\langle \cdot, g_0\rangle \in \mathcal{P}(S1, S)$ и справедливо (2).

Доказательство.

1. В силу определения преобразования Фурье обобщенной меры и предложения 2.2.1

$$\widetilde{\nu' h_0}(g) = \langle \nu' h_0, \varphi_g\rangle = -\langle \nu, \varphi_g' h_0\rangle = \lim_{t\to 0}\langle \nu, \frac{\varphi_g(g - th_0) - \varphi_g(g)}{t}\rangle =$$
$$= \lim_{t\to 0}\langle \nu, \frac{e^{i(g - t\langle h_0, g\rangle)} - e^{ig}}{t}\rangle = \lim_{t\to 0}\langle \nu, \frac{e^{ig}(e^{-it\langle h_0, g\rangle} - 1)}{t}\rangle =$$
$$= -\langle \nu, i\langle h_0, g\rangle \varphi_g\rangle = -i\langle h_0, g\rangle\langle \nu, \varphi_g\rangle = -i\langle h_0, g\rangle \widetilde{\nu}(g).$$

2. С одной стороны, в силу существования обобщенной меры η: $\widetilde{\eta} = i\langle h_0, \cdot\rangle \widetilde{\nu}(\cdot) = \langle \eta, \varphi_g\rangle$. С другой же, в соответствии с выкладками выше справедливо $i\langle h_0, \cdot\rangle \widetilde{\nu}(\cdot) = \langle \nu, \varphi_g' h_0\rangle$.

3. Вычислим производную $\widetilde{\nu}(g)$ по направлению g_0.

$$\widetilde{\nu}'(g)g_0 = \langle \nu, \varphi_g(\cdot)\rangle'(g)g_0 =$$
$$= \langle \nu, i\langle \cdot, g_0\rangle \varphi_g(\cdot)\rangle = \langle i\langle \cdot, g_0\rangle \nu, \varphi_g(\cdot)\rangle = \widetilde{\mu}(g). \tag{3}$$

4. Утверждение следует из равенств (3).

2.3 Обобщенная мера Фейнмана.

Определение 2.3.1. Пусть B - линейное симметричное непрерывное отображение $E' \to E$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ и $a \in E$. Обобщенной α-мерой Фейнмана с ковариационным оператором B и средним значением a называется обобщенная мера $\Phi_{B,a,\alpha}$ с преобразованием Фурье вида

$$\widetilde{\Phi}_{B,a,\alpha} = e^{\frac{\alpha\langle Bg,g\rangle}{2}+i\langle g,a\rangle}.$$

Определение 2.3.2. Обобщенная мера $\Phi_{B,a,\alpha}$ называется гауссовой, если $\alpha = -1$ и оператор B положительный.

Определение 2.3.3. Обобщенная мера $\Phi_{B,a,\alpha}$ называется классической мерой Фейнмана, если $\alpha = i$ и оператор B положительный.

Определение 2.3.4. Обобщенная мера $\Phi_{B,a,\alpha}$ называется центрированной, если $a = 0$.

2.4 Инфинитезимальная теорема Рамера.

Теорема 2.4.1 приведена впервые в [3] под номером 3.1 и названием "инфинитезимальная теорема Рамера". Ниже приведено доказательство утверждения, полученное О.Г. Смоляновым и А. Труменом.

В теоремах 2.4.1. и 3.1.1 преполагаем, что ν - элемент пространснства S',E - ЛВП, H - гильбертово подпространство E и распределение ν дифференцируемо вдоль H. Введём обозначение: $(\cdot,\cdot)_H$ - скалярное произведение в пространстве H. Если $E = E_1 \times E_2$, f -функция заданная на E, то сиволами f_1', f_2' и f_{12}' обозначаются соответствующие частные производные по Гато.

Теорема 2.4.1 Пусть $F : \mathbb{R} \times E \to E$ - отображение такое, что для каждого t из некоторой окрестности V некоторой точки $t_0 \in \mathbb{R}$ отображение $F(t,\cdot)$ - S-допустимо и имеет дважды дифференцируемое обратное отображение $T(t,\cdot)$. Также пусть векторное поле $k_t \in \vec{E}$, определенное в V формулой

$$T_1'(t,\cdot) = k_t(T(t,\cdot)),$$

таково, что $k_t(E) \subset H$ и производная поля k_t вдоль H в каждой точке $x \in E$ является оператором Гильберта-Шмидта в H. Пусть существует ортонормированный базис (e_n) в H и элемент $\eta \in \mathcal{P}(S_1, S)$ такие, что для каждой функции $\varphi \in S_1$ справедливо равенство

$$\eta\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}[\beta^\nu(e_n, T(t_0,\cdot))(e_n, T_1'(t_0,\cdot))_H + (T_{12}''(t_0,\cdot)T_2'(t_0,\cdot)^{-1}e_n, e_n)]\varphi.$$

Тогда функция $f_F^\nu : t \in \mathbb{R} \to \nu F(t,\cdot)^{-1} \in S'$ дифференцируема в точке t_0 и $\rho(t_0, f_F^\nu) = \eta$.

Доказательство:

В силу предложения 2.2.1 и нижеследующего разложения

$$\varphi' h = \varphi' \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n)_H e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n)_H \varphi' e_n,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall h \in H$ и $\forall \varphi \in S_1$ справедливо равенство,

$$\langle \varphi' h, \nu \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle (h, e_n)_H \nu, \varphi' e_n \rangle = -\sum_{n=1}^{\infty} [\langle (h' e_n, e_n)_H \nu, \varphi \rangle + \langle (h, e_n)_H \nu' e_n, \varphi \rangle] =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} [\langle (h' e_n, e_n)_H \nu, \varphi \rangle + (h, e_n)_H \langle \beta(e_n, \cdot) \nu, \varphi \rangle],$$

которое в силу предложения 2.2.1 означет, что

$$\langle \nu' h, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} [\langle (h' e_n, e_n)_H \nu, \varphi \rangle + (h, e_n)_H \langle \beta(e_n, \cdot) \nu, \varphi \rangle].$$

Определим векторное поле h, положив $h(\cdot) = G_1'(0, \cdot)$, где $G(t, \cdot)$ - отображение $\mathbb{R} \times E \to E$ такое, что существет отображение $G_{12}''(t, \cdot)$. Тогда

$$\langle \nu' G, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} [\langle (G_{12}'' e_n, e_n)_H \nu, \varphi \rangle + (G_1', e_n)_H \langle \beta(e_n, \cdot) \nu, \varphi \rangle].$$

Теперь применим это равенство в случае $G(t, \cdot) = T(t_0 + t, F(t_0, \cdot))$. Получаем,

$$\langle (G_{12}'' e_n, e_n)_H \nu, \varphi \rangle = \langle (T_{12}''(t_0, \cdot) T_2'(t_0, \cdot)^{-1} e_n, e_n) \nu, \varphi \rangle,$$

$$(G_1', e_n)_H \langle \beta(e_n, \cdot) \nu, \varphi \rangle = \langle \beta^{\nu}(e_n, T(t_0, \cdot)) \nu, \varphi \rangle (e_n, T_1'(t_0, \cdot))_H.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Замечание. В естественных обозначениях значение логарифмической производной f_F^{ν} в точке t_0 представимо в виде:

$$\rho(t_0, f_F^{\nu})(x) = tr_H[\beta^{\nu}(\cdot, T(t_0, x)) \otimes T_1'(t_0, x) + T_{12}''(t_0, x) T_2'(t_0, x)^{-1}].$$

Замечание. Стоит отметить , что если A - непрерывный линейный оператор в гильберотовом пространстве, то det A=exp tr ln A.

3 Явный вид якобиана замены переменных.

Теоремы 3.1.1 и 3.3.1 являются уточнениями результатов статьи [3], приведенных в ней под номерами 3.2 и 3.3.

3.1 Общий случай.

Теорема 3.1.1. Пусть выполняются условия теоремы 2.4.1 и, кроме того, $T'(t,\cdot)$ - ядерный оператор, $F(0,x) = I$, а также для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется функция $\eta_t \in \mathcal{P}(S_1, S)$ такая, что для любой $\varphi \in S_1$

$$\eta_t(\cdot)\varphi = detT_2'(t,\cdot)exp[\int\limits_0^t tr_H[\beta^\nu(\cdot, T(\tau,\cdot)) \otimes T_1'(\tau,\cdot)]d\tau]\varphi,$$

где произведение определителя и экспоненты определено равенством

$$detT_2'(t,\cdot)exp[\int\limits_0^t tr_H[\beta^\nu(\cdot, T(\tau,\cdot)) \otimes T_1'(\tau,\cdot)]d\tau]\varphi =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\{exp\sum_{n=1}^k ln(T_2'(t,\cdot)) \times exp\int\limits_0^t \sum_{n=1}^k [\beta^\nu(e_n, T(\tau,\cdot))(e_n, T_1'(\tau,\cdot))_H]d\tau]\}\varphi.$$

Тогда $\nu F(t,\cdot)^{-1} = \eta_t\nu$.

Доказательство. Функция f_F^ν по определению удовлетворяет уравнению

$$(f_F^\nu)'(t) = \rho(t, f_F^\nu)f_F^\nu.$$

Решая дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получаем

$$\nu F(t,\cdot)^{-1} = f_F^\nu = exp[\int\limits_0^t \rho(\tau, f_F^\nu)d\tau] =$$

$$= exp[\int\limits_0^t tr_H[\beta^\nu(\cdot, T(\tau,x)) \otimes T_1'(\tau,x) + T_{12}''(\tau,x)T_2'(\tau,x)^{-1}]d\tau] =$$

$$= exp\{\int_0^t tr_H[\beta^\nu(\cdot, T(\tau,x))\otimes T_1'(\tau,x)]d\tau\}+exp\{\int_0^t tr_H[T_{12}''(\tau,x)T_2'(\tau,x)^{-1}]d\tau\}.$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое

$$exp\{\int_0^t tr_H[T_{12}''(\tau,x)T_2'(\tau,x)^{-1}]d\tau\} = exp\{\int_0^t tr_H[\frac{d}{d\tau}T_1'(\tau,x)\circ T_2'(\tau,x)^{-1}]d\tau\} =$$

$$= exp\{\int_0^t tr_H[\frac{d}{d\tau}lnT_2'(\tau,x)]d\tau\} = exp\{tr[lnT_2'(t,x)]\} = detT_2'(t,x).$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Естественно называть функцию η_t якобианом замены переменных, связывающим функциональный интеграл по мере и по её образу.

3.2 Логарифмическая производная обобщенной меры Фейнмана.

Для удобства приведем более полную версию доказательства факта 3.2.1, чем в [3].

Теорема 3.2.1. В обозначениях первой главы допустим, что при любом $g \in E'$ функция $\langle g, \cdot - a\rangle \in \mathcal{P}(S_1, S)$. Тогда обобщенная мера Фейнмана $\Phi_{B,a,\alpha}$ S_1-дифференцируема в смысле Фомина вдоль любого элемента $h \in B(E')$ и её логарифмическая производная вдоль h определяется формулой

$$\beta^\nu(h,\cdot) = \frac{1}{\alpha}\langle B^{-1}h, \cdot - a\rangle.$$

Доказательство.

Для удобства обозначим меру $\langle B^{-1}h, \cdot - a\rangle\nu = \mu$

Согласно пункту 3 предложениия 2.2.2 функция $\widetilde{\Phi}$ дифференцируема и для любого $h \in B(E')$ справедливо

$$\frac{1}{\alpha}\widetilde{\mu} = \frac{1}{\alpha}[i\widetilde{\nu}'(B^{-1}h) - \langle B^{-1}h, a\rangle\widetilde{\nu}].(2)$$

Вычислим производную функции $\widetilde{\nu}$ вдоль направления $B^{-1}h$. Обозначим $B^{-1}h = k$.

$$\widetilde{\nu}'k = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha\langle B(g+tk),g+tk\rangle/2+i\langle g+tk,a\rangle} - e^{\alpha\langle Bg,g\rangle/2+i\langle g,a\rangle}}{t} =$$

$$= e^{\alpha\langle Bg,g\rangle/2+i\langle g,a\rangle}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha\langle Bg,tk\rangle}\cdot e^{\alpha\langle Btk,tk\rangle/2}\cdot e^{i\langle tk,a\rangle} - 1}{t} =$$

$$= \widetilde{\nu}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{(1+\alpha t\langle Bg,k\rangle + ...)(1+\frac{\alpha t^2}{2}\langle Bk,k\rangle + ...)(1+it\langle k,a\rangle + ...) - 1}{t} =$$

$$= \widetilde{\nu}\lim_{t\to 0}\frac{\alpha t\langle Bg,k\rangle + it\langle k,a\rangle + ...}{t} = \widetilde{\nu}\cdot(\alpha\langle Bg,k\rangle + i\langle k,a\rangle) =$$

$$= \widetilde{\nu}\cdot(\alpha\langle Bg,B^{-1}h\rangle + i\langle B^{-1}h,a\rangle) = \widetilde{\nu}\cdot(\alpha\langle h,\cdot\rangle + i\langle B^{-1}h,a\rangle).$$

Подставим выражение производной преобразования Фурье в (2), получим

$$\frac{1}{\alpha}\widetilde{\mu} = -i\langle h,\cdot\rangle\widetilde{\nu}.$$

В силу пункта 1 предложения 2.2.2 правая часть это равенства равна $\widetilde{\nu'h}$. Таким образом, утверждение теоремы следует из единственности обобщенной меры, имеющей данное преобразование Фурье.

3.3 Якобиан замены переменных для обобщенной меры Фейнмана.

Теорема 3.3.1

Пусть E - гильбертово пространство, ν - обобщенная мера Фейнмана такая, что в условиях определения 14 $\alpha = i$, $B = I$, $a = 0$. Пусть также выполняются условия теоремы 3.1.1. Тогда $\nu F(t,\cdot)^{-1} = \delta(t,\cdot)\nu$, где

$$\delta(t,x) = detT_2'(t,x)exp[i\cdot tr_H(x\otimes x - T(t,x)\otimes T(t,x))].$$

При этом произведение определителя и экспонеты вводится аналогично теореме 3.1.1.

Доказательство.

В доказательстве используются равенства, приведенные в теоремах 3.1.1 и 3.2.1.

$$\delta(t,x) = detT_2'(t,\cdot)exp[\int\limits_0^t tr_H[\beta^\nu(\cdot, T(\tau,\cdot)) \otimes T_1'(\tau,\cdot)]d\tau]\varphi =$$

$$= detT_2'(t,\cdot) \times \lim_{k\to\infty}[exp\int\limits_0^t \sum_{n=1}^k [\beta^\nu(e_n, T(\tau,\cdot))(e_n, T_1'(\tau,\cdot))_H]d\tau] =$$

$$= detT_2'(t,\cdot) \times \lim_{k\to\infty}[exp\int\limits_0^t \sum_{n=1}^k [-i(e_n, T(\tau,\cdot))(e_n, T_1'(\tau,\cdot))_H]d\tau] =$$

$$= detT_2'(t,x)exp[i \cdot tr_H(T(t,x) \otimes T(t,x)|_0^t) =$$

$$= detT_2'(t,x)exp[i \cdot tr_H(x \otimes x - T(t,x) \otimes T(t,x))].$$

Что и требовалось доказать.

4 Вычисление якобиана замены переменных для гауссовой меры.

Вышеприведенный способ вычисления якобиана замены переменных является не единственным. В некоторых частных случаях бывает проще использовать альтернативные методы, стоит также отметить, что формула не подходит для отображений не зависящих от вещественного параметра, так как в этом случае определитель будет обращаться в нуль. Приведем пример такого отображения и способ вычисления образа гауссовой меры.

4.1 Альтернативный способ вычисления.

Пусть H - гильбертово ЛВП. μ - центрированная гауссова мера с корреляционным оператором B. B имеет вид $B(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 ...)$,

при этом $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ $\lambda_j > 0$. В таком случае пробные функции имеют вид $g_y(x) = e^{i(x,y)}$. Мера определена из $lin\ span\ \{g_x\}_{x \in H}$ и действует в $\mathbb{C}$.

Рассмотрим преобразование обобщенной меры, порождаемое преобразованием пространства вида $T : H \to H$, $Tx = x + Kx$. K - оператор типа B: ядерный, диагональный и имеет вид $K(x_1, x_2, ...) = (k_1 x_1, k_2 x_2 ...)$. Преобразование Фурье образа меры при отображении T имеет вид

$$\widetilde{\mu \circ T^{-1}}(y) = \int\limits_H e^{i(x,y)} (\mu T^{-1})(dx).$$

Сделаем замену переменных вида $x = Tz$, $(\mu T^{-1})(dx) = dz$ и заметим, что оператор T самосопряженный. Тогда

$$\widetilde{\mu \circ T^{-1}}(y) = \int\limits_H e^{i(Tz,y)} \mu(dz) = \int\limits_H e^{i(Ty,z)} \mu(dz) = \widetilde{\mu}(t) = e^{-(Bt,t)/2},$$

где $t = Ty$. При этом

$$(Bt, t) = (By + BKy, y + Ky) = ((B + 2BK + BK^2)y, y).$$

Таким образом, с одной стороны

$$\widetilde{\mu \circ T^{-1}}(y) = e^{-(By,y)/2} \cdot e^{-((2BK+BK^2)y,y)/2} = \widetilde{\mu}(y) \cdot \widetilde{\nu}(y) = \widetilde{\mu * \nu},$$

где мера ν -гауссова с корреляционным оператором $A = 2BK + BK^2$ и нулевым средним. То есть

$$\mu \circ T^{-1}(y) = \mu * \nu.$$

С другой стороны,

$$\widetilde{\mu \circ T^{-1}}(y) = e^{-((B+2BK+BK^2)y,y)/2} = \widetilde{\eta}(y),$$

где мера η -гауссова с корреляционным оператором $C = B + 2BK + BK^2 = B(K + I)^2$ и нулевым средним. То есть

$$\mu \circ T^{-1}(y) = \eta(y).$$

Вычислим якобиан замены $J(z)$ как отношение обобщенных плотностей соответствующих гауссовых мер:

$$p_\mu(z) = \frac{e^{-(z,B^{-1}z)/2}}{\int\limits_H e^{-(z,B^{-1}z)/2}},$$

$$p_\eta(z) = \frac{e^{-(z,C^{-1}z)/2}}{\int\limits_H e^{-(z,C^{-1}z)/2}}.$$

$$J(z) = \frac{p_\eta}{p_\mu}(z) = e^{(z,(B^{-1}-C^{-1})z)/2} \cdot \frac{\int\limits_H e^{-(z,C^{-1}z)/2}\eta(dz)}{\int\limits_H e^{-(z,B^{-1}z)/2}\mu(dz)} =$$

$$= e^{(z,(B^{-1}-C^{-1})z)/2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi)^{n/2}(detB)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}(detC)^{1/2}} =$$

$$= e^{(z,(B^{-1}-C^{-1})z)/2} \cdot \frac{\sqrt{detB}}{\sqrt{detC}} = e^{(z,(B^{-1}-C^{-1})z)/2} \cdot \frac{1}{det(K+I)}$$

Оператор $K+I$ - ядерный, а значит, определитель существует. Аналогично оператор $B^{-1}-C^{-1}$ ядерный, как сумма ядерных операторов.

Следствие 4.1.1 В предположениях раздела 4.1 пусть функция $f(x)$ интегрируема по мере μ. Тогда

$$\int\limits_E f(Tx)\mu(dx) = \int\limits_E f(z)(\mu \circ T^{-1})(dz) = \int\limits_E f(z)J(z)\mu(dz).$$

В таких условиях естественно называть функцию $J(z)$ якобианом замены переменных.

5 Список литературы.

[1] В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ. Москва-Ижевск, 2009 и 2011 (два издания).

[2] О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе. Континуальные интегралы. Москва, Издательство Ленанд, 2015 (2-ое издание).

[3] О.Г. Смолянов, А. Трумен. Формулы замены переменных для фейнмановских псевдомер//Теор. и матем. физ. 1999. Т. 119, №3. С. 355-367.

[4] В.И. Авербух, О.Г. Смолянов, С.В. Фомин. Дифференцируемые меры. Труды Московского математического общества. том 24 (1971), с. 133-174.

[5] O.G. Smolyanov, H. von Weizsacker. Differential families of measures. J. of Functional Analysis. 1993. 118, P. 454-476.

[6] O.G. Smolyanov, H. von Weizsacker. Changes of measures and their logarithmic derivatives under smooth transformations. Comptes Rend. Acad.Sci.Paris, 1995. T.321, ser.1, P. 103-108.

[7] Х. фон Вайцзеккер, О.Г. Смолянов. Дифференциальные формы на бесконечномерных пространствах и аксиоматический подход к формуле Стокса// Докл. РАН. 1999. Т. 367, №2. С. 151-154.

[8] Х. фон Вайцзеккер, О.Г. Смолянов. Связи между гладкими мерами и их логарифмическими градиентами и производными. // Докл. РАН. 1999. Т. 369, №2. С. 158-162.

[9] Дж. Гоф, Т.С. Ратью, О.Г. Смолянов. Теорема Нетер и квантовые аномалии. // Докл. РАН. 2017. Т. 369, №3. С. 1-5.

Приложение
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Плиева Николая Владимировича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием "Слабые пределы вероятностных мер в статистической механике" являются: Следствие 4.1, Замечание 4.2, Пример 4.1, Пример 4.2, Предложение 5.1, Лемма 5.1, Теорема 5.5.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Выступление на научно-исследовательском семинаре механико-математического факультета, руководителями которого являются Смолянов Олег Георгиевич и Шавгулидзе Евгений Тенгизович
- Консультации с моим научным руководителем Смоляным Олегом Георгиевичем
- Общение с рецензентом Калиниченко Артемом Александровичем
- Изучение литературы на связанные с моей работой темы (Статистическая механика, грубая и тонкая энтропия, квантовая энтропия).

По результатам проделанной работы, я могу утверждать, что мои результаты новые и не описаны в других источниках.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 11 июня 2020 года. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись Плиев Николай Владимирович

31.05.2020
Москва, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Слабые пределы вероятностных мер в статистической механике

Выполнил студент
604 группы
Плиев Николай Владимирович

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор,
Смолянов Олег Георгиевич

Москва
2020

Содержание

1 Введение 2

2 Определения 3

3 Тонкая и грубая энтропии в классической статистической механике 8

4 Информационная энтропия и квазимикроканонические состояния 11

5 Слабые пределы 17

Литература 23

1 Введение

В работе рассматривается слабая сходимость начального состояния квантовой системы к некоторому предельному состоянию. Для классических (гамильтоновых) систем слабая сходимость была введена в работах В. В. Козлова и подробно изучена в работах [4] и [5]. Для квантового случая сходимость рассмотрена в работах В. В. Козлова и О. Г. Смолянова [8] и [9]. Эти результаты связаны с определениями информационной энтропии и F-энтропии в квантовой статистической механике, также введенными в этих работах. В предлагаемой работе обсуждается аналогия между энтропией и предельным распределением в классической механике и теми же понятиями в квантовой механике.

В классической механике можно рассматривать так называемые тонкую и грубую энтропии; связь между ними подробно изучена в работах [4] и [5]. Понятие тонкой энтропии рассматривал Гиббс. Именно он впервые отметил, что тонкая энтропия является интегралом движения, поэтому не может считаться аналогом термодинамической энтропии, которая должна возрастать.

В дальнейшем П. и Т. Эренфесты развили идеи Гиббса и предложили "огрубление"энтропии Гиббса путем усреднения распределения по элементам разбиения фазового пространства. Интересно, что Гиббс, по существу, пытался доказать возрастание грубой энтропии, однако его доказательство было ошибочным, что более подробно раскрыто в монографии [10] и также отмечается в статьях В. В. Козлова и Д. В. Трещева. Несмотря на это, можно утверждать о возрастании грубой энтропии в другом смысле, связанном со слабым пределом начального распределения, существование которого показано в [4]. Если гамильтонова система квазиоднородна, а также если поставить определенные ограничения на фазовое пространство, то верно следующее: если тонкая энтропия начального состояния строго меньше тонкой энтропии предельного состояния, то то же неравенство верно и для грубой энтропии.

В квантовом случае аналогом тонкой энтропии является информационная энтропия состояния, которая также постоянна во времени, что следует из уравнения Лиувилля - фон Неймана. Существуют разные способы "огрубления"информационной энтропии, о которых упоминается в книге Зубарева, Морозова и Репке [7]. В работе в качестве аналога грубой энтропии для квантового случая рассматривается так называемая F-энтропия, предложенная в статьях [8] и [9]. С понятием тесно связано понятие квазимикроканонического состояния. В упомянутых работах В. В. Козлова и О. Г. Смолянова показывается, что, как и в классическом случае, при определенных условиях существуют слабые пределы началь-

ного состояния и связанного с ним квазимикроканонического состояния. Также если наложить некоторые ограничения, то аналогичные пределы существуют и для F-энтропий этих состояний.

Для изучения слабых пределов, информационной энтропии и F-энтропии в данной работе описана модель квантовой механики, где состояния описываются операторами плотности и вероятностными мерами. Также описано понятие энтропии для квантового случая и рассмотрены различные примеры. В работе объясняется аналогия с объектами в классической механике. Наконец, сформулировано и доказано утверждение о возрастании F-энтропии, то есть грубой энтропии в квантовой механике, которое является аналогичным утверждению о возрастании грубой энтропии в классическом случае.

2 Определения

Для начала, нам потребуется описать модель квантовой механики. Система будет описываться пространством чистых состояний и наблюдаемыми, а также гамильтонианом, с помощью которого описывается состояние квантовой системы в каждый момент времени.

Заметим, что есть разные подходы к описанию состояний. Часто состояния описываются через векторы гильбертова пространства, а затем рассматривается расширенная система для описания смешанных состояний. Мы же опишем смешанные состояния через операторы плотности и вероятностные меры, связанные с ними. При этом частично затронем связь с векторным описанием состояний. Для начала определим пространство чистых состояний.

Определение 2.1. *Пространством чистых состояний* назовем любое гильбертово сепарабельное пространство H.

Через $L_1^+(H)$ обозначим пространство ядерных самосопряженных неотрицательно определенных операторов на H, а через $L_S(H)$ — пространство самосопряженнных операторов на H.

Определение 2.2. *Наблюдаемой* называется любой оператор $T \in L_S(H)$ (при этом он не обязательно должен быть ограниченным).

Чтобы описать состояния через вероятностные меры, нам потребуется связь мер и ядерных операторов.

Далее все интегралы по H от векторозначных функций будем понимать как интеграл Бохнера.

Предложение 2.1. Если для борелевской меры μ на гильбертовом пространстве H верно $\int\limits_H \|x\|^2\mu(dx) < \infty$, то существует единственный ядерный самосопряженный неотрицательно определенный оператор B, что $(Bz_1, z_2) = \int\limits_H (z_1, x)(x, z_2)\mu(dx)$. Кроме того, $\operatorname{tr} B = \int\limits_H \|x\|^2\mu(dx)$

Доказательство. Через $x \otimes x$ обозначим оператор, действующий по правилу:

$$(x \otimes x)y = (y, x)x.$$

Рассмотрим тогда оператор $B = \int\limits_H (x \otimes x)\mu(dx)$. Это оператор, действующий по правилу $By = \int\limits_H (y, x)x\,\mu(dx)$. Определение корректно, так как $\int\limits_H \|(y, x)x\|\mu(dx) \leq \|y\| \int\limits_H \|x\|^2\mu(dx) < \infty$, а также $\|x \otimes x\| = \|x\|^2$ и $\int \|x\|^2\mu(dx) < \infty$, значит можно брать интеграл Бохнера. Также оператор, очевидно, линейный.

Оператор B удовлетворяет нужному равенству. Действительно, во-первых, $((x \otimes x)z_1, z_2) = (z_1, x)(x, z_2)\ \forall x \in H$. Во-вторых, можно перейти к интегралу в силу непрерывности скалярного произведения и абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_H (y, x)x\,\mu(dx)$.

Докажем теперь ядерность , самосопряженность и неотрицательную определенность оператора. Во-первых

$$\begin{aligned}((x \otimes x)y, h) &= (y, x)(x, h) = (x, h)(y, x) = \\ &= \overline{(h, x)}(y, x) = (y, (h, x)x) = \\ &= (y, (x \otimes x)h)\ \forall x \in H,\end{aligned}$$

т.е. $x \otimes x$ - самосопряженный оператор. Тогда

$$(Bz_1, z_2) = \int\limits_H ((x \otimes x)z_1, z_2)\mu(dx) = \int\limits_H (z_1, (x \otimes x)z_2)\mu(dx) = (z_1, Bz_2),$$

значит B — также самосопряженный.

Неотрицательная определенность следует из того, что $((x \otimes x)y, y) = (y, x)(x, y) = |(y, x)|^2 \geq 0\ \forall y \in H$.

Наконец, докажем ядерность оператора. Заметим, что если $e_1, ..., e_n, ...$ — некоторый фиксированный базис в H, то $\operatorname{tr}(x \otimes x) = \sum\limits_i ((x \otimes x)e_i, e_i) = \sum\limits_i |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$.

Также заметим, что $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} \int\limits_H (x \otimes x)\mu(dx) = \int\limits_H \operatorname{tr}(x \otimes x)\mu(dx)$, т.к.

$$\operatorname{tr} B = \sum_i (Be_i, e_i) = \sum_i \int\limits_H |(x, e_i)|^2 \mu(dx) =$$

$$= \int\limits_H (\sum_i |(x, e_i)|^2)\mu(dx) = \int\limits_H \|x\|^2 \mu(dx) < \infty,$$

где перестановка суммирования и взятия интеграла возможна в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Единственность оператора очевидна, т.к. если для некоторых операторов A и C верно $(Ax, y) = (Cx, y)$ $\forall x, y \in H$, то они совпадают.

□

Замечание 2.1. Из доказательства также следует, что данный оператор, соответствующий мере μ выражается равенством

$$B = \int\limits_H (x \otimes x)\mu(dx)$$

Доказанное утверждение позволяет корректно определить ковариационный оператор некоторых мер.

Определение 2.3. *Ковариационным оператором* борелевской меры μ со свойством $\int\limits_H \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$ назовем такой оператор B, что $(Bz_1, z_2) = \int\limits_H (z_1, x)(x, z_2)\mu(dx)$ (который существует в силу предыдущего предложения).

Выполняется следующее свойство ковариационного оператора меры.

Предложение 2.2. Пусть A — ограниченная (как оператор) наблюдаемая, а μ - борелевская мера, для которой $\int\limits_H \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$ и T — её ковариационный оператор. Тогда $\int\limits_H (Ax, x)\mu(dx) = \operatorname{tr}(AT)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторый базис $e_1, ..., e_n, ...$ пространства H. Заметим для начала, что

$$\operatorname{tr}(A(x \otimes x)) = \sum_i (A(x \otimes x)e_i, e_i) = \sum_i (Ax, e_i)(e_i, x) =$$

$$= \sum_i (Ax, (x, e_i)e_i) = (Ax, \sum_i (x, e_i)e_i) = (Ax, x).$$

Также верно $AT = A\int\limits_H (x \otimes x)\mu(dx) = \int\limits_H A(x \otimes x)\mu(dx)$ в силу абсолютной сходимости интеграла. Тогда $\operatorname{tr}(AT) = \operatorname{tr}(\int\limits_H A(x \otimes x)\mu(dx)) = \int\limits_H \operatorname{tr}(A(x \otimes x))\mu(dx) = \int\limits_H (Ax, x)\mu(dx)$, где перестановка операции взятия следа и интеграла возможна в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

□

Далее будем рассматривать только ограниченные наблюдаемые.

Теперь мы можем определить состояния. Мы не будем определять само понятие состояния, но будем говорить что оператор или мера описывают состояние, отождествляя их при этом с самим этим состоянием.

Определение 2.4. Назовем оператор T *оператором плотности*, если он ядерный, самосопряженный, неотрицательно определенный (то есть $T \in L_1^+(H)$) и $\operatorname{tr} T = 1$.

Будем говорить, что оператор плотности задает смешанное состояние квантовой системы. Также через него можно определить вероятностную меру, которая задает это состояние. Это вероятностная борелевская мера ν такая, что мера $\frac{1}{\|x\|^2}\nu$ также является вероятностной и её ковариационный оператор совпадает с оператором плотности T (такая мера существует, причем среди таких мер существует только одна гауссовская мера с нулевым средним, см. [6] и [14]). Стоит отметить, что мера ν всегда будет вероятностной, так как

$$\int\limits_H \nu(dx) = \int\limits_H \|x\|^2 (\frac{1}{\|x\|^2}\nu)(dx) = \operatorname{tr} T = 1.$$

В силу предложения 2.2 мера ν и оператор плотности T связаны физическим смыслом: математическое ожидание наблюдаемой в заданном состоянии можно описать через интеграл по этой мере или же как след произведения наблюдаемой и оператора плотности.

Определение 2.5. Пусть состояние системы задается мерой ν. Тогда *математическим ожиданием* наблюдаемой A в состоянии ν называется величина, равная $\int\limits_H \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2}\nu(dx)$.

Таким образом, если состояние задается оператором плотности T, то математическое ожидание наблюдаемой A в состоянии ν также равно $\operatorname{tr} AT$.

Замечание 2.2. Стоит заметить, что в данном подходе состояние может задаваться, вообще говоря, не единственной мерой.

Рассмотрим, например, проектор P на некоторое одномерное подпространство $span\{e\}$ (где $\|e\| = 1$) пространства H. Очевидно, этот оператор ядерный и его след равен 1, значит он является оператором плотности и задает некоторое состояние.

Тогда $(Pz_1, z_2) = (Pz_1, Pz_2) = ((z_1, e)e, (z_2, e)e) = (z_1, e)(e, z_2)$. Теперь возьмем меру на $\mathbb{R}$ с плотностью $\frac{1}{\sqrt{3}} I_{[0,\sqrt{3}]}$ ($I_{[0,\sqrt{3}]}$ — индикатор отрезка $[0, \sqrt{3}]$), т.е. равномерное распределение на отрезке $[0, \sqrt{3}]$. Возьмем меру μ на H, которая совпадает с этой мерой на упомянутом одномерном подпространстве и равна нулю на дополнении к нему. Для неё верно равенство:

$$\int\limits_H (z_1, x)(x, z_2)\mu(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} (z_1, e)(e, z_2)\frac{1}{\sqrt{3}} I_{[0,\sqrt{3}]}(x)x^2 dx =$$

$$= (z_1, e)(e, z_2)\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} x^2 dx = (z_1, e)(e, z_2)$$

Таким образом, P является ковариационным оператором меры μ.

В то же время мы можем рассмотреть вместо равномерного распределения стандартное нормальное распределение на прямой. Второй момент этого распределения равен 1, поэтому будет выполняться то же самое равенство.

Значит состояние, описываемое оператором P описывают также две различные меры: мера с равномерным распределением на отрезке $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ и мера со стандартным нормальным распределением на прямой.

В дальнейшем будем отождествлять состояние с мерой, которая его задает, или с оператором плотности.

Среди всех наблюдаемых важную роль играет *оператор Гамильтона (или гамильтониан)*, также называемый энергией. Это некоторый самосопряженный неотрицательно определенный оператор $\mathcal{H}$. С помощью этого оператора можно описать зависимость состояния квантовой системы от времени.

Заметим также, что любой вектор $h \in H$ задает чистое состояние квантовой системы. Ему можно сопоставить вероятностную меру ν, сосредоточенную в одноточечном множестве $\{\frac{h}{\|h\|}\}$. Ковариационный оператор меры $\frac{1}{\|x\|^2}$ равен P_h — проектору на одномерное подпространство,

порожденное h, так как выполняется равенство:

$$\int\limits_H (z_1, x)(x, z_2)(\frac{1}{\|x\|^2}\nu)(dx) = (z_1, \frac{h}{\|h\|})(\frac{h}{\|h\|}, z_2) \cdot \frac{1}{\|\frac{h}{\|h\|}\|^2} =$$

$$= ((z_1, \frac{h}{\|h\|})\frac{h}{\|h\|}, z_2) = (Pz_1, z_2)$$

и так как это ядерный оператор, след которого равен 1, то данная мера действительно будет задавать состояние.

Если $\psi : [0, \infty) \longrightarrow H$ — функция, описывающая зависимость чистого состояния системы от времени, то она удовлетворяет уравнению Шрёдингера:

$$i\hbar\psi'(t) = \mathcal{H}\psi(t)\,,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

Тогда будет выполняться следующее равенство:

$$\psi(t_2) = exp(-i\frac{t_2 - t_1}{\hbar}\mathcal{H})\,\psi(t_1)\ \forall t_2,\, t_1 > 0$$

Для простоты будем считать в дальнейшем, что $\hbar = 1$.

Если смешанное состояние квантовой системы в зависимости времени описывается функцией $T : [0, +\infty) \to \mathcal{R}$ (где в данном случае будем считать за $\mathcal{R}$ множество операторов плотности), то эволюцию системы (то есть зависимость состояния от времени). можно описать уравнением Лиувилля - фон Неймана:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T_t = [\mathcal{H}, T_t]\ ,$$

где $[\mathcal{H}, T_t]$ — коммутатор $\mathcal{H}$ и T_t (см. [6]).

3 Тонкая и грубая энтропии в классической статистической механике

Пусть $\Gamma = P \times Q$ — фазовое пространство (будем считать, что оно конечномерно), $H(p, q, t)$ — гамильтониан классической системы. Пусть μ — мера Лебега на Γ, а ν — вероятностная мера на Γ с плотностью $\rho \geq 0$:

$$\nu(\Gamma) = \int\limits_\Gamma \rho\, d\mu = 1\,.$$

В классической механике вероятностные меры на фазовом пространстве соответствуют состояниям, поэтому ν (или ρ) соответствует некоторому состоянию. Далее будем отождествлять меру или её плотность с самим состоянием.

Рассмотрим некоторое разбиение $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ пространства Γ, где J — конечное или счетное множество. Введем следующие обозначения:

$$\gamma_j = \mu(\Gamma_j),\ 0 < \mu(\Gamma_j) < \infty,\ j \in J\,.$$

Положим также

$$\rho_j = \frac{\lambda_j}{\gamma_j},\ \lambda_j = \int\limits_{\Gamma_j} \rho\, d\mu,\ \sum_{j\in J} \lambda_j = 1\,.$$

Теперь рассмотрим плотность $\bar{\rho} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ такую, что

$$\bar{\rho}|_{\Gamma_j} = \rho_j,\ j \in J\,.$$

Эту плотность будем называть *грубой плотностью.*

Для того, чтобы определить энтропию, определим функционал S такой, что для любой неотрицательной μ - измеримой функции $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ ставится в соответствие число:

$$S(\alpha) = -\int\limits_{\Gamma} \alpha \ln \alpha\, d\mu$$

при условии, что интеграл сходится к некоторой конечной или бесконечной величине.

Теперь считаем, что разбиение $\{\Gamma_j\}$ фиксированное.

Определение 3.1. *Тонкой энтропией* состояния ρ назовем число $s = S(\rho)$, а *грубой энтропией* этого состояния — число $\bar{s} = S(\bar{\rho})$.

В частности, верно неравенство, которое вытекает из неравенства Йенсена для выпуклой функции $x \ln x$:

$$s \leq \bar{s}$$

Пусть точка фазового пространства в начальный момент времени имела координаты (p^0, q^0), тогда в момент времени t эта же точка будет иметь координаты $(p^t(p^0, q^0), q^t(p^0, q^0))$. Однако будем обозначать новые координаты просто через (p^t, q^t). Пусть $\rho(p^t, q^t, t)$ — функция плотности, описывающая состояние в момент времени t (таким образом, функция

ρ зависит от переменных $p^0, q^0, t)$. Из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема следует, что верно (см. [7]):

$$\rho(p^t, q^t, t) = \rho(p^0, q^0, 0) \ .$$

Также (см.[7]) верно $dp^t\, dq^t = dp^0\, dq^0$.

Таким образом, если функция $\rho(p^t, q^t, t)$ описывает состояние системы в момент времени t, то тонкая энтропия не меняется с изменением времени:

$$s(t) = -\int\limits_{\Gamma} \rho(p^t, q^t, t) \ln \rho(p^t, q^t, t) \mu(dp^t\, dq^t) =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma} \rho(p^0, q^0, 0) \ln \rho(p^0, q^0, 0) \mu(dp^0\, dq^0) = s(0) \, .$$

Определение 3.2. Гамильтонова система

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \ \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \ j = 1, ..., n$$

называется *квазиоднородной*, если существуют вещественные числа (*веса квазиоднородности*) $\alpha, \ \beta, \ \gamma$, где $\gamma = \alpha + \beta + 1$, такие, что для всех $\lambda > 0$ верно:

$$H(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^\gamma H(x, y) \, .$$

Пусть теперь $\rho(p^t, q^t, t)$ — функция из $L_2(\Gamma, \mu)$ и $\rho^t(p^0, q^0) = \rho(p^0, q^0, t)$. Зафиксируем $\varphi \in L_2(\Gamma, \mu)$ и определим функцию

$$K(t) = (\rho^t, \varphi) = \int\limits_{\Gamma} \rho(p^0, q^0, t) \varphi \, \mu(dp^0\, dq^0)$$

Как показано в работе [4], существует предел:

$$\lim_{t \to +\infty} K(t) = (\rho^\infty, \varphi) \, ,$$

где

$$\rho^\infty(p^0, q^0) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \rho(p^0, q^0, t) \, dt$$

с точностью до множества меры нуль.

Таким образом, $\rho^t = \rho(p^0, q^0, t) \to \rho^\infty$ при $t \to +\infty$, где слабая сходимость понимается как слабая сходимость в $L_2(\Gamma, \mu)$.

В работе [4] также доказано, что верно неравенство:

$$S(\rho^\infty) \geq S(\rho),\ \rho = \rho^0\,.$$

В упомянутой работе отмечается ошибочность рассуждений Гиббса о возрастании грубой энтропии и приведен пример, когда грубая энтропия не возрастает. Однако если рассматривать $\Gamma = \{h_1 \leq H(x,y) \leq h_2\},\ h_1 < h_2$ и если Γ компактно, а также гамильтонова система квазиоднородна, то верна следующая теорема (см. [5]):

Теорема 3.1. Пусть начальная плотность $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция из $L_1(\Gamma, \mu)$, $\{\Gamma_j\}$ — разбиение Γ. Если неравенство $S(\rho^\infty) \geq S(\rho)$ строгое, то есть $S(\rho^\infty) > S(\rho)$, а также $S(\bar{\rho}^\infty) < \infty$, то при достаточно малых $\sup(\operatorname{diam}\Gamma_j)$ верно неравенство $S(\bar{\rho}^\infty) > S(\bar{\rho})$.

Таким образом, грубая энтропия может возрастать в смысле слабого предела.

Стоит также отметить, что здесь через $\bar{\rho}^\infty$ обозначается огрубление предельной плотности ρ^∞, аналогичное построению грубой плотности для ρ.

4 Информационная энтропия и квазимикроканонические состояния

Теперь можно определить информационную энтропию состояния для квантового случая. Эта энтропия является некоторым аналогом тонкой энтропии в классической механике.

Пусть T — оператор плотности. Тогда существует базис $\{e_i\}$ пространства H, состоящий из собственных векторов T, в котором он представляется в виде:

$$T = \sum_i \lambda_i\, e_i \otimes e_i\,,$$

где λ_i — соотвествующее e_i собственное значение оператора T.

Так как T неотрицательно определен и $\operatorname{tr} T = 1$, то спектр T содержится в отрезке $[0,1]$, на котором непрерывна функция $x \ln x$. Тогда корректно определен ограниченный оператор $T \ln T$, для которого верно равенство:

$$T \ln T = \sum_i (\lambda_i \ln \lambda_i)\, e_i \otimes e_i\,.$$

В случае, если оператор T конечномерный, то определен конечномерный оператор $\ln T$:

$$\ln T = \sum_i \ln \lambda_i \, e_i \otimes e_i \, ,$$

где сумма берется по всем ненулевым собственным числам оператора T.

Определение 4.1. Пусть T — оператор плотности, соответствующий некоторому состоянию r. Пусть также $\{\lambda_i\}$ — собственные числа T (возможно, повторяющиеся). Тогда *информационной энтропией* состояния r назовем следующую величину:

$$S(r) = -\mathrm{tr}\,(T \ln T) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i \, .$$

Замечание 4.1. Если мера ν соответствует состоянию r, то чтобы посчитать его информационную энтропию, нужно сначала найти оператор плотности, соответствующий тому же состоянию, а затем вычислить для него информационную энтропию.

Вместо $S(r)$ также будем писать $S(T)$ или $S(\nu)$.

Аналогия с тонкой энтропией в классической механике оправдана тем, что информационная энтропия также не меняется во времени (см. [12]).

Теорема 4.1. Пусть T_t — состояние в момент времени t и оператор Гамильтона $\mathcal{H}$ ограничен. Тогда $\mathrm{tr}(T_t \ln T_t) = const$, то есть информационная энтропия не меняется.

Зафиксируем теперь некоторое состояние ν и некоторое подмножество F множества ограниченных наблюдаемых квантовой системы. Обозначим также через $\mathcal{R}$ множество состояний (то есть множество мер, задающих состояния, либо множество операторов плотности), а через $R_1(F, \nu)$ обозначим подмножество множества $\mathcal{R}$ такое, что для любых $A \in F, \ \mu \in R_1(F, \nu)$ верно:

$$\int\limits_H \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \nu(dx) = \int\limits_H \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \mu(dx) \ ,$$

то есть совпадают математические ожидания наблюдаемой A в состояниях ν и μ.

Зафиксируем также некоторые $E, d > 0$ и обозначим через $R(F, \nu)$ (будем также писать $R(F, T)$ для оператора плотности T) подмножество множества $R_1(F, \nu)$, состоящее из состояний, задаваемых операторами

плотности, области значений которых являются подпространствами H_1, где H_1 — линейная оболочка собственных векторов оператора Гамильтона $\mathcal{H}$, соответствующих собственным значениям, лежащим в отрезке $[E-d, E+d]$.

Теперь сформулируем определение F - энтропии состояния, которую будем считать в некотором смысле аналогом грубой энтропии в классической механике.

Определение 4.2. Пусть F — некоторое подмножество множества ограниченных наблюдаемых квантовой системы. F-*энтропией* состояния $\nu \in \mathcal{R}$ этой системы называется число $S_F(\nu)$, определяемое равенством:

$$S_F(\nu) = sup\{S(r) : r \in R(F, \nu)\}.$$

Оказывается, верно следующее утверждение, которое нам потребуется в дальнейшем:

Предложение 4.1. Пусть T и T' — операторы плотности, $\dim H < \infty$, причем T и T' положительно определены. Тогда

$$\mathrm{tr}\,(T' \ln T') \geq \mathrm{tr}\,(T' \ln T)$$

Доказательство. Заметим для начала, что в силу того, что оператор T конечномерный, существует конечномерный оператор $\ln T$.

Пусть $\{e_i\}$ — собственные векторы оператора T с собственными значениями $\{\lambda_i\}$, а $\{e'_j\}$ — собственные векторы оператора T' с собственными значениями $\{\lambda'_j\}$. Пусть также $c_{ij} = (e_i, e'_j)$. Заметим, что так как операторы T и T' положительно определены, то $\sum\limits_i |c_{ij}|^2 = 1$ и $\sum\limits_j |c_{ij}|^2 = 1$. Тогда

$$\mathrm{tr}\,(T' \ln T') - \mathrm{tr}\,(T' \ln T) = \sum_j ((T' \ln T' e'_j, e'_j) - (T' \ln T e'_j, e'_j)) =$$

$$= \sum_j \lambda'_j \ln \lambda'_j - \sum_j \lambda'_j (\ln T e'_j, e'_j) = \sum_j \lambda'_j \ln \lambda'_j - \sum_j \lambda'_j \sum_i |c_{ij}|^2 \ln \lambda_i =$$

$$= \sum_{i,j} |c_{ij}|^2 \lambda'_j \ln \lambda'_j - \sum_{i,j} |c_{ij}|^2 \lambda'_j \ln \lambda_i = \sum_{i,j} \lambda'_j \, |c_{ij}|^2 \ln \frac{\lambda'_j}{\lambda_i}$$

Заметим теперь, что $\ln x \geq (1 - \frac{1}{x})$. Действительно,

$$(\ln x - (1 - \frac{1}{x}))' = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x}),$$

что ≥ 0 при $x \geq 1$ и ≤ 0 при $x \leq 1$. Учитывая, что $\ln 1 = (1-\frac{1}{1})$, получаем нужное неравенство. Таким образом,

$$\sum_{i,j} \lambda'_j \, |c_{ij}|^2 \ln \frac{\lambda'_j}{\lambda_i} \geq \sum_{i,j} \lambda'_j \, |c_{ij}|^2 \, (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda'_j}) = \operatorname{tr} T' - \operatorname{tr} T = 0 \, ,$$

из чего и получаем нужное утверждение.

□

Следствие 4.1. Пусть T — оператор плотности, H конечномерно, а $\{e_i\}$ — некоторый базис пространства H. Тогда верно следующее неравенство:

$$-\operatorname{tr}(T \ln T) \leq -\sum_i (Te_i, e_i) \ln (Te_i, e_i)$$

Доказательство. Рассмотрим конечномерный самосопряженный оператор T', собственными векторами которого являются e_i, а соответствующие им собственные значения равны (Te_i, e_i).

Рассмотрим подпространство H, являющееся линейной оболочкой векторов e_i с условием $(Te_i, e_i) > 0$. Тогда на этом подпространстве T' и T положительно определены. Так как левая и правая часть нужного неравенства не меняются от ограничения на упомянутое подпространство, то без ограничения общности будем считать, что T и T' положительно определены на H.

По предыдущему предложению верно:

$$-\operatorname{tr}(T \ln T) \leq -\operatorname{tr}(T \ln T') = -\sum_i (Te_i, e_i) \ln (Te_i, e_i) \, .$$

□

Замечание 4.2. Стоит заметить, что, вообще говоря, F-энтропия состояния может быть меньше его информационной энтропии. Рассмотрим следующий случай. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис H_1. Возьмем в качестве множества F множество, состоящее только из проектора P на подпространство $span\{e_1, ..., e_{n-1}\}$. Пусть также состояние описывается оператором плотности T таким, что

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\dim H_1} e_i \otimes e_i + \frac{1}{2 \dim H_1} e_n \otimes e_n + \frac{1}{2 \dim H_1} e_{n+1} \otimes e_{n+1} \, ,$$

где e_{n+1} — некоторый единичный вектор, ортогональный e_i для всех $i = 1, ..., n$. Тогда информационная энтропия T равна:

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\dim H_1} \ln \frac{1}{\dim H_1} - 2\frac{1}{2\dim H_1} \ln \frac{1}{2\dim H_1} =$$
$$= \frac{\dim H_1 - 1}{\dim H_1} \ln \dim H_1 + \frac{1}{\dim H_1} \ln 2 \dim H_1$$

При этом состояние T' из $R(F, T)$ из определения F-энтропии должны удовлетворять равенству:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (T'e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (Te_i, e_i) = \frac{\dim H_1 - 1}{\dim H_1}$$

Так как область значений T' содержится в H_1, то $(T'e_n, e_n) = \frac{1}{\dim H_1}$. Учитывая следствие 4.1, можно сказать, что из всех операторов, удовлетворяющих этим соотношениям, максимум информационной энтропии достигается при $T' = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\dim H_1} e_i \otimes e_i$, значит F-энтропия равна:

$$S_F(T) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\dim H_1} \ln \frac{1}{\dim H_1} = \ln \dim H_1$$

Таким образом, F-энтропия меньше информационной энтропии в этом примере.

Замечание 4.3. Стоит также отметить, что если $S_F(\nu) < \infty$, то существует единственное состояние $r \in \mathcal{R}$ такое, что верхняя грань из определения F-энтропии достигается на нем (см. [8]).

Это позволяет определить квазимикроканоническое состояние.

Определение 4.3. Пусть $S_F(\nu) < \infty$. Тогда назовем *квазимикроканоническим состоянием*, порождаемым множеством F и состоянием ν, такое состояние $Q_F(\nu) \in R(F, \nu)$, на котором достигается верхняя грань из определения F-энтропии.

Пример 4.1. Пусть $F = \{P_K\}$, где P_K — ортогональный проектор на конечномерное подпространство K пространства H_1. Пусть также состояние задается оператором плотности T, образ которого содержится в образе P_K.

Тогда состояние, задаваемое оператором плотности T' содержится в $R(F, T)$, если $\operatorname{tr} P_K T = \operatorname{tr} P_K T'$. Обозначим через e_i ортонормированный

базис подпространства K, где все e_i — собственные векторы оператора T, соответствующие собственным значениям λ_i (возможно, нулевым).

Через e'_j обозначим ортонормированный базис ортогонального дополнения K в H. В таком случае

$$1 = \operatorname{tr} T = \operatorname{tr} P_K T = \sum_i \lambda_i = \operatorname{tr} P_K T' = \operatorname{tr} T' P_K = \sum_i (T' P_K e_i, e_i) + \\ + \sum_j (T' P_K e'_j, e'_j) = \sum_i (T' e_i, e_i)$$

Таким образом, $\operatorname{tr} T' = \sum\limits_i (T' e_i, e_i) = 1$, значит $T' e'_j = 0 \ \forall j$, то есть образ T' тоже лежит в K.

Тогда, чтобы найти F-энтропию, нужно найти максимум:

$$\begin{cases} -\sum\limits_i \lambda'_i \ln \lambda'_i \longrightarrow \max \\ \sum\limits_i \lambda'_i = 1 \end{cases}$$

где λ'_i — собственные числа оператора T' (причем их количество равно $\dim K$ и они могут быть нулевыми, в таком случае считаем $\lambda \ln \lambda = 0$).

Максимум достигается при $\lambda'_i = \frac{1}{\dim K} \ \forall i$, то есть $Q_F(T) = \frac{P_K}{\dim K}$. В свою очередь

$$S_F(T) = -\sum_{i=1}^{\dim K} \frac{1}{\dim K} \ln \frac{1}{\dim K} = \ln \dim K$$

Пример 4.2. Пусть $\mathcal{E} = \{e_n\}$ — базис пространства H_1, и H_1 конечномерно, а состояние ν квантовой системы задается вектором $x_0 = \sum\limits_n a_n e_n$, где $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\dim H_1}} > 0$ для всех n. Заметим, что в таком случае $\|x_0\| = 1$.

Пусть также F — множество, состоящее из ортогональных проекторов с попарно ортогональными областями значений.

Обозначим через T оператор плотности, соответствующий ν. Очевидно, это проектор на подпространство $span(\{x_0\})$. Тогда

$$tr\ PT = \frac{(Px_0, x_0)}{\|x_0\|^2} = \|Px_0\|^2 \ \ \forall P \in F$$

Таким образом, состояние, задаваемое оператором плотности T', содержится в $R(F, \nu)$, если только $\operatorname{tr} PT' = \operatorname{tr} PT$. Пусть $\{P_k\}$ — конечный набор проекторов такой, что $F = \{P_k\}$. Возьмем такой ортонормированный базис $\{e_i\}$, что $e_{i_k}, ...e_{i_{k+1}-1}$ — базис $P_k(H_1)$. Тогда для любого k:

$$\operatorname{tr} P_k T' = \sum_i (P_k T' e_i, e_i) = \sum_i (T' e_i, P_k e_i) = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}} (T' e_i, e_i) = \operatorname{tr} P_k T = \|P_k x_0\|^2$$

Заметим, что во-первых, $\sum\limits_k \|P_k x_0\|^2 = 1$, а во-вторых, если зафиксировать неотрицательные значения $(T'e_i, e_i)$ для каждого e_i такие, что они удовлетворяют равенствам $\sum\limits_{i=i_k}^{i_{k+1}} (T'e_i, e_i) = \|P_k x_0\|^2$, то всегда найдется оператор плотности с заданными значениями $(T'e_i, e_i)$. Действительно, можно взять ядерный оператор T' с собственными векторами e_i, соответствующими собственным значениям этих фиксированных скалярных произведений $(T'e_i, e_i)$.

В таком случае, пользуясь рассуждениями, аналогичными рассуждениям из предыдущего примера, а также следствием 4.1, получаем, что максимум из определения F-энтропии достигается при

$$(T'e_i, e_i) = \frac{\|P_k x_0\|^2}{\dim P_k(H)} \ \forall i \in \{i_k, ..., i_{k+1} - 1\}$$

Значит, F-энтропия равна:

$$S_F(\nu) = -\sum_k \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}} \frac{\|P_k x_0\|^2}{\dim P_k(H)} \ln \frac{\|P_k x_0\|^2}{\dim P_k(H)} = -\sum_k \|P_k x_0\|^2 \ln \frac{\|P_k x_0\|^2}{\dim P_k(H)} =$$
$$= \sum_{P \in F} \|P x_0\|^2 (\ln \dim P(H) - \ln \|P x_0\|^2)$$

В то же время информационная энтропия состояния ν равна $S(\nu) = 0$, так как оператор плотности является одномерным проектором.

5 Слабые пределы

Далее будем считать, что оператор Гамильтона имеет дискретный спектр, H_1 конечномерно, $\mathcal{E} = \{e_n\}$ — ортонормированный базис пространства H_1, состоящий из собственных векторов гамильтониана $\mathcal{H}$.

Также обозначим через $\mathcal{A}$ подмножество пространства H_1, состоящее из всех таких векторов $A = \sum\limits_n a_n e_n$, для которых $|a_n| = |a_k|$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$. Через $\nu_{\mathcal{A}}$ обозначим множество состояний квантовой системы, задаваемых мерами, сосредоточенными на множестве $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое множество попарно ортогональных проекторов на подпространства пространства H_1, линейная оболочка образов которых совпадает с H_1, F_1 — векторное пространство конечных линейных комбинаций ортогональных проекторов из $\mathcal{P}$, а F — подпространство пространства F_1, состоящее из операторов, коммутирующих с гамильтонианом.

Введем следующую слабую топологию: τ_q — слабая топология на множестве состояний квантовой системы, задаваемая элементами из F_1: направленность состояний T_ν сходится к состоянию T в топологии τ_q, если математические ожидания наблюдаемых из F_1 в состоянии T_ν сходятся к математическим ожиданиям этих наблюдаемых в состоянии T.

В таком случае верно следующее утверждение, доказанное в [9]:

Теорема 5.1. Пусть операторозначная функция $T : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{R}$ (где $\mathcal{R}$ — множество операторов плотности) описывает зависимость от времени состояния квантовой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$ и начальным состоянием $T(0) \in \nu_{\mathcal{A}}$, а также $\dim H_1 < \infty$. Тогда

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t T(\tau)\,d\tau \longrightarrow \frac{1}{\dim H_1} P_{H_1}$$

при $t \to \pm\infty$ в топологии τ_q.

Верно также и более сильное утверждение:

Теорема 5.2. В предположениях предыдущей теоремы верно:

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t (Q_F(T(\tau)) - T(\tau))\,d\tau \longrightarrow 0$$

при $t \to \pm\infty$ в топологии τ_q.

Оказывается, эти утверждения также распространяются на энтропию при определенных условиях (см. [8]).

Теорема 5.3. Пусть $\dim H_1 < \infty$, а множество наблюдаемых F обладает следующими свойствами:

(1) его элементы являются ортогональными проекторами;

(2) если $K, G \in F$ и $K \neq G$, то $K \perp G$;

(3) каково бы ни было $G \in F$, нормы (в пространстве H)проекций на $G(H)$ элементов базиса $\mathcal{E}$ одинаковы;

(4) линейная оболочка образов наблюдаемых из F совпадает с H_1.

Тогда, если начальное состояние $T(0) = T \in \nu_{\mathcal{A}}$, то

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t S_F(T(\tau))\,d\tau \longrightarrow \ln\dim H_1$$

при $t \to \pm\infty$.

Из этой теоремы также доказывается следующее утверждение (см. [8]):

Теорема 5.4. Пусть множества наблюдаемых F_1 и F_2 удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 1 на множество F, а начальное состояние $T(0) = T \in \nu_{\mathcal{A}}$. Тогда верно:

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t S_{F_2}(T(\tau))\,d\tau - \frac{1}{t}\int\limits_0^t S_{F_1}(T(\tau))\,d\tau \longrightarrow 0$$

при $t \to \pm\infty$.

Теперь докажем утверждение, которое является аналогом утверждения о возрастании грубой энтропии для классического случая. Как и для случая классической механики, будем доказывать, что если тонкая (то есть информационная) энтропия начального состояния меньше информационной энтропии предельного состояния (то есть $\frac{1}{\dim H_1}P_{H_1}$), то то же верно и для F-энтропии (то есть грубой энтропии). Заметим однако, что для доказательства самого неравенства не требуется условие того, что состояние сходится к $\frac{1}{\dim H_1}P_{H_1}$.

Для начала, докажем следующее предложение:

Предложение 5.1. Пусть F состоит из попарно ортогональных проекторов, образ которых содержится в H_1. Пусть также $\dim H_1 < \infty$ и $T = \frac{1}{\dim H_1}P_{H_1}$. Тогда

$$S_F(T) = \ln\dim H_1\,.$$

Доказательство. Пусть $F = \{P_k\}$ и $\{e_i\}_{i\in I_k}$ — базис $P_k(H)$. Тогда оператор плотности T' из множества, по которому берется супремум из определения F-энтропии должен удовлетворять следующему соотношению:

$$\operatorname{tr} P_k T' = \sum_{i\in I_k}(T'e_i, e_i) = \operatorname{tr} P_k T = \sum_{i\in I_k}(Te_i, e_i) = \frac{|I_k|}{\dim H_1}\,.$$

Пользуясь рассуждениями, аналогичными рассуждениям из примера 4.2, получаем, что максимум информационной энтропии для таких состояний достигается при $T' = T$, то есть

$$S_F(T) = S(T) = \ln \dim H_1 \,,$$

что и требовалось доказать.

□

Также докажем, что при определенных условиях F-энтропия может быть сколь угодно близкой к информационной энтропии состояния. Напомним, что H_1 определялось как линейная оболочка собственных векторов гамильтониана $\mathcal{H}$, соответствующих собственным значениям из $[E-d, E+d]$.

Лемма 5.1. Пусть T — оператор плотности и $S(T) < \infty$, $\delta > 0$ — фиксированное число.

Рассмотрим при фиксированном d из определения H_1

$$F_d = \{e_i \otimes e_i \,|e_i \in H_1\}.$$

Пусть также существует $d_0 \geq 0$ такое, что для $d > d_0$ из определения H_1 базис H_1 состоит из некоторого конечного набора собственных векторов оператора T и лишь конечного набора собственных векторов оператора $\mathcal{H}$, которых не больше, чем $c \in \mathbb{N}$.

Тогда при достаточно большом d из определения F-энтропии будет верно:

$$|S_{F_d}(T) - S(T)| < \delta$$

Доказательство. Упорядочим по убыванию собственные значения (возможно, нулевые) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ...$ оператора T, которые соответствуют собственным векторам $e_1, e_2, ...$

Заметим для начала, что существует такое $d > 0$, что H_1 конечномерно и $e_i \in H_1$, $i = 1, ..., N$. В таком случае обозначим через $C(d)$ следующее значение:

$$C(d) = S(T) + \sum_{e_i \in H_1} \lambda_i \ln \lambda_i \leq -\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \ln \lambda_i \,,$$

которое неотрицательно и достаточно мало при достаточно большом N, т.к. $-x \ln x \geq 0$ при $x \in [0,1]$, а значит ряд $-\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i \ln \lambda_i$ сходится абсолютно.

Теперь рассмотрим F-энтропию $S_{F_d}(T)$. Состояние из множества, по которому берется супремум из определения F-энтропии с оператором плотности T' должно удовлетворять равенствам:

$$(T'e_i, e_i) = \mathrm{tr}\,(e_i \otimes e_i)T' = \mathrm{tr}\,(e_i \otimes e_i)T = (Te_i, e_i) = \lambda_i,\ e_i \in H_1$$

И так как базис H_1 состоит из конечного множества собственных векторов T и конечного набора векторов $\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_k$, где $k \leq c$, а также $\mathrm{tr}\,T' = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{k}(T'\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) = 1 - \sum_{e_i \in H_1} \lambda_i = M \geq 0$$

Повторяя рассуждения из примера 4.2, получаем, что

$$S_{F_d}(T) = -\sum_{e_i \in H_1} \lambda_i \ln \lambda_i - \sum_{j=1}^{k} \frac{M}{k} \ln \frac{M}{k} = (S(T) - C(d)) - M \ln \frac{M}{k}\,.$$

Так как $C(d)$ достаточно мало, M достаточно мало, а k ограничено, получаем нужное утверждение.

□

Наконец, сформулируем некоторый аналог для утверждения о возрастании энтропии в классическом случае. Аналогия заключается в том, что как и в классическом случае, в квантовом случае при определенных условиях существует слабый предел начального состояния, равный $\frac{1}{\dim H_1} P_{H_1}$, о чем упоминалось ранее. Мы докажем утверждение, аналогичное утверждению о возрастании энтропии в классическом случае: если информационная энтропия начального состояния меньше информационной энтропии состояния $\frac{1}{\dim H_1} P_{H_1}$, то то же верно для F-энтропий. Однако для доказательства самого неравенства не требуется слабая сходимость к состоянию $\frac{1}{\dim H_1} P_{H_1}$.

Теорема 5.5. Пусть выполняются условия предыдущей леммы и при фиксированном $d_0 \geq 0$ и $d > d_0$ из определения H_1 верно:

$$S(T) < S(\frac{1}{\dim H_1} P_{H_1}) = \ln \dim H_1\,.$$

Тогда при достаточно большом d из определения H_1 верно:

$$S_{F_d}(T) < S_{F_d}(\frac{1}{\dim H_1} P_{H_1})$$

Доказательство. Во-первых,

$$S_{F_d}(\frac{1}{\dim H_1} P_{H_1}) = \ln \dim H_1$$

из предложения 5.1. Далее, по лемме 5.1 число $S_{F_d}(T)$ можно приблизить сколь угодно близко к $S(T)$, взяв достаточно большое d. Отсюда вытекает нужное утверждение.

$\square$

Список литературы

[1] Masanori Ohya and Dénes Petz. *Quantum entropy and its use.* Springer Science & Business Media, 2004.

[2] Masanori Ohya and Noboru Watanabe. Quantum entropy and its applications to quantum communication and statistical physics. *Entropy*, 12(5):1194–1245, 2010.

[3] Козлов В. В. *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре.* Регулярная и хаотическая динамика — Ижевский институт компьютерных исследований, 2002.

[4] Козлов В. В., Трещев Д. В. Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем. *Теоретическая и математическая физика*, 134(3):388–400, 2003.

[5] Козлов В. В., Трещев Д. В. Тонкая и грубая энтропия в задачах статистической механики. *Теоретическая и математическая физика*, 151(1):120–137, 2007.

[6] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ. *М.: РХД*, page 724, 2009.

[7] Зубарев Д. Н., Морозов В. Г., Репке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. Т. 1. *Физматлит, М*, 2002.

[8] Козлов В. В., Смолянов О. Г. Информационная энтропия в задачах классической и квантовой статистической механики. In *Доклады Академии наук*, volume 411, pages 587–590. Федеральное государственное бюджетное учреждение"Российская академия наук 2006.

[9] Козлов В. В., Смолянов О. Г. Слабая сходимость состояний в квантовой статистической механике. In *Доклады Академии наук*, volume 417, pages 180–184. Федеральное государственное бюджетное учреждение"Российская академия наук 2007.

[10] Николай Сергеевич Крылов. *Работы по обоснованию статистической физики.* УРСС, 2003.

[11] Мишель Лоэв. *Теория вероятностей: Пер. с англ.* Изд-во иностр. лит., 1962.

[12] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (Мл.). *Введение в квантовую статистическую механику.* Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

[13] А Пуанкаре. Замечания о кинетической теории газов. *Избранные труды*, 3:385–412, 1974.

[14] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. *Континуальные интегралы.* МГУ, 1990.

[15] Нейман И. Фон. *Математические основы квантовой механики.* М.: Наука, 1964.

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Трифоновой Виктории Александровны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Критерии высотности атома» являются: Утверждение 1, 2, Теоремы K_1 и K_2, новое доказательство гипотезы В.А.Васильева о критерии планарности графа с вершинами степени 4 и дополнительной крестовой структурой (раздел 4).

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 20 марта 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: высотный атом, f-граф, четырехвалентный граф, крестовая структура четырехвалентного графа, в выдаче поисковиков было исследовано 14 статей, 2 тезиса доклада, 1 диссертация (список см. в приложении 1 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1], [4], [8-14] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем академиком РАН, профессором кафедры Дифференциальной геометрии и приложений МГУ им. Ломоносова Фоменко Анатолием Тимофеевичем.
- Проведена переписка и серия консультаций с профессором кафедры Дифференциальной геометрии и приложений МГУ им. Ломоносова Кудрявцевой Еленой Александровной и доцентом Игорем Михайловичем Никоновым.
- Проведено выступление на следующих семинарах и конференциях:

- Международная Конференция : Международная научная конференция "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2020". Устный доклад, Трифонова В.А. ,"Классификация частично симметричных атомов".
- Конференция: Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2019», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 8-12 апреля 2019. Устный доклад, Трифонова В.А. ,"Вложение f-графов в плоскость".
- Семинар "Современные геометрические методы" 3 апреля 2019 г. В. А. Трифонова "Высотные атомы и гипотезы В.А.Васильева ".
- Конференция: Геометрические методы в теории управления и математической физике, Рязань, Россия, 25-28 сентября 2018. Устный доклад, Трифонова В.А., "Высотные частично симметричные атомы".
- Конференция: Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2018», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 9-13 апреля 2018. Устный доклад, Трифонова В.А. ,"Классификация высотных частично симметричных атомов ".

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

КРИТЕРИИ ВЫСОТНОСТИ АТОМА

Выполнила студентка
607 группы
Трифонова Виктория Александровна

_____
подпись студента

Научный руководитель:
акад. А.Т. Фоменко

_____
подпись научного руководителя

Соруководители:
проф. Е.А. Кудрявцева

_____
подпись соруководителя

доц. И.М. Никонов

_____
подпись соруководителя

Москва

2020

Содержание

1. Введение 2

2. Основные понятия и определения 3

3. Критерии высотности атома 6

4. Новое доказательство гипотезы В.А.Васильева 21

1. Введение

Понятие атома, появившееся в задачах качественного анализа и классификации динамических систем, находит применение в самых разных разделах современной комбинаторики и маломерной топологии, теории узлов [1—12]. Понятие атома в гамильтоновой и симплектической геометрии и топологии было введено А.Т. Фоменко [3] и используется для лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем [8].

Задача классификации высотных атомов была сформулирована А.Т. Фоменко. Изучению этого класса атомов посвящены работы В.О. Мантурова [2], И.М. Никонова и Н.В. Волчанецкого [12], И.М. Никонова [10], В.А. Трифоновой [11]. При этом в работах [12,10,11] получены классификации высотных атомов, группы собственных симметрий которых транзитивно действуют на ребрах [12], или вершинах [10], или белых кольцах [11] атома. Высотные атомы играют важную роль в теории узлов. Оказывается, что все узлы могут быть закодированы (неоднозначно) высотными атомами.

А.А. Ошемковым в работе [16] было введено понятие f-графа. Выяснилось, что с помощью f-графов удобно описывать перестройки торов Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем, а также легко реализовать алгоритм перечисления таких перестроек. И.М. Никонов [10] обнаружил, что высотность атома эквивалентна ориентированной вложимости его f-графа в плоскость (теорема 1).

В разделе 2 настоящей работы доказывается, что все высотные атомы являются ориентируемыми (утверждение 1).

В разделе 3 устанавливаются два новых критерия высотности атома в терминах его f-графа (теорема K_1 и теорема K_2). Хотя все критерии высотности по сути эквивалентны, они весьма полезны в разных ситуациях для доказательства высотности различных классов атомов. Найдены препятствия к ориентированной вложимости f-графа в плоскость, доказана их минимальность (утверждение 2).

В разделе 4 приводится новое доказательство гипотезы В.А.Васильева [21] о критерии планарности графа с вершинами степени 4 и дополнительной крестовой структурой. Впервые гипотеза была доказана В.О.Мантуровым [22].

Автор благодарен А.Т. Фоменко за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор также благодарит Е.А.Кудрявцеву и И.М.Никонова за полезные обсуждения и ценные замечания.

2. Основные понятия и определения

Пусть M^2 — гладкое замкнутое двумерное многообразие, $f : M^2 \to \mathbb{R}$ — функция Морса на M^2 и $f^{-1}(0) = \{x \in M^2 \colon f(x) = 0\}$, — ее связный критический уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $f^{-1}([-\varepsilon, +\varepsilon])$ не содержит критических точек, кроме лежащих на критическом уровне $f^{-1}(0)$.

Определение. *Атомом* называется поверхность $f^{-1}([-\varepsilon, +\varepsilon])$ с заданной на ней функцией Морса f. Два атома называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм поверхностей (сохраняющий ориентацию, если поверхность ориентирована), который линии уровня функции переводит в линии уровня функции.

Определение. Назовем атом, порожденный функцией f, *высотным*, если существует такое вложение $i \colon f^{-1}([-\varepsilon, +\varepsilon]) \to \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(i(p))$ для каждой точки $p \in f^{-1}([-\varepsilon, +\varepsilon])$, где z — стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. z — функция высоты на $i(f^{-1}([-\varepsilon, +\varepsilon]))$.

Случай погружения (вместо вложения) изучен в работе Е.А.Кудрявцевой [13].

Следующее утверждение было сформулировано в [2, замечание перед определением 6] без доказательства. Так как мы не нашли его доказательства в литературе, то приводим доказательство в данной дипломной работе.

Утверждение 1. *Все высотные атомы являются ориентируемыми.*

Доказательство. Высотный атом, как многобразие с краем, вложим в $\mathbb{R}^3$ так, что его края лежат в двух параллельных плоскостях. Их можно заклеить дисками так, что получится вложенная в $\mathbb{R}^3$ замкнутая двумерная поверхность. Докажем, что любая вложимая в $\mathbb{R}^3$ замкнутая двумерная поверхность S ориентируема. Из этого будет следовать ориентируемость высотного атома.

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема (Жордана–Брауэра [14]). *Дополнение к компактной связной гиперповерхности R в $\mathbb{R}^n$ состоит из двух открытых связных множеств: "внешнего" D_0 и "внутреннего" D_1. Более того, границей замыкания каждого из данных множеств является гиперповерхность R.*

Из данной теоремы следует, что поверхность S, вложенная в $\mathbb{R}^3$, разбивает $\mathbb{R}^3$ на два трехмерных многообразия с краем S. Эти многообразия ориентируемые, поскольку в $\mathbb{R}^3$ нет неориентируемых трехмерных подмногообразий. Тогда в каждой точке границы S этих многообразий однозначно определена внешняя и внутренняя нормаль. Это означает, что поверхность S ориентируема. Утверждение доказано. ■

Определение. Эквивалентным образом атом (а точнее, атом с точностью до изоморфизма) можно задать как “оснащенную пару” $(P^2, K)^\#$ (тоже рассматриваемую с точностью до изоморфизма), где P^2 – компактная поверхность с краем, K – непустой конечный связный граф, вложенный в P^2 и имеющий вершины степени 4, причем множество $P^2 \setminus K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0, 1]$, $S^1 \times \{1\} \subset \partial P^2$, и множество колец разбито на два подмножества (белые и черные кольца) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно черное кольцо. Указанное разбиение колец на белые и черные называется *оснащением* пары (P^2, K), и оснащенная пара обозначается через $(P^2, K)^\#$. Две оснащенные пары считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец. Граф K будем называть *остовом* атома.

Действительно, по атому однозначно строится оснащенная пара $(P^2, K)^\#$, где белые (соответственно черные) кольца задаются неравенством $f > 0$ (соответственно $f < 0$). Верно и обратное: по оснащенной паре $(P^2, K)^\#$ однозначно строится атом.

Атом (точнее, атом с точностью до изоморфизма) может быть определен также как f-граф (см. [16]), что в свою очередь позволяет работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение (А.А.Ошемков [16], 1994). Конечный связный граф G назовем *f-графом*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) Все вершины графа G имеют степень 3.

2) Некоторые ребра графа G ориентированы, причем к каждой вершине графа G примыкают ровно два ориентированных ребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра-петли.

3) Каждому неориентированному ребру графа G приписано число ± 1.

Опишем построение f-графа по атому $X = (P^2, K)^{\#}$.

Зафиксируем произвольным образом ориентацию на каждой граничной окружности белых колец атома.

В качестве неориентированного ребра f-графа G берется отрезок, проходящий через вершину графа K и соединяющий границы противоположных белых колец (см. рис. 1), а в качестве вершин — соответствующие концы отрезка. В роли ориентированных ребер выступают примыкающие к вершинам дуги белых колец с соответствующей ориентацией.

f-Граф, построенный по черным кольцам атома (P^2, K), назовем *двойственным f-графом.*

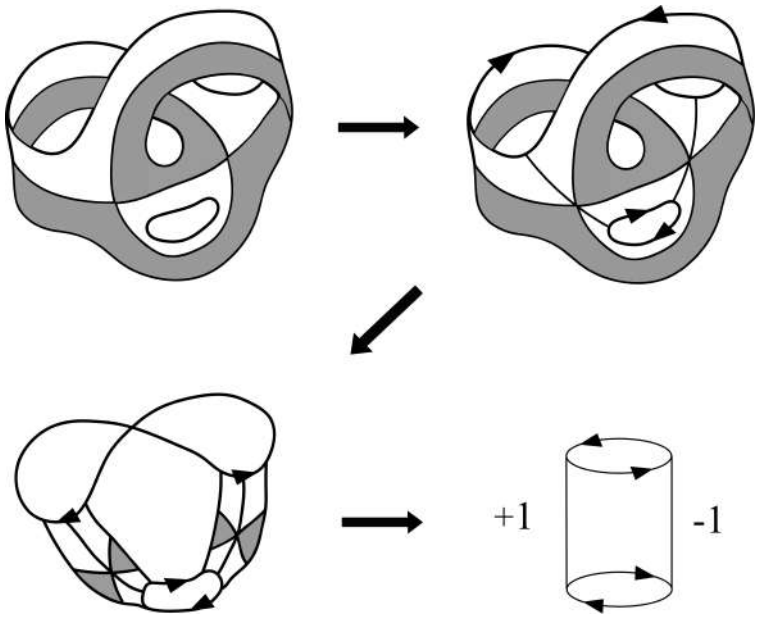


Рис. 1. Построение f-графа по атому

Из данного построения ясно, что f-граф (двойственный f-граф) состоит из непустого множества ориентированных циклов, которым соответствуют ориентированные граничные окружности белых (соответственно черных) колец, и неориентированных ребер. Ориентированные циклы будем называть *окружностями.*

Для завершения построения f-графа осталось расставить метки на неориентированных ребрах. Для этого рассмотрим малую окрестность неориентированного ребра в поверхности P^2. Это прямоугольник, две противоположные стороны которого лежат на граничных окружностях белых колец, и потому – ориентированы. Если эти стороны

прямоугольника индуцируют одну и ту же ориентацию границы прямоугольника, то ставим метку $\varepsilon = +1$. Если же ориентации противоположны, то ставим метку $\varepsilon = -1$.

Заметим, что если поверхность P^2 ориентирована, то соответствующий f-граф имеет все метки, равные $+1$. Поскольку всюду далее в данном разделе и в разделе 3 мы имеем дело только с высотными атомами, которые ориентируемы по утверждению 1, то будем считать, что поверхность P^2 ориентируема и на ней фиксирована ориентация, а соответствующий f-граф будем рассматривать без меток. В разделе 4 в определении атома под поверхностью P^2 будем считать компактную поверхность с краем и будем уточнять, когда она ориентируема, а когда неориентируема.

Определение. Неориентированное ребро f-графа будем называть *внутренней хордой*, если оба его конца лежат на одной окружности. Иначе ребро назовем *внешней хордой*.

Определение. Назовем f-граф *ориентированно вложимым в плоскость*, если его можно вложить в плоскость так, что окружности, соединенные хотя бы одним ребром, лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. Соответствующее вложение также будем называть *ориентированным*.

Следующий критерий позволяет нам свести задачу проверки высотности атома к проверке ориентированной вложимости его f-графа в плоскость.

Теорема 1 (И.М. Никонов, критерий высотности атома [10]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф ориентированно вложим в плоскость.*

Замечание. Если атом высотный, то, поменяв раскраску его колец, получим высотный атом. Поэтому теорема 1 будет верна, если f-граф заменить на двойственный f-граф.

Определим понятие под-f-графа.

Определение. f-Граф G называется *под-f-графом* некоторого f-графа H, если множество окружностей f-графа G является подмножеством множества окружностей f-графа H, а каждое неориентированное ребро f-графа G является неориентированным ребром f-графа H.

Теперь дадим определение изоморфности и f-гомеоморфности f-графов.

Определение. f-Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимнооднозначное отображение $f : V_1 \to V_2$ множества V_1 вершин f-графа G_1 на множество V_2 вершин f-графа G_2, удовлетворяющее условию: вершины $A, B \in V_1$ соединены ребром в том и только том случае, когда вершины $f(A), f(B) \in V_2$ соединены ребром, причем если ребро ориентировано от A к B (от B к A), то соответствующее ребро ориентировано от $f(A)$ к $f(B)$ (соответственно от $f(B)$ к $f(A)$).

Определение. f-Граф G *f-гомеоморфен* f-графу H, если существует конечная цепочка преобразований $G = G_1 \to \ldots \to \mathrm{G}_n = H$, композиция которых преобразует G в H и каждое из которых относится к одному из следующих видов:

1) изоморфизм f-графов;

2) подразбиение неориентированного ребра f-графа (см. рис. 2*a*,*b*);

3) обратная операция к подразбиению неориентированного ребра.

Каждое из трех данных видов преобразований будем называть *операцией f-гомеоморфизма*.

Определение. *Препятствием* V назовем f-граф, состоящий из двух окружностей с вершинами v_1, v_2, v_3 на одной окружности и u_1, u_2, u_3 на другой, циклический порядок которых согласован с ориентацией соответствующей окружности, и хорд (v_1, u_1), (v_2, u_2), (v_3, u_3) (см. рис. 3,*a*).

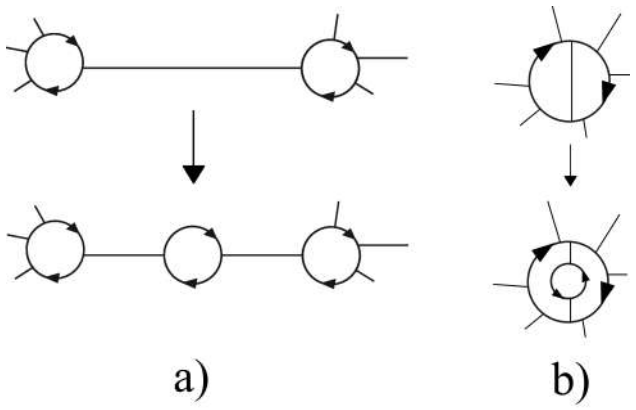


Рис. 2. Операция подразбиения неориентированного ребра f-графа

Определение. *Препятствием* $V(r), r \geq 1$, назовем f-граф, состоящий из одной окружности с вершинами $v_1, \ldots, v_{4r+2}$, циклический порядок которых согласован с ориентацией окружности, и хорд $(v_{4i-3}, v_{4i}), 1 \leq i \leq r, (v_{4i-1}, v_{4i+2}), 1 \leq i \leq r$, и (v_{4r+1}, v_2) (см. рис. 3,b).

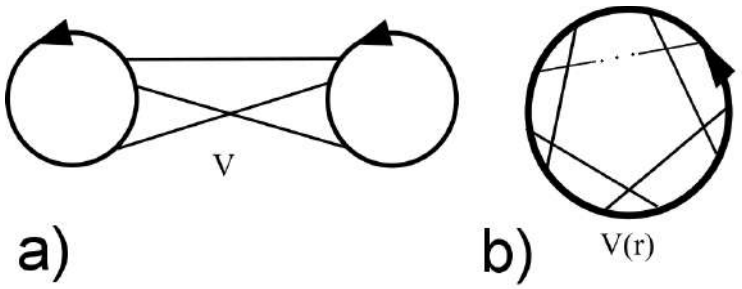


Рис. 3. Препятствия V и $V(r)$

3. Критерии высотности атома

В данном разделе будем считать, что поверхность P^2 ориентируема и на ней фиксирована ориентация, а у соответствующего f-графа метки на всех хордах предполагаются равными $+1$.

Теорема K_1 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома [15]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть дан высотный атом, а F — его f-граф. Тогда по теореме 1 существует ориентированное вложение R f-графа F в плоскость.

Любой под-f-граф L этого f-графа является ориентированно вложимым в плоскость. Действительно, множество окружностей и хорд L является подмножеством окружностей и соответственно хорд в R, причем любые окружности, соединенные хотя бы одним ребром в R, лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. Это означает, что L ориентированно вложим в плоскость.

Лемма 1. *Любой f-граф, f-гомеоморфный ориентированно вложимому f-графу в плоскость, также является ориентированно вложимым в плоскость.*

Доказательство. Пусть f-граф G ориентированно вложим в плоскость. Покажем, что операцией подразбиения неориентированного ребра этого f-графа мы получим ориентированно вложимый f-граф.

Рассмотрим ориентированное вложение R f-графа G в плоскость и произвольное неориентированное ребро e этого f-графа. В середину ребра e всегда можно вставить окружность так, чтобы полученный f-граф оставался планарным. На рисунке $4a, b, c, d$ показана ориентация добавляемой окружности, чтобы полученный f-граф оставался не только планарным, но и ориентированно вложимым в плоскость.

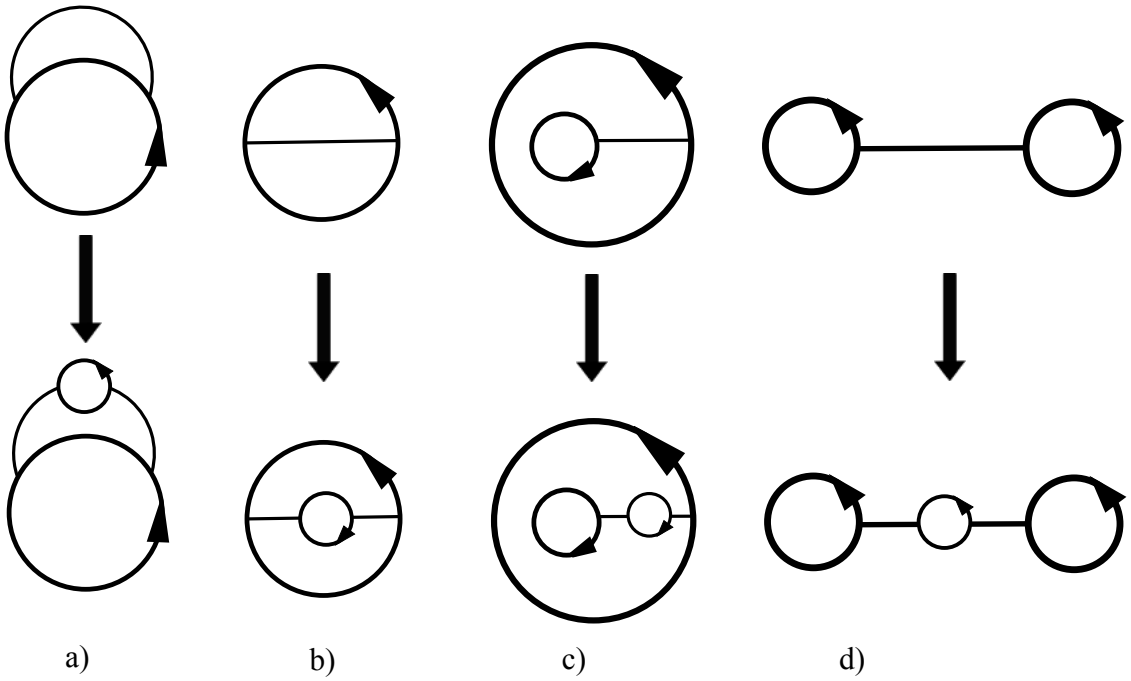


Рис. 4. Вставка окружности в ребро e

Так, на рисунке $4a$ ребро e является внутренней хордой f-графа G и лежит вне окружности h во вложении R, на которую оно опирается. Так как добавленная окружность и окружность h лежат вне друг друга, то их ориентации должны совпадать. На рисунке $4b$ ребро e является внутренней хордой f-графа G и лежит внутри окружности h во вложении R, на которую оно опирается. На рисунке $4c$ ребро e является внешней хордой, соединяющей две окружности, лежащие одна в другой. На рисунке $4d$ ребро e является внешней хордой, соединяющей две окружности, которые лежат вне друг друга.

Теперь покажем, что обратной операцией к подразбиению неориентированного ребра f-графа G мы получим ориентированно вложимый f-граф.

Рассмотрим удаляемую окружность O ориентированного вложения R этого f-графа в плоскость. Из нее выходят две внешние хорды l_1, l_2. На рисунке $5a$ окружность O, отмеченая серым цветом, лежит внутри другой окружности O_1, с которой соединена внешними хордами, причем внешние хорды лежат вне окружности O. Случай, когда окружности O и O_1 лежат вне друг друга, рассматривается аналогично (действительно, вместо вложения f-графа G в плоскость мы можем рассмотреть его вложение в сферу, тогда случаи, когда обе хорды l_1, l_2 и окружность O лежат одновременно внутри или одновременно снаружи окружности O_1, станут полностью аналогичны друг другу). Удалим одну полуокружность окружности O и снимем ориентацию второй по-

луокружности. Тогда новое неориентированное ребро полученного f-графа состоит из двух внешних хорд и неориентированной второй полуокружности окружности O. Такой f-граф, очевидно, останется ориентированно вложимым в плоскость.

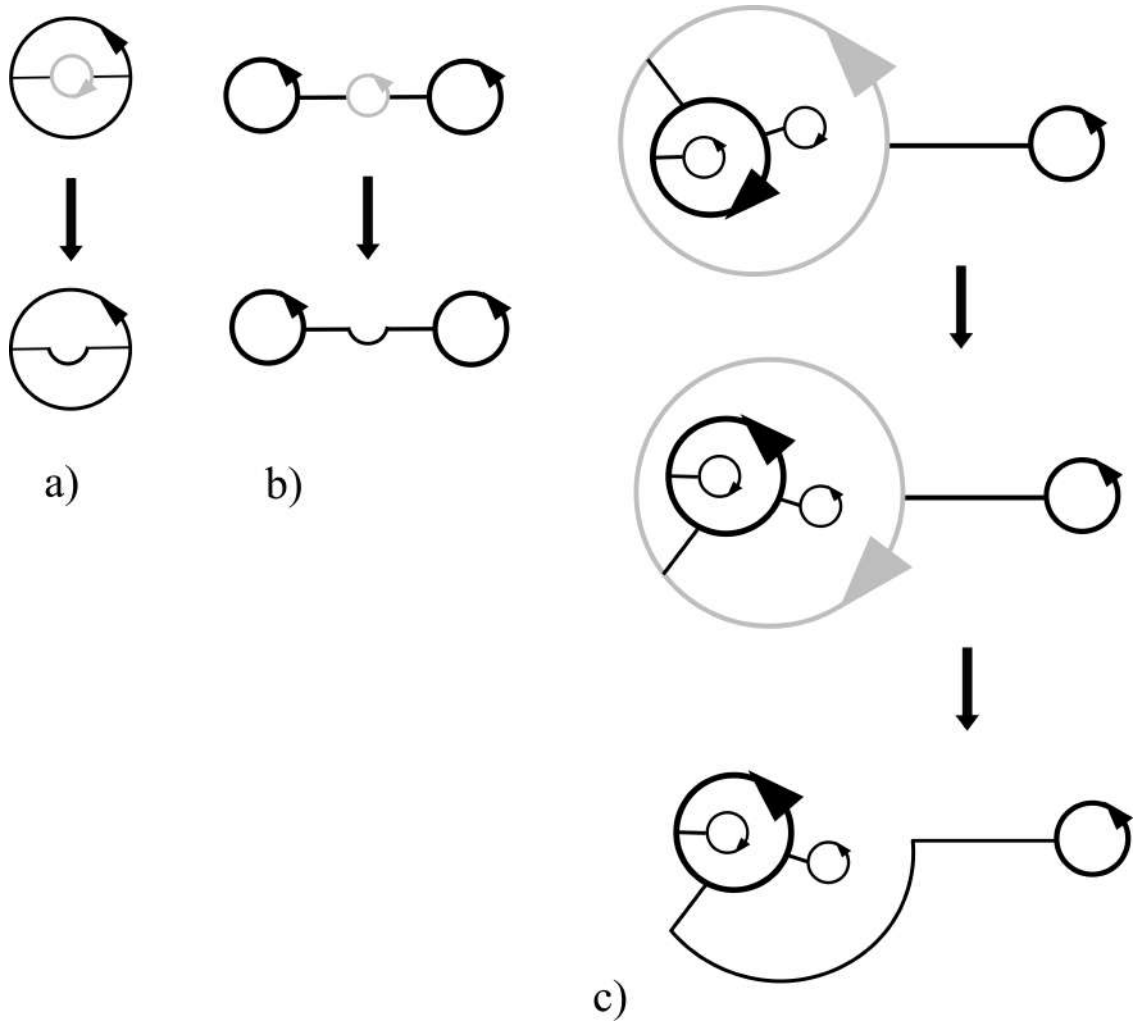


Рис. 5. Преобразование окружности O и хорд l_1, l_2 в неориентированное ребро

На рисунке $5b, c$ показаны два случая расположения внешних хорд и окружностей O_1 и O_2, с которыми соединена окружность O, отмеченая серым цветом. На рисунке $5b$ окружности O_1 и O_2 лежат вне друг друга, а хорды l_1 и l_2 лежат вне окружности O. Тогда новое неориентированное ребро f-графа получим уже рассмотренным способом. Оно состоит из двух внешних хорд и неориентированной второй полуокружности окружности O.

Пусть окружность O_1 лежит внутри окружности O_2, а хорды l_1 и l_2 лежат вне окружности O. Тогда инверсией относительно окружности O_2 данный случай сводится к рассмотренному, в котором окружности O_1 и O_2 лежат вне друг друга.

На рисунке $5c$ окружность O_1 лежит внутри окружности O, а окружность O_2 лежит вне. Тогда если получить неориентированное ребро рассмотренным способом, окружности O_1 и O_2 будут лежать вне друг друга, но иметь противоположную ориентацию. Чтобы этого не допустить, изменим вложение R на такое, при котором окружность O вместе с лежащей внутри нее частью f-графа G заменена на ее зеркальный образ. Преобразуя окружность O и хорды l_1, l_2 в неориентированное ребро, мы получим ориентированно вложимый f-граф.

Пусть окружность O_1 лежит внутри окружности O, а окружность O лежит внутри окружности O_2. Тогда инверсией относительно окружности O_2 данный случай сводится к рассмотренному, в котором окружность O_1 лежит внутри окружности O, а окружность O_2 лежит вне.

Случай, когда хорды l_1 и l_2 лежат внутри окружности O, сводится к случаю, когда l_1 и l_2 лежат вне, инверсией относительно окружности O. Лемма доказана. ■

Из леммы 1 следует, что f-граф F не содержит под-f-граф, f-гомеоморфный не ориентированно вложимому в плоскость.

Докажем, что f-граф, представляющий собой препятствие V или препятствие из серии $V(r), r \geq 1$, не является ориентированно вложимым в плоскость.

Поскольку атом с f-графом V имеет двойственный f-граф $V(1)$, то ориентированная вложимость V эквивалентна ориентированной вложимости $V(1)$. Таким образом, достаточно рассмотреть f-графы серии $V(r), r \geq 1$.

Лемма 2. *Каждый f-граф из серии $V(r), r \geq 1$, содержит подграф, гомеоморфный полному двудольному графу $K_{3,3}$.*

Доказательство. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ можно реализовать на плоскости в виде окружности и трех внутренних хорд, показанных пунктирной линией (рис. 6,*a*). На рис. 6,*b* представлено препятствие $V(r)$ с выделенным, гомеоморфным $K_{3,3}$ подграфом, ребра которого изображены жирными и пунктирными линиями.

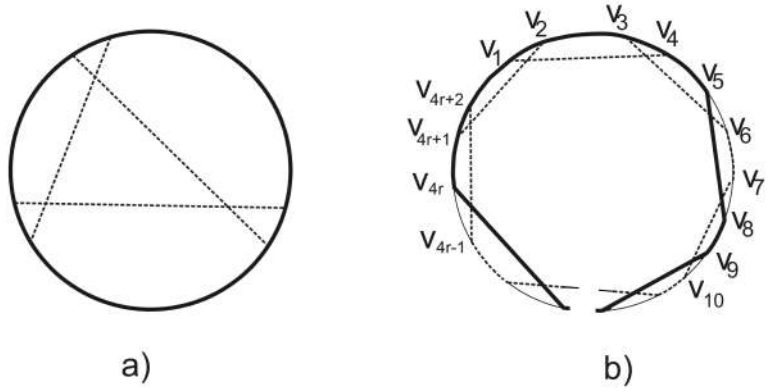


Рис. 6. Выделение подграфа в $V(r)$, гомеоморфного $K_{3,3}$

Лемма доказана. ■

Из леммы 2 и теоремы Понтрягина–Куратовского следует, что каждый f-граф из серии $V(r), r \geq 1$, в плоскость невложим. Тем более не существует ориентированного вложения $V(r), r \geq 1$, в плоскость.

Таким образом, f-граф F не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть f-граф F атома не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$. Покажем, что F ориентированно вложим в плоскость.

Если ориентированный граф является циклом, все вершины которого помечены буквами, то назовем его *меченым циклом*. При этом буквы могут повторяться. Меченый ориентированый цикл, состоящий из r вершин, — это то же самое, что циклическое

слово длины r в алфавите $\mathcal{X}$ из n, $n \leq r$, букв $x_1, \ldots, x_n$, в котором буквы могут повторяться. Такие слова рассматриваются с точностью до циклических перестановок входящих в них букв, произвольной перенумерации переменных $x_1, \ldots, x_n$ и замены алфавита.

Далее через S_{x_i}, $x_i \in \mathcal{X}$, будем обозначать множество всех вершин x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, на меченом ориентированном цикле, где $\mathcal{X}$ — алфавит, а n — его размер.

Определение. Буквы a и b, соответствующие некоторым вершинам меченого цикла, назовем *зацепленными*, если существуют две пары вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2), $a_i \in S_a, b_i \in S_b, i = 1, 2$, которые мы встречаем последовательно $(\ldots a_1 \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots b_2)$ при циклическом обходе.

Определение. Меченый ориентированный цикл назовем *оснащаемым*, если множество его вершин можно разбить на два класса, причем буквы любых двух вершин из одного класса не зацеплены и вершины, обозначенные одной и той же буквой, принадлежат одному классу. Фиксированное разбиение на два класса назовем *оснащением* ориентированного цикла.

Определение. *Хордовой диаграммой* назовем меченый ориентированный цикл, в котором каждая буква встречается ровно два раза. Оснащаемую хордовую диаграмму назовем *d-диаграммой.*

Замечание. Хордовую диаграмму можно также эквивалентно определить как f-граф, состоящий из одного ориентированного цикла.

Определение. *Графом пересечений* $\Gamma(O)$ меченого ориентированного цикла O назовем неориентированный граф, вершины которого (v_i) находятся во взаимно-однозначном соответствии с множествами S_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, и две вершины которого (v_k и v_l) соединены ребром в том и только том случае, когда буквы соответствующих множеств (S_{x_k} и S_{x_l}) зацеплены.

Графом пересечений $\Gamma(H)$ f-графа H, состоящего из одного ориентированного цикла, будем называть граф пересечений хордовой диаграммы, соответствующей H.

Существует полное описание графов, представимых как графы пересечений хордовых диаграмм (см. [17]). Графы пересечений содержат довольно много информации о своих хордовых диаграммах. С.В. Чмутов, С.В. Дужин и С.К. Ландо выдвинули [18] гипотезу о том, что класс эквивалентности хордовых диаграмм можно определить их графом пересечений; они доказали гипотезу в случае, когда граф пересечений является деревом. В статье [19] гипотеза была доказана для более общего случая, когда граф пересечений $\Gamma(H)$ хордовой диаграммы H униционический, т.е. $\pi_1(\Gamma(H)) = \mathbb{Z}$. В частности, верно следующее утверждение: f-графы, имеющие один ориентированный цикл (хордовые диаграммы), изоморфны, если их графы пересечений совпадают и представляют собой единственный цикл. Окончательно точку в обсуждениях о связи инвариантных хордовых диаграмм и их графов пересечений поставили С.В. Чмутов и С.К. Ландо в статье [20].

Исследуем теперь меченые ориентированные циклы, имеющие циклический граф пересечений.

Лемма 3. *Пусть граф пересечений некоторого меченого ориентированного цикла O представляет собой замкнутый цикл K (имеющий $n \geq 3$ вершин). Тогда из каждого множества S_{x_i} можно выделить подмножество $S'_{x_i}, i = 1, 2, \ldots, n$, состоящее из двух вершин, такое, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_{x_i}\}_{i=1,2,\ldots,n}$, совпадает с K.*

Доказательство. Меченый ориентированный цикл O с k вершинами имеет следующую запись: $(i_1 i_2 \ldots i_k)$, где вершины $i_1, i_2, \ldots, i_k$ расположены именно в этом порядке

при циклическом обходе.

Также цикл O можно представить как ориентированную окружность с вершинами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Пусть a, b, d_1, d_2 — некоторые вершины цикла O, причем вершины d_1 и d_2 лежат на разных дугах, на которые вершины a и b разбивают окружность. Пусть Z — произвольное непустое подмножество множества вершин цикла O. Далее будем писать, что вершины множества Z ограничены на цикле O вершинами a и b (соответственно a и d_1) в виде $(a \ldots z \ldots d_1 \ldots b \ldots d_2 \ldots)$, если каждая вершина z множества Z лежит на дуге окружности, ограниченной a и b и содержащей вершину d_1 (соответственно на дуге окружности, ограниченной a и d_1).

Будем доказывать индукцией по n — количеству вершин $K = \Gamma(O)$.

База индукции. Пусть $n = 3$ и вершины цикла O обозначены буквами a, b, c. Тогда граф пересечений $\Gamma(O)$ цикла O представляет собой замкнутый цикл, имеющий три вершины v_a, v_b, v_c, т.е. треугольник. Как и выше, обозначим через S_a (соответственно S_b, S_c) множество всех вершин цикла O с одинаковыми буквами a (соответственно b, c), причем вершине v_a (соответственно v_b, v_c) соответствует множество S_a (соответственно S_b, S_c). Вершины v_a и v_b графа пересечений соединены ребром, следовательно, существуют две пары вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2), $a_i \in S_a, b_i \in S_b, i = 1, 2$, расположенных на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots b_2 \ldots)$. Разберем все случаи расположения вершин из множества S_c на цикле O.

Если существует пара (c_1, c_2), расположенная на цикле O в последовательности $(a_1 \ldots b_1 \ldots c_1 \ldots\ a_2 \ldots b_2 \ldots c_2 \ldots)$ или $(a_1 \ldots c_1 \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots c_2 \ldots b_2 \ldots)$, то утверждение леммы при $n = 3$ доказано (граф пересечений каждой из хордовых диаграмм $(a_1b_1c_1a_2b_2c_2)$ и $(a_1c_1b_1a_2c_2b_2)$ представляет собой треугольник).

Осталось рассмотреть следующие случаи.

1. Вершины множества S_c ограничены a_1 и b_1 в виде $(a_1 \ldots c \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots b_2 \ldots)$.
2. Вершины множества S_c ограничены b_1 и a_2 в виде $(a_1 \ldots b_1 \ldots c \ldots a_2 \ldots b_2 \ldots)$.
3. Вершины множества S_c ограничены a_2 и b_2 в виде $(a_1 \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots c \ldots b_2 \ldots)$.
4. Вершины множества S_c ограничены b_2 и a_1 в виде $(a_1 \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots b_2 \ldots c \ldots)$.
5. Вершины множества S_c ограничены a_1 и a_2, причем вершина b_1 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c, а также существует пара (c_1, c_2), расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \ldots c_1 \ldots b_1 \ldots c_2 \ldots a_2 \ldots b_2 \ldots)$.
6. Вершины множества S_c ограничены b_1 и b_2, причем вершина a_2 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c, а также существует пара (c_1, c_2), расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \ldots b_1 \ldots c_1 \ldots a_2 \ldots c_2 \ldots\ b_2 \ldots)$.
7. Вершины множества S_c ограничены a_2 и a_1, причем вершина b_2 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c, а также существует пара (c_1, c_2), расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots c_1 \ldots b_2 \ldots\ c_2 \ldots)$.
8. Все вершины из множества S_c расположены между b_1 и b_2, причем вершина a_1 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c, а также существует пара (c_1, c_2), расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \ldots c_2 \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots b_2 \ldots c_1 \ldots)$.

Остановимся на случае 1 (случаи 2–4 аналогичны). Вершины v_a и v_c графа пересечений $\Gamma(O)$ соединены ребром, следовательно, существуют пара (c_1, c_2) и буква a_3, расположенные в последовательности $(a_1 \ldots c_1 \ldots a_3 \ldots c_2 \ldots b_1 \ldots a_2 \ldots b_2 \ldots)$. Далее вершину a_1 на цикле O рассматривать не будем. Тогда (т.е. если поменять обозначение вершины a_3 на a_1) мы пришли к случаю 8 (случаи 5–7 аналогичны случаю 8).

Так как вершины v_c и v_b графа пересечений $\Gamma(O)$ соединены ребром, то возможны следующие подслучаи.

1.1. Существует вершина b_3, ограниченная c_1 и a_3: $(a_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots b_3 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3c_2b_1a_2c_1b_3)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.2. Существует вершина b_3, ограниченная a_3 и c_2 в виде $(a_3 \dots b_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_2, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3b_3c_2a_2b_2c_1)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.3. Существуют вершины b_3 и c_3, ограниченные c_2 и b_1 в виде $(a_3 \dots c_2 \dots b_3 \dots c_3 \dots b_1 \dots a_2 \dots\ b_2 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_2, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_3\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3b_3c_3a_2b_2c_1)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.4. Существуют вершины b_3 и c_3, ограниченные b_2 и c_1 в виде $(a_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_3 \dots\ b_3 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_2, c_3\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3c_2b_1a_2c_3b_3)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

Пусть не существует вершины из множества S_b, лежащей на дуге, ограниченной b_1 и b_2 и содержащей вершину a_3. Тогда дуга окружности, на которой лежат все вершины множества S_b не пересекается с дугой, на которой лежат все вершины множества S_c. Это невозможно, поскольку вершины v_c и v_b графа пересечений $\Gamma(O)$ соединены ребром.

Таким образом, утвержение леммы при $n = 3$ полностью доказано.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение леммы верно при $n = k, k \geq 3$. Докажем, что оно верно при $n = k+1$. Пусть вершины цикла O помечены буквами a, b, c, d и т.д. Тогда граф пересечений $\Gamma(O)$ представляет собой замкнутый цикл, имеющий $k+1$ вершину v_a, v_b, v_c, v_d и т.д. Не ограничивая общности, полагаем, что вершина v_a соединена ребром с v_d и v_b, а вершина v_b соединена ребром с v_a и v_c. Как и выше, обозначим через S_a (соответственно S_b, S_c, S_d) множество всех вершин цикла O с одинаковыми буквами a (соответственно b, c, d), причем вершине v_a (соответственно v_b, v_c, v_d) соответствует множество S_a (соответственно S_b, S_c, S_d). Теперь обозначим букву b буквой a, получим цикл O'. Через $S_{a'}$ будем обозначать множество всех вершин цикла O', помеченных буквой a. Тогда граф пересечений $\Gamma(O')$ цикла O' представляет собой замкнутый цикл, имеющий k вершин v_a, v_c, v_d и др., и для $\Gamma(O')$ выполняется утверждение леммы по предположению индукции. То есть существуют двухэлементные подмножества S'_a, S'_c, $S'_d, \dots$ множеств $S_{a'}$, S_c, $S_d, \dots$ соответственно, такие, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_a, S'_c, S'_d, \dots\}$, совпадает с $\Gamma(O')$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть вершины v_c и v_d графа $\Gamma(O')$ соединены ребром, т.е. $k = 3$ и $\Gamma(O)$ представляет собой четырехугольник. Тогда существуют a_{i_1}, a_{i_2} из множества $S_{a'}$, c_1, c_2 из множества S_c, d_1, d_2 из множества S_d, расположенные на цикле O' в циклическом порядке $(a_{i_1} \dots d_1 \dots c_1 \dots a_{i_2} \dots d_2 \dots c_2 \dots)$. Вернем исходное буквенное обозначение всем вершинам на цикле O'. Поскольку в графе $\Gamma(O)$ вершина v_a не соединена с v_c, а v_b — с v_d, то вершины a_{i_1}, a_{i_2} не могут одновременно принадлежать множеству S_a (или S_b). Рассмотрим случай, когда вершина a_{i_1} является элементом множества S_a, обозначим ее a_1, а a_{i_2} является элементом множества S_b, обозначим ее b_1. Случай, когда a_{i_1} является элементом S_b, а a_{i_2} — элементом S_a, рассматривается аналогично. Так как v_a не соединена ребром с v_c, то каждая вершина a из множества S_a ограничена c_1 и

c_2 в виде $(c_2 \dots a \dots c_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Также каждая вершина b из множества S_b ограничена d_1 и d_2 в виде $(c_2 \dots a_1 \dots d_1 \dots b \dots d_2 \dots)$. Так как v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, заключаем, что существуют a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b, ограниченные c_1 и d_1 в виде $(c_2 \dots a_1 \dots d_1 \dots b_2 \dots a_2 \dots c_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Таким образом, из множества S_a выделяется подмножество $\{a_1, a_2\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_2\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$, из S_d — подмножество $\{d_1, d_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(c_2 a_1 d_1 b_2 a_2 c_1 b_1 d_2)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой четырехугольник.

Случай 2. Пусть вершины v_c и v_d графа $\Gamma(O')$ не соединены ребром, т.е. $k \geq 4$. Тогда существуют a_{i_1}, a_{i_2} из множества $S_{a'}$; c_1, c_2 из множества S_c; d_1, d_2 из множества S_d, расположенные на цикле O' в циклическом порядке $(c_1 \dots a_{i_1} \dots c_2 \dots d_1 \dots a_{i_2} \dots d_2 \dots)$. Вернем исходное буквенное обозначение всем вершинам на цикле O'. Поскольку в графе $\Gamma(O)$ вершина v_a не соединена с v_c, а v_b — с v_d, то вершины a_{i_1}, a_{i_2} не могут одновременно принадлежать множеству S_a (или S_b). Тогда возможны следующие подслучаи.

Подслучай 2.1. Вершина a_{i_1} является элементом множества S_a, обозначим ее a, а a_{i_2} является элементом множества S_b, обозначим ее b_1. Так как вершина v_a не соединена ребром с v_c в графе $\Gamma(O)$, то вершины множества S_a ограничены c_1 и c_2 в виде $(c_1 \dots a \dots c_2 \dots d_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Так как v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, то существуют вершины a_1, a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b, расположенные на цикле O в циклической последовательности $(c_1 \dots a_1 \dots b_2 \dots a_2 \dots \ c_2 \dots d_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Но такое расположение противоречит тому, что v_b не соединена с v_d в графе $\Gamma(O)$.

Подслучай 2.2. Вершина a_{i_1} является элементом множества S_b, обозначим ее b_1, а a_{i_2} является элементом множества S_a, обозначим ее a_1. Заметим, что так как v_a не соединена ребром с v_c, то не существует вершины a из множества S_a, ограниченной c_1 и c_2 в виде $(c_1 \dots a \dots c_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots)$. Также заметим, что не существует вершины b из множества S_b, ограниченной d_1 и d_2 в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots d_1 \dots b \dots d_2 \dots)$. Учитывая эти замечания и то, что v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, заключаем, что существует a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b, ограниченные c_2 и d_1 (или d_2 и c_1) в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots a_2 \dots b_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots)$ (соответственно в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots b_2 \dots a_2 \dots)$).

Рассмотрим граф пересечений $\Gamma(U)$ хордовой диаграммы U, образованной из $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$, $S' \setminus S'_a$. Вершина графа $\Gamma(U)$, соответствующая множеству $\{a_1, a_2\}$, соединена только с двумя вершинами, одна из которых соответствует множеству $\{b_1, b_2\}$, а другая — множеству S'_d. Вершина графа $\Gamma(U)$, соответствующая множеству $\{b_1, b_2\}$, соединена также только с двумя вершинами, одна из которых соответствует множеству $\{a_1, a_2\}$, а другая — множеству S'_c. Вершины графа $\Gamma(U)$, соответствующие элементам множества $S' \setminus S'_a$, имеют степень два. Таким образом, $\Gamma(U)$ совпадает с $\Gamma(O)$. Лемма доказана. ■

Отметим, что утверждение леммы 3 перестает быть верным, если граф K не является замкнутым циклом. Примером служит следующий меченый ориентированный цикл $\widetilde{O}$: $(d_1, a_1, c_1, d_2, a_2, c_2, b_1, a_3, b_2)$. Его граф пересечений $\Gamma(\widetilde{O})$ не является замкнутым циклом. Каждое из множеств S_b, S_c, S_d состоит из двух вершин, а множество S_a состоит из трех. Выделить две вершины из множества S_a можно тремя способами. Граф пересечений каждого из следующих трех ориентированных циклов $(d_1, a_1, c_1, d_2, c_2, b_1, b_2)$, $(d_1, c_1, d_2, a_2, c_2, b_1, b_2)$, $(d_1, c_1, d_2, c_2, b_1, a_3, b_2)$ не совпадает с $\Gamma(\widetilde{O})$.

Опишем процедуру снабжения вершин произвольного f-графа буквами.

Для каждой окружности A f-графа сделаем следующее. Разными буквами пометим все внутренние хорды окружности A. Концам каждой хорды припишем ту же букву, что и у хорды. Если на окружности A остались вершины, не помеченные буквами, то

поступим таким образом. После удаления окружности A вместе с внутренними хордами и вершинами внешних хорд, хотя бы один конец которых принадлежит A, f-граф разбивается на $m \geq 1$ непустых связных компонент. Обозначим эти компоненты разными буквами (при этом обозначения внутренних хорд и компонент должны быть попарно разными). Теперь для каждой компоненты сделаем следующее. Одна компонента соединена с окружностью A ребрами. Пометим вершины этих ребер на окружности A той же буквой, что и у компоненты. В конечном итоге получим из A окружность, все вершины которой обозначены буквами.

f-Граф назовем *меченым*, если все его вершины помечены буквами указанным образом (вообще говоря, неоднозначным, так как метки на вершинах разных окружностей вводятся независимо друг от друга, т.е. могут повторяться у разных окружностей). Далее будем рассматривать только меченые f-графы.

Лемма 4. *Если f-граф не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию из серии $V(r), r \geq 1$, то каждый его меченый ориентированный цикл оснащаем.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный ориентированный цикл A f-графа и построим граф пересечений $\Gamma(A)$.

Предположим, что $\Gamma(A)$ содержит цикл нечетной длины. Если циклов несколько, выберем среди них наименьший по числу звеньев и выделим его в графе пересечений. Заметим, что в $\Gamma(A)$ не существует ребра, соединяющего две несмежные вершины выделенного цикла C (иначе получим, что существует цикл нечетной длины в $\Gamma(A)$, у которого звеньев меньше). Теперь будем рассматривать только те множества вершин с одинаковыми буквами на цикле A, которым соответствуют вершины цикла C. По лемме 2 из каждого множества S_{x_i} (соответствующего некоторой вершине цикла C) можно выделить подмножество $S'_{x_i}, i = 1, 2, \ldots, r$, состоящее из двух вершин, такое, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_{x_i}\}_{i=1,2\ldots,r}$, совпадает с C. Это означает, что в самом f-графе существует под-f-граф, f-гомеоморфный препятствию из серии $V(r), r \geq 1$. Противоречие с условием леммы.

Итак, граф пересечений $\Gamma(A)$ не содержит цикла нечетной длины. А значит, является двудольным. То есть множество вершин графа $\Gamma(A)$ можно разбить на два класса таким образом, что каждое ребро графа соединяет некоторую вершину из одного класса с некоторой вершиной из другого класса. Из двудольности $\Gamma(A)$ следует существование оснащения ориентированного цикла A. Лемма доказана. ■

Вернемся к рассмотрению f-графа F. Пусть F состоит из одного ориентированного цикла A, который по лемме 4 оснащаем (т.е. цикл A является d-диаграммой). Зафиксируем какое-либо оснащение цикла и рассмотрим его реализацию на плоскости без самопересечений. А именно: заметим, что любые буквы из одного класса зацепленными не являются. Тогда все хорды f-графа F, концы которых лежат в одном классе, можно изобразить на плоскости непересекающимися криволинейными отрезками без самопересечений внутри цикла. Аналогично все хорды f-графа F, концы которых лежат в другом классе, можно изобразить на плоскости непересекающимися и без самопересечений вне цикла. Получим ориентированное вложение F в плоскость.

Далее будем считать, что F содержит $\ell \geq 2$ ориентированных циклов. Зафиксируем оснащение на каждом ориентированном цикле. Один класс из определения оснащения пометим числом 0, второй класс пометим 1. Тогда все вершины f-графа F разбиваются на классы 0 и 1.

Хвостом вершины в f-графе назовем полуребро хорды (т.е. неориентированного ребра), содержащее данную вершину. Хвост назовем *внешним* (*внутренним*), если он лежит на внешней (соответственно внутренней) хорде f-графа. В произвольном неори-

ентированном графе под хвостами вершины будем понимать содержащие ее полуребра.

Замкнутой цепью назовем f-граф, состоящий из $s \geq 1$ ориентированных циклов и циклически соединяющих хорд, как на рис. 7,a. При $s = 1$ замкнутая цепь состоит из одного ориентированного цикла с внутренней хордой.

Построим для f-графа F дерево T следующим образом. Если в графе F есть замкнутая цепь, то выберем произвольную хорду, входящую в цепь, и *разделим* ее: выделим на хорде две вершины (см. рис.7,b), обозначим их красным цветом, а часть хорды, соединяющую красные вершины, удалим (см. рис. 7,c). Повторяем предыдущий шаг для полученного графа, пока не получим граф, не содержащий замкнутых цепей. Далее каждый ориентированный цикл стянем в точку (см. рис. 7,d). Получим дерево T, при этом для каждой вершины дерева естественным образом определен ориентированный циклический порядок ее хвостов.

Далее под циклическим порядком вершины дерева будем понимать ориентированный циклический порядок ее хвостов.

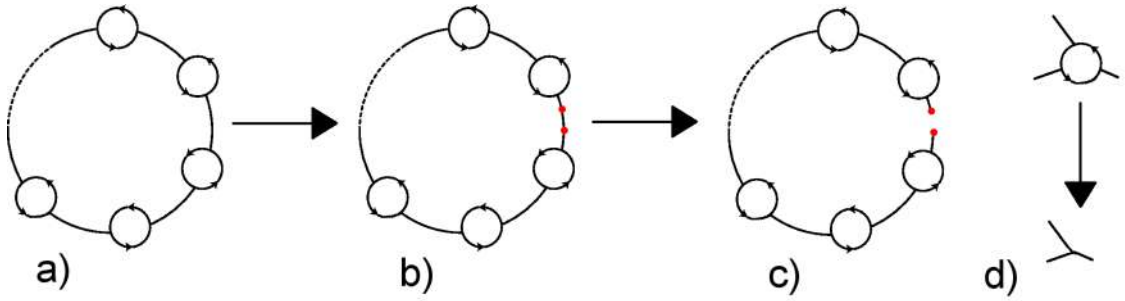


Рис. 7. Разделение хорды, входящей в замкнутую цепь

Если две красные вершины лежали на одной внешней (внутренней) хорде в F, то такие вершины назовем *out-идентичными* (соответственно *in-идентичными*). Будем говорить, что вершины *идентичны*, если они являются *out*-идентичными или *in*-идентичными.

Лемма 5. *Любое дерево с заданным циклическим порядком его вершин* (см. выше) *можно изобразить с учетом этого порядка без самопересечений на плоскости внутри окружности, причем вершины дерева будут лежать на окружности, а ребра представлять собой прямые отрезки.*

Замечание. Вложение дерева с учетом циклического порядка его вершин состоит в следующем. Обозначим через U указанную реализацию дерева внутри окружности. Для каждой вершины v в U ориентированный циклический порядок полуребер в вершине v, задаваемый вложением и ориентацией полуребер против часовой стрелки, должен совпадать с циклическим порядком дерева в вершине v.

Доказательство. Индукция по N — числу вершин дерева. При $N = 2$ (т.е. для простого ребра) утверждение леммы очевидно.

Пусть лемма верна при $N = \kappa$. Рассмотрим дерево с $N = \kappa + 1$ числом вершин. В любом дереве существует висячая вершина (т.е. вершина степени 1). Выделим ребро в нашем дереве, которому принадлежит висячая вершина, и обозначим буквой l вершину-конец ребра, отличную от висячей. Очевидно, что степень вершины l больше или равна двум.

Удалим висячую вершину. Получится дерево с $N = \kappa$ вершинами, которое можно вложить в плоскость указанным образом. Рассмотрим такое вложение. Обозначим через X множество замкнутых связных областей, на которые окружность и вложенное в

него дерево разбивают плоскость. Отметим, что все элементы множества X являются выпуклыми.

1. Рассмотрим случай, когда вершина l после удаления висячей вершины стала висячей. Поскольку в дереве нет циклов, то существует замкнутая область, которая является элементом множества X и границей которой являются ребра дерева, в том числе ребро с концом l, и некоторая дуга окружности. Соединим отрезком произвольную внутреннюю точку дуги и вершину l. Очевидно, этот отрезок будет находиться внутри области, а значит, не будет пересекаться с другими отрезками. Получим искомое вложение в плоскость дерева с $N = \kappa + 1$ числом вершин.

2. Теперь рассмотрим случай, когда степень вершины l до удаления висячей вершины была больше двух. Тогда существуют два ребра: одно предшествует удаленному, другое последует за удаленным в соответствии с циклическим порядком вершины l.

Предположим, что существует область — элемент множества X, в границу которой входят предшествующее и последующее ребра. Поскольку в дереве нет циклов, в границу этой области входит некоторая дуга окружности, внутреннюю точку которой можно соединить отрезком с вершиной l, что даст искомое вложение.

Пусть в множестве X не существует замкнутой области с границей, содержащей предшествующее и последующее ребра. Тогда рассматриваем область, границей которой являются ребра дерева, в том числе предшествующее (или последующее) ребро. Данная область аналогична рассмотренной из п. 1. Она содержит в качестве границы некоторую дугу окружности. Соединив отрезком произвольную внутреннюю точку дуги и вершину l, в итоге получим искомое вложение. Лемма доказана. ■

Определение. *Препятствием* V^1 назовем граф, состоящий из трех ребер l_1, l_2, l_3 и двух вершин, на которых задан ориентированный циклический порядок: (l_1, l_2, l_3) на одной вершине и такой же на второй (рис. 6,*a*).

Пусть T_1 — описанное вложение дерева T в плоскость; E — окружность, на которой лежат вершины дерева T_1. Если дерево T_1 не содержит красных вершин, то искомое вложение f-графа F в плоскость получается из T_1 заменой каждой вершины ориентированным циклом. Далее считаем, что дерево T_1 содержит красные вершины.

Получим из T_1 связный граф G следующим образом: соединим ребром идентичные вершины дерева T_1. Отметим, что каждая пара идентичных вершин в графе G лежит на некотором цикле. Также ясно, что произвольная не красная вершина на каком-либо цикле в G имеет лежащие на этом цикле хвосты, которые помечены одной буквой и поэтому принадлежат одному классу.

Пусть существуют красные вершины A, B, A_1, B_1 дерева T_1, лежащие на E в этом циклическом порядке, причем вершина A идентична A_1, а вершина B идентична B_1. Соединим A с A_1 и B с B_1 путями в дереве T_1.

Если эти пути в дереве пересекаются по некоторому пути u, то в графе G выделяется препятствие V^1. Вершинами V^1 будут концы u. На рис. 8,*b* показан пример, как выделяется препятствие V^1 в графе G. Пунктиром обозначена окружность E. Существование препятствия V^1 в графе G означает, что исходный f-граф F содержит под-f-граф, f-гомеоморфный препятствию V, а это противоречит условию. Следовательно, пути в дереве T_1, соединяющие A с A_1 и B с B_1, пересекаются по точке. Эту точку назовем *точкой пересечения* и обозначим буквой O. Путь в дереве, соединяющий A с A_1, будем обозначать через AA_1, а соединяющий B с B_1 — через BB_1.

Предположим, что существует путь u_1 в графе G, соединяющий AA_1 и BB_1. И этот путь точку пересечения не содержит. Буквой K (соответственно L) обозначим конец пути u_1, лежащий на AA_1 (соответственно на BB_1). Через k_1 (соответственно l_1) обо-

значим хвост вершины K (соответственно L), лежащий на пути u_1. Рассмотрим два пути γ_1, γ_2 в графе G, соединяющие K и O: путь γ_1 лежит на BB_1 и не содержит B и B_1, путь γ_2 проходит через вершины B и B_1. Через k_2 (соответственно k_3) обозначим хвост вершины K, лежащий на γ_1 (соответственно γ_2). Хвосты l_2 и l_3 вершины L определяются аналогично хвостам k_2 и k_3. Хвосты k_i и l_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, могут четырьмя способами образовывать циклический порядок на вершинах K и L:

1) (k_1, k_2, k_3) и (l_1, l_3, l_2) (рис. 8,*c*);
2) (k_1, k_3, k_2) и (l_1, l_3, l_2) (рис. 8,*d*);
3) (k_1, k_3, k_2) и (l_1, l_2, l_3) (рис. 8,*e*);
4) (k_1, k_2, k_3) и (l_1, l_2, l_3).

Четвертый случай аналогичен второму. На рис. 8,*c*,*d*,*e* путь u_1 изображен пунктиром. Во всех четырех случаях в графе G выделяется препятствие V^1. На рисунке 8,*f*,*g*,*h* ребра препятствия V^1 выделены жирными пунктирными линиями, а вершинами V^1 являются O и L.

Существование препятствия V^1 в графе G означает, что исходный f-граф F содержит под-f-граф, f-гомеоморфный препятствию V, что противоречит условию.

Таким образом, при удалении точки пересечения из графа G вершины A и B (также A_1 и B_1) не могут лежать в одной компоненте связности. Также класс хвостов точки пересечения, лежащих на AA_1, отличается от класса хвостов этой точки, лежащих на BB_1. Иначе на ориентированном цикле в f-графе F, соответствующем точке пересечения, существовали бы две пары вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2), идущих по циклу в порядке $(a_1b_1a_2b_2)$ и принадлежащих одному классу. Это противоречит существованию оснащения каждого ориентированного цикла f-графа F. Здесь буквой a (b) обозначены хвосты точки пересечения, лежащие на AA_1 (BB_1) и соответствующие хвостам вершины на ориентированном цикле в f-графе F. Отметим также, что путь AA_1 (BB_1) лежит на некотором цикле в G. Поэтому не существует вершины на AA_1 (BB_1) с внешними хвостами на AA_1 (BB_1) из разных классов.

Вернемся к рассмотрению дерева T_1 и вершин A, B, A_1, B_1.

Вершину в T_1 назовем *особой*, если она имеет хотя бы два внешних хвоста, лежащие в разных классах. Заметим, что точка пересечений AA_1 и BB_1 является особой, если вершина A out-идентична вершине A_1, а вершина B out-идентична вершине B_1.

В зависимости от наличия особых вершин в дереве T_1 рассмотрим два случая. И в каждом случае докажем, что существует ориентированное вложение f-графа F в плоскость, причем для каждого ориентированного цикла будет верно следующее:

хорды с вершинами на ориентированном цикле лежат одновременно внутри или вне этого цикла тогда и только тогда, когда они входят в один класс (относительно вершин на цикле).

1. Пусть в дереве T_1 нет особых вершин. Тогда все внешние хвосты произвольной не красной вершины дерева помечены одним классом. Припишем каждой не красной вершине дерева тот же класс, что и у ее внешних хвостов. Распределим красные вершины дерева T_1 по классам K_1 и K_2 следующим образом.

Очевидно, что каждая красная вершина является концом некоторого ребра, второй конец которого красным не является. Рассмотрим каждое ребро дерева T_1 с одним красным концом. Если класс хвоста не красного конца отличен от класса самого конца, то красную вершину ребра определим в класс K_2, иначе определим ее в класс K_1. Отметим, что идентичные вершины определены в один класс, причем все out-идентичные вершины принадлежат классу K_1. В класс K_2 попадают, очевидно, только in-идентичные вершины.

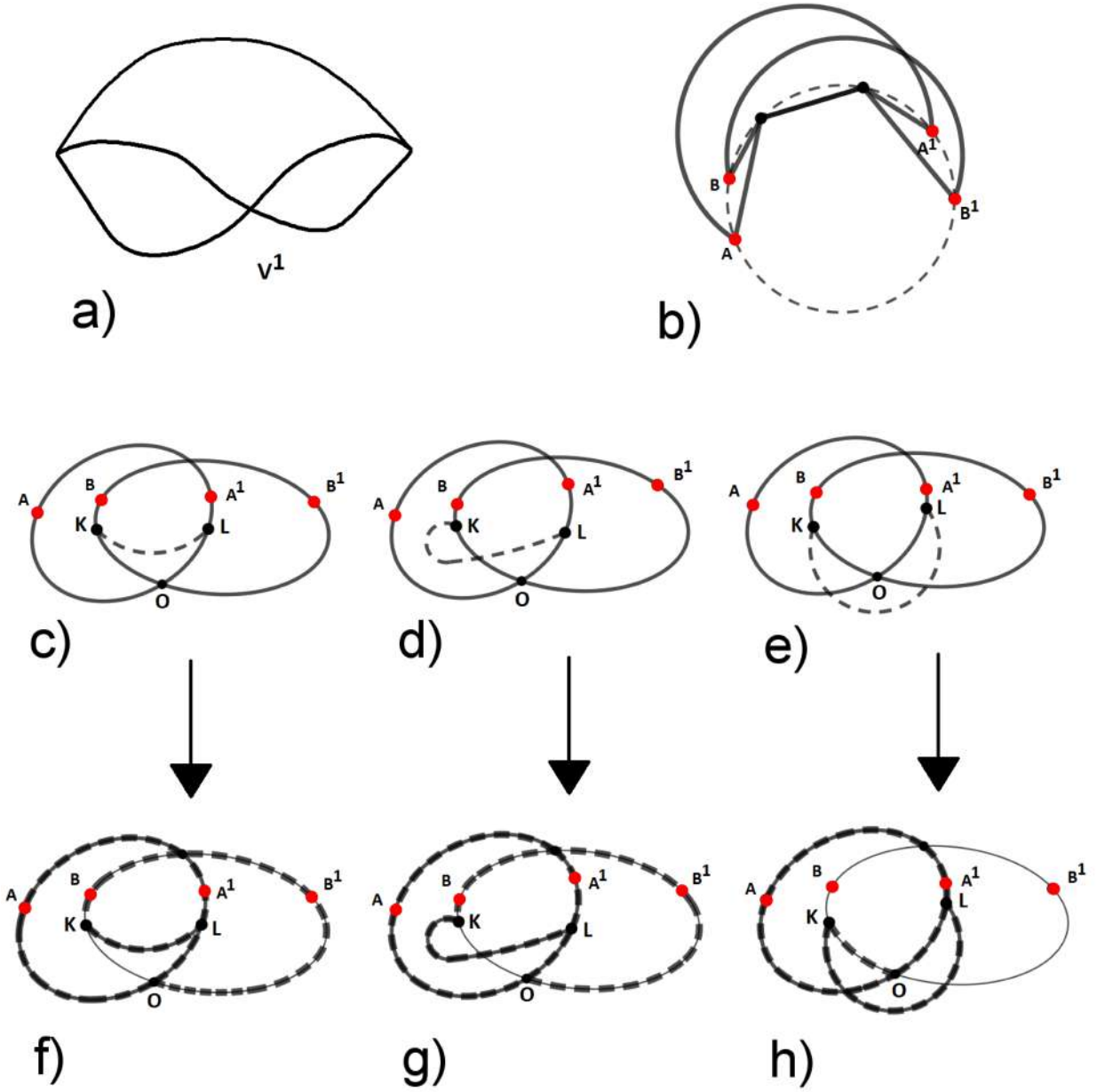


Рис. 8. Выделение препятствия V^1 в графе G

Пусть вершины A, B, A_1, B_1 попали в один класс. Докажем, что такое невозможно. Для этого рассмотрим следующие варианты.

1.1. Вершина A out-идентична вершине A_1, а вершина B out-идентична вершине B_1. Тогда в дереве T_1 есть особая вершина, что противоречит условию.

1.2. Вершина A out-идентична вершине A_1, а вершина B in-идентична вершине B_1. (Случай, когда A in-идентична вершине A_1, а вершина B out-идентична вершине B_1, рассматривается аналогично.) Тогда класс точки пересечения AA_1 и BB_1 совпадает с классом хвостов a_1 и a_2. Но, как мы ранее выяснили, класс хвостов b_1 и b_2 отличен от класса хвостов a_1 и a_2. Поэтому вершины B и B_1 имеют класс K_2. Так как A out-идентична вершине A_1, то A и A_1 имеют класс K_1. Получили противоречие с предположением, что A, B, A_1, B_1 попали в один класс.

1.3. Вершина A in-идентична вершине A_1, а вершина B in-идентична вершине B_1.

Класс точки пересечения AA_1 и BB_1 совпадает либо с классом хвостов a_1 и a_2, либо с классом хвостов b_1 и b_2. Для определенности будем считать, что класс точки пересечения совпадает с классом хвостов a_1 и a_2. Далее по аналогии с п. 1.2 приходим к противоречию с предположением, что A, B, A_1, B_1 попали в один класс.

Таким образом, любые четыре вершины A, A_1, B, B_1 из одного класса, где A идентична A_1, а B идентична B_1, лежат на E в этом циклическом порядке. Значит, в каждом классе идентичные вершины можно соединить вне окружности E непересекающимися криволинейными отрезками. Соединим их в T_1 и заменим каждую вершину (не красную) ориентированной против часовой стрелки окружностью (рис. 9).

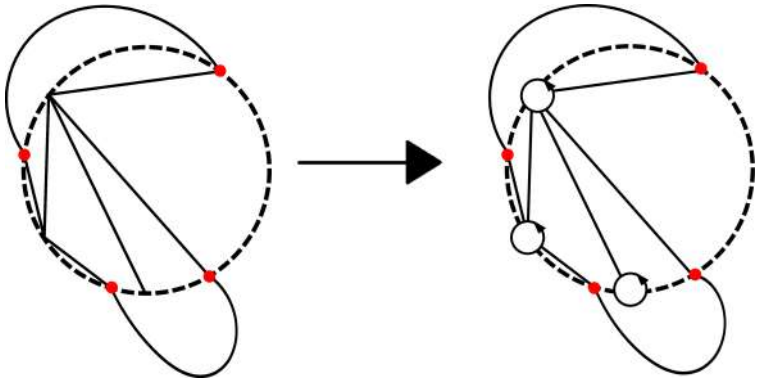


Рис. 9. Замена вершин ориентированными циклами

Поясним, что мы получили исходный f-граф (с метками на всех хордах $+1$) и его погружение в плоскость такое, что все окружности ориентированы одинаково и против часовой стрелки. При этом выбор ориентации "добавленных" окружностей существен (при других выборах ориентации метки на некоторых хордах будут -1, что противоречит нашей договоренности в начале раздела).

Заметим, что если существуют две пересекающиеся хорды в полученном f-графе, то на каждой из них выделены красные вершины, причем класс вершин на одной хорде отличен от класса вершин на другой. Пересечения хорд устраним следующим образом. Каждую внутреннюю хорду полученного f-графа, на которой выделены красные вершины из класса K_2, переведем внутрь соответствующего цикла с помощью инверсии.

В итоге получим искомое ориентированное вложение f-графа F в плоскость. Заметим, что в этом вложении все ориентированные циклы лежат вне друг друга.

2. Пусть в дереве T_1 есть особые вершины. Индукцией по n — числу особых вершин — докажем, что существует указанное вложение f-графа F в плоскость.

База индукции. Пусть $n = 1$. Разобьем на два класса множество вершин дерева T_1, исключая особую вершину w, следующим образом. Существует единственный путь, соединяющий произвольную вершину v дерева с особой. Определим вершину v в тот же класс, в котором и хвост особой вершины, лежащий на этом пути.

Идентичные вершины попадут в один класс (иначе в графе G существовал бы цикл с вершиной w, хвосты которой, лежащие на цикле, имели разные классы).

Деревом T_1^1 (соответственно T_1^2) назовем поддерево дерева T_1, множество вершин которого состоит из w и всех вершин класса 0 (соответственно 1).

Тогда вершина w не является особой относительно T_1^1 (соответственно T_1^2). Из T_1^1 и T_1^2 получим ориентированное вложение некоторых f-графов (см. случай 1), ориентированные циклы которых лежат вне друг друга. Эти f-графы имеют один общий ориентированный цикл (которому соответствует w), причем все хорды f-графов лежат

вне этого цикла. Инверсией переведем один из f-графов внутрь этого цикла. Тем самым получим искомое ориентированное вложение f-графа F в плоскость.

Шаг индукции. Пусть при $n = k$ существует ориентированное вложение f-графа F в плоскость. Рассмотрим случай, когда $n = k+1$. Выберем произвольную особую вершину w дерева T_1.

Аналогично описанному в базе индукции определим деревья T_1^1 и T_1^2. Тогда вершина w не является особой относительно T_1^1 (T_1^2). Значит, из T_1^1 и T_1^2 по предположению индукции можно получить ориентированные вложения двух f-графов. Эти f-графы имеют один общий ориентированный цикл (которому соответствует w). Если оба f-графа реализованы одновременно внутри или вне общего цикла, применим инверсию (относительно этого цикла) к одному из них. Тем самым получим искомое ориентированное вложение f-графа F в плоскость.

Таким образом, f-граф F ориентированно вложим в плоскость. Следовательно, по теореме 1 атом с соответствующим f-графом F является высотным. Достаточность доказана. ■

Утверждение 2 (В.А. Трифонова, минимальность списка препятствий V и $V(r), r \geq 1$). *Препятствие V и серия препятствий $V(r), r \geq 1$ образуют минимальное (по включению) множество препятствий, для которого выполнено свойство из теоремы K_1.*

Замечание. Минимальность списка препятствий означает, что для любого собственного подмножества этого множества препятствий не выполнено свойство из теоремы K_1. Это равносильно выполнению следующего условия: одно препятствие нельзя перевести в другое с помощью операции взятия под-f-графа и последующего применения f-гомеоморфизма.

Из условия минимальности списка следует (с учетом критерия K_1) следующее свойство: под-f-граф любого из препятствий, не совпадающий с препятствием, соответствует высотному атому.

Доказательство.

У препятствия V есть только два под-f-графа, не совпадающие с этим препятствием: один из них состоит из двух окружностей и одной внешней хорды, другой состоит из двух окружностей и двух внешних хорд.

Заметим, что у f-гомеоморфных f-графов существует естественная биекция между множествами окружностей, число вершин у которых отлично от двух. Число окружностей у препятствия V и у любого его под-f-графа два. А число окружностей у каждого из препятствий $V(r), r \geq 1$, только одно, причем число вершин на окружности у каждого из этих препятствий больше двух. Таким образом, препятствие V нельзя перевести в препятствие $V(r)$, $r \geq 1$, с помощью операции взятия под-f-графа и последующего применения f-гомеоморфизма. Аналогично можно показать, что препятствие $V(r)$, $r \geq 1$, нельзя перевести в препятствие V с помощью операции взятия под-f-графа и последующего применения f-гомеоморфизма.

Препятствия $V(r), r \geq 1$ попарно не изоморфны, поскольку число вершин на их окружностях попарно различно. Графы пересечений препятствий $V(k)$ и $V(l)$, $k \neq l$, представляют собой циклы соответственно из $2k+1$ и $2l+1$ вершин. Взятие под-f-графа у препятствия $V(k)$ может уменьшить количество внутренних хорд этого препятствия, что приведет к удалению вершин у его графа пересечений. Заметим, что цикл $2k+1$ нельзя привести к циклу $2l+1$ удалением вершин. Пусть граф пересечений некоторого под-f-графа препятствия $V(k)$ не является циклом. Тогда необходимо добавить внутренние хорды к окружности L этого под-f-графа, чтобы граф пересечений полученно-

го f-графа представлял собой цикл. Однако операции f-гомеоморфизма не добавляют новых внутренних хорд к L. Следовательно препятствие $V(k)$ нельзя перевести в препятствие $V(l)$ с помощью операции взятия под-f-графа и последующего применения f-гомеоморфизма. ■

Следствием из теоремы K_1 является

Теорема K_2 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома [15]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит подграфа, гомеоморфного полному двудольному графу $K_{3,3}$, и не содержит под-f-графа, f-гомеоморфного препятствию V.*

Доказательство. Если f-граф F атома содержит подграф, гомеоморфный полному двудольному графу $K_{3,3}$, то по теореме Понтрягина–Куратовского такой f-граф в плоскость невложим. Тем более не существует ориентированного вложения F в плоскость.

Пусть атом высотным не является. Рассмотрим его f-граф. По теореме 2 этот f-граф содержит под-f-граф, f-гомеоморфный препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$. Но любое препятствие из этой серии содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (лемма 2). Теорема доказана. ■

4. Новое доказательство гипотезы В.А.Васильева

В данном разделе приводится новое доказательство гипотезы В.А. Васильева [21] о критерии планарности графа с вершинами степени 4 и дополнительной крестовой структурой. Впервые гипотеза была доказана В.О.Мантуровым [22].

Гипотеза (В.А. Васильев [22]). *Если 4-валентный граф с крестовой структурой в вершинах не вложим в плоскость с сохранением этой структуры, то у него найдутся два цикла, не имеющие общих ребер и имеющие ровно одну точку перекрестья*[1].

Здесь приводится наше новое доказательство, опирающееся на теорему K_1, доказанную в предыдущем разделе.

Замечание. Мы будем рассматривать только связные и конечные графы; петли и кратные ребра допускаются.

Пусть дан граф, все вершины которого имеют степень 4, и задана некоторая вершина на нем. Назовем *крестовой структурой полуребер* в этой вершине любое разбиение четырех входящих в нее полуребер на две пары. При этом назовем *крестовой структурой графа* крестовую структуру полуребер в каждой его вершине. Ребра из каждой пары будем называть *противоположными*. Графы с крестовой структурой будем называть *крестовыми*.

Понятие противоположности будет важно при вложениях крестовых графов в поверхности: будем говорить, что граф вложим в двумерную поверхность *с сохранением крестовой структуры*, если существует такое вложение, что полуребра, противоположные в вершине, являются противоположными на поверхности. Любой четырехвалентный граф, вложенный в поверхность, естественным образом наследует из этой поверхности крестовую структуру. Будем называть не противоположные полуребра, инцидентные одной вершине, *соседними*.

Крестовый граф называется X-*планарным*, если его можно вложить в плоскость с сохранением крестовой структуры.

[1] В этом виде (более точно, в виде критерия) гипотеза сформулирована в статье В.О.Мантурова [22], а в работе В.А.Васильева [21] гипотеза сформулирована (как теорема Мантурова) для 4-валентных графов с крестовой структурой, имеющих лишь одну уникурсальную окружность.

Общая вершина двух путей на крестовом графе, не имеющих общих ребер, называется *вершиной перекрестья*, если один из этих путей последовательно проходит по полуребрам из одной пары, выходящим из этой вершины, а второй путь последовательно проходит по полуребрам из другой пары.

Теорема (В.О. Мантуров, критерий планарности графов с крестовой структурой. *Крестовый граф X-планарен тогда и только тогда, когда он не содержит двух несамопересекающихся циклов без общих ребер, имеющих ровно одну вершину перекрестья.*

Заметим, что в формулировке теоремы слово "несамопересекающихся" можно опустить. Также не накладывается никаких ограничений на количество (нетрансверсальных) пересечений двух циклов. Далее мы будем называть *препятствием Васильева* два цикла без общих ребер, имеющие единственную точку перекрестья.

Доказательство необходимости. Предположим, что в X-планарном крестовом графе есть два цикла C_1 и C_2, имеющие ровно одну вершину A перекрестья. Рассмотрим вложение такого графа в плоскость с сохранением крестовой структуры. Цикл C_1 делит плоскость на две части. Поскольку только вершина A является для циклов C_1 и C_2 точкой перекрестья, то в вершине A цикл C_2 переходит из одной части в другую, оставаясь в остальных общих верщинах в той же части. Такого вложения быть не может, получим противоречие.

Доказательство достаточности. Пусть крестовый граф Г не является X-планарным. Покажем, что в нем содержатся два несамопересекающихся цикла без общих ребер, имеющих ровно одну вершину перекрестья.

Нам понадобится следующая теорема:

Теорема 2 (В.О.Мантуров, критерий высотности атома [2]). *Атом $X = (P^2, K)^{\#}$ является высотным тогда и только тогда, когда его остов K является X-планарным.*

Замечание. Отношение противоположности в крестовой структуре графа K определяется в соответствии с расположением ребер на поверхности P^2.

Любой атом может быть полностью восстановлен по следующим комбинаторным данным:

1. Остов (четырёхвалентный граф);

2. Крестовая структура и

3. С-структура (в каждой вершине выделены две пары *соседних* полуребер, которые образуют границы чёрных колец).

Снабдим произвольным образом С-структурой граф Г. Получим атом X.

Тогда по теореме 2 атом X не высотный, поскольку его остов Г не X-планарен. Возникают два случая:

1) Атом X не ориентируемый;

2) Атом X ориентируемый. Тогда из теоремы K_1 следует, что его f-граф содержит под-f-граф, f-гомеоморфный препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$.

Рассмотрим первый случай.

Напомним, что замкнутой цепью мы называли f-граф без меток, состоящий из $s \geq 1$ окружностей и циклически соединяющих хорд (см.рис. 10). При $s = 1$ замкнутая цепь состоит из одной окружности с внутренней хордой. *Препятствием O* назовем замкнутую цепь с метками ± 1 на неориентированных ребрах, причем количество меток -1 нечетно.

Определение. Назовем два f-графа *эквивалентными*, если один из другого можно получить последовательностью следующих операций. Разрешается заменять ориентацию всех ребер какого-то цикла и одновременно изменять метки на всех неориен-

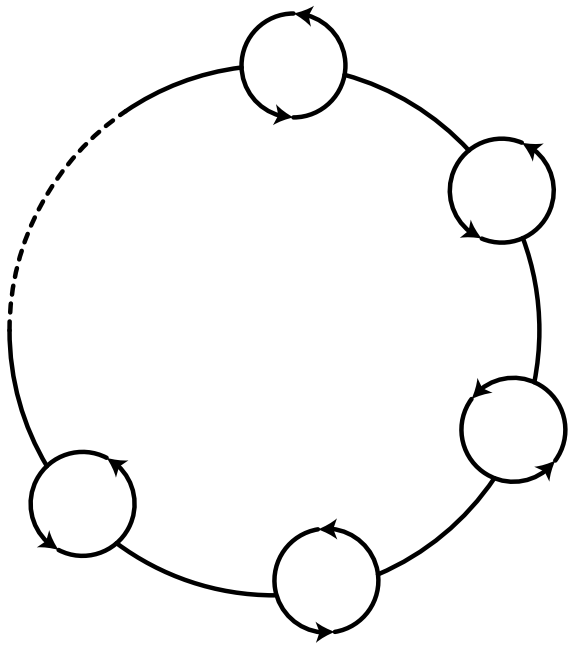


Рис. 10. Замкнутая цепь

тированных ребрах, инцидентных этому циклу, на противоположные (если при этом оба конца неориентированного ребра не принадлежат данному циклу). Если оба конца неориентированного ребра принадлежат данному циклу, то метка на этом ребре не меняется.

В работе А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1] показано взаимно-однозначное соответствие между эквивалентными f-графами и изоморфными атомами. В частности, все f-графы, эквивалентные f-графу с метками $+1$ на всех неориентированных ребрах, задают ориентируемые атомы.

Лемма (критерий ориентируемости атома). *Атом ориентируем тогда и только тогда, когда его f-граф G не содержит под-f-графа, представляющего собой препятствие O.*

Доказательство.

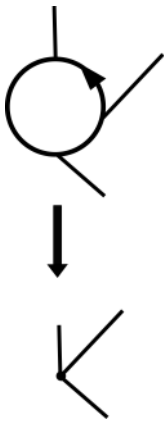


Рис. 11. Стягивание окружности в точку

Докажем необходимость утверждения леммы. Пусть атом ориентируем. Возьмем естественную ориентацию поверхности P^2 и тогда все метки в полученном f-графе G будут равны $+1$. Заметим, что замена ориентации на окружностях препятствия O не меняет четность количества меток -1. Поэтому любой f-граф, эквивалентный f-графу G, не содержит под-f-графа, представляющего собой препятствие O. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть f-граф G не содержит под-f-графа, представляющего собой препятствие O.

Если G состоит только из одной окружности и внутренних хорд, то все метки на хордах равны $+1$. Очевидно, что атом с таким f-графом ориентируем. Стянем каждую окружность f-графа в точку (см.рис. 11). Получим граф Y с метками на ребрах. (При построении графа Y не учитывается ориентация окружностей). Рассмотрим его остовное дерево T. Заметим, что путем замены всех меток ребер, инцидентных какой-то вершине дерева, на противоположные, мы все-

гда сможем получить дерево T с метками $+1$ на всех ребрах. Выберем такой набор ориентаций окружностей f-графа, что все метки на ребрах дерева T равны $+1$. Получим f-граф G', эквивалентный f-графу G. Рассмотрим непересекающийся цикл, образованный произвольным ребром e графа Y вне дерева T и некоторыми ребрами дерева. Ребро e имеет метку $+1$, поскольку иначе данный цикл бы содержал единственную метку -1, что означало бы существование препятствия O в f-графе G. Ввиду произвольности выбора ребра e заключаем, что все ребра графа Y имеют метки $+1$. Это означает, что все метки f-графа G' равны $+1$. Поскольку f-графы G и G' эквивалентны, то они задают ориентируемые атомы. Достаточность доказана. ■

В работе А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1] описан алгоритм построения атома по его f-графу. Из данного алгоритма ясно, как по f-графу восстановить остов атома. На рис. 12 показано поведение остова атома в зависимости от меток на неориентированных ребрах f-графа. Остов показан красным цветом. Вершина остова (см.рис. 12a) лежит на ребре с меткой $+1$. Из вершины выходят четыре линии, которые проходят вдоль ребра с меткой и вдоль ориентированных ребер окружностей. На рис. 12b из вершины выходят четыре линии, две из которых проходят вдоль ребра с меткой, делая перекрутку на этом ребре. На рис. 12c показан f-граф с двумя неориентированными ребрами, меченными $+1$ и -1, а также соответствующий f-графу остов.

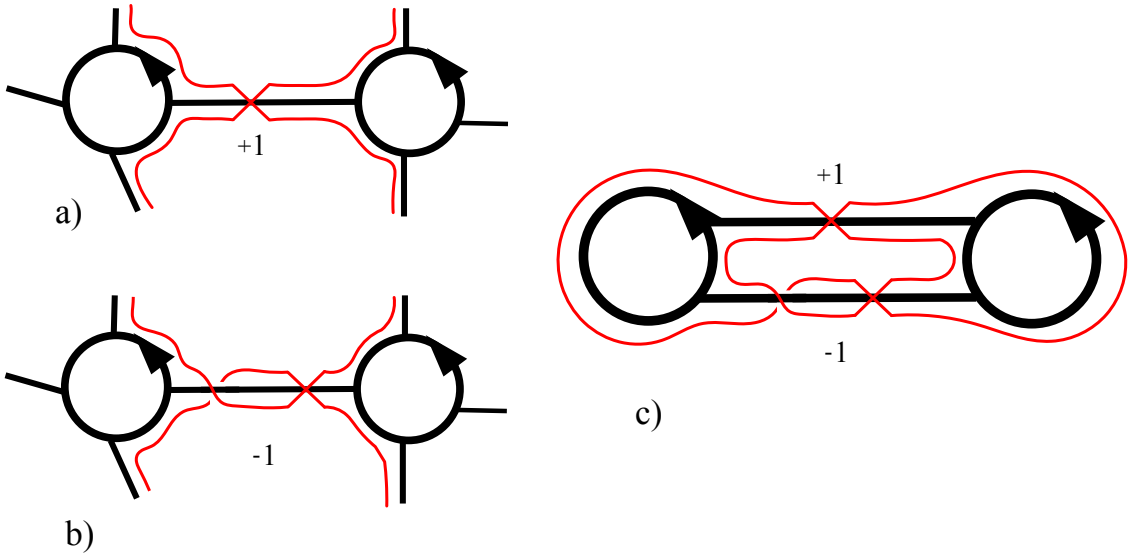


Рис. 12. Восстановление остова атома по его f-графу

Мы рассматриваем случай, когда атом X не ориентируемый. Тогда по лемме его f-граф G содержит под-f-граф, представляющий собой препятствие O. Рассмотрим случай, когда препятствие O есть f-граф G. Восстановим остов Г по f-графу. Выберем вершину A остова на произвольном ребре с меткой -1. Поскольку количество -1 на неориентированных ребрах препятствия O нечетно, то существуют два цикла (препятствия Васильева) графа Г, имеющих ровно одну вершину перекрестья (вершину A). Эти циклы могут пересекаться в других вершинах графа Г, отличных от A, и тогда каждый из этих циклов проходит по соседним полуребрам точек пересечения. Например, на рис. 13 показано препятствие O, состоящее из пяти окружностей и имеющее метку -1 на трех неориентированных ребрах. Красным и синим цветом показаны два цикла - препятствия Васильева, точка перекрестья выделена на одном ребре с меткой -1 и отмечена буквой A.

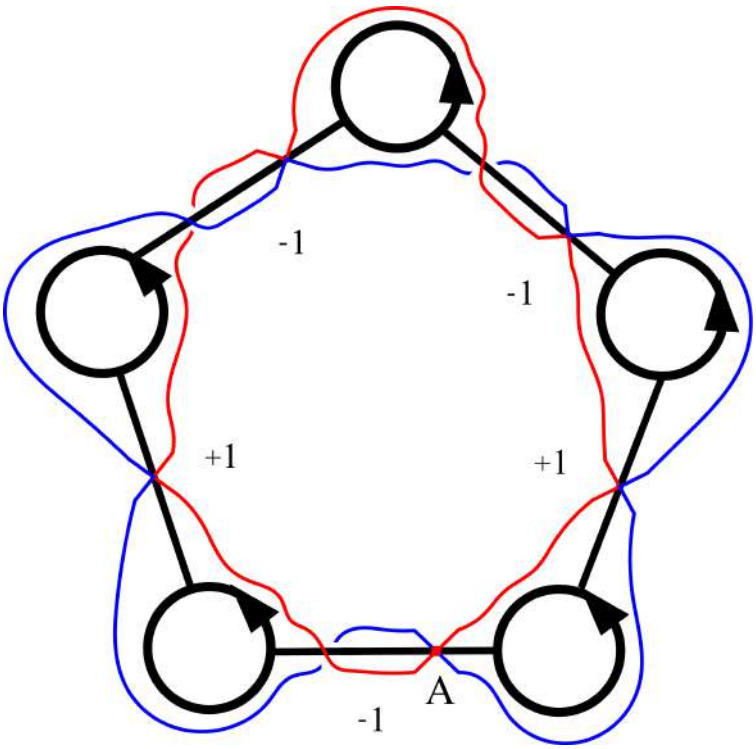


Рис. 13. Препятствие Васильева по препятствию O

Пусть f-граф G не является препятствием O, а содержит его в качестве под-f-графа. Нетрудно показать, что добавление неориентированных ребер и окружностей к O не мешает существованию препятствия Васильева. В этом случае циклы могут самопересекаться и иметь более сложное строение. Пример показан на рис. 14.

Таким образом мы показали, что остов любого неориентируемого атома содержит препятствие Васильева. Первый случай рассмотрен.

Рассмотрим второй случай, когда атом X ориентируемый и не высотный. Поскольку мы исследуем только остов атома X, а все эквивалентные f-графы задают изоморфные остовы соответствующих атомов, будем считать, что все метки на ребрах f-графа G равны $+1$.

Из теоремы K_1 следует, что f-граф G содержит под-f-граф, f-гомеоморфный препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$.

Так как атом с f-графом V имеет двойственный f-граф $V(1)$, то остовы, восстановленные по V и $V(1)$ совпадают. На рис. 15 показано препятствие Васильева для f-графов серии $V(r), r \geq 1$.

Аналогично рассмотренному случаю нетрудно показать, что добавление неориентированных ребер (с метками $+1$) и окружностей к каждому f-графу серии $V(r), r \geq 1$, не мешает существованию препятствия Васильева. Отличие от первого случая лишь в том, что с помощью операции подразбиения неориентированного ребра к внутренним хордам каждого из этих f-графов могут быть добавлены окружности.

Таким образом, если атом ориентируемый и не высотный, то его остов содержит препятствие Васильева. Второй случай рассмотрен. ■

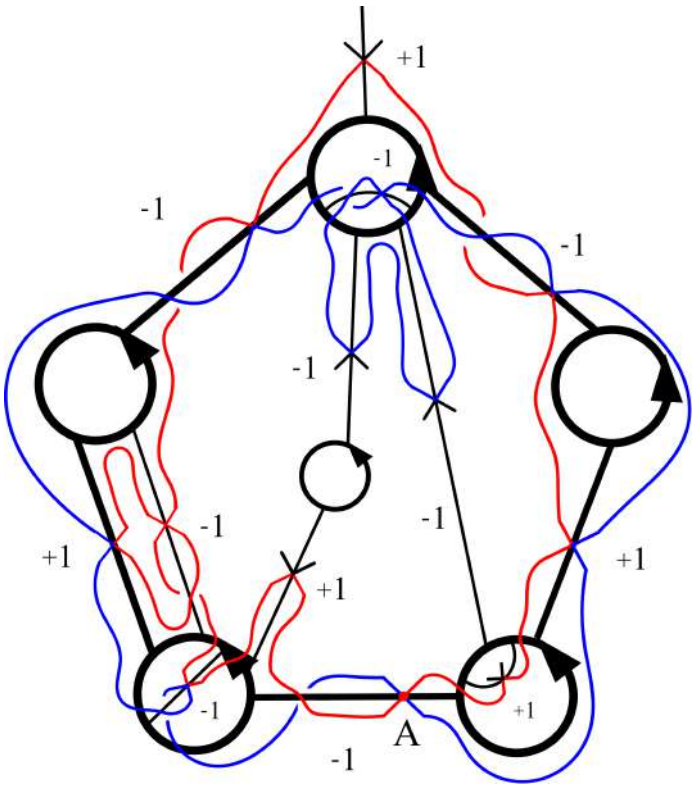


Рис. 14. Препятствие Васильева по f-графу G

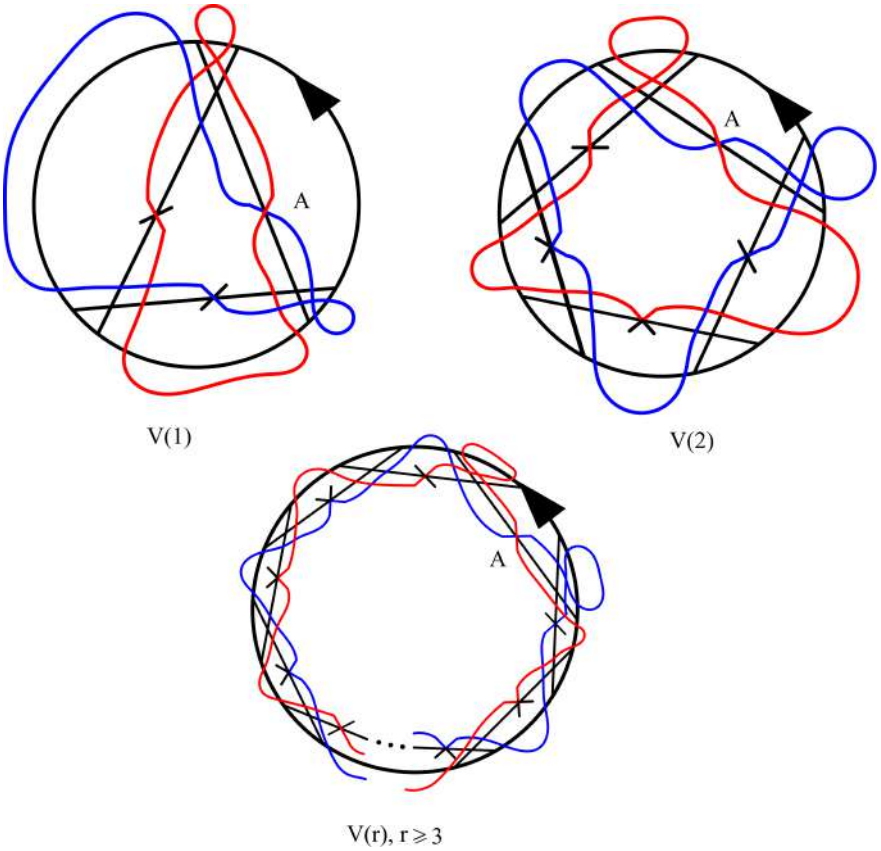


Рис. 15. Препятствие Васильева для f-графов серии $V(r), r \geq 1$

Список литературы

[1] *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.

[2] *Мантуров В.О.* Бифуркации, атомы и узлы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2000. №1. 3–8.

[3] *Фоменко А.Т.* Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, №6. 1276–1307.

[4] *Фоменко А.Т.* Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. **22**, вып. 4. 38–51.

[5] *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1989. **44**, вып. 1. 145–173.

[6] *Фоменко А.Т.* Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологичекий инвариант многомерных интегрируемых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **55**, №4. 747–779.

[7] *Фоменко А.Т.* Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях // Функц. анализ и его прил. 1991. **25**, вып.4. 23–35.

[8] *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, №3. 546–575.

[9] *Ilyutko D.P., Manturov V.O.* Virtual knots: the state of the art. Series on knots and everything. Vol.51. Singapore: World Scientific, 2012.

[10] *Никонов И. М.* Высотные атомы с транзитивной на вершинах группой симметрий // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. №6. 17–25.

[11] *Трифонова В.А.* Высотные частично симметричные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. №2. 33–41.

[12] *Волчанецкий Н. В., Никонов И. М.* Максимально симметричные высотные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. №2. 3–6.

[13] *Кудрявцева Е. А.*, Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Матем. сб., **190**:3 (1999), 29–88.

[14] *Samelson H.*, Orientability of hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Am. Math. Soc. 22, 301-302 (1969).

[15] *Трифонова В.А.*, Критерии высотности атома // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2020, №3, 12–24.

[16] *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Тр. Матем. ин-та РАН. 1994. **205**. 131–140.

[17] *Bouchet A.* Circle graph obstructions // J. Combin. Theory. Ser. B. 1994. **60**. 107–144.

[18] *Chmutov S., Duzhin S., Lando S.* Vassiliev knot invariants II. Intersection graph conjecture for trees, singularities and bifurcations // Adv. Sov. Math. 1994. **21**. 127–134.

[19] *Mellor B.* The intersection graph conjecture for loop diagrams // J. Knot Theory Ramifications. 2000. **9**. 187–211.

[20] *Chmutov S., Lando S.* Mutant knots and intersection graphs // Algebr. and Geom. Topol. 2007. **7**, 1579–1598.

[21] *Васильев В. А.* Инварианты и когомологии первого порядка для пространств вложений самопересекающихся кривых в R // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. **69**, №5. С. 3–52.

[22] *Мантуров В. О.* Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. **69**, №5. С. 169–178.

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Горской Виктории Александровны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Взаимные расположения кубики и двух коник на проективной плоскости» являются постановка задачи и результаты: доказано, что всем известным ограничениям удовлетворяют двадцать одна схема кривых рассматриваемого класса, из которых тринадцать реализованы алгебраическими кривыми степени 7. Для восьми схем вопрос о реализуемости остаётся открытым.

Также сообщаю, что за период подготовительной работы над материалом (2017 – 2020), когда при моем участии была опубликована статья [6] (см. список литературы квалификационной работы) в результате поиска и регулярного мониторинга в поисковой системе Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science по следующим ключевым словам «топология плоских распадающихся алгебраических кривых» обнаружены только работы Г.М. Полотовского по распадающимся кривым степени 6 и работы С.Ю. Оревкова, Е.И. Шустина, А.Б. Корчагина, С. Фидлер-Ле-Туз, М.А. Гущина, А.Н. Коробейникова (в разных сочетаниях соавторства) по распадающимся кривым степени 7, в которых распадение кривой степени 7 на три неприводимых сомножителя рассматривалось только в совместной работе А.Б. Корчагина и Г.М. Полотовского («Алгебра и анализ», 2009, т.21, №2), но для случая других степеней кривых-сомножителей.

Новизна результатов подтверждается также консультациями с моим научным руководителем В.И. Звониловым (доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского), а также с Г.М. Полотовским (доцент кафедры фундаментальной математики ФГАОУ ВО НИУ «Высшая школа экономики»).

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 15.06.2020. На Смотр представлен проект текста.

Горская Виктория Александровна

25 мая 2020 г.
Нижний Новгород, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)**

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра: Алгебры, геометрии и дискретной математики

Направление подготовки: «Математика»
Направленность (профиль): «Фундаментальная математика и приложения»

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема:
**«Взаимные расположения кубики и двух коник
на проективной плоскости»**

Выполнила:
студентка группы №381802м
Горская Виктория Александровна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры,
геометрии и дискретной математики
Звонилов Виктор Иванович

Нижний Новгород
2020 г.

1. Постановка задачи, основные понятия

Исследование топологии распадающихся плоских вещественных алгебраических кривых входит в круг вопросов, относящихся к первой части 16-й проблемы Гильберта. Для первого нетривиального случая – кривые степени 6, распадающиеся в произведение двух M-кривых, пересекающихся без касаний в максимально возможном числе вещественных точек – эта задача была поставлена Д.А. Гудковым в предисловии к книге [1] и решена Г.М. Полотовским в [2]. В настоящее время после длинной серии работ нескольких авторов (точные ссылки можно найти в статье [3]) почти завершено решение аналогичной задачи о кривых степени 7. Кроме этого, в [4] была найдена топологическая классификация кривых степени 6, распадающихся в произведение любого возможного числа неприводимых сомножителей в общем положении, и в [5] была найдена классификация взаимных расположений M-квинтики и пары прямых. Настоящая работа посвящена аналогичному вопросу для случая, когда неприводимые сомножители кривой степени 7 имеют степени 3, 2 и 2.

Напомним некоторые сведения из теории плоских алгебраических кривых.

О п р е д е л е н и е 1.1 *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

О п р е д е л е н и е 1.2 *Множество $\mathbb{R}C_m$ ($\mathbb{C}C_m$) точек вещественной (комплексной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ ($\mathbb{C}P^2$) с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ ($(z_0 : z_1 : z_2)$), удовлетворяющими уравнению $C_m = 0$, называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой C_m.*

О п р е д е л е н и е 1.3 *Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в $\mathbb{C}P^2$).*

Каждая компонента связности множества $\mathbb{R}C_m$ вещественных точек кривой C_m (коротко – вещественная ветвь кривой) в случае неособой кривой гомеоморфна окружности. Если степень кривой чётна, то каждая такая окружность называется *овалом*; каждый овал делит $\mathbb{R}P^2$ на две области: гомеоморфную диску и гомеоморфную листу Мёбиуса. Для данного овала область первого типа считается внутренней, а вторую внешней. Если степень кривой нечётна, то среди её вещественных ветвей имеется ровно одна, вложенная в $\mathbb{R}P^2$ односторонне, она называется *нечётной ветвью*.

Оценку числа N вещественных ветвей кривой степени m даёт классическая

Т е о р е м а 1.1 (**Теорема Харнака** (1876)) $N \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, и эта оценка точна для любого m.

О п р е д е л е н и е 1.4 *Множество* $\mathbb{R}C_m$ *, рассматриваемое с точностью до изотопии в* $\mathbb{R}P^2$ *, называется вещественной схемой кривой* C_m *. Кривые с максимально возможными по теореме Харнака числом ветвей называются М-кривыми, а их схемы – М-схемами.*

Таким образом, вещественная схема *М*-кривой степени 3 состоит из нечётной ветви и одного овала, а вещественная схема *М*-кривой степени 2 представляет собой один овал.

Цель этой работы – найти топологическую классификацию (т.е. список попарно различных вещественных схем) кривых степени 7, распадающихся на кубику и две коники, (т.е. определяемых многочленом вида $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$), предполагая выполнение следующих условий:

(i) C_3, C_2 и $\tilde{C}_2$ *являются М-кривыми;*

(ii) *каждые две из указанных в* (i) *кривых пересекаются без касания в максимально возможном* (*по теореме Безу*) *числе вещественных точек, т.е.* $\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 6$, $\#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 4$*;*

(iii) $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2 = \emptyset$*, т.е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;*

(iv) *все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики;*

(v) *для каждой из коник* $C_2, \tilde{C}_2$ *все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т.е. лежит вне другой коники;*

(vi) *точки пересечения нечётной ветви с разными кониками не могут перемежаться, т.е. нельзя так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем – со второй.*[1]

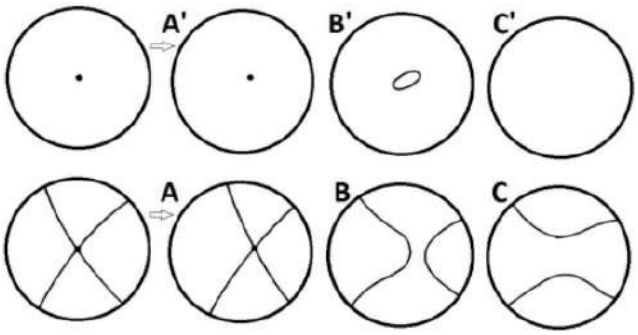
О п р е д е л е н и е 1.5 *Назовём моделью расположения типа* (i) – (vi) (*в дальнейшем для краткости – просто модель*) *набор четырёх топологических окружностей, ровно одна из которых вложена в* $\mathbb{R}P^2$ *односторонне и которая вместе с двумя их трёх остальных окружностей ведёт себя с точки зрения числа и расположения общих точек так, как нечётная ветвь кубики и пара коник в условиях* (i) – (vi); *четвёртая окружность не пересекается с первыми тремя.*

Т е о р е м а 1.2 (Теорема Безу) *Две кривые степеней m и n без общих компонент имеют на комплексной проективной плоскости ровно m × n точек пересечения, если учитывать их с кратностями.*

Т е о р е м а 1.3 (Теорема Брюзотти) *Пусть кривая* C_m *не имеет кратных компонент и все её особые точки* z_i *простые двойные,* $i = 1, 2, \ldots, k$*. Тогда при достаточно малых изменениях коэффициентов кривой* C_m *в окрестности каждой особой точки кривая будет иметь один из видов A, B, C, если особая точка «крест»* (*трансверсальное пересечение*) *и A', B', C', если точка уединенная, причем для каждой точки* z_i *тип её возмущения можно*

[1] Условия (v) добавлено, чтобы сделать задачу более обозримой.

выбрать независимо от выбора типов возмущений для других точек (*см. рис.1.1*).

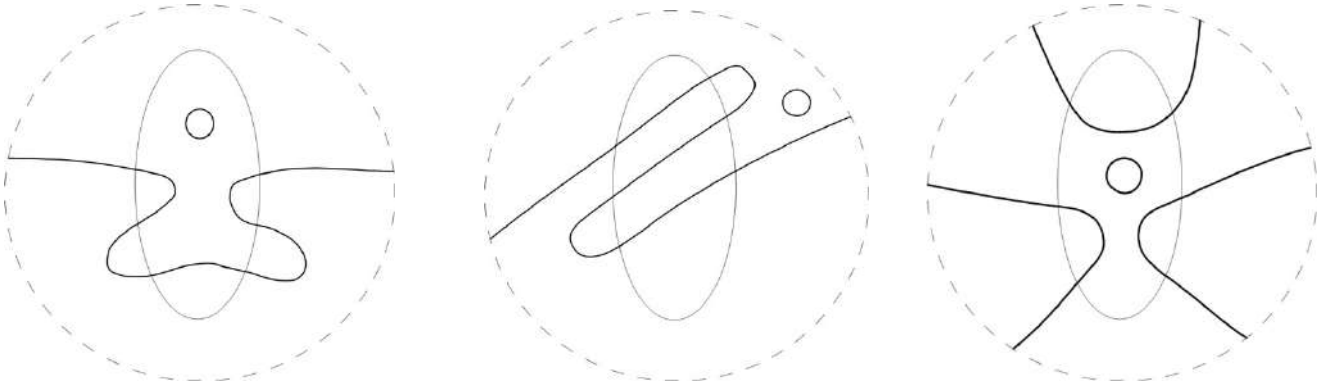


Р и с у н о к **1.1** Способы устранений особой точки

2. Перечисление допустимых моделей

Допустимыми будем называть модели, удовлетворяющие топологическим следствиям теоремы Безу, а также известным ограничениям на взаимные расположения кубики и коники и на взаимные расположения пары коник.

Ограничения на взаимные расположения *M*-кубики и неособой коники состоят в том, что существуют ровно три расположения, в которых нечётная ветвь кубики пересекает конику в шести вещественных точках – см. рис. 2.1[2] (доказательство имеется в [4]).

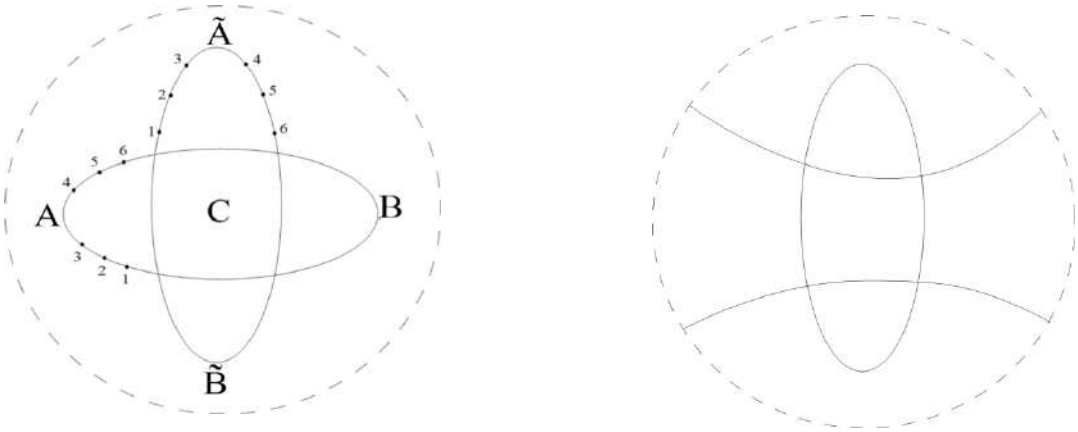


а) б) с)

Р и с у н о к **2.1**

[2] Здесь и ниже на рисунках в качестве модели вещественной проективной плоскости используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого, изображаемой пунктиром, считаются отождествлёнными.

Возможные расположения в $\mathbb{R}P^2$ двух неособых коник с четырьмя общими точками показаны на рис. 2.2. Добавить к правому из них нечётную ветвь, удовлетворяющую условию (v), нельзя, поэтому *всюду ниже рассматривается только левое расположение.*



Р и с у н о к **2.2**

Пусть $\mathbb{R}C_2$ – “горизонтальный” овал на рис. 2.2, $\mathbb{R}\tilde{C}_2$ – “вертикальный”, и A , $\tilde{A}$ − дуги, несущие по шесть точек пересечения с нечётной ветвью кубики. Занумеруем эти точки так, как на рис. 2.2. Записывая номера этих точек при таком движении по нечётной ветви, получим пару перестановок порядка 6.

Следующая лемма легко доказывается непосредственным перебором с учётом рис. 2.1:

Л е м м а 2.1 *На данной дуге возможны только перестановки*

(123456)[3], (165432), (321654), (543216) (*отвечают случаю а*) *рис*. 2.1);

(123654), (165234), (321456), (345216) (*отвечают случаю б*) *рис.* 2.1);

(125634), (163254) (*отвечают случаю в*) *рис.* 2.1),

и обратные к этим перестановкам.

Л е м м а 2.2 *Случаи, когда нечётная ветвь пересекает одну из дуг A , $\tilde{A}$ в соответствии с какой-либо перестановкой из списка леммы* 2.1, *а вторую – в соответствии с обратной к какой-либо перестановке из этого списка, невозможны;*

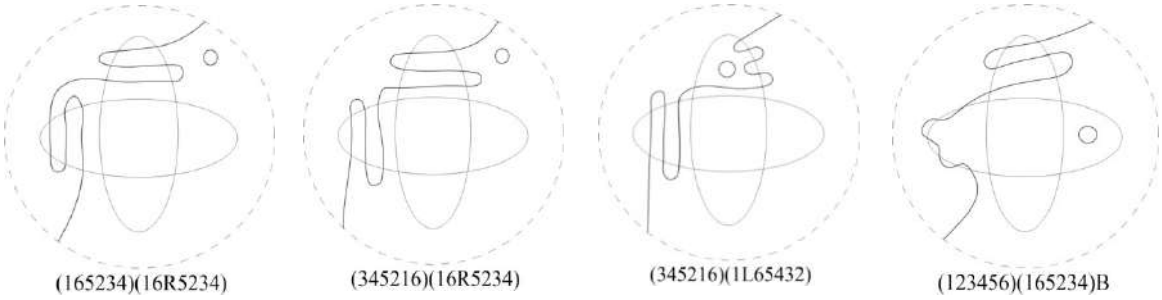
Д о к а з а т е л ь с т в о. Отрицание утверждения влечёт самопересечение нечётной ветви.

Условия (i) – (vi) допускают $2(8 \cdot 8 + 8 \cdot 2) = 160$ пар перестановок. Этот случай подробно рассмотрен в [6]. Результат был сформулирована в виде следующей теоремы:

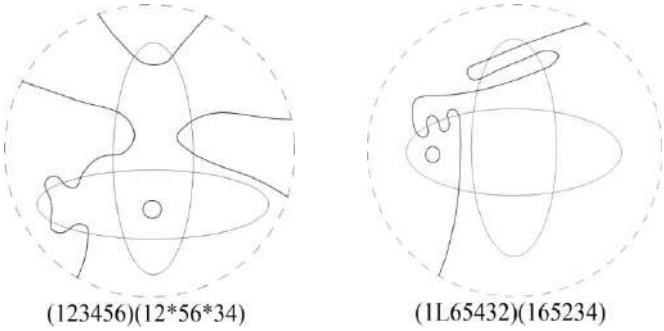
Т е о р е м а 2.1 *Модели, отличные от показанных на рис.* 2.3, 2.4, *не могут быть реализованы как схемы кривых степени* 7. *Из этих шести моделей первые четыре* (*рис* 2.3)

[3] Случаи (123456) первоначально рассматривались в дипломной работе студентки мехмата ННГУ О.Н. Новаковской (2010 г.)

реализуются распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости двух оставшихся (*рис*. 2.4) *открыт*.



Р и с у н о к **2.3**



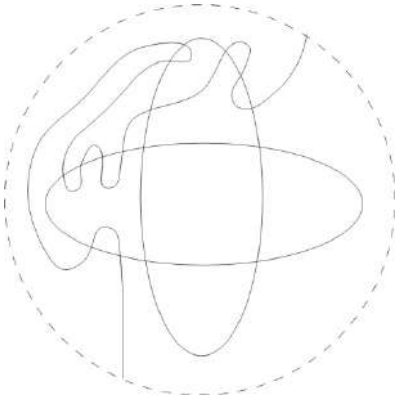
Р и с у н о к **2.4**

Теперь рассмотрим случаи, удовлетворяющие условиям (i) – (v) (т.е. условие (vi) не выполнено). Нечётная ветвь кубики может пересекать дуги A , $\tilde{A}$ в следующих 9 порядках, показанных в таблице 1 (в ячейках указано количество точек пересечения нечетной ветви с указанной дугой кубики).

Т а б л и ц а **1**

Дуга / №пп	$\boldsymbol{A}$	$\tilde{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$	$\tilde{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$	$\tilde{\boldsymbol{A}}$
1	2	2	4	4	-	-
2	2	4	4	2	-	-
3	4	2	2	4	-	-
4	4	4	2	2	-	-
5	2	2	2	2	2	2
6	2	6	4	-	-	-
7	4	6	2	-	-	-
8	2	4	2	2	2	-
9	2	2	2	4	2	-

Пример пересечения нечётной ветви кубики с кониками в порядке №1 показан на рис. 2.5.



Р и с у н о к **2.5**

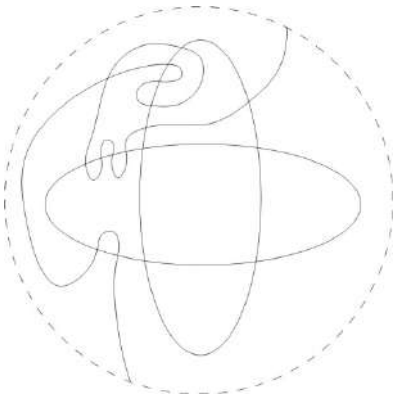
Л е м м а 2.3 *К указанным в лемме 2.1 перестановкам можно добавить следующие, не удовлетворяющие условию* (*vi*)

(561234), (345612) (*отвечают случаю а*) *рис. 2.1*);

(561432), (543612) (*отвечают случаю б*) *рис. 2.1*);

Данная лемма, также как и лемма 2.1, доказывается непосредственным перебором с учётом рис. 2.1.

Рассмотрим объединения перестановок, указанных в леммах 2.1, 2.3 в различных порядках таблицы 1. При этом надо учесть, что не для всех перестановок возможны порядки №1 − №7 в силу самопересечения (пример на рис.2.6).



Р и с у н о к **2.6**

1) Рассмотрим порядки №1 – №4. С помощью «ручного перебора» получим возможные варианты перестановок на дугах коник, которые в итоге для удобства можно объединить в 4 группы (таблица 2). Входящие в одну группу перестановки, получаемые на дуге A, нужно объединить с перестановками, получаемыми на дуге $\tilde{A}$. Например, из 1 группы всего получим 30 объединенных перестановок, из 3 группы – 20 и т.д.

Таблица **2**

1		**2**	
$\boldsymbol{A}$	$\widetilde{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$	$\widetilde{\boldsymbol{A}}$
(12_3456); (1234_56); (12_3654); (1652_34); (3214_56); (34_5216)	(32_1456);(32_1654); (54_3216); (3452_16); (5432_16)	(1236_54); (16_5432); (1654_32); (16_5234); (3216_54)	(12_3456); (12_3654); (34_5216); (1234_56); (1652_34); (3214_56); (12_*56*34); (16*32_*54)
3		**4**	
$\boldsymbol{A}$	$\widetilde{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$	$\widetilde{\boldsymbol{A}}$
(32_1456); (32_1654); (3452_16); (54_3216); (5432_16)	(56_1432); (56_1234); (3456_12); (5436_12)	(3456_12); (5436_12); (56_1432); (56_1234)	(16_5432); (16_5234); (1236_54); (1654_32); (3216_54); (16_*32*54); (12*56_*34)

Здесь и ниже, чтобы избежать большого количества рисунков, мы применяем кодировку моделей, представляющую собой две перестановки 6-го порядка, снабжённые дополнительными символами из набора {R, L, $B, \widetilde{B}, C, *$, _}. Чтобы по коду получить рисунок, нужно нарисовать “заготовку”, показанную на левом рис. 2.2, и провести нечётную ветвь, пересекающую дуги A и $\tilde{A}$ в занумерованных точках в порядке, указанном в первой и второй перестановках соответственно, причём дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие первым двум символам первой перестановки, расположена внутри двуугольника, ограниченного дугой A. Если между соседними (в циклическом порядке, причём скобки не замечаются) символами i и j записана буква R (L), то в области, примыкающей справа (соответственно, слева) к дуге (i, j) нечётной ветви, следует расположить овал. Если же после перестановок записана буква B ($\widetilde{B}$ или C), то овал следует нарисовать в двуугольнике, ограниченном дугой B (соответсвенно, в двуугольнике, ограниченном дугой $\widetilde{B}$, или в четырёхугольнике внутри коник). Дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие последнему символу второй перестановки и первому символу первой перестановки, а также дуги нечётной ветви, отвечающие символам, между которыми стоит *, пересекают один раз граничную окружность модели проективной плоскости. Последний дополнительный символ из набора ставится внутри перестановки в том месте, где нечётная ветвь переходит на другую дугу.

2) Рассмотрим порядок №5. Возможны только восемь следующих случаев:
(12_34_56)(54_32_16); (16_54_32)(12_34_56); (32_16_54)(56_12_34);(54_32_16)(34_56_12); (56_12_34)(16_54_32); (56_14*_*32)(16_*32*_54); (16_52*_*34)(12_*56*_34); (16_34_52)(16*_32_*54).

3) Рассмотрим положения №6 и №7. На дуге A возможны только следующие варианты: (1236_54); (16_5432); (1654_32); (16_5234); (32_1456); (32_1654); (3216_54); (3452_16); (3456_12); (54_3216); (5432_16); (5436_12); (56_1432); (56_1234); (12*56_*34); (16_*32*54); (56_*34*12).

4) Рассмотрим положения №8 и №9. Результаты представлены в таблице 3. Аналогично случаю 1), разобьем возможные варианты на 4 группы.

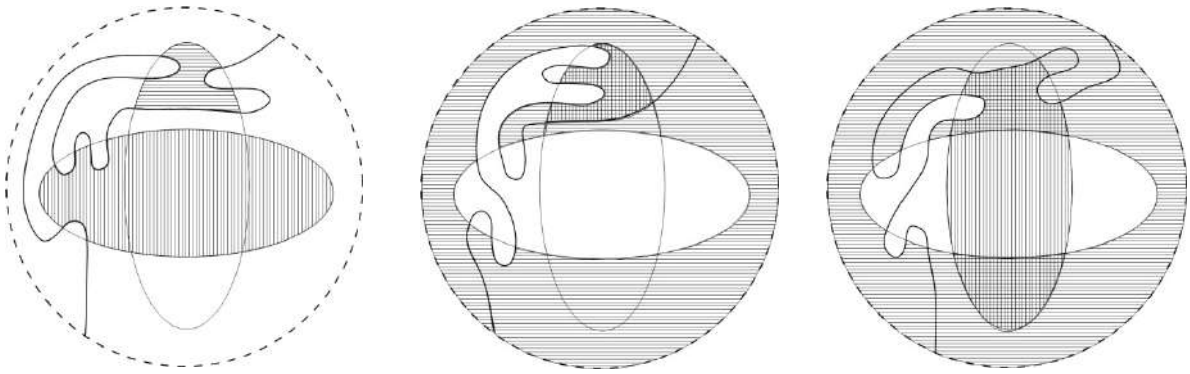
Таблица **3**

1		**2**	
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\tilde{A}}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\tilde{A}}$
(12*_56_*34); (34_56_12)	(32_1456); (32_1654); (54_3216); (3452_16); (5432_16)	(16_54_32); (54_32_16)	(12_3456); (12_3654); (34_5216); (1234_56); (1652_34); (3214_56)
3		**4**	
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\tilde{A}}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\tilde{A}}$
(32_16_54);	(56_1432); (56_1234); (3456_12); (5436_12)	(16_*32*_54); (56_12_34)	(16_5432); (16_5234); (1236_54); (1654_32); (3216_54)

5) С обратными перестановками возможны только такие случаи: (2L1_6543)(61_2543); (2L1_6453)(6541_23); (21_6345)(61_25R43); (21_6345)(65R41_23); (2341_65)(61_25R43); (2341_65)(65R41_23); (4L321_65)(61_2543); (4L321_65)(6541_23).

Таким образом получаются 302 возможные модели. Однако, в силу симметрии (равноправия дуг A , $\tilde{A}$) не всем этим парам отвечают различные расположения; кроме этого, как будет показано ниже многие из полученных расположений не удовлетворяют топологическим следствиям теоремы Безу при пересечении с прямой. Наконец, чтобы получить модель, каждое расположение следует дополнить овалом кубики, а сделать это, как сейчас будет показано, иногда невозможно, а иногда можно двумя способами.

Действительно, в случае рис. 2.1а) овал кубики расположен в шестиугольной компоненте связности дополнения к объединению коники и нечётной ветви кубики внутри конки, а в случае рис 2.1б) – вне двуугольников вне коники. Если пересечение области, допустимой для овала относительно коники C_2 , с областью, допустимой для овала относительно коники $\tilde{C}_2$, пусто (см. пример на рис 2.7.1), то из данного расположения модель получить невозможно. Если это пересечение состоит из одной или двух компонент связности (заштрихованы дважды на рис. 2.7.2 и. 2.7.3), то получаются одна или две модели соответственно.

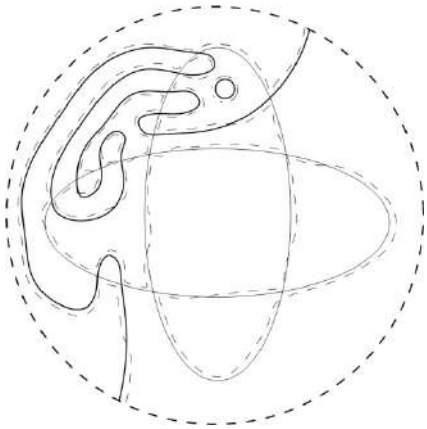


1 2 3

Р и с у н о к **2.7**

Запреты схем расположений кубики и двух коник, получаемые сведением к противоречию с теоремой Безу, проиллюстрируем на примерах, оформленных в виде следующих трёх лемм.

Л е м м а 2.4 *Модель, показанная на рис.* 2.8, *не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени* 7.



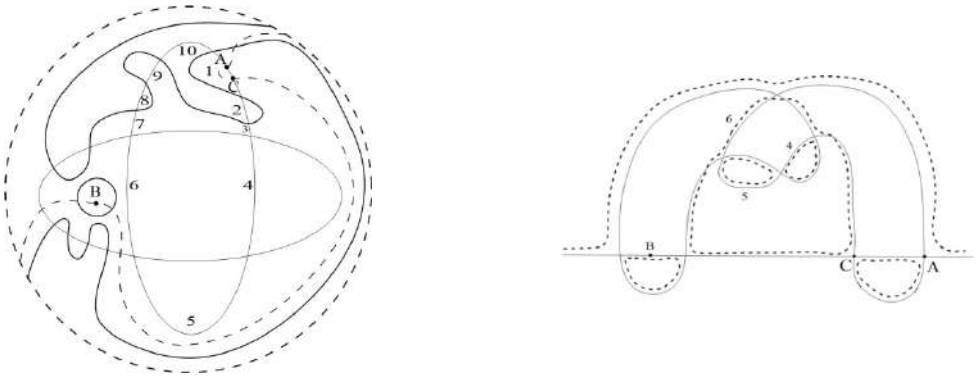
Р и с у н о к **2.8**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой степени 7. Возмутим эту кривую в классе кривых степени 7 так, чтобы после устранения её двойных точек образовалась кривая со схемой, показанной на рис. 2.8 пунктиром – такое возмущение найдется в силу теоремы Брюзотти о независимости возмущений двойных точек простой кривой.[4] Схема возмущенной кривой степени 7 содержит гнездо веса три[5] и ещё один овал, что противоречит теореме Безу[6].

[4] Кривая называется *простой*, если все её особенности – невырожденные двойные точки.
[5] Т. е. три последовательно вложенных друг в друга овала.
[6] Прямая, проходящая через точку, лежащую внутри самого внутреннего овала гнезда, и через точку внутри любого четвёртого овала, пересечёт кривую не менее, чем в девяти точках.

Замечание: в других случаях применения рассуждений из доказательства этой леммы иногда получаются два гнезда веса 2, что также противоречит теореме Безу.

Л е м м а 2.5 *Модель, показанная на рис.* 2.9.1, *не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени* 7.



1 2

Р и с у н о к **2.9**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$. Занумеруем дуги, на которые коника $\tilde{C}_2$ делится точками пересечения с коникой C_2 и с нечётной ветвью кубики, как показано на рис. 2.9.1. выберем точку *A* на дуге с номером 1 и точку *B* внутри овала кубики и посмотрим, как может проходить прямая *AB*, учитывая, что эта прямая не может пересекать каждую конику более, чем в двух точках, и нечётную ветвь кубики более, чем в одной точке (поскольку в силу выбора точки *B* обязательно имеются две точки пересечения с овалом кубики).

Без ограничения общности можно считать, что прямая *AB* в точке *A* не касается коники $\tilde{C}_2$ − этого всегда можно добиться малым шевелением точки *A*. Предположим, что вторая точка пересечения прямой *AB* с коникой $\tilde{C}_2$ − точка *C* – тоже лежит на дуге 1. Тогда прямая может проходить только так, как показано пунктиром на рис.2.9.1. Но тогда прямая *AB* расположена относительно коник C_2 и $\tilde{C}_2$ так, как показано на рис. 2.9.2, что невозможно: устраняя двойные точки (см. пунктир на рис. 2.9.2), получим кривую степени 5, содержащую два овала внутри одного, что противоречит теореме Безу.

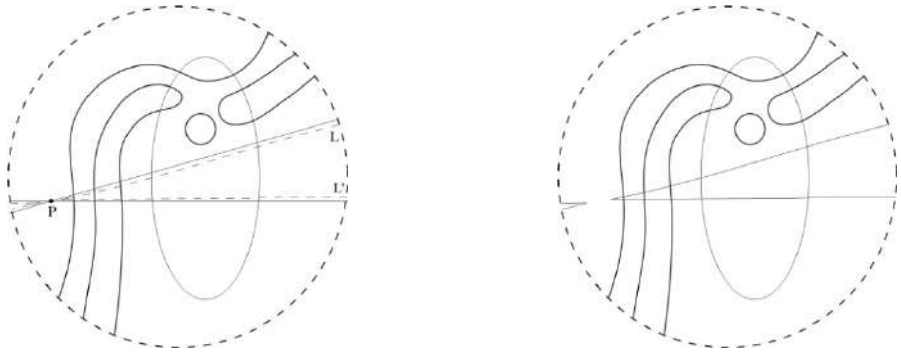
Аналогично доказывается невозможность расположения точки *C* на дугах 8 – 10 коники $\tilde{C}_2$, а расположение точки *C* на любой из остальных дуг влечёт более чем однократное пересечение прямой с нечётной ветвью кубики.

С помощью приёма, описанного в доказательстве леммы 2.5, удалось запретить 10 моделей: (1236_54)(16R5324); (5R6_1234)(123654) (рассмотрена в лемме 2.5); (16_5234)(16R5234); (3R456_12)(165234); (5R6_1234)(165234); (1R2*56_*34)(123654); (12*56_*34)(165234); (1236_54)(1L6*32_*54); (56_1432)(1R2*56_*34); (5436_12)(1R2*56_*34).

После применения методов, описанных в леммах 2.4, 2.5 для дальнейшего исследования остаются 64 модели, коды которых перечислены во вторых столбцах таблиц 4 и 5 в конце статьи; смысл остальных столбцов таблиц будет объяснён ниже.

3. Построения

В работе [4] найдена классификация взаимных расположений прямой, коники и кубики при условиях максимальности и общего положения, аналогичных условиям (i) – (iii), состоящая из 163 схем. “Удвоение” прямой в некоторых расположениях, построенных в [4], даёт реализацию схемами кривых степени 7 четырёх моделей из таблиц 4, 5.



1 2

Р и с у н о к **3.1**

Рассмотрим, например, построенное в [4] расположение, показанное на рис. 3.1.1 (см. №6 в таблице 2 в [4]), немного повернём прямую L вокруг точки P в положение L' так, чтобы L' тоже пересекала нечётную ветвь кубики в трёх точках. Устраняя двойную точку P кривой $L \cup L'$ с помощью достаточно малого возмущения, получим неособую конику, объединение которой с исходными коникой и кубикой рис. 3.1.1 реализует модель №55 из таблицы 4 – см. рис. 3.1.2.

Аналогично из расположений №№ 1, 28, 29, 107, 108, 125, 136, 151, 158 из таблицы 2 работы [4] получаются кривые, реализующие соответственно модели №№ 57, 56, 55, 4, 16, 10, 8, 30, 53 из таблиц 4, 5.

4. Запреты с помощью теории кос и зацеплений

В этом параграфе описано применение предложенного С.Ю. Оревковым в [8] метода запрета изотопических типов алгебраических кривых, основанного на использовании теории кос и зацеплений. Этот метод неоднократно излагался в литературе, поэтому здесь приводится лишь его краткое изложение, необходимое для понимание дальнейшего.

Пусть C_m – простая кривая. Предположим, что существует точка $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C_m$ такая, что пучок L_p прямых с центром в этой точке обладает следующими свойствами:

a) в L_p найдется прямая $l_{\max}$, пересекающая кривую $\mathbb{R}C_m$ в m различных точках (*максимальная прямая*);

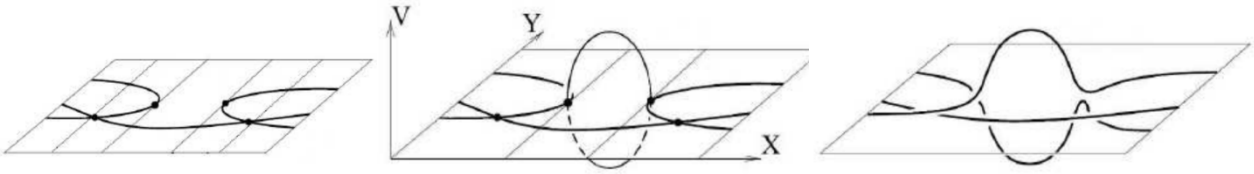
b) любая прямая $l \in L_p$ пересекает кривую $\mathbb{R}C_m$ не менее, чем в $m - 2$ различных точках.

c) каждая прямая пучка имеет не более одной точки двукратного пересечения с $\mathbb{R}C_m$, т. е. каждая из таких *критических прямых* либо касается $\mathbb{R}C_m$, либо пересекает $\mathbb{R}C_m$ в её двойной точке без касания.

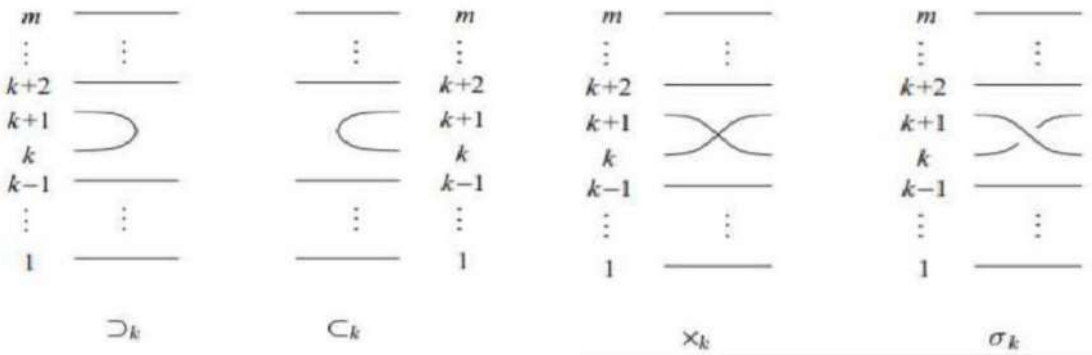
Пучок, удовлетворяющий условиям а) – с), будем называть *максимальным*. Заметим, что выполнения условия с) всегда можно добиться малым шевелением центра пучка.

Выберем аффинные координаты (x, y) так, чтобы прямая $l_{\max}$ (а следовательно, и точка p) оказались в бесконечности и чтобы пучок L_p превратился в пучок параллельных прямых $\{l_t\}$ (см. рис. 4.1, слева), где l_t – прямая с уравнением $x = t$. Изображение схемы кривой в таком виде будем называть *развёрткой, отвечающей прямой* $l_{\max}$.

Эту развёртку удобно кодировать X-*кодом* $u_1u_2\ldots u_s$, где символ u_i характеризирует расположение кривой $\mathbb{R}C_m$ в окрестности критической прямой l_{t_i} и принимает одно из значений $\supset_k$, $\subset_k$, $\times_k$ ($k \in \{1,\ldots, m-1\}$) в соответствии с рис. 4.2, а $\{l_{t_1}, \ldots, l_{t_s}\}$ – набор всех критических прямых, упорядоченных по возрастанию параметра t_i.



Р и с у н о к **4.1**



Р и с у н о к **4.2**

Рассмотрим в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ множество $M = \mathbb{C}C_m \cap \mathbb{C}L_p$, где $\mathbb{C}L_p$ – пучок комплексных прямых с центром в точке p. Множество M гомеоморфно набору окружностей, некоторые из которых попарно склеены в двойных точках кривой $\mathbb{R}C_m$ и в точках касания прямых пучка L_p с этой кривой (см. рис. 4.1, в центре[7]). Устранив все точки склейки некоторым стандартным образом (см. рис. 4.1, справа), получим зацепление $K(C_m, p)$. Пусть $b(C_m, p)$ – коса из m нитей, замыкание которой совпадает с $K(C_m, p)$. Для дальнейшего важно, что, в силу предположения о максимальности пучка, коса $b(C_m, p)$ однозначно (с точностью до сопряжённости в группе B_m кос из m нитей) определяется взаимным расположением в $\mathbb{R}P^2$ кривой $\mathbb{R}C_m$ и пуска L_p, т. е. определяется развёрткой, отвечающей максимальной прямой.

Из [9] известно, что полученная описанным выше способом коса $b(C_m, p)$ должна быть *квазиположительной*, т. е. допускать запись в виде $\prod_{j=1}^{k} \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1}$, где ω_j − некоторые слова в алфавите $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_{m-1}^{-1}\}$, а σ_s, $1 \le s \le m-1$, −стандартные образую-

[7] Этот рисунок условный – “мнимая ось” V двумерна.

щие группы B_m (см. рис. 4.2). Следовательно, если для топологической модели гипотетической кривой $\mathbb{R}C_m$ при каждом возможном взаимном расположении пучка L_p и этой модели коса $b(C_m, p)$ не является квазиположительной, то эта модель не может быть реализована алгебраической кривой степени m.

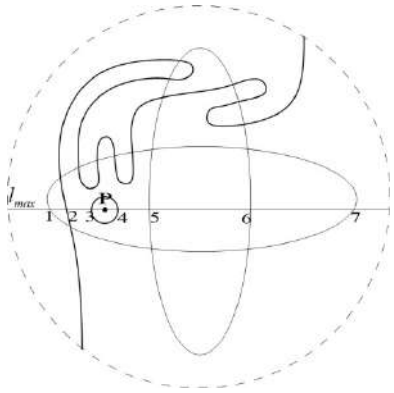
В качестве необходимого условия квазиположительности С.Ю. Оревков в [7] предложил использовать

Неравенство Мурасуги-Тристрама. *Если* $b = \prod \sigma_i^{k_i}$ *– квазиположительная коса из* m *нитей, то для её замыкания выполняется неравенство*

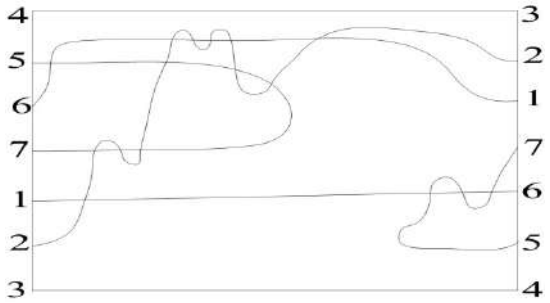
$$|\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где $\sigma(b)$ *и* $n(b)$ *– сигнатура и дефект замыкания косы* b, $e(b) = \sum k_i$ *– алгебраическая степень косы* b.

Приведём пример применения описанного метода к моделям из таблиц 4, 5. Рассмотрим модель рис. 4.3.1, отвечающую коду (1R2_3456)(32_1456) (№1 в таблице 4), выберем точку p внутри овала кубики, а прямую l_{max} так, как показано на рис. 4.3.1. Развёртка, отвечающая этой прямой, и соответствующий этой развёртке X-код показаны на рис. 4.3.2. Вычисления дают $h = 2$, где через h мы обозначим значение левой части неравенства Мурасуги-Тристрама. Следовательно, рассматриваемая модель не может быть реализована схемой какой-либо кривой степени 7.



1



2

Р и с у н о к **4.3**

Аналогично были рассмотрены все остальные допустимые модели. При этом для выбора центра p пучка прямых возможны разные варианты. В работе точка p была выбрана внутри окружности, отвечающей овалу кубики – эти случаи собраны в таблицу 4 – или в какой либо точке в пересечении внутренних областей окружностей, отвечающих коникам (область C на рис. 2.2) – таблица 5. Развёртки и Х-коды нетрудно находить “вручную”, но вычисления значений h вряд ли возможны без компьютера (ввиду необходимости нахождения собственных чисел больших матриц для определения сигнатур и ввиду большого количества Х-кодов). Мы использовали многократно применявшуюся ранее программу, написанную специально для таких задач М.А. Гущиным в 2003 году, когда он был студен-

том мехмата ННГУ. На вход этой программы подаётся X-код, а на выходе получается значение *h*.

Таблица **4**. Центр пучка внутри овала кубики

№ пп	Код модели	X-код	*h*
1	(1R2_3456)(32_1456)	x5x2x3x3x3x4x5x5x5x5x5x4x4x5)3(2x3x3x3	2
2	(1R2_3456)(3452_16)	x5x2x3x4x5x5x5x5x4x3x3x4)3x3(2x3x3x3	2
3	(1R234_56)(32_1456)	x2x5x3x3x3x4x5x5x4x4x5x5x5)3(2x3x3x3	2
4	(1R234_56)(3452_16)	x5x2x3x4x5x5x4x3x3x4x5x5x5)3(2x3x3x3	0 (∃)
5	(3214_56)(32_1L654)	x4x4x4)3x2x2x2(4x3x3x3x4x5x5x4x4x5x4	2
6	(3214_56)(54_321L6)	x4x4x3)4x2(4x3x3x3x4x5x5x4x4x5x5x5x4	2
7	(3214_56)(5432_1L6)	x4x5x4x4x5x5x5x5x4x3x3x3)4x2(3x4x4x4	0 (?)
8	(34_5216)(32_1L654)	x4x4x4)3x2x2x2(4x3x4x5x5x4x3x3x4x5x4	0 (∃)
9	(34_5216)(54_321L6)	x4x4x4)3x2(4x3x4x5x5x4x3x3x4x5x5x5x4	2
10	(34_5216)(5432_1L6)	x4x4x4)3x2(4x3x4x5x5x5x5x4x3x3x4x5x4	0 (∃)
11	(1236_54)(1R23456)	x4x5x4x4x4x4x4x4x5x5)3(2x3x3x3)4(3x4x4x4	4
12	(1L6_5432)(123654)	x4x5x4x4x4x3x3x3)4x3x3x3x3x2(3x4x4x4	0 (?)
13	(1L6_5432)(165234)	x4x5x4x3x3x4x4x3)4x3x3x3x3x2(3x4x4x4	2
14	(1L654_32)(123654)	x4x5x5x5x4x4x4x3x3x3)4x3x3x2(3x4x4x4	2
15	(1L654_32)(165234)	x4x5x5x5x4x3x3x4x4x4)3x3x3x2(3x4x4x4	2
16	(16_5234)(1R23456)	x4x3x3x3)2(4x3x3x3x4x5x5x5x5x5x5x4x5	0 (∃)
17	(3L216_54)(123654)	x4x5x4x4x4x3x3x3)4x3x3x2x2x2(3x4x4x4	2
18	(3L216_54)(165234)	x4x5x4x3x3x4x4x4)3x3x3x2x2x2(3x4x4x4	2
19	(3456_12)(123456)*C*	x5x4x4x4x4x4x4x5x4x4x4x4x4x3x3x2x2	2
20	(3R456_12)(321456)	x4x5x3x3x3x4x4x4)3x3x3x3x3x2x2(3x2x3	2
21	(3R456_12)(345216)	x5x4x4x3x3x4)3x3x3x3x3x2x2(2x3x3x3x4	2
22	(56_1234)(123456)*C*	x4x4x4x4x4x4x5x4x4x3x3x3x3x2x2x2	2
23	(56_1R234)(345216)	x4x5x3x4x4x3x3x4)3x3x3x2x2x2x2(3x2x3	2
24	(1R2*56_*34)(321456)	x2x4x5x3x3x4x4x4)3x3x3x2x2x3(3x2x3	2
25	(1R2*56_*34)(345216)	x2x4x5x3x4x4x3x3x4)3x3x3x2x2x3(3x2x3	2
26	(1L6_*32*54)(123654)	x3x4x5x4x4x4x3x3x3x2)4x2x3x3x2(4x3x4	2
27	(1L6_*32*54)(165234)	x3x4x5x4x3x3x4x4x3x2)4x2x3x3x2(4x3x4	2
28	(16_52_34)(1R2_*56*34)	x3x2)3x3(4x2x2x3x3x3x4x5x5x4x3x5x4x2	2
29	(1236_54)(1R2_*56*34)	x3x2)3x3(4x2x2x3x4x5x5x4x3x3x3x5x4x2	0 (?)
30	(16_52*_*34)(1R2_*56*_34)	x3x2)3(3x5x4x3x2x2x3x4x5x5x4x3x5x4x2	0 (∃)
31	(16_5234)(1R6*32_*54)	x4x4)3x2x3x3(4x3x4x4x3x2x2x3x4x5x4x3	2
32	(56_1234)(12*56_*34)*C*	x4x3x3x3x3x2x2x2x3x3x4x4x5x4x4x3	2
33	(3456_21)(12*56_*34)*C*	x5x4x4x3x3x2x3x3x3x3x4x4x3x3x2x2	2
34	(5L6_1234)(321654)	x4x5x3x3x3x4x4x4x5x5)3x2x2x2x2(3x2x3	2
35	(1L6_54_32)(1652_34)	x3x4x5x4x3x3x4x5x5x4x4x5x5)3x2(4x3x4	2
36	(1R2*_56_*34)(3452_16)	x4x5x2x3x4x5x5x4x3x3x3x2x2)4x3(3x2x3	2
37	(1L6_54_32)(12_3654)	x3x4x5x4x4x5x5x4x3x3x4x5x5)3x2(4x3x4	2

38	(1L6_*32*_54)(16_5234)	x3x4x5x4x4x4x3x2x2x3x4x5x5)3x2(4x3x2	2
39	(1L6_*32*_54)(1236_54)	x3x4x5x4x3x2x2x3x4x4x4x5x5)3x2(4x3x4	2
40	(5L6_*34*12)(165234)	x4x5x3x4x4x3x3x3)4x2x2x3x3x2x2(3x2x3	2
41	(5L6_*34*12)(123654)	x4x5x3x3x3x4x4x3x2x2)4x3x3x2x2(3x2x3	2
42	(56_*34*12)(123456)	x5x4x4x4x4x4x4x3x3x5x4x4x3x3x2x2	2
43	(56_14*_*32)(1R6_*32*_54)	x4x4x3x2x3x4)3x3x3(3x4x3x2x2x3x4x5x4	0 (?)
44	(12*56_*34)(123456)*C*	x3x4x4x4x4x4x4x5x4x4x3x3x4x2x2x2	0 (?)
45	(2L1_6543)(61_2543)	x4x5x3x4x5x5x5x5x4x3x3x4)3x2x2(3x2x3	2
46	(2L1_6543)(6541_23)	x4x5x3x3x3x4x5x5x5x5x4x3x2x2)4(3x2x3	2
47	(21_6345)(61_25R43)	)3x4x3(3x4x3x3x4x5x2x2x6x5x4x4x4)5x1x1(4	2
48	(21_6345)(65R41_23)	)3x3x3x3x3(3x2x2x4x4x5x6x5x4x4x4)5x1x1(4	2
49	(2341_65)(61_25R43)	)3x3(4x3x3x3x4x5x6x5x5)4(3x2x3x3)4x2x1x1(4	2
50	(2341_65)(65R41_23)	)3x4x3x3x3(3x2x3x3x2x4x4x5x6x5x5)4x1x1(4	2
51	(4L321_65)(61_2543)	x4x5x3x4x5x5x4x3x3x3x2x2x2x2)4(3x2x3	2
52	(4L321_65)(6541_23)	x4x3x3x3x5x4x5x5x4x3x2x2x2x2)4(3x2x3	2
53	(16_34_52)(16*_32_*54)	x4x3)4(4x2x3x4x5x5x4x3x2x2x3x4x5x4x3	0 (∃)

Таблица **5**. Центр пучка внутри пересечения коник

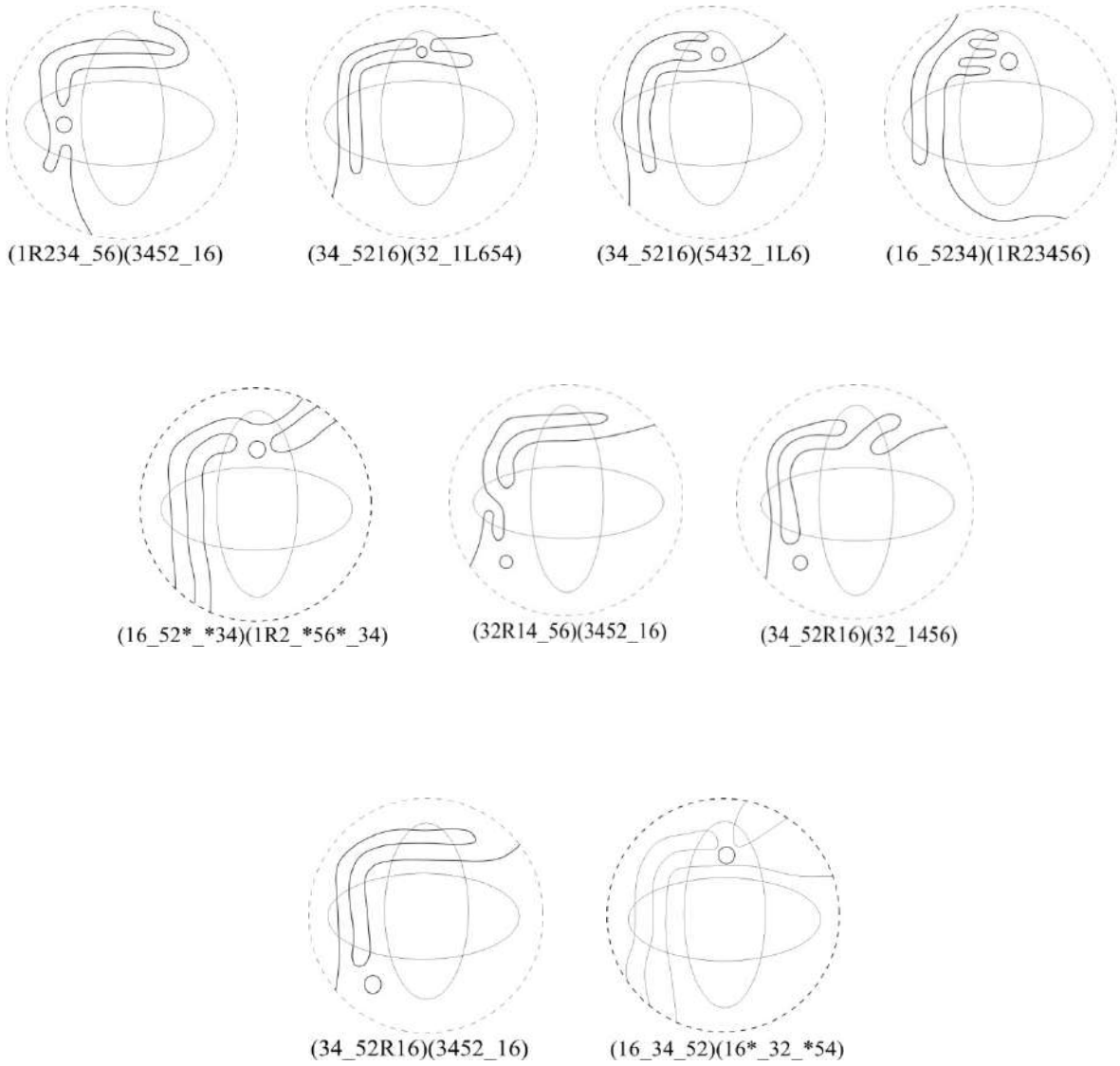
№пп	Код модели	X-код	*h*
54	(32R14_56)(32_1456)	)4x4(4x3x3x3)2x3x3x3(3x4x4x1x1x5x6x5x5)4x3(3	4
55	(32R14_56)(3452_16)	)4x2(5x4x4x4)3x3(4x5x5x6x5x4x3x3x4)3x1x1x1(3	0 (∃)
56	(34_52R16)(32_1456)	)4x2x2x2(5x4x4x3x3x4x5x6x5x4x3)4x1x1x1(3	0 (∃)
57	(34_52R16)(3452_16)	)3(4x3x3x3x4x5x6x5x4x3x3x4x4)5x1x1x1x2(4	0 (∃)
58	(1236_54)(1236R54)	)4x2x2x2(5x4x4x4x5x5x5x6x5x4x4)3x1x1x1(3	2
59	(16_5234)(1236R54)	)4x2(5x4x4x4x5x5x5x6x5x4x3x3x4)3x1x1x1(3	0 (?)
60	(5436_12)(12L3654)	)3(5x4x4x4)3x3x3x3x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
61	(5436_12)(1652L34)	)3(5x4x4x3x3x3)4x3x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
62	(5436_12)(3214R56)	)3x3x3x3(3x4x4x4)5x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
63	(56_1432)(12L3654)	)3(5x4x4x4)3x3x3x3x4x3x3(2x3x3x3)4x2x1x1x1(4	4
64	(56_1432)(1652L34)	)3(5x4x4x3x3x3)4x3x4x3x3(3x2x3x3)4x2x1x1x1(4	4

Замечание. В [11], [12] С.Ю. Оревков предложил применять для проверки квазиположительности условие Фокса-Милнора. Примеры применения этого условия можно найти также в [3]. В нашей ситуации было интересно применить его только в случаях, когда модель не удалось ни запретить с помощью неравенства Мурасуги-Тристрама, ни реализовать, т. е. для моделей №№ 7, 12, 29, 43, 44 в таблице 4 и №59 в таблице 5. Проведённые вычисления показали, что условие Фокса-Милнора не запрещает реализуемость этих моделей, поэтому описание этих вычислений мы не приводим.

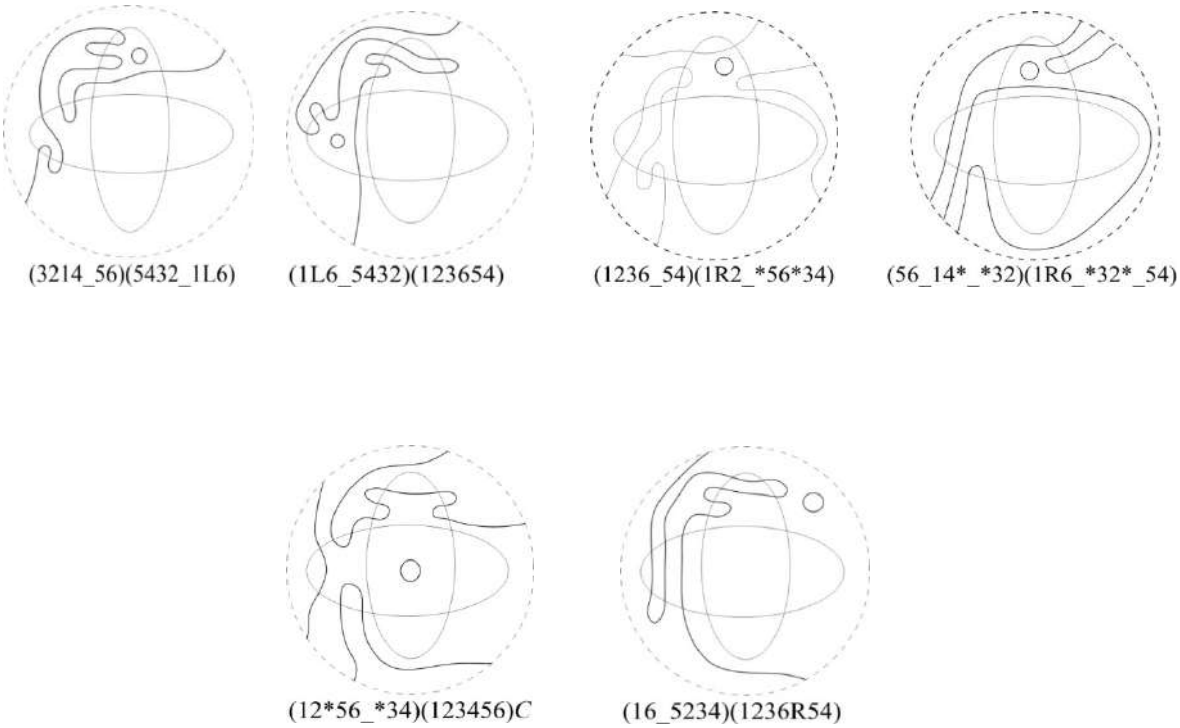
5. Результат работы

Итог проведённого исследования можно сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а 5.1 *Топологические модели кривых, рассматриваемого класса, отличные от показанных на рис.* 5.1, 5.2, *не могут быть реализованы как схемы кривых степени* 7. *Из этих пятнадцати моделей первые девять* (*рис* 5.1) *реализуются распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости шести оставшихся* (*рис*. 5.2) *открыт*.



Р и с у н о к **5.1**


(3214_56)(5432_1L6)
(1L6_5432)(123654)
(1236_54)(1R2_*56*34)
(56_14*_*32)(1R6_*32*_54)
(12*56_*34)(123456)C
(16_5234)(1236R54)

Р и с у н о к **5.2**

Список литературы

1. Д. А. Гудков, Г. А. Уткин, “Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта)”, Ученые *записки Горьковского ун-та*, **87** (1969), 1−214.
2. Г. М. Полотовский, “Каталог *M*-распадающихся кривых 6-го порядка”, *ДАН СССР*, **236**:3 (1977), 548−551.
3. И. М. Борисов, Г. М. Полотовский, “О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8”, *Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Тематические обзоры*, (2019) (в печати).
4. T. V. Kuzmenko, G. M. Polotovskiĭ, “Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of *M*-curves in general position”, *AMS Translations, Ser.* 2, **173** (1996), 165−177.
5. А. Б. Корчагин, Г. М. Полотовский, “О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых”, *Алгебра и анализ*, **21**:2 (2009), 92−112.
6. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 1. С. 24–37.
7. Д. А. Гудков, “Топология вещественных проективных алгебраических многообразий”, *УМН*, **29**:4(178) (1974), 3−79.
8. S. Yu. Orevkov, “Link theory and oval arrangements of real algebraic curve”, *Topology*, **38** (1999), 779−810.
9. С. Ю. Оревков, Г. М. Полотовский, “Проективные *M*-кубики и *M*-квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов”, *Алгебра и анализ*, **11**:5 (1999), 166−184.
10. Lee Rudolf, “Algebraic functions and closed braids”, *Topology*, **22** (1983), 191−202.
11. S. Yu. Orevkov, “Clasification flexible *M*-curves of degree 8 up to isotopy”, *GAFA, Geom. funct. anal.*, **12**:4 (2002), 723−755.
12. С. Ю. Оревков, “Расположения *M*-квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечётную ветвь”, *Алгебра и анализ*, **19**:4 (2007), 174−242.

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Журавлевой Марины Андреевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Управление асимптотическими характеристиками линейных систем в гильбертовом пространстве» являются: Лемма 1, 5, 6, 7, 8, Теорема 3, 4, 5, Следствие 2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 января по 30 марта 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google по следующим ключевым словам: линейная управляемая система, гильбертово пространство, обратная связь, верхний показатель Боля, в выдаче поисковиков было исследовано 10 статей, 22 научных журналов (список см. в приложении 1 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Василием Александровичем Зайцевым, д.ф.-м.н., заведующим лабораторией математической теории управления Удмуртского государственного университета.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 09.07.2020. На Смотр представлен проект текста.

Подпись Журавлева Марина Андреевна

30 мая 2020
г. Ижевск, Россия

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра дифференциальных уравнений
Направление 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

Выпускная квалификационная работа
(магистерская диссертация)

УПРАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Студент группы:
ОМ-02.04.01-21
Журавлева Марина Андреевна
(подпись студента)
Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Зайцев Василий Александрович
(подпись руководителя)
Заведующий кафедрой:
д. ф.-м. н., профессор
Попова С. Н. _____
“___” _____ 2020 г.

Ижевск – 2020

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор В. А. Зайцев

“___” _____ 2020 г.

Допускается к защите

Заведующий кафедрой
дифференциальных уравнений,
д.ф.-м.н., профессор С. Н. Попова

“___” _____ 2020 г.

Содержание

Введение **4**

§ 1. Полугруппы: определение, свойства 6

§ 2. Вспомогательные результаты 10

§ 3. Основные результаты 15

§ 4. Примеры 21

Заключение **25**

Список литературы **26**

Введение

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $x \in \mathfrak{X}$ и $u \in \mathfrak{U}$ — состояние и вектор управления соответственно, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{U}$ — конечномерные или бесконечномерные банаховы пространства. Предположим, что управление в системе (1) имеет вид линейной обратной связи по состоянию $u(t) = U(t)x(t)$. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x}(t) = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Будем рассматривать элементы оператора обратной связи $U(t)$ в качестве управляющих параметров. Задачи управления асимптотическим поведением решений системы (2) посредством обратной связи $U(t)$ (в частности, задача стабилизации для системы (2)) относятся к классическим задачам теории управления. Первые результаты относятся к стационарным системам в конечномерных пространствах. Было доказано для комплексных [5] и вещественных [6] конечномерных ($\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^m$) нестационарных ($A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$) систем, что условие полной управляемости системы (1) необходимо и достаточно для произвольного присвоения спектра собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ замкнутой системы (2) с помощью стационарной обратной связи ($U(t) \equiv U$). Отсюда, в частности, следует стабилизация (2) с помощью $U(t) \equiv U$. Первые результаты для нестационарных периодических систем в конечномерных пространствах были получены в [7]: было доказано, что полная управляемость системы (1) необходима и достаточна для произвольного назначения мультипликаторов $\rho_1, \ldots, \rho_n$ замкнутой системы (2) посредством периодической обратной связи. Для нестационарных непериодических систем в конечномерных пространствах первые результаты по стабилизации были получены в [8, 9, 10]. В этих работах использовался метод преобразования системы (2) в каноническую (блочную) форму Фробениуса, который позволил решить задачу назначения собственных значений. Однако здесь требуются довольно ограничительные условия на гладкость и ограниченность коэффициентов системы (1).

Эти условия были ослаблены в [11] до условия равномерной полной управляемости в смысле Калмана [12], и, исходя из этого свойства, были получены достаточные условия для экспоненциальной стабилизации системы (2). Доказательство экспоненциальной устойчивости проводится с использованием второго метода Ляпунова (метод функции Ляпунова).

В рамках первого метода Ляпунова для изучения систем дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах естественным обобщением понятия спектра собственных значений для нестационарных систем является спектр показателей Ляпунова (см. [13, 14, 15]). Помимо показателей Ляпунова известны другие ляпуновские инварианты (то есть характеристики, которые не изменяются при преобразовании Ляпунова,

см. [16]), которые характеризуют асимптотическое поведение решений линейной системы дифференциальных уравнений, например, показатели Боля, центральные показатели Винограда, экспоненциальные показатели Изобова и т. д. В серии исследований [17, 18, 19, 20, 21] на основе свойства равномерной полной управляемости в смысле Калмана доказаны результаты о произвольной назначении показателей Ляпунова и других инвариантов Ляпунова для системы (2) в конечномерных пространствах.

В недавних исследованиях [22, 23, 24, 25, 26, 27] эти результаты были частично распространены на системы с дискретным временем. В конечномерных пространствах изучались показатели Ляпунова, показатели Боля и другие инварианты Ляпунова, например, в [28, 29, 30] для систем с непрерывным временем и в [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37] для систем с дискретным временем.

Большое количество работ посвящено задачам стабилизации системы (2) в бесконечномерных пространствах. Здесь мы отметим исследования [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45]. Свойства спектра для систем в бесконечномерных пространствах изучались в [46, 47, 48].

В данной работе мы изучаем проблему произвольного назначения (глобальной управляемости) верхнего показателя Боля для систем с непрерывным временем в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

§ 1. Полугруппы: определение, свойства

Пусть $(\mathfrak{B}_1, \|\cdot\|)$, $(\mathfrak{B}_2, \|\cdot\|)$ — банаховы пространства.

Определение 1 [2, с. 18]. Отображение $A : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ называется *линейным оператором*, если

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

для любых чисел α, β и любых $x, y \in \mathfrak{B}_1$.

Линейный оператор непрерывен, если он непрерывен в точке $x = 0$ (подробнее см. в [1, с. 222]). Непрерывность равносильна свойству ограниченности оператора A, т. е. конечности величины

$$\|A\| := \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \;\Big|\; x \in \mathfrak{B}_1,\ x \neq 0\right\} = \sup\{\|Ax\|_2 \mid x \in \mathfrak{B}_1,\ \|x\|_1 = 1\}. \tag{3}$$

Множество линейных ограниченных операторов $A : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ обозначается $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$. Это множество является банаховым пространством с нормой (3) и естественным определением операций сложения операторов и умножения оператора на число:

$$(A + B)x = Ax + Bx; \quad (\alpha A)x = \alpha(Ax).$$

Если $A : \mathfrak{B}_2 \to \mathfrak{B}_3$ и $B : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, то формулой

$$Cx = A(Bx) \quad (x \in \mathfrak{B}_1)$$

определяется оператор $C : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_3$, который называется *произведением* $C = AB$ операторов A и B. При этом, если операторы A и B ограничены ($A \in [\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3]$, $B \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$), то оператор C ограничен ($C \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_3]$) и $\|C\| = \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Определение 2 [2, с. 20]. Оператор $B : \mathfrak{B}_2 \to \mathfrak{B}_1$ называется *обратным* по отношению к оператору $A : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ и обозначается $B = A^{-1}$, если $AB = I_2$, $BA = I_1$, где I_k — тождественный оператор $\mathfrak{B}_k : I_k x = x$ при любом $x \in \mathfrak{B}_k$ $(k = 1, 2)$.

Множество ограниченных операторов, отображающих пространство $\mathfrak{B}$ в себя, обозначается кратко через $[\mathfrak{B}]$. Таким образом, $[\mathfrak{B}] := [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}]$. Пусть $\mathfrak{B}$ — комплексное банахово пространство.

Определение 3 [2, с. 26]. Точка λ комплексной плоскости называется *регулярной точкой* оператора $A \in [\mathfrak{B}]$, если в $[\mathfrak{B}]$ существует оператор (*резольвента* оператора A)

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Множество $\rho(A)$ всех регулярных точек оператора A открыто. Его дополнение $\sigma(A)$ всегда непуст, замкнут и лежит в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$. Более точно, *спектр* $\sigma(A)$ *лежит в круге, радиус* r_A *которого равен*

$$r_A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Пусть E — конечномерные линейные пространства, $A : E \to E$ — линейный оператор. Решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = x \in E, \quad t \geqslant 0$$

имеет вид $y(t) = S(t)x,\ t \geqslant 0$, где

$$S(t) = e^{At}, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

является фундаментальным решением уравнения

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = x \in E \tag{5}$$

Определение 4 [3, с. 177]. Пусть E — банахово пространство. *Полугруппа операторов* — это произвольное семейство ограниченных линейных операторов $S(t) :\ E \to E$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющих условиям

$$S(t+s) = S(t)S(s), \quad t,\, s \geqslant 0, \quad S(0) = I,$$

$$\lim_{t \to 0} S(t)\, x = x \text{ для произвольного } x \in E. \tag{6}$$

В силу условия непрерывности (6) $S(t)$ называется C_0-*полугруппой оператора.*

В случае конечномерного пространства E выражения (4) и (5) идентичны с производной в нуле:

$$\frac{dS}{dt}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} = A.$$

Рассмотрим в банаховом пространстве E линейную управляемую систему

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = x. \tag{7}$$

Пусть оператор A порождает полугруппу операторов $S(t),\ t \geqslant 0$ на E. Пусть B — линейный ограниченный оператор, действующий из банахового пространства U в E. Рассмотрим случай $U = E$, тогда уравнение (7) примет вид

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(t), \quad y(0) = x, \tag{8}$$

где функция $f : \mathbb{R} \to E$.

Определение 5 [3, с. 202]. Любая непрерывная функция $y :\ [0, T] \to E$ такая, что

1) $y(0) = x,\ y(t) \in \mathfrak{D}(A),\ t \in [0, T]$,

2) y дифференцируема при $t \in [0, T]$ и $\dfrac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t),\ t \in [0, T]$

называется *сильным решением* уравнения (8) на $[0, T]$.

Теорема 1 [3, с. 202]. *Пусть $x \in \mathfrak{D}(A)$, $f(\cdot)$ — непрерывная функция на $[0, T]$ и $y(\cdot)$ — сильное решение уравнения* (8) *на $[0, T]$. Тогда*

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{9}$$

Формула (9) не всегда определяет сильное решение уравнения (8). Необходимы дополнительные условия либо на f, либо на полугруппу $S(t),\ t \geqslant 0$.

Теорема 2 [3, с. 203]. *Пусть функция $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$ и $x \in \mathfrak{D}(A)$. Тогда уравнение (8) имеет сильное решение.*

Пусть на пространстве с мерой $(S,\ \mathfrak{B},\ m)$ задана простая функция $x(s)$, принимающая значения в B-пространстве X. Пусть $x(s)$ принимает значение $x_i \neq 0$ на множестве $B_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где B_i не пересекаются, $m(B_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, кроме того, $x(s) = 0$ при $s \in \Big(S - \sum\limits_{i=1}^{n} B_i\Big)$. Тогда можно определить m-интеграл $\int\limits_S x(s)m(ds)$ функции $x(s)$ по множеству S, полагая его равным $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m(B_i)$. Далее с помощью предельного перехода можно построить m-интеграл для функций более широкого класса.

Определение 6 [4, с. 189]. Функция $x(s)$, определенная на пространстве с мерой $(S,\ \mathfrak{B},\ m)$ и принимающая значения в B-пространстве X, называется *m-интегрируемой по Бохнеру*, если существует последовательность простых функций $\{x_n(s)\}$, сильно сходящаяся к $x(s)\, m$ п. в. в S так, что при этом

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|x(s) - x_n(s)\|\, m(ds) = 0.$$

Для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ *m-интеграл Бохнера* функции $x(s)$ по множеству B определяется как

$$\int_B x(s)\, m(ds) = s - \lim_{n\to\infty} \int_S C_B(s)\, x_n(s)\, m(ds),$$

где $C_B(s)$ — характеристическая функция множества B.

Следствие 1 [3, с. 204]. *Пусть функция $u(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и $x \in \mathfrak{D}(A)$. Тогда уравнение (7) имеет единственное сильное решение вида*

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)Bu(s)\, ds, \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Функция $y(t),\ t \geqslant 0$, заданная по формуле (10), является корректно определенной для произвольной интегрируемой по Бохнеру функции $u(\cdot)$. Она называется *слабым решением* уравнения

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t).$$

Следующее предложение показывает, что слабые решения являются равномерными пределами сильных решений.

Предложение 1 [3, с. 204]. *Пусть $u(\cdot)$ — интегрируемая по Бохнеру функция на $[0, T]$ и $x \in E$. Если $u_k(\cdot)$ и x_k — последовательности такие, что выполняется*

1) $x_k \in \mathfrak{D}(A)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$,

2) $u_k(\cdot) \in C^1, \quad u_k(\cdot) :\ [0, T] \to E,\ n = 1, 2, \ldots; \quad \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^T \|u_k(s) - u(s)\|, ds = 0,$

то последовательность функций

$$y_k(t) = S(t)x_k + \int_0^t S(t-s)Bu_k(s)\,ds,\ k = 1,\, 2,\, \ldots,\ t \in [0, T],$$

равномерно сходится к слабому решению $y(\cdot)$ *уравнения* (10).

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $\mathfrak{X}^*$ — двойственное к $\mathfrak{X}$. $\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов $A : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$. Если $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$, тогда $A^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_2^*, \mathfrak{X}_1^*)$ — сопряженный оператор. $I : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ — тождественный оператор.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{X}. \tag{11}$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

(a) $A(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ для любых $t \in \mathbb{R}$;

(b) функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ кусочно непрерывная;

(c) $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| = a < +\infty$.

Под решением системы (11) будем понимать по определению решение интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\, ds, \tag{12}$$

где

$$x(t_0) = x_0. \tag{13}$$

Из условий, наложенных на $A(\cdot)$, решение (12) для системы (11) является непрерывной, кусочно непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет системе (11) почти везде.

Обозначим через $\Phi(t, \tau)$ эволюционный оператор системы (11) [49, Гл. III, § 1, с. 100] то есть решение операторной системы

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad X(\tau) = I.$$

Используя оператор $\Phi(t, \tau)$, можно выразить решение исходной задачи (11), (13) формулой $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$.

Эволюционный оператор $\Phi(t, \tau)$ обладает следующими свойствами [49, Гл. III, § 1, с. 101]:

(A) $\Phi(t, t) = I$; $\quad (B)$ $\Phi(t, s)\Phi(s, \tau) = \Phi(t, \tau)$; $\quad (C)$ $\Phi(t, \tau) = [\Phi(\tau, t)]^{-1}$;

$$(D) \quad \exp\Big(-\int_s^t \|A(\tau)\|\, d\tau\Big) \le \|\Phi^{\pm 1}(t, s)\| \le \exp\Big(\int_s^t \|A(\tau)\|\, d\tau\Big), \quad s \le t$$

(см. [49, Гл. III, § 2, (2.25)]). Из свойства (D) и условия (c) следует, что

$$e^{-a(t-s)} \le \|\Phi^{\pm 1}(t, s)\| \le e^{a(t-s)}, \quad s \le t. \tag{14}$$

Определение 7 [49, Гл. III, § 4]. *Верхним показателем Боля* системы (11) называется число

$$\varkappa(A) = \varlimsup_{\tau, s \to +\infty} \frac{\ln \|\Phi(\tau + s, \tau)\|}{s}.$$

Верхний показатель Боля системы (11) характеризует асимптотическое поведение решений (11): условие $\varkappa(A) < 0$ необходимо и достаточно для равномерной экспоненциальной устойчивости всех решений системы (11). В силу условия (c), верхний показатель Боля системы (11) конечен [49, Гл. III, § 4, Теорема 4.3].

Применим λ-преобразование [13, с. 249], [49, Гл. III, § 4, с. 124] к системе (11), которое заключается в добавлении возмущения λI к оператору $A(t)$ и рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{z}(t) = (A(t) + \lambda I)z(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathfrak{X}. \tag{15}$$

Пусть $\Psi(t,\tau)$ — эволюционный оператор системы (15).

Лемма 1. *Для любых t, $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется следующее равенство:*

$$\Psi(t,\tau) = e^{\lambda(t-\tau)}\Phi(t,\tau). \tag{16}$$

Доказательство. Вычисляя производную правой части равенства (16), получим

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\lambda(t-\tau)}\,\Phi(t,\tau)\Big) = \lambda\, e^{\lambda(t-\tau)}\,\Phi(t,\tau) + e^{\lambda(t-\tau)}A(t)\Phi(t,\tau) = (A(t)+\lambda I)e^{\lambda(t-\tau)}\Phi(t,\tau). \tag{17}$$

Далее,

$$e^{\lambda(t-\tau)}\Phi(t,\tau)\Big|_{t=\tau} = I. \tag{18}$$

Из равенств (17) и (18) следует, что $e^{\lambda(t-\tau)}\Phi(t,\tau)$ — эволюционный оператор системы (15). В силу единственности эволюционного оператора, отсюда следует, что $e^{\lambda(t-\tau)}\Phi(t,\tau)$ совпадает с $\Psi(t,\tau)$. □

Лемма 2. $\varkappa(A+\lambda I) = \varkappa(A) + \lambda$.

Доказательство. По лемме 1 получаем

$$\begin{aligned}
\varkappa(A+\lambda I) &= \varlimsup_{\tau,s\to+\infty} \frac{\ln\|\Psi(\tau+s,\tau)\|}{s} = \varlimsup_{\tau,s\to+\infty} \frac{\ln\|e^{\lambda s}\Phi(\tau+s,\tau)\|}{s} = \\
&= \varlimsup_{\tau,s\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{\lambda s}\|\Phi(\tau+s,\tau)\|\right)}{s} = \varlimsup_{\tau,s\to+\infty} \frac{\ln e^{\lambda s} + \ln\|\Phi(\tau+s,\tau)\|}{s} = \\
&= \varlimsup_{\tau,s\to+\infty} \left(\frac{\lambda s}{s} + \frac{\ln\|\Phi(\tau+s,\tau)\|}{s}\right) = \varlimsup_{\tau,s\to+\infty} \left(\lambda + \frac{\ln\|\Phi(\tau+s,\tau)\|}{s}\right) = \\
&= \lambda + \varlimsup_{\tau,s\to+\infty} \frac{\ln\|\Phi(\tau+s,\tau)\|}{s} = \lambda + \varkappa(A).
\end{aligned}$$

□

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = C(t)y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathfrak{X}. \tag{19}$$

Предположим, что оператор–функция $C(t)$ также удовлетворяет условиям (a), (b), (c), т. е. $\forall t \in \mathbb{R}$ $C(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$, функция $C(\cdot)$ кусочно непрерывна, и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|C(t)\| = c < +\infty$. Через $\Theta(t,\tau)$ обозначим эволюционный оператор системы (19). Из условий, наложенных на $C(\cdot)$, имеем неравенство

$$e^{-c(t-s)} \le \|\Theta^{\pm 1}(t,s)\| \le e^{c(t-s)}, \quad s \le t. \tag{20}$$

Определение 8 [49, Гл. IV, § 2]. Системы (11) и (19) называются *кинематически подобными на* $\mathbb{R}$, если можно установить между совокупностями всех решений систем взаимно-однозначное соответствие

$$y(t) = L(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $L(t)$ является ограниченной линейной оператор–функцией с ограниченной обратной величиной:

$$\|L(t)\| \le d_1, \quad \|L^{-1}(t)\| \le d_2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Имеет место следующий критерий (см. [49, Гл. IV, § 2, Лемма 2.1, (a)]).

Лемма 3. *Системы* (11) *и* (19) *кинематически подобны на* $\mathbb{R}$, *если существует оператор–функция* $\mathbb{R} \ni t \mapsto L(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, *удовлетворяющая* (21) *и такая, что эволюционные операторы систем связаны соотношением*

$$\Theta(t,\tau)L(\tau) = L(t)\Phi(t,\tau). \tag{22}$$

Лемма 4 [49, Гл. IV, § 2, Теорема 2.1]. *Если системы* (11) *и* (19) *кинематически подобны на* $\mathbb{R}$, *то* $\varkappa(A) = \varkappa(C)$.

Сформулируем достаточные условия кинематического подобия систем (11) и (19) на $\mathbb{R}$, аналогичные соответствующим условиям в конечномерном пространстве (см. [50]).

Лемма 5. *Предположим, что оператор–функции* $A(t)$ *и* $C(t)$ *удовлетворяют условиям* (*a*), (*b*) *и* (*c*), *и существует последовательность* $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ *такая, что* $0 < \rho_1 \le t_{i+1} - t_i \le \rho_2$ *и* $\Phi(t_{i+1}, t_i) = \Theta(t_{i+1}, t_i)$ *для всех* $i \in \mathbb{Z}$. *Тогда системы* (11) *и* (19) *кинематически подобны на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Используя групповое свойство (B) эволюционных операторов, для всех $j > i$ получаем:

$$\Phi(t_j, t_i) = \Phi(t_j, t_{j-1}) \cdots \Phi(t_{i+1}, t_i) = \Theta(t_j, t_{j-1}) \cdots \Theta(t_{i+1}, t_i) = \Theta(t_j, t_i). \tag{23}$$

По свойству (C) равенство (23) выполняется для любых $i, j \in \mathbb{Z}$. Построим оператор–функцию

$$L(t) = \Theta(t, t_0)\Phi(t_0, t). \tag{24}$$

Из равенства (23) следует, что $L(t_i) = I$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Поэтому в силу (24) имеем

$$\Theta(t,\tau)L(\tau) = \Theta(t,\tau)\Theta(\tau,t_0)\Phi(t_0,\tau) = \Theta(t,t_0)\Phi(t_0,\tau),$$
$$L(t)\Phi(t,\tau) = \Theta(t,t_0)\Phi(t_0,t)\Phi(t,\tau) = \Theta(t,t_0)\Phi(t_0,\tau).$$

Следовательно, выполняется равенство (22). Докажем, что выполняются неравенства (21).

Пусть $t \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Поскольку $t_{i+1} - t_i \geq \rho_1$, тогда существует $i_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $t \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$. В этом случае $t - t_{i_0} \leq \rho_2$. Имеем

$$L(t) = \Theta(t, t_0)\Phi(t_0, t) = \Theta(t, t_{i_0})\Theta(t_{i_0}, t_0)\Phi(t_0, t_{i_0})\Phi(t_{i_0}, t) =$$
$$= \Theta(t, t_{i_0})L(t_{i_0})\Phi(t_{i_0}, t) = \Theta(t, t_{i_0})\Phi(t_{i_0}, t).$$

Таким образом, $L^{-1}(t) = \Phi(t, t_{i_0})\Theta(t_{i_0}, t)$. Поэтому, учитывая неравенства (14) и (20), получаем

$$\|L(t)\| \leq \|\Theta(t, t_{i_0})\| \cdot \|\Phi(t_{i_0}, t)\| \leq e^{c(t-t_{i_0})}e^{a(t-t_{i_0})} \leq e^{(a+c)\rho_2} =: d_1,$$
$$\|L^{-1}(t)\| \leq \|\Phi(t, t_{i_0})\| \cdot \|\Theta(t_{i_0}, t)\| \leq e^{a(t-t_{i_0})}e^{c(t-t_{i_0})} \leq e^{(a+c)\rho_2} =: d_2.$$

Следовательно, выполняется равенство (21). По лемме 3 лемма доказана. □

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Здесь $x \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{U}$; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ — банаховы пространства; $A(t)$ удовлетворяет условиям (a), (b), (c); $\forall t \in \mathbb{R}$ $B(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$, функция $t \mapsto B(t)$ кусочно непрерывна, и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\| < +\infty$. Допустимыми управлениями для системы (25) на некотором конечном интервале $[t_0, t_1]$ считаем функции $u(\cdot) \in L_p([t_0, t_1], \mathfrak{U})$, $p \geqslant 1$. Для каждого допустимого управления $u(\cdot)$ существует единственное решение исходной задачи (25), (13) (см. [49, Гл. III, § 1, (1.19)], [51]), определяемое по формуле

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau,$$

где $\Phi(t, \tau)$ — эволюционный оператор соответствующей свободной системы (11).

Определение 9 [51]. Система (25) называется *в точности управляемой на* $[0, \vartheta]$, если для любых $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}$ существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, которое переводит решение системы (25) из состояния $x(0) = x_0$ в состояние $x(\vartheta) = x_1$.

Пусть управление в системе (25) строится в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u(t) = U(t)x(t),$$

где $U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ $\forall t \in \mathbb{R}$, функция $U(\cdot)$ кусочно непрерывна и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\| < +\infty$. Такую оператор-функцию $U(\cdot)$ назовем *допустимой*. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)U(t))x(t). \tag{26}$$

Через $\Phi_U(t, \tau)$ обозначим эволюционный оператор системы (26).

Определение 10. Будем говорить, что *к системе* (25) *применимо* λ*-преобразование*, если существует такое $\sigma > 0$, что для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется допустимая оператор-функция $U(\cdot)$, которая обеспечивает для эволюционного оператора $\Phi_U(t, \tau)$ системы (26) равенство

$$\Phi_U((k+1)\sigma, k\sigma) = e^{\lambda\sigma}\Phi((k+1)\sigma, k\sigma) \tag{27}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Это определение было дано в [17] для систем (25) в конечномерных пространствах (см. также [52]). Это связано с определением λ-преобразования системы (11). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что система* (25) *допускает λ-преобразование. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует допустимая оператор–функция $U(\cdot)$ такая, что замкнутая система* (26) *и система* (15) *кинематически подобны на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Из равенств (27) и (16) следует, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняется следующее равенство:

$$\Phi_U(t_{k+1}, t_k) = \Psi(t_{k+1}, t_k)$$

где $\Psi(t, s)$ — эволюционный оператор системы (15), $t_k = k\sigma$. Теперь, применяя лемму 5 к системам (26) и (15), где $\rho_1 = \rho_2 = \sigma$, получаем требуемое. $\square$

Определение 11. Верхний показатель Боля системы (25) называется *глобально управляемым с помощью линейной обратной связи по состоянию*, если для любого $\mu \in \mathbb{R}$ существует допустимая оператор-функция $U(\cdot)$ такая, что для замкнутой системы (26) выполняется равенство

$$\varkappa(A + BU) = \mu.$$

Соответствующее определение в конечномерных пространствах было дано в [17] (см. также [52]) для верхнего и нижнего показателей Боля.

§ 3. Основные результаты

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Здесь $x \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{U}$; $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{U}$ — сепарабельные гильбертовы пространства; $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$; $a := \|A\|$, $b := \|B\|$. Для гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, мы предполагаем, что, если $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, тогда $F^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1)$, т. е. мы отождествляем $\mathfrak{H}_i^*$ с $\mathfrak{H}_i$. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначаем скалярное произведение (в соответствующем пространстве). Если $F^* = F \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ то неравенство $F \geq \alpha I$ по определению означает, что $\langle Fx, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$ для всех $x \in \mathfrak{X}$.

Эволюционный оператор соответствующей свободной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

имеет вид $\Phi(t, \tau) = \exp(A(t - \tau))$. Обозначим $\Phi(t) := \Phi(t, 0) = \exp(At)$.

Построим *грамиан управляемости* $Q(\vartheta) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $\vartheta > 0$ (см. [53, Определение 4.1.3], [54, Раздел IV, Гл. 2, §2.2, (2.9)]):

$$Q(\vartheta)x = \int_0^\vartheta \Phi(s)BB^*\Phi^*(s)x\, ds. \tag{29}$$

Имеем $Q(\vartheta) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ (см. [53, Лемма 4.1.4]), $Q(\vartheta) = Q^*(\vartheta)$, и

$$\langle Q(\vartheta)x, x \rangle = \int_0^\vartheta \|B^*\Phi^*(s)x\|^2\, ds \geq 0, \quad x \in \mathfrak{X}$$

(см. [54, Раздел IV, Гл. 2, §2.2, (2.10)]. Заменив s на $\vartheta - t$ в равенстве (29), мы получим

$$Q(\vartheta) = \int_0^\vartheta \Phi(\vartheta - t)BB^*\Phi^*(\vartheta - t)\, dt. \tag{30}$$

Лемма 6. $\|Q(\vartheta)\| \leq \vartheta e^{2a\vartheta} b^2$.

Доказательство. Из свойства (D) следует, что

$$e^{-a\vartheta} \leq \|\Phi^{\pm 1}(t)\| \leq e^{a\vartheta}, \quad t \in [0, \vartheta]. \tag{31}$$

Поскольку $\Phi(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, имеем $\|\Phi^*(t)\| = \|\Phi(t)\|$ (см. [53, Лемма A.3.41]). Таким образом,

$$e^{-a\vartheta} \leq \left\| \left(\Phi^*(t)\right)^{\pm 1} \right\| \leq e^{a\vartheta}, \quad t \in [0, \vartheta]. \tag{32}$$

Аналогично, $\|B^*\| = \|B\| = b$. Используя равенства (29), (31) и (32), получаем

$$\|Q(\vartheta)\| \leq \int_0^\vartheta \|\Phi(s)BB^*\Phi^*(s)\|\, ds \leq \int_0^\vartheta \|\Phi(s)\| \cdot \|B\| \cdot \|B^*\| \cdot \|\Phi^*(s)\|\, ds \leq \vartheta e^{2a\vartheta} b^2. \quad \square$$

Для $\vartheta > 0$ рассмотрим оператор $Q_0(\vartheta) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$:

$$Q_0(\vartheta)x = \int_0^\vartheta \Phi(-t)BB^*\Phi^*(-t)x\, dt. \tag{33}$$

Имеем $Q_0(\vartheta) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, $Q_0^*(\vartheta) = Q_0(\vartheta)$ и $Q_0(\vartheta) \geq 0$. Из равенства (30) имеем $Q(\vartheta) = \Phi(\vartheta)Q_0(\vartheta)\Phi^*(\vartheta)$.

Лемма 7. $\|Q_0(\vartheta)\| \leq \vartheta e^{2a\vartheta} b^2$.

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 6.

По [53, Теореме 4.1.7] система (28) является в точности управляемой на $[0, \vartheta]$ тогда и только тогда, когда для некоторого $\gamma > 0$ и всех $x \in \mathfrak{X}$:

$$\langle Q(\vartheta)x, x\rangle \geq \gamma \|x\|^2. \tag{34}$$

Неравенство (34) означает, что $Q(\vartheta) \geq \gamma I$.

Лемма 8. *Система* (28) *в точности управляема на* $[0, \vartheta]$ *тогда и только тогда, когда для некоторого* $\gamma_1 > 0$ *выполняется неравенство*

$$Q_0(\vartheta) \geq \gamma_1 I. \tag{35}$$

Доказательство. Из равенства (30) следует

$$\begin{aligned}\big\langle Q(\vartheta)x, x\big\rangle &= \int_0^\vartheta \big\langle \Phi(\vartheta)\Phi(-t)BB^*\Phi^*(-t)\Phi^*(\vartheta)x, x\big\rangle\, dt = \int_0^\vartheta \|B^*\Phi^*(-t)\Phi^*(\vartheta)x\|^2 dt = \\ &= \Big|\Phi^*(\vartheta)x = y\Big| = \int_0^\vartheta \|B^*\Phi^*(-t)y\|^2 dt = \big\langle Q_0(\vartheta)y, y\big\rangle. \end{aligned} \tag{36}$$

($\Longrightarrow$). Предположим, что система (28) в точности управляема на $[0, \vartheta]$. Следовательно, для некоторого $\gamma > 0$ и всех $x \in \mathfrak{X}$ выполняется (34). Обозначим $\gamma_1 := \gamma e^{-2a\vartheta}$. Пусть $y \in \mathfrak{X}$ — произвольный элемент. Обозначим $x := \big(\Phi^*(\vartheta)\big)^{-1} y$. Тогда $y = \Phi^*(\vartheta)x$. Следовательно, $\|y\| \leq \|\Phi^*(\vartheta)\| \cdot \|x\| \leq e^{a\vartheta}\|x\|$. Поэтому $\|x\| \geq e^{-a\vartheta}\|y\|$. Используя равенство (36) и неравенство (34), получаем

$$\big\langle Q_0(\vartheta)y, y\big\rangle = \big\langle Q(\vartheta)x, x\big\rangle \geq \gamma\|x\|^2 \geq \gamma e^{-2a\vartheta}\|y\|^2 = \gamma_1\|y\|^2.$$

Следовательно, неравенство выполняется (35).

($\Longleftarrow$). Предположим, что неравенство выполняется (35). Обозначим $\gamma := \gamma_1 e^{-2a\vartheta}$. Пусть $x \in \mathfrak{X}$ — произвольный элемент. Обозначим $y := \Phi^*(\vartheta)x$. Тогда $x = \big(\Phi^*(\vartheta)\big)^{-1} y$. Следовательно, $\|x\| \leq \Big\|\big(\Phi^*(\vartheta)\big)^{-1}\Big\| \cdot \|y\| \leq e^{a\vartheta}\|y\|$. Следовательно, $\|y\| \geq e^{-a\vartheta}\|x\|$. Используя равенство (36) и неравенство (35), получаем

$$\big\langle Q(\vartheta)x, x\big\rangle = \big\langle Q_0(\vartheta)y, y\big\rangle \geq \gamma_1\|y\|^2 \geq \gamma_1 e^{-2a\vartheta}\|x\|^2 = \gamma\|x\|^2.$$

Следовательно, неравенство выполняется (34). Таким образом, система (28) в точности управляема на $[0, \vartheta]$. □

Теорема 4. *Пусть система* (28) *в точности управляема на* $[0, \vartheta]$ *для некоторого* $\vartheta > 0$. *Тогда к системе* (28) *применимо* λ*-преобразование.*

Доказательство. Пусть система (28) в точности управляема на $[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$. Обозначим $\sigma := 2\vartheta$. Предположим, что задано $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим операторную систему управления

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + BU_1(t), \tag{37}$$

где $Y(t) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $U_1(t) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{U}$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим следующую задачу управления: ищем непрерывную оператор–функцию $[0, \sigma] \ni t \mapsto U_1(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ такую, что $\|U_1(t)\| \le \alpha_1$ для некоторого $\alpha_1 \ge 0$ для всех $t \in [0, \sigma]$, которое переводит решение системы (37) из точки

$$Y(0) = I \tag{38}$$

в точку

$$Y(\sigma) = e^{\lambda\sigma}\Phi(\sigma) \tag{39}$$

так, что решение $Y(t)$ операторной системы (37) является линейной ограниченной оператор–функцией с ограниченной обратной:

$$\|Y(t)\| \le \beta_1, \quad \|Y^{-1}(t)\| \le \beta_2, \quad t \in [0, \sigma]. \tag{40}$$

Решение (37) с начальным условием (38) имеет вид

$$Y(t) = \Phi(t) \cdot \left(I + \int_0^t \Phi(-s) B U_1(s)\, ds \right). \tag{41}$$

Условие (39) выполняется тогда и только тогда, когда

$$I + \int_0^\sigma \Phi(-s) B U_1(s)\, ds = e^{\lambda\sigma} I. \tag{42}$$

Будем искать $U_1(t)$ в форме

$$U_1(t) = B^* \Phi^*(-t) H, \tag{43}$$

где $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$. Тогда из равенства (42) следует, что

$$I + Q_0(\sigma) H = e^{\lambda\sigma} I. \tag{44}$$

По определению (33) для $Q_0(\cdot)$ имеем $Q_0(\sigma) \ge Q_0(\vartheta)$. По лемме 8 $Q_0(\vartheta) \ge \gamma_1 I$ для некоторого $\gamma_1 > 0$. Следовательно, $Q_0^{-1}(\sigma) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ и $\|Q_0^{-1}(\sigma)\| \le \delta_1$ для некоторого $\delta_1 > 0$. Найдя H из (44), получим

$$H = (e^{\lambda\sigma} - 1) Q_0^{-1}(\sigma). \tag{45}$$

Подставив равенство (45) в равенство (43), получим

$$U_1(t) = B^* \Phi^*(-t) Q_0^{-1}(\sigma)(e^{\lambda\sigma} - 1), \quad t \in [0, \sigma]. \tag{46}$$

Имеем

$$\|U_1(t)\| \le \|B^*\| \cdot \|\Phi^*(-t)\| \cdot \|Q_0^{-1}(\sigma)\| \cdot |e^{\lambda\sigma} - 1| \le b e^{a\sigma} \delta_1 |e^{\lambda\sigma} - 1| =: \alpha_1, \quad t \in [0, \sigma].$$

Подставив равенство (46) в (41), получим

$$Y(t) = \Phi(t) R(t), \tag{47}$$

где

$$R(t) = I + \int_0^t \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds\,Q_0^{-1}(\sigma)(e^{\lambda\sigma} - 1). \tag{48}$$

Имеем для всех $t \in [0, \sigma]$,

$$\|R(t)\| \le \|I\| + \int_0^t \|\Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\|\,ds \cdot \|Q_0^{-1}(\sigma)\| \cdot |e^{\lambda\sigma} - 1| \le 1 + \sigma e^{2a\sigma} b^2 \delta_1 |e^{\lambda\sigma} - 1|,$$

следовательно,

$$\|Y(t)\| \le \|\Phi(t)\| \cdot \|R(t)\| \le e^{a\sigma}(1 + \sigma e^{2a\sigma} b^2 \delta_1 |e^{\lambda\sigma} - 1|) =: \beta_1, \quad t \in [0, \sigma].$$

Таким образом, первое неравенство (40) выполнено.

Покажем, что $R(t)$ имеет ограниченный обратный. Рассмотрим оператор

$$P(t) := R(t)Q_0(\sigma) = Q_0(\sigma) + (e^{\lambda\sigma} - 1)\int_0^t \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds.$$

Имеем $P^*(t) = P(t)$, $P(t) \ge 0$ ($t \in [0, \sigma]$) и

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^\sigma \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds - \int_0^t \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds + e^{\lambda\sigma}\int_0^t \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds \\ &= \int_t^\sigma \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds + e^{\lambda\sigma}\int_0^t \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds =: P_1(t) + P_2(t). \end{aligned}$$

$P_i^*(t) = P_i(t)$ и $P_i(t) \ge 0$, $i = 1, 2$, $t \in [0, \sigma]$.

Пусть $t \in [0, \vartheta]$. Тогда

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \int_t^\sigma \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds = \\ &= \int_t^\vartheta \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds + \int_\vartheta^{2\vartheta} \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds =: P_3(t) + P_4(\vartheta). \end{aligned}$$

Имеем $P_3^*(t) = P_3(t)$, $P_4^*(\vartheta) = P_4(\vartheta)$,

$$P_3(t) = \int_t^\vartheta \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds \ge 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} P_4(\vartheta) &= \int_\vartheta^{2\vartheta} \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds = \Phi^{-1}(\vartheta)\int_\vartheta^{2\vartheta} \Phi(\vartheta - s)BB^*\Phi^*(\vartheta - s)\,ds\,\big(\Phi^*(\vartheta)\big)^{-1} = \\ &= \Phi^{-1}(\vartheta)\int_0^\vartheta \Phi(-t)BB^*\Phi^*(-t)\,dt\,\big(\Phi^*(\vartheta)\big)^{-1} = \Phi^{-1}(\vartheta)Q_0(\vartheta)\big(\Phi^*(\vartheta)\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку система (28) в точности управляема на $[0, \vartheta]$, по лемме 8 имеем $Q_0(\vartheta) \ge \gamma_1 I$. Следовательно, $P_4(\vartheta) \ge \gamma_2 I$ для некоторого $\gamma_2 \ge 0$ (а именно для $\gamma_2 := \gamma_1 e^{-2a\vartheta}$; доказательство аналогично доказательству леммы 8). Итак, мы имеем $P_1(t) \ge \gamma_2 I$ для $t \in [0, \vartheta]$. Таким образом, $P(t) = P_1(t) + P_2(t) \ge \gamma_2 I$ для $t \in [0, \vartheta]$.

Пусть $t \in [\vartheta, 2\vartheta]$. Имеем

$$P_2(t) = e^{\lambda\sigma}\int_0^t \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds \ge e^{\lambda\sigma}\int_0^\vartheta \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds = e^{\lambda\sigma}Q_0(\vartheta) \ge e^{\lambda\sigma}\gamma_1 I.$$

Итак, $P(t) = P_1(t) + P_2(t) \geq e^{\lambda\sigma}\gamma_1 I$ для $t \in [\vartheta, 2\vartheta]$.

Таким образом, для всех $t \in [0, \sigma]$ имеем $P(t) \geq \gamma_3 I > 0$, где $\gamma_3 := \min\{\gamma_2, \gamma_1 e^{\lambda\sigma}\}$. Следовательно, существуют обратные $P^{-1}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ и $\|P^{-1}(t)\| \leq \delta_2$ для некоторого $\delta_2 > 0$ для всех $t \in [0, \sigma]$. Тогда $R(t) = P(t)Q_0^{-1}(\sigma)$ имеет ограниченный обратный

$$R^{-1}(t) = Q_0(\sigma)P^{-1}(t).$$

Используя оценку из леммы 7, получим

$$\|R^{-1}(t)\| \leq \|Q_0(\sigma)\| \cdot \|P^{-1}(t)\| \leq \sigma e^{2a\sigma} b^2 \delta_2 =: \delta_3.$$

По равенству (47) получаем

$$Y^{-1}(t) = R^{-1}(t)\Phi^{-1}(t), \quad t \in [0, \sigma],$$

и

$$\|Y^{-1}(t)\| \leq \|R^{-1}(t)\| \cdot \|\Phi^{-1}(t)\| \leq \delta_3 e^{a\sigma} =: \beta_2, \quad t \in [0, \sigma].$$

Обозначим

$$U_2(t) := U_1(t)Y^{-1}(t), \quad t \in [0, \sigma]. \tag{49}$$

Тогда $U_2(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$, $t \in [0, \sigma]$ и

$$\|U_2(t)\| \leq \|U_1(t)\| \cdot \|Y^{-1}(t)\| \leq \alpha_1\beta_2, \quad t \in [0, \sigma].$$

Имеем

$$U_1(t) = U_2(t)Y(t), \quad t \in [0, \sigma]. \tag{50}$$

Подставим равенство (50) в систему (37). Получаем, что функция $Y(t)$, $t \in [0, \sigma]$, определенная равенством (47), является решением системы

$$\dot{Y}(t) = (A + BU_2(t))Y(t) \tag{51}$$

и удовлетворяет начальному условию (38). Следовательно,

$$Y(t) = \Phi_{U_2}(t, 0), \quad t \in [0, \sigma], \tag{52}$$

где $\Phi_{U_2}(t, s)$, $t, s \in [0, \sigma]$ — эволюционный оператор системы (51). Из равенств (52) и (39) следует, что

$$\Phi_{U_2}(\sigma, 0) = e^{\lambda\sigma}\Phi(\sigma). \tag{53}$$

Продолжим функцию $U_2(t)$, $t \in [0, \sigma]$ на $\mathbb{R}$ периодически с периодом σ, т. е. построим функцию

$$U(t) \equiv U_2(t - k\sigma), \quad t \in [k\sigma, (k+1)\sigma), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{54}$$

Рассмотрим систему

$$\dot{Y}(t) = (A + BU(t))Y(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{55}$$

Система (55) является σ-периодической. Следовательно, эволюционный оператор $\Phi_U(t,s)$ системы (55) удовлетворяет следующему условию:

$$\Phi_U(t+k\sigma, s+k\sigma) = \Phi_U(t,s)$$

для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$. В частности,

$$\Phi_U((k+1)\sigma, k\sigma) = \Phi_U(\sigma, 0) = \Phi_{U_2}(\sigma, 0). \tag{56}$$

Из равенств (56), (53), и равенства $\Phi(\sigma) = \Phi((k+1)\sigma, k\sigma)$ следует, что

$$\Phi_U((k+1)\sigma, k\sigma) = e^{\lambda\sigma}\Phi((k+1)\sigma, k\sigma). \tag{57}$$

Таким образом, требуемое равенство доказано. Функция $U(\cdot)$ кусочно непрерывна и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\| = \sup_{t\in[0,\sigma)} \|U_2(t)\| \le \alpha_1\beta_2.$$

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Пусть система* (28) *в точности управляема на* $[0,\vartheta]$ *для некоторого* $\vartheta > 0$. *Тогда для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *существует допустимая оператор–функция* $U(\cdot)$ *такая, что замкнутая система*

$$\dot{x}(t) = (A + BU(t))x(t) \tag{58}$$

и система (15) *кинематически подобны на* $\mathbb{R}$.

Следствие 2 следует из теоремы 3 и теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть система* (28) *в точности управляема на* $[0,\vartheta]$ *для некоторого* $\vartheta > 0$. *Тогда верхний показатель Боля системы* (28) *глобально управляем с помощью линейной обратной связью по состоянию.*

Доказательство. Пусть задано $\mu \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$\lambda := \mu - \varkappa(A). \tag{59}$$

Для этого λ построим по следствию 2 допустимую оператор–функцию $U(\cdot)$ такую, что система (58) и система (15) кинематически подобны на $\mathbb{R}$. По лемме 4 имеем

$$\varkappa(A + BU) = \varkappa(A + \lambda I). \tag{60}$$

По лемме 2 имеем

$$\varkappa(A + \lambda I) = \varkappa(A) + \lambda. \tag{61}$$

Из равенств (60), (61) и (59) следует, что $\varkappa(A + BU) = \mu$, как и требовалось доказать. □

§ 4. Примеры

Пример 1. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{U} = \ell_2$, где ℓ_2 — это пространство всех последовательностей

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

с нормой $\|x\| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\Big)^{1/2}$. Пространство ℓ_2 является сепарабельным гильбертовым пространством [55, § 56]. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad u \in \mathfrak{U}, \tag{62}$$

где

$$A\colon\ (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots), \tag{63}$$

$$B\colon\ (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \ldots). \tag{64}$$

Рассматривая элементы ℓ_2 как векторы-столбцы с бесконечным числом координат, можно отождествить операторы A и B со следующими матрицами с бесконечным числом строк и столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Рассмотрим матрицы

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы (65) можно записать в блочно-диагональной форме следующим образом:

$$A = \operatorname{diag}\{F, F, \ldots, F, \ldots\}, \quad B = \operatorname{diag}\{G, G, \ldots, G, \ldots\}. \tag{66}$$

Обозначим матрицы вида (66) следующим образом:

$$A = \operatorname{diag}[F]_\infty, \quad B = \operatorname{diag}[G]_\infty.$$

Пусть $G_1 := FG$. Тогда $G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следовательно, $AB = \operatorname{diag}[G_1]_\infty$. Тогда

$$\operatorname{span}\{B\mathfrak{U}, AB\mathfrak{U}\} = \mathfrak{X}.$$

Из (см. [56, Теорема 2]) следует, что (62), (63), (64) в точности управляема на $[0, \vartheta]$ для любого $\vartheta > 0$. Возьмем $\vartheta = \pi$. Покажем, что верхний показатель Боля системы (62), (63), (64) глобально управляем с помощью линейной обратной связи по состоянию.

Рассмотрим систему

$$\dot{y}(t) = Fy(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^2. \tag{67}$$

Эволюционный оператор $\Gamma(t,s)$ системы (67) имеет вид $\Gamma(t,s) = \Gamma(t-s)$, где $\Gamma(t) = \exp(Ft)$. Вычисляя экспоненту матрицы, получаем

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Построим эволюционный оператор $\Phi(t,s)$ свободной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Получаем $\Phi(t,s) = \Phi(t-s)$, где $\Phi(t) = \operatorname{diag}[\Gamma(t)]_\infty$. Следовательно, $\Phi(\tau+s,\tau) = \operatorname{diag}[\Gamma(s)]_\infty$. Для любого $y = \operatorname{col}(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$\|\Gamma(s)y\|^2 = (y_1 \cos s - y_2 \sin s)^2 + (y_1 \sin s + y_2 \cos s)^2 = y_1^2 + y_2^2 = \|y\|^2.$$

Из этого следует, что $\|\Phi(\tau+s,\tau)x\|^2 = \|x\|^2$ для всех $\tau, s \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $\|\Phi(\tau+s,\tau)\| = 1$. Поэтому, $\ln\|\Phi(\tau+s,\tau)\| = 0$. Таким образом, $\varkappa(A) = 0$.

Пусть дано произвольное $\mu \in \mathbb{R}$. Обозначим $\lambda := \mu - \varkappa(A) = \mu$. Построим $U(\cdot)$ по теореме 4, обеспечивающей равенство (57), и, следовательно, по следствию 2, кинематическое подобие систем (58) и (15). Таким образом, равенство $\varkappa(A+BU) = \lambda = \mu$.

Пусть $\sigma := 2\vartheta = 2\pi$. Имеем

$$\Phi(\sigma) = \Phi(2\pi) = \operatorname{diag}[\Gamma(2\pi)]_\infty = \operatorname{diag}[I_2]_\infty$$

где $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, т. е. $\Phi(\sigma) = I \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$. Далее,

$$\Gamma(-s)GG^*\Gamma^*(-s) = \begin{bmatrix} \cos^2 s & -\cos s \sin s \\ -\cos s \sin s & \sin^2 s \end{bmatrix}.$$

Обозначим $\Sigma(t) := \displaystyle\int_0^t \Gamma(-s)GG^*\Gamma^*(-s)\,ds$. Тогда

$$\Sigma(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{4} & \dfrac{\cos 2t - 1}{4} \\ \dfrac{\cos 2t - 1}{4} & \dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin 2t}{4} \end{bmatrix},$$

и, следовательно, $\Sigma(\sigma) = \Sigma(2\pi) = \pi I_2$. Имеем

$$Q_0(\sigma) = \int_0^\sigma \Phi(-s)BB^*\Phi^*(-s)\,ds = \int_0^\sigma \operatorname{diag}[\Gamma(-s)]_\infty \operatorname{diag}[GG^*]_\infty \operatorname{diag}[\Gamma^*(s)]_\infty\,ds =$$
$$= \int_0^\sigma \operatorname{diag}[\Gamma(-s)GG^*\Gamma^*(s)]_\infty\,ds = \operatorname{diag}[\Sigma(\sigma)]_\infty = \pi I \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}).$$

Поэтому, $Q_0^{-1}(\sigma) = \dfrac{1}{\pi} I \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, следовательно, в силу равенства (45) имеем

$$H = \frac{e^{2\pi\lambda} - 1}{\pi} I \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}).$$

Обозначим

$$\alpha := \frac{e^{2\pi\lambda} - 1}{2\pi}. \tag{68}$$

Используя (46), получаем

$$U_1(t) = \operatorname{diag}\left[V_1(t)\right]_\infty, \quad \text{где} \quad V_1(t) = \left[2\alpha\cos t, -2\alpha\sin t\right]. \tag{69}$$

Далее по равенству (48) имеем $R(t) = \operatorname{diag}\left[K(t)\right]_\infty$, где $K(t) = I_2 + 2\alpha\Sigma(t)$. Обозначим $S(t) := \Gamma(t)K(t)$. Умножив $\Gamma(t)$ на $K(t)$, получаем, что

$$S(t) = \begin{bmatrix} (1+\alpha t)\cos t + \alpha\sin t & -(1+\alpha t)\sin t \\ (1+\alpha t)\sin t & (1+\alpha t)\cos t - \alpha\sin t \end{bmatrix}. \tag{70}$$

По равенству (47) имеем

$$Y(t) = \Phi(t)R(t) = \operatorname{diag}\left[\Gamma(t)\right]_\infty \operatorname{diag}\left[K(t)\right]_\infty = \operatorname{diag}\left[\Gamma(t)K(t)\right]_\infty = \operatorname{diag}\left[S(t)\right]_\infty. \tag{71}$$

Найдя $\Delta(t) := \det S(t)$ из (70), получаем, что

$$\Delta(t) = (1+\alpha t)^2 - \alpha^2 \sin^2 t.$$

Легко проверить, что для всех $t \in [0, \sigma]$ выполнено

$$\begin{cases} \Delta'(t) > 0, \text{ если } \alpha > 0; \\ \Delta'(t) < 0, \text{ если } \alpha < 0; \\ \Delta'(t) = 0, \text{ если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Следовательно, для всех $t \in [0, \sigma]$ выполнено

$$\begin{cases} \text{если } \alpha > 0, \text{ тогда } \Delta(t) \geq \Delta(0) = 1; \\ \text{если } \alpha < 0, \text{ тогда } \Delta(t) \geq \Delta(2\pi) = e^{4\pi\lambda} > 0; \\ \text{если } \alpha = 0, \text{ тогда } \Delta(t) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $\Delta(t)$ отделено от нуля.

Из равенства (70) получаем

$$S^{-1}(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{bmatrix} (1+\alpha t)\cos t - \alpha\sin t & (1+\alpha t)\sin t \\ -(1+\alpha t)\sin t & (1+\alpha t)\cos t + \alpha\sin t \end{bmatrix}. \tag{72}$$

По равенству (71) имеем

$$Y^{-1}(t) = \operatorname{diag}\left[S^{-1}(t)\right]_\infty. \tag{73}$$

Построив $U_2(t)$ в соответствии с равенством (49), используя равенства (69), (72) и (73), получаем:

$$U_2(t) = \operatorname{diag}[V_2(t)]_\infty, \quad V_2(t) = \frac{1}{\Delta(t)}\left[2\alpha(1+\alpha t) - 2\alpha^2 \sin t \cos t, -2\alpha^2 \sin^2 t\right]. \tag{74}$$

Из равенства (74) получаем:

$$F + GV_2(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{2\alpha(1+\alpha t) - 2\alpha^2 \sin t \cos t}{\Delta(t)} & \dfrac{-(1+\alpha t)^2 - \alpha^2 \sin^2 t}{\Delta(t)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что матрица (70) удовлетворяет следующему матричному дифференциальному уравнению:

$$\dot{S}(t) = (F + GV_2(t))S(t), \quad t \in [0, \sigma]. \tag{75}$$

Далее, из равенства (74) имеем

$$A + BU_2(t) = \operatorname{diag}[F + GV_2(t)]_\infty. \tag{76}$$

В силу равенств (75) и (76), функция (71) удовлетворяет системе

$$\dot{Y}(t) = (A + BU_2(t))Y(t), \quad t \in [0, \sigma]$$

и $Y(0) = I$. Следовательно, выполняются равенства (52) и (53). Построив $U(t)$ согласно равенству (54), получим

$$\begin{gathered} U(t) = \operatorname{diag}[V(t)]_\infty, \quad V(t) = \frac{1}{\Delta(t)}\left[2\alpha(1+\alpha(t-2\pi k)) - 2\alpha^2 \sin t \cos t, -2\alpha^2 \sin^2 t\right], \\ t \in [2\pi k, 2\pi(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{77}$$

По теореме 4 оператор–функция (77) с α, определяемым равенством (68), обеспечивает равенство (57), кинематическое подобие систем (58) и (15) на $\mathbb{R}$ и равенство

$$\varkappa(A + BU) = \lambda = \mu.$$

Заключение

Для линейной стационарной системы управления в гильбертовом пространстве с ограниченными операторными коэффициентами мы рассмотрели задачу о глобальном управлении верхним показателем Боля с помощью линейной обратной связи по состояния с нестационарной линейной ограниченной оператор–функцией управления. Мы доказали, что если открытая система управления является в точности управляемой, то верхний показатель Боля системы глобально управляем.

Мы планируем обобщить эти результаты на системы с не обязательно ограниченным оператором A, а с оператором, порождающим C_0–непрерывную полугруппу. Мы планируем доказать аналогичные результаты для систем с динамической обратной связью. Дальнейшее развитие этих результатов может заключаться в их распространении на системы с периодическими коэффициентами и с произвольными стационарными непериодическими коэффициентами, на системы в общих банаховых пространствах или на системы с дискретным временем. Мы предполагаем применить результаты к конкретным системам, в частности к системам с запаздыванием, рассматривая их как абстрактные системы дифференциальных уравнений в бесконечномерном пространстве.

Список литературы

[1] Колмогоров, А. Н.; Фомин, С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976. 544 с.

[2] Далецкий, Ю. Л.; Крейн, М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970. 536 с.

[3] Zabczyk, J. *Mathematical control theory: an introduction.* Birkhauser, Boston. 1995. 260 p.

[4] Иосида, К. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1967. 624 с.

[5] Popov, V.M. Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions. *Revue Roumaine des Sciences Techniques–Serie Electrotechnique et Energetique* 1964, *9*, 629–690.

[6] Wonham, W.M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1967, *12*, 660–665; DOI: 10.1109/TAC.1967.1098739.

[7] Brunovsky, P. Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems. *Journal of Differential Equations* 1969, *6*, 296–313; DOI: 10.1016/0022-0396(69)90019-9.

[8] Silverman, L.M. Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1966, *11*, 300–303; DOI: 10.1109/tac.1966.1098312.

[9] Wolovich, W.A. On the stabilization of controllable system. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1968, *13*, 569–572; DOI: 10.1109/tac.1968.1098993.

[10] Silverman, L.M.; Anderson, B.D.O. Controllability, observability and stability of linear systems. *SIAM Journal on Control* 1968, *6*, 121–130; DOI: 10.1137/0306010.

[11] Ikeda, M.; Maeda, H.; Kodama, S. Stabilization of linear systems. *SIAM Journal on Control* 1972, *10*, 716–729; DOI: 10.1137/0310052.

[12] Kalman, R.E. Contribution to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana* 1960, *5*, 102–119.

[13] Bylov, B.F.; Vinograd, R.E.; Grobman, D.M.; Nemytskii, V.V. *Theory of Lyapunov Exponents*; Nauka: Moscow, USSR, 1966.

[14] Demidovich, B.P. *Lectures on the Mathematical Stability Theory*; Nauka: Moscow, USSR, 1967.

[15] Barreira, L. *Lyapunov Exponents*; Birkhäuser: Cham, Switzerland, 2017; DOI: 10.1007/978-3-319-71261-1.

[16] Makarov, E.K.; Popova, S.N. *Controllability of Asymptotic Invariants of Time-Dependent Linear Systems*; Belaruskaya Navuka: Minsk, Belarus, 2012.

[17] Makarov, E.K.; Popova, S.N. Global controllability of central exponents of linear systems. *Russian Mathematics* 1999, *43*, 56–63. https://zbmath.org/?q=an:A1049.93505

[18] Makarov, E.K.; Popova, S.N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems. *Differential Equations* 1999, *35*, 97–107.

[19] Popova, S.N. Global controllability of the complete set of Lyapunov invariants of periodic systems. *Differential Equations* 2003, *39*, 1713–1723;
DOI: 10.1023/b:dieq.0000023551.43484.e5.

[20] Popova, S.N. Global reducibility of linear control systems to systems of scalar type. *Differential Equations* 2004, *40*, 43–49; DOI: 10.1023/b:dieq.0000028712.20518.1c.

[21] Popova, S.N. On the global controllability of Lyapunov exponents of linear systems. *Differential Equations* 2007, *43*, 1072–1078; DOI: 10.1134/s0012266107080058.

[22] Babiarz, A.; Banshchikova, I.; Czornik, A.; Makarov, E.; Niezabitowski, M.; Popova S. On assignability of Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying system with control. In *2016 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, Miedzyzdroje, Poland, 29 August–1 September 2016;
DOI: 10.1109/MMAR.2016.7575221.

[23] Babiarz, A.; Czornik, A.; Makarov, E.; Niezabitowski, M.; Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* 2017, *55*, 671–692; DOI: 10.1137/15m1033666.

[24] Popova S. Assignability of certain Lyapunov invariants for linear discrete-time systems. *IFAC-PapersOnLine* 2018, *51*, 40–45; DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.350.

[25] Babiarz, A.; Banshchikova, I.; Czornik, A.; Makarov, E.; Niezabitowski, M.; Popova S. Necessary and sufficient conditions for assignability of the Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 2018, *63*, 3825–3837; DOI: 10.1109/tac.2018.2823086.

[26] Babiarz, A.; Banshchikova, I.; Czornik, A.; Makarov, E.; Niezabitowski, M.; Popova S. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* 2019, *57*, 1355–1377;
DOI: 10.1137/17m1141734.

[27] Babiarz, A.; Banshchikova, I.; Czornik, A.; Makarov, E.; Niezabitowski, M.; Popova S. Assignability of Lyapunov spectrum for discrete linear time-varying systems. *Springer*

Proceedings in Mathematics and Statistics 2020, *312*, 133–147; DOI: 10.1007/978-3-030-35502-9_5.

[28] Barabanov, E.A.; Konyukh, A.V. Bohl exponents of linear differential systems. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics* 2001, *24*, 151–158.

[29] Bykov, V.V. Bohl exponents and Baire classes of functions. *Journal of Mathematical Sciences* 2015, *210*, 168–185; DOI: 10.1007/s10958-015-2555-6.

[30] Bykov, V.V. Baire classes of Lyapunov invariants. *Sbornik: Mathematics* 2017, *208*, 620–643; DOI: 10.1070/sm8809.

[31] Barabanov, E.; Vaidzelevich, A.; Czornik A.; Niezabitowski, M. Exact boundaries of mobility of the Lyapunov, Perron and Bohl exponents of linear difference systems under small perturbations of the coefficient matrices. *AIP Conference Proceedings* 2016, *1738*, 130007; DOI: 10.1063/1.4951923.

[32] Czornik, A.; Konyukh, A.; Niezabitowski, M. Which functions may be the upper Bohl function of the diagonal discrete linear time-varying systems? *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 2017, *452*, 1420–1433; DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.03.061.

[33] Babiarz, A.; Czornik, A.; Konyukh, A.; Niezabitowski, M. What types of functions may be the lower Bohl function of a diagonal discrete linear time-varying systems? *Journal of the Franklin Institute* 2017, *354*, 5131–5144; DOI: 10.1016/j.jfranklin.2017.05.032.

[34] Babiarz, A.; Czornik, A.; Niezabitowski, M. On the assignability of regularity coefficients and central exponents of discrete linear time-varying systems. *IFAC-PapersOnLine* 2019, *52*, 64–69; DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.349.

[35] Babiarz, A.; Czornik, A.; Niezabitowski, M. Relations between Bohl exponents and general exponent of discrete linear time-varying systems. *Journal of Difference Equations and Applications* 2019, *25*, 560–572; DOI: 10.1080/10236198.2019.1604695.

[36] Czornik, A.; Konyukh, A.; Konyukh, I.; Niezabitowski, M.; Orwat J. On Lyapunov and upper Bohl exponents of diagonal discrete linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 2019, *64*, 5171–5174; DOI: 10.1109/tac.2019.2911848.

[37] Pinto, N.; Robledo, G. Some relations between Bohl exponents and the exponential dichotomy spectrum. *Journal of Difference Equations and Applications* 2019, *25*, 573–582; DOI: 10.1080/10236198.2019.1604697.

[38] Datko, R. A linear control problem in an abstract Hilbert space. *Journal of Differential Equations* 1971, *9*, 346–359; DOI: 10.1016/0022-0396(71)90087-8.

[39] Slemrod, M. The linear stabilization problem in Hilbert space. *Journal of Functional Analysis* 1972, *11*, 334–345; DOI: 10.1016/0022-1236(72)90073-0.

[40] Russell, D.L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions. *SIAM Review* 1978, *20*, 639–739; DOI: 10.1137/1020095.

[41] Pritchard, A.J.; Zabczyk, J. Stability and stabilizability of infinite-dimensional systems. *SIAM Review* 1981, *23*, 25–52; DOI: 10.1137/1023003.

[42] Maciej Przyłuski, K.; Rolewicz S. On stability of linear time-varying infinite-dimensional discrete-time systems. *Systems & Control Letters* 1984, *4*, 307–315; DOI: 10.1016/s0167-6911(84)80042-0.

[43] Logemann, H. Stability and stabilizability of linear infinite-dimensional discrete-time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 1992, *9*, 255–263; DOI: 10.1093/imamci/9.3.255.

[44] Luo, Z.-H.; Guo, B.-Z.; Morgu, O. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*; Springer: London, UK, 1999; DOI: 10.1007/978-1-4471-0419-3.

[45] Raymond, J.-P. Stabilizability of infinite dimensional systems by finite dimensional control. *Computational Methods in Applied Mathematics* 2019, *19*, 267–282; DOI: 10.1515/cmam-2019-0026.

[46] Barreira, L.; Valls, C. Stability of the Lyapunov exponents under perturbations. *Annals of Functional Analysis* 2017, *8*, 398–410; DOI: 10.1215/20088752-2017-0005.

[47] Barreira, L.; Dragičević, D.; Valls, C. Nonuniform spectrum on Banach spaces. *Advances in Mathematics* 2017, *321*, 547–591; DOI: 10.1016/j.aim.2017.10.006.

[48] Barreira, L.; Dragičević, D.; Valls, C. Spectrum for compact operators on Banach spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan* 2019, *71*, 1–17; DOI: 10.2969/jmsj/76447644.

[49] Daleckii, Ju.L.; Krein, M.G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*; Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1974.

[50] Makarov, E.K. On the discreteness of asymptotic invariants of linear differential systems. *Differential Equations* 1998, *34*, 1323–1331. https://zbmath.org/?q=an:1017.34039

[51] Triggiani, R. Controllability and observability in Banach space with bounded operators. *SIAM Journal on Control* 1975, *13*, 462–491; DOI: 10.1137/0313028.

[52] Zaitsev, V.A. Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with an observer. *Differential Equations* 2010, *46*, 437–447; DOI: 10.1134/S0012266110030122.

[53] Curtain, R.F.; Zwart, H. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*; Springer: New York, USA, 1995; DOI: 10.1007/978-1-4612-4224-6.

[54] Zabczyk, J. *Mathematical Control Theory*; Birkhäuser: Boston, USA, 2008; DOI: 10.1007/978-0-8176-4733-9.

[55] Kolmogorov, A.N.; Fomin, S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*; Graylock Press: Rochester, N.Y., USA, 1957.

[56] Коробов, В. И.; Рабах, Р. Точная управляемость в банаховом пространстве. *Дифференциальные уравнения 1979*. Т. 15, № 12. С. 2142–2150.

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Клочкова Алексея Константиновича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Исследование флуктуаций скорости частицы в вязком газе со случайной скоростью в виде суммы двух коррелированных цветных шумов» являются: способ моделирования коррелированных случайных процессов, замыкание уравнения для функции плотности вероятности, подход к построению разностной схемы с учетом особенностей задачи

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 марта по 5 мая 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Science Direct по следующим ключевым словам: уравнение для функции плотности вероятности, коррелированный случайный процесс, probability density function, stochastic process в выдаче поисковиков были исследованы материалы, в которых не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Игорем Владимировичем Деревичем, доктором технических наук, профессором кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана.
- Принято участие в нескольких конференциях-семинарах и отданы в публикацию статьи (список см. в приложении 1 к выпускной квалификационной работе).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 29.06.2020. На Смотр представлен проект текста работы

Подпись Клочков Алексей Константинович

29 мая 2020
г. Москва, Россия

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *«Фундаментальные науки» (ФН)*

КАФЕДРА *«Прикладная математика» (ФН-2)*

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

«Исследование флуктуаций скорости частицы в вязком газе со случайной скоростью в виде суммы двух коррелированных цветных шумов»

Студент *ФН2-42М* (Группа) _____ (Подпись, дата) *А.К. Клочков* (И.О.Фамилия)

Руководитель Выпускной квалификационной работы _____ (Подпись, дата) *И.В. Деревич* (И.О.Фамилия)

Консультант _____ (Подпись, дата) _____ (И.О.Фамилия)

Консультант _____ (Подпись, дата) _____ (И.О.Фамилия)

Нормоконтролер _____ (Подпись, дата) _____ (И.О.Фамилия)

2020 г.

Содержание

Реферат 3

Введение 4

1. Аналитические расчёты 8

Основные уравнения 8

Спектральный анализ флуктуаций скорости газа 11

Спектральный анализ флуктуаций скорости частиц 18

2. Прямое численное моделирование 22

Численное решение СОДУ 22

Результаты прямого численного моделирования 24

3. Уравнение для функции плотности вероятности 31

Вывод уравнения для ФПВ 31

Численное решение уравнения для ФПВ 38

Аппроксимация конвективных слагаемых в регулярных ячейках 39

Аппроксимация диссипативных слагаемых в регулярных ячейках 41

Аппроксимация уравнения в приграничных и угловых ячейках 43

Методы решения системы 45

Исследование численного решения 47

Сопоставление подхода Эйлера и Лагранжа 53

Заключение 58

Приложение 1. Список публикаций и конференций 60

Список использованных источников 61

Реферат

Магистерская квалификационная работа 62 стр., 16 рис., 15 источников.

Ключевые слова: турбулентность, случайный процесс, функция плотности вероятности, корреляционная функция, спектральный анализ, прямое численное моделирование, стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения сплошная среда, метод конечных объемов, статистика.

Аннотация: Изучается влияние суммы двух коррелированных случайных флуктуаций скорости газа на параметры хаотической скорости инерционных частиц. Коррелированные компоненты случайной скорости газа и частиц моделируются как решение системы обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений. Рассматриваются подход Эйлера и Лагранжа для описание сплошной среды. Методом спектрального анализа случайных процессов получены аналитические формулы для расчета дисперсий и корреляций компонентов скорости газа и частиц. Предложен метод прямого численного моделирования случайных реализаций скорости газа и частиц, основанный на современных алгоритмах численного решения системы стохастических дифференциальных уравнений. Получено замкнутое уравнение для функции плотности вероятности случайных флуктуаций скорости газа и частицы. На основе метода конечных объемов предложена и реализована численная аппроксимация уравнения для функции плотности вероятности. Результаты расчетов по аналитическим формулам и полученные путем статистической обработки массива данных прямого численного моделирования удовлетворительно согласуются с численным решением уравнения для функции плотности вероятности.

Введение

Турбулентные двухфазные течения широко встречаются в природе и используются во многих технических приложениях. Параметры турбулентности в свободном потоке и для течений вблизи омываемой поверхности существенно отличаются. Вблизи стенки наблюдается сложное течение с ярко выраженными когерентными структурами [1, 2], которые, в частности, определяют скорость выпадения частиц или капель на омываемую поверхность, интенсивность эрозии стенки. Интенсивность флуктуаций скорости газа вблизи стенки является существенно неоднородной и анизотропной. Можно выделить высокочастотные флуктуации скорости газа и модулирующие низкочастотные случайные колебания, приводящие к образованию когерентных случайных структур. Имеющиеся в литературе теоретические модели, описывающие влияние когерентных структур на интенсивность осаждения дисперсной фазы, построены на эмпирическом уровне и не удовлетворяют критериям математической корректности [3, 4].

Исследование статистических параметров турбулентного потока газа и частиц проводится в работе на основе подходов Эйлера и Лагранжа. В подходе Лагранжа динамика дисперсной фазы рассчитывается на основе моделирования огромного числа случайных траекторий частиц (порядка 10^4–10^8) с последующим осреднением для получения практической информации. В методе Эйлера записывается система уравнений динамики дисперсной фазы в континуальном приближении, когда коллектив частиц трактуется как сплошная среда. В литературе иногда для перехода к континуальному описанию используются малообоснованные полуэмпирические предположения. Строгий подход к переходу от динамики отдельных частиц к уравнениям сплошной среды возможен при использовании функции плотности вероятности (ФПВ) распределения случайных параметров дисперсной фазы.

Одна из целей настоящей работы – исследовать качественные особенности хаотического поведения частиц в модулированном турбулентном потоке.

Флуктуации скорости газа на траектории частицы представляем в виде суммы двух коррелированных случайных процессов. Во-первых, используется метод спектрального разложения случайных процессов, популярный при изучении турбулентности [5, 6, 7]. В результате получаются аналитические формулы для расчета интенсивности флуктуаций скорости газа и частиц и их корреляций. Спектральный метод основан на подходе Эйлера.

Второй подход Лагранжа основан на прямом численном моделировании случайных флуктуаций скорости газа и частиц, получаемых в ходе численного интегрирования системы СОДУ. Данные, представляющие практически интерес, получаются путем осреднения ансамбля выборочных реализаций с использованием приемов математической статистически. В то же время следует отметить, что подход Лагранжа является аналогом физического эксперимента и используется для верификации аналитических результатов, полученных на основе подхода Эйлера. В отличие от популярного метода стохастического моделирования типа Монте – Карло в работе параметры всех случайных процессов находятся на основе решения системы стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Численный алгоритм решения основан на современных достижениях в обобщении алгоритмов интегрирования Рунге – Кутта для стохастических дифференциальных уравнений [8-11]. Это позволяет использовать предложенный метод при численном моделировании сложных технических систем.

Наконец третий способ изучения турбулентных процессов, основанный на подходе Эйлера, заключается в получении уравнения для ФПВ. Вследствие случайного характера флуктуаций скорости сплошной среды адекватный метод построения уравнений для дисперсной фазы в переменных Эйлера базируется на привлечении современных достижений теории случайных процессов и прикладного функционального анализа. Вся информацию о дисперсной фазе содержится в функции плотности вероятности распределения ее параметров. В соответствии с аксиоматическим подходом А.Н. Колмогорова незамкнутое

в общем случае уравнение для ФПВ получается путем осреднения по ансамблю турбулентных реализаций. Замкнутое уравнения для ФПВ получено для системы стохастических дифференциальных уравнения с белым шумом в качестве источников случайных флуктуаций. Сама система генерирует цветной шум, поэтому итоговое уравнение учитывает сложную внутреннюю структуру турбулентных флуктуаций сплошной среды.

С помощью основных свойства ФПВ получены граничные условия и сформулирована постановка задачи. Запись уравнения в потоковом виде (или в дивергентной форме) позволяет построить консервативную разностную схему. Дальнейшее решение задачи реализуется на основе дискретизации методов конечных объемов. Исследуются варианты интерполяции искомой функции на границы расчетных ячеек с целью удовлетворения полученной функции свойствам ФПВ [12-15]. Решение аппроксимированной системы реализуется двумя методами: частичной дискретизацией (метод прямых, т.е. решения системы ОДУ) и полной дискретизацией (решения СЛАУ). В первом случае используются заимствованные библиотеки решения систем ОДУ. Для второго случая используются библиотеки по хранению разреженных матриц, LU разложению матриц и решению СЛАУ.

Основная цель данной работы описание двух альтернативных подходов для описание двухфазных турбулентных потоков. На основе подхода Эйлера получены аналитические результаты из спектрального анализа и выведено замкнутое уравнение для ФПВ. Подход Лагранжа базируется на численно интегрировании СОДУ. Результаты, полученные всеми описанными выше подходами, качественно и количественно сравниваются. Видно, что каждый подход дает схожие результаты и позволяет описывать изучаемые явления.

Преимущества подходов Лагранжа и Эйлера зависят от конкретного типа задач. Например, если характерное время пребывания дисперсного турбулентного потока в аппарате сравнимо с характерным временем динамической инерции частиц, то движение дисперсной фазы будет определяться

начальными условиями на входе в аппарат. В этом случае обосновано использование метода Лагранжа. Если время пребывания дисперсного турбулентного потока существенно больше интегрального временного масштаба турбулентности и времени динамической инерции частиц, то в этой ситуации важны коллективные эффекты, связанные с турбулентной диффузией массива частиц и столкновениями частиц между собой в результате вовлечения в турбулентность несущей среды. Единственный метод, способный адекватно описать коллективные эффекты в дисперсной фазе, основан на подходе Эйлера.

1. Аналитические расчёты

Основные уравнения

Уравнения движения твердой сферической частицы в газе в приближении Стокса без учета массовых сил имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\tau_V}\left[\mathbf{U}(\mathbf{x},t)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)}-\mathbf{V}(t)\right],\quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{V}(t)$$

Здесь $\mathbf{X}(t),\mathbf{V}(t)$ – скорость и координата частицы; τ_V – время динамической релаксации частицы, которое в приближении Стокса является константой; $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$ – скорость газа.

Обозначим скорость газа на траектории частицы как $\tilde{U}(t)=\mathbf{U}(\mathbf{x},t)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)}$, тогда скорость частицы вдоль ее траектории описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\tau_V}\left[\tilde{U}(t)-V(t)\right] \tag{1}$$

Скорость газа на траектории частицы моделируем случайным процессом с нулевым средним значением $\left\langle\tilde{U}(t)\right\rangle=0$ (осреднение проводится по ансамблю реализаций случайного процесса $\tilde{U}(t)$). Флуктуации скорости газа на траектории частицы представляем в виде суммы двух коррелированных случайных процессов

$$\tilde{U}(t)=U^{(\alpha)}(t)+U^{(\beta)}(t)\ ,\quad \left\langle U^{(\alpha)}(t)\right\rangle=\left\langle U^{(\beta)}(t)\right\rangle=0 \tag{2}$$

Выборочные реализации процессов $U^{(\alpha)}(t),U^{(\beta)}(t)$ моделируем как решение системы стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}U^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\left\{\xi^{(\alpha)}(t)-\chi^{(\beta)}U^{(\beta)}(t)-U^{(\alpha)}(t)\right\} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}U^{(\beta)}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\left\{\xi^{(\beta)}(t)+\chi^{(\alpha)}U^{(\alpha)}(t)-U^{(\beta)}(t)\right\} \tag{4}$$

здесь $\chi^{(\alpha)}>0, \chi^{(\beta)}>0$ – коэффициенты взаимного влияния случайных процессов $U^{(\alpha)}(t), U^{(\beta)}(t)$; $T_E^{(\alpha)}, T_E^{(\beta)}$ – временные макромасштабы; $\xi^{(\alpha)}(t), \xi^{(\beta)}(t)$ – заданные источники турбулентного движения газа $\left\langle\xi^{(\alpha)}(t)\right\rangle=\left\langle\xi^{(\beta)}(t)\right\rangle=0$.

Случайные процессы $\xi^{(\alpha)}(t), \xi^{(\beta)}(t)$ моделируем как независимые статистически стационарные случайные процессы с заданными корреляциями

$$\left\langle\xi^{(\alpha)}(t')\xi^{(\beta)}(t'')\right\rangle=\delta_{\alpha\beta}\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\Psi^{(\alpha)}\left(|t'-t''|\right) \tag{5}$$

здесь $\Psi^{(\alpha)}(t)$ – автокорреляционная функция; $\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle$ – дисперсия случайного процесса.

Представляем случайные процессы в виде аналога разложения Фурье с использованием интеграла Стилтьеса (см., например, [5, 7])

$$\xi^{(\alpha)}(t)=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\sigma^{(\alpha)}(\omega) \qquad \xi^{(\beta)}(t)=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\sigma^{(\beta)}(\omega) \tag{6}$$

здесь $\mathrm{d}\sigma^{(\alpha)}(\omega), \mathrm{d}\sigma^{(\beta)}(\omega)$ – случайные меры в пространстве частот.

Корреляцию случайного процесса $\xi^{(\alpha)}(t)$ вычисляем как

$$\left\langle\xi^{(\alpha)}(t')\xi^{(\alpha)*}(t'')\right\rangle=\int\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega' t'-\omega'' t'')}\left\langle\mathrm{d}\sigma^{(\alpha)}(\omega')\mathrm{d}\sigma^{(\alpha)*}(\omega'')\right\rangle,$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение; i – мнимая единица, $\mathrm{i}^2=-1$.

Из условия статистической стационарности (5) записываем выражение для корреляции случайных мер

$$\left\langle d\sigma^{(\alpha)}(\omega')d\sigma^{(\alpha)*}(\omega'')\right\rangle = \left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \delta(\omega'-\omega'')\psi^{(\alpha)}(\omega')d\omega' d\omega'' \qquad (7)$$

здесь $\delta(\omega)$ – дельта-функция Дирака; $\psi^{(\alpha)}(\omega)$ – спектр случайного процесса.

В результате вычислений находим

$$\left\langle \xi^{(\alpha)}(t')\xi^{(\alpha)*}(t'')\right\rangle = \left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \Psi^{(\alpha)}(|t'-t''|) =$$

$$= \left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \delta(\omega'-\omega'')\psi^{(\alpha)}(\omega') e^{i(\omega' t' - \omega'' t'')} =$$

$$= \left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(\alpha)}(\omega) e^{i\omega(t'-t'')} d\omega$$

В результате получаем связь между автокорреляционной функцией случайного процесса и его спектром

$$\Psi^{(\alpha)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\psi^{(\alpha)}(\omega)d\omega$$

Условие нормировки для спектра следует из условия $t = 0, \Psi^{(\alpha)}(0) = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(\alpha)}(\omega)d\omega = 1$$

Спектр в свою очередь, можно рассчитать по известной автокорреляционной функции

$$\psi^{(\alpha)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\Psi^{(\alpha)}(t)dt$$

Как видно из системы уравнений (1)-(4) случайные процессы флуктуаций скорости частиц и газа в общем случае статистически нестационарные. Однако, по прошествии интервала времени, существенно превышающего время динамической релаксации частиц и интегральные временные масштабы

$t \gg \max\left(\tau_V, T_E^{(\alpha)}, T_E^{(\beta)}\right)$, процессы достигают статистически стационарного состояния. Представленный далее спектральный анализ будет проведен именно для статистически стационарных случайных процессов.

Для статистически стационарных случайных процессов вводим корреляции

$$\left\langle U^{(\alpha)}(t')U^{(\alpha)}(t'')\right\rangle = \left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \Phi^{(\alpha)}\left(|t'-t''|\right)$$

$$\left\langle U^{(\beta)}(t')U^{(\beta)}(t'')\right\rangle = \left\langle \left(U^{(\beta)}\right)^2 \right\rangle \Phi^{(\beta)}\left(|t'-t''|\right)$$

$$\left\langle U^{(\alpha)}(t')U^{(\beta)}(t'')\right\rangle = \left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)} \right\rangle \Phi^{(\alpha\beta)}\left(|t'-t''|\right)$$

Спектры корреляций флуктуаций скорости газа определяем, как

$$\Phi^{(\alpha)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\varphi^{(\alpha)}(\omega)\mathrm{d}\omega\ , \quad \Phi^{(\beta)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\varphi^{(\beta)}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{8}$$

$$\Phi^{(\alpha\beta)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\varphi^{(\alpha\beta)}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

Спектральный анализ флуктуаций скорости газа

Вследствие отсутствия обратного влияния частиц на статистические параметры турбулентности газа (массовая концентрация примеси предполагается малой) мы вначале проведем спектральный анализ случайных флуктуаций скорости газа. Затем в известном случайном поле скорости газа исследуем статистические параметры скорости частиц.

Записываем разложение случайных процессов флуктуаций скорости газа в виде интеграла Стилтьеса по случайной мере в пространстве частот

$$U^{(\alpha)}(t) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\Sigma^{(\alpha)}(\omega)\ , \quad U^{(\beta)}(t) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\Sigma^{(\beta)}(\omega) \tag{10}$$

здесь $\mathrm{d}\Sigma^{(\alpha)}(\omega), \mathrm{d}\Sigma^{(\beta)}(\omega)$ – случайные меры в пространстве частот.

В результате постановки разложений (6) и (10) в уравнения (3) и (4) получаем систему уравнений для случайных мер $\mathrm{d}\Sigma^{(\alpha)}(\omega), \mathrm{d}\Sigma^{(\beta)}(\omega)$

$$\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\mathrm{d}\Xi^{(\alpha)}(\omega) = \mathrm{d}\sigma^{(\alpha)}(\omega) - \chi^{(\beta)}\mathrm{d}\Xi^{(\beta)}(\omega) - \mathrm{d}\Xi^{(\alpha)}(\omega)$$

$$\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\mathrm{d}\Xi^{(\beta)}(\omega) = \mathrm{d}\sigma^{(\beta)}(\omega) + \chi^{(\alpha)}\mathrm{d}\Xi^{(\alpha)}(\omega) - \mathrm{d}\Xi^{(\beta)}(\omega) \ ,$$

решение которой имеет вид

$$\mathrm{d}\Xi^{(\alpha)}(\omega) = \frac{\left(\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)} + 1\right)\mathrm{d}\sigma^{(\alpha)}(\omega) - \chi^{(\beta)}\mathrm{d}\sigma^{(\beta)}(\omega)}{\left(\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)} + 1\right)\left(\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)} + 1\right) + \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}$$

$$\mathrm{d}\Xi^{(\beta)}(\omega) = \frac{\left(\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)} + 1\right)\mathrm{d}\sigma^{(\beta)}(\omega) + \chi^{(\alpha)}\mathrm{d}\sigma^{(\alpha)}(\omega)}{\left(\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)} + 1\right)\left(\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)} + 1\right) + \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}$$

Вычисляем автокорреляционную функцию статистически стационарного случайного процесса $U^{(\alpha)}(t)$. Корреляция случайных мер процесса $U^{(\alpha)}(t)$ с учетом взаимной независимости случайных процессов-источников имеет вид

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{d}\Xi^{(\alpha)}(\omega')\mathrm{d}\Xi^{(\alpha)*}(\omega'')\right\rangle = \\
&= \frac{\left(1+\mathrm{i}\omega' T_E^{(\beta)}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\omega' T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega' T_E^{(\beta)}\right) + \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}} \frac{\left(1-\mathrm{i}\omega'' T_E^{(\beta)}\right)}{\left(1-\mathrm{i}\omega'' T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega'' T_E^{(\beta)}\right) + \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}} \times \\
&\times \left\langle \mathrm{d}\sigma^{(\alpha)}(\omega')\mathrm{d}\sigma^{(\alpha)*}(\omega'')\right\rangle + \\
&+ \frac{\left(\chi^{(\beta)}\right)^2}{\left(1+\mathrm{i}\omega' T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega' T_E^{(\beta)}\right) + \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}} \frac{1}{\left(1-\mathrm{i}\omega'' T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega'' T_E^{(\beta)}\right) + \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}} \\
&\times \left\langle \mathrm{d}\sigma^{(\beta)}(\omega')\mathrm{d}\sigma^{(\beta)*}(\omega'')\right\rangle
\end{aligned} \qquad (11)$$

Из условия статистической стационарности процесса $U^{(\alpha)}(t)$ записываем выражение для корреляции случайных мер в формуле (10)

$$\left\langle \mathrm{d}\Xi^{(\alpha)}(\omega')\mathrm{d}\Xi^{(\alpha)*}(\omega'')\right\rangle = \left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle \varphi^{(\alpha)}(\omega')\delta(\omega'-\omega'')\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\omega''$$

С учетом выражений (7) и (11) находим связь между спектром флуктуаций скорости газа и спектрами процессов-источников

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle \varphi^{(\alpha)}(\omega) = \\
&= \frac{1+\left(\omega T_E^{(\beta)}\right)^2}{\left[\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]\left[\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]}\times \\
&\times\left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle \psi^{(\alpha)}(\omega)+ \\
&+\frac{\left(\chi^{(\beta)}\right)^2}{\left[\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]\left[\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]}\times \\
&\times\left\langle \left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle \psi^{(\beta)}(\omega)
\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогичным образом вычисляем спектр взаимной корреляции компонентов скорости газа

$$\begin{aligned}
&\left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle \varphi^{(\alpha\beta)}(\omega) = \\
&= \frac{\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}\frac{\chi^{(\alpha)}}{\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}\times \\
&\times\left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle \psi^{(\alpha)}(\omega)-
\end{aligned}$$

$$-\frac{\chi^{(\beta)}}{\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}\frac{\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)}{\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}\times$$
$$\times\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\psi^{(\beta)}(\omega) \qquad (13)$$

Формулы (12) и (13) позволяют вычислить дисперсии компонентов флуктуаций скорости газа и автокорреляционные функции (8), (9). Например, корреляция флуктуаций скорости компонента α имеет вид

$$\left\langle\left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\varphi^{(\alpha)}(\omega)\mathrm{d}\omega=\left\langle\left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\Phi^{(\alpha)}(t)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\left[1+\left(\omega T_E^{(\beta)}\right)^2\right]\psi^{(\alpha)}(\omega)+\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\left(\chi^{(\beta)}\right)^2\psi^{(\beta)}(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\left[\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]\left[\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]}\mathrm{d}\omega \qquad (14)$$

Дисперсия флуктуаций скорости вычисляется при $t=0$.

В качестве случайных процессов-источников $\xi^{(\alpha)}(t),\xi^{(\beta)}(t)$ можно использовать широкую гамму случайных процессов. Мы представим результаты для дельта-коррелированных во времени случайных процессов (белого шума). Спектр дельта-коррелированного во времени случайного процесса находим из корреляции (5)

$$\left\langle\xi^{(\alpha)}(t')\xi^{(\alpha)}(t'')\right\rangle=\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\Psi^{(\alpha)}\left(|t'-t''|\right)=\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle 2\tau^{(\alpha)}\delta(t'-t'')$$

$$\psi^{(\alpha)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Psi^{(\alpha)}(|t|)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}2\tau^{(\alpha)}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{\tau^{(\alpha)}}{\pi}$$

Для белого шума процессов-источников интеграл (14) переписываем в виде

$$\left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \Phi^{(\alpha)}(t) = \left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \frac{\tau^{(\alpha)}}{\pi} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[1+\left(\omega T_E^{(\beta)}\right)^2\right] e^{i\omega t}}{\left[\left(1+i\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+i\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]\left[\left(1-i\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-i\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]} d\omega +$$

$$+\left\langle \left(\xi^{(\beta)}\right)^2 \right\rangle \frac{\tau^{(\beta)}}{\pi} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\chi^{(\beta)}\right)^2 e^{i\omega t}}{\left[\left(1+i\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+i\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]\left[\left(1-i\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-i\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]} d\omega$$

Расчет интегралов реализуем на основании теоремы о вычетах. Контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости переменной ω. Находим полюса знаменателя

$$\begin{aligned} &\omega_1^{(\alpha\beta)} = i\nu^{(\alpha\beta)} + \Delta\Omega^{(\alpha\beta)} && \omega_2^{(\alpha\beta)} = i\nu^{(\alpha\beta)} - \Delta\Omega^{(\alpha\beta)} \\ &\omega_3^{(\alpha\beta)} = -\omega_1^{(\alpha\beta)} && \omega_4^{(\alpha\beta)} = -\omega_2^{(\alpha\beta)} \end{aligned},$$

где

$$\Delta\Omega^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\frac{\Delta T^{(\alpha\beta)}}{T^{(\alpha)}T^{(\beta)}} \qquad \nu^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T^{(\alpha)}} + \frac{1}{T^{(\beta)}}\right)$$

$$\Delta T^{(\alpha\beta)} = \sqrt{4T^{(\alpha)}T^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)} - \left(T^{(\alpha)} - T^{(\beta)}\right)^2}$$

Корреляция флуктуаций скорости компоненты α равна

$$\left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \Phi^{(\alpha)}(t) = \left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\varphi^{(\alpha)}(\omega) d\omega = J_1^{(\alpha)}(t) + J_2^{(\alpha)}(t)$$

здесь функции $J_1^{(\alpha)}(t)$, $J_2^{(\alpha)}(t)$ имеют вид

$$J_1^{(\alpha)}(t)=\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\frac{\tau^{(\alpha)}}{\pi}\frac{1}{\left(T_E^{(\alpha)}\right)^2\left(T_E^{(\beta)}\right)^2}2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}+\mathrm{Res}_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}\right\},$$

где вычеты в верхней полуплоскости равны

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}=-\frac{\mathrm{i}}{8}\frac{1+\left(\omega_1^{(\alpha\beta)}T_E^{(\beta)}\right)^2}{\omega_1^{(\alpha\beta)}\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_1^{(\alpha\beta)}t\right)$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}=\frac{\mathrm{i}}{8}\frac{1+\left(\omega_2^{(\alpha\beta)}T_E^{(\beta)}\right)^2}{\omega_2^{(\alpha\beta)}\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_2^{(\alpha\beta)}t\right)$$

Для второго интеграла имеем

$$J_2^{(\alpha)}(t)=\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\frac{\tau^{(\beta)}}{\pi}\frac{\left(\chi^{(\beta)}\right)^2}{\left(T_E^{(\alpha)}\right)^2\left(T_E^{(\beta)}\right)^2}2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}+\mathrm{Res}_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}\right\}$$

В этом случае для вычетов имеем следующие выражения

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}=-\frac{\mathrm{i}}{8}\frac{1-\mathrm{i}\left(\omega_1^{(\alpha\beta)}T_E^{(\alpha)}\right)}{\omega_1^{(\alpha\beta)}\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_1^{(\alpha\beta)}t\right)$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}=\frac{\mathrm{i}}{8}\frac{1-\mathrm{i}\left(\omega_2^{(\alpha\beta)}T_E^{(\alpha)}\right)}{\omega_2^{(\alpha\beta)}\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_2^{(\alpha\beta)}t\right)$$

Аналогично получаем выражение для спектра взаимной корреляции компонентов флуктуаций скорости газа

$$\left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle\varphi^{(\alpha\beta)}(\omega)=$$

$$=\frac{\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}\frac{\chi^{(\alpha)}}{\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}\times$$

$$\times\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\psi^{(\alpha)}(\omega)-$$

$$-\frac{\chi^{(\beta)}}{\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}\frac{\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)}{\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}}\times$$
$$\times\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\psi^{(\beta)}(\omega)$$

Для случая белого шума процессов-источников имеем для взаимной корреляции компонентов скорости газа

$$\left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle\Phi^{(\alpha\beta)}(t)=J_1^{(\alpha\beta)}(t)+J_2^{(\alpha\beta)}(t)$$

здесь функции $J_1^{(\alpha\beta)}(t)$, $J_2^{(\alpha\beta)}(t)$ равны

$$J_1^{(\alpha\beta)}(t)=\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\frac{\tau^{(\alpha)}}{\pi}\frac{\chi^{(\alpha)}}{\left(T_E^{(\alpha)}\right)^2\left(T_E^{(\beta)}\right)^2}2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}+\mathrm{Res}_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}\right\}$$

где

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}=-\frac{\mathrm{i}}{8}\frac{1+\mathrm{i}\left(\omega_1^{(\alpha\beta)}T_E^{(\beta)}\right)}{\omega_1^{(\alpha\beta)}\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_1^{(\alpha\beta)}t\right)$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}=\frac{\mathrm{i}}{8}\frac{1+\mathrm{i}\left(\omega_2^{(\alpha\beta)}T_E^{(\beta)}\right)}{\omega_2^{(\alpha\beta)}\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_2^{(\alpha\beta)}t\right)$$

$$J_2^{(\alpha\beta)}(t)=-\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\frac{\tau^{(\beta)}}{\pi}\frac{\chi^{(\beta)}}{\left(T_E^{(\alpha)}\right)^2\left(T_E^{(\beta)}\right)^2}2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}+\mathrm{Res}_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}\right\}$$

В этом случае вычеты равны

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}=-\frac{\mathrm{i}}{8}\frac{1-\mathrm{i}\left(\omega_1^{(\alpha\beta)}T_E^{(\alpha)}\right)}{\omega_1^{(\alpha\beta)}\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_1^{(\alpha\beta)}t\right)$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}} = \frac{\mathrm{i}}{8}\frac{1-\mathrm{i}\left(\omega_2^{(\alpha\beta)}T_E^{(\alpha)}\right)}{\omega_2^{(\alpha\beta)}\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_2^{(\alpha\beta)}t\right)$$

Спектральный анализ флуктуаций скорости частиц

Для статистически стационарных флуктуаций скорости частиц вводим автокорреляционную функцию

$$\left\langle V(t')V(t'')\right\rangle = \left\langle V^2\right\rangle \Psi_{\mathrm{L}}\left(|t'-t''|\right)$$

здесь $\Psi_{\mathrm{L}}(t)$ – автокорреляционная функция Лагранжа флуктуаций скорости частицы вдоль ее траектории

$$\Psi_{\mathrm{L}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\psi_{\mathrm{L}}(\omega)\mathrm{d}\omega \ ,$$

где $\psi_{\mathrm{L}}(t)$ – спектр флуктуаций скорости частиц.

Флуктуации скорости частиц записываем в виде разложения по случайной мере $\mathrm{d}\Sigma_L(\omega)$

$$V(t) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\Sigma_L(\omega)$$

Выражение для случайной меры $\mathrm{d}\Sigma_L(\omega)$ следует из уравнений (1)-(4)

$$\mathrm{d}\Sigma_L(\omega) = \frac{\mathrm{d}\Xi^{(\alpha)}(\omega)+\mathrm{d}\Xi^{(\beta)}(\omega)}{1+\mathrm{i}\omega\tau_V}$$

С учетом статистической стационарности процесса $V(t)$ имеем выражение для корреляции случайной меры скорости частиц

$$\left\langle \mathrm{d}\Sigma_L(\omega')\mathrm{d}\Sigma_L^*(\omega'')\right\rangle = \left\langle V^2\right\rangle \delta(\omega'-\omega'')\psi_L(\omega')\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\omega''$$

В результате находим связь между спектром Лагранжа флуктуаций скорости частицы и спектрами флуктуаций скорости газа на траектории частицы

$$\left\langle V^2\right\rangle \psi_{\mathrm{L}}(\omega)=\frac{1}{1+(\omega\tau_V)^2}\left\{\left\langle\left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\varphi^{(\alpha)}(\omega)+\right.$$

$$\left.+\left\langle\left(U^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\varphi^{(\beta)}(\omega)+2\left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle\varphi^{(\alpha\beta)}(\omega)\right\}$$

Для корреляции скорости частиц находим

$$\left\langle V^2\right\rangle \Psi_{\mathrm{L}}(t)=$$

$$=\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\Xi^{(\alpha)}(\omega)}{1+(\omega\tau_V)^2}\mathrm{d}\omega+\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\Xi^{(\beta)}(\omega)}{1+(\omega\tau_V)^2}\mathrm{d}\omega=$$

$$=\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle J_V^{(\alpha)}(t)+\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle J_V^{(\beta)}(t)$$

здесь функции имеют вид

$$J_V^{(\alpha)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\Xi^{(\alpha)}(\omega)}{\left[1+(\omega\tau_V)^2\right]}\mathrm{d}\omega$$

$$\Xi^{(\alpha)}(\omega)=$$

$$=\frac{\psi^{(\alpha)}(\omega)\left[1+\left(\omega T_E^{(\beta)}\right)^2+\chi^{(\alpha)}\left(\chi^{(\alpha)}+2\right)\right]}{\left[\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]\left[\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]}$$

$$J_V^{(\beta)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\Xi^{(\beta)}(\omega)}{\left[1+(\omega\tau_V)^2\right]}\mathrm{d}\omega$$

$$\Xi^{(\beta)}(\omega)=$$

$$=\frac{\psi^{(\beta)}(\omega)\left[1+\left(\omega T_E^{(\alpha)}\right)^2+\chi^{(\beta)}\left(\chi^{(\beta)}-2\right)\right]}{\left[\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1+\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]\left[\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\alpha)}\right)\left(1-\mathrm{i}\omega T_E^{(\beta)}\right)+\chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)}\right]}$$

Вычисление интегралов реализуем методом теории вычетов

$$J_V^{(\alpha)}(t)=\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\frac{\tau^{(\alpha)}}{\pi}\frac{1}{\left(T_E^{(\alpha)}\right)^2\left(T_E^{(\beta)}\right)^2\tau_V^2}2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{\omega=\omega_3}+\mathrm{Res}_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}+\mathrm{Res}_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}\right\}$$

В данном случае вычеты равны

$$\mathrm{Res}_{\omega=\mathrm{i}/\tau_V}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\tau_V^5\frac{1-\left(T_E^{(\beta)}/\tau_V\right)^2+\chi^{(\alpha)}\left(\chi^{(\alpha)}+2\right)}{\left[1+\left(\tau_V\omega_1^{(\alpha\beta)}\right)^2\right]\left[1+\left(\tau_V\omega_2^{(\alpha\beta)}\right)^2\right]}\exp\left(-\frac{t}{\tau_V}\right)$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}=-\frac{\mathrm{i}}{8}\tau_V^2\frac{1+\left(\omega_1^{(\alpha\beta)}T_E^{(\beta)}\right)^2+\chi^{(\alpha)}\left(\chi^{(\alpha)}+2\right)}{\omega_1^{(\alpha\beta)}\left[1+\left(\omega_1^{(\alpha\beta)}\tau_V\right)^2\right]\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_1^{(\alpha\beta)}t\right)$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}=\frac{\mathrm{i}}{8}\tau_V^2\frac{1+\left(\omega_2^{(\alpha\beta)}T_E^{(\beta)}\right)^2+\chi^{(\alpha)}\left(\chi^{(\alpha)}+2\right)}{\omega_2^{(\alpha\beta)}\left[1+\left(\omega_2^{(\alpha\beta)}\tau_V\right)^2\right]\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_2^{(\alpha\beta)}t\right)$$

Аналогично вычисляем

$$J_V^{(\beta)}(t)=\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\frac{\tau^{(\beta)}}{\pi}\frac{1}{\left(T_E^{(\alpha)}\right)^2\left(T_E^{(\beta)}\right)^2\tau_V^2}2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{\omega=\mathrm{i}/\tau_V}+\mathrm{Res}_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}+\mathrm{Res}_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}}\right\}$$

В этом случае вычеты равны

$$\mathrm{Res}_{\omega=\mathrm{i}/\tau_V}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\tau_V^5\frac{1-\left(T_E^{(\beta)}/\tau_V\right)^2+\chi^{(\beta)}\left(\chi^{(\beta)}-2\right)}{\left[1+\left(\tau_V\omega_1^{(\alpha\beta)}\right)^2\right]\left[1+\left(\tau_V\omega_2^{(\alpha\beta)}\right)^2\right]}\exp\left(-\frac{t}{\tau_V}\right)$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_1^{(\alpha\beta)}}=-\frac{\mathrm{i}}{8}\tau_V^2\frac{1+\left(\omega_1^{(\alpha\beta)}T_E^{(\alpha)}\right)^2+\chi^{(\beta)}\left(\chi^{(\beta)}-2\right)}{\omega_1^{(\alpha\beta)}\left[1+\left(\omega_1^{(\alpha\beta)}\tau_V\right)^2\right]\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_1^{(\alpha\beta)}t\right)$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{\omega=\omega_2^{(\alpha\beta)}} = \frac{\mathrm{i}}{8}\tau_V^2 \frac{1+\left(\omega_2^{(\alpha\beta)}T_E^{(\alpha)}\right)^2 + \chi^{(\beta)}\left(\chi^{(\beta)}-2\right)}{\omega_2^{(\alpha\beta)}\left[1+\left(\omega_2^{(\alpha\beta)}\tau_V\right)^2\right]\nu^{(\alpha\beta)}\Delta\Omega^{(\alpha\beta)}}\exp\left(\mathrm{i}\omega_2^{(\alpha\beta)}t\right)$$

Несмотря на кажущуюся сложность полученных выражений с комплексными числами итоговые расчеты реализуются с использованием аналитических вычислений в популярных средах компьютерных алгебры. Примеры функций для некоторых значений параметров приведены в следующей главе.

2. Прямое численное моделирование

Полученные в предыдущих разделах в рамках подхода Эйлера аналитические формулы мы верифицируем путем сопоставления с данными прямого численного моделирования случайных скоростей газа и частиц (подход Лагранжа).

Численное решение СОДУ

Флуктуации скорости на траектории частицы $U^{(\alpha)}(t), U^{(\beta)}(t)$ должны быть коррелированными случайными процессами Гаусса (цветными шумами). В предыдущем разделе на основе спектрального анализа было показано, что система уравнений (3), (4) моделирует именно такие случайные процессы.

Подход Лагранжа реализуется на основе решения системы СОДУ. Вначале представим сопоставление с корреляционными функциями флуктуаций скорости газа. При условии, что случайные процессы источники являются белым шумом, систему уравнений (1), (3), (4) записываем в каноническом виде

Систему представим в виде векторного уравнения Ланжевена.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\big(\mathbf{X}(t),t\big)\mathrm{d}t + \mathbf{B}\big(\mathbf{X}(t),t\big)\boldsymbol{\xi}(t), \tag{15}$$

здесь $\boldsymbol{\xi}(t)$ – вектор случайных независимых дельта коррелированных во времени процессов Гаусса с нулевым средним значением и единичной дисперсией, $\mathbf{A}(\mathbf{X},t), \mathbf{B}(\mathbf{X},t)$ – детерминированные векторные функции.

Переписываем систему СОДУ (15) в каноническом виде системы

$$\mathrm{d}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\big(\mathbf{X}(t),t\big)\mathrm{d}t + \mathbf{B}\big(\mathbf{X}(t),t\big)\mathrm{d}\mathbf{W}(t)\ ,$$

где $\mathrm{d}\mathbf{W}(t)$ – приращение процесса Винера.

Численное решение реализуется на основе компьютерной программы, написанной на языке программирования Julia. Язык содержит множество биб-

лиотек с численными методами решения СОДУ. Используется адаптивный алгоритм Рунге-Кутта для стохастических дифференциальных уравнений порядка сильной сходимости 1.5 и слабой сходимости 3 [8, 9]. Ниже приведены результаты расчетов на задаче с известным решением.

Напомним, как определяются сильная и слабая сходимости [10]. Решение СОДУ сходится сильно с порядком p, если математическое ожидание ошибки имеет p-й порядок от шага по времени Δt, т.е. для любого момента времени t^* и достаточно малого размера шага

$$\left\langle \left| \mathbf{X}_{ex}(t^*) - \mathbf{X}_{num}(t^*) \right| \right\rangle = O(\Delta t^p) \ . \tag{16}$$

Здесь и далее $\mathbf{X}_{ex}(t^*), \mathbf{X}_{num}(t^*)$ – точное и численное решения СОДУ в момент времени t^* соответственно.

Говорят, что метод сходится слабо с порядком q, если ошибка математических ожиданий в момент времени t^* имеет q-й порядок от шага по времени, для достаточно малого размера шага

$$\left| \left\langle \mathbf{X}_{ex}(t^*) \right\rangle - \left\langle \mathbf{X}_{num}(t^*) \right\rangle \right| = O(\Delta t^q) \ . \tag{17}$$

В качестве примера рассматривается уравнение

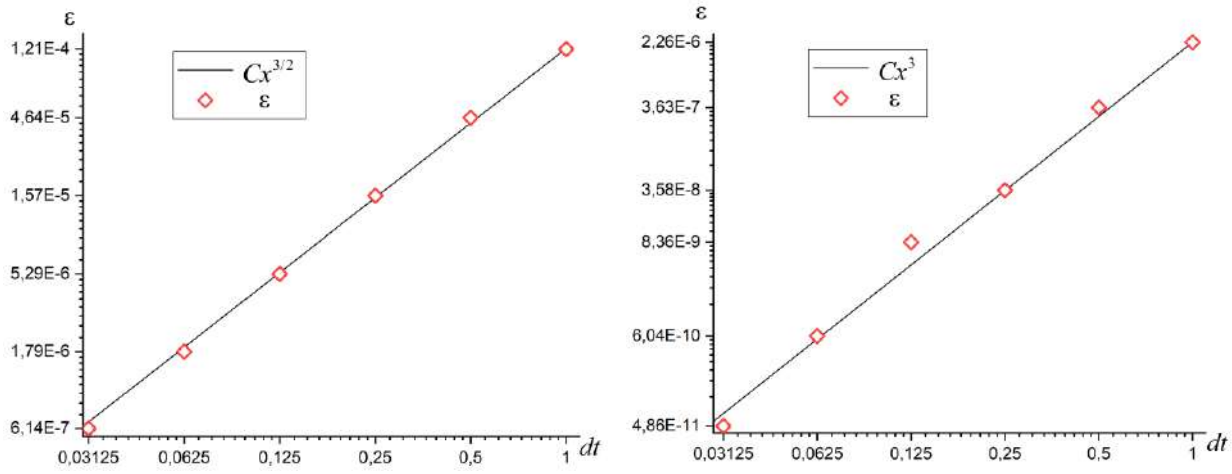
$$\mathrm{dX} = \alpha \mathrm{X} \mathrm{d}t + \beta \mathrm{X} \mathrm{dW} \ . \tag{18}$$

Известно решение этого уравнения

$$\mathrm{X}\left(t, \mathrm{W}_t\right) = \mathrm{X}_0 \exp\left[\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2} \right) t + \beta \mathrm{W}_t \right] \ . \tag{19}$$

Для параметров $\alpha = \frac{1}{10}$ и $\beta = \frac{1}{20}$, а также $\mathrm{X}_0 = \frac{1}{2}$ рассчитывалось 10^6 траекторий путем численного решения уравнения (18) и непосредственной подстановки реализаций случайного процесса W_t в аналитическое решение (19).

Отрезок интегрирования $T = [0.0, 2.0]$ с следующими шагами: $dt = \frac{1}{2^i}$, $i = 0,...,5$. На рис. 1 представлены ошибки расчетов в сильном и слабом смысле сходимости (ε по вертикали) в зависимости от шага интегрирования (dt по горизонтали). Точками указаны расчетные значения, непрерывной линией функции порядков сходимости. Графики представлены в логарифмическом масштабе по обеим осям.



а *б*

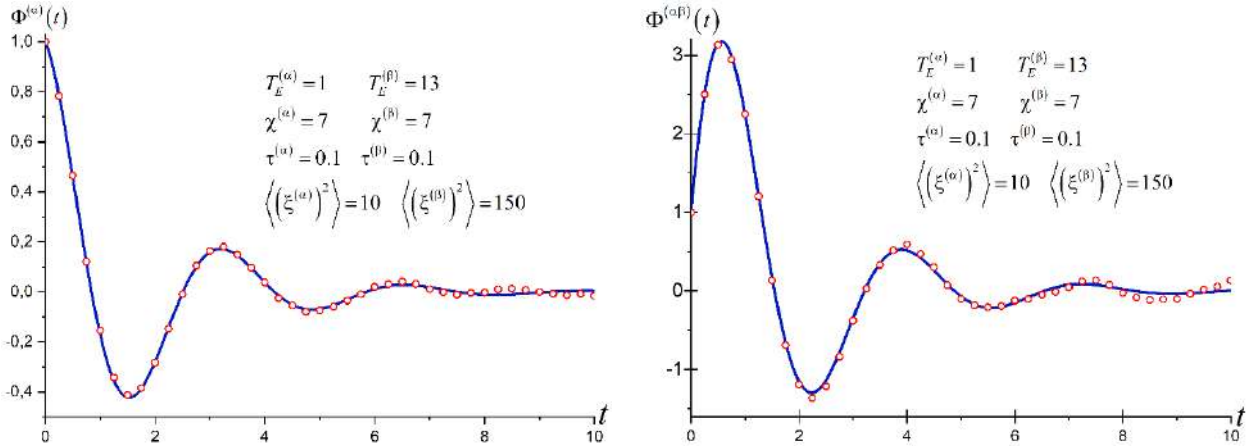
Рис. 1. Ошибка численного и аналитического решения (18):
а – в смысле (16), *б* – в смысле (17).

Из рис. 1 следует, что при уменьшении шага интегрирования в 2 раза ошибка (16) должна уменьшаться в $2^{3/2} \approx 2.83$ раза, а ошибка (18) должна уменьшаться в $2^3 = 8$ раз.

Результаты прямого численного моделирования

Вернемся к интегрированию исходной системы (3), (4). Статистика набиралась по 10^5 реализациям, затем рассчитывались статистические показатели (математическое ожидание, дисперсия, корреляции). Корреляционные функции и распределение скоростей (эмпирическая ФПВ) вычислялись в разные моменты времени.

На рис. 2 представлены графические изображения корреляционных функций и результаты их численного расчета. Сплошными линиями показаны аналитические результаты (спектральный анализ), точки – результаты прямого численного моделирования. В структуре корреляционных функция наблюдается экспоненциальное затухание. Значения параметров системы представлены. Значение параметров системы (3), (4) указаны на рис. 2



а *б*

Рис. 2. Сопоставление результатов:

а – автокорреляционная функция; *б* – взаимная корреляционная функция

На рис. 3 представлены автокорреляционные функции флуктуаций скорости частицы для некоторого набора параметров τ_V. Как и выше линии – аналитические результаты, точки – результаты стохастического моделирования. Наблюдается характерное влияние времени релаксации частиц на функции, стремящиеся к экспоненциальному закону.

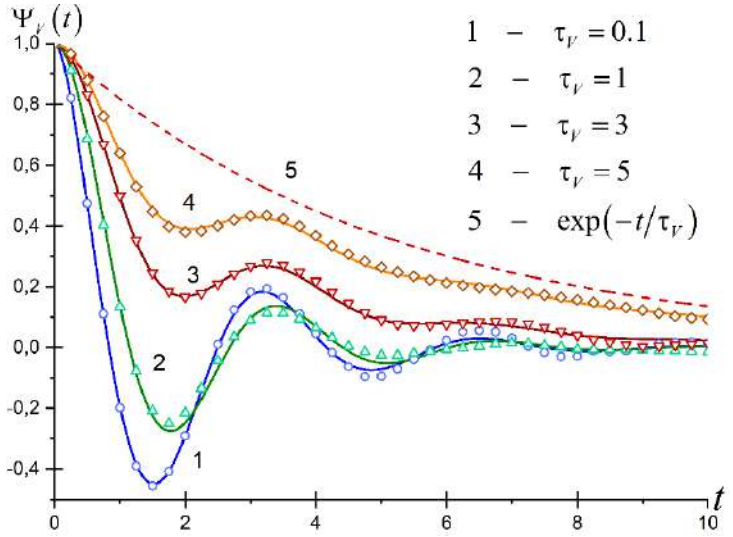


Рис. 3. Сопоставление результатов автокорреляционных функций флуктуаций скорости частицы

Также интерес представляет зависимость дисперсии частицы от времени динамической релаксации, представленная на рис. 4

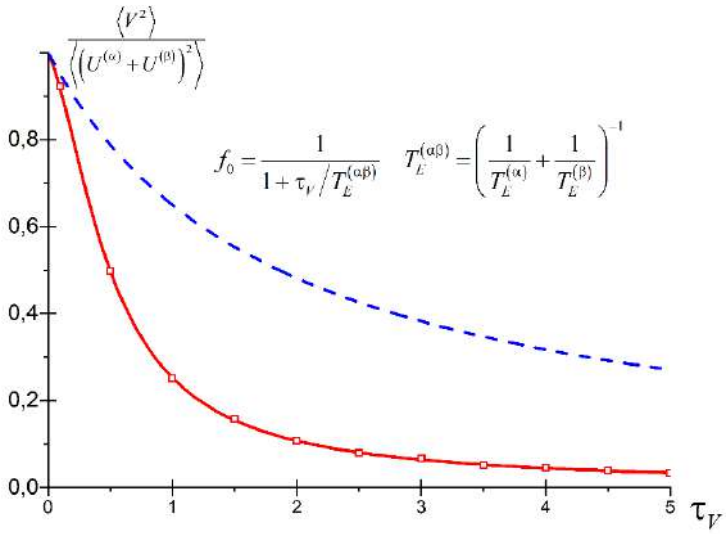


Рис. 4. Зависимость дисперсии от времени релаксации

Согласно исходным предположениям $\xi^{(\alpha)}, \xi^{(\beta)}$: $\left\langle \xi^{(\alpha)} \right\rangle = 0, \left\langle \xi^{(\beta)} \right\rangle = 0$, откуда следует, что $\left\langle U^{(\alpha)} \right\rangle = 0, \left\langle U^{(\beta)} \right\rangle = 0$. Значение этих величин после достаточно долгих расчётов будут отражать точность вычисления статистических

показателей. Для тех же параметров системы (см. рис. 2) и $\tau_V = 0.1$ ниже представлена табл. 1, в которой отражено сравнение статистических показателей и аналитических результатов.

В первой строке указан метод расчёта (для численного моделирования указано также количество интегрируемых систем), во второй время расчета (только для численного моделирования). Остальные строки содержат значения некоторых вероятностных параметров.

Таблица 1. Сравнение методов расчета

Метод	Численный: 10^3	Численный: 10^4	Численный: 10^5	Аналитический
Время расчёта, сек.	10.48	71.26	807.57	—
$\left\langle U^{(\alpha)} \right\rangle$	-0.0289	-0.0174	-0.00461	0
$\left\langle U^{(\beta)} \right\rangle$	0.0132	-0.000525	-2.135e-5	0
$\left\langle (U^{(\alpha)})^2 \right\rangle$	1.875	1.998	1.966	1.98
$\left\langle (U^{(\beta)})^2 \right\rangle$	0.181	0.173	0.173	0.174
$\left\langle U^{(\alpha)} U^{(\beta)} \right\rangle$	-0.157	-0.135	-0.139	-0.14
$\left\langle V^2 \right\rangle$	1.610	1.736	1.703	1.716

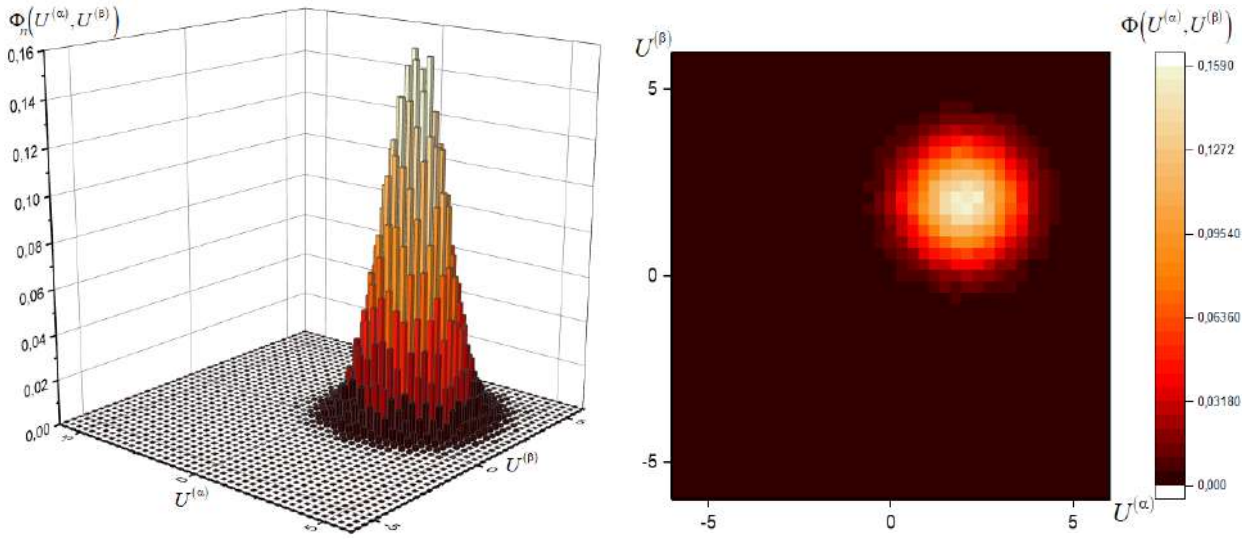
По таблице видно, что увеличение объема данных заметно приближает значения статистических величин к аналитическим, однако также ведет к значительному увеличению расчетного времени.

Расчет эмпирической ФПВ осуществлялся только по переменным системы (3), (4). В момент времени t^* набирается статистика про скоростям $U^{(\alpha)}, U^{(\beta)}$. Затем расчетная область $\left[U^{(\alpha)}_{\min}, U^{(\alpha)}_{\max}\right] \times \left[U^{(\beta)}_{\min}, U^{(\beta)}_{\max}\right]$ разбивается на сетку и вычисляется число наблюдений (значений $U^{(\alpha)}, U^{(\beta)}$) $\nu_{i,j}$ попавших в ячейку с номером *i*,*j*. Чтобы получить плотность распределения вычисляют

$$\varphi_n(U^{(\alpha)}, U^{(\beta)}) = \frac{\nu_{i,j}}{N \times dU^{(\alpha)} \times dU^{(\beta)}} \ ,$$

где N – объем выборки, $dU^{(\alpha)}, dU^{(\beta)}$ – ширина ячейки сетки вдоль $U^{(\alpha)}$, $U^{(\beta)}$.

Набор таких значений в каждой ячейки сетки составляет эмпирическую функцию плотности вероятности $\Phi_n\left(U^{(\alpha)}, U^{(\beta)}\right)$. На рис. 5 изображены два варианта представления ФПВ для начального распределения скоростей. Компоненты скорости в начальный момент времени распределены нормальным образом с математическим ожиданием 2 и единичной дисперсией. Объем выборки $N = 10^5$, расчетная область $[-15, 15] \times [-15, 15]$, размер ячеек 0.3×0.3. Для наглядности отображена область меньшего размера $[-6, 6] \times [-6, 6]$, т.к. в остальной части области ФПВ принимает нулевые значения.



а *б*

Рис. 5. Варианты представления эмпирической ФПВ:
а – 3D гистограмма, *б* – 2D тепловая карта

Дальнейшее представление эмпирической ФПВ будет осуществляться способом, изображенном на рис. 5б, который представляется наиболее удобным и однозначным.

Наиболее интересным является стационарное распределение скоростей после длительного расчета, тогда можно оценить установившиеся статистические характеристики. На рис. 6 представлена стационарная эмпирическая ФПВ случайных процессов $U^{(\alpha)}$ и $U^{(\beta)}$.

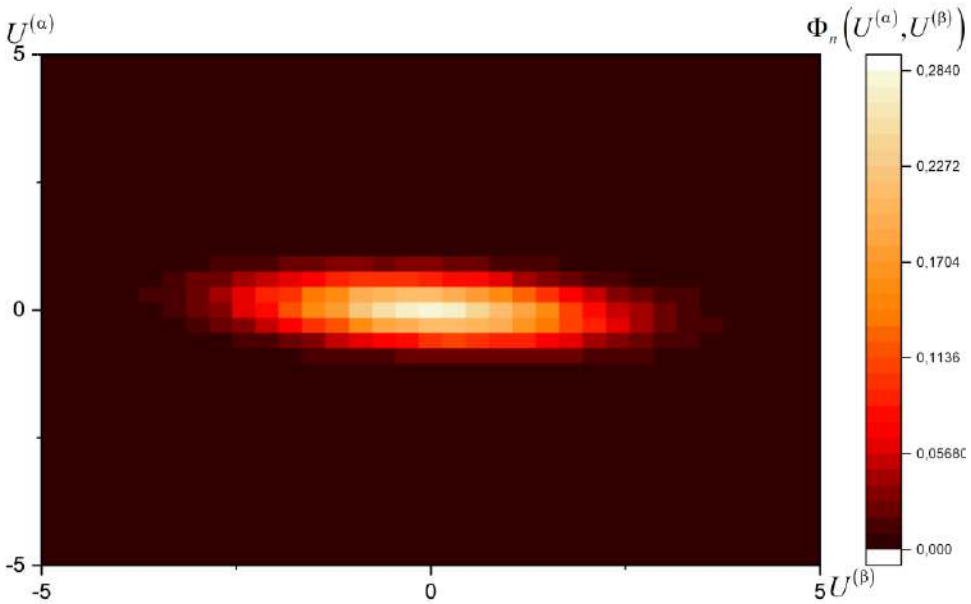


Рис. 6. Стационарное распределение скорости газа

Из стандартной теории вероятностей известно, что двумерное нормальное распределение может характеризоваться эллипсом рассеивания [11]. Центр ФПВ находится в нуле, что соответствует равенству нулю средних значений случайных процессов $U^{(\alpha)}$ и $U^{(\beta)}$ (см. табл. 1). Представляя эллипс рассеивания, который можно наложить на данное распределение, видно, что он больше вытянут вдоль одной из осей симметрии, что соответствует существенному отличию дисперсий процессов. ФПВ немного наклонена относительно исходных осей, это соответствует отличному от нуля коэффициенту корреляции, что следует из неравного нулю смешанного математического ожидания $\left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle$.

Если в системе (3), (4) положить $\chi^{(\alpha)} = \chi^{(\beta)} = 0$, то случайные процессы перестают быть коррелированными, что будет отражаться в структуре взаимной корреляционной функции (всюду равна нулю) и эмпирической ФПВ (оси симметрии эллипса рассеивания будут сонаправлены с осями системы координат).

3. Уравнение для функции плотности вероятности

Подход к изучению процессов турбулентности с помощью прямого численного моделирования является следствием описания сплошной среды с помощью подхода Лагранжа. Такой способ требует больших временных и ресурсных затрат, однако результат – распределения случайной величины, является крайне привлекательным. Ниже получим уравнение в частных производных, решением которого при выполнении некоторых условия будет ФПВ. Будем отталкиваться от подхода Эйлера при описании сплошной среды.

Вывод уравнения для ФПВ

Снова рассматриваем два случайных процесса (3), (4), которые служат источником коррелированного движения частицы. В приближении Стокса имеем уравнение (1), описывающие скорость движения частицы в случайном потоке.

Вводим индикаторную функцию. Вырезаем случайную траектории в пространстве скоростей

$$\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)=\delta\left(U^{(\alpha)}-U^{(\alpha)}(t)\right)\delta\left(U^{(\beta)}-U^{(\beta)}(t)\right)\delta\left(V-V(t)\right)$$

Уравнение Лиувилля получаем после дифференцирования индикаторной функции по времени

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)=\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(U^{(\alpha)}-U^{(\alpha)}(t)\right)\delta\left(U^{(\beta)}-U^{(\beta)}(t)\right)\delta\left(V-V(t)\right)=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\left\{\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{\mathrm{d}U^{(\alpha)}(t)}{\mathrm{d}t}\right\}-\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\left\{\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{\mathrm{d}U^{(\beta)}(t)}{\mathrm{d}t}\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial V}\left\{\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\right\}$$

В результате подстановки динамических уравнений (1), (3), (4) с учетом (2), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\left\{\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\left[\xi^{(\alpha)}(t)-\chi^{(\beta)}U^{(\beta)}-U^{(\alpha)}\right]\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\left\{\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\left[\xi^{(\beta)}(t)+\chi^{(\alpha)}U^{(\alpha)}(t)-U^{(\beta)}(t)\right]\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial V}\left\{\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{1}{\tau_V}\left(U^{(\alpha)}+U^{(\beta)}-V\right)\right\}$$

Преобразуем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)+\frac{\partial}{\partial V}\left\{\frac{1}{\tau_V}\left(U^{(\alpha)}+U^{(\beta)}-V\right)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\left\{\left(\chi^{(\alpha)}U^{(\alpha)}-U^{(\beta)}\right)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\left\{\left(-\chi^{(\beta)}U^{(\beta)}-U^{(\alpha)}\right)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\left\{\xi^{(\alpha)}(t)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}-\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\left\{\xi^{(\beta)}(t)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}$$

В результате осреднения по ансамблю, получаем незамкнутое уравнение для ФПВ $\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)=\left\langle\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)+\frac{\partial}{\partial V}\left\{\frac{1}{\tau_V}\left(U^{(\alpha)}+U^{(\beta)}-V\right)\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\left\{\left(\chi^{(\alpha)}U^{(\alpha)}-U^{(\beta)}\right)\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\left\{\left(-\chi^{(\beta)}U^{(\beta)}-U^{(\alpha)}\right)\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\left\langle\xi^{(\alpha)}(t)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\rangle-\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\left\langle\xi^{(\beta)}(t)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\rangle$$

Раскрытие корреляций производится по формуле Фурутсу – Новикова

$$\left\langle \xi^{(\alpha)}(t)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\rangle = \int_0^t \left\langle \xi^{(\alpha)}(t)\xi^{(\alpha)}(s)\right\rangle \left\langle \frac{\delta\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)}\right\rangle \mathrm{d}s$$

Для стационарного процесса имеем

$$\begin{aligned}
&\left\langle \xi^{(\alpha)}(t)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\rangle = \\
&= \left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle \int_0^t \Psi^{(\alpha)}(t-s)\left\langle \frac{\delta\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)}\right\rangle \mathrm{d}s = \\
&= 2\tau^{(\alpha)}\left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle \int_0^t \delta(t-s)\left\langle \frac{\delta\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)}\right\rangle \mathrm{d}s = \\
&= \tau^{(\alpha)}\left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle \left\langle \frac{\delta\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)}{\delta\xi^{(\alpha)}(t)}\right\rangle
\end{aligned}$$

Здесь функциональная производная индикаторной функции есть

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)} = -\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{\delta U^{(\alpha)}(t)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)} - \\
&-\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{\delta U^{(\beta)}(t)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)} - \frac{\partial}{\partial V}\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\frac{\delta V(t)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)}
\end{aligned}$$

Интегральный вид уравнения (3)

$$U^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\xi}{T_E^{(\alpha)}}\right)\left\{\xi^{(\alpha)}(\xi) - \chi^{(\beta)}U^{(\beta)}(\xi)\right\}\mathrm{d}\xi$$

Применяем оператор функционального дифференцирования

$$\frac{\delta U^{(\alpha)}(t)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)} = \frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\delta}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\xi}{T_E^{(\alpha)}}\right)\left\{\xi^{(\alpha)}(\xi) - \chi^{(\beta)}U^{(\beta)}(\xi)\right\}\mathrm{d}\xi =$$

$$=\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\xi}{T_E^{(\alpha)}}\right)\left\{\delta(\xi-s)-\chi^{(\beta)}\frac{\delta U^{(\beta)}(\xi)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)}\right\}\mathrm{d}\xi=$$

$$=\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\exp\left(-\frac{t-s}{T_E^{(\alpha)}}\right)-\frac{\chi^{(\beta)}}{T_E^{(\alpha)}}\int_s^t \frac{\delta U^{(\beta)}(\xi)}{\delta\xi^{(\alpha)}(s)}\mathrm{d}\xi$$

Для дельта-коррелированного случайного процесса имеем

$$\left.\frac{\delta U^{(\alpha)}(t)}{\xi^{(\alpha)}(s)}\right|_{s\to t}=\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}$$

Для функциональной производной индикаторной функции получаем

$$\frac{\delta\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)}{\delta\xi^{(\alpha)}(t)}=-\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\partial\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)}{\partial U^{(\alpha)}}$$

Тогда для корреляции находим выражение

$$\left\langle\xi^{(\alpha)}(t)\varphi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\rangle=-\frac{\tau^{(\alpha)}}{T_E^{(\alpha)}}\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)$$

Получаем замкнутое уравнение для ФПВ

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)+\frac{\partial}{\partial V}\left\{\frac{1}{\tau_V}\left(U^{(\alpha)}+U^{(\beta)}-V\right)\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\left\{\left(\chi^{(\alpha)}U^{(\alpha)}-U^{(\beta)}\right)\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\left\{\left(-\chi^{(\beta)}U^{(\beta)}-U^{(\alpha)}\right)\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\tau^{(\alpha)}}{T_E^{(\alpha)}}\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\frac{\partial^2}{\partial U^{(\alpha)}\partial U^{(\alpha)}}\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)+$$
$$+\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\frac{\tau^{(\beta)}}{T_E^{(\beta)}}\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\frac{\partial^2}{\partial U^{(\beta)}\partial U^{(\beta)}}\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)$$

Начальное распределение

$$\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\Big|_{t=0}=\Phi_0\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V\right)=\Phi_0^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)}\right)\Phi_0^{(V)}\left(V\right)$$

ФПВ флуктуаций скорости среды получается из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},V,t\right)\mathrm{d}V=\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)$$

Тогда уравнение для ФПВ компонентов скорости среды имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)+\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\beta)}}\left\{\left(\chi^{(\alpha)}U^{(\alpha)}-U^{(\beta)}\right)\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)\right\}+\\&+\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\partial}{\partial U^{(\alpha)}}\left\{\left(-\chi^{(\beta)}U^{(\beta)}-U^{(\alpha)}\right)\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)\right\}=\\&=\frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\frac{\tau^{(\alpha)}}{T_E^{(\alpha)}}\left\langle\left(\xi^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle\frac{\partial^2}{\partial U^{(\alpha)}\partial U^{(\alpha)}}\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)+\\&+\frac{1}{T_E^{(\beta)}}\frac{\tau^{(\beta)}}{T_E^{(\beta)}}\left\langle\left(\xi^{(\beta)}\right)^2\right\rangle\frac{\partial^2}{\partial U^{(\beta)}\partial U^{(\beta)}}\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)\end{aligned}\qquad(20)$$

Начальное условие

$$\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)\Big|_{t=0}=\Phi_0^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)}\right)=\Phi_0^{(\alpha)}\left(U^{(\alpha)}\right)\Phi_0^{(\beta)}\left(U^{(\beta)}\right)\qquad(21)$$

ФПВ должна удовлетворять двум важнейшим математическим свойствам: условию положительности и условию нормировки [12, 13]

$$\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)>0,\quad\int_{\Omega}\Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)},t\right)d\Omega=1\qquad(22)$$

В любой точке фазового пространства $\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)}\right)$ и в любой момент времени. Где Ω – область определения искомой функции.

Далее для сокращения записи введем следующие обозначения и опустим аргументы функций $\Phi = \Phi^{(\alpha\beta)}\left(U^{(\alpha)}, U^{(\beta)}, t\right)$, $X = U^{(\alpha)}$, $Y = U^{(\beta)}$, тогда с учетом этим обозначений вводим

$$F^X = \frac{1}{T_E^{(\beta)}}\left(\chi^{(\alpha)} X - Y\right),\ F^Y = \frac{1}{T_E^{(\alpha)}}\left(-\chi^{(\beta)} Y - X\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{T_E^{(\alpha)}} \frac{\tau^{(\alpha)}}{T_E^{(\alpha)}} \left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle, \beta = \frac{1}{T_E^{(\beta)}} \frac{\tau^{(\beta)}}{T_E^{(\beta)}} \left\langle \left(\xi^{(\beta)}\right)^2 \right\rangle$$

С учетом введенных обозначений уравнение переписываем (20)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial\left(F^X \Phi\right)}{\partial X} + \frac{\partial\left(F^Y \Phi\right)}{\partial Y} = \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \tag{23}$$

Перепишем (15) в потоковой форме записи

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot f = 0, \tag{24}$$

где ∇ – оператор набла, точкой обозначено скалярное произведение, а f – вектор «потока»

$$f = \begin{pmatrix} F^X \Phi - \alpha \dfrac{\partial \Phi}{\partial X} \\ F^Y \Phi - \beta \dfrac{\partial \Phi}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{CX} + W^{DX} \\ W^{CY} + W^{DY} \end{pmatrix}$$

Получим естественные граничные условия для уравнения (24). Проинтегрируем его по времени на $[t_0, t]$ и по области Ω

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega + \int_{t_0}^{t} dt \int_{\Omega} \nabla \cdot f d\Omega = 0$$

В первом слагаемом поменяем местами интегралы и воспользуемся условием нормировки (22)

$$\int_{\Omega} d\Omega \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt = \int_{\Omega} \Phi\big|_{t} d\Omega - \int_{\Omega} \Phi\big|_{t_0} d\Omega = 1 - 1 = 0$$

Во втором слагаемом воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_{\Omega} \nabla \cdot f d\Omega = \int_{t_0}^{t} dt \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \cdot f) d\partial\Omega,$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$.

Получаем, что скалярное произведение «поток» на вектор внешней нормали по всей границе области в любой момент времени должен быть равен нулю, что и является естественным граничным условием для уравнения (24).

$$\left(\vec{n} \cdot f\right)\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{25}$$

Сформулируем постановку задачи для уравнения (24) с учетом начальных условий (21) и граничных условий (25). Решаем задачу в области фазового пространства $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, с непрерывной границей $\partial\Omega$ на интервале времени $\left[t_0, T\right]$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot f = 0, \quad \forall \left(X, Y\right) \in \Omega,\ t \in \left[t_0, T\right] \\
&\Phi\big|_{t=t_0} = \Phi_0^X\left(X \,|\, m_X, \sigma_X\right) \Phi_0^Y\left(Y \,|\, m_Y, \sigma_Y\right), \quad \forall \left(X, Y\right) \in \Omega \\
&\left(\vec{n} \cdot f\right)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall\ t \in \left[t_0, T\right]
\end{aligned} \tag{26}$$

В качестве начального условия будем брать функцию Гаусса

$$\Phi_0^X\left(X \,|\, m_X, \sigma_X\right) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(X - m_X)^2}{2\left(\sigma_X\right)^2}\right]$$

Уравнение для ФПВ в форме записи (23) напоминает двумерное уравнение конвективной диффузии, поэтому в выражении для «потока» f фигурируют конвективный $\left(W^{CX}, W^{CY}\right)^T$ и диффузионный $\left(W^{DX}, W^{DY}\right)^T$ потоки. Далее это будет использоваться при численном решении задачи (26).

Численное решение уравнения для ФПВ

В области Ω введем прямоугольную сетку $\Omega^h = \Omega_X^h \otimes \Omega_Y^h$ (см. рис. 7), где $\Omega_X^h = \left\{X_i; i = 0,\ldots,N_X, X_0 = -L_X, X_{N_X} = L_X\right\}$ – одномерная сетка по переменной X, $\Omega_Y^h = \left\{Y_j;\ j = 0,\ldots,N_Y, Y_0 = -L_Y, Y_{N_Y} = L_Y\right\}$ – одномерная сетка по Y. Введем шаги сетки следующим образом $h_{i+1/2}^X = X_{i+1} - X_i,\ i = 0,\ldots,N_X - 1$; $h_{j+1/2}^Y = Y_{j+1} - Y_j,\ j = 0,\ldots,N_Y - 1$. Обозначим полуцелые узлы и дополнительные шаги сетки

$$X_{i+1/2} = \left(X_{i+1} + X_i\right)/2, \quad i = 1,\ldots,N_X - 1;$$
$$\hbar_0^X = h_{1/2}^X/2, \quad \hbar_i^X = \left(h_{i+1/2}^X + h_{i-1/2}^X\right)/2, \quad i = 1,\ldots,N_X - 1, \quad \hbar_{N_X}^X = h_{N_X-1/2}^X/2;$$
$$Y_{j+1/2} = \left(Y_{j+1} + Y_j\right)/2, \quad j = 1,\ldots,N_Y - 1;$$
$$\hbar_0^Y = h_{1/2}^Y/2, \quad \hbar_j^Y = \left(h_{j+1/2}^Y + h_{j-1/2}^Y\right)/2, \quad j = 1,\ldots,N_Y - 1, \quad \hbar_{N_Y}^Y = h_{N_Y-1/2}^Y/2.$$

Введем также сетку по времени $\Omega^\tau = \left\{t_k = k\tau,\ k = 0,1,\ldots\right\}$.

Определим в каких узлах заданы сеточные функции: $\Phi\left(X_i, Y_j, t\right) = \Phi_{i,j}$, $\Phi\left(X_i, Y_j, t_k\right) = \Phi_{i,j}^{(k)}$, $F^X\left(X_{i+1/2}, Y_j\right) = F_{i+1/2,j}^X$, $F^Y\left(X_i, Y_{j+1/2}\right) = F_{i,j+1/2}^Y$, $\alpha\left(X_{i+1/2}, Y_{j+1/2}\right) = \alpha_{i+1/2,j+1/2}$, $\beta\left(X_{i+1/2}, Y_{j+1/2}\right) = \beta_{i+1/2,j+1/2}$. Сеточные функции задаются таким образом, чтобы удовлетворять балансовым соотношениям задачи.

Введем ячейки $\Omega_{i,j} = \left[X_{i-1/2}, X_{i+1/2}\right] \otimes \left[Y_{j-1/2}, Y_{j+1/2}\right]$, которые будем называть регулярными, внутри искомая функция считается постоянной и равной $\Phi_{i,j}$. Согласно рис. 7 такие ячейки не заполняют всю область Ω, с этой целью

введем также приграничные ячейки (заштрихованные красным на рис. 7) и угловые ячейки (заштрихованные зеленым на рис. 7), в которых искомая функция тоже считается постоянной и равной значению в узле (i, j), который находится в ячейке. Таким образом получаем количество ячеек равное количеству узлов, а соответственно и неизвестных $\Phi_{i,j}$. Аппроксимируя уравнения по каждой ячейке получим количество уравнений равное количеству неизвестных и сможем добиться консервативности разностной схемы.

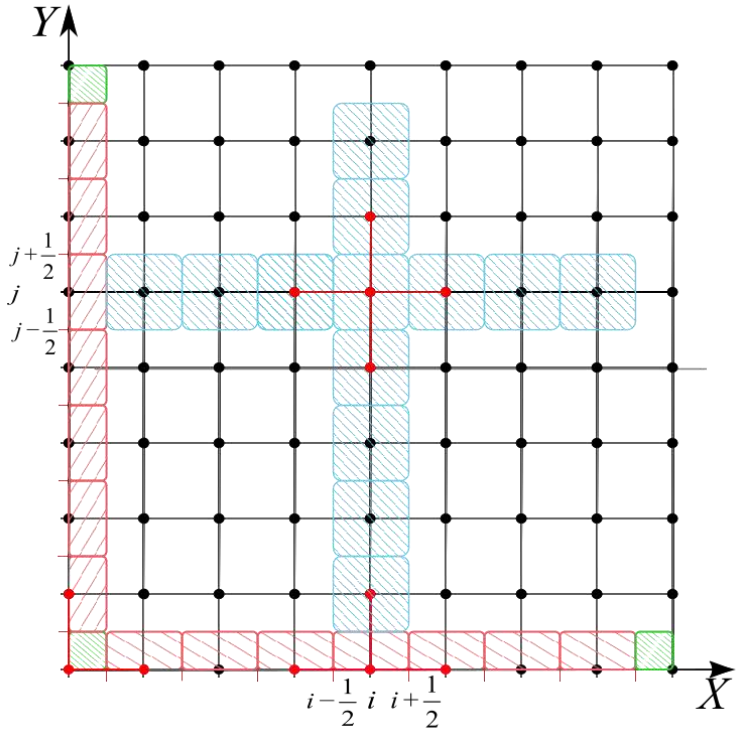


Рис. 7. Прямоугольная сетка Ω^h

Проинтегрируем первую часть уравнения по ячейке $\Omega_{i,j}$

$$\int\limits_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dXdY \approx \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} \hbar_i^X \hbar_j^Y , \tag{27}$$

где $\hbar_i^X \hbar_j^Y$ – площадь $\Omega_{i,j}$.

Аппроксимация конвективных слагаемых в регулярных ячейках

Перейдем к аппроксимации конвективных слагаемых уравнения. Проинтегрируем по ячейке $\Omega_{i,j}$. Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса при переходе от интегрирования по объему к интегрированию по поверхности ячейки.

$$\int\limits_{\Omega_{i,j}} \left[\frac{\partial F^X \Phi}{\partial X} + \frac{\partial F^Y \Phi}{\partial Y} \right] dXdY \overset{O.-\Gamma.}{=} \int\limits_{\partial\Omega_{i,j}} \left(W^C, n \right) \partial\Omega_{i,j} \approx \left| W^C = \left(\underset{W^{CX}}{F^X \Phi}, \underset{W^{CY}}{F^Y \Phi} \right)^T \right| \approx$$

$$\approx \left(\left(W^C, n \right)\Big|_{i+1/2,j} \hbar_j^Y + \left(W^C, n \right)\Big|_{i,j+1/2} \hbar_i^X - \left(W^C, n \right)\Big|_{i-1/2,j} \hbar_j^Y - \left(W^C, n \right)\Big|_{i,j-1/2} \hbar_i^X \right) =$$

$$= \left(W_{i+1/2,j}^{CX} \hbar_j^Y + W_{i,j+1/2}^{CY} \hbar_i^X - W_{i-1/2,j}^{CX} \hbar_j^Y - W_{i,j-1/2}^{CY} \hbar_i^X \right)$$

Интегралы вдоль границы ячейки вычисляются как произведение потока на нормаль в точке, в которой поток считается заданным и умножается на длину границы ячейки, схематически показано на рис. 8.

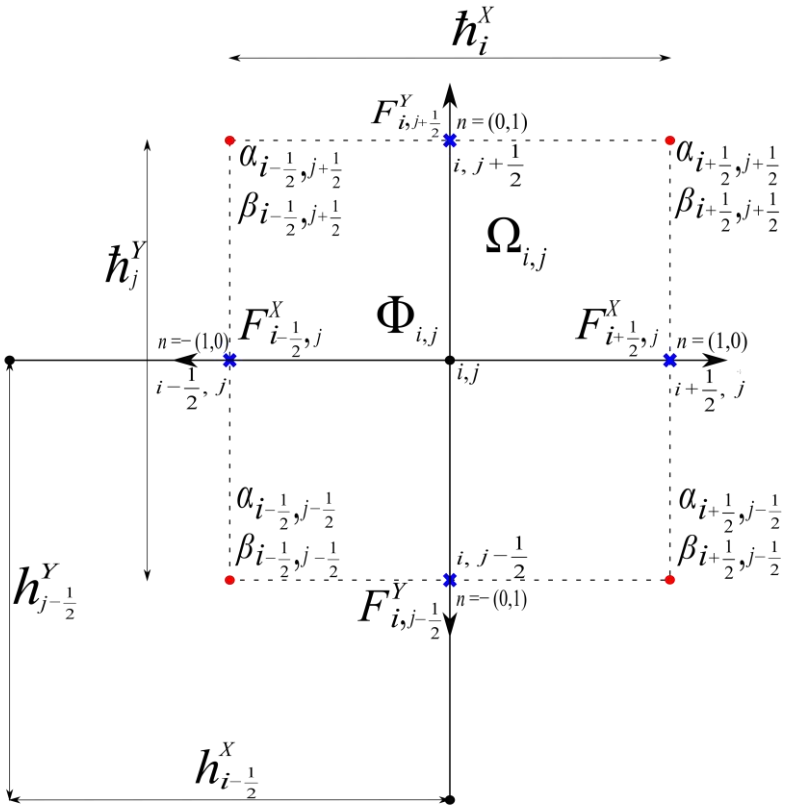


Рис. 8. Ячейка $\Omega_{i,j}$ и соответствующие сеточные функции

Поток будем считать заданным в точках, отмеченных синими крестиками на рис. 8

$$W^{CX}_{i+1/2,j} = F^{X}_{i+1/2,j}\Phi_{i+1/2,j}$$
$$W^{CY}_{i,j+1/2} = F^{Y}_{i,j+1/2}\Phi_{i,j+1/2}$$

Однако значения $\Phi_{i+1/2,j}$ и $\Phi_{i,j+1/2}$ не заданы в этих узлах. Для этого введем пересчет функции Φ в соответствующие узлы следующим образом

$$\Phi_{i+1/2,j} = \theta^{X}_{i+1/2,j}\Phi_{i,j} + (1-\theta^{X}_{i+1/2,j})\Phi_{i+1,j}$$
$$\Phi_{i,j+1/2} = \theta^{Y}_{i,j+1/2}\Phi_{i,j} + (1-\theta^{Y}_{i,j+1/2})\Phi_{i,j+1}$$

где $\theta^{X}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y}_{i,j+1/2}$ – весовые коэффициенты, подобранные специальным образом так (см. далее по тексту), чтобы на разностном уровням удовлетворять условию сохранения нормировки и положительности (22). Таким образом аппроксимация конвективных слагаемых в регулярных ячейках представляет так

$$F^{X}_{i+1/2,j}\Phi_{i+1/2,j}\hbar^{Y}_{j} - F^{X}_{i-1/2,j}\Phi_{i-1/2,j}\hbar^{Y}_{j} + F^{Y}_{i,j+1/2}\Phi_{i,j+1/2}\hbar^{X}_{i} - F^{Y}_{i,j-1/2}\Phi_{i,j-1/2}\hbar^{X}_{i}\,. \qquad (28)$$

Аппроксимация диссипативных слагаемых в регулярных ячейках

Перейдем к аппроксимации диссипативных слагаемых уравнения. Как и ранее проинтегрируем по ячейке $\Omega_{i,j}$. Опять воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса при переходе от интегрирования по объему к интегрированию по поверхности ячейки.

Стоит отметить, что функции α и β заданы в точках, отмеченных красным цветом на рис. 8. Соответственно поток, проходящий через левую границу ячейки $\Omega_{i,j}$ равен сумме потока через верхнюю и нижнюю части левой границы, и так для всех границ ячейки.

$$\int\limits_{\Omega_{i,j}}\left[\alpha\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}+\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2}\right]dXdY\overset{O.-\Gamma.}{=}\int\limits_{\partial\Omega_{i,j}}\left(W^D,n\right)\partial\Omega_{i,j}\approx\left|W^D=\left(\underset{W^{DX}}{\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial X}},\underset{W^{DY}}{\beta\frac{\partial\Phi}{\partial Y}}\right)^T\right|\approx$$

$$\approx\left[\frac{h^Y_{j-1/2}}{2}\alpha_{i+1/2,\,j-1/2}+\frac{h^Y_{j+1/2}}{2}\alpha_{i+1/2,\,j+1/2}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial X}\bigg|_{i+1/2,\,j}+$$

$$+\left[\frac{h^X_{i+1/2}}{2}\beta_{i+1/2,\,j+1/2}+\frac{h^X_{i-1/2}}{2}\beta_{i-1/2,\,j+1/2}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\bigg|_{i,\,j+1/2}+$$

$$-\left[\frac{h^Y_{j+1/2}}{2}\alpha_{i-1/2,\,j+1/2}+\frac{h^Y_{j-1/2}}{2}\alpha_{i-1/2,\,j-1/2}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial X}\bigg|_{i-1/2,\,j}+$$

$$-\left[\frac{h^X_{i-1/2}}{2}\beta_{i-1/2,\,j-1/2}+\frac{h^X_{i+1/2}}{2}\beta_{i+1/2,\,j-1/2}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\bigg|_{i,\,j-1/2}=$$

Производные аппроксимируем разностями по потоку и против

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}\bigg|_{i+1/2,\,j}\approx\frac{\Phi_{i+1,j}-\Phi_{i,j}}{h^X_{i+1/2}}\overset{def}{=}\Phi_X,\quad\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\bigg|_{i,\,j+1/2}\approx\frac{\Phi_{i,j+1}-\Phi_{i,j}}{h^Y_{j+1/2}}\overset{def}{=}\Phi_Y$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}\bigg|_{i-1/2,\,j}\approx\frac{\Phi_{i,j}-\Phi_{i-1,j}}{h^X_{i-1/2}}\overset{def}{=}\Phi_{\bar X},\quad\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\bigg|_{i,\,j-1/2}\approx\frac{\Phi_{i,j}-\Phi_{i,j-1}}{h^Y_{j-1/2}}\overset{def}{=}\Phi_{\bar Y}$$

Тогда аппроксимация диссипативных слагаемых на регулярных ячейках

$$\left[\frac{h^Y_{j-1/2}}{2}\alpha_{i+1/2,\,j-1/2}+\frac{h^Y_{j+1/2}}{2}\alpha_{i+1/2,\,j+1/2}\right]\Phi_X-\left[\frac{h^Y_{j+1/2}}{2}\alpha_{i-1/2,\,j+1/2}+\frac{h^Y_{j-1/2}}{2}\alpha_{i-1/2,\,j-1/2}\right]\Phi_{\bar X}+$$

$$+\left[\frac{h^X_{i+1/2}}{2}\beta_{i+1/2,\,j+1/2}+\frac{h^X_{i-1/2}}{2}\beta_{i-1/2,\,j+1/2}\right]\Phi_Y-\left[\frac{h^X_{i-1/2}}{2}\beta_{i-1/2,\,j-1/2}+\frac{h^X_{i+1/2}}{2}\beta_{i+1/2,\,j-1/2}\right]\Phi_{\bar Y}$$

(29)

Если $\alpha=const$ и $\beta=const$, то $\left(h^Y_{j-1/2}+h^Y_{j+1/2}\right)/2=\hbar^Y_j$ и следовательно аппроксимация примет следующий вид

$$\hbar^Y_j\alpha\Phi_X-\hbar^Y_j\alpha\Phi_{\bar X}+\hbar^X_i\beta\Phi_Y-\hbar^X_i\beta\Phi_{\bar Y}=$$

$$= \hbar_j^Y W_{i+1/2,j}^{DX} - \hbar_j^Y W_{i-1/2,j}^{DX} + \hbar_i^X W_{i,j+1/2}^{DY} - \hbar_i^X W_{i,j-1/2}^{DY} =$$

$$= \left(\left(W^D, n\right)\Big|_{i+1/2,j} \hbar_j^Y + \left(W^D, n\right)\Big|_{i,j+1/2} \hbar_i^X - \left(W^D, n\right)\Big|_{i-1/2,j} \hbar_j^Y - \left(W^D, n\right)\Big|_{i,j-1/2} \hbar_i^X \right) \qquad (30)$$

Аппроксимация уравнения в приграничных и угловых ячейках

Рассмотрим приграничные ячейки $\Omega_{0,j}^{1/2}$ на левой границе области Ω рис. 9.

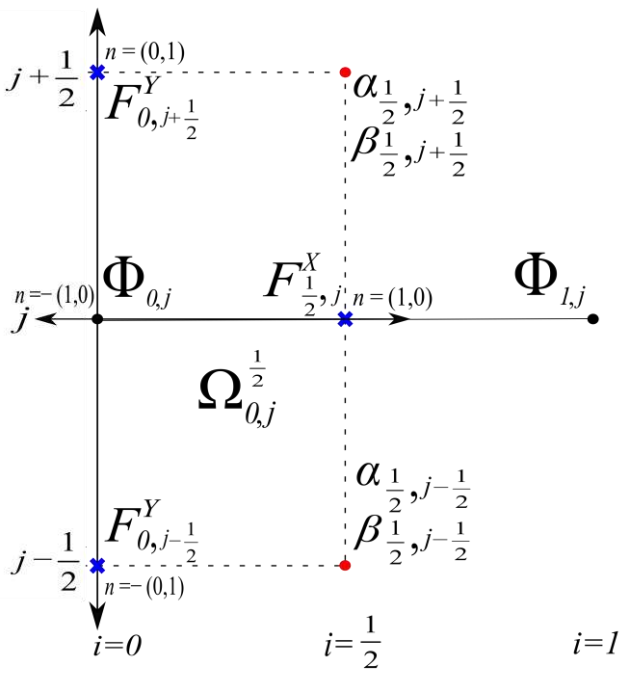


Рис. 9. Приграничная ячейка $\Omega_{0,j}^{1/2}$

Аппроксимация уравнения аналогично рассмотренному выше случаю (считаем $\alpha = const$ и $\beta = const$)

$$\int\limits_{\Omega_{0,j}^{1/2}} \left[\frac{\partial F^X \Phi}{\partial X} + \frac{\partial F^Y \Phi}{\partial Y} - \left(\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right) \right] dXdY \overset{O.-Г.}{=} \int\limits_{\partial\Omega_{0,j}^{1/2}} \left(W, n\right) \partial\Omega_{0,j}^{1/2} \approx$$

$$\approx \left| W = \left(\underbrace{F^X \Phi - \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial X}}_{W^X}, \underbrace{F^Y \Phi - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial Y}}_{W^Y} \right)^T \right| \approx$$

$$\approx \left((W,n)\big|_{1/2,j} \hbar_j^Y + (W,n)\big|_{0,j+1/2} \hbar_0^X - \underbrace{(W,n)\big|_{0,j}}_{=0} \hbar_j^Y - (W,n)\big|_{0,j-1/2} \hbar_0^X \right)$$

Третье слагаемое в этой сумме совпадает с граничным условие, потому что внешняя нормаль к ячейке $\Omega_{0,j}^{1/2}$ в точке $(0, j)$ совпадает по направлению с внешней нормалью к границе области $\partial\Omega$ в этой точке, а, следовательно, оно равно нулю в силу постановки задачи (26). Таким образом учитываются граничные условие в разностной постановке задачи, для остальных приграничных ячеек аналогичные рассуждения.

Теперь рассмотрим одну из четырех угловых ячеек $\Omega_{0,0}^{1/4}$ рис. 10

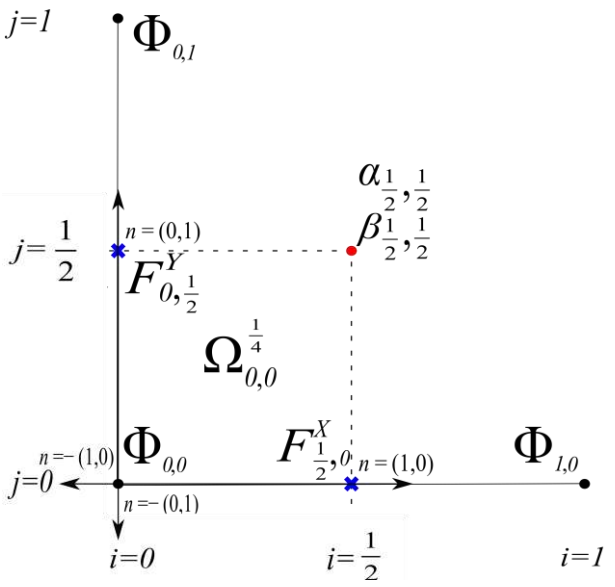


Рис. 10. Угловая ячейка $\Omega_{0,0}^{1/4}$

Аналогично случаю выше считаем $\alpha = const$ и $\beta = const$, и интегрируем по $\Omega_{0,0}^{1/4}$

$$\int\limits_{\Omega_{0,0}^{1/4}}\left[\frac{\partial F^X\Phi}{\partial X}+\frac{\partial F^Y\Phi}{\partial Y}-\left(\alpha\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}+\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2}\right)\right]dXdY\overset{О.-Г.}{=}\int\limits_{\partial\Omega_{0,0}^{1/4}}(W,n)\partial\Omega_{0,0}^{1/4}\approx$$

$$\approx\left((W,n)\big|_{1/2,0}\hbar_0^Y+(W,n)\big|_{0,1/2}\hbar_0^X-\underbrace{(W,n)\big|_{0,0}}_{=0}\hbar_0^Y-\underbrace{(W,n)\big|_{0,0}}_{=0}\hbar_0^X\right)$$

Последние два слагаемых равны нулю в силу того, что они совпадают с граничными условиями задачи. Аналогичные рассуждения для остальных угловых ячеек.

Таким образом аппроксимация в каждой приграничной и угловой ячейках несут в себе информацию о граничных условиях задачи.

Методы решения системы

Соберем разностные аппроксимации вместе и сосчитаем количество уравнений. Сложим (27), (28) и приравняем (30) и разделим на $\hbar_i^X\hbar_j^Y$, тогда получим аппроксимацию уравнения в регулярных ячейках

$$\frac{\partial\Phi_{i,j}}{\partial t}+\frac{F_{i+1/2,j}^X\Phi_{i+1/2,j}-F_{i-1/2,j}^X\Phi_{i-1/2,j}}{\hbar_i^X}+\frac{F_{i,j+1/2}^Y\Phi_{i,j+1/2}-F_{i,j-1/2}^Y\Phi_{i,j-1/2}}{\hbar_j^Y}=$$

$$=\frac{\alpha}{\hbar_i^X}\left(\frac{\Phi_{i+1,j}-\Phi_{i,j}}{h_{i+1/2}^X}-\frac{\Phi_{i,j}-\Phi_{i-1,j}}{h_{i-1/2}^X}\right)+\frac{\beta}{\hbar_j^Y}\left(\frac{\Phi_{i,j+1}-\Phi_{i,j}}{h_{j+1/2}^Y}-\frac{\Phi_{i,j}-\Phi_{i,j-1}}{h_{j-1/2}^Y}\right). \quad (31)$$

Индексы пробегают значения $i=1,\ldots,N_X-1,\ \ j=1,\ldots,N_Y-1$, значит таких уравнений $(N_X-2)(N_Y-2)$, плюс $2(N_X-2)+2(N_Y-2)$ уравнений от приграничных ячеек и плюс 4 уравнения от угловых, итого N_XN_Y. Равно столько же, сколько и неизвестных.

Получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), где каждая неизвестная $\Phi_{i,j}$ является функцией времени в соответствующем узле сетки фазового пространства. В начальный момент времени для

исходной задачи задано начальное распределение (21), тогда можно сформулировать задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} = \vec{f}\left(\Phi_{0,0}, \Phi_{1,0}, \ldots, \Phi_{i,j}, \ldots, \Phi_{N_X, N_Y}\right) = \vec{f}\left(\vec{\Phi}\right) \\ \vec{\Phi}(t_0) = \left(\Phi_{0,0}^{(0)}, \Phi_{1,0}^{(0)}, \ldots, \Phi_{i,j}^{(0)}, \ldots, \Phi_{N_X, N_Y}^{(0)}\right) = \vec{\Phi}^0 \end{cases} \tag{32}$$

Такой приём решения уравнений в частных производных называют методом прямых или частичной дискретизацией уравнений [14]. Он является удобным в случае использования готовых библиотек, реализующих решение систем ОДУ, что позволяет задействовать практически любой алгоритм численного решения ОДУ.

С другой стороны, если все-таки аппроксимировать уравнения (31) по временной переменной, то получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\frac{\Phi_{i,j}^{(k+1)} - \Phi_{i,j}^{(k)}}{\tau} + \left[\frac{F_{i+1/2,j}^{X} \Phi_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}^{X} \Phi_{i-1/2,j}}{\hbar_i^X} + \frac{F_{i,j+1/2}^{Y} \Phi_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}^{Y} \Phi_{i,j-1/2}}{\hbar_j^Y} \right]^{(\sigma)} =$$

$$= \left[\frac{\alpha}{\hbar_i^X} \left(\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{h_{i+1/2}^X} - \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{h_{i-1/2}^X} \right) + \frac{\beta}{\hbar_j^Y} \left(\frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{h_{j+1/2}^Y} - \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{h_{j-1/2}^Y} \right) \right]^{(\sigma)} \tag{33}$$

Индексы по-прежнему $i = 1, \ldots, N_X - 1,\ \ j = 1, \ldots, N_Y - 1$, и дополнительно уравнения после аппроксимации в приграничных и угловых ячейках. Здесь введем обозначение

$$f^{(\sigma)} = f^{(k+1)}\sigma + (1-\sigma) f^{(k)},\ \sigma \in [0,1]$$

Таким образом, считается, что решение на новом временном слое $\Phi^{(k+1)}$ вычисляется как взвешенная сумма с верхнего и нижнего временных слоёв. Тогда весовой коэффициент $\sigma = 1$ соответствует неявному методу Эйлера для

задачи (32), $\sigma = 0$ соответствует явному методу Эйлера, а $\sigma = 1/2$ соответствует симметричной схеме.

В системе (33) вместе со всеми уравнениями на границе получается $N_X N_Y$ неизвестных, матрица системы имеет размерность $n \times n, n = N_X N_Y$. Матрица получается специального вида, а именно пятидиагональной (на рис. 11 представлен портрет матрицы для сетки 5×5, где цветом обозначены ненулевые элементы матрицы).

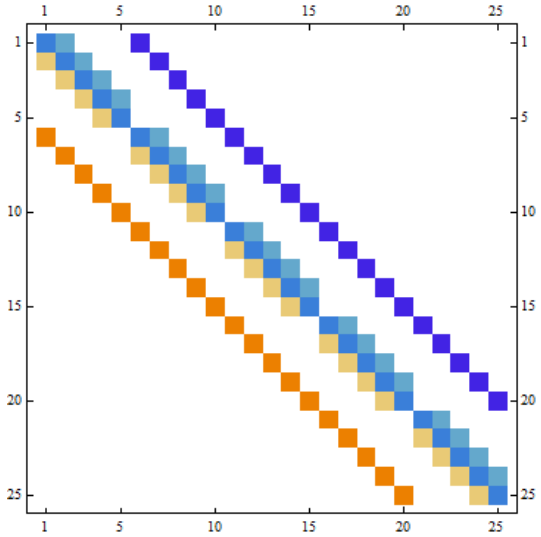


Рис. 11. Портрет матрицы для сетки 5×5

При решении СЛАУ матрица системы не будет меняться от одного временного слоя к другому (меняться будет только вектор свободных членов), следовательно, для упрощения процедуры решения системы к матрице целесообразно применить LU разложение. Для разреженных матриц, как правило требуется небольшое количество арифметических операция для LU разложение по сравнению с n^2.

Далее оба метода будут сравниваться по своей эффективности для данной задачи на некоторых примерах.

Исследование численного решения

Численное решение уравнения должно удовлетворять двум основным условиям, накладываемым на функцию плотности вероятности (22). Также по

найденному решению можно вычислить вероятностные параметры (математические ожидания, дисперсии, коэффициент корреляции и ковариации), которые должны совпадать с точными результатами, полученными из спектрального анализа.

В качестве примера для отладки и проверки алгоритмов возьмем следующие параметры

$$T_E^{(\alpha)} = 1, \tau^{(\alpha)} = 0.1, \left\langle \left(\xi^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle = 10, \chi^{(\alpha)} = 7, \; T_E^{(\beta)} = 13, \tau^{(\beta)} = 0.1, \left\langle \left(\xi^{(\beta)}\right)^2 \right\rangle = 150, \chi^{(\beta)} = 7.$$

В этом случае аналитические значения вероятностных параметров

$$\left\langle U^{(\alpha)} \right\rangle = \left\langle U^{(\beta)} \right\rangle = 0, \left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle = 1.98, \; \left\langle \left(U^{(\beta)}\right)^2 \right\rangle = 0.174, \left\langle U^{(\alpha)} U^{(\beta)} \right\rangle = -0.14.$$

Рассмотрим область $\Omega = [-15,15] \otimes [-15,15]$, отрезок времени интегрирования от 0 до $T = 30.0$.

Для начала сравним эффективность обоих методов решения задачи (26) по времени.

В качестве весовых коэффициентов, пересчитывающих значение искомой функции на границу элементарной ячейки, выберем

$$\theta_{i+1/2,j}^{X,F} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\left|F_{i+1/2,j}^{X}\right|}{F_{i+1/2,j}^{X}}\right), \quad \theta_{i,j+1/2}^{Y,F} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\left|F_{i,j+1/2}^{Y}\right|}{F_{i,j+1/2}^{Y}}\right) \tag{34}$$

Такой выбор будет обоснован далее.

Условие нормировки будем проверять на момент времени T, считая, что к этому времени распределение вероятности вышло на стационарный режим. Введем обозначение

$$I_{norm} \overset{def}{=} \left|1 - \int \Phi d\Omega\right| \approx \left|1 - \sum_{i,j=0}^{N_X, N_Y} \Phi_{i,j} \hbar_i^X \hbar_j^Y\right|.$$

Условие положительности будем проверять по минимальному элементу, если он больше нуля, то считаем условие выполненным. Также в момент времени T, обозначаем

$$\Phi_{\min} \overset{def}{=} \min_{\substack{0 \le i \le N_X \\ 0 \le j \le N_Y}} \Phi_{i,j} > 0.$$

В таблице 2 представлены результаты времени расчета (t, сек.), балансового соотношения (I_{norm}) и минимального элемента ($\Phi_{\min}$) для стационарного распределения вероятности, полученного в результате решение СЛАУ (левая часть таблицы) и в результате решения системы ОДУ (правая часть таблицы). Пространственная сетка 30×30. Для решения СЛАУ (33), полученной после полной дискретизации исходной задачи, шаг интегрирования по времени выберем $\tau = 0.005$. Для решения систему ОДУ (32) в случае явного метода Эйлера шаг $\tau = 0.005$, в случае симметричной схемы и неявного метода Эйлера шаг выбирается автоматически.

Таблица 2. Сравнение методов численного решения задачи (26)

$\sigma = 0$			Явный метод Эйлера		
t, сек.	I_{norm}	$\Phi_{\min}$	t, сек.	I_{norm}	$\Phi_{\min}$
38.74	$3.56e-8$	$3.4e-20$	37.00	$3.56e-8$	$3.4e-20$
$\sigma = 1/2$			Симметричная схема		
36.76	$3.56e-8$	$3.4e-20$	43.04	$3.56e-8$	$3.4e-20$
$\sigma = 1$			Неявный метод Эйлера		
38.22	$3.56e-8$	$3.4e-20$	24.70	$3.56e-8$	$3.4e-20$

В случае выбора $\sigma = 0$ для СЛАУ или явного метода Эйлера для системы ОДУ результаты получаются одинаковыми. Сравнивая $\sigma = 1/2$ и симметричную схему получаем время расчета несколько большее в случае решения систему ОДУ, хотя остальные параметры опять совпадают. Наконец в случай $\sigma = 1$ и неявный методе Эйлера время расчета для системы ОДУ меньше, чем

для СЛАУ. Стоит помнить, что в случае симметричной схемы и неявного метода Эйлера шаг интегрирования выбирается автоматически. Таким образом, с точки зрения выполнения основных условий для искомой ФПВ методы дают абсолютно одинаковые результаты.

На сетке 50×50 время расчета СЛАУ при $\sigma = 1$ составляет $t = 111.82$ сек., тогда как время решения системы ОДУ составило $t = 203.04$ сек. Это можно обосновать тем, что встроенные функции решения систем ОДУ содержат в себе гораздо более сложный функционал, по сравнению с методами решения СЛАУ и LU разложения.

Далее будем использовать метод решения СЛАУ при $\sigma = 1$. Так как это неявный метод, то как правило он позволяет проводить расчеты с гораздо большим шагом интегрирования по времени τ.

Теперь сравним численное решение по способу пересчета искомой функции на границу ячейки интегрирования, а точнее по выбору весовых коэффициентов $\theta^{X}_{i+1/2,j}$ и $\theta^{Y}_{i,j+1/2}$.

В случае выбора коэффициентов $\theta^{X,F}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,F}_{i,j+1/2}$ (34), согласно [15], получается разностная схема с направленными разностями первого порядка вдоль соответствующих направлений в фазовом пространстве.

Выбор коэффициентов $\theta^{X,1/2}_{i+1/2,j} = \theta^{Y,1/2}_{i,j+1/2} = 1/2$ приводит к симметричной схеме по пространству [15], то есть значение на границе ячейки вычисляется как полусумма из соседних узлов.

Третий способ выбора весовых коэффициентов заимствован из работы [13]. Авторами получены выражения с целью удовлетворения условию положительности ФПВ на разностном уровне. Такую схему называют Chang-Cooper discretization scheme

$$\theta^{X,CC}_{i+1/2,j} = -\frac{1}{w^{X}_{i+1/2,j}} + \frac{\exp\left[w^{X}_{i+1/2,j}\right]}{\exp\left[w^{X}_{i+1/2,j}\right]-1},\ \theta^{Y,CC}_{i,j+1/2} = -\frac{1}{w^{Y}_{i,j+1/2}} + \frac{\exp\left[w^{Y}_{i,j+1/2}\right]}{\exp\left[w^{Y}_{i,j+1/2}\right]-1},$$

где $w^X_{i+1/2,j} = \dfrac{F^X_{i+1/2,j} h^X_{i+1/2}}{\alpha}$, $w^Y_{i,j+1/2} = \dfrac{F^Y_{i,j+1/2} h^Y_{j+1/2}}{\beta}$ – сеточное число Пекле.

В таблице 3 представлены результаты балансового соотношения (I_{norm}) и минимального элемента ($\Phi_{\min}$) для стационарного распределения вероятности при разных весовых коэффициентах $\theta^X_{i+1/2,j}$ и $\theta^Y_{i,j+1/2}$. Пространственная сетка 100×100, шаг интегрирования по времени $\tau = 0.1$, весовой коэффициент $\sigma = 1$.

Таблица 3. Сравнение коэффициентов пересчета

Весовые коэф-ты	$\theta^{X,F}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,F}_{i,j+1/2}$	$\theta^{X,1/2}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,1/2}_{i,j+1/2}$	$\theta^{X,CC}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,CC}_{i,j+1/2}$
I_{norm}	1.13e-14	4.06e-14	3.51e-14
$\Phi_{\min}$	3.19e-52>0	-6.51e-5<0	7.03e-74>0

Согласно таблице выходит, что выбор коэффициентов $\theta^{X,1/2}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,1/2}_{i,j+1/2}$ приводит к решению, не удовлетворяющему условию положительности. Далее будем использовать $\theta^{X,F}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,F}_{i,j+1/2}$ или $\theta^{X,CC}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,CC}_{i,j+1/2}$.

Наконец исследуем сеточную сходимость разностной схемы. С этой целью проводим расчеты на разных сетках по пространству и вычисляем вероятностные параметры. С уменьшением пространственного шага интегрирования (рассмотрим равномерную сетку с постоянным шагом h) значения должны стремиться к аналитическим результатам.

По известной ФПВ можно вычислять моменты любого порядка, тогда для численного решения получаем

$$\left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} XY\Phi\left(X,Y\right)d\Omega \approx \sum_{i,j=0}^{N_X,N_Y} X_i Y_j \Phi_{i,j}\hbar_i^X \hbar_j^Y \overset{def}{=} \left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle_h$$

$$\left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2\Phi\left(X,Y\right)d\Omega \approx \sum_{i,j=0}^{N_X,N_Y} X_i X_i \Phi_{i,j}\hbar_i^X \hbar_j^Y = \left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle_h$$

$$\left\langle \left(U^{(\beta)}\right)^2\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^2\Phi\left(X,Y\right)d\Omega \approx \sum_{i,j=0}^{N_X,N_Y} Y_j Y_j \Phi_{i,j}\hbar_i^X \hbar_j^Y = \left\langle \left(U^{(\beta)}\right)^2\right\rangle_h$$

Введем ошибки вычисления вероятностных параметров, зависящую от шага h

$$\varepsilon^{(\alpha)} = \left|\left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle - \left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2\right\rangle_h\right|,$$

$$\varepsilon^{(\beta)} = \left|\left\langle \left(U^{(\beta)}\right)^2\right\rangle - \left\langle \left(U^{(\beta)}\right)^2\right\rangle_h\right|,$$

$$\varepsilon^{(\alpha\beta)} = \left|\left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle - \left\langle U^{(\alpha)}U^{(\beta)}\right\rangle_h\right|.$$

На рис. 12 представлены графики сходимости численных значений вероятностных параметров для двух вариантов интерполяции $\theta_{i+1/2,j}^{X,F}$, $\theta_{i,j+1/2}^{Y,F}$ и $\theta_{i+1/2,j}^{X,CC}$, $\theta_{i,j+1/2}^{Y,CC}$. По вертикальной оси отложена ошибка вычисления вероятностного параметра в логарифмическом масштабе, по горизонтальной оси шаги h также в логарифмическом масштабе. Непрерывными линиями показаны степенные функции, отражающие порядок сходимости, точками показаны значения ошибок вычисления параметров. Синий цвет соответствует весовым параметрам $\theta_{i+1/2,j}^{X,F}$, $\theta_{i,j+1/2}^{Y,F}$, красный цвет $\theta_{i+1/2,j}^{X,CC}$, $\theta_{i,j+1/2}^{Y,CC}$.

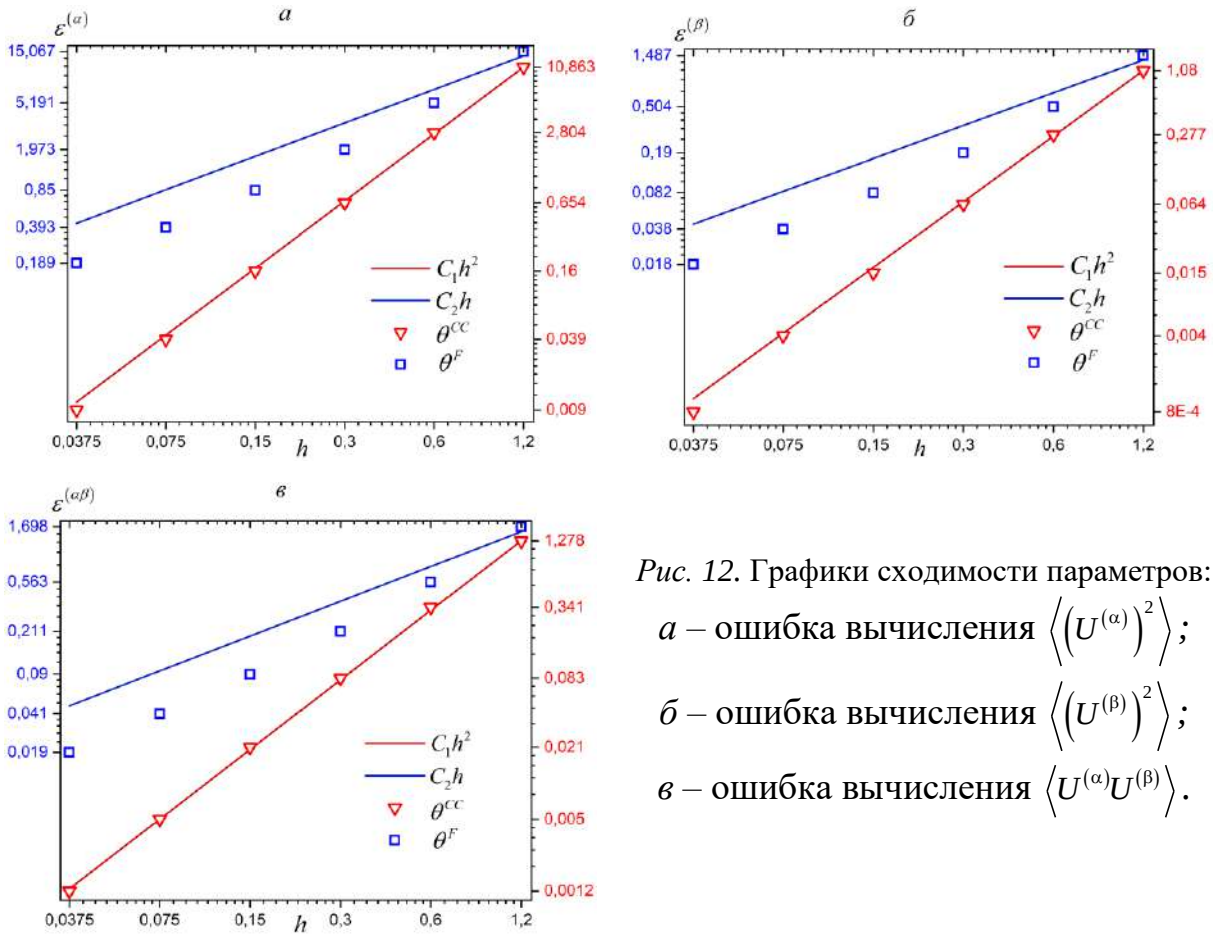


Рис. 12. Графики сходимости параметров:

а – ошибка вычисления $\left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle$;

б – ошибка вычисления $\left\langle \left(U^{(\beta)}\right)^2 \right\rangle$;

в – ошибка вычисления $\left\langle U^{(\alpha)} U^{(\beta)} \right\rangle$.

Согласно представленным выше графикам при выборе весовых параметров $\theta^{X,CC}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,CC}_{i,j+1/2}$ (красный цвет) разностная схема (33) имеет второй порядок точности по пространству, а при выборе весовых параметров $\theta^{X,F}_{i+1/2,j}$, $\theta^{Y,F}_{i,j+1/2}$ (синий цвет) первый порядок точности по пространству. По времени обе схемы имею первых порядок точности, однако шаг интегрирования по времени здесь постоянный ($\tau = 0.1$), так как рассматривается стационарное решение на момент времени $T = 30.0$.

Сопоставление подхода Эйлера и Лагранжа

В результате прямого численного моделирования получаем статистику по большому количеству реализаций системы (3), (4). Визуальное представление этого процесса на рис. 13, на котором представлено распределение скорости частиц в фазовом пространстве $\left(U^{(\alpha)}, U^{(\beta)}\right)$ на момент времени $T = 30.0$.

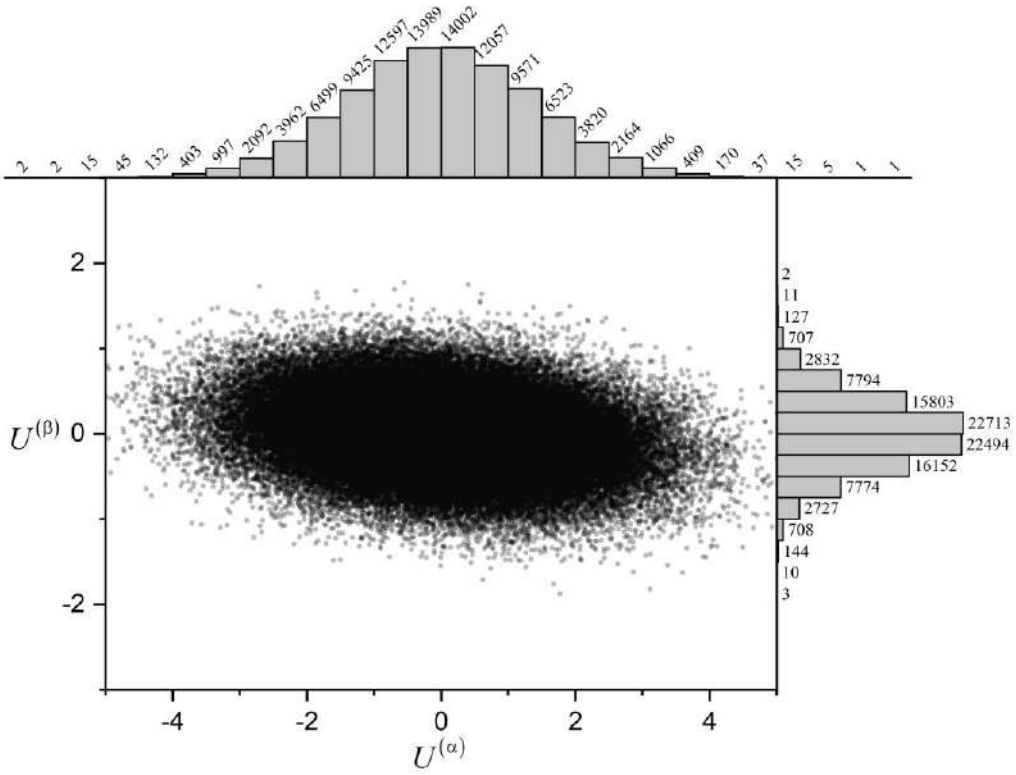
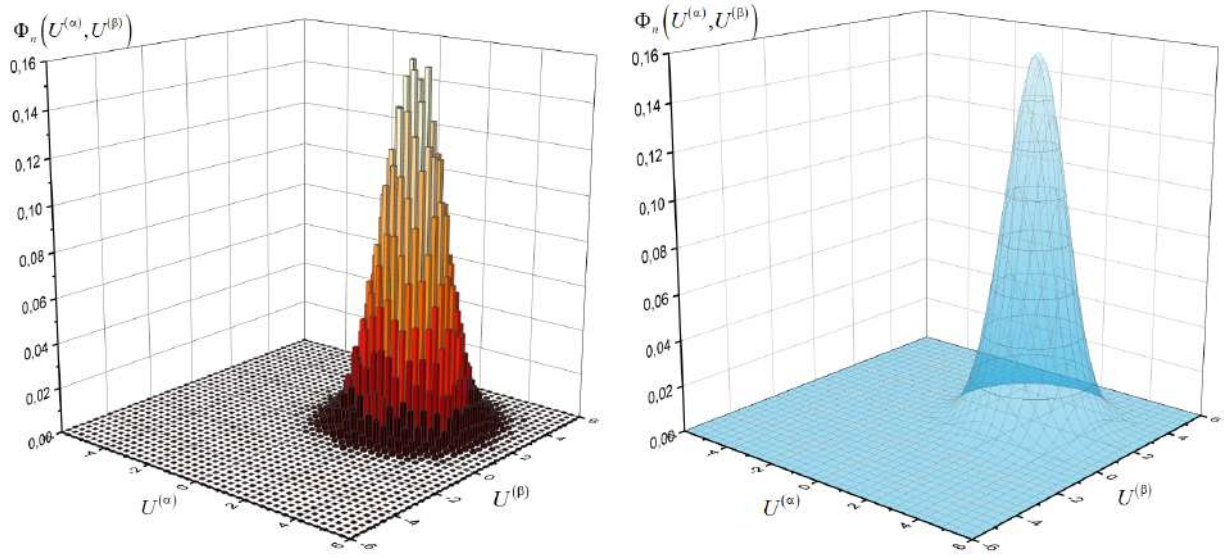


Рис. 13. Статистика распределения скорости газа для 10^5 частиц

По горизонтали построены столбцы шириной 0.5, их высота ровна количеству попавших в них значений скорости, по вертикали столбы шириной 0.25. Внутри прямоугольной области каждая точка – значение скорости газа для каждой реализации. Однако, чтобы получить из этой информации функцию плотности вероятности, нужно нормировать данные, как было сделано в разделе 2.

Напомним, что в качестве начальных данных прямого численного моделирования брались нормально распределенные случайные числа с $\left\langle U^{(\alpha)} \right\rangle_{t=0} = \left\langle U^{(\beta)} \right\rangle_{t=0} = 2$, $\left\langle \left(U^{(\alpha)}\right)^2 \right\rangle_{t=0} = \left\langle \left(U^{(\beta)}\right)^2 \right\rangle_{t=0} = 1$, а в качестве начальных данных к уравнению для ФПВ выбиралось гауссовская функция распределение (26). Визуальное представление начальных данных представлено на рис. 14.



а *б*

Рис. 14. Сопоставление начальных данных для прямого численного моделирования (а) и уравнения для ФПВ (б)

Рис. 14а – статистическая ФПВ, которая представляет собой нормированную гистограмму в трехмерном пространстве, рис. 14б – «непрерывная» ФПВ, которая представляется поверхностью в трехмерном пространстве, интерполированной по значениям, полученным в результате численного решения задачи (26).

Такое сопоставление результатов ненаглядно, тем более для дальнейших результатов, поэтому предложен вариант нанесения линий уровня ФПВ из уравнения 24 поверх «тепловой карты» для статистической ФПВ из прямого численного моделирования как показано на рис. 15.

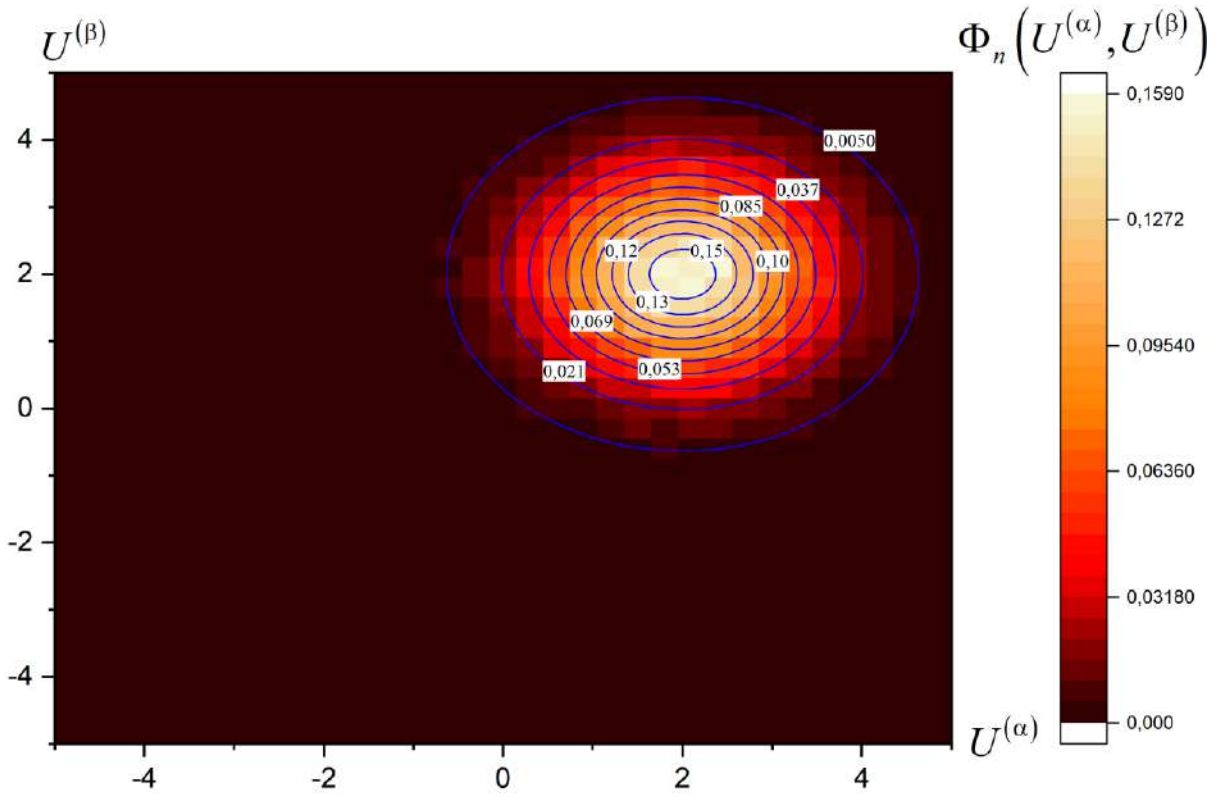


Рис. 15. Сопоставление проекций ФПВ в начальный момент времени

На рис. 15 изображено фазовое пространство $\left(U^{(\alpha)},U^{(\beta)}\right)$, в котором синим цветом построены линии уровня непрерывной ФПВ с подписанными значениями, а закрашенная область – проекция столбцов из рис. 14а на фазовое пространство, где изменение цвета соответствует изменению значения статистической ФПВ (шкала представлена слева от графика).

Такое визуальное сопоставление статистической и «непрерывной» ФПВ гораздо удобнее, сразу видно качественное соответствие полученных результатов. На рис. 16 представлено стационарное распределение вероятности для скорости газа.

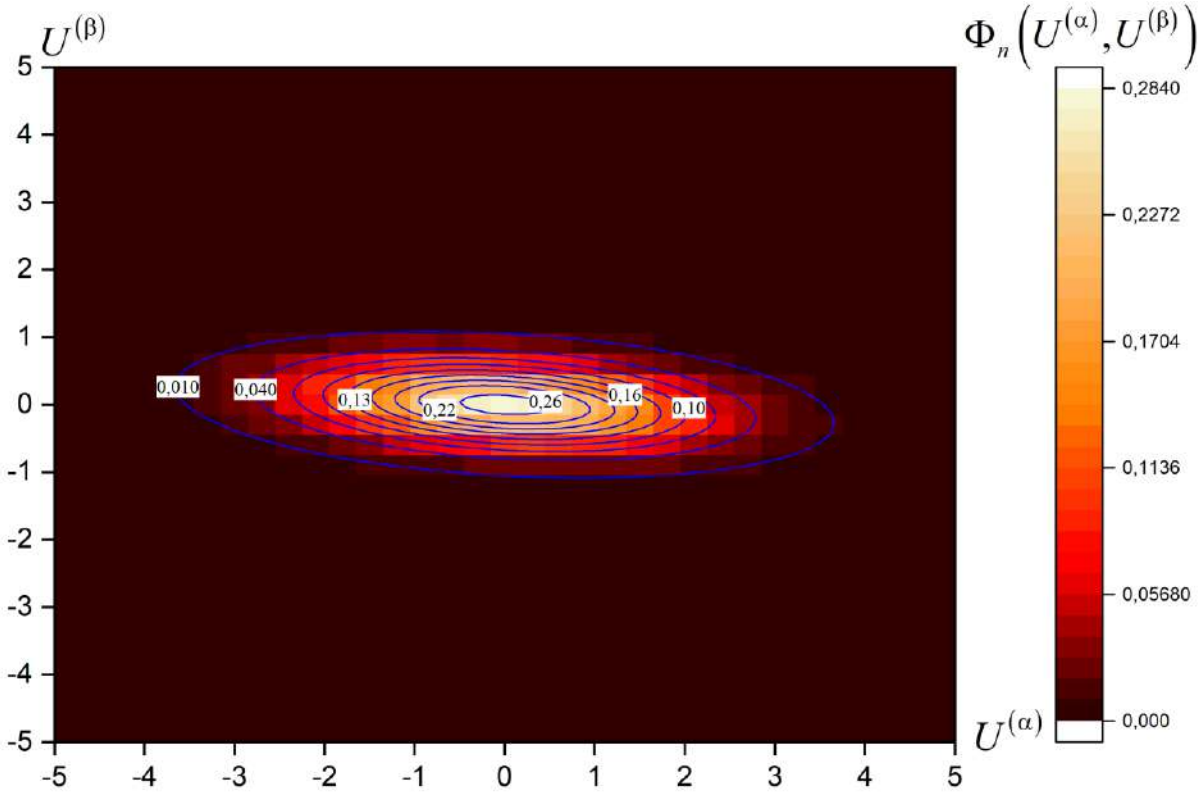


Рис. 16. Сопоставление результатов на момент времени *t=30.0*

По рис. 16 видно, что решение уравнения для ФПВ совпадает с результатами прямого численного моделирования. Результат решения задачи (26) в таком представлении дает именно те эллипсы рассеивания, о которых говорилось в разделе 2 и [11].

Полученные выше результаты подтверждают, что использование уравнения (24) со всеми предположениями и условиями является удобным и верным инструментов, в качестве описания исследуемых явлений. Знание вероятностного распределения случайной величины во времени и по пространству, позволяет получить всю полезную информацию о процессе в любой момент времени, не прибегая к сбору и обработке статистики.

Заключение

В результате выполнения работы были исследованы два альтернативных подхода к описанию двухфазных турбулентных течений на основе идей Эйлера и Лагранж.

Подход Лагранжа можно понимать, как вычислительный эксперимент – альтернативу физическому эксперименту. С помощью современных алгоритмов Рунге-Кутты, обобщенных на стохастический случай, в результате прямого численного моделирования получена статистика динамики дисперсной фазы и несущей среды. Последующая обработка данных позволяет получить оценки статистических параметров турбулентного потока газа и частиц. Трудности, возникающие в связи с таким подходом, связаны с большими временными, а также ресурсными затратами.

Подход Эйлера основан на современных достижениях теории вероятностей и функционального анализа. С помощью обобщения спектрального анализа получены аналитические выражения для интенсивностей флуктуаций и автокорреляционные функции случайных скоростей газа и частиц. Показано, что с помощью СОДУ с белым шумом в качестве источника флуктуаций можно генерировать случайные процессы любой структурной сложности и с заданными автокорреляционными функциями. Однако спектральный анализ позволяет получить статистические параметры турбулентности для процессов, уже вышедший на стационарный режим. Стоит отметить, что реализация подхода Эйлера требует существенно больше интеллектуальных затрат, чем подход Лагранжа.

Наконец на основе подхода Эйлера получено замкнутое уравнение для ФПВ, которое является дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа. Его численное решение получено методом конечных объем. Данный подход позволяет получить эволюцию во времени функ-

ции плотности вероятности. Существенные сложности возникают при замыкании уравнения и расчете его коэффициентов, а также в связи с известными проблемами численных решений уравнений в частных производных.

В конечном итоге сопоставление результатов, полученных всеми описанными способами, подтверждает правильность полученных выражений и введенных предположений. Качественное и количественное совпадение результатов говорит о верном направлении мыслей.

Учитывая все интеллектуальные трудности и вычислительные проблемы, на наш взгляд, самым привлекательным является подход Эйлера. В силу его строгости и последовательности. Знание функции плотности вероятности позволяет получить всю интересующую исследователя информацию о случайном процессе. Поэтому этот считаем этот подход предпочтительным при исследовании таких процессов, как турбулентность. А прямое численное моделирование, основанное на подходе Лагранжа, является удобным способом для верификации результатов, полученных при подходе Эйлера.

Приложение 1. Список публикаций и конференций

1. Стендовый доклад: XXII Школа-семинар молодых ученых и специалистов под руководством академика А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках». А.К. Клочков, «Разработка численных методов решения уравнения для функции плотности вероятности».
2. Публикация по результатам конференции «XI семинар ВУЗов по теплофизике и энергетике»»: November 2019 Journal of Physics Conference Series 1382:012079. I.V. Derevich, A.K. Klochkov, «Calculation of probability density function of particle velocity in turbulent flow». DOI: 10.1088/1742-6596/1382/1/012079
3. Статья, принятая к публикации в Инженерный Физический Журнал (ИФЖ): И.В. Деревич, А.К. Клочков, «Аналитическое и численное решение уравнения для функции плотности вероятности скорости частицы в турбулентном потоке».
4. Выступление на конференции: Всероссийская конференция «XXXV Сибирский теплофизический семинар», 27–29 августа 2019, Новосибирск. И.В. Деревич, А.К. Клочков. «Расчет функции плотности вероятности скорости частиц в турбулентном потоке».
5. Статья, принятая к публикации в журнал Математика и Математическое Моделирование: И.В. Деревич, А.К. Клочков, «Флуктуации скорости частицы в вязком газе со случайной скоростью в виде суммы двух коррелированных цветных шумов».
6. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 20-08-01061).

Список использованных источников

1. W. W. Willmarth and S. S. Lu, “Structure of the Reynolds stress near the wall,” J. Fluid Mech. 55, 65–92 (1972).

2. S. J. Kline, W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler, “The structure of turbulent boundary layers,” J. Fluid Mech. 30, 741–773 (1967).

3. M. Guingo and J.-P. Minier, “A stochastic model of coherent structures for particle deposition in turbulent flows,” Phys. Fluids 20, 053303 (2008).

4. C. Jin, I. Potts, and M. W. Reeks “A simple stochastic quadrant model for the transport and deposition of particles in turbulent boundary layers” Physics Fluids 27, 053305 (2015). http://dx.doi.org/10.1063/1.4921490

5. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. В 2 ч. Ч. 1. Механика турбулентности. М.: Машиностроение, 1965. 720 с.

6. Derevich I.V. Spectral diffusion model of heavy inertial particles in random velocity field of the continuous medium. Thermophys. Aeromechanic. 2015. Vol. 22, № 2. PP. 151–170. DOI: 10.1134/S086986431502002X

7. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1977. - 568 с.

8. Rackauckas C., Nie Qing, Adaptive methods for stochastic differential equations via natural embeddings and rejection sampling with memory. 2017, Discrete and Continous Dynamical Systems – Seris B. 22(7): 2731 – 2761. DOI: 10.3934/dcdsb.2017133

9. Tocino A., Ardanuy R. Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math. 2002. Vol. 138, № 2. Pp. 219–241. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(01)00380-6

10. Кузнецова И. Ю. Численное решение стохастических дифференциальных уравнений в финансах // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. №4 (141). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/chislennoe-reshenie-

stohasticheskih-differentsialnyh-uravneniy-v-finansah (дата обращения: 28.03.2020).

11. Платонов А.К., Иванов Д.С. Методы навигации в условиях неопределенности // методическое пособие ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013, 84 с.

12. Roy, S., Annunziato, M., Borzì, A. *et al.* A Fokker–Planck approach to control collective motion. *Comput Optim Appl*. 2018 **69,** 423–459. doi: https://doi.org/10.1007/s10589-017-9944-3

13. Mohammadi, M., Borzì, A. Analysis of the Chang–Cooper discretization scheme for a class of Fokker–Planck equations, *Journal of Numerical Mathematics*, 2015. *23*(3), 271-288. doi: https://doi.org/10.1515/jnma-2015-0018

14. Пирумов У.Г. Численные методы // Учебное пособие – М Изд-во МАИ, 1998, – 188 с.

15. Мажорова О.С., Попов Ю.П., Сахарчук А.С. Устойчивость разностных схем для системы параболических уравнений, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 1997, 090.

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей России и стран СНГ
от Кравченко Александра Андреевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Исследование аппроксимации случайных полей большой параметрической размерности» являются: Доказательство леммы 3 и доказательство теорем 5, 7, 10, 12, 14 и 15.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 сентября 2019 г. по 01 мая 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: аппроксимация случайных полей, approximation of random fields. В выдаче поисковиков было исследовано 21 статья, 3 монографии, 3 книги и 1 диссертация (список см. в Разделе 6 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [10] и [17] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Была проведена серия консультаций с моим научным руководителем Хартовым Алексеем Андреевичем, доцентом факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО.
- Проведена переписка с профессором факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО Поповым Игорем Юрьевичем.
- Проведено выступление на Конгрессе молодых ученых Университета ИТМО.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 10.06.2020. На Смотр представлен проект текста работы.

Кравченко Александр Андреевич
28 мая 2020 г.
г. Санкт-Петербург, Россия

Содержание

Введение **5**

1 Основы теории многопараметрических задач аппроксимации **9**

1.1 Теория информационной сложности 9

1.2 Сложность аппроксимации 11

1.3 Трактабильность 15

1.4 Асимптотический анализ 17

1.5 Тензорные поля 19

1.6 Примеры случайных полей тензорного типа 20

2 Интегрированные процессы **24**

2.1 Определение интегрированного винеровского процесса 24

2.2 Результаты для интегрированного винеровского процесса 25

2.3 Определение интегрированного эйлеровского процесса 26

2.4 Результаты для интегрированного эйлеровского процесса 27

3 Оценка сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений **30**

3.1 Случай предельнопостоянной последовательности r_j 30

3.2 Критерий ограниченности сложности аппроксимации 33

3.3 Случай $r_j \to \infty$ 35

3.3.1 Теоретические основы 35

3.3.2 Первый случай 37

3.3.3 Второй случай 42

4 Оценка сложности аппроксимации тензорной степени **49**

4.1 Полученные результаты 49

4.2 Примеры 59

5 Заключение **64**

Введение

Рассмотрим случайное поле $Y(t), t \in T$, имеющее траектории в некотором нормированном пространстве $(Q, \|\cdot\|_Q)$, где T — некоторое параметрическое множество. Теоретический и практический интерес представляет аппроксимация поля Y полями конечного ранга:

$$\widetilde{Y}^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} l_k(Y)\psi_k(t), \quad t \in T,\, n \in \mathbb{N},$$

где $l_k(Y)$ — значения линейных функционалов от Y, ψ_k — элементы пространства Q. Интерес для исследования представляет следующий вопрос. Какое следует выбирать n для того, чтобы ошибка аппроксимации не превосходила заданное значение? Для того чтобы формализовать постановку данной задачи, вводится величина, которая называется *сложностью аппроксимации в среднем* (далее мы будем называть её просто *сложность аппроксимации*).

$$n^Y(\varepsilon) := \min\big\{n \in \mathbb{N} : \inf_{\widetilde{Y}^{(n)}} \mathbb{E}\,\|Y - \widetilde{Y}^{(n)}\|_Q^2 \leqslant \varepsilon^2 \mathbb{E}\,\|Y\|_Q^2\big\}, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где ε называется *порогом ошибки*.

Задачи, связанные с рассмотренными выше объектами, возникли на основе *теории информационной сложности*. Основополагающими в данной науке являются монографии [7] -[9].

В настоящее время являются актуальными так называемые многопараметрические задачи. В рамках таких задач рассматриваются аппроксимации различных объектов, которые зависят от большого числа параметров. Это необходимо принимать во внимание в процессе их решения. В фундаментальной работе Новака и Х. Вожняковского, состоящей из трёх томов, которая называется «Tractability of Multivariate Problems» [4]-[6], собрана основная теоретическая информация по задачам данного типа.

В данной работе рассматривается многопараметрическая задача аппроксимации случайного поля $Y(t)$, $t \in T$. То есть такая задача, при которой размерность параметрического множества T велика. С точки зрения формального подхода к задаче, это значит следующее. Для того чтобы учитывать при аппроксимации параметрическую размерность случайного поля, нужно рассмат-

ривать не одно поле $Y(t)$, $t \in T$, а некоторую последовательность случайных полей $Y_d(t)$, $t \in T_d, d \in \mathbb{N}$, где T_d — параметрическое множество для Y_d. При этом каждое Y_d имеет траектории в некотором нормированном пространстве $(Q_d, \|\cdot\|_{Q_d})$, $d \in \mathbb{N}$.

Из такого подхода следует, что сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$, $d \in \mathbb{N}$, необходимо рассматривать как функцию от двух переменных (порога ошибки и размерности параметрического множества) и изучать характер её роста по ним.

В такой общей постановке задача не может быть решена без дополнительной конкретизации. Мы сосредоточимся на случае, когда каждое Y_d имеет траектории в пространстве $L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Характер роста $n^{Y_d}(\varepsilon)$ здесь будет зависеть от ковариационной структуры последовательности случайных полей Y_d.

При изучении оценок сложности аппроксимации в рамках такой постановки задачи активно используется понятие *трактабильности*. Суть данного подхода заключается следующем. Сначала выбирается некая мажоранта, а далее ищутся условия на ковариационные параметры последовательности случайных полей, при которых данная мажоранта является оценкой для сложности аппроксимации. В качестве ковариационных параметров, как правило, рассматриваются собственные числа ковариационного оператора случайного поля. Для наглядности приведём несколько определений из теории трактабильности.

Последовательность случайных полей мы будем называть *W-трактабильной*, если сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ растёт медленнее экспоненты как по d, так и по ε^{-1}. В противном случае мы будем называть последовательность случайных полей *нетрактабильной*. Для трактабильных последовательностей существует определённая классификация по характеру роста $n^{Y_d}(\varepsilon)$. Например, последовательность случайных полей называется *P-трактабильной*, если сложность аппроксимации растёт не быстрее, чем полином от d и ε^{-1} с некоторыми показателями.

В данной работе для решения одной и задач будет рассмотрен похожий метод. Как и при изучении трактабильности, будут искаться необходимые и достаточные условия на ковариационные параметры последовательности случайных полей для реализации некоторой оценки на сложность аппроксимации.

Также имеет место следующий подход к решению поставленной задачи. осуществлять оценку сложности аппроксимации асимптотически, фиксируя один из двух параметров. При $\varepsilon \to 0$ и фиксированном $d \in \mathbb{N}$ мы фактически имеем немногопараметрическую задачу. В данном случае хорошо известна техника получения оценок $n^{Y_d}(\varepsilon)$. Например, довольно обширные результаты представлены в статье Лифшица М.А. и Туляковой Е.В. [10].

Интересной асимптотической задачей является рассмотрение $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при сколь угодно малом, но фиксированном ε и $d \to \infty$. В настоящее время она активно изучается для разных типов случайных полей (см. [15] - [17]).

В данной работе для решения одной из задач будет использоваться асимптотический анализ при фиксированном ε и $d \to \infty$.

Особый интерес при изучении многопараметрических задач представляют случайные поля *тензорного типа* как естественные многопараметрические аналоги случайных процессов. Ковариация таких полей конструируется как произведение ковариаций неких случайных процессов. Если ковариации процессов одинаковы и совпадают с ковариацией некоторого процесса X, то случайное поле называется *тензорной степенью* случайного процесса X. Данный класс довольно обширен и включает большинство широко использующихся в различных областях математики и физики процессов. В частности, самыми известными его представителями являются *броуновский лист* (тензорная степень винеровского процесса) и *броуновская подушка* (тензорная степень броуновского моста). В качестве примера тензорного произведения можно привести случайные поля, построенные на *интегрированных эйлеровских* и *интегрированных винеровских* процессах. Исследования сложности аппроксимации таких полей являются основной частью представленной работы. Определим более конкретно рассматриваемые в данной работе задачи.

В данной магистерской работе решаются следующие задачи:

1) Рассматривается последовательность тензорных степеней Y_d, $d \in \mathbb{N}$, случайного процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$. Далее для данной последовательности случайных полей ищутся необходимые и достаточные условия для существования некоторой оценки сложности аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$, при широких условиях на собственные числа ковариационного оператора процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$. Далее приводятся примеры процессов, которые

удовлетворяют поставленным условиям.

2) Рассматривается последовательность тензорных произведений $\mathbb{E}_d$, $d \in \mathbb{N}$, интегрированного эйлеровского процесса $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$. Далее для данной последовательности случайных полей ищется асимптотика сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$, при широких условиях на собственные числа ковариационного оператора процесса $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$ и при различном поведении последовательности при $j \to \infty$.

Наконец, приведём краткий структурный обзор работы.

В первой главе приводится общая теория информационной сложности, лежащая в основе проведённых исследований, вводится определение сложности аппроксимации и рассматриваются подходы к её оценке, подробно раскрывается понятие трактабильности и асимптотического анализа, приводится подробное описание случайных полей тензорного типа и описываются различные представители такого вида случайных полей.

Во второй главе рассматриваются интегрированные процессы, приводится их определение и интересные свойства. Далее рассматриваются результаты исследования сложности аппроксимации последовательности случайных полей, построенных на основе интегрированных процессов.

В третьей главе формулируется и доказывается ряд теорем об оценке сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений, в основе которых лежит интегрированный эйлеровский процесс.

Наконец, в четвёртой главе доказывается теорема об оценке сложности аппроксимации для произвольной последовательности тензорных степеней и приводятся примеры, удовлетворяющие данной оценке.

В заключении в общем виде перечислены основные результаты, которые были достигнуты в данной магистерской работе. В конце работы представлен список используемой литературы.

1 Основы теории многопараметрических задач аппроксимации

В этой главе рассказывается об основных понятиях и достижениях теории информационной сложности на основе монографий [3] - [6], вводится понятие сложности аппроксимации в общем случае и в случае гильбертова пространства и приводится обзор различных подходов к её изучению, включающих в себя понятия трактабильности и асимптотического анализа. Также приводится формальное определение тензорного произведения случайных процессов и приводятся наиболее важные и интересные представители данного класса случайных полей и описываются характеристики их ковариационного оператора.

1.1 Теория информационной сложности

Рассмотрим общую задачу. Пусть Q и H — это нормированные пространства функций, которые действуют из подмножества $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$. Задача состоит в том, чтобы для любой такой функции $f \in Q$, не превышая некоторого *порога ошибки* ε, решить задачу аппроксимации Sf некоторого оператора $S : Q \to H$ с помощью конечного числа значений функционалов от данной функции. Оператор S называется *оператором решения*. Приведём два примера оператора решения. В качестве оператора решения можно рассматривать многомерный интеграл.

$$Sf = \int\limits_{[0,1]^d} f(x)dx, \quad d \in \mathbb{N}.$$

В данном случае Q — подпространство $L_1([0,1]^d)$,$d \in N$, а $H = \mathbb{R}$. В качестве второго примера оператора решения можно рассматривать оператор вложения. При этом разумно выбрать $Q = C([0,1]^d)$, $d \in N$, а $H = L_2([0,1]^d)$,$d \in N$.

Востребованность и важность приближённого вычисления Sf обусловлена тем, что в реальных задачах, которые встречаются различных научных областях, пространство Q имеет бесконечную размерность. Это влечёт за собой следующую проблему. Функция f не может быть напрямую рассчитана на компьютере. Для формализации задачи вводится следующее понятие. Под $I_n(f)$

будем понимать конечную информацию о $f \in Q$. То есть такой конечный набор действительных чисел, что:

$$I_n(f) := (y_1(f), y_2(f), \ldots, y_n(f)) \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $y_i(f)$ представляют собой значения некоторых функционалов от f. Вычисление значений $y_i(f)$ называется *информационной операцией*.

С точки зрения вышеизложенных терминов задача аппроксимации значений S в пределах ε представляет собой поиск информации $I_n : Q \to \mathbb{R}^n$ с соответствующим $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ и отображения $\mathcal{A}_n : \mathbb{R}^n \to H$, при которых значения оператора $\widetilde{\mathbf{S}}_n := \mathcal{A}_n \circ I_n$ отличаются от значений S не больше, чем на ε, в терминах некоторой метрики.

Оператор $\widetilde{\mathbf{S}}_n$ называется *аппроксимацией ранга* n оператора S, а отображение $\mathcal{A}_n$ – алгоритмом аппроксимации $\widetilde{\mathbf{S}}_n$. Минимальный ранг $n = n(\varepsilon)$ носит название *информационной сложности*. Данная величина является центральным понятием, которое изучается в *теории информационной сложности*. Главные аспекты данной теории изложены в монографиях [7]-[9].

Рассмотрим более подробно задачу, связанную с информационными операциями при приближённых вычислениях оператора решения S. Предположим, что у нас есть функция $f \in Q$. Пусть $\widetilde{\mathbf{S}}_{n_{inf}} = \mathcal{A}_{n_{inf}} \circ I_{n_{inf}}$ — аппроксимация оператора S в пределах ε с соответствующим рангом $n_{inf} = n_{inf}(\varepsilon) \geqslant n(\varepsilon)$, где $n(\varepsilon)$ — информационная сложность.

В рамках данной модели для аппроксимации Sf, $f \in Q$ необходимо совершить n_{inf} информационных операций. После их осуществления будет получен вектор $I_{n_{inf}}(f)$. Для получения значения $\mathcal{A}_{n_{inf}} \circ I_{n_{inf}}(f)$ необходимо совершить n_{ari} арифметических операций и n_{com} операций сравнения. Таким образом, *полная стоимость* вычислений имеет вид

$$n_{total} = k_{inf} n_{inf} + k_{ar} n_{ar} + k_{com} n_{com},$$

где коэффициенты k_{inf}, k_{ar}, k_{com} несут смысл стоимости одной из соответсвующих операций. $k_{inf} n_{inf}$ называется *информационной стоимостью*, а $k_{ar} n_{ar} + k_{com} n_{com}$ — *комбинаторной стоимостью*.

В большинстве реальных задач комбинаторной стоимостью можно пренебречь

бречь, так как её расчёт, как правило, занимает сильно меньше времени, чем для информационной стоимости, и не требует больших объёмов памяти. Это является причиной важности изучения информационной стоимости, ведь она вносит определяющий фактор в общую вычислительную сложность той или иной практической задачи. Более подробный анализ представлен в монографии [4].

1.2 Сложность аппроксимации

Давайте более формально подойдём к определению понятия информационной сложности. Есть несколько подходов, приводящих к различным постановкам. В рамках данной работы мы рассмотрим подход *в среднем*.

Информационная сложность называется *сложностью аппроксимации в среднем* (в дальнейшем будем назвать её просто сложностью аппроксимации) оператора S при заданном пороге ошибки. Существуют достаточно много результатов и по другим постановкам задачи аппроксимации. С ним, а также их теоретическими аспектами, можно ознакомиться в книгах [4] и [5].

Перед тем как дать строгое определение данной величине, введём несколько вспомогательных обозначений. Рассмотрим сепарабельное банахово пространство Q, элементами которого являются функции, определённые на некотором измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Также введём сепарабельное гильбертово пространство H, имеющее норму $\|\cdot\|_H$. Зададим гауссовскую меру μ с нулевым средним на борелевских подмножествах пространства Q. Положим, что

$$e(S,\mu) := \left(\int\limits_Q \|Sf\|_H^2 \mu(df) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Рассмотрим $\mathbf{I}_n$. Пусть это семейство всех возможных отображений $I_n : Q \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, в рамках *стандартной информации*. А за $\mathbf{A}_n$ — семейство всех измеримых отображений $\mathcal{A}_n : \mathbb{R}^n \to H$. В дальнейшем будем осуществлять аппроксимацию S операторами $\widetilde{S}_n$ из следующего семейства:

$$\widetilde{\mathbf{S}}_n := \{\mathcal{A}_n \circ I_n : I_n \in \mathbf{I}_n, \mathcal{A}_n \in \mathbf{A}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Далее введём ряд определений, которые будут основными объектами исследования в представленной работе. *Сложностью аппроксимации* оператора S при пороге ошибки $\varepsilon \in (0,1)$ называется следующая величина:

$$n(\varepsilon) := \min\{n \in \mathbb{N} : \exists \widetilde{S}_n \in \widetilde{\mathbf{S}}_n \;\; e(\widetilde{S}_n) \leqslant \varepsilon e(S,\mu)\},$$

где

$$e(\widetilde{S}_n) := \left(\int\limits_Q \|Sf - \widetilde{S}_n f\|_H^2 \mu(df) \right)^{\frac{1}{2}}$$

представляет из себя ошибку в среднем для $\widetilde{S}_n$.

В данной работе будет рассматриваться решение поставленных задач с помощью *оптимальных конечноранговых аппроксимаций*. Они играют важную роль в данной области математики. Конкретный вид данных оптимальных конечноранговых аппроксимаций также зависит от постановки задачи. Мы приведём определения этого термина:

Оптимальной n-ранговой аппроксимацией для S называется $\widetilde{S}_n \in \widetilde{\mathbf{S}}_n$, для которого выполняется формула

$$e(\widetilde{S}_n) = \inf_{I_n' \in \mathbf{I}_n} \inf_{\mathcal{A}_n' \in \mathbf{A}_n} e(\mathcal{A}_n' \circ I_n').$$

В таком случае, при условии разрешимости задачи, получаем:

$$n(\varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : e(\widetilde{S}_n^{)} \leqslant \varepsilon e(S,\mu)\}, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{1}$$

Делая дальнейшие выводы из выражения (1), констатируем, что для нахождения $n(\varepsilon)$ необходимо исследовать последовательности оптимальных конечноранговых аппроксимаций операторов $(\widetilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Это ведёт к тому, что для дальнейшего решения задачи нужна дополнительная информация о структуре оператора S. В нашей работе мы сосредоточимся на линейном случае, который очень часто встречается в различных задачах. Особый интерес для исследования представляет изучение многопараметрического случая.

В данной работе мы сосредоточимся на многопараметрическом случае.

С точки зрения формального подхода к решению задачи, это означает, что мы будем рассматривать последовательности случайных полей Y_d, $t \in T_d$, $d \in \mathbb{N}$, имеющих траектории в нормированных пространствах $(Q_d, \|\cdot\|_{Q_d})$, $d \in \mathbb{N}$. То есть в многопараметрическом случае мы предполагаем, что размерность множества T_d велика. Исходя из этого, для каждого случайного поля Y_d мы рассматриваем сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1), d \in \mathbb{N}$, которая зависит от двух переменных.

В представленной работе рассматривается случай гильбертова пространства, так как в общей постановке не могут быть получены какие-то конкретные результаты.

Сформулируем определение сложности аппроксимации в случае, когда каждое случайное поле имеет траектории в $L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность случайных полей $Y_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, с траекториями в пространствах $L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Предполагаем, что каждое Y_d имеет нулевое среднее и $\mathbb{E}\,||Y_d||_{2,d}^2 < \infty$, $d \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_{2,d}$ является нормой в пространстве $L_2([0,1]^d)$.

При данной постановке задачи мы можем рассматривать $\mathcal{K}^{Y_d}$ – ковариационный оператор случайного поля Y_d. Для этого объекта верно следующее:

$$(f, \mathcal{K}^{Y_d} g) = cov((f, Y_d), (g, Y_d)), \qquad f, g \in L_2([0,1]^d).$$

$\mathcal{K}^{Y_d}$ – это интегральный оператор, в качестве ядра которого выступает ковариационная функция. То есть

$$\mathcal{K}^{Y_d}(f(t)) = \int\limits_0^1 K^{Y_d}(t,s) f(s) ds, \quad s, t \in [0,1]^d,$$

где $K^{Y_d}(t,s) = cov(Y_d(t), Y_d(s)), t, s \in [0,1]^d$ — ковариация случайного поля Y_d. Предполагается, что она всегда непрерывна.

Известно, что для любого случайного поля Y_d справедливо *разложение Кархунена-Лоэва*:

$$Y_d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{Y_d})^{1/2} \, \xi_k^{Y_d} \, \psi_k^{Y_d}(t), \quad t \in [0,1]^d, \tag{2}$$

где $(\xi_k^{Y_d})_{k\in\mathbb{N}}$ — это независимые случайные величины, удовлетворяющие нормальному закону, со средним 0 и дисперсией 1, $(\lambda_k^{Y_d})_{k\in\mathbb{N}}$ — это невозрастающая последовательность собственных чисел и $(\psi_k^{Y_d})_{k\in\mathbb{N}}$ — это соответствующая последовательность собственных функций оператора $\mathcal{K}^{Y_d}$ поля Y_d с конечным следом

$$\Lambda^{Y_d} := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{Y_d}.$$

Рассмотрим частичные суммы данного разложения:

$$Y_d^{(n)}(t) := \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{Y_d})^{1/2}\, \xi_k^{Y_d}\, \psi_k^{Y_d}(t), \quad t \in [0,1]^d. \tag{3}$$

Данное выражение (см. [11], стр. 51) – это оптимальная n-ранговая аппроксимация для Y_d в $L_2([0,1]^d)$. То есть верна формула:

$$\inf_{\widetilde{Y_d}^{(n)}} \mathbb{E}\, \|Y_d - \widetilde{Y_d}^{(n)}\|_{2,d}^2 = \mathbb{E}\, \|Y_d - Y_d^{(n)}\|_{2,d}^2.$$

Исходя из этого, выражение для сложности аппроксимации в случае пространства $L_2([0,1]^d)$ приобретает вид:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \;=\; \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\, \|Y_d - Y_d^{(n)}\|_{2,d}^2 \leqslant \varepsilon^2\, \mathbb{E}\, \|Y_d\|_{2,d}^2 \Big\}$$

для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$. Выражение $\mathbb{E}\, \|Y_d - Y_d^{(n)}\|_{2,d}^2$ следует понимать как среднеквадратичную ошибку аппроксимации.

Для постулирования условий на последовательности случайных полей очень полезным является спектральное выражение для сложности аппроксимации. Исходя из (2) и (3), имеем:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \;=\; \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{Y_d} \leqslant \varepsilon^2\, \Lambda^{Y_d} \Big\} \tag{4}$$

$$\;=\; \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{Y_d} \geqslant (1-\varepsilon^2)\, \Lambda^{Y_d} \Big\}. \tag{5}$$

Данные выражения можно написать в немного иной (чуть более удобном для

исследования) виде:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{Y_d} \leqslant \varepsilon^2\Big\} \tag{6}$$

$$= \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k^{Y_d} \geqslant (1-\varepsilon^2)\Big\}, \tag{7}$$

где

$$\overline{\lambda}_k^{Y_d} := \frac{\lambda_k^{Y_d}}{\Lambda^{Y_d}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

следует понимать как нормированные собственные числа ковариационного оператора, который соответствует Y_d.

Существует несколько методов изучения сложности аппроксимации, в рамках который получено много важных и актуальных результатов. Далее мы рассмотрим подходы, основанные на теории трактабильности и асимптотическом анализе. Эти подходы являются основными в данной области, стоящей на стыке теории вероятностей и теории информации.

1.3 Трактабильность

Рассмотрим теорию трактабильности и полученные в её рамках результаты. Данный подход является довольно распространённым в задачах оценки сложности аппроксимации. Приведем основные типы трактабильности для последовательностей случайных полей $Y_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих вышеперечисленным условиям. Трактабильность изучается не только для постановки задачи в среднем, но и в других случаях. Например, теория по трактабильности для задач с вероятностной постановкой представлена в следующей монографии ([5], стр. 298-300).

Последовательность случайных полей Y_d, $d \in \mathbb{N}$ называется *W-трактабильной*, если

$$\lim_{d+\varepsilon^{-1}\to\infty} \frac{\ln_+ n^{X_d}(\varepsilon)}{d+\varepsilon^{-1}} = 0.$$

В классе W-трактабильных последовательностей случайных полей выделяют ряд подклассов. Последовательность случайных полей Y_d, $d \in \mathbb{N}$, называется

QP-трактабильной, если $\exists\, C > 0$, $s \geqslant 0$:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant C\, \exp\bigl\{s(1 + \ln \varepsilon^{-1}) \ln_+ d\bigr\}, \quad d \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in (0,1).$$

Последовательность случайных полей Y_d, $d \in \mathbb{N}$, называется *P-трактабильной*, если $\exists\, C > 0$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant C\, d^r \varepsilon^{-s}, \quad d \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in (0,1).$$

Если последовательность не принадлежит к классу W-трактабильных последовательностей, то её называют нетрактабильной. Например, если $n^{X_d}(\varepsilon)$ растёт экспоненциально по d или быстрее, то говорят, что она имеет *проклятие размерности*. Мы привели основные и самые важные классы трактабильности, но существуют и представляют интерес для учёных и другие их представители.

Теперь, когда мы привели примеры различных классов трактабильности, рассмотрим в общих чертах алгоритм, по которому происходят исследования в рамках данной концепции. В теории трактабильности для получения оценок на сложность аппроксимации, как правило, ищут необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности случайных полей к тому или иному классу трактабильности. Поведение сложности аппроксимации для конкретного класса трактабильности обычно хорошо исследовано, поэтому этого достаточно для решения поставленной аппроксимационной задачи.

Приведём некоторые результаты, полученные данным методом, в виде критериев. Нижепредставленные результаты были достигнуты в работах [4], [18] - [20].

Для W-трактабильности достаточно

$$\exists\, \tau \in (0,1)\ :\ \lim_{d\to\infty} \frac{1}{d} \ln\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\lambda}_k^{Y_d})^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} = 0.$$

Для QP-трактабильность необходимо и достаточно

$$\exists\, \gamma \in (0,1)\ :\ \sup_{d\in\mathbb{N}} \Bigl\{\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\lambda}_k^{Y_d})^{1-\frac{\gamma}{\ln_+ d}}\Bigr\} < \infty.$$

Для P-трактабильности необходимо и достаточно

$$\exists\, \tau \in (0,1), \exists\, r \geqslant 0 \,:\, \sup_{d\in\mathbb{N}}\Big\{\frac{1}{d^r}\sum_{k=1}^{\infty}(\overline{\lambda}_k^{Y_d})^{\tau}\Big\} < \infty.$$

1.4 Асимптотический анализ

Рассмотрим теорию асимптотического анализа и полученные на её основе результаты. Данный подход, как и теория трактабильности, является довольно распространённым в задачах оценки сложности аппроксимации. Есть немалое число работ, связанных с методом асимптотического анализа. Для исследования оценки сложности аппроксимации данным методом предлагается фиксировать один из параметров (порог ошибки или размерность параметрического множества). То есть существует два направления исследований в теории асимптотического анализа.

В первом случае рассматривается $\varepsilon \to 0$ и фиксированное $d \in \mathbb{N}$. В рамках такой постановки задачи хорошо изучена методика оценки сложности аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$. В качестве примера работа, основанных на таком подходе, можно рассматривать результаты Лифшица М.А. и Туляковой Е.В из статьи [10].

Во втором случае сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ рассматривается при фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$. В настоящее время такой подход активно используется для исследования различных типов случайных полей. В частности, обширные результаты представлены в следующих статьях: [1], [15] - [17], [25]. Сформулируем теорему:

Теорема 1 *Пусть $(a_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $(b_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность, для которой верно следующее:*

$$\lim_{d\to\infty} b_d = \infty.$$

Рассмотрим невозрастающую функция $q : (0,1) \to \mathbb{R}$ и функцию распределения $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to [0,1]$. Если для любого $\varepsilon \in (0,1)$ выполняется $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$,

то эквивалентны следующие утверждения:

$$(1)\quad \forall x \in \boldsymbol{C}(\mathcal{L}) \quad F_d(x) \to \mathcal{L}(x), \quad d \to \infty;$$
$$(2)\quad \forall \varepsilon \in \boldsymbol{C}(q) \quad \ln n^{Y_d}(\varepsilon) = a_d + q(\varepsilon) b_d + o(b_d), \quad d \to \infty,$$

где $F_d(x)$ определяется следующей формулой:

$$F_d(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{Y_d} \mathbb{1}\left(\frac{|\ln \bar{\lambda}_k^{Y_d}| - a_d}{b_d} \leqslant x \right),$$

где $x \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}$.

Эта теорема является очень важной в теории асимптотического анализа, так как лежит в основе практически всех результатов для $n^{Y_d}(\varepsilon)$ для различных типов случайных полей Y_d. Она активно используется для получения оценок для различных случайных полей конкретного вида. В том числе она использована и в данной работе.

1.5 Тензорные поля

Существует довольно много различных случайных полей, которые обладают тем или иными характеристиками и используются в различных областях науки, но особый интерес для исследования представляют так называемые случайные поля тензорного типа как естественные многопараметрические аналоги случайных процессов. Они представляют собой довольно обширный класс и часто применяются для решения разного рода теоретических и практических задач. Приведём определение.

Пусть $X_1(t), \ldots, X_d(t)$, $t \in [0,1]$, — случайные процессы с траекториями в $L_2([0,1])$, с нулевыми средними и непрерывными ковариациями $K^{X_1}(s,t), \ldots,$ $K^{X_d}(s,t)$, $s,t \in [0,1]$.

Тогда Y_d называется *тензорным произведением* случайных процессов X_1, $\ldots$, X_d (сокращённо записывается как $Y_d = \otimes_{j=1}^d X_j$), если оно имеет ковариацию

$$K^{Y_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} K^{X_j}(t_j, s_j), \quad s,t \in [0,1]^d.$$

Часто на практике выделяются подкласс тензорных произведений, составленных на основе случайных процессов с равными ковариациями. Другими словами, если $K^{X_1} = \ldots = K^{X_d}$, то Y_d называется *тензорной степенью* X_1 (сокращённо записывается как $Y_d = X_1^{\otimes d}$). Случайные поля из данного подкласса часто встречаются в различных задачах математики и физики.

Собственные числа и векторы тензорного произведения Y_d имеют следующую мультипликативную структуру:

$$\prod_{j=1}^{d} \lambda_{k_j}^{X_j}, \quad \prod_{j=1}^{d} \psi_{k_j}^{X_j}, \quad k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}.$$

где $(\lambda_k^{X_j}, \psi_k^{X_j})_{k\in\mathbb{N}}$ — собственные числа и векторы ковариационной функции X_j. Данный вид структуры является довольно удобным для проведения различного рода исследований в рассматриваемой области знаний. В данной работе представлены результаты как для тензорных степеней, так и для тензорных

произведений.

1.6 Примеры случайных полей тензорного типа

Теперь перейдём к описанию примеров. Для удобства сначала будем описывать случайный процесс, а затем случайное поле, являющееся его многопараметрическим аналогом. При этом будем указывать их важные свойства и различные применения.

Винеровский процесс $W(t), t \in [0,1]$ — это гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией:

$$K^W(s,t) = \min\{s,t\}.$$

Для случайного процесса $K^W(t,s)$ известен вид собственных чисел (см. [21]):

$$\lambda_k^W = \frac{1}{\pi^2 (k - \frac{1}{2})^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На его основе можно построить случайное поле, которое называется *броуновским листом* $W_d = W^{\otimes d}$. Данное случайное поле имеет следующую ковариацию:

$$K^{W_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \min\{t_j, s_j\}, \quad t, s \in [0,1]^d.$$

Броуновский лист играет заметную роль в теории вероятностей. Он активно применяется для решения задача, связанные с дифференциальными стохастическими уравнениями (см.[11]), а также является центральным объектом в исчислении Ито для многопараметрического случая (см.[12], [13]).

Броуновский мост $B(t)$, $t \in [0,1]$ — это гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией:

$$K^B(s,t) = \min\{s,t\} - st, \quad t, s \in [0,1]^d.$$

Для случайного процесса $K^B(t,s)$ известен вид собственных чисел (см. [10]):

$$\lambda_k^B = \frac{1}{\pi^2\, k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На его основе можно построить случайное поле, которое называется *броуновской подушкой* $B_d = B^{\otimes d}$. Данное случайное поле имеет следующую ковариацию:

$$K^{B_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \left(\min\{t_j, s_j\} - t_j s_j\right), \quad t, s \in [0,1]^d.$$

Броуновская подушка является важным объектом в различных научных исследованиях. Так, оно активно используется в статистике. Например, для моделирования эмпирического процесса (см. [22]).

Дробное броуновское движение — это гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией:

$$K^{fBm}(t,s) = \frac{1}{2}(t^\gamma + s^\gamma + |t-s|^\gamma), \quad \gamma \in (0,2), t, s \in [0,1].$$

Частым случаем данного процесса является уже рассмотренный винеровский процесс. Для его получения необходимо взять параметр $\gamma = 1$. В данном случае структура собственных чисел имеет уже показанный вид. При остальных значениях параметра γ из допустимого интервала аналитическое выражение собственных чисел не может быть приведено в явном виде. Поэтому в качестве оценки их поведения укажем их асимптотику при $k \to \infty$, которая известна (см. [23]).

$$\lambda_k^{fBm} \sim \frac{\Gamma(1+\gamma)\, \sin\frac{\pi\,\gamma}{2}}{(\pi\, k)^{1+\gamma}}.$$

На основе дробного броуновского движения можно построить *тензорную степень дробного броуновского движения* $B_d = B^{\otimes d}$. Данное случайное поле

имеет следующую ковариацию:

$$K^{fBm_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1}{2}(s_j^\gamma + t_j^\gamma + |s_j - t_j|^\gamma) \right), \quad t,s \in [0,1]^d, \gamma \in (0,2).$$

Рассмотренное нами случайное поле имеет теоретические и практические применения в различных областях физики. Ознакомиться со свойствами и применениями этого случайного поля можно в [26].

Существуют методики центрирования и интегрирования различных случайных процессов с целью получения новых объектов для исследования. Рассмотрим два характерных примера.

В качестве примера центрированного процесса приведём *центрированный винеровский процесс*. Он конструируется на основе стандартного винеровского процесса следующим образом:

$$W^c(t) := W(t) - \int_0^1 W(u)du$$

и имеет следующую ковариацию:

$$K^{W^c}(t,s) = \min\{s,t\} + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) - s - t + \frac{1}{3}, \quad t,s \in [0,1].$$

Для случайного процесса $K^{W^c}(t,s)$ известен вид собственных чисел (см. [27]):

$$\lambda_k^{W^c} = \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В качестве примера интегрированного процесса приведём *интегрированный винеровский процесс*. Он конструируется на основе стандартного винеровского процесса следующим образом:

$$\overline{W}(t) := \int_0^t W(u)du$$

и имеет следующую ковариацию:

$$K^{\overline{W}}(t,s) = \frac{1}{2}st\ \min\{t,s\} - \frac{1}{6}(\min\{t,s\})^3, \quad t,s \in [0,1].$$

Для случайного процесса $K^{\overline{W}}(t,s)$ известен вид собственных чисел (см. [27]):

$$\lambda_k^{\overline{W}} = \frac{1}{m_k^4}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $m_1 < m_2 < \ldots$ — это решения трансцендентного уравнения:

$$\cos x \cdot \cosh x + 1 = 0.$$

К сожалению, данный вид собственный чисел затруднительно использовать для решения рассматриваемых в работе задач, но далее будут представлены различные оценки собственных чисел интегрированного винеровского процесса, которые имеют более удобный для использования в исследованиях вид.

Достаточно подробно данные случайные процессы описываются в статьях [27], [28]. На основе представленных объектов можно строить случайных поля и осуществлять их изучение.

Случайные поля, построенные на основе различных интегрированных процессах, являются интересными объектами для изучения. Далее мы подробно рассмотрим самые важные и интересные их них и приведём результаты по исследованию их сложности аппроксимации.

2 Интегрированные процессы

В данной главе будут подробно рассмотрены следующие два процесса: r-раз интегрированный винеровский процесс и r-раз интегрированный эйлеровский процесс вместе с подробным описанием различных их особенностей и свойств. А также будут приведены асимптотические результаты по оценке сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений данных процессов при различных условиях на их ковариационную структуру.

2.1 Определение интегрированного винеровского процесса

Будем назвать гауссовский случайный процесс $W_r(t)$, $t \in [0,1]$, $r \in \mathbb{N}_0$, *r-раз интегрированным винеровским процессом*, если $W_0 = W$ (винеровский процесс), а для $r > 0$ верна следующая рекуррентная интегральная формула:

$$W_r(t) = \int\limits_0^t W_{r-1}(u)du,$$

где r — это параметр гладкости процесса. Случайный процесс W_r имеет следующую ковариацию:

$$K^{W_r}(t,s) = \int\limits_0^{\min\{t,s\}} \frac{(t-u)^r}{r!}\frac{(s-u)^r}{r!}du, \quad t,s \in [0,1].$$

Построим случайное поле на основе r-раз интегрированного винеровского процесса. Рассмотрим последовательность интегрированных винеровских процессов $W_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$, с корреляционными функциями $\mathcal{K}^{W_r}$, $j \in \mathbb{N}$, соответственно. Под $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ будем понимать неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел. Рассмотрим последовательность случайных полей $\mathrm{W}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, с нулевыми средними и ковариацией вида

$$\mathcal{K}^{\mathrm{W}_r}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}^{W_{r_j}}(t_j,s_j), \quad t,s \in [0,1]^d, d \in \mathbb{N}.$$

Каждый процесс $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, рассматривается как случайный элемент E_{r_j}

пространства $L_2(0,1)$. Случайное поле $\mathbb{W}_d$ будем называть *многопараметрическим r-раз интегрированным винеровским процессом*.

Явный вид собственных чисел, отвечающих $K^{W_{r_j}}(t,s)$, неизвестен, но существует следующая асимптотика при больших значениях индекса k (см.[24]):

$$\lambda_k^{W_{r_j}} = \frac{1}{(\pi(k-\frac{1}{2}))^{2r_j+2}} + O(k^{-2r_j+3}), \quad k \to \infty. \tag{8}$$

2.2 Результаты для интегрированного винеровского процесса

Приведём ряд результатов по оценке сложности аппроксимации многопараметрического r-раз интегрированного винеровского процесса. Для начала сформулируем теорему первого и второго собственных чисел последовательности рассматриваемых процессов из статьи [14]. Именно эти собственные числа играют основную роль, поэтому важными являются нижепредставленные оценки на них.

Теорема 2 *Пусть W_{r_j} — последовательность r-раз интегрированных винеровских процессов. Тогда верны следующие асимптотические оценки:*

$$\begin{aligned} \lambda_1^{W_{r_j}} &= \frac{1}{(r_j!)^2}\left(\frac{1}{(2r_j+2)(2r_j+1)} + O(r_j^{-4})\right), \\ \lambda_2^{W_{r_j}} &= \Theta\left(\frac{1}{(r_j!)^2 r_j^4}\right). \end{aligned}$$

Теперь сформулируем теорему из статьи [14], связанную с применением трактабильности для оценки сложности аппроксимации рассматриваемой последовательности случайных полей.

Теорема 3 *Рассмотрим последовательность случайных полей $\mathbb{W}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, построенную на основе последовательности r-раз интегрированных винеровских процессов $W_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$. $\mathbb{W}_d(t)$ является W-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{j\to\infty} r_j = \infty.$$

$\mathbb{W}_d(t)$ *является QP-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln_+ d} \sum_{k=1}^{d} (1+r_j)^{-2} \ln_+ r_j < \infty,$$

где $\ln_+ 0 := 0$ *и* $\ln_+ x := \max\{1, \ln x\}$ *для* $x > 0$. $\mathbb{W}_d(t)$ *является P-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{j\to\infty} \inf \frac{r_j}{j^s} > 0,$$

для некоторого $s > \frac{1}{2}$.

Данная теорема активно используется при исследование сложности аппроксимации последовательности случайных полей $\mathbb{W}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$.

2.3 Определение интегрированного эйлеровского процесса

Будем называть гауссовский процесс $E_r(t), t \in [0,1]$, имеющий нулевое среднее и ковариацию вида

$$\mathcal{K}^{E_r}(t,s) := \int_{[0,1]^r} \min\{t, x_1\} \min\{x_1, x_2\} \dots \min\{x_r, s\} dx_1 \dots dx_r,$$

где $t, s \in [0,1]$ и $r \in \mathbb{N}$, *r-раз интегрированным эйлеровским процессом*. Данный процесс связан с винеровским случайным процессом формулой

$$E_r(t) = (-1)^{a_1+\dots+a_r} \int\limits_{a_r}^{t} \int\limits_{a_{r-1}}^{t_{r-1}} \dots \int\limits_{0}^{t_2} \int\limits_{0}^{t_1} W(s) ds dt_1 \dots dt_{r-1}, \quad t \in [0,1],$$

где $a_{2k-1} := 1$, $a_{2k} := 0$, $k \in \mathbb{N}$. Для любых $s, t \in [0,1]$ верно:

$$\mathcal{K}^{E_r}(t,s) = (-1)^{r+1} \frac{2^{2r}}{(2r+1)!} \Big(\mathbf{E}_{2r+1}\big(\frac{1}{2}|s-t|\big) - \mathbf{E}_{2r+1}\big(\frac{1}{2}|s+t|\big) \Big),$$

где $\mathbf{E}_n$ — это n-ая степень полинома Эйлера, которая может быть найдена как коэффициент производящей функции:

$$\frac{2e^{xt}}{e^x+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{E}_r(x)\frac{t^r}{r!} \quad \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

Благодаря данному свойству, процесс и получил своё название.

Теперь построим случайное поле на основе r-раз интегрированного эйлеровского процесса. Рассмотрим последовательность интегрированных эйлеровских процессов $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$, с корреляционными функциями $\mathcal{K}^{E_r}$, $j \in \mathbb{N}$, соответственно. Под $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ будем понимать неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел. Рассмотрим последовательность случайных полей $\mathbb{E}_d(t), t \in [0,1]^d, d \in \mathbb{N}$, с нулевыми средними и ковариациями вида

$$\mathcal{K}^{\mathbb{E}_r}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}^{E_{r_j}}(t_j, s_j), \quad t, s \in [0,1]^d, d \in \mathbb{N}.$$

Каждый процесс $E_{r_j}(t), t \in [0,1]$, рассматривается как случайный элемент E_{r_j} пространства $L_2(0,1)$. $\mathbb{E}_d$ будем называть *многопараметрическим r-раз интегрированным эйлеровским процессом*. Для случайного процесса $K^{E_{r_j}}(t,s)$ известен вид собственных пар $K^{E_{r_j}}$.

$$\lambda_k^{E_{r_j}} = \frac{1}{\left(\pi(k-\frac{1}{2})\right)^{2r_j+2}}, \quad \psi_k^{E_{r_j}}(t) = \sqrt{2}\sin\left(\pi(k-\frac{1}{2})t\right),$$

где $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$.

2.4 Результаты для интегрированного эйлеровского процесса

Приведём ряд результатов по оценке сложности аппроксимации многопараметрического r-раз интегрированного винеровского процесса. Сформулируем теорему из статьи [14], связанную с применением трактабильности для оценки сложности аппроксимации рассматриваемой последовательности случайных

полей.

Теорема 4 *Рассмотрим последовательность случайных полей* $\mathbb{E}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, *построенную на основе последовательности* r*-раз интегрированных эйлеровских процессов* $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$. $\mathbb{E}_d(t)$ *является W-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{j\to\infty} r_j = \infty.$$

Интересным является тот факт, про при невыполнение вышеприведённого условия мы сталкиваемся с проклятием размерности. $\mathbb{E}_d(t)$ *является QP-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln_+ d} \sum_{k=1}^{d} (1+r_j) 3^{-2r_j} < \infty,$$

где $\ln_+ d := \max\{1, \ln d\}$. $\mathbb{E}_d(t)$ *является P-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2\tau r_j} < \infty$$

для некоторого $\tau \in (0,1)$.

Представленная теорема активно используется при исследование сложности аппроксимации последовательности случайных полей $\mathbb{E}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$. Далее сформулируем теорему из диссертации [25] об исследовании сложности аппроксимации методом асимптотического анализа.

Пусть выполняется следующее условие на собственные числа последовательности случайных процессов $E_{r_j}(t)$:

$$\frac{\lambda_2^{Er_j}}{\lambda_1^{Er_j}} = 3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j(\ln j)^p}, \quad j \to \infty, \tag{9}$$

где $c > 0$, $p \in \mathbb{R}$. Особо интересен случай, когда условие (9) выполняется для $p = 1$. Он был подробно рассмотрен А. Хартовым в статье [1]. Был получен

следующий результат:

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon) = D_c^{-1}(1-\varepsilon^2)\ln d + o(\ln d), \quad d \to \infty, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где D_c — это функция распределения Дикмана со степенью свёртки c.

Как мы видим, рассматриваемый объект активно изучается в различных работах.

3 Оценка сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений

В данной главе будет представлен ряд теорем об оценке асимптотики сложности аппроксимации для последовательности случайных полей, построенных на последовательности r-раз интегрированных эйлеровских процессов при различных условиях на структуру собственный чисел данных случайных процессов и на структуру самой последовательности.

3.1 Случай предельнопостоянной последовательности r_j

Рассмотрим последовательность случайных полей $\mathbb{E}_d(t), t \in [0,1]^d, d \in \mathbb{N}$, основанных на последовательности $E_{r_j}(t), t \in [0,1]$, r-раз интегрированных эйлеровских процессов. Напомним, что под r_j мы понимаем неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел. В первом параграфе данной главы изучим случай, когда предел данной последовательности конечен. Для составления оценок при таких условиях нам будут полезны нижепредставленные леммы о сходимости случайных величин:

Лемма 1 *Если* $X_n \xrightarrow{D} X$ *и* $Y_n \to 0$, *то* $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

Лемма 2 *Если* $X_n \xrightarrow{D} X$ *и* $Y_n \to 1$, *то* $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{D} X$.

Сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 5 *Если* $r_j = r < \infty$, *начиная с некоторого* $j = j_0$, *тогда при всех достаточно больших значениях* d:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\mathbb{E}_d}}{\Lambda^{\mathbb{E}_d}} \mathbb{1}\left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda_k^{\mathbb{E}_d}}{\Lambda^{\mathbb{E}_d}}\right) - a_d}{b_d} \leqslant x \right) \to \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

где

$$a_d = c_1 d \tag{11}$$

$$b_d = \sqrt{(c_2 - c_1^2)d}, \tag{12}$$

а константы c_1 и c_2 определяются следующими формулами:

$$c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} -\ln\left(\frac{\lambda_k^{E_{r_{j_0}}}}{\Lambda^{E_{r_{j_0}}}}\right)\frac{\lambda_k^{E_{r_{j_0}}}}{\Lambda^{E_{r_{j_0}}}}$$
$$c_2 = \sum_{k=1}^{\infty} -\ln^2\left(\frac{\lambda_k^{E_{r_{j_0}}}}{\Lambda^{E_{r_{j_0}}}}\right)\frac{\lambda_k^{E_{r_{j_0}}}}{\Lambda^{E_{r_{j_0}}}}$$

Доказательство теоремы 5. Построим на некотором случайном пространстве независимые случайные величины $\hat{U}_j$ со следующим распределением:

$$\mathbb{P}\left(\hat{U}_j = -\ln\Big(\frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}}\Big)\right) = \frac{\frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}}}{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^{2r_j+2}}}, \quad k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

Так как с некоторого $j = j_0$ мы имеем $r_j = r < \infty$, то случайные величины $\hat{U}_{j_0-1+n}, n \in \mathbb{N}$ одинаково распределены. Следовательно, для них справедлива центральная предельная теорема:

$$\frac{\sum\limits_{j=j_0}^{d}\big(\hat{U}_j - (d-j_0)\mathbb{E}\,\hat{U}_{j_0}\big)}{\sqrt{d-j_0}\sqrt{\mathbf{Var}\,\hat{U}_{j_0}}} \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Верно, что $\frac{\sqrt{d-j_0}}{\sqrt{d}} \to 1$. Следовательно, по лемме 2

$$\frac{\sum\limits_{j=j_0+1}^{d}(\hat{U}_j - \mathbb{E}\,\hat{U}_j)}{\sqrt{d}\sqrt{\mathbf{Var}\,\hat{U}_j}} \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Мы знаем, что $\frac{\sum\limits_{j=0}^{j_0}(\hat{U}_j - \mathbb{E}\,\hat{U}_j)}{\sqrt{d}\sqrt{\mathbf{Var}\,\hat{U}_j}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Следовательно, по лемме 1

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{d}(\hat{U}_j - \mathbb{E}\,\hat{U}_j)}{\sqrt{d}\sqrt{\mathbf{Var}\,\hat{U}_j}} \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Отсюда заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\mathbb{E}_d}}{\Lambda^{\mathbb{E}_d}} \mathbb{1}\left(\frac{\ln(\frac{\lambda_k^{\mathbb{E}_d}}{\Lambda^{\mathbb{E}_d}} - a_d)}{b_d} \leqslant x \right) \to \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

где a_d и b_d определяются соответственно из (11) и (12). Теорема доказана. □

Для того чтобы использовать выражение, справедливость которого доказана выше, для нахождения асимптотики сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$, необходимо привести следующую теорему из статьи [1].

Теорема 6 *Пусть $(a_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — некая последовательность, а $(b_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — положительная последовательность, для которой верно, что $b_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть $q : (0,1) \to \mathbb{R}$ — невозрастающая функция, и функция распределения G удовлетворяет уравнению $q(\varepsilon) = G^{-1}(1-\varepsilon^2)$ для всех $\varepsilon \in C(q)$. Тогда для асимптотики*

$$\ln n^{X_d}(\varepsilon) = a_d + q(\varepsilon)(1-\varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \to \infty, \varepsilon \in C(q)$$

необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$\lim_{d\to\infty} G_{a_d,b_d}^{X_d} = G(x), \quad x \in C(q)$$

Сформулируем и докажем теорему об асимптотике сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ для случая, когда последовательность r_j имеет конечный предел.

Теорема 7 *Если $r_j = r < \infty$, начиная с некоторого $j = j_0$, тогда при всех достаточно больших значениях d:*

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \to \infty$$

где a_d и b_d определяются соответственно из (11) *и* (12)*, а $\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ — квантиль нормального закона.*

Доказательство теоремы 7. Справедливость данной теоремы следует из теоремы 6, если в качестве функции G рассматривать Φ. □

3.2 Критерий ограниченности сложности аппроксимации

Перейдём к следующему случаю. Мы также будем рассматривать последовательность случайных полей $\mathbb{E}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, основанных на последовательности $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, r-раз интегрированных эйлеровских процессов, но теперь исследование сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ будет проводиться при условии, что последовательность $r_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Для начала найдём критерии ограниченности и неограниченности $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$. Для решения данной задачи приведём две теоремы из статьи [1]. Первая теорема позволяет получить условие неограниченности сложности аппроксимации.

Теорема 8 *Рассмотрим последовательность случайных процессов X_j, $j \in \mathbb{N}$ и построим на её основе последовательность случайных полей Y_d. В таком случае эквивалентны условия:*

$$(1) \quad \lim_{d\to\infty} n^{Y_d}(\varepsilon) = \infty, \quad \varepsilon \in (0,1);$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{X_j} = \infty.$$

Вторая теорема, в свою очередь, позволяет получить условие ограниченности сложности аппроксимации.

Теорема 9 *Рассмотрим последовательность случайных процессов X_j, $j \in \mathbb{N}$ и построим на её основе последовательность случайных полей Y_d. В таком случае эквивалентны условия:*

$$(1) \quad \sup_{d\in\mathbb{N}} n^{X_d}(\varepsilon) < \infty, \quad \varepsilon \in (0,1);$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{X_j} < \infty.$$

Теперь докажем теорему, которая позволит нам найти требуемый критерий для $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$. В целях лаконичности изложения мы можем объединить условия ограниченности и неограниченности в один критерий.

Теорема 10 *1) Нижепредставленные условия эквивалентны.*

$$(1)\quad \lim_{d\to\infty} n^{X_d}(\varepsilon) = \infty, \quad \varepsilon \in (0,1);$$
$$(2)\quad \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2} = \infty.$$

2) Нижепредставленные условия эквивалентны.

$$(1)\quad \sup_{d\in\mathbb{N}} n^{X_d}(\varepsilon) < \infty, \quad \varepsilon \in (0,1);$$
$$(2)\quad \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2} < \infty.$$

Доказательство теоремы 10. Исходя из теорем 8 и 9 и вида собственных чисел r-раз интегрированного эйлеровского процесса, представленных в предыдущей главе, рассмотрим поведение ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{E_{r_j}}$$

Для начала произведём оценку ряда сверху.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{E_{r_j}} &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \\
&\leqslant \left(1+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{3}{2k-1}\right)^2\right)\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2} \\
&\leqslant C_1\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2}.
\end{aligned}$$

Далее произведём оценку ряда снизу.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{E_{r_j}} &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \\
&\geqslant C_2\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2}.
\end{aligned}$$

Из вышеприведённых вычислений и теорем 8 и 9 заключаем, что поведение сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ зависит от поведения ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2}$, что влечёт за собой выполнение теоремы. Теорема доказана. $\square$

Мы видим, что ограниченность или неограниченность сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ зависит от поведения ряда, составленного из нормированных вторых собственных чисел последовательности r-раз интегрированного эйлеровского процесс. Далее мы будем активно использовать этот факт, накладывая некоторые естественные условия на поведение данных собственных чисел. Нам будет особенно интересен случай при которой, сложность аппроксимации неограничена. Именно такая ситуация исследуется с помощью асимптотического анализа.

3.3 Случай $r_j \to \infty$

3.3.1 Теоретические основы

Для оценки сложности аппроксимации рассматриваемой последовательности случайных полей мы будем использовать нижепредставленную теорему из статьи [1].

Теорема 11 *Пусть $(a_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — это некоторая последовательность, а $(b_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — это положительная последовательность, для которой верно, что $b_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть G — саморазложимая функция распределения с триплетом (γ, σ^2, L), где $L(x) = 0, x < 0$. Предположим, что невозрастающая функция $q : (0,1) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $q(\varepsilon) = G^{-1}(1-\varepsilon^2)$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$, и верно, что*

$$\lim_{d\to\infty} \max_{j=1,\dots,d} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} \mathbb{1}\left(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} < e^{-\tau b_d}\right) = 0, \quad \tau > 0. \tag{13}$$

В таком случае для асимптотики

$$\ln n^{X_d}(\varepsilon) = a_d + q(\varepsilon) b_d + o(b_d), \quad d \to \infty, \varepsilon \in (0,1)$$

необходимо и достаточно:

$$\text{(A)}\quad \lim_{d\to\infty}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{N}\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}\mathbb{1}\Big(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}<e^{-\tau b_d}\Big)=-L(x),\quad x>0,\tau>0; \tag{14}$$

$$\text{(B)}\quad \lim_{d\to\infty}\frac{1}{b_d}\Big(\sum_{j=1}^{d}M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-a_d\Big)=\gamma+\int\limits_0^{\tau}\frac{x^3dL(x)}{1+x^2}$$

$$-\int\limits_{\tau}^{\infty}\frac{xdL(x)}{1+x^2},\quad \tau>0; \tag{15}$$

$$\text{(C)}\quad \lim_{\tau\to 0}\overline{\lim_{d\to\infty}}\frac{1}{b_d^2}\sum_{j=1}^{d}\Big(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-\big(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\big)^2\Big)$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\underline{\lim_{d\to\infty}}\frac{1}{b_d^2}\sum_{j=1}^{d}\Big(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-\big(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\big)^2\Big)=\sigma^2,\quad \tau>0, \tag{16}$$

где

$$M_{p,N}^{X_{1,j}}(x)=\sum_{k=1}^{N}|\ln\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}|\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}\mathbb{1}(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}\geqslant e^{-x}),\quad x\geqslant 0,p\in\{1,2\},$$

а $N=\infty$ или $N\in\mathbb{N}$, для которого выполняется следующее выражение:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}<\infty. \tag{17}$$

Для начала удостоверимся, что условий теоремы 11 выполняются для рассматриваемой нами последовательности случайных процессов. Рассмотрим след, соответствующий последовательности r-раз интегрированных эйлеровских процессов E_{r_j}:

$$\Lambda^{E_{r_j}}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{E_{r_j}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi(k-\frac{1}{2}))^{2r_j+2}}=\frac{1}{\omega_{r_j}}(\frac{2}{\pi})^{2r_j+2},$$

где $\omega_{r_j} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \right)^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. При $j \to \infty$ мы имеем

$$\bar{\lambda}_1^{E_{r_j}} = \omega_{r_j} \to 1. \tag{18}$$

На основе данных выкладок можно заключить, что условие (13) выполняется. Остальные условия теоремы 11 выполняются автоматически на основе той теоретической модели, что была рассмотрена в предыдущей главе.

Теперь будем искать асимптотику $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ при некоторых предположениях на структуру ковариационного оператора E_{r_j}. Как было показано в теореме 10, поведение сложности аппроксимации зависит от ряда, составленного из вторых нормированных чисел последовательности r-раз интегрированных эйлеровских процессов. Исходя из этого, мы будем решать задачу при следующих естественных спектральных условиях:

$$3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j^{\alpha}(\ln j)^p}, \quad c > 0, \alpha \in (0,1], p \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

Случай $p > 1$ и $\alpha = 1$ рассматривать не имеет смысла, так как он соответствует ограниченной сложности аппроксимации по теореме 10. Случай $p = 1$, $\alpha = 1$ исследован в статье [1]. Был получен следующий результат:

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon) = D_c^{-1}(1-\varepsilon^2)\ln d + o(\ln d), \quad d \to \infty, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где D_c — это функция распределения Дикмана со степенью свёртки c.

Разделим исследование $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ на два случая: $\alpha = 1$ и $\alpha \in (0,1)$.

3.3.2 Первый случай

Сформулируем и докажем теорему для первого случая.

Теорема 12 *Пусть для последовательности интегрированных эйлеровских процессов E_{r_j}, $j \in \mathbb{N}$ верно следующее условие:*

$$\bar{\lambda}_2^{E_{r_j}} = 3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j(\ln j)^p}, \quad c > 0, \ p \neq 1.$$

Пусть $\mathbb{E}_d$, $d \in \mathbb{N}$, — последовательность тензорных произведений $E_{r_j}(t)$, $t \in$

$[0,1]^d$, *тогда верна следующая асимптотика для сложности аппроксимации:*

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \to \infty,$$

где $a_d = \frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}}$, $b_d = \frac{\sqrt{c}(\ln\frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}$,
$\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ — *квантиль нормального закона.*

Можно показать, что $a_d \sim (\ln d)^{2-p}$

Доказательство теоремы 12. Начнём доказательство с нахождения достаточного числа собственных чисел N, руководствуясь условием (17) из теоремы 11. Для этого проведём оценку выражения

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=3}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{E_{r_j}}$$

при $d \to \infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=3}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{E_{r_j}} &= \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \\ &\leqslant C_1\sum_{j=1}^{d}5^{-2r_j-2},\end{aligned}$$

где $C_1 = 1 + \sum\limits_{k=4}^{\infty}(\frac{5}{2k-1})^2 < \infty$. Исходя из условия (19), имеем:

$$5^{-2r_j-2} \sim \frac{1}{\left(\frac{j}{c}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln 5}{\ln 3}}}.$$

Так как ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{j}{c}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln 5}{\ln 3}}}$$

сходится, то и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}5^{-2r_j-2}$$

сходится.

Принимая во внимание условие (17) из теоремы 11 и условие (18), нам достаточно рассмотреть $N = 2$. Пусть

$$b_d = \frac{\sqrt{c}(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}.$$

Для любого $\tau > 0$ и при всех достаточно больших d верно, что

$$\frac{j(\ln \frac{j}{c})^p}{c} \leqslant \frac{d(\ln \frac{d}{c})^p}{c} = \exp\{\ln \frac{d}{c} + p \ln \ln \frac{d}{c}\} \leqslant \exp\{\frac{\tau\sqrt{c}(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}\}. \qquad (20)$$

Для доказательства теоремы нам необходимо и достаточно проверить выполнение условий (14) - (16) из теоремы 11 при условии $G = \Phi$ с триплетом $(0, 1, 0)$. Руководствуясь структурой триплета, будем сразу записывать требуемый вид условий, а затем выражать их в терминах j, руководствуясь сходимостью, показанной выше. Проверим выполнение условия (A):

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} \mathbb{1}(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} < e^{-\tau b_d}) = 0, \quad \tau > 0.$$

Переписывая в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{c}{j(\ln \frac{j}{c})^p} \mathbb{1}\left(\frac{j(\ln \frac{j}{c})^p}{c} > \exp\left\{\frac{\tau c(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}\right\}\right).$$

В силу условия (20) индикатор данного выражения обращается в нуль. Следовательно, условие (A) выполняется. Проверим выполнение условия (B):

$$\lim_{d\to\infty} \frac{1}{b_d}\left(\sum_{j=1}^{d} M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - a_d\right) = 0, \quad \tau > 0;$$

Переписывая $M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)$ в терминах r_j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}} \mathbb{1}\left(\frac{j(\ln \frac{j}{c})^p}{c} \leqslant \exp\left\{\frac{\tau c(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}\right\}\right).$$

В силу условия (20) индикатор данного выражения обращается в единицу. Пусть

$$a_d = \frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}}.$$

Ничего более точного при условии (19) про a_d сказать невозможно. Чтобы лучше узнать поведение a_d, необходимо уточнить асимптотику. Видим, что

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\sqrt{3-p}}{\sqrt{c}(\ln\frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}} - \frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}} \right) = 0.$$

Следовательно, условие (B) выполняется. Проверим выполнение условия (C). Для удобства разобьём данное условие на два, каждое из которых должно выполняться.

$$\lim_{\tau\to 0} \overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^{d} \Big(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - \big(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\big)^2 \Big) = 1;$$

$$\lim_{\tau\to 0} \underline{\lim_{d\to\infty}} \frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^{d} \Big(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - \big(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\big)^2 \Big) = 1.$$

В первую очередь оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{d} \big(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\big)^2.$$

Переписывая его в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(\ln(\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p))^2}{(\frac{j}{c})^2(\ln\frac{j}{c})^{2p}} \mathbb{1}\left(\frac{j(\ln\frac{j}{c})^p}{c} \leqslant \exp\left\{ \frac{\tau c(\ln\frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}} \right\} \right).$$

В силу условия (20) индикатор данного выражения обращается в единицу. Кроме того, верно следующее:

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(\ln(\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p))^2}{(\frac{j}{c})^2(\ln\frac{j}{c})^{2p}} \sim \sum_{j=c_j}^{d} \frac{1}{(\frac{j}{c})^2(\ln\frac{j}{c})^{p-2}},$$

где $c_j = \lceil c \rceil + 1$. Такой ряд сходится. Обозначим число, к которому он сходится,

за E_{2_1}. Далее оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{d} M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d).$$

Переписывая его в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(\ln(\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p))^2}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p} \mathbb{1}\left(\frac{j(\ln\frac{j}{c})^p}{c} \leqslant \exp\left\{\frac{\tau c(\ln\frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}\right\}\right).$$

В силу условия (20) индикатор данного выражения обращается в единицу. Кроме того, верно следующее:

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(\ln(\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p))^2}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p} \sim \sum_{j=c_j}^{d} \frac{1}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^{p-2}},$$

где $c_j = \lceil c \rceil + 1$. Проведём дальнейшую оценку с учётом этой эквивалентности. Для начала проведём оценку сверху:

$$\begin{aligned}\sum_{j=c_j}^{d} \frac{1}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^{p-2}} &\leqslant c\int\limits_{c_j-1}^{d} \frac{(\ln\frac{x}{c})^{2-p} d(\frac{x}{c})}{\frac{x}{c}} \\ &= \frac{c(\ln\frac{d}{c})^{3-p}}{3-p} - \frac{c(\ln\frac{c_j-1}{c})^{3-p}}{3-p}.\end{aligned}$$

Далее проведём оценку снизу:

$$\begin{aligned}\sum_{j=c_j}^{d} \frac{1}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^{p-2}} &\geqslant c\int\limits_{c_j}^{d} \frac{(\ln\frac{x}{c})^{2-p} d(\frac{x}{c})}{\frac{x}{c}} \\ &= \frac{c(\ln\frac{d}{c})^{3-p}}{3-p} - \frac{c(\ln\frac{c_j}{c})^{3-p}}{3-p}.\end{aligned}$$

Видим, что

$$\lim_{d\to\infty} \frac{3-p}{c\ln\frac{d}{c}}\left(\frac{c(\ln\frac{d}{c})^{3-p}}{3-p} - \frac{c(\ln\frac{c_j-1}{c})^{3-p}}{3-p} - E_{2_1}\right) = 1,$$

а также

$$\lim_{d\to\infty}\frac{3-p}{c\ln\frac{d}{c}}\left(\frac{c(\ln\frac{d}{c})^{3-p}}{3-p}-\frac{c(\ln\frac{c_j}{c})^{3-p}}{3-p}-E_{2_1}\right)=1,$$

Из данных вычислений следует, что условие (C) выполняется. Резюмируя, мы доказали, выполняются условия (14) - (16) из теоремы 11 для случая, когда $G=\Phi$. Так как ранее мы показали, что остальные условия выполняются для рассматриваемой нами последовательности случайных процессов, то теорема доказана. $\square$

3.3.3 Второй случай

Прежде чем перейти к следующему случаю, сформулируем теорему из статьи [2]. Она поможет нам в составлении доказательства.

Теорема 13 *Пусть l — медленно растущая функция, локально ограниченная на $[X,\infty]$, и $\alpha>-1$, тогда при $d\to\infty$*

$$\int\limits_X^d t^\alpha l(t)dt\sim\frac{d^{\alpha+1}l(d)}{\alpha+1}.$$

Теперь сформулируем и докажем теорему для случая $\alpha\in(0,1)$. Данный случай также предполагает, что $r_j\to\infty$ при $j\to\infty$

Теорема 14 *Пусть для последовательности интегрированных эйлеровских процессов E_{r_j} верно следующее условие:*

$$\bar{\lambda}_2^{E_{r_j}}\sim\frac{c}{j^\alpha(\ln j)^p},\quad c>0,\alpha\in(0,1),p\in\mathbb{R}.$$

Пусть $\mathbb{E}_d$, $d\in\mathbb{N}$, — последовательность тензорных произведений $E_{r_j}(t)$, $t\in[0,1]^d$, тогда

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)=a_d+\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)b_d+o(b_d),\quad d\to\infty,$$

где $a_d=\sum\limits_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}$, $b_d=c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}$, $c_\alpha=\sqrt{\frac{c\ln(2N_\alpha-1)}{\ln 3}}\alpha$, $N_\alpha=$

$\lfloor \frac{e^{\frac{\ln 3}{\alpha}}+1}{2} \rfloor$, $\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ — *квантиль нормального закона.*

Можно показать, что $a_d \sim d^{1-\alpha}(\ln d)^{1-p}$

Доказательство теоремы 14. Начнём доказательство с нахождения достаточного числа собственных чисел N, руководствуясь условием (17) из теоремы 11. Для этого проведём оценку выражения

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=N}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{E_{r_j}}$$

при $d \to \infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=N}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{E_{r_j}} &= \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}}\\ &\leqslant C_N\sum_{j=1}^{d}(2N-1)^{-2r_j-2},\end{aligned}$$

где константа $C_N = 1 + \sum\limits_{k=2N-2}^{\infty}(\frac{2N-2}{2k-1})^2 < \infty$. Принимая во внимание условие (19), имеем:

$$(2N-1)^{-2r_j-2} \sim \frac{1}{\left((\frac{j}{c})^{\alpha}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2N-1)}{\ln 3}}}.$$

Так как ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left((\frac{j}{c})^{\alpha}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2N-1)}{\ln 3}}}$$

сходится при $N > \frac{e^{\frac{\ln 3}{\alpha}}+1}{2}$, то и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2N-1)^{-2r_j-2}$$

сходится при $N > \frac{e^{\frac{\ln 3}{\alpha}}+1}{2}$.

Принимая во внимание условие (17) из теоремы 11 и условие (18), нам

достаточно рассмотреть $N = N_\alpha$, где $N_\alpha = \lfloor \frac{e^{\frac{\ln 3}{\alpha}}+1}{2} \rfloor$. Пусть

$$b_d = c_\alpha \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\ln \frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}},$$

где $c_\alpha = \sqrt{\frac{c\ln(2N_\alpha-1)}{\ln 3}}\alpha$. Для любого $\tau > 0$ и при всех достаточно больших d верно, что

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha \ln^p \frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}} &\leqslant \left(\left(\frac{d}{c}\right)^\alpha \ln^p \frac{d}{c}\right)^{\frac{\ln(2N_\alpha-1)}{\ln 3}} \\
&= \exp\left\{\frac{\ln(2N_\alpha-1)}{\ln 3}\left(\alpha \ln \frac{d}{c} + p \ln\ln \frac{d}{c}\right)\right\} \\
&\leqslant \exp\left\{\tau c_\alpha \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\ln \frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Для доказательства теоремы нам необходимо и достаточно проверить выполнение условий (14) - (16) из теоремы 11 при условии $G = \Phi$ с триплетом $(0, 1, 0)$. Руководствуясь структурой триплета, будем сразу записывать требуемый вид условий, а затем выражать их в терминах j, руководствуясь сходимостью, показанной выше. Проверим выполнение условия (A):

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} \mathbb{1}(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} < e^{-\tau b_d}) = 0, \quad \tau > 0.$$

Переписывая в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=2}^{N_\alpha} \frac{1}{\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha \ln^p \frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}} \mathbb{1}\left(\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha \ln^p \frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}} > \exp\left\{\tau c_\alpha \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\ln \frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}\right).$$

В силу условия (21) индикатор данного выражения для всех k обращается в нуль. Следовательно, условие (A) выполняется. Проверим выполнение условия

(B):

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{b_d}\left(\sum_{j=1}^{d}M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-a_d\right)=0,\quad \tau>0;$$

Переписывая $M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)$ в терминах r_j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln\left(3^{2r_j+2}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(3^{2r_j+2}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\mathbb{1}\left(\left(\left(\frac{j}{c}\right)^{\alpha}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}\leqslant\exp\left\{\tau c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}\right).$$

В силу условия (21) индикатор данного выражения для всех k обращается в единицу. Пусть

$$a_d=\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln\left(3^{2r_j+2}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(3^{2r_j+2}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}.$$

Ничего более точного при условии (19) про a_d сказать невозможно. Чтобы лучше узнать поведение a_d, необходимо уточнить асимптотику. Видим, что

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}}\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln\left(3^{2r_j+2}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(3^{2r_j+2}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}-\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln\left(3^{2r_j+2}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(3^{2r_j+2}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\right)=0.$$

Исходя из этого, условие (B) выполняется. Проверим выполнение условия (C). Для удобства разобьём данное условие на два, каждое из которых должно выполняться. Первое условие имеет вид:

$$\lim_{\tau\to 0}\overline{\lim_{d\to\infty}}\frac{1}{b_d^2}\sum_{j=1}^{d}\left(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-\left(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\right)^2\right)=1.$$

Второе условие выглядит имеет вид:

$$\lim_{\tau\to 0}\underline{\lim_{d\to\infty}}\frac{1}{b_d^2}\sum_{j=1}^{d}\left(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-\left(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\right)^2\right)=1.$$

В первую очередь оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{d}\big(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\big)^2.$$

Переписывая его в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln^2\big((\frac{j}{c})^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\big)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\Big(\big(\frac{j}{c}\big)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\Big)^{\frac{2\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\mathbb{1}\left(\left(\Big(\frac{j}{c}\Big)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}\leqslant\exp\left\{\tau c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}\right).$$

В силу условия (21) индикатор данного выражения для всех k обращается в единицу. Для рассматриваемого ряда верно:

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln^2\big((\frac{j}{c})^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\big)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\Big(\big(\frac{j}{c}\big)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\Big)^{\frac{2\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\sim\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{(\frac{j}{c})^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{j}{c})^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}},$$

где $c_j=\lceil c\rceil+1$. Проведём дальнейшую оценку с учётом этой эквивалентности. Для оценки интеграла будем использовать теорему 13. Для начала оценим ряд сверху:

$$\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{(\frac{j}{c})^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{j}{c})^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}\leqslant\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\int\limits_{c_j-1}^{d}\frac{d(\frac{x}{c})}{(\frac{x}{c})^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{x}{c})^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}$$

$$\sim\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\big(\frac{d}{c}\big)^{1-\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{d}{c})^{2-\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}.$$

Далее оценим ряд снизу:

$$\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}} \geqslant \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\int\limits_{c_j}^{d}\frac{d(\frac{x}{c})}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}$$

$$\sim \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{d}{c})^{2-\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}.$$

Далее оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{d} M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d).$$

Переписывая его в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln^2\left((\frac{j}{c})^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\mathbb{1}\left(\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}\leqslant\exp\left\{\tau c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}\right).$$

В силу условия (21) индикатор данного выражения для всех k обращается в единицу. Для рассматриваемого ряда верно, что

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln^2\left((\frac{j}{c})^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}} \sim \sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}},$$

где $c_j = \lceil c\rceil + 1$. Проведём дальнейшую оценку с учётом данной эквивалентности. Для оценки интеграла будем использовать теорему 13. Для начала оценим ряд сверху:

$$\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}} \leqslant \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\int\limits_{c_j-1}^{d}\frac{d(\frac{x}{c})}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}$$

$$\sim \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{d}{c})^{2-\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}.$$

Далее оценим ряд снизу:

$$\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}} \geqslant \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\int\limits_{c_j}^{d}\frac{d(\frac{x}{c})}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}$$

$$\sim \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{d}{c})^{2-\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}.$$

Теперь, используя полученные выше оценки на рассматриваемые ряды и предположения о структуре последовательности b_d, проверим, выполняется ли условие (C). Для первой части выражения наблюдаем, что

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{c_\alpha^2\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\alpha}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-p}}\left(\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{d}{c})^{2-\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\right)=1.$$

Далее для второй части выражения мы наблюдаем, что

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{c_\alpha^2\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\alpha}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-p}}\left(\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}(\ln\frac{d}{c})^{2-\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\right)=0.$$

Из проведённых выше вычислений непосредственно следует, что условие (C) выполняется. Резюмируя, нами было доказано, что выполняются условия (14) - (16) из теоремы 11 для случая, когда $G=\Phi$. Так как ранее мы показали, что остальные условия теоремы 11 выполняются для рассматриваемой нами последовательности случайных процессов, то можем заключить, что теорема доказана. $\square$

4 Оценка сложности аппроксимации тензорной степени

В данной главе доказываются необходимые и достаточные условия для существования некоторой оценки сложности аппроксимации последовательности тензорной степени при широких условиях на собственные числа ковариационного оператора случайного процесса, на основе которого она конструируется, а также приводятся примеры известных процессов, которые удовлетворяют данным условиям на собственные числа.

4.1 Полученные результаты

Введем величину

$$M(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-u}, \quad u \geqslant 0$$

$M_0 = 1$.

Лемма 3 *Пусть $M(\gamma) < \infty$ при некотором $\gamma > 0$. Тогда для любого такого γ и любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant d \cdot \frac{\ln M(\gamma)}{\gamma} + |\ln \varepsilon^2| \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma}. \tag{22}$$

Доказательство. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$, и $\gamma > 0$, как указано в формулировке леммы. Заметим, что

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}\right)^d = M(\gamma)^d < \infty. \tag{23}$$

Введем величину

$$\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon) := \bar{\lambda}^{Y_d}_{n^{Y_d}(\varepsilon)}. \tag{24}$$

Несложно видеть, что

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{n^{Y_d}(\varepsilon)} 1 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_m^{Y_d}\geqslant\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}} 1 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_m^{Y_d}\geqslant\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}} \left(\frac{\bar\lambda_m^{Y_d}}{\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}\right)^{1-\gamma}.$$

Тогда

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{\bar\lambda_m^{Y_d}}{\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}\right)^{1-\gamma} = \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)^{-1+\gamma} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar\lambda_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}. \tag{25}$$

Далее по определению $n^{Y_d}(\varepsilon)$ имеем

$$\varepsilon^2 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ m\geqslant n^{Y_d}(\varepsilon)}} \bar\lambda_m^{Y_d} \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_m\leqslant\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}} \bar\lambda_m^{Y_d} \leqslant \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)^{\gamma} \cdot \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar\lambda_m\leqslant\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)}} \left(\bar\lambda_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}.$$

Тогда

$$\varepsilon^2 \leqslant \bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)^{\gamma} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar\lambda_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\bar\lambda^{Y_d}(\varepsilon)^{-1} \leqslant \left(\varepsilon^{-2} \cdot \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar\lambda_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}\right)^{1/\gamma}. \tag{26}$$

Применение (26) в (25) дает оценку

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar\lambda_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma} \left(\varepsilon^{-2} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar\lambda_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar\lambda_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

С учетом (23) имеем

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}\right)^{\frac{d}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}\right)^{\frac{d}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}} = M(\gamma)^{\frac{d}{\gamma}} \cdot \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

Отсюда, логарифмируя получаем нужное неравенство:

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant d \cdot \frac{\ln M(\gamma)}{\gamma} + |\ln \varepsilon^2| \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 15 *Пусть $M(\gamma) < \infty$ при любом $\gamma \in (0, \tau)$ с некоторым $\tau > 0$. Пусть*

$$E := \sum_{k \in \mathbb{N}: \bar{\lambda}_k > 0} |\ln \bar{\lambda}_k| \lambda_k.$$

Тогда для существования константы $C > 0$ такой, что

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau} |\ln \varepsilon^2| + C\sqrt{d\,|\ln \varepsilon^2|}, \quad d \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{27}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\varlimsup_{\delta \to 0+} \left\{ M(\tau - \delta)^{\delta} \right\} < \infty. \tag{28}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство (27). Тогда, в частности, при $d = 1$ имеем

$$\ln n^{Y_1}(\varepsilon) \leqslant E + \tfrac{1-\tau}{\tau} |\ln \varepsilon^2| + C\sqrt{|\ln \varepsilon^2|}, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Определим при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ величину $\bar{\lambda}^{Y_1}(\varepsilon)$ по формуле (24). Воспользуемся следующим неравенством из [1] (с. 840):

$$\left|\ln \bar{\lambda}^{Y_1}(\varepsilon_2)\right| \leqslant \ln n^{Y_1}(\varepsilon_1) - \ln(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2), \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1.$$

Положим и $\varepsilon_1 := \varepsilon$ и $\varepsilon_2 := \varepsilon$ при $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} \left|\ln \bar{\lambda}^{Y_1}(\varepsilon)\right| &\leqslant \ln n^{Y_1}\big(\varepsilon/\sqrt{2}\big) - \ln(\varepsilon^2 - \varepsilon^2/2) \\ &\leqslant E + \tfrac{1-\tau}{\tau} |\ln(\varepsilon^2/2)| + C\sqrt{|\ln(\varepsilon^2/2)|} + |\ln(\varepsilon^2/2)| \\ &= E + \tfrac{1}{\tau}(|\ln \varepsilon^2| + \ln 2) + C\sqrt{|\ln \varepsilon^2| + \ln 2}. \end{aligned}$$

Обозначим за x_ε, $\varepsilon \in (0,1)$, правую часть последнего неравенства. Введем

функцию распределения

$$F(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k \mathbb{1}(\bar{\lambda}_k \geqslant e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

В работе [1] (с. 841) показано, что

$$\left|\ln \bar{\lambda}^{Y_1}(\varepsilon)\right| = F^{-1}(1-\varepsilon^2) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant 1-\varepsilon^2\right\}, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Тогда имеем $F^{-1}(1-\varepsilon^2) \leqslant x_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$. Отсюда $F(x_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon^2$, $\varepsilon \in (0,1)$, т.е.

$$1 - F(x_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{30}$$

Из равенства

$$x = E + \tfrac{1}{\tau}\left(|\ln \varepsilon^2| + \ln 2\right) + C\sqrt{|\ln \varepsilon^2| + \ln 2}$$

при любом $x \geqslant E$ можно выразить

$$\begin{aligned} \sqrt{|\ln \varepsilon^2| + \ln 2} &= \frac{\tau}{2}\left(\sqrt{C^2 + \tfrac{4}{\tau}(x-E)} - C\right) \\ &= \sqrt{C_\tau^2 + \tau(x-E)} - C_\tau, \end{aligned}$$

где $C_\tau := \tau C/4$. Отсюда имеем

$$|\ln \varepsilon^2| = \left(\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x-E)} - C_\tau\right)^2 - \ln 2.$$

С учетом (30) справедливо

$$1 - F(x) \leqslant \exp\left\{-\left(\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x-E)} - C_\tau\right)^2 + \ln 2\right\}, \quad x \geqslant E.$$

Возведём в квадрат выражение в скобках в экспоненте. Осуществляя это, получаем

$$1 - F(x) \leqslant 2e^{-2C_\tau^2} \exp\left\{-\tau(x-E) + 2C_\tau\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x-E)}\right\}, \quad x \geqslant E. \tag{31}$$

Далее рассмотрим $M(\tau-\delta)$ при $\delta \in (0,\tau)$. В соответствии с (29) справед-

ливо представление

$$M(\tau-\delta)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar{\lambda}_k^{1-\tau+\delta}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\exp\bigl\{(\tau-\delta)|\ln\bar{\lambda}_k|\bigr\}\bar{\lambda}_k=\int\limits_0^{+\infty}e^{(\tau-\delta)x}\,dF(x).$$

В силу того, что $M(\tau-\delta)<\infty$, имеем

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{x>T}e^{(\tau-\delta)x}\,dF(x)=0.$$

Тогда из следующей оценки

$$\int\limits_{x>T}e^{(\tau-\delta)x}\,dF(x)\geqslant e^{(\tau-\delta)T}\int\limits_{x>T}dF(x)=e^{(\tau-\delta)T}(1-F(T)),\quad T>0.$$

получаем

$$\lim_{T\to\infty}e^{(\tau-\delta)T}(1-F(T))=0.$$

С учетом этого соотношения проинтегрируем $M(\tau-\delta)$ по частям

$$\begin{aligned}M(\tau-\delta)&=-\int\limits_0^{+\infty}e^{(\tau-\delta)x}\,d(1-F(x))\\&=-e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\Big|_0^{+\infty}+(\tau-\delta)\int\limits_0^{+\infty}e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx\\&=1-F(0)+(\tau-\delta)\int\limits_0^{+\infty}e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx.\end{aligned}$$

Далее оценим

$$
\begin{aligned}
M(\tau-\delta) &= 1-F(0)+(\tau-\delta)\int\limits_0^E e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \\
&\quad +(\tau-\delta)\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \\
&\leqslant 1-F(0)+(\tau-\delta)e^{(\tau-\delta)E}(1-F(0))E+(\tau-\delta)\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \\
&\leqslant 1+\tau E\cdot e^{\tau E}+\tau\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx.
\end{aligned}
$$

С помощью (31) и с учетом неравенства $0<\delta<\tau$ произведём оценку последнего интеграла:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx &\leqslant e^{\tau E}\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)(x-E)}(1-F(x))\,dxx \\
&\leqslant 2e^{\tau E-2C_\tau^2}\int\limits_E^{+\infty}\exp\Big\{-\delta(x-E)+2C_\tau\sqrt{C_\tau^2+\tau(x-E)}\Big\}\,dx \\
&= \tfrac{2}{\tau}\cdot e^{\tau E-2C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}(u-C_\tau^2)+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du \\
&\leqslant \tfrac{2}{\tau}\cdot e^{\tau E-C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du.
\end{aligned}
$$

Следовательно, мы имеем

$$
M(\tau-\delta) \leqslant 1+\tau E\cdot e^{\tau E}+2e^{\tau E-C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du.
$$

Далее оценим последний интеграл. Для удобства разделим его на сумму

двух слагаемых:

$$\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + 2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du = J_1(\tau,\delta) + J_2(\tau,\delta),$$

где

$$J_1(\tau,\delta) := \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + 2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du,$$

$$J_2(\tau,\delta) := \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + 2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du.$$

Оценим первый интеграл:

$$\begin{aligned} J_1(\tau,\delta) &= \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u\big(1-\tfrac{2\tau C_\tau}{\delta\sqrt{u}}\big)\Big\}\,du \\ &\leqslant \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\big\{-\tfrac{\delta}{2\tau}\,u\big\}\,du \\ &= \frac{2\tau}{\delta}\exp\big\{-\tfrac{8\tau C_\tau^2}{\delta}\big\} \\ &\leqslant \frac{2\tau}{\delta}\,\exp\big\{-8C_\tau^2\big\}. \end{aligned}$$

Оценим второй интеграл:

$$\begin{aligned} J_2(\tau,\delta) &\leqslant \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + \tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\Big\}\,du \\ &= \exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u\big\}\,du \\ &= \exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot\frac{\tau}{\delta}\cdot\Big(\exp\big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,C_\tau^2\big\} - \exp\big\{-\tfrac{16\tau}{\delta}\,C_\tau^2\big\}\Big) \\ &\leqslant \frac{\tau}{\delta}\,\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}. \end{aligned}$$

Исходя из этого, имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + 2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du &= J_1(\tau,\delta) + J_2(\tau,\delta) \\
&\leqslant \frac{2\tau}{\delta}\,\exp\big\{-8C_\tau^2\big\} + \frac{\tau}{\delta}\cdot\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\} \\
&\leqslant \frac{\tau}{\delta}\,\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot\Big(2\exp\big\{-16C_\tau^2\big\}+1\Big) \\
&\leqslant \frac{3\tau}{\delta}\,\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}.
\end{aligned}$$

В итоге

$$M(\tau-\delta) \leqslant c_{\tau,1} + \frac{c_{\tau,2}}{\delta}\cdot\exp\Big\{\frac{c_{\tau,3}}{\delta}\Big\},$$

где

$$c_{\tau,1} := 1 + \tau E\cdot e^{\tau E}, \qquad c_{\tau,2} := 6\tau e^{\tau E - C_\tau^2}, \qquad c_{\tau,3} := \exp\big\{8\tau C_\tau^2\big\}.$$

Отсюда несложно видеть, что соотношение (28) выполнено.

Достаточность. Предположим, что выполнено условие (28). Зафиксируем произвольные $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$. Воспользуемся неравенством (22) леммы 3 с

$$\gamma = \gamma_{d,\varepsilon} := \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}\,\tau}{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}} \in (0,\tau). \tag{32}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\ln n^{Y_d}(\varepsilon) &\leqslant d\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon})}{\gamma_{d,\varepsilon}} + |\ln\varepsilon^2|\cdot\frac{1-\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}} \\
&= Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau}|\ln\varepsilon^2| + d\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}} + |\ln\varepsilon^2|\cdot\left(\frac{1}{\gamma_{d,\varepsilon}} - \frac{1}{\tau}\right) \\
&= Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau}|\ln\varepsilon^2| + \sqrt{d\,|\ln\varepsilon^2|}\cdot\big(R(d,\varepsilon)+r(d,\varepsilon)\big),
\end{aligned} \tag{33}$$

где

$$R(d,\varepsilon) := \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}} \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}}, \quad r(d,\varepsilon) := \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{d}} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_{d,\varepsilon}} - \frac{1}{\tau}\right).$$

Сначала рассмотрим $r(d,\varepsilon)$. Сделаем подстановку (32):

$$r(d,\varepsilon) = \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{d}} \cdot \left(\frac{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}\,\tau} - \frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{d}\,\tau} - \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{d}\tau} = \frac{1}{\tau}.$$

Далее рассмотрим $R(d,\varepsilon)$. Представим его в виде:

$$\begin{aligned} R(d,\varepsilon) &= \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}} \cdot \gamma_{d,\varepsilon} \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \\ &= \frac{\sqrt{d}\,\tau}{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}} \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \\ &= (\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2}. \end{aligned}$$

Предположим, что $|\ln\varepsilon^2| > d$. Тогда

$$\gamma_{d,\varepsilon} = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{d}{|\ln\varepsilon^2|}}+1} > \frac{\tau}{2}.$$

В этом случае, с учетом того факта, что $E \geqslant 0$, верна оценка:

$$R(d,\varepsilon) \leqslant (\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon})}{\tau^2/4} = 4(\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \ln M\big(\tau - (\tau - \gamma_{d,\varepsilon})\big).$$

Несложно видеть, что предположение (28) влечет существование константы $B_{\tau,1}$ такой, что $R(d,\varepsilon) \leqslant B_{\tau,1}$ для любых d и ε, удовлетворяющих $|\ln\varepsilon^2| > d$.

Предположим, что $|\ln\varepsilon^2| \leqslant d$. Тогда несложно видеть, что $\gamma_{d,\varepsilon} \in (0,\tau/2]$. Рассмотрим функцию $L(\gamma) := \ln M(\gamma)$ при $\gamma \in (0,\tau/2]$. Заметим, что

$$L(\gamma) = L(0) + L'(0)\gamma + L''(\theta)\,\frac{\gamma^2}{2},$$

при каждом $\gamma \in (0, \tau/2]$ и некоторым $\theta \in (0, \gamma)$. Здесь

$$\begin{aligned} L(0) &= \ln\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k\Big) = \ln 1 = 0, \\ L'(0) &= \ln\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}\Big)'\Big|_{\gamma=0} = \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln \bar{\lambda}_k| \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}}\Bigg|_{\gamma=0} = E, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L''(\theta) &= \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln \bar{\lambda}_k| \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}}\right)'\Bigg|_{\gamma=\theta} \\ &= \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln \bar{\lambda}_k|^2 \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}} - \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln \bar{\lambda}_k| \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}}\right)^2\right)\Bigg|_{\gamma=\theta} \\ &= \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln \bar{\lambda}_k|^2 \bar{\lambda}_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\theta}} - \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln \bar{\lambda}_k| \bar{\lambda}_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\theta}}\right)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $\gamma \in (0, \tau/2]$

$$L''(\theta) \leqslant \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln \bar{\lambda}_k|^2 \bar{\lambda}_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\theta}} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln \bar{\lambda}_k|^2 \, \bar{\lambda}_k^{1-\frac{\tau}{2}}.$$

Обозначим за $B_{\tau,2}$ правую часть полученного выше неравенства. Тогда имеем

$$L(\gamma) \leqslant E\gamma + B_{\tau,2}\,\frac{\gamma^2}{2}, \quad \gamma \in (0, \tau/2].$$

Отсюда, в частности, получаем оценку

$$\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} = \frac{L(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \leqslant \frac{B_{\tau,2}}{2}.$$

Возвращаемся к оценке $R(d, \varepsilon)$ при $|\ln \varepsilon^2| \leqslant d$:

$$R(d, \varepsilon) = (\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \leqslant \frac{\tau B_{\tau,2}}{2}.$$

Следовательно, для любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем $R(d, \varepsilon) \leqslant \max\{B_{\tau,1}, B_{\tau,2}/2\}$.

Тогда

$$R(d,\varepsilon)+r(d,\varepsilon)\leqslant \max\{B_{\tau,1},B_{\tau,2}/2\}+\frac{1}{\tau},\quad d\in\mathbb{N},\ \varepsilon\in(0,1).$$

Полагая за константу C правую часть этого неравенства, из оценки (33) получаем нужное неравенство (27). Теорема доказана. $\square$

4.2 Примеры

Рассмотрим некоторые примеры случайных полей тензорного типа, для которых применима теорема, доказанная в предыдущем параграфе. Для начала для наглядности немного сузим условие (28). В дальнейшем мы покажем, что данного упрощения будет достаточно, чтобы охватить большое количество интересных и важных случайных процессов.

Пусть собственные числа случайного процесса удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{c_1}{(k-a)^{1+r}}\leqslant\lambda_k\leqslant\frac{c_2}{(k-a)^{1+r}},\quad k\in\mathbb{N}, \tag{34}$$

где $0<c_1\leqslant c_2$, $r>0$, $a\in[0,1)$. Покажем, что данное условие можно получить из условия (28). Пусть

$$\Lambda_\gamma\ :=\ \sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k^{1-\gamma},$$

Произведём оценку данного ряда сверху для $\gamma\in(0,\tau)$, $\tau>0$.

$$\begin{aligned}\Lambda_\gamma &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{1-\gamma}\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_2^{1-\gamma}}{(k-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}\\ &= \frac{c_2^{1-\gamma}}{(1-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_2^{1-\gamma}}{(k-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}\end{aligned}$$

Далее оценим сумму интегралом:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_2^{1-\gamma}}{(k-a)^{(1+r)(1-\gamma)}} &\leqslant \int\limits_1^{\infty}\frac{c_2^{1-\gamma}\,dx}{(x-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}\\ &= \frac{c_2^{1-\gamma}}{(r-r\gamma-\gamma)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma}}.\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}\Lambda_\gamma &\leqslant \frac{c_2^{1-\gamma}}{(1-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}+\frac{c_2^{1-\gamma}}{(r-r\gamma-\gamma)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma}}\\ &= \frac{c_2^{1-\gamma}(r-r\gamma-\gamma+1-a)}{(r-r\gamma-\gamma)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma+1}}\\ &= \frac{c_2^{1-\gamma}(r-r\gamma-\gamma+1-a)}{(\tau-\gamma)(r+1)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma+1}}.\end{aligned}$$

Оценивая далее, имеем

$$\Lambda_\gamma \leqslant \frac{c_2^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{r-r\gamma-\gamma+1-a}{(r+1)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma+1}} \leqslant \frac{c_2^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{r+1-a}{(r+1)(1-a)^{r+1}}.$$

Теперь произведём оценку данного ряда снизу для $\gamma\in(0,\tau)$, $\tau>0$.

$$\begin{aligned}\Lambda_\gamma &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{1-\gamma}\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_1^{1-\gamma}}{(k-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}\\ &\geqslant \int\limits_1^{\infty}\frac{c_1^{1-\gamma}\,dx}{(x-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}\\ &= \frac{c_1^{1-\gamma}}{(r-r\gamma-\gamma)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma}}\\ &= \frac{c_1^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{1}{(r+1)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma}}\\ &\geqslant \frac{c_1^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{1}{r+1}.\end{aligned}$$

Резюмируя, мы получили следующую оценку для нашего ряда:

$$\frac{c_1^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{1}{r+1}\leqslant\Lambda_\gamma\leqslant\frac{c_2^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{r+1-a}{(r+1)(1-a)^{r+1}}.$$

Так как $M(\gamma)=\frac{\Lambda_\gamma}{\Lambda}$, следовательно:

$$\frac{c_1^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{1}{(r+1)\Lambda}\leqslant M(\gamma)\leqslant\frac{c_2^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{r+1-a}{\Lambda(r+1)(1-a)^{r+1}}.$$

Рассмотрим $M(\tau-\delta)^\delta$. Видим, что

$$\lim_{\delta\to0}\left(\frac{c_1^{1-\tau+\delta}}{\delta}\cdot\frac{1}{(r+1)\Lambda}\right)^\delta=1,$$

а также

$$\lim_{\delta\to0}\left(\frac{c_2^{1-\tau+\delta}}{\delta}\cdot\frac{r+1-a}{\Lambda(r+1)(1-a)^{r+1}}\right)^\delta=1.$$

По теореме о сжатой последовательности

$$\lim_{\delta\to0}M(\tau-\delta)^\delta=1.$$

Резюмируя, мы показали, что условие (34) может быть получено из условия (28). Из этого следует, сложность аппроксимации последовательности тензорных степеней Y_d, составленных на основе случайных процессов, для собственных чисел которых верно условие (34), имеет следующую оценку:

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon)\leqslant Ed+\tfrac{1-\tau}{\tau}\,|\ln\varepsilon^2|+C\sqrt{d\,|\ln\varepsilon^2|},\quad d\in\mathbb{N},\quad \varepsilon\in(0,1),C>0.$$

Теперь представим примеры случайных процессов, для которых верно условие (34).

1) Винеровский процесс. Его собственные числа равны:

$$\lambda_k=\frac{1}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2}$$

Данное выражение соответствует условию (34) со следующим значением пара-

метров:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \frac{1}{\pi^2} \\ a &= \frac{1}{2} \\ r &= 1 \end{aligned}$$

2) Броуновский мост. Его собственные числа представляются следующим образом:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$$

Данное выражение соответствует условию (34) со следующим значением параметров:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \frac{1}{\pi^2} \\ a &= 0 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

3) Центрированный винеровский процесс. Его собственные числа представляются следующим образом:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$$

Данное выражение соответствует условию (34) со следующим значением параметров

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \frac{1}{\pi^2} \\ a &= 0 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

4) r-раз интегрированный эйлеровский процесс. Его собственные числа

представляются следующим образом:

$$\lambda_k = \frac{1}{(\pi(k-\frac{1}{2}))^{2r+2}}$$

Данное выражение соответствует условию (34) со следующим значением параметров

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = (\frac{1}{\pi})^{2r+2} \\ a &= \frac{1}{2} \\ r &= 2r+1 \end{aligned}$$

5) r-раз интегрированный винеровский процесс. Используя асимптотику из (8), можно заключить, что существуют такие константы c_1 и c_2, при которых вид его собственных чисел удовлетворяет условию (34) со следующим значением параметров:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ r &= 2r+1 \end{aligned}$$

Как мы видим, условие (34) охватывает очень большое количество полезных и важных случайных процессов и помогает находить сложность аппроксимации последовательностей их тензорных степеней, используя теорему, доказанную в предыдущем параграфе.

5 Заключение

При исследовании сложности аппроксимации случайных полей тензорного типа большой параметрической размерности получены следующие результаты:

1. Найдена асимптотика сложности аппроксимации для тензорного степени интегрированного эйлеровского процесса с широкими условиями на параметры гладкости маргинального процесса.

2. Для широкого класса случайных полей найдены необходимые и достаточные условия на собственные числа ковариационного оператора заданного случайного процесса, при которых верна специальная оценка сложности аппроксимации последовательности тензорных степеней этого процесса. Общий критерий применён к тензорным степеням различных случайных процессов.

Список литературы

[1] A.A. Khartov, *Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements*, Journal of Complexity 31, 2015, 835–866.

[2] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular variation*, 1987.

[3] E. Novak, I. H. Sloan, J. F. Traub, H. Woźniakowski, *Essays on the Complexity of Continuous Problems*, EMS, Zürich, 2009

[4] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information*, EMS Tracts Math. 6, EMS, Zürich, 2008.

[5] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals*, EMS Tracts Math. 12, EMS, Zürich, 2010.

[6] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume III: Standard Information for Operators*, EMS Tracts Math. 18, EMS, Zürich, 2012.

[7] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, *Information, Uncertainty, Complexity*,Addison-Wasley, Reading MA, 1983.

[8] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H.Woźniakowski, *Information-Based Complexity*, Academic Press, New York, 1988.

[9] J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Academic Press, NewYork, 1980.

[10] M. A. Lifshits , E. V. Tulyakova . *Curse of dimensionality in approximation of random field*, probability and mathematical statistics, Vol. 26, Fasc. 1, 2006, 97–112.

[11] K. Ritter, *Average-case Analysis of Numerical Problems*, Lecture Notes in Math. No 1733, Springer, Berlin, 2000.

[12] J. B. Walsh, *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics* 1180, Springer-Verlag, New York, 1986, 265—439.

[13] E. Wong, M. Zakai, *Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 29, no. 2, 1974, 109–122.

[14] M.A.Lifshits, A.Papageorgiou, H.Woźniakowski *Tractability of Multi-Parametric Euler and Wiener Integrated Processes*, Probability and Mathematical Statistics 32(1), 2012, 131-165.

[15] M. Lifshits, M. Zani *Approximation of additive random fields based on standard information: Average case and probabilistic settings*, Journal of Complexity, Volume 31, Issue, 2015, 659-674.

[16] M. Lifshits, M. Zani *Approximation complexity of additive random fields*, Journal of Complexity, Volume 24, Issue, 2008, 362-379.

[17] A. A. Khartov, M. Zani *Asymptotic analysis of average case approximation complexity of additive random fields*, Journal of Complexity, 2018, 24-44.

[18] F. J. Hickernell, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, *Tractability of linear multivariate problems in the average case setting*, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods*, Springer, 2008, 461–493.

[19] F. J. Hickernell, H. Woźniakowski, *Integration and approximation in arbitrarydimension*, Adv. Comput. Math., 12, no. 1, 2000, 25–58.

[20] M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowskii, *Average case tractability of nonhomogeneous tensor product problems*, J. Complexity, 28, 2012, no. 5–6, 539–561.

[21] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*. Наука, 1965.

[22] J. R. Blum, J. Kiefer, M. Rosenblatt, *Distribution free tests of independence based on the sample distribution function*, Ann. Math. Statist., 32, no. 2, 1961, 485–498.

[23] J. C. Bronski, *Small ball constants and tight eigenvalue asymptotics for fractional Brownian motions*, J. Theoret. Probab., 16, 2003, 87–100.

[24] F. Gao, J. Hanning and F. Torcaso, *Integrated Brownian motions and exact L2-small balls*, Ann. Probab. 31, 2003, 1320–1337.

[25] А.А.Хартов *Сложность аппроксимации гауссовских случайных полей большой параметрической размерности*, Санкт-Петербург, 2014.

[26] M.A.Lifshits, *Lectures on Gaussian Processes*, Springer, New York, 2012.

[27] L. Beghin, Ya. Nikitin, and E. Orsingher, *Exact small ball constants for some Gaussian processe under the L2-norm*, Journal of Mathematical Sciences (New York), 2005, 128:1, 2493–2502.

[28] G.S. Watson, *Goodnessoft on-fit-tests on a circle*, Biometrika, 48, 1961, 109-114.

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Погорелова Петра Глебовича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Применение метода обертывания с информационной регуляризацией для решения задачи поиска оптимального подмножества факторов» являются: функционал качества, предложенный в главе 3; Алгоритм 3.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 01 мая 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: wrapper method with informational regularization, враппер метод с информационной регуляризацией. В выдаче поисков не содержалось публикаций, относящихся к рассматриваемой проблеме.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Ловягиным Юрием Никитичем, старшим преподавателем кафедры информатики математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета.
- Проведена серия консультаций с моим научным консультантом Кураленком Игорем Евгеньевичем, доцентом департамента информатики национального исследовательского университета "Высшая школа экономики" в Санкт-Петербурге.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором представляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 04.06.2020. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись

Погорелов Петр Глебович 25 мая 2020 г. Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет

Погорелов Петр Глебович

Выпускная квалификационная работа

Применение метода обертывания с информационной регуляризацией для решения задачи поиска оптимального подмножества факторов

Уровень образования: магистратура

Направление 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Образовательная программа ВМ.5665. Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Научный руководитель:
старший преподаватель
кафедры информатики,
кандидат
физико-математических наук
Ю.Н. Ловягин
Рецензент:
профессор института
фундаментальной подготовки
и технологических инноваций
ГУАП, доктор
физико-математических наук
Ю.А. Пичугин

Санкт-Петербург
2020

Saint-Petersburg State University

Pogorelov G. Pyotr

Graduate qualification work

The application of wrapper method with information regularization in the context of feature selection problem

Master's Thesis

Scientific supervisor:
Senior Lecturer, chair of Computer Science, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Lovyagin N. Yurii
Scientific adviser:
Full Professor, Institute of Fundamental Training and Technological Innovations SUAI, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Pichugin A. Yurii

Saint-Petersburg
2020

Содержание

1 Введение **3**

2 Обзор функционалов качества для враппер-методов **6**

2.1 Типовые метрики качества в роли функционала качества . 7

2.2 Информационные критерии в роли функционала качества . 9

2.3 Информационно-теоретические методы с регуляризацией . 10

3 Функционал качества для враппер-метода с информационной регуляризацией **12**

3.1 Функционал качества с информационной регуляризацией как субмодулярная функция бинарного переменного 14

3.2 Оптимизация субмодулярных функций бинарного переменного 14

3.3 Слабая субмодулярность в задаче подбора оптимального набора факторов 15

3.4 Субмодулярная максимизация без ограничения на мощность подмножества 17

3.5 Нижняя граница субмодулярной функции бинарного переменного 18

3.6 Алгоритм максимизации функционала качества с информационной регуляризацией 19

4 Экспериментальная проверка функционала качества с информационной регуляризацией **22**

4.1 Выборка Adult 23

4.2 Выборка Breast Cancer Wisconsin 25

4.3 Выборка Internet Usage Data Set 28

4.4 Выводы по результатам экспериментов 30

5 Заключение **32**

1 Введение

Задача поиска оптимального подмножества факторов[1] является одной из краеугольных проблем машинного обучения. Сформулировать её можно следующим образом: пусть имеется некоторое множество факторов $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$ и целевая величина y, пусть $h \in H$ - некоторая решающая функция из класса решающих функций H [1]. Тогда, выражаясь математическим языком, решается задача максимизации заданной метрики g на множестве факторов X при заданной целевой величине y и решающей функции h.

$$\arg\max_{\hat{X} \subseteq X} g(h_{\hat{X}}, y)$$

Например, если g - величина взаимной информации между двумя случайными величинами, то $\max\ I(h_{\hat{X}}, y) = H(y)$ тогда и только тогда, когда построенная решающая функция полностью описывает эндогенную величину y.

Методы редукции исходного множества факторов представляют большой интерес в контексте проблем, решаемых алгоритмами машинного обучения по следующим причинам. Во-первых, упрощение исходной модели улучшает ее интерпретируемость с точки зрения специалистов в той области, откуда были взяты исходные данные. Во-вторых, это позволяет избежать “проклятья размерности данных”, то есть, упрощает процесс нахождения коэффициентов решающей функции за счет сжатия пространства поиска. В-третьих, снижается вероятность переобучения модели на заданном наборе данных. И, наконец, в-четвертых, это может значительно снизить время обучения модели на выборке с значительным количеством наблюдений [2]. Алгоритмы поиска оптимального подмножества факторов делятся на три категории.

1. Фильтр-методы (filter methods) [3].
2. Методы обертывания (враппер-методы или wrapper methods) [2].
3. Встраиваемые методы (embedded methods) [4].

При использовании фильтр-методов [3] алгоритм, применяемый для оценки коэффициентов решающей функции, игнорируется, а подмножество факторов подбирается на базе специального функционала качества. Часто в роли функционала качества используются различные информационно-теоретические метрики, например, величина взаимной информации, KL-дивергенция и т.д. Это продиктовано тем, что они позволяют установить степень взаимосвязи между факторами даже в случае

[1] Калька с англ. feature selection problem.

нелинейной зависимости. Отбираются те факторы, которые больше всего коррелируют (в терминах теории информации) с моделируемой величиной. Аналогичным образом данная проблема решается с применением враппер-методов, но в процесс отсева факторов дополнительно интегрируется тот алгоритм "обучения" решающей функции, который применяется в дальнейшем.

Встраиваемые методы [4] значительно отличаются от упомянутых ранее подходов. Особенность этих методов заключается в интеграции инструмента отсева нерелевантных факторов непосредственно в функционал потерь, используемый для поиска решающей функции. Например, lasso-регрессия отличается от обычной линейной регрессии только дополнительным "штрафным" членом в функции потерь [5].

В настоящем исследовании внимание акцентируется именно на враппер-подходе к задаче поиска оптимального подмножества факторов. Это продиктовано желанием разработать универсальный подход, способный подстраиваться под различные решающие функции. С одной стороны, встраиваемые методы имеют уникальную специфику для разных типов решающих функций, что не позволяет построить на их базе унифицированный алгоритм. С другой стороны, несмотря на очевидные достоинства фильтр-методов — высокую скорость вычисления и низкую подверженность проблеме переобучения — алгоритм обучения модели игнорируется. Таким образом, "отфильтрованные" факторы легко могут оказаться совершенно неподходящими для используемого класса решающих функций.

В настоящий момент большинство исследований направлены на разработку фильтр-методов либо встраиваемых методов. Публикаций, посвященных враппер-методам достаточно мало, а авторы публикаций фокусируются именно на взаимосвязи целевой величины с набором факторов, игнорируя корреляции между признаками [6, 7]. Либо методы нацелены на заранее определенный класс решающих функций [8, 9, 10].

Цель настоящей работы — сформировать функционал качества, который учитывает степень влияния набора факторов на целевую величину с учетом заданной решающей функции. Функционал так же должен оценивать степень взаимосвязи между факторами. Помимо этого, необходимо разработать либо адаптировать существующий алгоритм для максимизации данного функционала на множестве признаков с целью получения враппер-метода для произвольной решающей функции. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи.

1. Анализ существующих фильтр- и враппер-методов на предмет их недостатков и потенциальных улучшений.

2. Математическая формулировка функционала качества для враппер-метода, преодолевающего потенциальные недостатки рассмотренных методов.

3. Оценка возможных алгоритмов оптимизации предложенного функционала качества.

4. Разработка нового, либо адаптация существующих алгоритмов под предложенный функционал.

5. Экспериментальная проверка враппер-метода (как совокупности функционала качества и алгоритма его оптимизации) на реальных наборах данных.

В следующих разделах данного исследования описана работа, проведенная над всеми поставленными задачами, а в заключительной части сформулированы выводы относительно итогового результата выполненной работы.

2 Обзор функционалов качества для враппер-методов

Поиск оптимального подмножества факторов (feature selection problem) представляет собой достаточно хорошо изученную подобласть машинного обучения. В настоящий момент существует большое количество исследований, посвященных данной проблематике [11]. Необходимо еще раз отметить, что враппер-методы отличаются от фильтр-методов только тем, что предполагают использование того же алгоритма поиска решающей функции, который будет применяться в дальнейших исследованиях.

Аппарат фильтр-методов заметно шире аппарата враппер-методов в связи с тем, что фильтр-метод, потенциально, может вообще не учитывать форму решающей функции, для которой выполняется поиск факторов. Соответственно, в отношении фильтр-методов потенциальная область исследований гораздо шире. Однако, как ранее было отмечено, все фильтр-методы страдают от одной и той же проблемы — отсутствие информации о том, каким образом будет выполняться обучение модели в контексте эксперимента. Это приводит к тому, что важная информация о факторах (насколько они будут коррелировать в модели, построенной заданным алгоритмом обучения) теряется, и, как следствие, это с высокой вероятностью может отразиться на качестве итоговой модели. Любой враппер-метод состоит из трех компонент [11].

1. Алгоритм оценки коэффициентов решающей функции.
2. Функционал качества.
3. Алгоритм оптимизации функционала качества на множестве факторов.

Алгоритм оценки коэффициентов решающей функции относится непосредственно к построению модели, и, потенциально, может быть каким угодно. Сама идея враппер-метода подразумевает, что он выступает в качестве черного ящика, в который можно поместить набор данных, решающую функцию с алгоритмом обучения. На выходе — набор оптимальных факторов из заданного набора данных, лучше всего описывающих целевую величину именно для заданной решающей функции и данного алгоритма обучения. То есть, алгоритм обучения, будучи неотъемлемым атрибутом враппер-метода, на практике чаще всего задается неявно.

Применяемый функционал качества с алгоритмом его оптимизации являются более очевидными отличительными характеристиками враппер-методов. Они отвечают как за “полезность” найденных факторов, так и, по большему счету, за вычислительную сложность всей этой “триады”. В

рамках настоящей части данной работы предлагается рассмотреть различные виды функционалов качества для враппер-методов, сформулировать их достоинства и недостатки.

2.1 Типовые метрики качества в роли функционала качества

В качестве функционала качества на практике часто используются типовые метрики качества, применяемые для оценки решения прикладных задач из области машинного обучения [12, 13]. В зависимости от типа решаемой задачи это могут быть как метрики качества для непрерывной целевой величины (задача регрессии), так и для дискретной (задача классификации). В данном исследовании основной акцент ставится на задачу классифкации, поэтому в текущем разделе проводится анализ именно метрик классификации. Следует отметить, что существуют методы сведения задач регресси к классификации путем приведения целевой величины к ординальному типу, поэтому, в целом, рассматриваемые далее метрики могут быть применены и в задачах регрессии.

Следует дать комментарий к рассматриваемым далее типовым метрикам качества. Эти метрики завязаны на определенные эвристические требования к результату работы алгоритма, из чего следует, что их применимость обычно сильно ограничена. Подразумевается, что разработчик алгоритма хорошо осведомлен о том, что именно он хочет получить в результате его работы. Список наиболее распространенных типовых метрик качества [12, 13].

1. Accuracy.
2. Precision.
3. Recall.
4. AUROC.

Accuracy представляет собой крайне распространенную на практике метрику, которая имеет достаточно очевидную интуитивную интерпретацию. Тем не менее, ее видимая простота может вводить людей в заблуждение, что достаточно легко продемонстрировать на примере.

Введем обозначения.

1. TP - положительные примеры, верно классифицированные решающей функцией.
2. FP - ложные примеры, классифицированные решающей функцией как положительные.

3. TN - ложные примеры, верно классифицированные решающей функцией.

4. FN - положительные примеры, классифицированные решающей функцией как ложные.

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + FP + TN + FN}$$

Нетрудно заметить, что данная величина представляет собой долю верно классифицированных объектов и ее применение может быть резонным только в том случае, если имеющийся набор данных сбалансирован по классам. В рамках задачи, подразумевающей наличие дисбаланса в данных, эта величина предоставляет ложное представление о качестве модели. Например, в задаче выявления аномалий выполняется поиск объектов, значительно отклоняющихся по какому-то признаку (либо множеству признаков) от большинства. Таких объектов в выборке может быть достаточно малая доля, за счет чего величина Accuracy, даже на константном классификаторе, будет велика. Подробнее с данной проблемой можно ознакомиться в обширном исследовании [14]. Что касается применения метрики Accuracy в качестве основы для метода обертывания, то, например, в работе [12] она используется для поиска оптимального подмножества факторов для дерева решений.

Величины Precision и Recall дают более объективную оценку качества классификации, однако они применяются в задачах с совершенно разными контекстами. В частности, высокая величина Precision позволяет сделать вывод о том, что модель может допустить значительное число FN, но при этом практически никогда не ошибается в определении TP. Данный факт делает Precision наиболее актуальной, например, в задаче кредитного скоринга клиентов банка [13]. Напротив, высокая величина Recall указывает на то, что бóльшая часть положительных примеров определяется верно, однако возможно заметное число FP-примеров. Данное свойство полноты делает ее весьма полезной в задачах поиска аномалий.

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP}$$

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN}$$

Наиболее объективную оценку качества классификации дает величина площади под ROC-кривой - AUROC. Специфика данной метрики заключается в том, что она учитывает качество классификации на различных границах принятия решения для решающей функции вида

$f : X \to [0,1] \subset \mathbf{R}$. Данная величина имеет интуитивную интерпретацию — вероятность того, что произвольный положительный пример будет иметь более высокое значение решающей функции, нежели произвольный негативный $AUROC = P(f(P) > f(N))$. Более подробно с данной метрикой можно ознакомиться в исследовании T. Fawcett [15].

2.2 Информационные критерии в роли функционала качества

Информационные критерии, в отличие от рассматриваемых ранее метрик, содержат в себе компоненту, которая штрафует функционал качества за добавление новых факторов в решающую функцию. Можно выделить ряд классических подходов, которые хорошо зарекомендовали себя в прикладной статистике для решения задачи ранжирования моделей по их способности к обобщению на наборе данных. Можно отметить следующие, наиболее распространенные на практике информационные критерии.

1. Байесовский информационный критерий (BIC) [16].
2. Информационный критерий Акаике (AIC) [17].
3. Скорректированный информационный критерий Акаике (AICc) [18].

Байесовский подход к поиску оптимального подмножества факторов (или, что эквивалентно, к выбору наилучшей решающей функции из одного класса) заключается в максимизации вероятности того, что модель $M_i \subset \mathbf{M}$ способна описать данные $\mathbf{D} = \{y_j\}_{j=1}^n$. Выражаясь математическим языком, ставится задача максимизации апостериорной вероятности

$$P(M_i|\mathbf{D}) = \frac{P(\mathbf{D}|M_i)P(M_i)}{P(\mathbf{D})},$$

что, в случае эквивалентной априорной вероятности для всех решающих функций, упрощается до максимизации логарифма функции правдоподобия (далее - лог-правдоподобие)

$$\log P(\mathbf{D}|M_i).$$

Далее, путем ряда аппроксимаций [16], выражение $\log P(\mathbf{D}|M_i)$ упрощается до

$$\log P(\mathbf{D}|M_i) \approx \log L(\theta_i|D) - \frac{|\theta_i|_0}{2} \log n.$$

Критерий Акаике [17] представляет собой апроксимацию величины дивергенции Кульбака-Лейблера [19] между двумя моделями — истинной (не наблюдаемой) $g : D \to [0,1]$ и моделью-кандидатом $f : D \to [0,1]$

$$I(\theta_k) = E[\frac{g(\mathbf{D})}{f(\mathbf{D}|\theta_k)}] \approx AIC = -2\log(f(\mathbf{D}|\hat{\theta}_k)) + 2k.$$

Критерий Акаике является асимптотическим, то есть, он аппроксимирует дивергенцию Кульбака-Лейблера только при достаточно большом объеме выборки ($n \to \infty$). В связи с этим для случая малых выборок был выведен скорректированный критерий Акаике [18], работающий на меньшем объеме данных.

$$AICc = AIC + \frac{2 * (k^2 + k)}{n - k - 1}$$

На уровне интуиции, механизм работы рассмотренных трех методов заключается в следующем. Функционалы содержат две компоненты — лог-правдоподобие и штраф за число факторов. Функция правдоподобия (далее - правдоподобие) является неубывающей относительно количества факторов, однако в обоих функционалах имеется коэффициент, штрафующий за их число. Если новый фактор дает незначительный прирост к лог-правдоподобию, то он с большой вероятностью даст отрицательный прирост всему функционалу, что может выступать индикатором того, что оптимальное подмножество факторов уже сформировано.

2.3 Информационно-теоретические методы с регуляризацией

Существует достаточно большое семейство методов поиска оптимального подмножества факторов, построенных на базе аппарата теории информации. В работе [20] дается краткий обзор разработанной в последние годы их значительной части. Особое внимание хочется уделить методу MIFS[21]. MIFS использует аппроксимацию величины взаимной информации между множеством факторов X и целевой величиной y: $I(X; y)$, где $X = \{x_i\}_k$ - вектор факторов, а $y \in C$ - целевая величина.

$$I(X; y) = I(y; X) = \sum_y \int P(y, X) \log \frac{P(y, X)}{P(y)P(X)} dX.$$

В методе MIFS вместо расчета величины взаимной информации, который, вообще говоря, имеет экспоненциальную сложность, предлагается аппроксимировать ее суммой двух компонент $I(x_i, y)$, $\sum_{j \in S}^{k} I(x_i, x_j)$. Первая компонента представляет собой величину взаимной информации между отдельным фактором и целевой величиной. Вторая компонента — сумма величин взаимной информации между оцениваемым фактором и подмножеством факторов, которые ранее были отобраны алгоритмом. Формально, искомую величину можно выразить как

$$I(X; y) \approx MIFS = I(x_i, y) + \beta \sum_{j \in S}^{k} I(x_i, x_j) \ \forall x_i \in X.$$

Algorithm 1: Алгоритм поиска максимума субмодулярной функции без ограничений на мощность подмножества

Входные данные : $S \leftarrow \emptyset$, $k \leftarrow$ число искомых факторов
Выходные данные: множество отобранных алгоритмом факторов S

while $|S| \neq k$ **do**
  Для каждой пары величин $x \in F \setminus S, s \in S$ рассчитывается величина взаимной информации.
  Подбирается фактор x', максимизирующий выражение $I(x, y) + \beta \sum_{s \in S}^{k} I(x, s)$. Найденный фактор добавляется в искомое множество $S \leftarrow S \cup \{x'\}$
end

Метод MIFS, очевидно, является фильтр-методом и не учитывает ни тип решающей функции, ни алгоритм обучения. Далее в работе будет рассмотрен алгоритм, представляющий собой модифицированию врапперверсию MIFS, улучшающую его применимость в контексте прикладных задач.

3 Функционал качества для враппер-метода с информационной регуляризацией

В предыдущих разделах данной работы был проведен анализ наиболее распространенных функционалов качества для враппер-метода и были обозначены их недостатки. Кратко резюмируя — типовые метрики качества моделей машинного обучения (Accuracy, Precision, Recall) предназначены для оценки качества решения задач специфической направленности, и обычно не используются обособленно друг от друга. Информационные критерии представляют собой асимптотические метрики, эффективность которых имеет очень сильную корреляцию с объемом данных. Значительная часть информационно-теоретических метрик — представляют собой фильтр-методы, которые не принимают во внимание форму используемой решающей функции. В данной главе вводится новый функционал качества, при создании которого была осуществлена попытка учета недостатков рассмотренных методов. Ранее была сформулирована математическая постановка задачи максимизации функционала качества на множестве факторов,

$$arg \max_{\hat{X} \subseteq X} g(h_{\hat{X}}, y).$$

В рамках данного исследования вводится функционал g следующего вида,

$$g(h_{\hat{X}}, y, X) = \log L(h_{\hat{X}|y}|y) + \lambda \sum_{x \in X} \log L(h_{\hat{X}|x}|x).$$

Тогда задача максимизации примет следующая вид,

$$arg \max_{\hat{X} \subseteq X} \log L(h_{\hat{X}|y}|y) + \lambda \sum_{x \in X} \log L(h_{\hat{X}|x}|x),$$

где выражение $L(h_{\hat{X}|y}|y)$ представляет собой величину правдоподобия решающей функции h, оцененной на подмножестве факторов $\hat{X} \subseteq X$ и целевой величине y. $L(h_{\hat{X}|x}|x)$ - величина правдоподобия между значением той же самой решающей функции, оцененной на подмножестве факторов $\hat{X}$ и фактором $x \in X$, который в данном случае выступает в роли эндогенной величины.

Можно обратить внимание на то, что предложенный функционал имеет сходство с функционалом метода MIFS, однако между ними есть очень важные различия. Во-первых, при расчете правдоподобия берутся не значения факторов, а величина оцененной по ним решающей функции. Помимо этого, в процессе обучения решающей функции берутся не значения отдельных факторов, а подмножество факторов $\hat{X} \subseteq X$.

Необходимо дать интуитивную интерпретацию математической формулировке задачи максимизации с использованием предложенного функционала, но для начала нужно обратить внимание на некоторые свойства

функции правдоподобия. В данном исследовании функция правдоподобия рассматривается как отображение множества факторов (неупорядоченное конечное множество) на поле вещественных чисел $L : \{0,1\}^X \to R_+$. Другими словами, она рассматривается как функция бинарного переменного (булева функция). Правдоподобие является неубывающей функцией относительно мощности аргумента (множества факторов). То есть, при добавлении новых факторов правдоподобие не убывает. При этом, если между факторами отсутствует особая форма взаимосвязи, выражаемая в специфической форме совместного распределения (пример будет дан в одной из следующей глав), правдоподобие будет вести себя как функция убывающей полезности. Класс подобных функций называется субмодулярными функциями бинарного переменного. Далее в работе дано описание данного класса функций и методов субмодулярной оптимизации.

Левую часть суммы в формуле можно интерпретировать как численное выражение качества решения задачи классификации (либо регрессии) с использованием предложенной решающей функции. Буквально — на сколько правдоподобно, что данная решающая функция, оцененная на заданном наборе факторов, может описать целевую величину. Правая часть суммы интерпретируется как штрафной коэффициент (или регуляризатор). При увеличении числа факторов в подмножестве ($\hat{X}$) растет как штраф, как и левая часть выражения. Увеличение штрафной части потенциально может быть индикатором того, что алгоритм начинает "захватывать" избыточные факторы, которые коррелируют (в терминах теории информации) с оставшимся набором данных.

Рассматриваемому выражению также можно дать вероятностную интерпретацию. Если возвести базу логарифма в степень данного выражения, то его можно представить следующим образом

$$argmax_{\hat{X} \subseteq X} P(y|\hat{X}, h) \prod_{x \in X} P(x|\hat{X}, h)^{\lambda}.$$

При значениях $\lambda > 0$ выражение можно трактовать как максимизацию вероятности того, что данная решающая функция на заданном подмножестве факторов способна описать как целевую величину, так и оставшийся набор факторов. Интерпретация меняется при $\lambda < 0$. Теперь максимизируется вероятность того, что решающая функция способна описать целевую величину, но при этом факторы максимально отличаются друг от друга.

3.1 Функционал качества с информационной регуляризацией как субмодулярная функция бинарного переменного

Функция бинарного переменного (булева функция) имеет вид $f : \{0,1\}^V \to \mathbf{R}$. Функции данного типа называются субмодулярными, если они удовлетворяют неравенству

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y), X, Y \subseteq V,$$

что равносильно следующему неравенству, которое интуитивно интерпретируется в терминах приращений как функция полезности.

$$f(X \cup k) - f(X) \geq f(Y \cup k) - f(Y) \ \forall X \subseteq Y \subseteq V, k \in V \setminus Y.$$

Субмодулярные функции обладают интересными свойствами, которые делают их одновременно похожими как на выпуклые вниз функции над полем действительных чисел, так и на выпуклые вверх. С одной стороны, свойство убывающей полезности больше похоже на поведение функции выпуклой вверх. С другой стороны, задача минимизации субмодулярной функции аналогична минимизации функции выпуклой вниз при использовании специальной формы релаксации [22].

Функция f в контексте данного исследования представляет собой математическое ожидание функционала качества g, вычисленного для решающей функции h по набору факторов $\hat{X} \subseteq X$ на генеральной совокупности:

$$f(\hat{X}; g) = E_{\hat{X} \sim F}[g(\hat{X}; h)].$$

Известно, что задача поиска оптимального подмножества факторов в некотором смысле схожа с проблемой максимизации субмодулярной функции (подробнее - в разделе 3.3), и, вообще говоря, является NP-трудной проблемой [23]. На текущий момент существуют значительное число подходов к аппроксимации ее решения, часть из которых рассмотрена в данной работе.

3.2 Оптимизация субмодулярных функций бинарного переменного

Субмодулярная минимизация может быть эффективно выполнена путем сведения функции бинарного переменного к кусочно непрерывной посредством специальной релаксации — продолжения Ловаша (Lovasz extension) [22] и минимизации ее такими алгоритмами, как метод субградиента [22], алгоритм Фрэнка-Вульфа [24], метод эллипсоида [22] и др.

Продолжение Ловаша расширяет область определения бинарной функции $f : \{0,1\}^V \to \mathbf{R}$ до $f : \mathbf{R}^V \to \mathbf{R}$. Существуют различные продолжения функций бинарного переменного, однако именно продолжение Ловаша позволяет выполнить субмодулярную минимизацию за полиномиальное время.

Напротив, субмодулярная максимизация представляет собой NP- трудную задачу [22]. На практике обычно используются алгоритмы полиномиальной сложности, выполняющие аппроксимацию оптимального значения. В частности, субмодулярная максимизация не-монотонной функции без ограничения на мощность входного множества с точностью $O(1/2)$ достигается за полиномиальное время [25]. В случае, когда на мощность входного множества накладывается ограничение, достижима точность аппроксимации $O(1 - 1/e)$ [26].

Поскольку точное решение задачи поиска оптимального подмножества факторов находится только методом полного перебора (алгоритмом, имеющим экспоненциальную сложность), то для решения данной задачи чаще всего применяются жадные алгоритмы, накладывающие ограничение на максимальное число факторов в используемой модели. Например, в наиболее популярном пакете машинного обучения scikit-learn[2] (и его расширении mlxtend[3]) для языка программирования Python представлена реализация двух жадных алгоритмов: последовательного отбора признаков (forward feature selection [4]), обратного отбора признаков (backward feature selection [5]), имеющих сложность $O(kn)$ либо $O(n^2)$ $(k < n)$ в зависимости от выбранной эвристики поиска. В данном случае k - ограничение на мощность множества найденных факторов, а n - общее число факторов.

3.3 Слабая субмодулярность в задаче подбора оптимального набора факторов

Ранее было отмечено, что правдоподобие, как функция бинарного переменного, с интуитивной точки зрения должно вести себя как субмодулярная функция. То есть, с увеличением числа факторов в аргументе функции, каждый новый фактор должен давать меньший прирост "полезности". В общем случае это не совсем так; что можно продемонстрировать на примере. Пусть есть две бинарные случайные величины $X \sim F_X, Y \sim F_Y$, а третья равна $Z = X \bigoplus Y$. Рассмотрим функцию $f(x) := L(h_{x|Z}, Z)$. Очевидно, что величина правдоподобия между X и Z равна нулю, но при этом величина взаимной информации между $\{X, Y\}$

[2]https://scikit-learn.org/stable/
[3]http://rasbt.github.io/mlxtend/
[4]http://rasbt.github.io/mlxtend/user_guide/feature_selection/SequentialFeatureSelector/
[5]https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.feature_selection.RFE.html

и Z, соответственно, равна единице.

Данный факт можно наглядно проиллюстрировать. Предположим, что $\hat{h}(\emptyset) = (0,0,0,0), \hat{h}(\{X\}) = (0,0,1,1), \hat{h}(\{Y\}) = (0,1,0,1), \hat{h}(\{X,Y\}) = (0,1,1,0)$. То есть решающая функция h на пустом множестве принимает нулевые значения, а в случае, если корреляция между элементами множества и целевой величиной отсутствует — собственные значения элементов множества.

$$f(\emptyset) = 0^0 * 1^1 * 0^1 * 1^0 * ... = 0,$$
$$f(\{X\}) = 0^0 * 1^1 * 0^1 * 1^0 * ... = 0,$$
$$f(\{Y\}) = 0^0 * 1^1 * 1^0 * 0^1 * 0^1 * 1^0.. = 0,$$
$$f(\{X,Y\}) = 0^0 * 1^1 * 1^1 * 0^0 * 1^1 * 0^0 * 0^0 * 1^1 = 1.$$

Таким образом нарушается само определение субмодулярности

$$f(\{X\}) - f(\emptyset) \leq f(\{X,Y\}) - f(\{Y\}).$$

Если предположить, что X, Y являются факторами модели, а Z - целевой величиной, моделируемой решающей функцией $h \in H$, оцененной на множестве $S \subseteq \{X,Y\}$, то становится очевидным, что функционал качества никак не может быть субмодулярным. Рассмотренная выше ситуация является примером D-разделимости случайных величин [27]. Можно лишь отметить, что данная проблема характерна не для всех наборов данных и, вообще, правдоподобие во многих случаях ведет себя именно как субмодулярная функция. Для определения функций, не являющихся субмодулярными в строгом смысле, существует термин — слабо-субмодулярные функции.

Ничто не мешает применять алгоритмы субмодулярной максимизации к не-субмодулярным функциям. Тем не менее, важно помнить, что теоретическая нижняя граница аппроксимации, гарантированная алгоритмом оптимизации, перестает существовать. Для того, чтобы оценить, насколько хорошо алгоритмы аппроксимируют оптимальное значение, разработан коэффициент субмодулярности функции [28], принимающий значения от 0 до 1, где 1 означает полную субмодулярность функции.

Коэффициентом субмодулярности функции бинарного переменного f на множестве V и целого числа k, представляющего собой ограничение на мощность множества (аргумента функции), называется величина

$$\gamma_{V,k} = min_{L,S \subseteq V, |S| \leq k, L \cap S = \emptyset} \frac{\sum_{j \in S}(f(L \cup \{j\}) - f(\{j\}))}{f(L \cup S) - f(L)},$$

где $S, L \subseteq V, S \cap L = \emptyset$, f - функция бинарного переменного.

Данный коэффициент позволяет оценить точность аппроксимации функции, которая не является субмодулярной в строгом смысле. Например, алгоритм последовательного отбора k факторов из множества V,

максимизирующих значение целевой метрики, даст приближение $O(1 - e^{-\gamma_{k,V}})$ спустя k итераций [28]. Это значение является гарантированной нижней границей аппроксимации.

3.4 Субмодулярная максимизация без ограничения на мощность подмножества

Наиболее тривиальный и распространенный подход к максимизации субмодулярных функций — жадный алгоритм последовательного отбора факторов (forward feature selection). Недостаток данного алгоритма заключается в том, что на текущий момент нет каких-либо теоретических гарантий нижней границы апроксимации максимума субмодулярной функции при отсутсвии ограничения на мощность множества. В связи с этим, важно отметить аналоги данного подхода, которые не имеют такой проблемы.

В работе [25] рассматривается алгоритм, позволяющий получить гарантированное $O(1/2)$ приближение максимального значения субмодулярной функции. Данный алгоритм использует полилинейное продолжение (multilinear extension) субмодулярной функции вида $f : 2^V \to \mathbf{R}_+$.

Полилинейным продолжением субмодулярной функции $f : 2^V \to \mathbf{R}$ называется функция $F : [0,1]^{|V|} \to \mathbf{R}$ вида

$$F(x) = \sum_{S \subseteq V} f(S) \prod_{i \in S} (1 - x_i) \prod_{i \in VS} (1 - x_i)$$

либо, что эквивалентно,

$$F(x) = E_{S \sim x}[f(S)]$$

Полилинейное продолжение выполняет интерполяцию вершин гиперкуба, биективных подмножествам множества V. Можно обратить внимание, что расчет математического ожидания все равно имеет сложность[6] $O(2^{|V|})$ поэтому обычно, его значение для заданных аргументов аппроксимируется семплированием из категориального распределения. Псевдокод самого алгоритма максимизации субмодулярной функции представлен далее.

[6] $|V|$ означает мощность (количество элементов) множества V

Algorithm 2: Алгоритм поиска максимума субмодулярной функции без ограничений на мощность подмножества

Входные данные : $x_0 \leftarrow \{0\}_V, y_0 \leftarrow \{1\}_V$

Выходные данные: случайное подмножество $S \subseteq V$ с вероятностью

```
for i = 1..n do
    a_i ← F(x_{i-1} + {u_i}) − F(x_{i-1})
    b_i ← F(y_{i-1} − {u_i}) − F(y_{i-1})
    a_i ← max(a_i, 0)
    b_i ← max(b_i, 0)
    x_i ← x_{i-1} + a_i/(a_i+b_i) * {u_i}
    y_i ← y_{i-1} − b_i/(a_i+b_i) * {u_i}
end
```

Алгоритм формирует два вектора $x, y \in [0,1]^V; x = y$. Значения вектора x_i можно интерпретировать как вероятность того, что элемент $v_i \in V$ принадлежит подмножеству $S^* \subseteq V$, максимизирующему значение субмодулярной функции.

Существенное ограничение данного алгоритма заключается в том, что он поддерживает только субмодулярные функции вида $f : 2^V \to \mathbf{R}_+$. В этой работе рассматривается функционал, определенный на всем множестве действительных чисел (область определения правдоподобия). Конечно, вероятностная интерпретация данного функционала как раз определена на $[0,1] \subset \mathbf{R}_+$, но её прикладное применение вызовет затруднения в связи с ограниченной точностью вычислений на современных вычислительных машинах.

3.5 Нижняя граница субмодулярной функции бинарного переменного

Можно обратить внимание, что в предложенном функционале левая часть суммы не является субмодулярной при условии, что $\lambda < 0$. Сумма субмодулярных функций является субмодулярной функцией, однако их разность — нет. Известно, что класс субмодулярных функций является замкнутым относительно неотрицательной линейной комбинации [22]. Пусть есть k субмодулярных функций $f_1, f_2, ..., f_k$ и k неотрицательных скалярных величин $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Тогда функциия

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$$

также является субмодулярной функцией. Помимо этого очевидно, что множество модулярных функций является подмножеством множества

субмодулярных функций, то есть, если бы существовала возможность представить правую часть выражения в виде модулярной функции, то имелась бы подкрепленная теоретической базой причина использовать аппарат субмодулярной максимизации. В работе [29] авторы рассматривают аналогичную ситуацию — максимизацию разницы двух субмодулярных функций. Они предлагают выполнить модулярную аппроксимацию правой части (оценивать нижнюю границу субмодулярной функции на заданном подмножестве), благодаря чему выражение превращается в разницу субмодулярной и модулярной функции.

Аппроксимация гладкой выпуклой функции через ряд Тейлора позволяет выразить нижнюю границу функции в окрестности заданной точки. В частности, справедливо следующее неравенство,

$$g(x) \geq g(y) + g^{'}(y) * (x - y),$$

где g - гладкая функция вида $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Аналогичный подход можно применить и для субмодулярных функций. Пусть σ является некоторой перестановкой множества V. Определим S_i^σ как некоторую цепочку перестановок вида $\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\}$. Будем говорить, что цепочка содержит подмножество $Y \subseteq V$ если $S_{|Y|}^\sigma = Y$. Определим субмодулярный градиент h_Y^f соответствующий некоторой субмодулярной функции f как

$$h_{Y,\sigma}^f(x) = \begin{cases} f(S_1^\sigma), \ i = 1, \\ f(S_i^\sigma) - f(S_{i-1}^\sigma), \ i \neq 1 \end{cases}$$

Таким образом, нижняя модулярная граница субмодулярной функции f задается как

$$h_{Y,\sigma}^f(X) \leq f(X) \ \forall X \subseteq V$$

Данная функция параметризована подмножеством $Y \subseteq V$ и перестановкой σ. Если заменить правую часть разности на субмодулярный градиент, то задача максимизации разности субмодулярных функций будет сведена к задаче максимизации субмодулярной функции. Поскольку данный подход представляется достаточно сложным в вычислительном плане, в процессе экспериментальной проверки предложенного функционала качества он не был задействован. Тем не менее, он может быть применен в случае потребности в повышении точности решения.

3.6 Алгоритм максимизации функционала качества с информационной регуляризацией

Задача оптимизации функционала качества с информационной регуляризацией подразумевает отсутствие какого-либо ограничения на мощность множества (числа “оптимальных” факторов). В работе [25] представлено целое семейство алгоритмов, предназначенных для аппроксимации задачи нахождения максимума субмодулярной функции без ограничения на мощность. Недостаток этих алгоритмов заключается в том,

что область допустимых значений подходящих для них функций ($\mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}$) не соответствует области функционала ($\mathbf{R}$).

В контексте прикладного машинного обучения один из наиболее распространенных алгоритмов — алгоритм перебора факторов (forward feature selection). Это достаточно простой жадный алгоритм, отбирающий на каждой итерации элемент множества, дающий наибольший прирост оптимизируемой функции. Вариант данного алгоритма, в котором отсутствует ограничение на мощность множества (n) искомых факторов, имеет полиномиальную вычислительную сложность $O(n^2)$. Далее предлагается задействовать этот алгоритм в задаче оптимизации рассматриваемого функционала качества.

В качестве входных данных для данного алгоритма [Alg. 3] задействуется набор факторов $X = (X_{train}, X_{test})$, целевая величина $y = (y_{train}, y_{test})$. Индекс $train$ означает обучающую выборку, $test$, соответственно, тестовую выборку. Также необходимо заранее определить множество решающих функций H, имеющих вероятностную интерпретацию ($H : X \to [0,1]^k$). Это может быть логистическая регрессия, решающие деревья, машина опорных векторов [30] и др. Далее представлен подробный разбор кода алгоритма.

Строки 1-21 содержат цикл с выходом из середины с критерием останова — отсутствием прироста функционала качества (16). В строках 2-15 осуществляется поиск фактора, дающего наибольший прирост функционалу. Сначала выполняется проверка, был ли данный фактор отобран на ранних итерациях (4) и, если нет, — осуществляется расчет функционала качества для подмножества факторов $\hat{X} \cup x \subseteq X$ в строках 5-13. Строки 5-7 отвечают за расчет выражения

$$\log L(h_{\hat{X}|y}|y).$$

Для этого выполняется построение модели $h \in H$ по обучающему подмножеству целевой величины $y(y_{train})$ и набора факторов $\hat{X} \cup \{x\}(\hat{X}_{train} \cup x_{train})$ (5). Затем, с использованием ранее построенной решающей функции h выполняется "предсказание"величины y на подмножестве тестовой выборки X_{test}. Далее рассчитывается лог-правдоподобие с использованием функции кросс-энтропии (7).

Аналогично (8-11) выполняется расчет и суммирование лог-правдоподобий по каждому отдельному фактору набора данных $x' \in X$. То есть, вычисляется правая часть выражения

$$\sum_{x \in X} \log L(h_{\hat{X}|x}|x).$$

Получившийся результат добавляется в словарь $F : X \to \mathbf{R}$. Если ни один из добавленных факторов не вызвал прирост функционала относительно предыдущей итерации, выполнение алгоритма прерывается и возвращается подмножество факторов ($\hat{X}$). Иначе — признак, дающий

максимальный прирост, добавляется в подмножество $\hat{X}$ (20), а предыдущее максимальное значение функционала перезаписывается текущим (21).

Algorithm 3: Оптимизация функционала качества с информационной регуляризацией

Входные данные : $X, y, H, F_{max} \leftarrow -\infty$
Выходные данные: Набор факторов $\hat{X}$

```
loop
    for x ∈ X do
        F := map()
        if not x ∈ X̂ then
            h ← fit(H, X̂_train ∪ {x_train}, y_train)
            y_p ← h(X̂_test ∪ {x_test})
            L ← H(y_test; y_p_test)
            R := 0
            for x' ∈ X do
                h ← fit(H, X̂_train ∪ {x_train}, x'_train)
                x'_p ← h(X̂_test ∪ {x_test})
                R := R + H(x'_test; x'_p_test)
            end
            F[x] := L − λ * R
        end
    end
    if max F < F_max then
        Прервать выполнение алгоритма и вернуть результат
    end
    X̂ := X̂ ∪ {argmax_x F}
    F_max := max F
end
```

4 Экспериментальная проверка функционала качества с информационной регуляризацией

В рамках исследования было проведено сравнение предлагаемого в данной работе подхода к поиску оптимального подмножества факторов с наиболее распространенными методами обертывания на базе алгоритма последовательного отбора факторов без ограничения на мощность множества факторов. Выполняется сравнение предложенного подхода с поиском оптимального набора факторов путем максимизации функции лог-правдоподобия и методом ранжирования модели на базе информационных критериев AIC, BIC, AICc. Далее в работе рассматриваются результаты сравнения методов на различных реальных наборах данных. На графиках предложенный в данной работе враппер-метод обозначается как MLRank.

Важно отметить, что в связи с несчетностью пространства элементарных событий, правдоподобие непрерывной случайной величины нельзя интерпретировать как вероятность. Поскольку в любом несинтетическом наборе данных непрерывные факторы все-таки встречаются, с этой проблемой необходимо считаться. Одним из способов решения данной ситуации является дискретизация непрерывных величин путем жадного разбиения по медиане [31]. Перефразируя — сведением непрерывных случайных величин к категориальным.

Программный код [32], реализующий эксперименты, был написан на языке программирования Python. Дополнительно использовались сторонние модули.

1. Pandas[7] - для работы с массивами данных в форматах *.csv*, *.tsv*.
2. Scikit-Learn[8] - для доступа к универсальному интерфейсу для моделей машинного обучения, а так же к модели логистической регрессии и различным метрикам качества.
3. LightGBM[9] - для доступа к модели Gradient Boosted Decision Trees.
4. MatplotLib[10] - для доступа к средствам визуализации графиков.
5. Loky[11] - для создания стационарных процессов, не загружающих CPU.

[7] https://github.com/pandas-dev/pandas
[8] https://scikit-learn.org/
[9] https://github.com/microsoft/LightGBM
[10] https://matplotlib.org/
[11] https://github.com/joblib/joblib

Расчеты выполнялись на электронно-вычислительной машине с 24 ядрами CPU, 48 ГБ оперативной памяти. Сам программный код был максимально оптимизирован для работы на многоядерных системах с использованием библиотеки Loky.

4.1 Выборка Adult

Первый эксперимент проводился на наборе данных Adult, находящимся в свободном доступе в репозитории Калифорнийского университета в Ирвайне [33]. Данная выборка содержит 14 атрибутов, причем практически все атрибуты являются категориальными. Соответственно, для некоторых решающих функций проведение эксперимента на этом наборе данных может быть затруднено из-за потенциального "раздувания"количества факторов за счет их бинаризации (dummy coding [34], onehot encoding [34]). Речь идет о линейных моделях и их композициях (нейронных сетях). В рамках данной работы эксперименты проводились с использованием следующих решающих функций: логистическая регрессия (logit) и композиция деревьев решений (GBDT).

Целевая величина в наборе данных Adult представляет собой бинарный индикатор — зарабатывает ли взрослый человек с заданными характеристиками более $50 000 в год. Сначала к рассмотрению предлагаются эксперименты для логистической регрессии. На графиках, представленных ниже, за ось абсцисс берется коэффициент регуляризации. Ось ординат отвечает за величину заданной метрики, которая указана в названии каждого графика. На графиках черным цветом обозначена величина лучшего из информационных критериев (AIC, BIC, AICc) для данной конфигурации эксперимента. Красным — величина MLRank с разными коэффициентами регуляризации λ. Сплошной цвет графика соответствует величине метрики, пунктирный — ее 90%-му доверительному интервалу, полученному методом бутстрапа. Аналогичная графическая схема представления информации сохраняется и на других графиках.

Создатели набора данных Adult разбили его на две части — обучающая и тестовая выборка. В процессе реализации эксперимента отбор факторов проводился на обучающей выборке. На ней же выполнялось обучение решающей функции. Далее выполнялась валидация обученной модели на тестовой выборке.

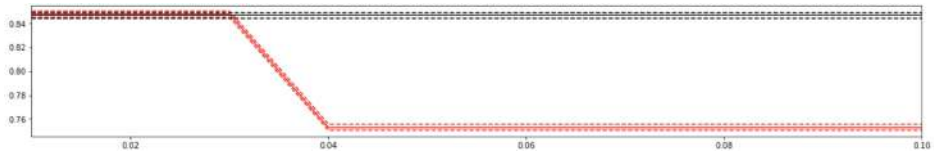


Рис. 1: LogReg, ADULT, Accuracy

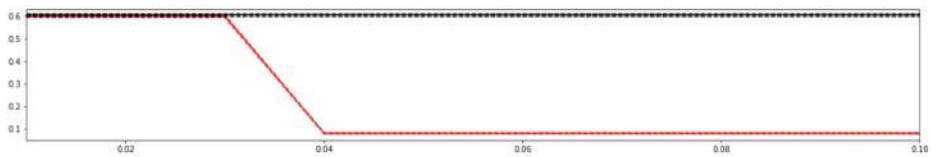


Рис. 2: LogReg, ADULT, Precision

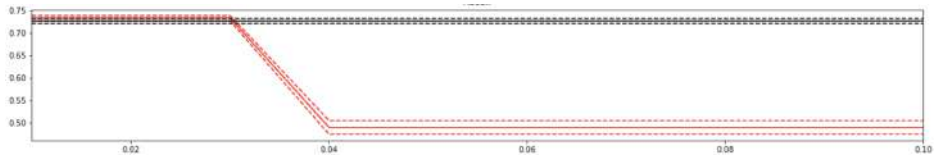


Рис. 3: LogReg, ADULT, Recall

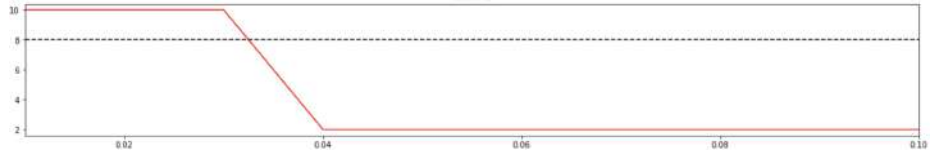


Рис. 4: LogReg, ADULT, Число факторов

Можно обратить внимание, что мощность множества отобранных факторов не слишком чувствительна к величине коэффициента регуляризации. На шаге с 0.03 к 0.04 происходит резкое снижение всех метрик вместе с числом используемых признаков. Это может быть связано как со спецификой набора данных, так и с особенностью линейной модели, использованной в данном эксперименте. Для полноты картины необходимо продублировать эксперимент для другой решающей функции — деревьев решений. Фактически, при текущей конфигурации эксперимента предлагаемый подход не дал какого-то прироста в сравнении с оптимизацией правдоподобия на множестве факторов.

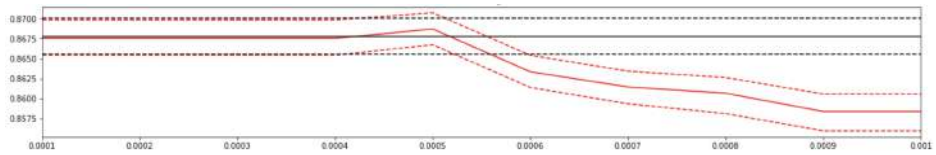


Рис. 5: GBDT, ADULT, Accuracy

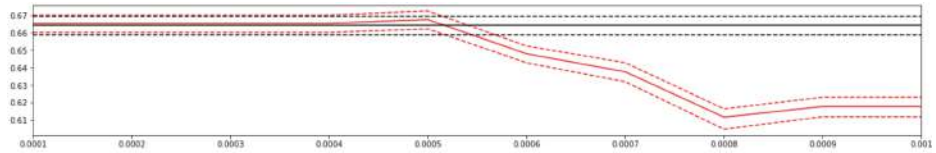


Рис. 6: GBDT, ADULT, Precision

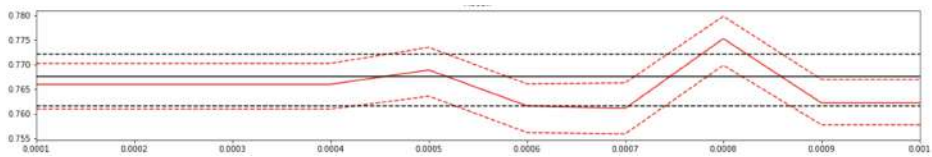


Рис. 7: GBDT, ADULT, Recall

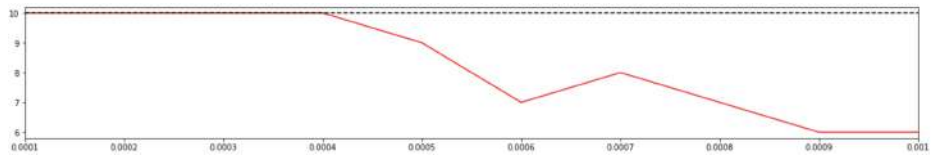


Рис. 8: GBDT, ADULT, Число факторов

Следует отметить, что автору данной работы не известно о существовании теоретического обоснования применимости информационных критериев к деревьям решений. Также встает вопрос, какую числовую характеристику деревьев можно использовать в качестве "количества коэффициентов модели" в этих критериях. В рамках исследования было принято решение взять в качестве этого параметра число деревьяев.

Хорошо видно, что при использовании решающих деревьев эффективность информационных критериев примерно соответствует оптимизации правдоподобия по набору факторов (нулевой коэффициент регуляризации). MLRank незначительно обгоняет информационные критерии по метрикам Accuracy и Precision при $\lambda = 0.0005$, используя при этом меньшее число факторов. График Recall для предложенного подхода имеет достаточно интересную форму с двумя пиками. Второй пик значительно выходит за 90-процентный доверительный интервал информационных критериев.

4.2 Выборка Breast Cancer Wisconsin

Далее рассматриваются результаты экспериментов на наборе данных Breast Cancer Wisconsin. Данная выборка также свободно доступна в репозитории Калифорнийского университета в Ирвайне. В этом наборе данных задача моделирования ставится следующим образом — необходимо на основе 33 количественных признаков, описывающих характеристики опухоли, предсказать, является ли она доброкачественной или злокачественной. Специфика данной выборки заключается в том, что она является целостной, без деления на обучающую и тестовую. Помимо этого, объем данных достаточно малый, всего 569 наблюдений.

Для проведения максимально объективного эксперимента на малой выборке было решено воспользоваться методом holdout [35] валидации.

Суть данного подхода заключается в том, что все наблюдения кроме одного, случайного, рассматриваются как обучающая выборка. То есть, проводится M итераций алгоритма, на каждом шаге которого выбирается одно тестовое наблюдение. На остальных выполняется подбор факторов и обучение модели. За счет значительного количества итераций данного алгоритма может накопиться сколько угодно результатов классификации отдельных наблюдений. Как следствие накопившиеся результаты становятся репрезентативными относительно рассматриваемого набора данных. Недостаток данного подхода — вычислительная трудоемкость. Поскольку деревья решений (GBDT) достаточно "дороги"в плане вычислительной сложности, было принято решение ограничиться двумя моделями — логистическая регрессия и многослойный перцептрон.

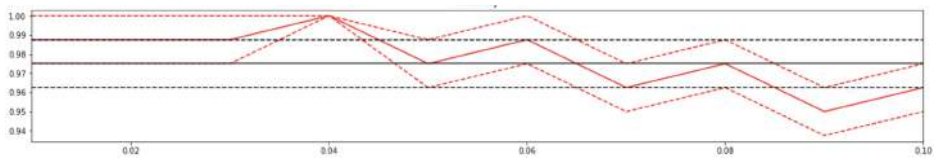


Рис. 9: LogReg, Breast Cancer, Accuracy

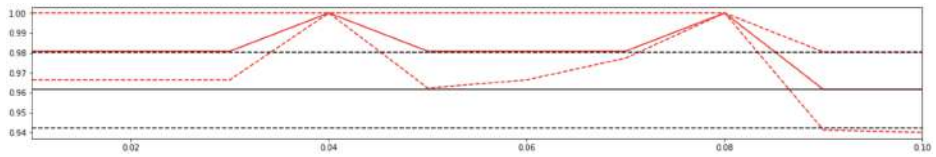


Рис. 10: LogReg, Breast Cancer, Precision

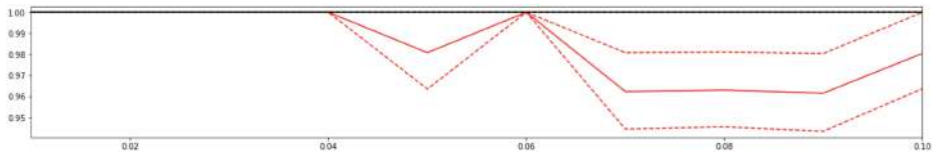


Рис. 11: LogReg, Breast Cancer, Recall

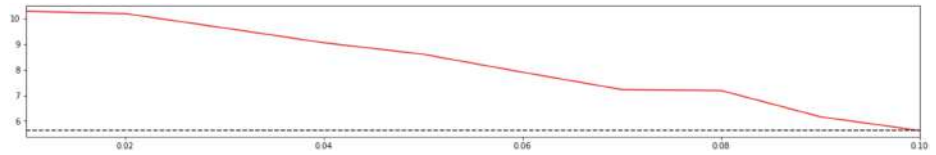


Рис. 12: LogReg, Breast Cancer, Число факторов

Первое, что бросается в глаза при анализе данных графиков, — в ряде случаев величина метрики достигает значения 100%. Причина заключается в том, что при расчете метрик собиралась статистика по 80

объектам, выбранным в ходе holdout валидации. Таким образом, если реальная точность модели достигает, скажем, 99%, то, вполне допустимо, на 80 объектах можно получить 100% точность. В подобных случаях возможно сделать допущение что значение метрики, в действительности, достигает 90% и выше.

Можно заметить, что информационные критерии очень сильно “режут” мощность множества факторов. Как следствие — наблюдается сильное проседание всех метрик качества. В данной конфигурации эксперимента (использование логистической регрессии) лучший результат достигается либо при отсутствии регуляризации, либо при ее величине от 0.04. Судя по всему, факторы имеют значительную линейную корреляцию с целевой величиной. Подозрительным выглядит “схлопывание” доверительного интервала, но если учесть что работа ведется только с 80 наблюдениями — данная ситуация перестает вызывать вопросы.

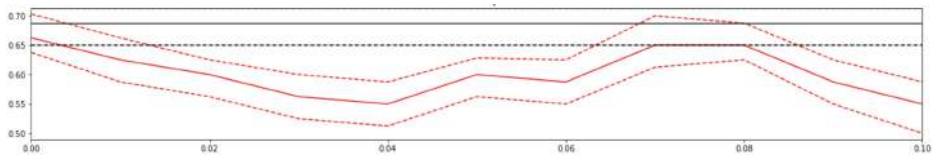


Рис. 13: MLP, Breast Cancer, Accuracy

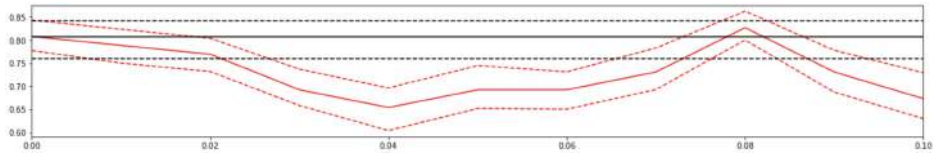


Рис. 14: MLP, Breast Cancer, Precision

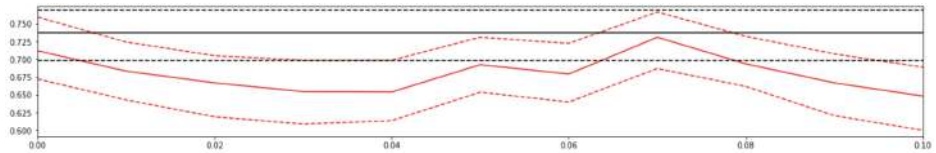


Рис. 15: MLP, Breast Cancer, Recall

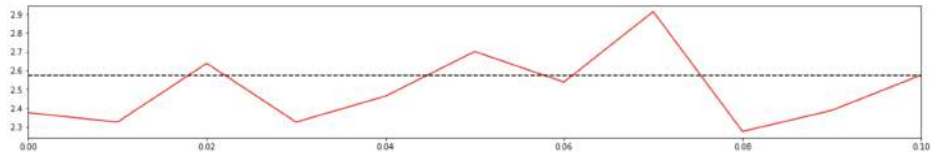


Рис. 16: MLP, Breast Cancer, Число факторов

При использовании модели многослойного персептрона предложенный подход на наборе данных Breast Cancer Wisconsin демонстрирует результат хуже, чем при использовании информационных критериев. Количество подбираемых факторов нестабильно, хотя в целом оно варьируется в диапазоне от 2 до 3 факторов. Это может говорить о неприменимости самой модели к этому набору данных.

4.3 Выборка Internet Usage Data Set

Следующая выборка, на которой проводился эксперимент, называется "Internet Usage Data Set". Выборка содержит результаты опроса, проведенного Технологическим университетом Джорджии среди пользователей интернета в 1997 году. Она так же, как и две предыдущие, находится в свободном доступе в репозитории Калифорнийского университета в Ирвайне. Данная выборка содержит 72 атрибута, из которых 71 категориальный признак, 1 — ординальный признак. На подобном наборе признаков достаточно сложно строить линейные модели (либо нейронные сети), поскольку за счет dummy-кодировки признаков пространство поиска может потенциально сильно разрастись, что повлечет дополнительную потребность в вычислительных ресурсах. По этой причине было принято решение остановиться только на композиции решающих деревьев и логистической регрессии.

К этому набору данных нет сопроводительной информации, содержащей описание признаков, либо задачи моделирования. Он распространяется в двух частях — обучающая и тестовая выборки. В рамках данного эксперимента было принято решение моделировать признак "$Who_Pays_for_Access_Work$" который, по-видимому, является индикатором того, платит ли человек за доступ к интернету со своего рабочего места из своего кошелька. К сожалению, проверить данную информацию не представляется возможным.

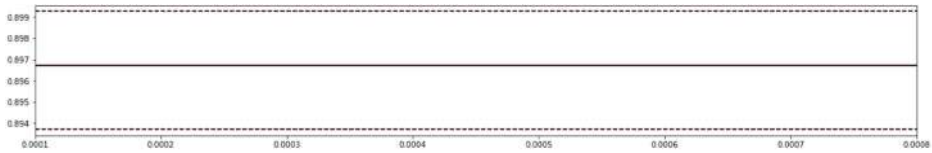


Рис. 17: GBDT, Internet, Accuracy

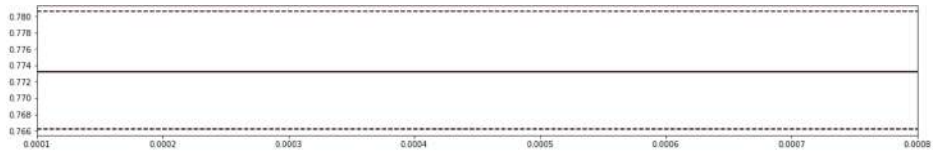


Рис. 18: GBDT, Internet, Precision

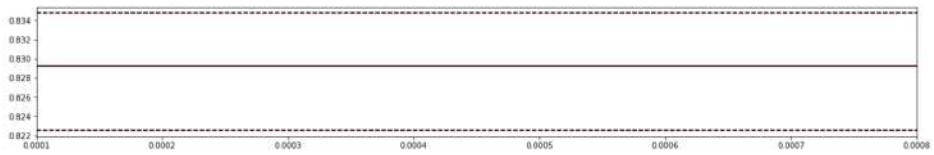


Рис. 19: GBDT, Internet, Recall

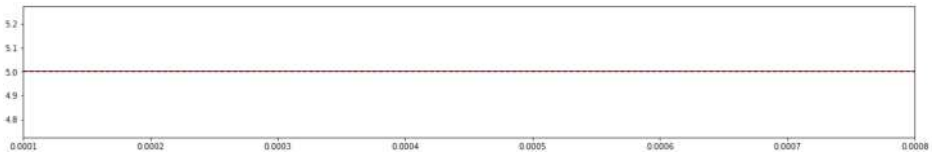


Рис. 20: GBDT, Internet, Число факторов

На графиках видно что вне зависимости от применяемого подхода и коэффициента регуляризации — число отбираемых факторов стабильно. Значения всех метрик идентичны между различными методами, что вероятнее всего говорит о том что эти факторы — наилучшим образом описывают целевую величину среди всего множества признаков с точки зрения модели решающих деревьев. На сетке коэффициента λ взят диапазон от 0.0001 до 0.0008, однако такое стабильное поведение сохраняется и на диапазоне от 0 до 1.

Рис. 21: Logit, Internet, Accuracy

Рис. 22: Logit, Internet, Precision

Рис. 23: Logit, Internet, Recall

Рис. 24: Logit, Internet, Число факторов

Предлагаемый подход, MLRank, позволяет превзойти бейслайн по всем трем метрикам качества в конфигурации эксперимента с логистической регрессией. Наилучший результат на рассматриваемой сетке достигается при величине $\lambda \geq 0.005$. Подход MLRank позволил найти дополнительный фактор, формирующий набор признаков, обладающий большей обобщающей способностью чем тот набор, который порождают бейслайны.

4.4 Выводы по результатам экспериментов

Предложенный метод, за счет наличия гипермараметра — коэффициента регуляризации λ, демонстрирует достаточно высокую гибкость при оптимизации набора факторов под различные метрики качества. В большинстве рассматриваемых тестов этот подход превзошел информационные критерии. Также, во многих экспериментах оптимизация правдоподобия без коэффициента регуляризации продемонстрировала худшее качество, что говорит об обоснованности сформулированных теоретических предпосылок для его использования.

Новый подход продемонстрировал эффективность в различных конфигурациях — малый / большой объем наблюдений, малое / большое число факторов, разные применяемые решающие функции. В половине случаев метод оказался эффективнее бейслайнов — лучшего информационного критерия и оптимизации по правдоподобию, что сигнализирует о допустимости его применения в прикладных задачах.

На наборе данных Adult предложенный подход показал положительный результат как на логистической модели, так и на деревьях решений. При использовании модели решающих деревьев удалось превзойти оптимизацию по правдоподобию и информационным критерииям по всем метрикам качества, причем мощность сформированного набора факторов оказалась на единицу меньше. В контексте логистической модели удалось обойти все информационные критерии.

На выборке Breast Cancer Wisconsin разработанный метод в композиции с логистической регрессией продемонстрировал наилучшее качество по всем метрикам, достигнув в условиях holdout валидации 100%-й точности. Для многослойного перцептрона подход оказался менее эффективным. Это может быть связано с неспособностью достаточно ком-

плексной решающей функции к обобщению на столь малом наборе данных.

Для набора данных Internet Usage наилучшим методом отсева признаков оказался предложенный подход. Он продемонстрировал хороший результат применительно к логистической регрессии и GBDT. Отличительным признаком этой выборки является значительное число исходных факторов, из которых, судя по результатам тестов, значимыми оказалось от 6 до 18 в зависимости от используемой решающей функции. Соответственно, предложенный метод демонстрирует достаточно высокую эффективность в ситуации, когда стоит задача поиска в очень большом пространстве решений.

5 Заключение

В рамках настоящего исследования, проведенного в целях разработки враппер-метода, позволяющего выполнить поиск оптимального набора факторов для произвольной решающей функции, были решены следующие задачи.

Был проведен анализ потенциальных функционалов качества для враппер-метода в контексте задач классификации. Среди них выделены наиболее распространенные метрики качества из области прикладного машинного обучения — Accuracy, Precision, Recall, AUROC. Было отмечено, что метрика Accuracy не предоставляет объективной информации о том, насколько качественным является найденный набор факторов по той причине, что она игнорирует потенциальную несбалансированность выборки. Precision и Recall имеют достаточно узкие границы применимости. AUROC — наиболее объективный показатель качества решения задачи, но отсутствие в нем штрафа за сложность модели может привести к включению множества сильно коррелированных между собой признаков.

Также были рассмотрены информационные критерии - AIC, BIC, AICc, используемые в задачах прикладной статистики для ранжирования моделей. Информационные критерии содержат штраф за число факторов, позволяющий ранжировать статистические модели по их способности к обобщению на имеющихся данных. Проблема данных методов заключается в том, что они асимптотические и предназначены только для линейных моделей (либо их композиции). Также актуальным является вопрос об их применимости к деревьям решений.

Дополнительно был рассмотрен фильтр-метод MIFS, функционал качества которого аппроксимирует величину взаимной информации между множеством факторов и целевой величиной. На базе данного метода и с учетом недостатков рассмотренных ранее функционалов качества был сформулирован новый функционал для враппер-метода.

Предложенный функционал состоит из двух частей — прироста в качестве решения задачи классификации и штрафа за захват факторов, которые коррелируют, в терминах теории информации, между собой. Если в подмножество добавляется фактор, дающий слабый прирост качества, но при этом сильно коррелирующий с остальными факторами, то он игнорируется. Функционал имеет как теоретико-информационную интерпретацию (лог-правдоподобие трактуется как кросс-энтропия), так и теоретико-вероятностную. Были рассмотрены методы оптимизации данного функционала, учитывающие его специфику — слабую субмодулярность. В рамках проведенных экспериментов был использован алгоритм последовательного отбора факторов, не имеющий ограничения на мощность множества с критерием останова — отрицательным приростом функционала.

Была проведена экспериментальная проверка враппер-метода (как

композиции из предложенного функционала качества и алгоритма оптимизации) на трех реальных наборах данных — “Adult”, “Breast Cancer Wisconsin”, “Internet Usage Data Set”. В контексте экспериментов выполнялось сравнение этого метода с оптимизацией по кросс-энтропии (логправдоподобию) и информационным критериям (AIC, BIC AICc).

На всех трех наборах данных предложенный метод продемонстрировал хорошие результаты. В половине случаев новый подход позволил обойти бейслайн — лучший из информационных критериев и оптимизацию правдоподобия. Подход показал эффективность в различных конфигурациях — малый / большой объем наблюдений, малое / большое число факторов, разные применяемые решающие функции.

В заключение нужно отметить, что была проделана значительная работа по анализу существующих подходов к поиску оптимального подмножества факторов и разработке нового метода. В результате экспериментов было выявлено, что специфика набора данных значительно влияет на то, какими должны быть гиперпараметры предложенного алгоритма. Это потенциально предоставляет возможности для дальнейших исследований с целью автоматического определения необходимого коэффициента на основе конфигурации набора данных.

Список литературы

[1] Chandrashekar Girish, Sahin Ferat. A survey on feature selection methods // Computers & Electrical Engineering. 2014. Т. 40, № 1. С. 16–28.

[2] Khalid Samina, Khalil Tehmina, Nasreen Shamila. A survey of feature selection and feature extraction techniques in machine learning // 2014 Science and Information Conference / IEEE. 2014. С. 372–378.

[3] Porkodi R. Comparison of filter based feature selection algorithms: An overview // International journal of Innovative Research in Technology & Science. 2014. Т. 2, № 2. С. 108–113.

[4] Embedded methods / Thomas Navin Lal, Olivier Chapelle, Jason Weston [и др.] // Feature extraction. Springer, 2006. С. 137–165.

[5] Murphy Kevin P. Machine learning: a probabilistic perspective. MIT press, 2012.

[6] A new multi-objective wrapper method for feature selection–Accuracy and stability analysis for BCI / Jesús González, Julio Ortega, Miguel Damas [и др.] // Neurocomputing. 2019. Т. 333. С. 407–418.

[7] Wrapper method for feature selection to classify cardiac arrhythmia / Anam Mustaqeem, Syed Muhammad Anwar, Muhammad Majid

[и др.] // 2017 39th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC) / IEEE. 2017. С. 3656–3659.

[8] Xue Xiaowei, Yao Min, Wu Zhaohui. A novel ensemble-based wrapper method for feature selection using extreme learning machine and genetic algorithm // Knowledge and Information Systems. 2018. Т. 57, № 2. С. 389–412.

[9] Chen Gang, Chen Jin. A novel wrapper method for feature selection and its applications // Neurocomputing. 2015. Т. 159. С. 219–226.

[10] A two-stage feature selection and intelligent fault diagnosis method for rotating machinery using hybrid filter and wrapper method / Xiaolong Zhang, Qing Zhang, Miao Chen [и др.] // Neurocomputing. 2018. Т. 275. С. 2426–2439.

[11] Tang Jiliang, Alelyani Salem, Liu Huan. Feature selection for classification: A review // Data classification: Algorithms and applications. 2014. с. 37.

[12] Shah S. C., Kusiak A. Data mining and genetic algorithm based gene/SNP selection // Artificial Intelligence in Medicine. 2004. Т. 31, № 3. С. 183—-196.

[13] Mays Elizabeth. Handbook of credit scoring. Global Professional Publishi, 2001.

[14] Chandola Varun, Banerjee Arindam, Kumar Vipin. Anomaly detection: A survey // ACM computing surveys (CSUR). 2009. Т. 41, № 3. с. 15.

[15] Fawcett Tom. An introduction to ROC analysis // Pattern recognition letters. 2006. Т. 27, № 8. С. 861–874.

[16] Bhat Harish S, Kumar Nitesh. On the derivation of the Bayesian Information Criterion. 2010.

[17] Akaike Hirotugu. A new look at the statistical model identification // Selected Papers of Hirotugu Akaike. Springer, 1974. С. 215–222.

[18] Cavanaugh Joseph E. Unifying the derivations for the Akaike and corrected Akaike information criteria // Statistics & Probability Letters. 1997. Т. 33, № 2. С. 201–208.

[19] Kullback Solomon, Leibler Richard A. On information and sufficiency // The annals of mathematical statistics. 1951. Т. 22, № 1. С. 79–86.

[20] Feature selection: A data perspective / Jundong Li, Kewei Cheng, Suhang Wang [и др.] // ACM Computing Surveys (CSUR). 2018. Т. 50, № 6. с. 94.

[21] Battiti Roberto. Using mutual information for selecting features in supervised neural net learning // IEEE Transactions on neural networks. 1994. Т. 5, № 4. С. 537–550.

[22] Bach Francis [и др.]. Learning with submodular functions: A convex optimization perspective // Foundations and Trends® in Machine Learning. 2013. Т. 6, № 2-3. С. 145–373.

[23] Chen B. Hong J. Wang Y. The Minimum Feature Subset Selection Problem // J. of Comput. Sci. Technol. 1997. Т. 12, № 2. С. 145–153.

[24] Fujishige Satoru, Hayashi Takumi, Isotani Shigueo. The minimum-norm-point algorithm applied to submodular function minimization and linear programming. 2006.

[25] A tight linear time (1/2)-approximation for unconstrained submodular maximization / Niv Buchbinder, Moran Feldman, Joseph Seffi [и др.] // SIAM Journal on Computing. 2015. Т. 44, № 5. С. 1384–1402.

[26] Nemhauser George L, Wolsey Laurence A, Fisher Marshall L. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions—I // Mathematical programming. 1978. Т. 14, № 1. С. 265–294.

[27] Koller Daphne, Friedman Nir. Probabilistic graphical models: principles and techniques. MIT press, 2009.

[28] Restricted strong convexity implies weak submodularity / Ethan R Elenberg, Rajiv Khanna, Alexandros G Dimakis [и др.] // arXiv preprint arXiv:1612.00804. 2016.

[29] Iyer Rishabh, Bilmes Jeff. Algorithms for approximate minimization of the difference between submodular functions, with applications // arXiv preprint arXiv:1207.0560. 2012.

[30] Platt John [и др.]. Probabilistic outputs for support vector machines and comparisons to regularized likelihood methods // Advances in large margin classifiers. 1999. Т. 10, № 3. С. 61–74.

[31] On the practice of dichotomization of quantitative variables. / Robert C MacCallum, Shaobo Zhang, Kristopher J Preacher [и др.] // Psychological methods. 2002. Т. 7, № 1. с. 19.

[32] Программный код проекта MLRank. https://github.com/isaintnik/ml-rank. Accessed: 2020-05-01.

[33] UCI Machine Learning Repository. https://archive.ics.uci.edu/ml/index.php. Accessed: 2020-05-01.

[34] Potdar Kedar, Pardawala Taher, Pai Chinmay. A Comparative Study of Categorical Variable Encoding Techniques for Neural Network Classifiers // International Journal of Computer Applications. 2017. 10. Т. 175. С. 7–9.

[35] Kohavi Ron [и др.]. A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection // Ijcai / Montreal, Canada. Т. 14. 1995. С. 1137–1145.

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Щадинского
Дмитрия
Михайловича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Гидродинамика дисперсного турбулентного потока в канале с шероховатыми стенками» являются результаты, полученные в разделе 5 по выводу граничных условий на шероховатой стенке.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

В период с 01 января по 15 февраля 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: уравнение для функции плотности вероятности, двухфазный турбулентный поток, граничные условия для шероховатой стенки, система уравнений для моментов, probability density function, two-phase turbulence, functional differentiation, equations for moments, boundary conditions, rough wall в выдаче поисковиков был исследован ряд статей, обзор которых представлен во введении работы, и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Деревичем Игорем Владимировичем, профессором кафедры прикладной математики факультета фундаментальных наук Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.
- Опубликована статья:
  Derevich I.V., Shchadinskiy D.M., Tun Z.H. Probabilistic model of dispersed turbulent flow in channels with rough walls // Aerosol Science and Technologies. 2020. DOI: 10.1080/02786826.2020.1739617

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с моим научным руководителем и рецензентами журнала следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором, предоставляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 29.06.2020. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись

Щадинский
Дмитрий Михайлович
31 мая 2020
г. Москва, Россия

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Прикладная математика»

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

«Гидродинамика дисперсного турбулентного потока в канале с шероховатыми стенками»

Студент ФН2-42М _____ Д.М. Щадинский
(Подпись, дата)

Руководитель ВКР _____ И.В. Деревич
(Подпись, дата)

Нормоконтролер _____ М.М. Лукашин
(Подпись, дата)

2020 г.

РЕФЕРАТ

Расчетно-пояснительная записка 80 стр., 12 рис., 40 источников.

Ключевые слова: уравнение для функции плотности вероятности, двухфазный турбулентный поток, граничные условия для шероховатой стенки, система уравнений для моментов.

Построена замкнутая модель динамики дисперсной фазы частиц в турбулентном потоке газа в шероховатых каналах. Получено замкнутое уравнение для функции плотности вероятности (ФПВ) распределения скоростей и координат частиц. Построена система уравнений для моментов флуктуаций скорости частиц. Найдено приближенное аналитическое решение уравнения для ФПВ, на основе которого производится замыкание системы для средней концентрации, скорости и вторых моментов флуктуаций скорости частиц. Также с помощью приближенного решения уравнения для ФПВ получены граничные условия для шероховатой стенки канала. Вывод граничного условия основан на учете направления вектора скорости частиц, соударяющихся о стенку, и направления вектора нормали случайно расположенной плоскости, моделирующей неровности стенки. Рассмотрено течение двухфазного потока в круглой вертикальной трубе. Представлены результаты расчетов параметров дисперсной фазы, которые сопоставляются с экспериментальными данными. Показано принципиальное различие в механизме генерации случайного движения частиц в каналах с гладкими и шероховатыми стенками.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТ 2

ВВЕДЕНИЕ 5

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ И КООРДИНАТ ЧАСТИЦ 9

1.1. Уравнения динамики частиц 9

1.2. Уравнение для индикаторной функции 10

1.3. Незамкнутое уравнение для ФПВ 12

1.4. Замкнутое уравнение для ФПВ 13

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ 16

2.1. Уравнение для числовой концентрации 17

2.2. Уравнение для осредненной скорости дисперсной фазы 18

2.3. Уравнение для вторых моментов флуктуаций скорости частиц 18

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФПВ 21

3.1. Равновесная ФПВ 21

3.2. Уравнение для ФПВ в нулевом приближении 23

3.3. Вычисление производных от нулевого приближения 24

3.4. Уравнение для первой поправки 27

4. РАСЧЕТ МОМЕНТОВ ОТ ФПВ 30

4.1. Проверка баланса частиц 30

4.2. Проверка флуктуаций скорости 30

4.3. Вычисление корреляции $\langle \boldsymbol{v_i v_j} \rangle$ 31

4.4. Вычисление корреляции $\langle \boldsymbol{v_i^2 v_k} \rangle$ 31

5. ВЫВОД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ 32

5.1. Столкновение частиц со случайными неровностями стенки канала 32

5.2. ФПВ отраженных от стенки канала частиц 39
5.3. Граничное условие для концентрации 43
5.4. Граничное условие для аксиальной скорости 45
5.5. Граничные условия для дисперсии флуктуаций скорости частиц 46
6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ 48
6.1. Основные параметры турбулентного потока 48
6.2. Постановка задачи для вертикальной цилиндрической трубы 49
6.2.1. Уравнение для концентрации 50
6.2.2. Уравнение для аксиальной скорости 50
6.2.3. Уравнение для дисперсии радиальных флуктуаций скорости 52
6.2.4. Уравнение для дисперсии аксиальных флуктуаций скорости 52
6.3. Система уравнений в безразмерном виде 54
6.3.1. Уравнение для концентрации 54
6.3.2. Уравнение для аксиальной скорости 55
6.3.3. Уравнение для дисперсии радиальных флуктуаций скорости 55
6.3.4. Уравнение для дисперсии флуктуаций аксиальной скорости 56
6.4. Расчет коэффициентов отражения импульса 57
6.5. Численное решение 58
6.6. Результаты расчетов и выводы 62
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 66
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 68
ПРИЛОЖЕНИЕ 72

ВВЕДЕНИЕ

Дисперсные турбулентные потоки широко представлены в различных технических приложениях и часто встречаются в природе. В ряде технических устройств реализуют перемещение дисперсных материалов в газовых турбулентных потоках в каналах, поверхность которых часто шероховата и неоднородна. По причине наличия инерции частиц их скорость и концентрация на стенке канала не равна нулю [1], [2], [3]. В этом случае столкновение частиц со случайными неровностями ведет к дополнительной генерации хаотического движения. Экспериментальные данные указывают на значительное уменьшение аксиальной скорости и нетипично большую амплитуду флуктуаций скорости частиц около стенки [4], [5], [6].

В дисперсных турбулентных потоках в каналах с гладкими (отполированными) стенками наблюдается существенная неоднородность флуктуаций скорости частиц. Увеличение инерции частиц ведет к уменьшению интенсивности их хаотического движения в поперечном направлении. В аксиальном же направлении наоборот, наблюдается увеличение дисперсии флуктуаций скорости примеси [7]. В шероховатых каналах увеличение размера частиц ведет к более изотропному распределению флуктуаций скорости дисперсной фазы. Более того, с увеличением инерции частиц амплитуда флуктуаций скорости, как в аксиальном, так и нормальном направлении становится даже больше, чем у газа [6]. Анализ экспериментальных данных показывает, что механизм генерации хаотического движения частиц в случае гладких и шероховатых стенках канала принципиально разный.

Изучение движения инерционных частиц в каналах с шероховатыми стенками имеет как научный, так и практический интерес. Например, дополнительное влияние шероховатости на хаотическое движение дисперсной фазы обеспечивает её более устойчивую и надежную транспортировку. Большое различие в

скоростях примеси и газа способно вести к генерации мелкомасштабной турбулентности вблизи поверхности частицы. Этот эффект увеличивает интенсивность передачи теплоты в двухфазном турбулентном потоке.

Теоретическое моделирование динамики турбулентного двухфазного потока в каналах с шероховатыми стенками предусматривает решение двух задач. Во-первых, необходимо описать случайную шероховатость стенки, при этом необходимо учесть направление скорости соударяющихся о стенку частиц и их диаметр [8], [9]. А, во-вторых, нужно обеспечить преобразование импульса отраженных от стенки частиц [10], [11].

Традиционно, шероховатая поверхность моделируется с помощью плоскостей, наклоненных к изначально гладкой стенки канала [1], [12]. Учитывается, что вероятность столкновения частицы со случайной плоскостью не равна нулю, если скалярное произведение вектора скорости частицы и вектора нормали к этой плоскости меньше нуля.

Как правило динамика соударения дисперсной фазы о стенку канала моделируется в переменных Лагранжа. Подобные вычислительные методы основаны на сохранении импульса и момента импульса частиц, отраженных от шероховатой стенки [11], [13], [14]. При моделировании такого сложного взаимодействия, используя метод Лагранжа, требуется просчитать траектории миллионов частиц. Данный подход требует существенных затрат процессорного времени, а также ресурсов оперативной памяти. Но при этом, практически важные результаты были получены именно этим путем, с помощью осреднения движения огромного числа траекторий. Полученную таким образом информацию можно использовать для верификации других методов.

Для практических, инженерных расчетов более перспективен подход Эйлера при описании движения дисперсной фазы [15], [16], [17], [18], [19], [20]. В переменных Эйлера дисперсная фаза представляет собой континуум. В литературе присутствует эмпирические процедуры преобразования уравнений в форме

Лагранжа для частиц в приближении сплошной среды. Значительные сложности при этом возникают при выводе граничных условий для дисперсной фазы на шероховатой стенке канала. Для гладкой поверхности необходимо принять во внимание потерю импульса частиц, отраженных от стенки [19], [20], [21]. Для шероховатой поверхности необходимо описать взаимное преобразование компонент скорости отраженных частиц. В дополнении к этому нужно принять в рассмотрение вероятности направления вектора скорости соударяющихся о стенку частиц и направления нормали к случайной плоскости, моделирующей неровность [22].

Предложенный в данной работе метод для описания динамики дисперсного турбулентного потока основан на современных достижениях теории случайных процессов. Все осредненные параметры дисперсной фазы содержатся в функции плотности вероятности распределения координат и скоростей частиц [23], [24]. Незамкнутое уравнение для ФПВ следует из классического подхода А.Н. Колмогорова, развитого для аксиоматики теории случайных процессов. Для дельта-коррелированных во времени случайных процессов метод замыкания уравнения для ФПВ строго разработан [25]. При этом турбулентное поле скорости имеет сложную пространственно-временную структуру и не может моделироваться дельта-коррелированными случайными процессами [26], [27], [28].

Целью данной работы является описание динамики дисперсной фазы турбулентного потока в канале с шероховатой стенкой, используя метод функции плотности вероятности. На первом этапе выводится замкнутое уравнение для ФПВ. Предполагается, что флуктуации скорости газа, которые «видит» частица, представляют собой заданный случайный процесс. Полученное уравнение для ФПВ сложно само по себе для рассмотрения, но оно является основой дальнейших рассуждений.

С помощью замкнутого уравнения для ФПВ строится система уравнений для моментов: уравнение для средней концентрации, скорости и вторых моментов флуктуаций скорости частиц. При этом возникает проблема замыкания уже данной системы.

Далее строится приближенное решения уравнения для ФПВ. Для этого используется метод аналогичный методу Грэда из кинетической теории газов [29], [30], [31], [32]. Решение содержит градиенты осредненных параметров дисперсной фазы в линейном приближении. С помощью данного решения производится замыкание системы для моментов.

При выводе граничного условия для данной системы на шероховатой стенке, используем метод моделирования неровностей с помощью случайных плоскостей [1]. В этом случае учитываются коэффициенты восстановления импульса частиц. На основе точного описания преобразования компонент скорости отраженных частиц представлены эффективные коэффициенты восстановления импульса для шероховатой стенки. С помощью приближенного решения уравнения для ФПВ вычисляются потоки массы, импульса и турбулентной энергии движения частиц, падающих на поверхность и отраженных от нее. Исходя из предположения, что сумма потоков параметров дисперсной фазы около стенки равна потоку вдали от нее, получены граничные условия для системы уравнений для моментов на шероховатой стенке.

Наконец, для верификации полученной модели была рассмотрена задача течения газа с дисперсной примесью в вертикальной трубе. Несущая среда моделируется с помощью однопараметрической модели турбулентности, дисперсная среда — с помощью предложенной модели. Построена разностная схема для решения системы уравнений, входящих в указанные модели, в круглой трубе. Проведены расчеты распределения параметров как несущей, так и дисперсной фазы турбулентного потока в круглой вертикальной трубе. Результаты расчетов качественно сопоставляются с экспериментальными данными, заимствован-

ными из литературы [6], [7]. Произведен анализ полученных результатов, продемонстрировано принципиальное различие динамики дисперсной фазы в гладких и шероховатых каналах.

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ И КООРДИНАТ ЧАСТИЦ

1.1. Уравнения динамики частиц

Твердые сферические частицы движутся в турбулентном потоке газа в канале. На них оказывают влияния силы сопротивления и массовые силы. Объем дисперсной примеси мал, по сравнению с объемом канала, поэтому считаем, что частицы не соударяются друг с другом и не оказывают влияния на несущую фазу. В этом случае уравнения динамики одиночной частицы в вязком газе имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau_U}\Big(\mathbf{U}\big(\mathbf{X}(t),t\big) - \mathbf{V}(t)\Big) + \mathbf{g}, \quad \mathbf{V}(0)=\mathbf{V}_0, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{V}(t)$ — скорость частицы, $\mathbf{X}(t)$ — координата частицы, $\mathbf{g}$ — ускорение массовых сил, $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$ — скорость газа, τ_U — время динамической релаксации частицы.

Для дальнейших теоретических рассуждений запишем уравнения динамики частицы в интегральной форме

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_U}\right) + \frac{1}{\tau_U}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\mathbf{U}\big(\mathbf{X}(s),s\big)\mathrm{d}s + \mathbf{g}\tau_U\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_U}\right)\right],$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_0\tau_U\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_U}\right)\right] + \int_0^t\left[1-\exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\right]\mathbf{U}\big(\mathbf{X}(s),s\big)\mathrm{d}s +$$

$$+\mathbf{g}\tau_U\left\{t-\tau_U\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_U}\right)\right]\right\}.$$

Для достаточно больших рассматриваемых временных промежутков $t \gg \tau_U, t \gg T_E$ (T_E — интегральный временной масштаб Эйлера) получим

$$\mathbf{V}(t) = \frac{1}{\tau_U}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\mathbf{U}\left(\mathbf{X}(s), s\right)\mathrm{d}s + \mathbf{g}\tau_U, \tag{3}$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_0\tau_U + \int_0^t \left[1 - \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\right]\mathbf{U}\left(\mathbf{X}(s), s\right)\mathrm{d}s + \mathbf{g}\tau_U t. \tag{4}$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (3) представляет скорость осаждения частиц под действием силы тяжести. Второе слагаемое в правой части уравнения (4) — длина инерционного пробега частицы.

Скорость газа представим в виде суммы осредненной компоненты и флуктуаций $\mathbf{u}$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},t) = \left\langle \mathbf{U}(\mathbf{x},t)\right\rangle + \mathbf{u}(\mathbf{x},t),\ \left\langle \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\right\rangle = 0. \tag{5}$$

Здесь и далее символом $\langle\cdot\rangle$ обозначается осреднение по ансамблю турбулентных реализаций.

1.2. Уравнение для индикаторной функции

Основной метод описания динамики хаотического движения частиц основан на использовании функции плотности вероятности распределения скоростей и координат частиц. Для вывода уравнения для ФПВ будем использовать метод предложенный А.Н. Колмогоровым. Метод вывода замкнутого уравнения для ФПВ был в дальнейшем развит во многих работах (например, [23]). Вводим индикаторную функцию, «вырезающую» случайную траекторию в фазовом пространстве

$$\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) = \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\right)\delta\left(\mathbf{V} - \mathbf{V}(t)\right).$$

Здесь $\mathbf{x},\mathbf{V}$ — точки фазового пространства, $\mathbf{X}(t),\mathbf{V}(t)$ — случайные координата и скорость частицы, δ — дельта-функция Дирака. Запишем частную производную по времени для индикаторной функции

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)=\frac{\partial}{\partial t}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Подставив уравнения динамики частиц (1), (2), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\mathbf{V}(t)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\left[\frac{1}{\tau_U}\left(\mathbf{U}(\mathbf{X}(t),t)-\mathbf{V}(t)\right)+\mathbf{g}\right].$$

Воспользовавшись свойством δ-функции $\delta(x-a)f(x)=\delta(x-a)f(a)$, получим замкнутое уравнение для индикаторной функции (уравнение Лиувилля)

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)=-\mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))-$$
$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\left\{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\left(\frac{\mathbf{U}(\mathbf{x},t)-\mathbf{V}}{\tau_U}+\mathbf{g}\right)\right\}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)+\mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\left\{\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\left(\frac{\mathbf{U}(\mathbf{x},t)-\mathbf{V}}{\tau_U}+\mathbf{g}\right)\right\}=0. \qquad (6)$$

Индикаторная функция несёт информацию о всех динамических параметрах частиц. Например, введем актуальную числовую концентрацию частиц

$$N(\mathbf{x},t)=\int\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\mathrm{d}\mathbf{V}=\int\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\mathrm{d}\mathbf{V}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))$$

и актуальную скорость дисперсной фазы $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющую соотношению

$$N(\mathbf{x},t)\mathbf{V}(\mathbf{x},t)=\int \mathbf{V}\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\mathrm{d}\mathbf{V}=\mathbf{V}(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t)).$$

Отметим, что использование индикаторной функции позволяет нам говорить об актуальной концентрации и скорости даже одной частицы.

1.3. Незамкнутое уравнение для ФПВ

Осреднение индикаторной функции по ансамблю турбулентных реализаций приводит к функции плотности вероятности распределения скоростей и координат частиц

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)=\langle\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\rangle=\langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\rangle.$$

ФПВ позволяет вычислить осредненные параметры дисперсной фазы, например, среднюю концентрацию $\langle N(\mathbf{x},t)\rangle$ и скорость $\langle\mathbf{V}(\mathbf{x},t)\rangle$.

$$\langle N(\mathbf{x},t)\rangle=\int\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\mathrm{d}\mathbf{V}=\int\langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\rangle\mathrm{d}\mathbf{V}=\langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\rangle, \qquad (7)$$

$$\langle N(\mathbf{x},t)\rangle\langle\mathbf{V}(\mathbf{x},t)\rangle=\int\mathbf{V}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\mathrm{d}\mathbf{V}=\langle\mathbf{V}(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\rangle, \qquad (8)$$

Введем флуктуации скорости дисперсной фазы как

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}-\langle\mathbf{V}(\mathbf{x},t)\rangle.$$

Осреднив флуктуации скорости по ансамблю турбулентных реализаций, получим

$$\langle\mathbf{v}N(\mathbf{x},t)\rangle=\int\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\left(\mathbf{V}-\langle\mathbf{V}(\mathbf{x},t)\rangle\right)\mathrm{d}\mathbf{V}=0. \qquad (9)$$

Наконец, осреднив уравнение для индикаторной функции (6), запишем незамкнутое уравнение для ФПВ

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)+\mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\left\{\left(\frac{\langle \mathbf{U}(\mathbf{x},t)\rangle-\mathbf{V}}{\tau_U}+\mathbf{g}\right)\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\right\}=$$
$$=-\frac{1}{\tau_U}\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\langle \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\rangle. \qquad (10)$$

Слагаемое в правой части уравнения (10) описывает взаимодействие («столкновение») между частицами и энергоёмкими вихрями.

1.4. Замкнутое уравнение для ФПВ

Для получения замкнутого уравнения для ФПВ необходимо вычислить корреляцию между случайной скоростью и индикаторной функцией

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\rangle=\langle \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\rangle.$$

Флуктуации скорости газа на траектории частиц моделируется случайным процессом Гаусса. Это предположение согласуется с данными прямого численного моделирования [33]. Для вычисления корреляции между флуктуациями скорости газа и индикаторной функцией используем формулу Фурутсу-Новикова [23]

$$\langle u_n(\mathbf{x},t)\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\rangle=\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\int_0^t \mathrm{d}s\langle u_n(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x}',\xi)\rangle\left\langle\frac{\delta\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}\right\rangle. \qquad (11)$$

Используем гипотезу локальной стационарной изотропной турбулентности

$$\langle u_n(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x}',\xi)\rangle=\langle u_n u_j\rangle\Psi_E(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-\xi),\quad n,j=\overline{1,3},$$

где $\Psi_E(\mathbf{r},t)$ — двухточечная корреляция Эйлера.

Функциональная производная индикаторной функции имеет вид

$$\frac{\delta\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\frac{\delta X_i(t)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}-\frac{\partial}{\partial V_i}\phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\frac{\delta V_i(t)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}. \qquad (12)$$

В процессе вычисления функциональных производных от скорости и координаты частицы используем формулы (3), (4). Основываясь на принципе причинности, т.е. $\dfrac{\delta X_k(s)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}=0,$ при $s<\xi$, и основном правиле функционального дифференцирования

$$\frac{\delta u_i(\mathbf{x},s)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}=\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(s-\xi),$$

получим систему

$$\frac{\delta V_i(t)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}=\frac{\delta_{ij}}{\tau_U}\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)\delta\big(\mathbf{x}'-\mathbf{X}(\xi)\big)+\frac{1}{\tau_U}\int_\xi^t\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)$$
$$\left\{\frac{\partial\langle U_i(\mathbf{x},s)\rangle}{\partial x_k}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(s)}\frac{\delta X_k(s)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}+\frac{\partial u_i(\mathbf{x},s)}{\partial x_k}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(s)}\frac{\delta X_k(s)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}\right\}\mathrm{d}s,$$
$$\frac{\delta X_i(t)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}=\delta_{ij}\left[1-\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)\right]\delta\big(\mathbf{x}'-\mathbf{X}(\xi)\big)+\int_\xi^t\left[1-\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)\right]$$
$$\left\{\frac{\partial\langle U_i(\mathbf{x},s)\rangle}{\partial x_k}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(s)}\frac{\delta X_k(s)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}+\frac{\partial u_i(\mathbf{x},s)}{\partial x_k}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(s)}\frac{\delta X_k(s)}{\delta u_j(\mathbf{x}',\xi)}\right\}\mathrm{d}s.$$

Решив данную систему (см. [20]), с учетом уравнений (10), (11), (12) получим замкнутое уравнение для ФПВ

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)+V_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)+\frac{\partial}{\partial V_i}\left\{\left(\frac{\langle U_i\rangle+\tau_U g_i-V_i}{\tau_U}\right)\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\right\}=$$
$$=\frac{1}{\tau_U}f_U\langle u_iu_j\rangle\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)}{\partial V_i\partial V_j}+q_U\langle u_iu_j\rangle\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)}{\partial V_i\partial x_j}. \qquad (13)$$

Полученное уравнение — прямое уравнение Колмогорова. Слагаемые в его правой части описывают взаимодействие частиц с турбулентными вихрями.

Функции f_U, g_U представляют отклик случайной скорости и координат частицы на влияние флуктуаций скорости газа

$$\left\langle u_i u_j \right\rangle f_U = \left\langle u_i u_j \right\rangle f_U^{(0)} + f_U^{(1)} \tau_U \frac{1}{2}\left[\left\langle u_i u_k \right\rangle \frac{\partial \left\langle U_j \right\rangle}{\partial x_k} + \left\langle u_j u_k \right\rangle \frac{\partial \left\langle U_i \right\rangle}{\partial x_k} \right], \tag{14}$$

$$\left\langle u_i u_j \right\rangle q_U = \left\langle u_i u_j \right\rangle q_U^{(0)} + q_U^{(1)} \tau_U \frac{1}{2}\left[\left\langle u_i u_k \right\rangle \frac{\partial \left\langle U_j \right\rangle}{\partial x_k} + \left\langle u_j u_k \right\rangle \frac{\partial \left\langle U_i \right\rangle}{\partial x_k} \right]. \tag{15}$$

Конкретные значения данных величин определяются с помощью автокорреляционной функции флуктуаций скорости газа вдоль траектории частиц

$$f_U^{(0)} = \frac{1}{\tau_U}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\Psi_L^{(p)}(s)\,\mathrm{d}s, \quad f_U^{(1)} = \frac{1}{\tau_U}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\left(1+\frac{s}{\tau_U}\right)\Psi_L^{(p)}(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$q_U^{(0)} = \frac{1}{\tau_U}\int_0^\infty \left[1-\exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\right]\Psi_L^{(p)}(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$q_U^{(1)} = \frac{1}{\tau_U}\int_0^\infty \frac{s}{\tau_U}\left[1+\exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\right] - 2\left[1-\exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\right]\Psi_L^{(p)}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Для автокорреляционной функции вида $\Psi_L^{(p)}(s) = \exp\left(-\frac{t}{T_L^{(p)}}\right)$, где $T_L^{(p)}$ — интегральный временной масштаб Лагранжа (см. [34]), функции отклика примут вид

$$\begin{gathered} f_U^{(0)} = \frac{1}{1+\tau_U/T_E}, \quad f_U^{(1)} = \frac{T_L^{(p)}/\tau_U}{\left(1+\tau_U/T_E\right)^2}, \\ q_U^{(0)} = \frac{T_L^{(p)}}{\tau_U} - \frac{1}{1+\tau_U/T_L^{(p)}}, \quad q_U^{(1)} = \frac{\left(T_L^{(p)}/\tau_U\right)^2}{\left(1+\tau_U/T_L^{(p)}\right)^2}. \end{gathered} \tag{16}$$

На сегодняшний день не существует надежных методов как численного, так и аналитического решения уравнения для ФПВ вида (13) [35]. Поэтому вычисление параметров дисперсного турбулентного потока базируется на решении системы уравнений для моментов.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ

Перейдем к уравнению для ФПВ во флуктуациях скорости, т.е.

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) \Leftrightarrow \tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t).$$

При этом

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial v_k}\frac{\partial\langle V_k(\mathbf{x},t)\rangle}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) = \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial v_k}\frac{\partial\langle V_k(\mathbf{x},t)\rangle}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial V_i}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) = \frac{\partial}{\partial v_i}\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t), \quad k = \overline{1,3}.$$

Тогда уравнение (13) относительно $\tilde{\Phi}$ после преобразований будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \left(v_k + \langle V_k(\mathbf{x},t)\rangle\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) - \\
&-v_k\frac{\partial\langle V_i(\mathbf{x},t)\rangle}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial v_i}\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \frac{\partial}{\partial v_i}\left\{\left(-\frac{\partial\langle V_i(\mathbf{x},t)\rangle}{\partial t} - \langle V_k(\mathbf{x},t)\rangle\frac{\partial\langle V_i(\mathbf{x},t)\rangle}{\partial x_k} + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{\langle U_i(\mathbf{x},t)\rangle + \tau_U g_i - \langle V_i(\mathbf{x},t)\rangle - v_i}{\tau_U}\right)\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\right\} = q_U\langle u_i u_j\rangle\frac{\partial^2\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial v_j\partial x_i} + \\
&+\frac{1}{\tau_U}\left[f_U\langle u_i u_j\rangle - \tau_U q_U\langle u_k u_j\rangle\frac{\partial\langle V_i(\mathbf{x},t)\rangle}{\partial x_k}\right]\frac{\partial^2\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial v_i\partial v_j}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Тильду и аргументы функций далее не пишем.

Используя формулы для полной (субстанциональной) производной по времени

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle V_i\rangle\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{18}$$

преобразуем уравнение для ФПВ (17) к следующему виду:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}+v_k\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+\left(-\frac{d\langle V_i\rangle}{dt}-v_k\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\frac{\langle U_i\rangle+\tau_U g_i-\langle V_i\rangle}{\tau_U}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}=$$

$$=\frac{1}{\tau_U}\left[f_U\langle u_iu_j\rangle-\frac{\tau_U q_U}{2}\left(\langle u_ku_j\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\langle u_ku_i\rangle\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_k}\right)\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_i\partial v_j}+ \qquad (19)$$

$$+\frac{1}{\tau_U}\frac{\partial}{\partial v_i}(v_i\Phi)+q_U\langle u_iu_j\rangle\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial x_i}.$$

Поставим очевидные граничные условия

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\big|_{|\mathbf{v}|\to\infty}\to 0,\ \left.\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial v_i}\right|_{|\mathbf{v}|\to\infty}\to 0.$$

2.1. Уравнение для числовой концентрации

Интегрируем уравнение (17) по всему пространству скоростей и получаем уравнение для момента нулевого порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\Phi\mathrm{d}\mathbf{v}+\frac{\partial}{\partial x_k}\int v_k\Phi\mathrm{d}\mathbf{v}+\langle V_k\rangle\frac{\partial}{\partial x_k}\int\Phi\mathrm{d}\mathbf{v}-\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}\int v_k\frac{\partial}{\partial v_i}\Phi\mathrm{d}\mathbf{v}=0.$$

С учетом формул (7)-(9) и результата интегрирования последнего слагаемого

$$-\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}\int v_k\frac{\partial}{\partial v_i}\Phi\mathrm{d}\mathbf{v}-\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}\left[v_k\,\Phi\big|_{|\mathbf{v}|\to\infty}+\int\Phi\delta_{ki}\mathrm{d}\mathbf{v}\right]=\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_i}\langle N\rangle$$

получим уравнение баланса числовой концентрации частиц

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle N\rangle+\frac{\partial}{\partial x_i}\langle V_i\rangle\langle N\rangle=0.$$

Используя полную производную (18), имеем

$$\frac{\mathrm{d}\langle N\rangle}{\mathrm{d}t}+\langle N\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_i}=0. \qquad (20)$$

2.2. Уравнение для осредненной скорости дисперсной фазы

Умножаем уравнение для ФПВ (17) на флуктуацию скорости v_i и интегрируем по пространству скоростей аналогично предыдущему случаю. Тогда получим уравнение для осредненной скорости дисперсной фазы

$$\left(\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial t}+\langle V_k\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}\right)\langle N\rangle+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\langle v_i v_k\rangle\langle N\rangle\right)=$$
$$=\frac{\langle U_i\rangle+\tau_U g_i-\langle V_i\rangle}{\tau_U}\langle N\rangle-q_U^{(0)}\langle u_i u_k\rangle\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial x_k},$$

где

$$\langle v_i v_k\rangle\langle N\rangle=\int v_i v_k \Phi \mathrm{d}\mathbf{v}.$$

Преобразовав данное уравнение и введя коэффициент турбулентной диффузии

$$D_{ik}=\tau_U\left(\langle v_i v_k\rangle+q_U^{(0)}\langle u_i u_k\rangle\right), \tag{21}$$

с учетом (18) получаем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\langle V_i\rangle}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\langle v_i v_k\rangle}{\partial x_k}=\frac{\langle U_i\rangle+\tau_U g_i-\langle V_i\rangle}{\tau_U}-\frac{1}{\tau_U}D_{ik}\frac{\partial\ln\langle N\rangle}{\partial x_k}. \tag{22}$$

Можно заметить, что значение случайной скорости дисперсной фазы определяется не только массовыми и вязкими силами. В уравнении (22) появляются слагаемые, связанные с неоднородностью распределения скорости и концентрации частиц (турбофорез).

2.3. Уравнение для вторых моментов флуктуаций скорости частиц

Умножаем уравнение для ФПВ (17) на $v_i v_j$ и интегрируем по пространству скоростей. Получаем для каждого из слагаемых

$$\int v_i v_j \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\Phi + \left(v_k + \langle V_k \rangle\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\} \mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle \langle N \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle \langle N \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v_i v_j v_k \rangle \langle N \rangle}{\partial x_k},$$

$$-\frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \int v_i v_j v_k \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \langle N \rangle \left(\langle v_j v_k \rangle + \langle v_i v_k \rangle \delta_{ij} + \langle v_i v_j \rangle \delta_{ik} \right) =$$

$$= \langle N \rangle \left(\langle v_j v_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \langle v_i v_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \langle v_i v_j \rangle \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_k} \right),$$

$$\int v_i v_j \frac{\partial}{\partial v_k} \left\{ \left[-\frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial t} - \langle V_n \rangle \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_n} + \frac{\langle U_k \rangle + \tau_U g_k - \langle V_k \rangle - v_k}{\tau_U} \right] \Phi \right\} \mathrm{d}\mathbf{v} =$$

$$= -\int \left\{ \left[-\frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial t} - \langle V_n \rangle \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_n} + \frac{\langle U_k \rangle + \tau_U g_k - \langle V_k \rangle}{\tau_U} - \frac{v_k}{\tau_U} \right] \Phi \right\} \left(v_j \delta_{ik} + v_i \delta_{jk} \right) \mathrm{d}\mathbf{v} =$$

$$= -\frac{1}{\tau_u} \int \left(v_i v_j \Phi + v_i v_j \Phi \right) \mathrm{d}\mathbf{v} = -\frac{2}{\tau_U} \langle v_i v_j \rangle \langle N \rangle,$$

$$\int v_i v_j \frac{\partial}{\partial v_n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_m} \right) \mathrm{d}\mathbf{v} = -\int \frac{\partial \Phi}{\partial v_m} \left(v_j \delta_{in} + v_i \delta_{jn} \right) \mathrm{d}\mathbf{v} =$$

$$= \int \Phi \left(\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{jn} \delta_{im} \right) \mathrm{d}\mathbf{v} = \langle N \rangle \left(\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{jn} \delta_{im} \right),$$

$$\frac{1}{\tau_U} \left[f_U \langle u_i u_j \rangle - \tau_U q_U \langle u_k u_n \rangle \frac{\partial \langle V_m \rangle}{\partial x_k} \right] \int v_i v_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_n v_m} \mathrm{d}\mathbf{v} =$$

$$= \frac{2}{\tau_U} f_U \langle u_i u_j \rangle \langle N \rangle - q_U \left[\langle u_k u_i \rangle \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k u_j \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \right] \langle N \rangle.$$

Тогда уравнение для вторых моментов, использовав (21), примет вид

$$\frac{\partial \langle v_i v_j \rangle \langle N \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle \langle N \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v_i v_j v_k \rangle \langle N \rangle}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{1}{\tau_U} \left[D_{jk} \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + D_{ik} \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} + \tau_U \langle v_i v_j \rangle \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_k} \right] \langle N \rangle = \frac{2}{\tau_U} \left(f_U \langle u_i u_j \rangle - \langle v_i v_j \rangle \right) \langle N \rangle,$$

где $\langle v_i v_j v_k \rangle \langle N \rangle = \int v_i v_j v_k \Phi \mathrm{d}\mathbf{v}$. Преобразуем полученное уравнение и поделим на среднюю концентрацию $\langle N \rangle$:

$$\frac{\partial\langle v_i v_j\rangle}{\partial t}+\langle V_k\rangle\frac{\partial\langle v_i v_j\rangle}{\partial x_k}+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{\partial\langle v_i v_j v_k\rangle\langle N\rangle}{\partial x_k}+\frac{\langle v_i v_j\rangle}{\langle N\rangle}\left(\frac{\mathrm{d}\langle N\rangle}{\mathrm{d}t}+\langle N\rangle\frac{\partial\langle V_k\rangle}{\partial x_k}\right)+$$
$$+\frac{1}{\tau_U}\left[D_{jk}\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+D_{ik}\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_k}\right]=\frac{2}{\tau_U}\left(f_U\langle u_i u_j\rangle-\langle v_i v_j\rangle\right).$$

В результате с учетом (18), (20) и (21) получим уравнение для вторых моментов флуктуаций скорости дисперсной фазы

$$\frac{\mathrm{d}\langle v_i v_j\rangle}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{\partial\langle v_i v_j v_k\rangle\langle N\rangle}{\partial x_k}+\langle v_j v_k\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\langle v_i v_k\rangle\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_k}=$$
$$=\frac{2}{\tau_U}\left[f_U\langle u_i u_j\rangle-\frac{\tau_U q_U^{(0)}}{2}\left(\langle u_k u_j\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\langle u_k u_i\rangle\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_k}\right)-\langle v_i v_j\rangle\right]. \tag{23}$$

Таким образом, очередное уравнение для момента содержит момент более высокого порядка, поэтому возникает проблема замыкания полученной системы уравнений. Одним из возможных способов решения этой проблемы является нахождение приближенного решения уравнения для ФПВ, с помощью которого можно явно вычислить неизвестный момент более высокого порядка.

Введем нулевое приближение для интенсивности турбулентных флуктуаций скорости частиц

$$\sigma_{ij}^{(0)}=f_U\langle u_i u_j\rangle-\frac{\tau_U q_U^{(0)}}{2}\left(\langle u_k u_j\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\langle u_k u_i\rangle\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_k}\right). \tag{24}$$

Выражение (24) записано только с учетом слагаемых линейных по градиентам средней скорости. С учетом (14), (15) распишем (24) подробнее

$$\sigma_{ij}^{(0)}=f_U^{(0)}\langle u_i u_j\rangle+\frac{\tau_U f_U^{(1)}}{2}\left(\langle u_k u_j\rangle\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_k}+\langle u_k u_i\rangle\frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_k}\right)-$$
$$-\frac{\tau_U q_U^{(0)}}{2}\left(\langle u_k u_j\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\langle u_k u_i\rangle\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_k}\right).$$

Для частиц с малой инерцией $\tau_U \ll T_L^{(p)}$ функции отклика принимают значения $f_U^{(1)}\tau_U \to T_L^{(p)}$, $q_U^{(0)}\tau_U \to T_L^{(p)}$, $f_U^{(0)} \to 1$, средние скорости дисперсной и несущей фазы становятся одинаковыми $\langle V_i \rangle \approx \langle U_i \rangle$. В этом случае из уравнений (23), (24) можно заключить, что корреляции флуктуаций скоростей газа и частиц примерно равны между собой $\langle v_i v_j \rangle \approx \langle u_i u_j \rangle$.

Сделаем важное замечание относительно коэффициента турбулентной диффузии частиц. Для стационарного и однородного потока уравнение (23) приводит к следующему результату

$$\begin{aligned} &D_{ii} = \tau_U \left(\langle v_i^2 \rangle + q_U^{(0)} \langle u_i^2 \rangle \right) = \tau_U \langle u_i^2 \rangle \left(f_U^{(0)} + q_U^{(0)} \right) = T_L^{(p)} \langle u_i^2 \rangle, \\ &T_L^{(p)} = \int_0^\infty \Psi_L^{(p)}(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{25}$$

Без учета массовых сил, интегральный временной масштаб принадлежит интервалу $T_L < T_L^{(p)} < T_E$ (T_L — временной макро масштаб Лагранжа). Из формулы (25) следует, что коэффициент турбулентной диффузии слабо зависит от инерции частиц. Это продемонстрировано в известной теореме Чена [36].

Для замыкания системы уравнений для моментов и вывода граничных условий на шероховатой стенке найдем приближенное аналитическое решение уравнения для ФПВ (19).

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФПВ

3.1. Равновесная ФПВ

Метод решения уравнения для ФПВ (19) основан на подходе, который представлен в [37]. Правая часть уравнения для ФПВ (19) описывает «соударение» частиц с турбулентными вихрями. Перепишем (19) с учетом (24)

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}+v_k\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+\left(-\frac{d\langle V_i\rangle}{dt}-v_k\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\frac{\langle U_i\rangle+\tau_U g_i-\langle V_i\rangle}{\tau_U}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}-$$
$$-q_U\left\langle u_i u_j\right\rangle\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial x_i}=\frac{1}{\tau_U}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(v_i\Phi\right)+\frac{\sigma_{ij}^{(0)}}{\tau_U}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_i\partial v_j}. \tag{26}$$

По аналогии с идеей Грэда для решения уравнения Больцмана из кинетической теории газов сначала найдем равновесную ФПВ (нулевое приближение) для уравнения (26). Поправка к нулевому приближению будет содержать только слагаемые линейные по градиентам параметров дисперсной фазы.

Сделаем следующее допущение для вторых моментов флуктуаций скорости частиц:

$$\left\langle v_i v_j\right\rangle=\sigma_{ij}=\sigma_{ii}\delta_{ij}+\left(1-\delta_{ij}\right)\sigma_{ij}\approx\sigma_{ii}\delta_{ij}+\left(1-\delta_{ij}\right)\sigma_{ij}^{(0)}.$$

Получаем уравнение для решения

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}+v_k\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+\left(-\frac{\mathrm{d}\langle V_i\rangle}{\mathrm{d}t}-v_k\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\frac{\langle U_i\rangle+\tau_U g_i-\langle V_i\rangle}{\tau_U}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}-$$
$$-q_U\left\langle u_i u_j\right\rangle\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial x_i}-\left(1-\delta_{ij}\right)\frac{\sigma_{ij}^{(0)}}{\tau_U}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_i\partial v_j}=\frac{1}{\tau_U}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(v_i\Phi\right)+\frac{\left\langle v_i^2\right\rangle}{\tau_U}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_i\partial v_i}. \tag{27}$$

Для удобства введем обозначения операторов левой и правой части данного уравнения

$$\hat{A}\Phi=\hat{L}\Phi.$$

Его решение ищем в виде разложения по первым степеням градиентов осредненных параметров [14], [15]

$$\Phi\left(\mathbf{x},\mathbf{v},t\right)=\Phi_0\left(\mathbf{x},\mathbf{v},t\right)+\Phi_1\left(\mathbf{x},\mathbf{v},t\right), \tag{28}$$

где $\Phi_0\left(\mathbf{x},\mathbf{v},t\right)$ — нулевое приближение, описывающее взаимодействие частиц с флуктуациями скорости несущей фазы в результате вязкого трения, не зависящее

от градиентов осредненных параметров дисперсной фазы, $\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ — поправка, линейная по градиентам осредненных параметров дисперсной фазы. $\sigma_{ij}^{(0)}$ — корреляция произведения турбулентных флуктуаций скорости частиц в нулевом приближении (при $i \neq j$).

3.2. Уравнение для ФПВ в нулевом приближении

Исключив из (27) слагаемые, содержащие производные по времени и пропорциональные градиентам осредненных параметров, приняв во внимание (22), получим уравнение для нулевого приближения Φ_0

$$\hat{L}\Phi_0 = \frac{1}{\tau_u}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(v_i\Phi_0\right) + \frac{\left\langle v_i^2\right\rangle}{\tau_u}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial v_i \partial v_i} = 0. \tag{29}$$

Решение будем искать в виде

$$\Phi_0 = \left\langle N\left(\mathbf{x},t\right)\right\rangle \phi_0\left(\mathbf{x},\mathbf{v},t\right).$$

Тогда решением уравнения (29) относительно ϕ_0 является ФПВ для распределения Максвелла

$$\phi_0\left(\mathbf{x},\mathbf{v},t\right) = \prod_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left\langle v_i^2\left(\mathbf{x},t\right)\right\rangle}}\exp\left\{-\frac{v_i^2}{2\left\langle v_i^2\left(\mathbf{x},t\right)\right\rangle}\right\}. \tag{30}$$

Преобразовав (20), (22), (23) с учетом нулевого приближения для корреляции $\left\langle v_i v_j\right\rangle$ и того, что третьи моменты и корреляции по разным направлениям для (30) обращаются в ноль, получим систему уравнений для моментов в нулевом приближении

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle N\right\rangle}{\mathrm{d}t} = -\left\langle N\right\rangle\frac{\partial\left\langle V_i\right\rangle}{\partial x_i}, \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle V_i\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{\langle U_i\rangle+\tau_u g_i-\langle V_i\rangle}{\tau_u}-\frac{\partial\langle v_i^2\rangle}{\partial x_i}-\left(\langle v_i^2\rangle+q_U^{(0)}\langle u_i u_k\rangle\right)\frac{\partial\ln\langle N\rangle}{\partial x_k}, \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle v_i^2\rangle}{\mathrm{d}t}=-2\langle v_i^2\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_i}. \tag{33}$$

Будем считать

$$\hat{A}\left(\Phi_0+\Phi_1\right)\approx\hat{A}\Phi_0=\hat{L}\left(\Phi_0+\Phi_1\right)=\hat{L}\Phi_1+\hat{L}\Phi_0=\hat{L}\Phi_1.$$

То есть необходимо решить уравнение

$$\hat{A}\Phi_0=\hat{L}\Phi_1. \tag{34}$$

3.3. Вычисление производных от нулевого приближения

Для решения уравнения (34) необходимо преобразовать его известную левую часть. Для этого с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica получим производные функции ϕ_0

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial v_i}=-\phi_0\frac{v_i}{\langle v_i^2\rangle},$$

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial v_i\partial v_j}=\phi_0\frac{1}{\langle v_j^2\rangle}\left(\frac{v_i v_j}{\langle v_i^2\rangle}-\delta_{ij}\right),$$

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial\langle v_i^2\rangle}=\frac{\phi_0}{2\langle v_i^2\rangle}\left(\frac{v_i v_i}{\langle v_i^2\rangle}-1\right),$$

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial x_j}=\frac{\partial\phi_0}{\partial\langle v_k^2\rangle}\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j}=\frac{\phi_0}{2\langle v_k^2\rangle}\left(\frac{v_k v_k}{\langle v_k^2\rangle}-1\right)\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j}.$$

Тогда для смешанной производной имеем

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial v_i\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial v_i}\frac{\phi_0}{2\langle v_k^2\rangle}\left(\frac{v_k v_k}{\langle v_k^2\rangle}-1\right)\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j}=\frac{\phi_0}{2\langle v_k^2\rangle}\left\{\frac{v_i}{\langle v_i^2\rangle}\left(1-\frac{v_k^2}{\langle v_k^2\rangle}\right)+\frac{2v_k}{\langle v_k^2\rangle}\right\}\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j}=$$

$$=\frac{\phi_0}{\langle v_k^2\rangle}\left\{\frac{v_i}{2\langle v_i^2\rangle}\left(1-\frac{v_k^2}{\langle v_k^2\rangle}\right)+\frac{v_i}{\langle v_i^2\rangle}\delta_{ik}\right\}\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j}=$$

$$=-\phi_0\frac{v_i}{\langle v_k^2\rangle\langle v_i^2\rangle}\left\{\frac{v_k^2}{2\langle v_k^2\rangle}-\left(\delta_{ik}+\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j}.$$

Таким образом, для нулевого приближения ФПВ получаем следующее:

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_j}=\phi_0\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial x_j}+\langle N\rangle\frac{\partial\phi_0}{\partial x_j}=\phi_0\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial x_j}+\langle N\rangle\frac{\phi_0}{2\langle v_k^2\rangle}\left(\frac{v_k v_k}{\langle v_k^2\rangle}-1\right)\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial v_i\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial v_i}\langle N\rangle\right)=\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial x_j}\frac{\partial\phi_0}{\partial v_i}+\frac{\partial^2\phi_0}{\partial v_i\partial x_j}\langle N\rangle=$$

$$=-\phi_0\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial x_j}\frac{v_i}{\langle v_i^2\rangle}-\phi_0\langle N\rangle\frac{v_i}{\langle v_k^2\rangle\langle v_i^2\rangle}\left\{\frac{v_k^2}{2\langle v_k^2\rangle}-\left(\delta_{ik}+\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j}.$$

Производная от нулевого приближения ФПВ по времени с учетом (31), (33) имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t}=\phi_0\frac{\mathrm{d}\langle N\rangle}{\mathrm{d}t}+\langle N\rangle\frac{\partial\phi_0}{\partial\langle v_i^2\rangle}\frac{d\langle v_i^2\rangle}{dt}=-\phi_0\langle N\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_i}-\langle N\rangle\frac{\phi_0}{\langle v_i^2\rangle}\left(\frac{v_i v_i}{\langle v_i^2\rangle}-1\right)\langle v_i^2\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_i}.$$

Из (32) также получим

$$-\frac{\mathrm{d}\langle V_i\rangle}{\mathrm{d}t}-v_k\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\frac{\langle U_i\rangle+\tau_U g_i-\langle V_i\rangle}{\tau_U}=$$

$$=-v_k\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\frac{\partial\langle v_i^2\rangle}{\partial x_i}+\left(\langle v_i^2\rangle+q_U^{(0)}\langle u_i u_k\rangle\right)\frac{\partial\ln\langle N\rangle}{\partial x_k}.$$

Используя полученные результаты, преобразуем левую часть уравнения (34), взяв в рассмотрение только слагаемые без градиентов и слагаемые, линейные по градиентам осредненных параметров. Тогда

$$\hat{A}\Phi_0 = -\phi_0 \langle N \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_i} - \langle N \rangle \frac{\phi_0}{\langle v_i^2 \rangle} \left(\frac{v_i v_i}{\langle v_i^2 \rangle} - 1 \right) \langle v_i^2 \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_i} +$$

$$+ v_j \left\{ \phi_0 \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x_j} + \langle N \rangle \frac{\phi_0}{2\langle v_k^2 \rangle} \left(\frac{v_k v_k}{\langle v_k^2 \rangle} - 1 \right) \frac{\partial \langle v_k^2 \rangle}{\partial x_j} \right\} -$$

$$- \left(-v_k \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v_i^2 \rangle}{\partial x_i} + \left(\langle v_i^2 \rangle + q_U^{(0)} \langle u_i^2 \rangle \right) \frac{\partial \ln \langle N \rangle}{\partial x_i} \right) \phi_0 \langle N \rangle \frac{v_i}{\langle v_i^2 \rangle} +$$

$$+ q_U^{(0)} \langle u_i^2 \rangle \phi_0 \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x_i} \frac{v_i}{\langle v_i^2 \rangle} + q_U^{(0)} \langle u_i^2 \rangle \phi_0 \langle N \rangle \frac{v_i}{\langle v_k^2 \rangle \langle v_i^2 \rangle} \left\{ \frac{v_k^2}{2\langle v_k^2 \rangle} - \left(\delta_{ik} + \frac{1}{2} \right) \right\} \frac{\partial \langle v_k^2 \rangle}{\partial x_i} -$$

$$- \left(1 - \delta_{ij} \right) \frac{\sigma_{ij}^{(0)}}{\tau_U} \phi_0 \langle N \rangle \frac{1}{\langle v_j^2 \rangle} \left(\frac{v_i v_j}{\langle v_i^2 \rangle} - \delta_{ij} \right).$$

Слагаемые без градиентов:

$$- \left(1 - \delta_{ij} \right) \frac{\sigma_{ij}^{(0)}}{\tau_u} \phi_0 \langle N \rangle \frac{v_i v_j}{\langle v_j^2 \rangle \langle v_i^2 \rangle}.$$

Слагаемые с градиентом концентрации:

$$v_j \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x_j} - \frac{v_i}{\langle v_i^2 \rangle} \left(\langle v_i^2 \rangle + q_U^{(0)} \langle u_i^2 \rangle \right) \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x_i} + q_U^{(0)} \langle v_i^2 \rangle \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x_i} \frac{v_i}{\langle v_i^2 \rangle} = 0.$$

Слагаемые с градиентом осредненной скорости:

$$- \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\langle v_i^2 \rangle} \left(\frac{v_i v_j}{\langle v_i^2 \rangle} - 1 \right) \langle v_i^2 \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_i} + v_k \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \frac{v_i}{\langle v_i^2 \rangle} = \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \frac{v_k v_i}{\langle v_i^2 \rangle} - \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_i} \frac{v_i v_i}{\langle v_i^2 \rangle} =$$

$$= \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \frac{v_k v_i}{\langle v_i^2 \rangle} - \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_i} \delta_{ik} \frac{v_i^2}{\langle v_i^2 \rangle} = \frac{1}{\langle v_i^2 \rangle} \left(v_k v_i - \delta_{ik} v_i^2 \right) \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k}.$$

Слагаемые с градиентом вторых моментов флуктуаций скорости:

$$\frac{v_j}{2\langle v_k^2\rangle}\left(\frac{v_k^2}{\langle v_k^2\rangle}-1\right)\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_j}-\frac{v_i}{\langle v_i^2\rangle}\frac{\partial\langle v_i^2\rangle}{\partial x_i}+$$

$$+q_U^{(0)}\langle u_i^2\rangle\frac{v_i}{\langle v_i^2\rangle\langle v_k^2\rangle}\left\{\frac{1}{2}\frac{v_k^2}{\langle v_k^2\rangle}-\left(\delta_{ik}+\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_i}=$$

$$=\frac{v_i}{2\langle v_k^2\rangle}\left(\frac{v_k^2}{\langle v_k^2\rangle}-1\right)\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_i}-\frac{\delta_{ik}v_i}{\langle v_i^2\rangle}\frac{\partial\langle v_i^2\rangle}{\partial x_k}+$$

$$+\frac{q_U^{(0)}\langle u_i^2\rangle v_i}{\langle v_i^2\rangle\langle v_k^2\rangle}\left\{\frac{1}{2}\frac{v_k^2}{\langle v_k^2\rangle}-\left(\delta_{ik}+\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_i}=$$

$$=\frac{v_i}{2\langle v_k^2\rangle}\left\{\frac{1}{2}\frac{v_k^2}{\langle v_k^2\rangle}-\left(\delta_{ik}+\frac{1}{2}\right)\right\}\left(1+q_U^{(0)}\frac{\langle u_i^2\rangle}{\langle v_i^2\rangle}\right)\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_i}.$$

3.4. Уравнение для первой поправки

Будем искать решение для первой поправки в виде

$$\Phi_1=\langle N\rangle\phi_0\phi_1.$$

Преобразовав уравнение (34) и использовав правило дифференцирования сложной функции, получим

$$-v_i\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}v_i}+\langle v_i^2\rangle\frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}v_i\mathrm{d}v_i}=-\left(1-\delta_{ij}\right)\sigma_{ij}^{(0)}\frac{v_iv_j}{\langle v_j^2\rangle\langle v_i^2\rangle}+\frac{\tau_U}{\langle v_i^2\rangle}\left(v_kv_i-\delta_{ik}v_i^2\right)\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+$$
$$+\frac{\tau_Uv_i}{\langle v_k^2\rangle}\left\{\frac{1}{2}\frac{v_k^2}{\langle v_k^2\rangle}-\left(\delta_{ik}+\frac{1}{2}\right)\right\}\left(1+q_U^{(0)}\frac{\langle u_i^2\rangle}{\langle v_i^2\rangle}\right)\frac{\partial\langle v_k^2\rangle}{\partial x_i}. \qquad (35)$$

Слагаемые в правой части данного уравнения независимы и имеют свой физический смысл: первое — касательные напряжения, вызванные движением сплош-

ной среды, второе — касательные напряжения, вызванные движением дисперсной фазы, третье — перенос турбулентной энергии. Таким образом, можно решать уравнение (35) с каждым слагаемым из правой части отдельно.

Рассмотрим решения нескольких модельных уравнений. Для слагаемого без градиента имеем

$$-v_i \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}v_i} + \left\langle v_i^2 \right\rangle \frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}v_i \mathrm{d}v_i} = \left(1-\delta_{km}\right)\Theta_{km} v_k v_m, \quad k \neq m, \quad m = \overline{1,3}. \tag{36}$$

Ищем решение в виде

$$\phi_1 = \left(1-\delta_{nl}\right) A_{nl} v_n v_l, \quad \frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}v_i \mathrm{d}v_i} = 0, \quad n,l = \overline{1,3}.$$

После подстановки в левую часть (36) получим

$$-v_i \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}v_i} = -v_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_i}\left(1-\delta_{nl}\right) A_{nl} v_n v_l = -\left(1-\delta_{nl}\right) A_{nl} v_i \left(v_n \delta_{li} + v_l \delta_{ni}\right) =$$
$$= -\left(1-\delta_{ni}\right) A_{ni} v_i v_n - \left(1-\delta_{li}\right) A_{li} v_l v_i = -2\left(1-\delta_{ni}\right) A_{ni} v_i v_n.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}\Theta_{ij} v_i v_j. \tag{37}$$

Для слагаемого с градиентом осредненной скорости аналогично рассмотрим

$$-v_i \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}v_i} + \left\langle v_i^2 \right\rangle \frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}v_i \mathrm{d}v_i} = \left(v_k v_i - \delta_{ik} v_i^2\right)\Theta_{ik}, \quad k \neq i.$$

Решение ищем в виде

$$\phi_1 = A_{nl}\left(v_n v_l - \delta_{nl} v_l^2\right), \quad \frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}v_i \mathrm{d}v_i} = 0.$$

Тогда

$$-v_i \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}v_i} = -v_i A_{nl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_i}\left(v_n v_l - \delta_{nl} v_l^2\right) = -v_i A_{nl}\left(v_n \delta_{li} + v_l \delta_{ni} - 2\delta_{nl} v_l \delta_{li}\right) =$$

$$= -A_{in} v_n v_i - A_{li} v_l v_i + 2\delta_{il} v_i^2 = -2A_{il}\left(v_i v_l + \delta_{il} v_i^2\right).$$

В итоге получим

$$\phi_1 = -\frac{\Theta_{ik}}{2}\left(v_k v_i - \delta_{ik} v_i^2\right). \tag{38}$$

Наконец, для слагаемого с градиентом вторых моментов флуктуаций скорости имеем

$$-v_i \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}v_i} + \left\langle v_i^2 \right\rangle \frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}v_i \mathrm{d}v_i} = v_i \left\{ \frac{1}{2} \frac{v_k^2}{\left\langle v_k^2 \right\rangle} - \left(\delta_{ik} + \frac{1}{2} \right) \right\} \Theta_{ik}.$$

Решение ищем в виде

$$\phi_1 = A_{mn} v_i \left\{ \frac{1}{2} \frac{v_n^2}{\left\langle v_n^2 \right\rangle} - \left(\delta_{nm} + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Аналогично предыдущим двум модельным уравнениям получим

$$-v_i \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}v_i} + \left\langle v_i^2 \right\rangle \frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}v_i \mathrm{d}v_i} = -v_i A_{mn} \left\{ \delta_{im} \left[\frac{v_n^2}{2\left\langle v_n^2 \right\rangle} - \left(\delta_{nm} + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{v_m v_n}{\left\langle v_n^2 \right\rangle} \delta_{in} \right\} + \left\langle v_i^2 \right\rangle A_{mn} \times$$

$$\times \left\langle v_i^2 \right\rangle A_{mn} \left\{ \frac{v_n}{\left\langle v_n^2 \right\rangle} \delta_{im} \delta_{in} + \frac{v_m}{\left\langle v_n^2 \right\rangle} \delta_{in}^2 + \frac{v_n}{\left\langle v_n^2 \right\rangle} \delta_{im} \delta_{in} \right\} = -3A_{mn} v_m \left\{ \frac{v_n^2}{2\left\langle v_n^2 \right\rangle} - \left(\delta_{mn} + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Тогда

$$\phi_1 = -\frac{\Theta_{ik}}{3} v_i \left\{ \frac{1}{2} \frac{v_k^2}{\left\langle v_k^2 \right\rangle} - \left(\delta_{ik} + \frac{1}{2} \right) \right\}. \tag{39}$$

Учитывая решения модельных уравнений (37)-(39) и уравнение (28), ФПВ имеет вид

$$\Phi = \langle N \rangle \phi_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \delta_{ij}\right)\sigma_{ij}^{(0)} \frac{v_i v_j}{\langle v_j^2 \rangle \langle v_i^2 \rangle} - \frac{\tau_U}{2\langle v_i^2 \rangle}\left(v_k v_i - \delta_{ik} v_i^2\right)\frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} - \right.$$
$$\left. - \frac{\tau_U v_i}{3\langle v_k^2 \rangle}\left\{\frac{1}{2}\frac{v_k^2}{\langle v_k^2 \rangle} - \left(\delta_{ik} + \frac{1}{2}\right)\right\}\left(1 + q_U^{(0)} \frac{\langle u_i^2 \rangle}{\langle v_i^2 \rangle}\right)\frac{\partial \langle v_k^2 \rangle}{\partial x_i}\right]. \tag{40}$$

4. РАСЧЕТ МОМЕНТОВ ОТ ФПВ

Удостоверимся, что полученное решение (40) удовлетворяет соотношениям (7), (9), а также замкнем систему уравнений для моментов.

4.1. Проверка баланса частиц

Проинтегрировав выражение (40) по всему пространству скоростей, получим

$$\int \Phi \mathrm{d}\mathbf{v} = \langle N \rangle \int \phi_0 \mathrm{d}\mathbf{v} = \langle N \rangle.$$

Заметим, что все остальные слагаемые кроме первого в выражении (28) дадут нулевой вклад в силу того, что нечетные моменты от распределения Максвелла обращаются в ноль.

4.2. Проверка флуктуаций скорости

Рассчитаем первый момент для флуктуаций скорости

$$\langle v_m \rangle = \frac{1}{\langle N \rangle}\int v_m \Phi \mathrm{d}\mathbf{v} = -\int \frac{\tau_U}{3\langle v_k^2 \rangle}\left(1 + q_U^{(0)} \frac{\langle u_i^2 \rangle}{\langle v_i^2 \rangle}\right)\frac{\partial \langle v_k^2 \rangle}{\partial x_i}\left\{\frac{1}{2}\frac{v_k^2}{\langle v_k^2 \rangle} - \left(\delta_{ik} + \frac{1}{2}\right)\right\} v_i v_m \phi_0 \mathrm{d}\mathbf{v},$$

где остальные слагаемые образуют нечетные моменты. Перебрав все возможные варианты сочетаний индексов i, k, m, получим

$$\langle v_m \rangle = 0$$

либо в силу наличия нечетных моментов, либо в силу обнуления выражения в фигурных скобках при $\dfrac{\partial\left\langle v_k^2\right\rangle}{\partial x_i}$.

4.3. Вычисление корреляции $\langle \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \rangle$

Произведя вычисления аналогично предыдущим пунктам, получим

$$\left\langle v_i^2\right\rangle = \frac{1}{\langle N\rangle}\int v_i^2 \Phi \mathrm{d}\mathbf{v} = \int v_i^2 \phi_0 \mathrm{d}\mathbf{v} = \sigma_{ii}.$$

Теперь рассмотрим случай

$$\left\langle v_m v_n\right\rangle = \frac{1}{\langle N\rangle}\int v_m v_n \Phi \mathrm{d}\mathbf{v} = \int\left[\frac{1-\delta_{ij}}{2}\sigma_{ij}^{(0)}\frac{v_i v_j v_m v_n}{\left\langle v_j^2\right\rangle\left\langle v_i^2\right\rangle} - \frac{\tau_u}{2\left\langle v_i^2\right\rangle}\left(v_k v_i v_m v_n - 0\right)\frac{\partial\left\langle V_i\right\rangle}{\partial x_k}\right]\mathrm{d}\mathbf{v},$$

где $m \neq n$ и $k \neq i$ (так как при $k = i$ полностью обнуляется слагаемое при градиенте осредненной скорости). Здесь второй момент отличен от нуля при $v_m = v_i, v_n = v_j$ или $v_m = v_j, v_n = v_i$. В связи с этим получим

$$\left\langle v_i v_j\right\rangle = \left(1-\delta_{ij}\right)\sigma_{ij}^{(0)} - \frac{\tau_U}{2}\left[\left\langle v_k v_j\right\rangle\frac{\partial\left\langle V_i\right\rangle}{\partial x_k} + \left\langle v_k v_i\right\rangle\frac{\partial\left\langle V_j\right\rangle}{\partial x_k}\right]. \qquad (41)$$

Данный результат согласуется с выражением для вторых моментов (23) при условии равенства нулю третьих моментов и медленно изменяющихся вторых.

Физический смысл $\left\langle v_i v_j\right\rangle$ — касательные напряжения, возникающие в дисперсной фазе деленные на плотность.

4.4. Вычисление корреляции $\langle \mathbf{v}_i^2 \mathbf{v}_k \rangle$

Умножив выражение (40) на $v_m^2 v_n$ и проинтегрировав по всему пространству скоростей, аналогично предыдущим рассуждениям получим

$$\left\langle v_i^2 v_k \right\rangle = -\frac{1}{3} D_{kk} \frac{\partial \left\langle v_i^2 \right\rangle}{\partial x_k}, \quad i \neq k,$$

$$\left\langle v_k^3 \right\rangle = -D_{kk} \frac{\partial \left\langle v_k^2 \right\rangle}{\partial x_k}, \quad i = k.$$

Единая формула

$$\left\langle v_i^2 v_k \right\rangle = -\frac{2\delta_{ik} + 1}{3} D_{kk} \frac{\partial \left\langle v_i^2 \right\rangle}{\partial x_k}. \tag{42}$$

Физический смысл $\left\langle v_i^2 v_k \right\rangle$ — турбулентный перенос энергии флуктуаций скорости частиц. С помощью формулы (42) можно замкнуть систему уравнений (20), (22), (23) с неизвестными функциями: $\langle N \rangle$, $\langle V_i \rangle$ и $\left\langle v_i v_j \right\rangle$.

5. ВЫВОД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Замкнутая система уравнений для моментов (20), (22), (23) требует задания граничных условий, которые будем выводить с помощью приближенного решения уравнения для ФПВ (40). Рассмотрим общий случай столкновения частиц о шероховатую стенку канала. На основе полученной информации будем строить ФПВ падающих на стенку и отраженных от нее частиц (см. рис. 1).

5.1. Столкновение частиц со случайными неровностями стенки канала

В результате столкновения частиц со стенкой канала они теряют импульс. Преобразование скорости частицы, сталкивающейся со стенкой канала, показано на рис. 2. Здесь одним штрихом обозначены частицы, налетающие на стенку, двумя штрихами — отраженные, k_t, k_n — коэффициенты восстановления импульса в аксиальном и поперечном направлениях, $0 \le k_t \le 1, 0 \le k_n \le 1$.

Для уменьшения количества вычислений рассмотрим случай, когда случайная плоскость, моделирующая неровность, вращается только вокруг оси z. В этом случае матрица поворота имеет вид

$$T(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \left|T(\varphi)\right|=1.$$

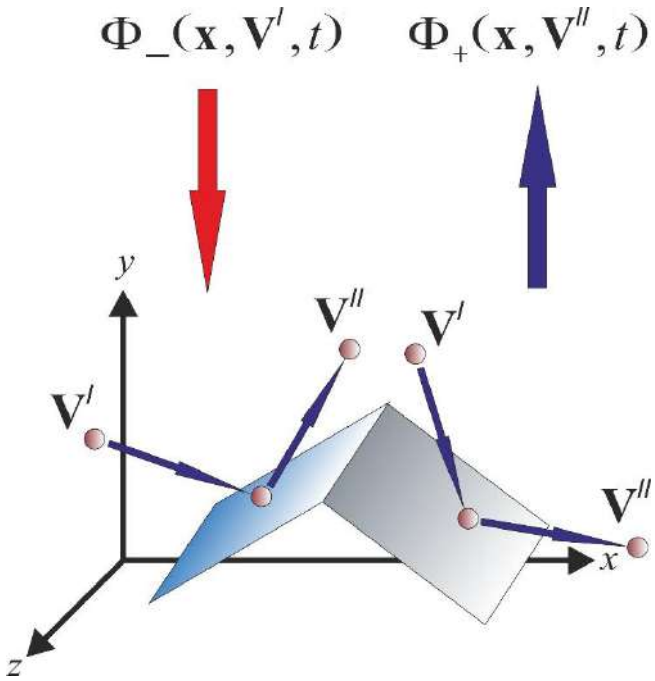


Рис. 1. Схема преобразования ФПВ падающих на стенку частиц и отраженных от нее

При этом имеем следующие координаты вектора нормали к случайной плоскости и вектора, лежащего в данной плоскости,

$$\boldsymbol{\tau}=T(\varphi)\mathbf{e}_x=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{n}=T(\varphi)\mathbf{e}_y=\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — единичные векторы исходной системы координат. Векторы нор-

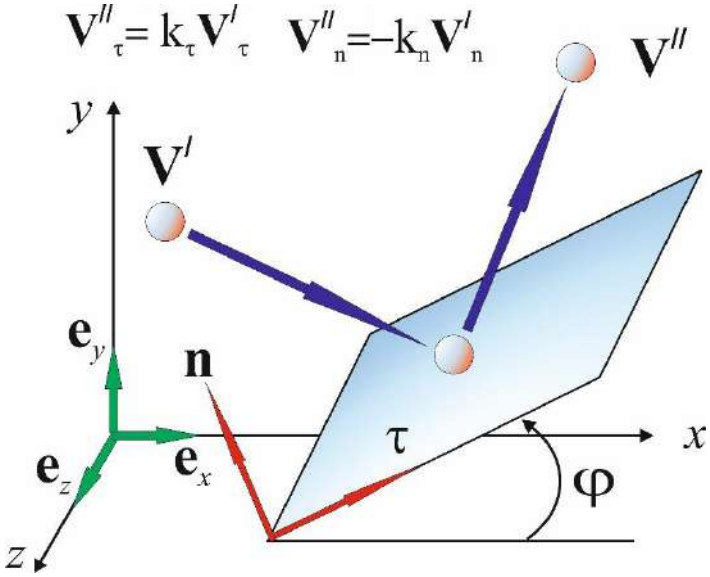


Рис. 2 Столкновение частицы со случайной неровностью поверхности стенки

мальной и касательной компоненты скорости частиц, падающих на стенку, имеют вид

$$\mathbf{V}'_\tau = \boldsymbol{\tau}\left(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\tau}\right) = \begin{pmatrix} V'_x \cos^2(\varphi) + \frac{1}{2} V'_y \sin(2\varphi) \\ V'_y \sin^2(\varphi) + \frac{1}{2} V'_x \sin(2\varphi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}'_n = \mathbf{n}\left(\mathbf{V}' \cdot \mathbf{n}\right) = \begin{pmatrix} V'_x \sin^2(\varphi) - \frac{1}{2} V'_y \sin(2\varphi) \\ V'_y \cos^2(\varphi) - \frac{1}{2} V'_x \sin(2\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А векторы соответствующих скоростей отраженных частиц вычисляются как

$$\mathbf{V}''_\tau = k_\tau \mathbf{V}'_\tau, \quad \mathbf{V}''_n = -k_n \mathbf{V}'_n, \quad \mathbf{V}'' = \mathbf{V}''_\tau + \mathbf{V}'_n.$$

Проекции скорости отраженных частиц на направления исходной системы координат:

$$V_x'' = \left(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{V}''\right), \quad V_y'' = \left(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{V}''\right).$$

В результате после подстановки получим

$$V_x'' = \frac{1}{2}\left[\left(k_n + k_\tau\right)\cos\left(2\varphi\right) + k_\tau - k_n\right]V_x' + \frac{1}{2}\left(k_n + k_\tau\right)\sin\left(2\varphi\right)V_y', \quad V_y' < 0, \qquad (43)$$

$$V_y'' = \frac{1}{2}\left(k_n + k_\tau\right)\sin\left(2\varphi\right)V_x' + \frac{1}{2}\left[\left(k_n + k_\tau\right)\sin^2\left(\varphi\right) - k_n\right]V_y'. \qquad (44)$$

Можно заметить, что в случае гладкой стенки канала $\varphi = 0$ скорости отраженных частиц преобразуются по формулам

$$V_x'' = k_\tau V_x', \quad V_y'' = -k_n V_y', \quad V_z'' = k_\tau V_z'. \qquad (45)$$

В результате матрица преобразования скоростей падающих частиц в скорости отраженных примет вид

$$T_{\mathbf{V}'\to\mathbf{V}''} = \begin{pmatrix} \left(k_\tau + k_n\right)\cos^2\left(\varphi\right) - k_n & \dfrac{k_\tau + k_n}{2}\sin\left(2\varphi\right) & 0 \\ \dfrac{k_\tau + k_n}{2}\sin\left(2\varphi\right) & \left(k_\tau + k_n\right)\sin^2\left(\varphi\right) - k_n & 0 \\ 0 & 0 & k_\tau \end{pmatrix}.$$

Определитель данной матрицы $\left|T_{\mathbf{V}'\to\mathbf{V}''}\right| = -k_n k_\tau^2$, это согласуется со случаем гладкой стенки (45). Матрица обратного преобразования будет записана как

$$T_{\mathbf{V}''\to\mathbf{V}'}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{k_\tau}+\frac{1}{k_n}\right)\cos^2(\varphi)-\frac{1}{k_n} & \frac{k_\tau+k_n}{2k_\tau k_n}\sin(2\varphi) & 0\\ \frac{k_\tau+k_n}{2k_\tau k_n}\sin(2\varphi) & \left(\frac{1}{k_\tau}+\frac{1}{k_n}\right)\sin^2(\varphi)-\frac{1}{k_n} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{k_\tau}\end{pmatrix}.$$

Её определитель — $\left|T_{\mathbf{V}''\to\mathbf{V}'}\right|=-1/k_n k_\tau^2$. Подобное представление определителей матриц преобразования говорит о том, что соударение частицы о случайную плоскость не ведет к дополнительной потере импульса.

Из формул (43), (44) видно, что в результате соударения о наклоненную плоскость наблюдается дополнительная потеря импульса в аксиальном направлении, в то время как в нормальном направлении наоборот имеет место увеличение импульса.

Непосредственное использование матриц $T_{\mathbf{V}'\to\mathbf{V}''}$ и $T_{\mathbf{V}''\to\mathbf{V}'}$ во время расчета каждой траектории движения частиц ведет к значительным затратам процессорного времени. Поэтому на основе выражений (43), (44) введем эффективные коэффициенты восстановления импульса для отраженных частиц

$$V_x''=k_\tau^*(\varphi)V_x',\quad V_y''=-k_n^*(\varphi)V_y',$$

$$k_\tau^*(\varphi)=\frac{k_\tau}{2}\left[\left(1+\frac{k_n}{k_\tau}\right)\cos(2\varphi)+1-\frac{k_n}{k_\tau}\right]+\frac{1}{2}\left(1+\frac{k_n}{k_\tau}\right)\sin(2\varphi)\frac{\langle V_y'\rangle}{\langle V_x'\rangle},\qquad(46)$$

$$k_n^*(\varphi)=k_n\left\{1-\left(1+\frac{k_n}{k_\tau}\right)\sin^2(\varphi)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{k_n}{k_\tau}\right)\sin(2\varphi)\frac{\langle V_x'\rangle}{\langle V_y'\rangle}\right\},\quad \langle V_y'\rangle<0.\qquad(47)$$

Для малых углов наклона $\varphi\ll 1$ имеем асимптотическое представление эффективных коэффициентов восстановления импульса

$$k_\tau^* \approx k_\tau \left\{ 1 + \left(\frac{k_n}{k_\tau} + 1 \right) \frac{\langle V_y' \rangle}{\langle V_x' \rangle} \varphi \right\} - k_\tau \left(\frac{k_n}{k_\tau} + 1 \right) \varphi^2,$$

$$k_n^* \approx k_n \left\{ 1 - \left(\frac{k_\tau}{k_n} + 1 \right) \frac{\langle V_x' \rangle}{\langle V_y' \rangle} \varphi \right\} - k_\tau \left(\frac{k_\tau}{k_n} + 1 \right) \varphi^2.$$

Из полученных формул очевидно, что в случае гладкой стенки канала $(\varphi = 0)$ эффективные коэффициенты восстановления импульса равны своим исходным значениям.

Формула (47) может быть рассмотрена как уравнения для нахождения минимального угла наклона случайной плоскости $\varphi_{\min}$ (так называемый «теневой эффект»). После соударения о шероховатую стенку частицы должны вернуться обратно в поток $k_n^*(\varphi) \geq 0$. Таким образом, частицы ударяются о случайную плоскость с углом наклона из диапазона $\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$, где $k_n^*(\varphi_{\min}) = 0$. Например, $k_n = 0.5$, $k_\tau = 0.8$, если $\langle V_x' \rangle / \langle V_y' \rangle = -10$, тогда $\varphi_{\min} = -2.5°$; если же $\langle V_x' \rangle / \langle V_y' \rangle = -5$, то $\varphi_{\min} = -4°$. Далее будем считать $\varphi_{\min} = 0$.

Аксиальная скорость инерционных частиц на стенке не равна нулю, она сопоставима со скоростью в ядре потока, таким образом, $\langle V_x' \rangle \gg \langle V_y' \rangle$. В этом случае имеет место дополнительная генерация флуктуаций скорости перпендикулярных к поверхности и эффективный коэффициент восстановления импульса $k_n^* > 1$, см. формулу (47). Из рис. 3 видно, что дополнительная генерация флуктуаций скорости частиц, отраженных от шероховатой стенки, значительно меняет эффективные коэффициенты восстановления импульса. Считаем, что угол наклона имеет равномерное распределение вероятностей значений в интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$.

После осреднения значений эффективных коэффициентов восстановления импульса получим ($\langle V_y' \rangle < 0$)

$$\left\langle k_n^* \right\rangle = \frac{1}{\varphi_{\max}} \int_0^{\varphi_{\max}} k_n^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{4\varphi_{\max}} \times$$
$$\times \left\{ (k_n + k_\tau) \left[-2 \frac{\langle V_x' \rangle}{\langle V_y' \rangle} \left(1 - \cos^2(\varphi_{\max}) \right) + \sin(2\varphi_{\max}) \right] + 2(k_n - k_\tau)\varphi_{\max} \right\}, \quad (48)$$

$$\left\langle k_\tau^* \right\rangle = \frac{1}{\varphi_{\max}} \int_0^{\varphi_{\max}} k_\tau^*(\varphi) d\varphi =$$
$$= \frac{1}{4\varphi_{\max}} \left\{ (k_n + k_\tau) \left[\sin(2\varphi_{\max}) + 2\sin^2(\varphi_{\max}) \frac{\langle V_y' \rangle}{\langle V_x' \rangle} \right] - 2(k_n - k_\tau)\varphi_{\max} \right\}. \quad (49)$$

Записанные в таком виде средние значения коэффициентов восстановления импульса используются далее при установке взаимосвязи между ФПВ падающих и отраженных частиц.

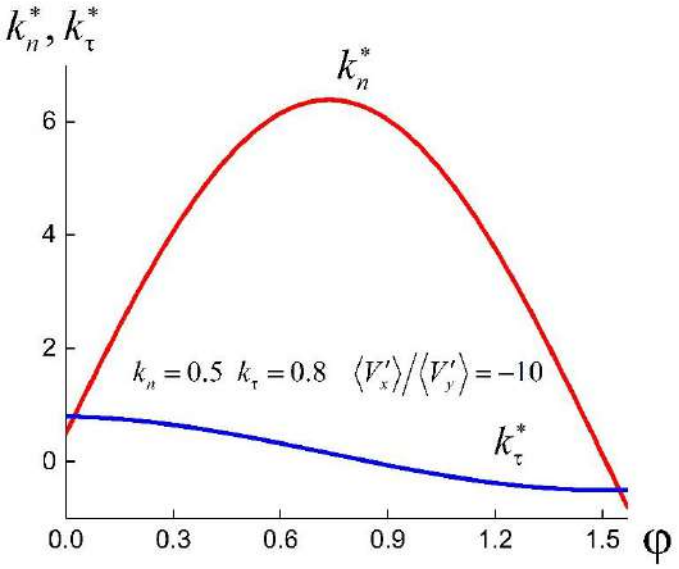


Рис. 3. Зависимость эффективных коэффициентов восстановления импульса от угла наклона случайной плоскости

Зависимость средних значений коэффициентов восстановления импульса от угла наклона случайной плоскости представлена на рис. 4. Наблюдается значительный дополнительный вклад в нормальную компоненту скорости отраженных частиц, при этом имеет место снижение скорости отраженных частиц в аксиальном направлении. Данный результат согласуется с экспериментальными данными [5], [6].

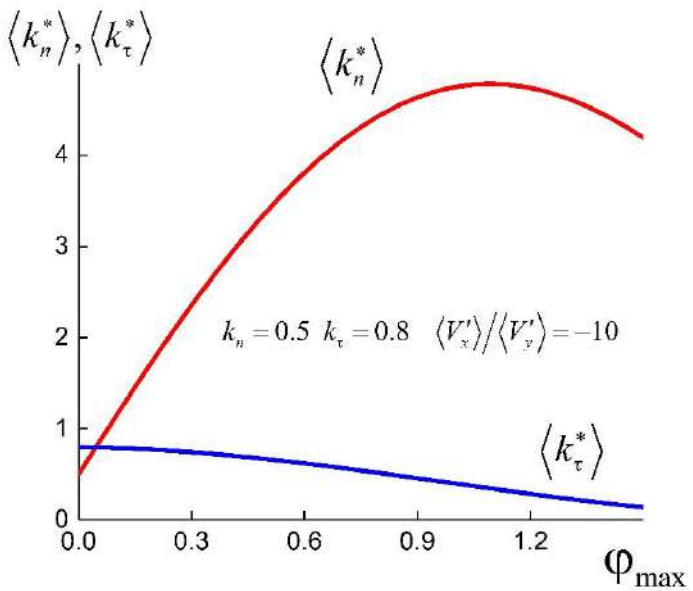


Рис. 4. Зависимость средних значений коэффициентов восстановления импульса от угла наклона случайной плоскости

5.2. ФПВ отраженных от стенки канала частиц

Очевидно, что по причине наличия инерции концентрация, средняя скорость и энергия хаотического движения частиц не равна нулю на стенке канала. Характерный масштаб изменения осредненных параметров дисперсной фазы сопоставим с длиной инерционного пробега частиц

$$\Lambda_U = \tau_U \left\langle v^2 \right\rangle^{1/2}, \quad \left\langle v^2 \right\rangle = \frac{\left\langle v_i v_i \right\rangle}{3}.$$

Это утверждение справедливо для большинства дисперсных примесей, используемых в технических приложениях. Поэтому в данном случае применима

градиентная гипотеза для описания процессов переноса в турбулентном потоке во всей области канала.

Система координат изображена на рис. 2. Вблизи поверхности считаем $\langle V_y(y)\rangle \neq 0$, $\langle V_x(y)\rangle \neq 0$. Во флуктуациях мы учитываем только компоненты скорости, корреляции от которых отличны от нуля $\langle v_x v_y\rangle$, $\langle v_i^2\rangle$. Здесь нижний индекс $i = 1,2,3$ соответствует осям x, y, z. Запишем с учетом (40) ФПВ падающих на стенку канала частиц в приближении граничного слоя

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) = \langle N\rangle \phi_0 \Bigg\{ & 1 + \frac{v_x v_y}{\langle v_x^2\rangle\langle v_y^2\rangle}\left(\sigma_{xy}^{(0)} - \frac{1}{2}\tau_U \langle v_y^2\rangle \frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial y}\right) - \\
& -\frac{1}{6}\frac{v_y}{\langle v_x^2\rangle\langle v_y^2\rangle}\left(\frac{v_x^2}{\langle v_x^2\rangle} - 1\right) D_{yy}\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial y} - \frac{1}{6}\frac{v_x}{\langle v_x^2\rangle^2}\left(\frac{v_x^2}{\langle v_x^2\rangle} - 3\right) D_{xy}\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial y} - \\
& -\frac{1}{6}\frac{v_y}{\langle v_y^2\rangle^2}\left(\frac{v_y^2}{\langle v_y^2\rangle} - 3\right) D_{yy}\frac{\partial\langle v_y^2\rangle}{\partial y} - \frac{1}{6}\frac{v_x}{\langle v_x^2\rangle\langle v_y^2\rangle}\left(\frac{v_y^2}{\langle v_y^2\rangle} - 1\right) D_{xy}\frac{\partial\langle v_y^2\rangle}{\partial y} - \\
& -\frac{1}{6}\frac{v_y}{\langle v_z^2\rangle\langle v_y^2\rangle}\left(\frac{v_z^2}{\langle v_z^2\rangle} - 1\right) D_{yy}\frac{\partial\langle v_z^2\rangle}{\partial y}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{50}$$

Определяем корреляции аксиальных и нормальных флуктуаций скорости как

$$\langle v_x v_y\rangle = \frac{1}{\langle N\rangle}\int v_x v_y \Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\,\mathrm{d}\mathbf{v} = \sigma_{xy}^{(0)} - \frac{1}{2}\tau_U \langle v_y^2\rangle \frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial y}.$$

В результате соударения о стенку канала скорости частиц преобразуются по правилу

$$V_x'' = \langle k_\tau^*\rangle V_x', \quad V_y'' = -\langle k_n^*\rangle V_y', \quad V_z'' = k_\tau V_z'.$$

В дополнении к этому частицы могут абсорбироваться на стенке. Введем коэффициент абсорбции $0 \le \chi \le 1$. При $\chi = 0$ частицы, коснувшиеся стенки канала, больше не возвращаются в поток. При $\chi = 1$ частицы после столкновения остаются в потоке.

ФПВ отраженных частиц получается путем введения функции преобразования ФПВ падающих частиц. Поток отраженных частиц, уходящих со стенки канала, равен

$$V_y'' \Phi_+ \left(\mathbf{x}, \mathbf{V}'', t\right) = -\chi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_x' \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}V_y' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_z' V_y' Z\left(\mathbf{V}', \mathbf{V}''\right) \Phi_- \left(\mathbf{x}, \mathbf{V}', t\right). \qquad (51)$$

Здесь $\Phi_- \left(\mathbf{x}, \mathbf{V}', t\right) = \Phi\left(\mathbf{x}, \mathbf{V}', t\right)\Big|_{V_y' < 0}$ — ФПВ частиц, ударяющихся о стенку, $\Phi_+ \left(\mathbf{x}, \mathbf{V}'', t\right) = \Phi\left(\mathbf{x}, \mathbf{V}'', t\right)\Big|_{V_y'' > 0}$ — ФПВ частиц, отраженных от стенки. Функция преобразования после столкновения со стенкой имеет вид

$$Z\left(\mathbf{V}', \mathbf{V}''\right) = \delta\left(V_x'' - \left\langle k_\tau^* \right\rangle V_x'\right) \delta\left(V_y'' + \left\langle k_n^* \right\rangle V_y'\right) \delta\left(V_z'' - k_t V_z'\right).$$

Выполним преобразование

$$V_y'' \Phi_+ \left(\mathbf{V}''\right) =$$
$$= -\chi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_x' \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}V_y' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_z' V_y' \delta\left(V_x'' - \left\langle k_\tau^* \right\rangle V_x'\right) \delta\left(V_y'' + \left\langle k_n^* \right\rangle V_y'\right) \delta\left(V_z'' - k_t V_z'\right) \Phi_- \left(V_x', V_y', V_z'\right).$$

Делаем замену переменных

$$\left\langle k_\tau^* \right\rangle V_x' = W_x, \qquad \left\langle k_n^* \right\rangle V_y' = W_y, \qquad k_\tau V_z' = W_z.$$

Получаем

$$V_y''\Phi_+\left(\mathbf{V}''\right)=-\frac{\chi}{\left\langle k_\tau^*\right\rangle k_\tau\left\langle k_n^*\right\rangle^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}W_x\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{d}W_y\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}W_zW_y\times$$

$$\times\delta\left(V_x''-W_x\right)\delta\left(V_y''+W_y\right)\delta\left(V_z''-W_z\right)\Phi\left(\frac{W_x}{k_t},\frac{W_y}{k_n},\frac{W_z}{k_t}\right).$$

Используя свойства дельта-функции Дирака, записываем

$$V_y''\Phi_+\left(\mathbf{V}''\right)=\frac{\chi}{\left\langle k_\tau^*\right\rangle k_\tau\left\langle k_n^*\right\rangle}\frac{V_y''}{\left\langle k_n^*\right\rangle}\Phi\left(\frac{V_x''}{\left\langle k_\tau^*\right\rangle},\frac{V_y''}{\left\langle k_n^*\right\rangle},\frac{V_z''}{k_\tau}\right).$$

Получаем

$$\Phi_+\left(\mathbf{V}''\right)=\frac{\chi}{\left\langle k_\tau^*\right\rangle k_\tau\left\langle k_n^*\right\rangle}\frac{1}{\left\langle k_n^*\right\rangle}\Phi\left(\frac{V_x''}{\left\langle k_\tau^*\right\rangle},\frac{V_y''}{\left\langle k_n^*\right\rangle},\frac{V_z''}{k_\tau}\right).$$

Преобразование равновесного распределения:

$$\varphi_0''\left(\mathbf{v}''\right)=\frac{1}{\left\langle k_\tau^*\right\rangle k_\tau\left\langle k_n^*\right\rangle}\varphi_0\left(\frac{V_x''}{\left\langle k_\tau^*\right\rangle},\frac{V_y''}{\left\langle k_n^*\right\rangle},\frac{V_z''}{k_\tau}\right).$$

Далее вычисляем последовательно

$$\frac{1}{\left\langle k_\tau^*\right\rangle\sqrt{2\pi\left\langle v_x^2\right\rangle}}\exp\left[-\frac{\left(V_x''/\left\langle k_\tau^*\right\rangle-\left\langle V_x\right\rangle\right)^2}{2\left\langle v_x^2\right\rangle}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left\langle k_\tau^*\right\rangle^2\left\langle v_x^2\right\rangle}}\exp\left[-\frac{\left(V_x''-\left\langle k_\tau^*\right\rangle\left\langle V_x\right\rangle\right)^2}{2\left\langle k_\tau^*\right\rangle^2\left\langle v_x^2\right\rangle}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left\langle k_\tau^*\right\rangle^2\left\langle v_x^2\right\rangle}}\exp\left(-\frac{v_x''^2}{2\left\langle k_\tau^*\right\rangle^2\left\langle v_x^2\right\rangle}\right),$$

$$v_x''=V_x''-\left\langle k_\tau^*\right\rangle\left\langle V_x\right\rangle,\qquad\left\langle V_x''\right\rangle=\left\langle k_\tau^*\right\rangle\left\langle V_x\right\rangle.$$

Аналогичное соотношение имеем для направлений y,z, для которых флуктуации скорости после отражения равны

$$v_y''=V_y''+\left\langle k_n^*\right\rangle\left\langle V_y\right\rangle,\quad v_z''=V_z''.$$

Преобразование флуктуаций компонент скорости в слагаемых линейных по градиентам осредненных параметров дисперсного потока есть

$$v_x = V_x - \langle V_x \rangle \Rightarrow \frac{V_x''}{\langle k_\tau^* \rangle} - \langle V_x \rangle = \frac{1}{\langle k_\tau^* \rangle}\left(V_x'' - \langle k_\tau^* \rangle \langle V_x \rangle\right) = \frac{v_x''}{\langle k_\tau^* \rangle}.$$

С учетом (50), (51) получаем для ФПВ отраженных частиц выражение

$$\Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{v}'', t) = \frac{\chi}{\langle k_n^* \rangle} \langle N \rangle \varphi_0''(\mathbf{v}'') \left\{ 1 - \frac{v_x'' v_y''}{\langle k_\tau^* \rangle \langle k_n^* \rangle \langle v_x^2 \rangle \langle v_y^2 \rangle} \left(\sigma_{xy}^{(0)} - \frac{1}{2} \tau_U \langle v_y^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{v_y''}{\langle k_n^* \rangle \langle v_x^2 \rangle \langle v_y^2 \rangle} \left(\frac{v_x''^2}{\langle k_\tau^* \rangle^2 \langle v_x^2 \rangle} - 1 \right) D_{yy} \frac{\partial \langle v_x^2 \rangle}{\partial y} -$$

$$- \frac{1}{6} \frac{v_x''}{\langle k_\tau^* \rangle \langle v_x^2 \rangle^2} \left(\frac{v_x''^2}{\langle k_\tau^* \rangle^2 \langle v_x^2 \rangle} - 3 \right) D_{xy} \frac{\partial \langle v_x^2 \rangle}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{v_y''}{\langle k_n^* \rangle \langle v_y^2 \rangle^2} \left(\frac{v_y''^2}{\langle k_n^* \rangle^2 \langle v_y^2 \rangle} - 3 \right) D_{yy} \frac{\partial \langle v_y^2 \rangle}{\partial y} -$$

$$- \frac{1}{6} \frac{v_x''}{\langle k_\tau^* \rangle \langle v_x^2 \rangle \langle v_y^2 \rangle} \left(\frac{v_y''^2}{\langle k_n^* \rangle^2 \langle v_y^2 \rangle} - 1 \right) D_{xy} \frac{\partial \langle v_y^2 \rangle}{\partial y} +$$

$$\left. + \frac{1}{6} \frac{v_y''}{\langle k_n^* \rangle \langle v_z^2 \rangle \langle v_y^2 \rangle} \left(\frac{v_z''^2}{k_\tau^2 \langle v_z^2 \rangle} - 1 \right) D_{yy} \frac{\partial \langle v_z^2 \rangle}{\partial y} \right\}.$$

5.3. Граничное условие для концентрации

Вблизи стенки канала $y \le \Lambda_U$ параметры дисперсной фазы вычисляются на основе ФПВ падающих и отраженных частиц. На расстоянии от стены более чем длины инерционного пробега частиц $y > \Lambda_U$ ФПВ вычисляется на основе формулы (40). Получим граничные условия из предположения, что сумма потоков частиц, падающих на стенку канала и отраженных от нее, равна потоку частиц в области течения (ядре).

Поток частиц в основной области течения равен

$$J\left\{\left\langle N\right\rangle\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_x\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_y\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_z V_y\Phi\left(\mathbf{x},\mathbf{V},t\right)=\left\langle N\right\rangle\left\langle V_y\right\rangle.$$

Поток частиц, падающих на стенку, имеет вид

$$J_-\left\{\left\langle N\right\rangle\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_x\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{d}V_y\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_z V_y\Phi_-\left(\mathbf{x},\mathbf{V},t\right)=\left|\begin{array}{l}\left\langle v_y^2\right\rangle^{1/2}>\left\langle V_y\right\rangle\\ \mathrm{d}v_y\approx\mathrm{d}V_y\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\left\langle N\right\rangle}{2}\left[\left\langle V_y\right\rangle-\left(\frac{2}{\pi}\left\langle v_y^2\right\rangle^{1/2}\right)\right].$$

Поток частиц, уходящих от стенки, рассчитываем по ФПВ отраженных частиц

$$J_+\left\{\left\langle N\right\rangle\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_x\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}V_y\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_z V_y\Phi_+\left(\mathbf{x},\mathbf{V},t\right)=-\chi J_-\left\{\left\langle N\right\rangle\right\}.$$

Используя равенство $J\left\{\left\langle N\right\rangle\right\}=J_-\left\{\left\langle N\right\rangle\right\}+J_+\left\{\left\langle N\right\rangle\right\}$, получаем граничное условие для концентрации частиц

$$\frac{1-\chi}{1+\chi}\left(\frac{2}{\pi}\left\langle v_y^2\right\rangle\right)^{1/2}\left\langle N\right\rangle=-\left\langle V_y\right\rangle\left\langle N\right\rangle.$$

Для преобразования правой части этого условия используем приближенное выражение нормальной компоненты скорости из уравнения для момента первого порядка (22)

$$\left\langle V_y\right\rangle\left\langle N\right\rangle\approx\left(\left\langle U_y\right\rangle+\tau_U g_y\right)\left\langle N\right\rangle-\tau_U\frac{\partial\left\langle v_y^2\right\rangle}{\partial y}\left\langle N\right\rangle-D_{yy}\frac{\partial\left\langle N\right\rangle}{\partial y}.$$

В случае непроницаемых стенок канала $\left\langle U_y\right\rangle=0$, отсутствия массовых сил в поперечном направлении $g_y=0$ и неабсорбирующих стенок $\chi=1$ граничное условие для концентрации принимает вид

$$-\tau_U \frac{\partial \langle v_y^2 \rangle}{\partial y} \langle N \rangle = D_{yy} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y}. \qquad (52)$$

Выражение в левой части уравнения (52) иногда называют скоростью турбулентной миграции.

5.4. Граничное условие для аксиальной скорости

Из условия равенства суммы потоков импульса падающих и отраженных частиц полному потоку в течении записываем граничное условие для аксиальной скорости.

Поток импульса частиц в течении есть

$$J\left\{\langle N \rangle \langle V_x \rangle\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_z V_x V_y \Phi = \langle N \rangle \left\{ \langle V_y \rangle \langle V_x \rangle - \frac{1}{2} \tau_U \langle v_y^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} \right\}.$$

Поток импульса частиц, падающих на стенку канала, равен

$$J_-\left\{\langle N \rangle \langle V_x \rangle\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_x \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}V_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_z V_x V_y \Phi_- =$$
$$= \frac{\langle N \rangle}{2} \langle V_x \rangle \left\{ \langle V_y \rangle - \left(\frac{2}{\pi} \langle v_y^2 \rangle^{1/2} \right) - \frac{1}{2} \tau_U \langle v_y^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} \right\}.$$

Поток импульса, переносимый частицами, отраженными от стенки канала, имеет вид

$$J_+\left\{\langle N \rangle \langle V_x \rangle\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_x \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}V_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V_z V_x V_y \Phi_+ = -\chi \langle k_\tau^* \rangle J_-\left\{\langle N \rangle \langle V_x \rangle\right\}.$$

Из условия баланса потоков следует граничное условие для осредненной скорости дисперсной фазы

$$2\left[\frac{1 - \chi \langle k_\tau^* \rangle}{1 + \chi \langle k_\tau^* \rangle} \left(\frac{2}{\pi} \langle v_y^2 \rangle \right)^{1/2} + \langle V_y \rangle \right] \langle V_x \rangle = \tau_U \langle v_y^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y}.$$

Здесь использовано, что на стенке $\sigma_{xy}^{0}=0$, так как для несущей фазы на стенке выполнено условие прилипания.

Для неабсорбирующей стенки $\chi=1$ и условия $\langle V_y\rangle=0$ граничное условие для аксиальной скорости примет вид

$$2\frac{1-\langle k_\tau^*\rangle}{1+\langle k_\tau^*\rangle}\left(\frac{2}{\pi}\langle v_y^2\rangle\right)^{1/2}\langle V_x\rangle=\tau_U\langle v_y^2\rangle\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial y}. \qquad (53)$$

Можно заметить, что если флуктуации нормальной компоненты скорости частиц на стенке не равна нулю, то это ведет к ненулевой средней скорости дисперсной фазы на стенке. Для шероховатой стенки эффективный коэффициент восстановления импульса в продольном направлении меньше исходного (см. рис. 4). Это ведет к более значительному уменьшению аксиальной скорости дисперсной фазы.

5.5. Граничные условия для дисперсии флуктуаций скорости частиц

Рассуждая аналогично, получим поток дисперсии флуктуаций скорости частиц в течении

$$J\left\{\langle N\rangle\langle v_y^2\rangle\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_y\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_z v_y^2 V_y\Phi=\langle N\rangle\left[\langle V_y\rangle\langle v_y^2\rangle-\tau_U\langle v_y^2\rangle\frac{\partial\langle v_y^2\rangle}{\partial y}\right].$$

Потоки дисперсии флуктуаций скорости частиц, падающих и отраженных от стенки, соответственно равны

$$J_-\left\{\langle N\rangle\langle v_y^2\rangle\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_x\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}V_y\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_z v_y^2 V_y\Phi_-=$$

$$=\frac{\langle N\rangle}{2}\left\{\langle v_y^2\rangle\left[\langle V_y\rangle-2\left(\frac{2}{\pi}\langle v_y^2\rangle^{1/2}\right)\right]-\tau_U\langle v_y^2\rangle\frac{\partial\langle v_y^2\rangle}{\partial y}\right\},$$

$$J_+\left\{\langle N\rangle\langle v_y^2\rangle\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_x\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}V_y\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}V_z v_y^2 V_y\Phi_+=-\chi\left\langle k_n^*\right\rangle^2 J_-\left\{\langle N\rangle\langle v_y^2\rangle\right\}.$$

Из равенства потоков имеем граничное условие для дисперсии флуктуаций скорости частиц в нормальном к стенке направлении

$$\left[2\frac{1-\chi\left\langle k_n^*\right\rangle^2}{1+\chi\left\langle k_n^*\right\rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\langle v_y^2\rangle\right)^{1/2}+\langle V_y\rangle\right]\langle v_y^2\rangle=\tau_U\langle v_y^2\rangle\frac{\partial\langle v_y^2\rangle}{\partial y}.$$

Для неабсорбирующей стенки $\chi=1$ и условия $\langle V_y\rangle=0$ получим

$$2\frac{1-\left\langle k_n^*\right\rangle^2}{1+\left\langle k_n^*\right\rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\langle v_y^2\rangle\right)^{1/2}\langle v_y^2\rangle=\tau_U\langle v_y^2\rangle\frac{\partial\langle v_y^2\rangle}{\partial y}. \qquad (54)$$

Для гладкой стенки канала $\left(\left\langle k_n^*\right\rangle=k_n\le 1\right)$ из последней формулы видно, что потеря импульса отраженных от стенки частиц ведет к неравномерному распределению дисперсии флуктуаций скорости дисперсной фазы в нормальном направлении. Неоднородность в распределении дисперсии скорости частиц ведет к неоднородности концентрации примеси с максимумом на стенке канала (см. формулу (52)). Для шероховатой стенки канала эффективный коэффициент восстановления импульса в нормальном направлении больше единицы, и дисперсия нормальных флуктуаций скорости имеет максимум на стенке, а значит исходя из (52) максимум концентрации находится в ядре потока.

Аналогично можно получить граничные условия и для других направлений, в частности для аксиального:

$$\frac{1-\left\langle k_\tau^*\right\rangle^2}{1+\left\langle k_\tau^*\right\rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\langle v_y^2\rangle\right)^{1/2}\langle v_x^2\rangle=\frac{\tau_U}{3}\langle v_y^2\rangle\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial y}.$$

Из этого условия можно заключить, что инерция частиц ведет к ненулевому значению дисперсии скорости примеси на стенке канала. Для шероховатой стенки будет иметь место значительная неоднородность в распределении флуктуаций скорости частиц в разных направлениях.

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В данном разделе представлен численный анализ параметров дисперсной фазы при движении в турбулентном потоке газа в канале с шероховатыми стенками. Цель — показать принципиальное различие параметров частиц в зависимости от того является стенка канала гладкой или на ней имеются неровности. Полученные численные результаты качественно согласуются с экспериментальными данными для канала с гладкой [7] и шероховатой стенкой [6].

6.1. Основные параметры турбулентного потока

Для моделирования движения несущей среды (газа) была рассмотрена простая однопараметрическая модель турбулентности (см. приложение). Считаем, что неровности стенки канала не влияют на характер движения газа.

Время динамической релаксации частиц вычисляем по формулам

$$\tau_U(\mathrm{Re}_p) = \frac{\tau_U^{(0)}}{1+0.15\mathrm{Re}_p^{\,0.687}}, \quad \tau_U^{(0)} = \frac{1}{18}\frac{\rho_p}{\rho_g}\frac{d_p^2}{\nu_g}, \quad \mathrm{Re}_p = \frac{d_p W}{\nu_g}, \quad W = \left|\langle U_x\rangle - \langle V_x\rangle\right|.$$

Здесь d_p — диаметр частицы, ρ_p, ρ_g — плотности материала частиц и газа, ν_g — кинематическая вязкость газа, W — модуль средней относительной аксиальной скорости частиц, Re_p — число Рейнольдса дисперсной фазы.

Вычисляем влияние разницы скоростей частиц и газа и эффекта инерции частиц на интегральный временной масштаб корреляции скорости газа вдоль траектории частиц $T_L^{(p)}$ в соответствии с [34]

$$T_L^{(p)} = \frac{T_E}{\sqrt{1+\chi_E^2 f_U^{(0)}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\chi_E\gamma^*}\operatorname{erf}\left(\frac{\chi_E\gamma^*}{\sqrt{2}}\right), \quad \gamma^* = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\chi_E^2\left(f_U^{(0)}\right)^2}}.$$

Здесь T_E (интегральный временной масштаб Эйлера) определяется моделью турбулентности, $\gamma = W/u$ — коэффициент изменения скорости частиц, $u = \sqrt{2E/3}$ — средне квадратичное значение флуктуаций скорости газа, E — турбулентная энергия объёма газа, константа $\chi_E = 1$ выбирается из условия отношения интегральных временных масштабов Лагранжа и Эйлера равному $T_L/T_E \approx 0.7$.

6.2. Постановка задачи для вертикальной цилиндрической трубы

Для численной реализации рассмотрим следующую задачу. В вертикальной трубе с круглым поперечным сечением движется несущая среда с дисперсной примесью (см. рис. 5). Движение полагаем установившимся и осесимметричным. Средняя скорость дисперсной фазы в радиальном направлении равна нулю, так как частицы не проникают через стенку. Влияние слагаемых, пропорциональных произведениям градиентов осредненных параметров, несущественно.

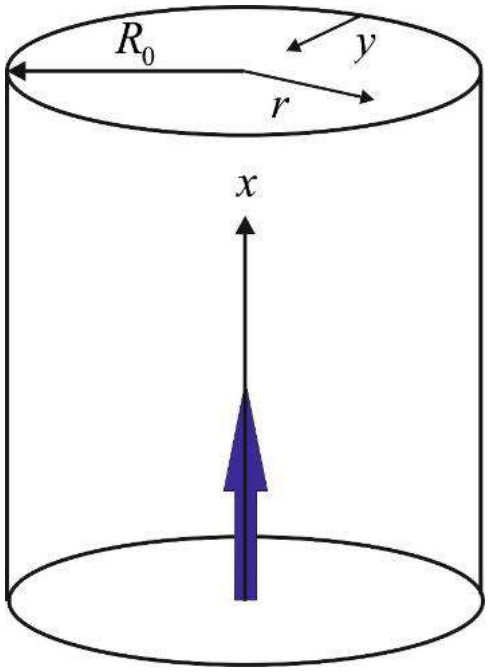


Рис. 5 Эскиз системы координат

Принимая во внимание указанную постановку преобразуем систему уравнений (20), (22), (23) с учетом замыкающих соотношений (21), (41), (42) и граничных условий (52), (53), (54).

6.2.1. Уравнение для концентрации

Для неабсорбирующей стенки имеем

$$\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\langle V_x\rangle\langle N\rangle+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\langle V_r\rangle\langle N\rangle=0,$$

$$\frac{\partial\langle V_r\rangle}{\partial t}+\langle V_x\rangle\frac{\partial\langle V_r\rangle}{\partial x}+\langle V_r\rangle\frac{\partial\langle V_r\rangle}{\partial r}+\frac{\partial\langle v_r^2\rangle}{\partial r}=-\frac{\langle V_r\rangle}{\tau_U}-\frac{1}{\tau_U}D_{rr}\frac{\partial\ln\langle N\rangle}{\partial r},$$

$$\langle V_r\rangle=-D_{rr}\frac{\partial\ln\langle N\rangle}{\partial r}-\tau_U\frac{\partial\langle v_r^2\rangle}{\partial r}.$$

Получаем уравнение в виде

$$\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\langle V_r\rangle\langle N\rangle,\qquad -\langle V_r\rangle=D_{rr}\frac{\partial\ln\langle N\rangle}{\partial r}+\tau_U\frac{\partial\langle v_r^2\rangle}{\partial r},$$

$$\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left\{D_{rr}\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial r}+\tau_U\langle N\rangle\frac{\partial\langle v_r^2\rangle}{\partial r}\right\}. \tag{55}$$

Граничное условие на стенке $r=R_0$ имеет вид

$$D_{rr}\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial r}+\tau_U\frac{\partial\langle v_r^2\rangle}{\partial r}\langle N\rangle=0. \tag{56}$$

6.2.2. Уравнение для аксиальной скорости

Имеем уравнение

$$\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial t}+\langle V_x\rangle\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial x}=\frac{\langle U_x\rangle+\tau_U g_x-\langle V_x\rangle}{\tau_U}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle v_r v_x\rangle\right).$$

Получаем

$$\langle v_x v_r \rangle = \sigma_{xr}^{(0)} - \tau_U \langle v_r^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r}, \qquad \sigma_{xr}^{(0)} = f_U \langle u_x u_r \rangle - q_U^{(0)} \tau_U \langle v_r^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r},$$

$$\langle v_x v_r \rangle = f_U \langle u_x u_r \rangle - D_{rr} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r}, \qquad D_{rr} = \tau_U \left(\langle v_r^2 \rangle + q_U^{(0)} \langle v_r^2 \rangle \right).$$

Здесь

$$\langle u_x u_r \rangle f_U = \langle u_x u_r \rangle f_U^{(0)} + \frac{1}{2} f_U^{(1)} \tau_U \langle u_r^2 \rangle \frac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial r}.$$

Касательные напряжения в дисперсной фазе

$$2 \langle v_r^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r} = \frac{2}{\tau_U} \left[f_U \langle u_x u_r \rangle - q_U^{(0)} \tau_U \langle u_r^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r} - \langle v_x v_r \rangle \right],$$

$$\langle v_x v_r \rangle = f_U \langle u_x u_r \rangle - \tau_U \left(\langle v_r^2 \rangle + q_U^{(0)} \langle u_r^2 \rangle \right) \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r} = f_U \langle u_x u_r \rangle - D_{rr} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r},$$

$$f_U \langle u_i u_j \rangle - \frac{q_U}{2} \tau_U \left(\langle u_k u_j \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k u_i \rangle \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} \right) - \langle v_i v_j \rangle = 0,$$

$$f_U \langle u_r u_x \rangle - q_U \tau_U \langle u_r u_r \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r} - \langle v_r v_x \rangle = 0,$$

$$\langle v_r v_x \rangle = f_U \langle u_r u_x \rangle - D_{rr} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r}.$$

С учетом гипотезы Прандтля

$$\langle v_r v_x \rangle = - f_U \nu_t \frac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial r} - D_{rr} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r}.$$

Получаем уравнение

$$\frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial t} = \frac{\langle U_x \rangle + \tau_U g_x - \langle V_x \rangle}{\tau_U} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r f_U \nu_t \frac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_{rr} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r} \right). \qquad (57)$$

Для течения в трубе граничное условие имеет вид

$$\frac{1-\langle k_\tau^* \rangle}{1+\langle k_\tau^* \rangle}\left(\frac{2}{\pi}\langle v_r^2 \rangle\right)^{1/2}\langle V_x \rangle + \frac{\tau_U}{2}\langle v_r^2 \rangle \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r} = 0. \qquad (58)$$

6.2.3. Уравнение для дисперсии радиальных флуктуаций скорости

Уравнение для течения в трубе имеет вид

$$\frac{\partial \langle v_r^2 \rangle}{\partial t} + \langle V_x \rangle \frac{\partial \langle v_r^2 \rangle}{\partial x} = -\frac{1}{\langle N \rangle}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle v_r^3 \rangle \langle N \rangle\right) + \frac{2}{\tau_U}\left[f_U \langle u_r^2 \rangle - \langle v_r^2 \rangle \right].$$

Для третьих моментов имеем

$$\langle v_r^3 \rangle = -D_{rr}\frac{\partial \langle v_r^2 \rangle}{\partial r}.$$

Уравнение для дисперсии радиальных флуктуаций скорости частиц в итерационном виде

$$\frac{\partial \langle v_r^2 \rangle}{\partial t} = \frac{2}{\tau_U}\left(f_U \langle u_r^2 \rangle - \langle v_r^2 \rangle \right) + \frac{1}{\langle N \rangle}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle N \rangle D_{rr}\frac{\partial \langle v_r^2 \rangle}{\partial r} \right). \qquad (59)$$

Для течения в трубе имеем

$$2\frac{1-\langle k_n^* \rangle^2}{1+\langle k_n^* \rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\langle v_r^2 \rangle\right)^{1/2}\langle v_r^2 \rangle + \tau_U \langle v_r^2 \rangle \frac{\partial \langle v_r^2 \rangle}{\partial r} = 0. \qquad (60)$$

6.2.4. Уравнение для дисперсии аксиальных флуктуаций скорости

Имеем общее уравнение

$$\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial t}+\langle V_x\rangle\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial x}+2\langle v_x v_r\rangle\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial r}+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle N\rangle\langle v_x^2 v_r\rangle\right)=$$
$$=\frac{2}{\tau_U}\left[f_U\langle u_x^2\rangle-q_U^{(0)}\tau_U\langle u_x u_r\rangle\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial r}-\langle v_x^2\rangle\right].$$

Третьи корреляции равны

$$\langle v_x^2 v_r\rangle=-\frac{1}{3}D_{rr}\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial r}.$$

Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial t}=-2\langle v_x v_r\rangle\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial r}+\frac{2}{\tau_U}\left[f_U\langle u_x^2\rangle-q_U^{(0)}\tau_U\langle u_x u_r\rangle\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial r}-\langle v_x^2\rangle\right]+$$
$$+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle N\rangle\frac{D_{rr}}{3}\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial r}\right). \qquad (61)$$

Касательные напряжения в дисперсной фазе равны

$$\langle v_x v_r\rangle=-f_U\nu_t\frac{\partial\langle U_x\rangle}{\partial r}-D_{rr}\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial r}.$$

Граничное условие при $r=R_0$ имеет вид

$$\frac{1-\langle k_\tau^*\rangle^2}{1+\langle k_\tau^*\rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\langle v_r^2\rangle\right)^{1/2}\langle v_x^2\rangle+\frac{\tau_U}{3}\langle v_r^2\rangle\frac{\partial\langle v_x^2\rangle}{\partial r}=0. \qquad (62)$$

Таким образом, для численного решения гидродинамики дисперсного турбулентного потока в трубе получили систему уравнений (55), (57), (59), (61) с граничными условиями на шероховатой стенке (56), (58), (60), (62). Параметры несущей фазы $\langle u_r^2\rangle,\langle u_x^2\rangle,\langle u_x u_r\rangle$ определялись из решения уравнений однопараметрической модели турбулентности (см. приложение).

6.3. Система уравнений в безразмерном виде

Приведем полученную систему уравнений с граничными условиями к безразмерному виду. Для этого введем следующие масштабы: масштаб длины — радиус канала R_0, масштаб скорости — средняя скорость потока газа $U_m = \frac{2}{R_0^2}\int_0^{R_0}\langle U_x\rangle r dr$. Числа Стокса и Рейнольдса соответственно определяются как $\mathrm{St}=\frac{\tau_U R_0}{U_m}$, $\mathrm{Re}_0 = \frac{2U_m R_0}{\nu_g}$.. Также для удобства введем обозначения $\langle u_i u_j\rangle = \eta_{ij}$, $\langle v_i v_j\rangle = \sigma_{ij}$. Безразмерные величины будем обозначать «звездочкой».

Получим безразмерный коэффициент турбулентной диффузии

$$D_{rr} = \tau_U\left(\langle v_r^2\rangle + q_U^{(0)}\langle u_r^2\rangle\right),$$

$$D_{rr}^* = \frac{1}{U_m R_0} D_{rr} = \frac{U_m}{U_m^2 R_0}\tau_U\left(\langle v_r^2\rangle + q_U^{(0)}\langle u_r^2\rangle\right) = \mathrm{St}\left(\sigma_{rr}^* + q_U^{(0)}\eta_{rr}^*\right).$$

Для функций отклика случайной скорости и смещения частицы имеем

$$f_U^{(0)} = \frac{1}{1+\mathrm{St}/T_L^{(p)*}},\ q_U^{(0)} = \frac{T_L^{(p)*}/\mathrm{St}}{1+\mathrm{St}/T_L^{(p)*}},\quad f_U^{(1)} = \frac{T_L^{(p)*}/\mathrm{St}}{\left(1+\mathrm{St}/T_L^{(p)*}\right)^2}.$$

6.3.1. Уравнение для концентрации

Общий вид уравнения

$$\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial t^*} = \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*} r^*\left\{D_{rr}^*\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial r^*} + \mathrm{St}\langle N\rangle\frac{\partial\sigma_{rr}^*}{\partial r^*}\right\}.$$

Безразмерный вид граничного условия на стенке $\left(r^* = 1\right)$

$$D_{rr}^{*}\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial r^{*}}+\mathrm{St}\frac{\partial\sigma_{rr}^{*}}{\partial r^{*}}\langle N\rangle=0.$$

Граничное условие в центре трубы $\left.\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial r^{*}}\right|_{r^{*}=0}=0.$

6.3.2. Уравнение для аксиальной скорости

Уравнение в безразмерном виде

$$\frac{\partial V_x^{*}}{\partial t^{*}}=\frac{U_x^{*}+\mathrm{St}g_x^{*}-V_x^{*}}{\mathrm{St}}+\frac{2}{\mathrm{Re}_0}\frac{1}{r^{*}}\frac{\partial}{\partial r^{*}}\left(r^{*}\ f_U\nu_t^{*}\frac{\partial U_x^{*}}{\partial r^{*}}\right)+\frac{1}{r^{*}}\frac{\partial}{\partial r^{*}}\left(r^{*}\ D_{rr}^{*}\frac{\partial V_x^{*}}{\partial r^{*}}\right).$$

Граничное условие на стенке трубы $\left(r^{*}=1\right)$

$$\frac{1-\langle k_\tau^{*}\rangle}{1+\langle k_\tau^{*}\rangle}\left(\frac{2}{\pi}\sigma_{rr}^{*}\right)^{1/2}V_x^{*}+\frac{\mathrm{St}}{2}\sigma_{rr}^{*}\frac{\partial V_x^{*}}{\partial r^{*}}=0.$$

Граничное условие при $r^{*}=0$ условие симметрии $\left.\frac{\partial V_x^{*}}{\partial r^{*}}\right|_{r^{*}=0}=0.$

6.3.3. Уравнение для дисперсии радиальных флуктуаций скорости

С учетом безразмерных параметров имеем

$$\frac{\partial\sigma_{rr}^{*}}{\partial t^{*}}=\frac{2}{\mathrm{St}}\left(f_U\eta_{rr}^{*}-\sigma_{rr}^{*}\right)+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{1}{r^{*}}\frac{\partial}{\partial r^{*}}\left(r^{*}\langle N\rangle D_{rr}^{*}\frac{\partial\sigma_{rr}^{*}}{\partial r^{*}}\right).$$

Граничные условия в безразмерном виде для $r^{*}=1$

$$2\frac{1-\langle k_n^{*}\rangle^2}{1+\langle k_n^{*}\rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\sigma_{rr}^{*}\right)^{1/2}\sigma_{rr}^{*}+\mathrm{St}\sigma_{rr}^{*}\frac{\partial\sigma_{rr}^{*}}{\partial r^{*}}=0.$$

Граничное условие при $r^* = 0$ — условие симметрии $\left.\dfrac{\partial \sigma^*_{rr}}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} = 0.$

6.3.4. Уравнение для дисперсии флуктуаций аксиальной скорости

Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle v_x^2\right\rangle}{\mathrm{d}t} = -2\left\langle v_x v_r\right\rangle \frac{\partial\left\langle V_x\right\rangle}{\partial r} +$$
$$+\frac{2}{\tau_U}\left(\left\langle u_x^2\right\rangle f_U^{(0)} + f_U^{(1)}\tau_U\left\langle u_x u_r\right\rangle \frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r} - q_U^{(0)}\tau_U\left\langle u_x u_r\right\rangle \frac{\partial\left\langle V_x\right\rangle}{\partial r} - \left\langle v_x^2\right\rangle\right) +$$
$$+\frac{1}{\left\langle N\right\rangle}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left\langle N\right\rangle \frac{D_{rr}}{3}\frac{\partial\left\langle v_x^2\right\rangle}{\partial r}\right).$$

Касательные напряжения равны

$$\left\langle v_x v_r\right\rangle = -f_U \nu_t \frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r} - D_{rr}\frac{\partial\left\langle V_x\right\rangle}{\partial r}, \qquad \left\langle u_x u_r\right\rangle = -\nu_t \frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r}.$$

Касательные напряжения в дисперсной фазе в безразмерном виде

$$\left\langle v_x^* v_r^*\right\rangle = \frac{1}{U_m^2}\left\langle v_x v_r\right\rangle = -f_U\frac{1}{U_m^2}\nu_t\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r} - \frac{1}{U_m^2}D_{rr}\frac{\partial\left\langle V_x\right\rangle}{\partial r} =$$
$$= -f_U\frac{\nu_g}{U_m R_0}\nu_t^*\frac{\partial\left\langle U_x^*\right\rangle}{\partial r^*} - \frac{1}{U_m R_0}D_{rr}\frac{\partial\left\langle V_x^*\right\rangle}{\partial r^*} = f_U\frac{2}{\mathrm{Re}_0}\nu_t^*\frac{\partial\left\langle U_x^*\right\rangle}{\partial r^*} - D_{rr}^*\frac{\partial\left\langle V_x^*\right\rangle}{\partial r^*},$$

$$\left\langle u_x^* u_r^*\right\rangle = -\frac{2}{\mathrm{Re}_0}\nu_t^*\frac{\partial\left\langle U_x^*\right\rangle}{\partial r^*},$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial t^*} = -2\sigma_{xr}^*\frac{\partial V_x^*}{\partial r^*} + \frac{2}{\mathrm{St}}\left[f_U^{(0)}\eta_{xx}^* + f_U^{(1)}\mathrm{St}\eta_{xr}^*\frac{\partial V_x^*}{\partial r^*} - q_U^{(0)}\mathrm{St}\eta_{xr}^*\frac{\partial V_x^*}{\partial r^*} - \sigma_{xx}^*\right] +$$
$$+\frac{1}{\left\langle N\right\rangle}\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^*\left\langle N\right\rangle\frac{D_{rr}^*}{3}\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial r^*}\right).$$

Граничные условия для уравнений аксиальной дисперсии при $r^* = 1$

$$\frac{1-\left\langle k_\tau^* \right\rangle^2}{1+\left\langle k_\tau^* \right\rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\sigma_{rr}^*\right)^{1/2}\sigma_{xx}^* + \frac{\mathrm{St}}{3}\sigma_{rr}^*\frac{\partial\sigma_{xx}^*}{\partial r^*} = 0.$$

Граничное условие в центре канала $\left.\frac{\partial\sigma_{xx}^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=0} = 0.$.

6.4. Расчет коэффициентов отражения импульса

Среднее значение радиальной скорости падающих частиц:

$$\left\langle N\right\rangle\left\langle V_y' \middle| V_y' < 0, V_x' > 0\right\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}V_x' \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}V_y' \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}V_z' V_y' \Phi_-\left(\mathbf{x}, \mathbf{V}', t\right) = \frac{\left\langle N\right\rangle}{4}\left[\left\langle V_y\right\rangle - \left(\frac{2}{\pi}\left\langle v_y^2\right\rangle\right)^{1/2}\right].$$

Для непроницаемой поверхности и не абсорбирующей стенки имеем

$$\left\langle V_r^{*\prime}\right\rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{\pi}\sigma_{rr}^*\right)^{1/2}.$$

Среднее значение флуктуаций аксиальной компоненты скорости частиц, падающих на стенку:

$$\left\langle N\right\rangle\left\langle V_x' \middle| V_y' < 0, V_x' > 0\right\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}V_x' \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}V_y' \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}V_z' V_x' \Phi_-\left(\mathbf{x}, \mathbf{V}', t\right) = \frac{\left\langle N\right\rangle}{4}\left[\left\langle V_x\right\rangle + \left(\frac{2}{\pi}\left\langle v_x^2\right\rangle\right)^{1/2}\right].$$

В безразмерном виде имеем

$$\left\langle V_x^{*\prime}\right\rangle = \frac{1}{4}\left[\left\langle V_x^*\right\rangle + \left(\frac{2}{\pi}\left\langle v_x^{*2}\right\rangle\right)^{1/2}\right].$$

Тогда с учетом (48), (49) эффективные коэффициенты восстановления импульса для шероховатой стенки имеют вид

$$\left\langle k_n^* \right\rangle = \frac{1}{4\varphi_{\max}} \left\{ \left(k_n + k_\tau\right) \left[2 \frac{\left\langle V_x^{*\prime} \right\rangle}{\left\langle V_r^{*\prime} \right\rangle} \left(1 - \cos^2 \varphi_{\max}\right) + \sin\left(2\varphi_{\max}\right) \right] + 2\left(k_n - k_\tau\right)\varphi_{\max} \right\},$$

$$\left\langle k_\tau^* \right\rangle = \frac{1}{4\varphi_{\max}} \left\{ \left(k_n + k_\tau\right) \left(\sin\left(2\varphi_{\max}\right) - 2 \frac{\left\langle V_r^{*\prime} \right\rangle}{\left\langle V_x^{*\prime} \right\rangle} \right) - 2\varphi_{\max}\left(k_n - k_\tau\right) \right\}.$$

6.5. Численное решение

Полученная в разделе 6.3 система нелинейных уравнений и нелинейных граничных условий может быть записана в компактной форме как

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w_i}{\partial t} = k_i^{(1)}\left(\mathbf{w}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_i^{(2)}\left(\mathbf{w}\right) \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) + f_i\left(\mathbf{w}\right), \\ &\left. \frac{\partial w_i}{\partial r} \right|_{r^*=0} = 0, \\ &\alpha_i\left(\mathbf{w}\right) w_i \big|_{r^*=1} + \beta_i\left(\mathbf{w}\right) \left. \frac{\partial w_i}{\partial r} \right|_{r^*=1} = \gamma_i\left(\mathbf{w}\right), \quad i = \overline{1,4}. \end{aligned} \tag{63}$$

Здесь $\mathbf{w} = \left\{ \left\langle N \right\rangle \quad \left\langle V_x^* \right\rangle \quad \sigma_{rr}^* \quad \sigma_{xx}^* \right\}^{\mathrm{T}}$ — вектор неизвестных, $\mathbf{k^{(1)}}\left(\mathbf{w}\right), \mathbf{k^{(2)}}\left(\mathbf{w}\right), \mathbf{f}\left(\mathbf{w}\right), \boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{w}\right), \boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{w}\right), \boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{w}\right)$ — вектор-функции, компоненты которых отражены в уравнениях раздела 6.3.

Так как течение газа с дисперсной примесью в поставленной задачи установившееся, то нас интересует стационарное решение системы (63). Для решения данной системы построим полунеявную разностную схему с помощью интегро-интерполяционного метода, при этом аргументы вектор-функций $\mathbf{k^{(1)}}\left(\mathbf{w}\right), \mathbf{k^{(2)}}\left(\mathbf{w}\right), \mathbf{f}\left(\mathbf{w}\right), \boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{w}\right), \boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{w}\right), \boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{w}\right)$ будем рассматривать на известном временном слое t_n [38], [39]. В этом случае для каждого из уравнений системы (63) на каждом временном слое имеем трёхдиагональную СЛАУ (удовлетворяющую условию строгого диагонального преобладания), которую будем решать с помощью метода прогонки.

Сетку по пространству изображена на рис. 6.

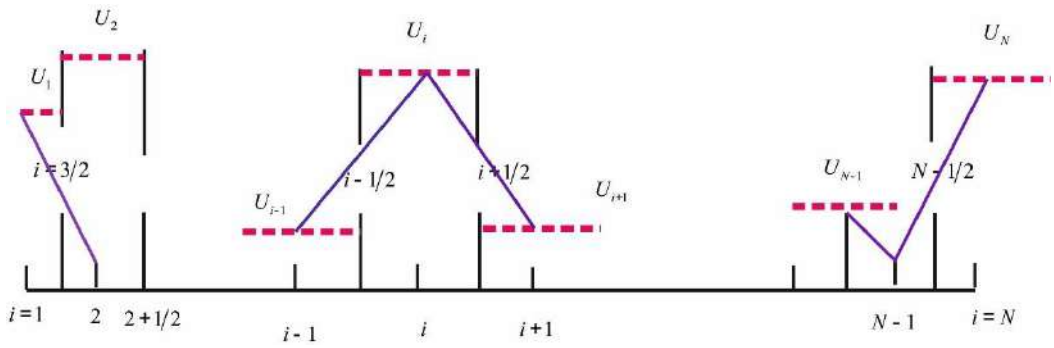


Рис. 6. Сетка по пространству, здесь U дискретная заданная на сетке функция.

Интегрируя каждое уравнение системы (63) по ячейке пространственной сетке и промежутку времени $[t_n, t_{n+1}]$, получим разностную аппроксимацию указанных уравнений. Далее верхним индексом (n или $n+1$) отмечен временной слой, а нижним индексом — пространственная координата.

Уравнение для концентрации

$$i=\overline{2,N-1}:$$

$$\frac{\langle N\rangle_i^{n+1}-\langle N\rangle_i^n}{t_{n+1}-t_n}=\frac{2}{r_{i+1/2}^2-r_{i-1/2}^2}\left\{r_{i+1/2}D_{i+1/2}^n\frac{\langle N\rangle_{i+1}^{n+1}-\langle N\rangle_i^{n+1}}{r_{i+1}-r_i}+r_{i+1/2}\mathrm{St}_{i+1/2}^n\langle N\rangle_{i+1/2}^n\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sigma_{rr,i+1}^n-\sigma_{rr,i}^n}{r_{i+1}-r_i}-r_{i-1/2}D_{i-1/2}^n\frac{\langle N\rangle_i^{n+1}-\langle N\rangle_{i-1}^{n+1}}{r_i-r_{i-1}}+r_{i-1/2}\mathrm{St}_{i-1/2}^n\langle N\rangle_{i-1/2}^n\frac{\sigma_{rr,i}^n-\sigma_{rr,i-1}^n}{r_i-r_{i-1}}\right\};$$

$$i=1:$$

$$\frac{\langle N\rangle_1^{n+1}-\langle N\rangle_1^n}{t_{n+1}-t_n}=\frac{2r_{3/2}}{r_{3/2}^2-r_1^2}\left\{D_{3/2}^n\frac{\langle N\rangle_2^{n+1}-\langle N\rangle_1^{n+1}}{r_2-r_1}+\mathrm{St}_{3/2}^n\langle N\rangle_{3/2}^n\frac{\sigma_{rr,2}^n-\sigma_{rr,1}^n}{r_2-r_1}\right\};$$

$$i=N:$$

$$\frac{\langle N\rangle_N^{n+1}-\langle N\rangle_N^n}{t_{n+1}-t_n}=\frac{-2r_{N-1/2}}{r_N^2-r_{N-1/2}^2}\left\{D_{N-1/2}^n\frac{\langle N\rangle_N^{n+1}-\langle N\rangle_{N-1}^{n+1}}{r_N-r_{N-1}}+\mathrm{St}_{N-1/2}^n\langle N\rangle_{N-1/2}^n\frac{\sigma_{rr,N}^n-\sigma_{rr,N-1}^n}{r_N-r_{N-1}}\right\}.$$

Уравнение для аксиальной скорости

$i=\overline{2,N-1}$:

$$\frac{V_{x,i}^{n+1}-V_{x,i}^{n}}{t_{n+1}-t_n}=\frac{U_{x,i}^{n}+\mathrm{St}_i^n g_x^*-V_{x,i}^{n}}{\mathrm{St}_i^n}+$$

$$+\frac{2}{r_{i+1/2}^2-r_{i-1/2}^2}\frac{2}{\mathrm{Re}}\left\{r_{i+1/2}f_{U,i+1/2}^n\nu_{t,i+1/2}^n\frac{U_{x,i+1}^n-U_{x,i}^n}{r_{i+1}-r_i}-r_{i-1/2}f_{U,i-1/2}^n\nu_{t,i-1/2}^n\frac{U_{x,i}^n-U_{x,i-1}^n}{r_i-r_{i-1}}\right\}+$$

$$+\frac{2}{r_{i+1/2}^2-r_{i-1/2}^2}\left\{r_{i+1/2}D_{rr,i+1/2}^n\frac{V_{x,i+1}^{n+1}-V_{x,i}^{n+1}}{r_{i+1}-r_i}-r_{i-1/2}D_{rr,i-1/2}^n\frac{V_{x,i}^{n+1}-V_{x,i-1}^{n+1}}{r_i-r_{i-1}}\right\};$$

$i=1$:

$$\frac{V_{x,1}^{n+1}-V_{x,1}^{n}}{t_{n+1}-t_n}=\frac{U_{x,1}^{n}+\mathrm{St}_1^n g_x^*-V_{x,1}^{n}}{\mathrm{St}_{x,1}^n}+$$

$$+\frac{2r_{3/2}}{r_{3/2}^2-r_1^2}\left\{\frac{2}{\mathrm{Re}}f_{U,3/2}^n\nu_{t,3/2}^n\frac{U_{x,2}^n-U_{x,i}^n}{r_2-r_1}+D_{rr,3/2}^n\frac{V_{x,2}^{n+1}-V_{x,1}^{n+1}}{r_2-r_1}\right\};$$

$i=N$:

$$\frac{V_{x,N}^{n+1}-V_{x,N}^{n}}{t_{n+1}-t_n}=\frac{U_{x,N}^{n}+\mathrm{St}_N^n-V_{x,N}^{n}}{\mathrm{St}_N^n}-\frac{2}{r_N^2-r_{N-1/2}^2}\left\{\frac{2}{\mathrm{Re}}r_{N-1/2}f_{U,N-1/2}^n\nu_{t,N-1/2}^n\frac{U_{x,N}^n-U_{x,N-1}^n}{r_N-r_{N-1}}+\right.$$

$$\left.+2r_N\frac{1-\left\langle k_\tau^*\right\rangle^n}{1+\left\langle k_\tau^*\right\rangle^n}\left(\frac{2}{\pi}\sigma_{rr,N}^n\right)^{1/2}V_{x,N}^{n+1}+r_{N-1/2}D_{rr,N-1/2}^n\frac{V_{x,N}^{n+1}-V_{x,N-1}^{n+1}}{r_N-r_{N-1}}\right\}.$$

Уравнение для дисперсии радиальных флуктуаций скорости

$i=\overline{2,N-1}$:

$$\frac{\sigma_{rr,i}^{n+1}-\sigma_{rr,i}^{n}}{t_{n+1}-t_n}=\frac{2}{\mathrm{St}_i^n}\left(f_{U,i}^n\eta_{rr,i}^n-\sigma_{rr,i}^n\right)+\frac{2}{\left(r_{i+1/2}^2-r_{i-1/2}^2\right)}\frac{1}{\left\langle N\right\rangle_i^n}\times$$

$$\times\left\{r_{i+1/2}\left\langle N\right\rangle_{i+1/2}^n D_{rr,i+1/2}^n\frac{\sigma_{rr,i+1}^{n+1}-\sigma_{rr,i}^{n+1}}{r_{i+1}-r_i}-r_{i-1/2}\left\langle N\right\rangle_{i-1/2}^n D_{rr,i-1/2}^n\frac{\sigma_{rr,i}^{n+1}-\sigma_{rr,i-1}^{n+1}}{r_i-r_{i-1}}\right\};$$

$i=1$:

$$\frac{\sigma_{rr,1}^{n+1}-\sigma_{rr,1}^{n}}{t_{n+1}-t_n}=\frac{2}{\mathrm{St}_1^n}\left(f_{U,1}^n\eta_{rr,1}^n-\sigma_{rr,1}^n\right)+\frac{2r_{3/2}}{r_{3/2}^2-r_1^2}\frac{1}{\left\langle N\right\rangle_1^n}\left\langle N\right\rangle_{3/2}^n D_{rr,3/2}^n\frac{\sigma_{rr,2}^{n+1}-\sigma_{rr,1}^{n+1}}{r_2-r_1};$$

$i = N$:

$$\frac{\sigma_{rr,N}^{n+1} - \sigma_{rr,N}^{n}}{t_{n+1} - t_n} = \frac{2}{\mathrm{St}_N^n}\left(f_{U,N}^n \eta_{rr,N}^n - \sigma_{rr,N}^n \right) - \frac{2}{r_N^2 - r_{N-1/2}^2} \frac{1}{\langle N \rangle_N^n} \times$$

$$\times \left\{ 4 r_N \langle N \rangle_N^n \frac{1 - \left(\langle k_n^* \rangle^n \right)^2}{1 + \left(\langle k_n^* \rangle^n \right)^2} \left(\frac{2}{\pi} \sigma_{rr,N}^n \right)^{1/2} \sigma_{rr,N}^{n+1} + r_{N-1/2} \langle N \rangle_{N-1/2}^n D_{rr,N-1/2}^n \frac{\sigma_{rr,N}^{n+1} - \sigma_{rr,N-1}^{n+1}}{r_N - r_{N-1}} \right\}.$$

Уравнение для дисперсии аксиальных флуктуаций скорости

$i = \overline{2, N-1}$:

$$\frac{\sigma_{xx,i}^{n+1} - \sigma_{xx,i}^{n}}{t_{n+1} - t_n} = -2\sigma_{xr,i}^n \frac{V_{x,i+1}^n - V_{x,i}^n}{r_{i+1} - r_i} + \frac{2}{\mathrm{St}_i^n} \left\{ f_{U,i}^{(0),n} \eta_{xx,i}^n + f_{U,i}^{(1),n} \mathrm{St}_i^n \eta_{xr,i}^n \frac{U_{x,i+1}^n - U_{x,i}^n}{r_{i+1} - r_i} - \right.$$

$$\left. - q_{U,i}^{(0),n} \mathrm{St}_i^n \eta_{xr,i}^n \frac{V_{x,i+1}^n - V_{x,i}^n}{r_{i+1} - r_i} - \sigma_{xx,i}^n \right\} + \frac{2}{r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2} \frac{1}{\langle N \rangle_i^n} \times$$

$$\times \left\{ r_{i+1/2} \langle N \rangle_{i+1/2}^n \frac{D_{rr,i+1/2}^n}{3} \frac{\sigma_{xx,i+1}^{n+1} - \sigma_{xx,i}^{n+1}}{r_{i+1} - r_i} - r_{i-1/2} \langle N \rangle_{i-1/2}^n \frac{D_{rr,i-1/2}^n}{3} \frac{\sigma_{xx,i}^{n+1} - \sigma_{xx,i-1}^{n+1}}{r_i - r_{i-1}} \right\};$$

$i = 1$:

$$\frac{\sigma_{xx,1}^{n+1} - \sigma_{xx,1}^{n}}{t_{n+1} - t_n} = \frac{2}{\mathrm{St}_1^n} \left(f_{U,1}^{(0),n} \eta_{xx,1}^n + f_{U,1}^{(1),n} \mathrm{St}_1^n \eta_{xr,1}^n \frac{U_{x,2}^n - U_{x,1}^n}{r_2 - r_1} - q_{U,1}^{(0),n} \mathrm{St}_1^n \eta_{xr,1}^n \frac{V_{x,2}^n - V_{x,1}^n}{r_2 - r_1} - \sigma_{xx,1}^n \right) +$$

$$+ \frac{2 r_{3/2}}{r_{3/2}^2 - r_1^2} \frac{\langle N \rangle_{3/2}^n}{\langle N \rangle_1^n} \frac{D_{rr,3/2}^n}{3} \frac{\sigma_{xx,2}^{n+1} - \sigma_{xx,1}^{n+1}}{r_2 - r_1};$$

$i = N$:

$$\frac{\sigma_{xx,N}^{n+1} - \sigma_{xx,N}^{n}}{t_{n+1} - t_n} = -2\sigma_{xr,N-1/2}^n \frac{V_{x,N}^n - V_{x,N-1}^n}{r_N - r_{N-1}} + \frac{2}{\mathrm{St}_N^n} \left(f_{U,N}^{(1),n} \mathrm{St}_N^n \eta_{xr,N}^n \frac{U_{x,N}^n - U_{x,N-1}^n}{r_N - r_{N-1}} + \right.$$

$$\left. + f_{U,N}^{(0),n} \eta_{xx,N}^n - q_{U,N}^{(0),n} \mathrm{St}_N^n \eta_{xr,N}^n \frac{V_{x,N}^n - V_{x,N-1}^n}{r_N - r_{N-1}} - \sigma_{xx,N}^n \right) - \frac{2}{r_N^2 - r_{N-1/2}^2} \frac{1}{\langle N \rangle_N^n} \times$$

$$\times \left\{ r_N \langle N \rangle_N^n \frac{1 - \left(\langle k_\tau^* \rangle^n \right)^2}{1 + \left(\langle k_\tau^* \rangle^n \right)^2} \left(\frac{2}{\pi} \sigma_{rr,N}^n \right)^{1/2} \sigma_{xx,N}^{n+1} + r_{N-1/2} \langle N \rangle_{N-1/2}^n \frac{D_{rr,N-1/2}^n}{3} \frac{\sigma_{xx,N}^{n+1} - \sigma_{xx,N-1}^{n+1}}{r_N - r_{N-1}} \right\}.$$

6.6. Результаты расчетов и выводы

При расчете были рассмотрены следующие параметры: радиус трубы $R_0 = 50$ мм, средняя скорость потока газа $U_m = 7.55$ м/с, число Рейнольдса несущего потока $\mathrm{Re} = 50 \cdot 10^3$, плотность материала частиц $\rho_p = 2500$ кг/м^3, плотность газа $\rho_g = 1.2$ кг/м^3, коэффициент кинематической вязкости газа $\nu_g = 1.51 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, коэффициенты восстановления импульса $k_\tau = k_n = 0.5$. Рассматривались частицы с диаметрами $d_p = 50$ мкм, $d_p = 100$ мкм, $d_p = 300$ мкм, которые использовались в экспериментах [6], [7]. Максимальный угол наклона случайной плоскости, моделирующей неровность стенки канала, $\varphi_{\max} = 13°$.

Далее представлены результаты гидродинамических параметров дисперсной и несущей фазы, при этом на всех графиках штриховой линией изображены параметры газа, сплошной линией изображены параметрам частиц в случае шероховатой стенки канала, а штрихпунктирной линией — в случае гладкой стенки канала.

В гладкой трубе максимум концентрации частиц достигается непосредственно на стенке (см. рис. 7(а), 9(а), 11(а)). При этом с увеличением размера частиц максимальное значение средней концентрации уменьшается. В неоднородных турбулентных потоках частицы всегда мигрируют в направлении уменьшения дисперсии флуктуаций радиальной скорости частиц. В трубах с гладкими стенками максимум интенсивности флуктуаций радиальной скорости находится около поверхности канала (см. рис. 8(а), 10(а), 12(а)). В этом случае «сила» турбофореза направлена к стенке трубы, что ведет к увеличению концентрации на ней. С увеличением массы частиц распределение средней концентрации становится более однородным. Этот вывод согласуется с результатами эксперимента [7].

Скорость частиц на стенке ненулевая. Столкновение частиц о стенку канала ведет к потере импульса и увеличению различия в скоростях несущей и дисперсной фазы. Для частиц с большим диаметром это скачок в скоростях увеличивается (см. рис. 7(b), 9(b), 11(b)).

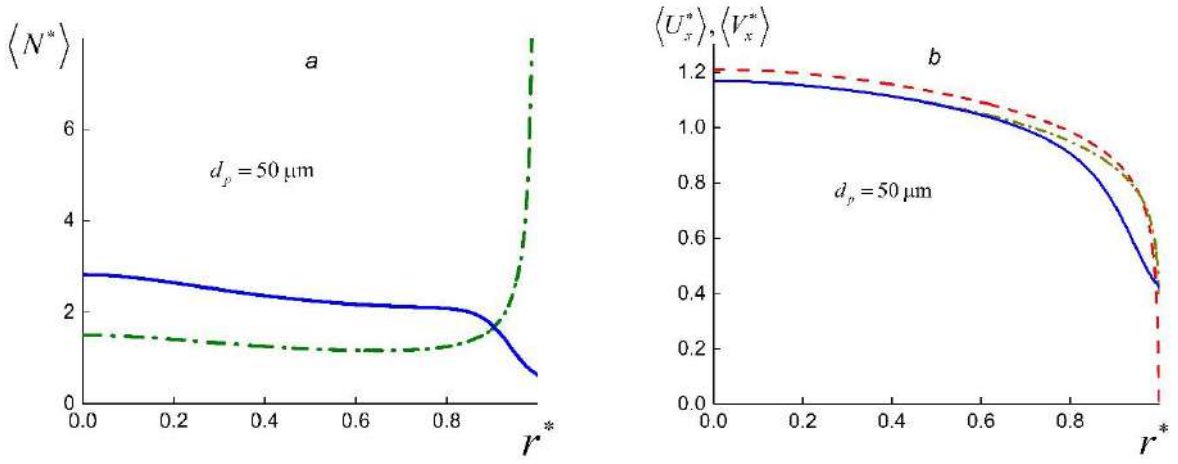


Рис. 7. Распределение концентрации (a) и средней аксиальной скорости (b) газа (штриховая линия) и частиц $d_p = 50$ мкм. Штрихпунктирная линия для гладкой, а сплошная линия для шероховатой стенок канала.

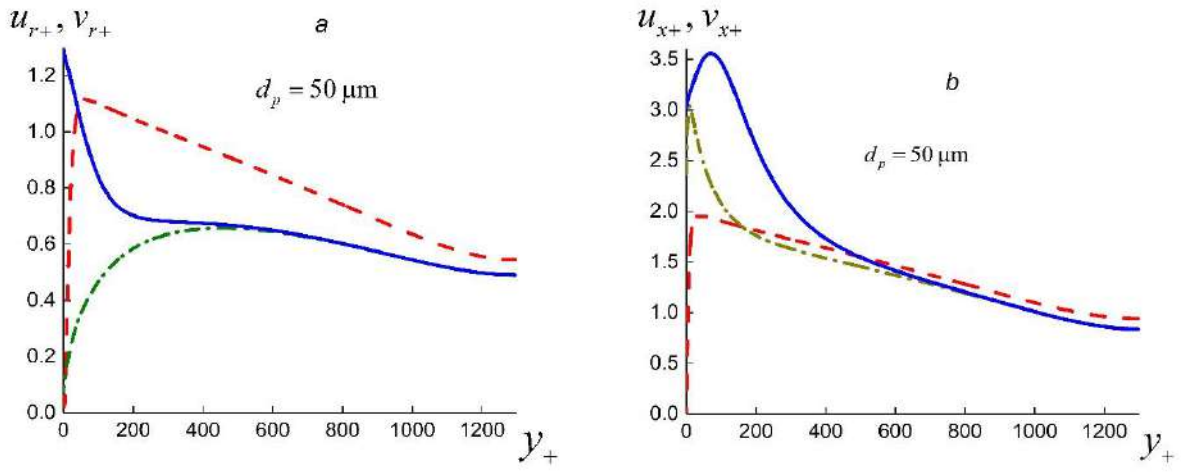


Рис. 8. Профили радиальных (a) и аксиальных (b) среднеквадратических значений флуктуаций скорости газа (штриховая линия) и частиц $d_p = 50$ мкм. Штрихпунктирная линия для гладкой, а сплошная линия для шероховатой стенок канала.

Как видно из рис. 8(b), 10(b), 12(b) среднеквадратичное значение аксиальной компоненты скорости частиц и газа различаются значительно даже в случае гладкой поверхности канала. Это согласуется с экспериментальными данными

из [7]. Это явление связано с тем, что частицы, которые имеют большие значения флуктуаций скорости в ядре потока мигрируют в область близкую к стенке канала. Увеличение размера частиц ведет к усилению данного эффекта.

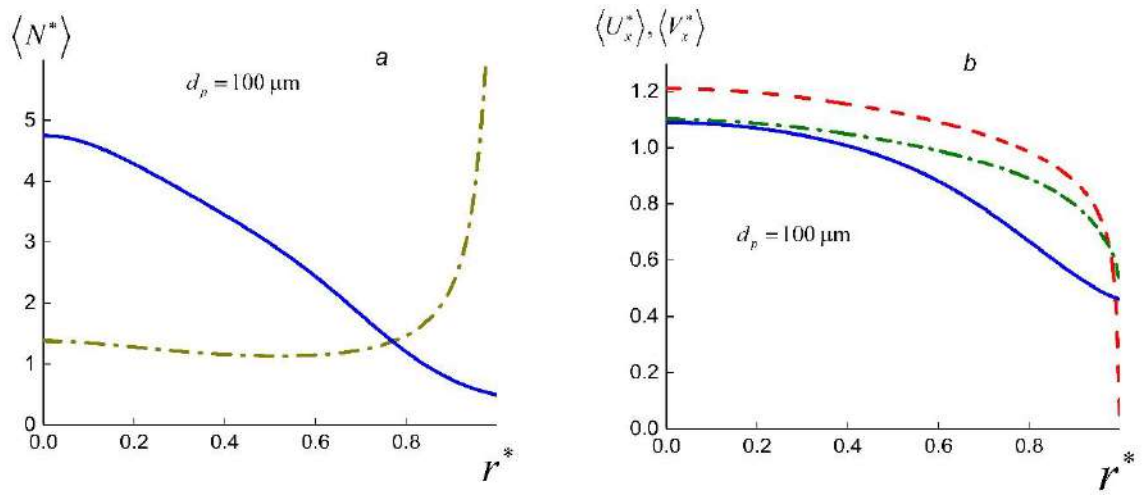


Рис.9. Распределение концентрации (a) и средней аксиальной скорости (b) и частиц $d_p = 100$ мкм.

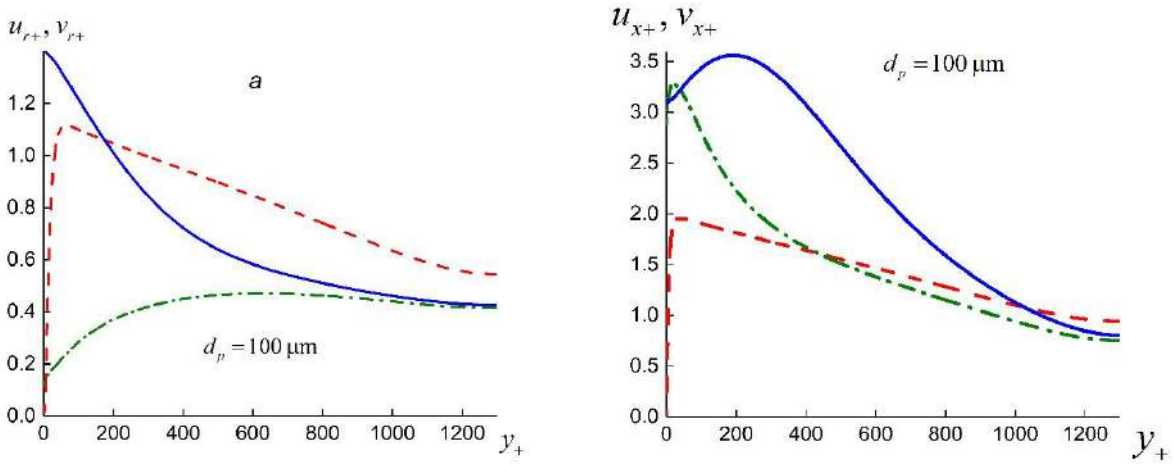


Рис. 10. Профили радиальных (a) и аксиальных (b) среднеквадратических значений флуктуаций скорости газа и частиц $d_p = 100$ мкм.

Для труб с шероховатой поверхностью ситуация принципиально иная. Максимум концентрации частиц сдвигается к центру канала (см. рис. 7(a), 9(a), 11(a)). На шероховатой стенке часть аксиальной скорости частиц преобразуется в нормальную компоненту. Это ведет к увеличению радиальных флуктуаций (см. рис. 8(a), 10(a), 12(a)). Их значение для тяжелых частиц может быть даже больше

чем у газа. Более того с увеличением размера частиц амплитуда флуктуаций радиальной компоненты скорости также увеличивается. Все данные результаты согласуются с экспериментами [6]. Увеличение интенсивности радиальных флуктуаций скорости ведет к в шероховатом канале ведет к увеличению аксиальной компоненты флуктуаций скорости (см. рис. 8(b), 10(b), 12(b)).

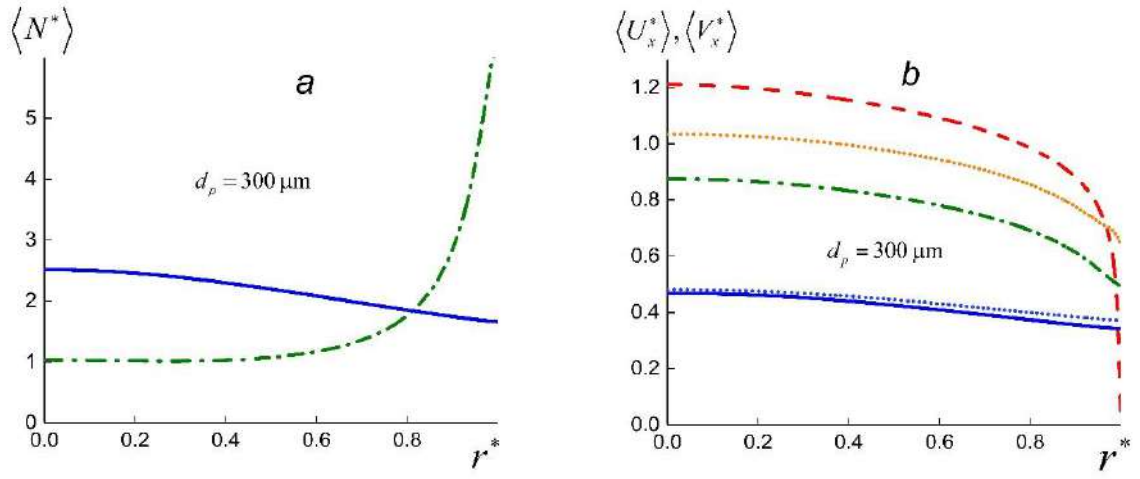


Рис. 7. Распределение концентрации (a) и средней аксиальной скорости (b) и частиц $d_p = 300$ мкм.

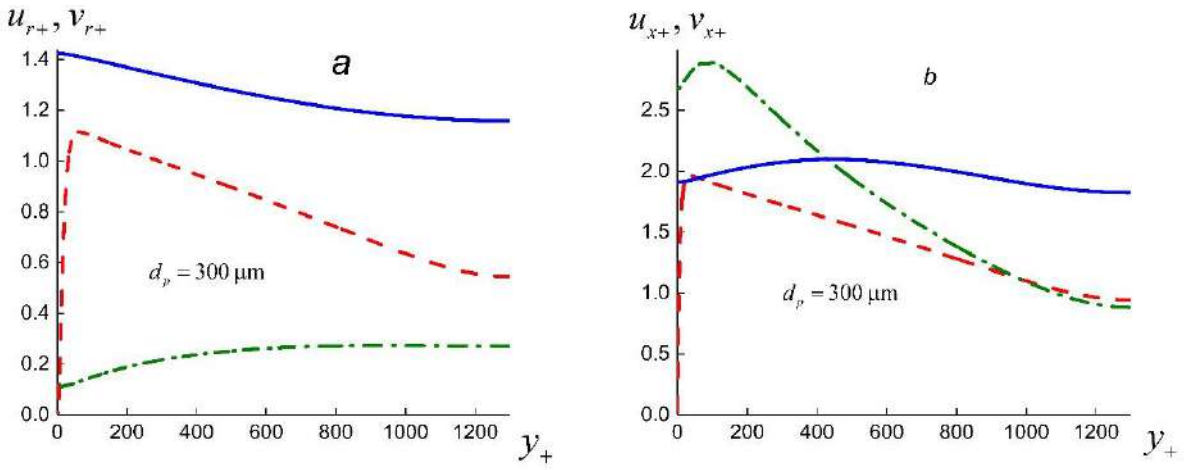


Рис. 8. Профили радиальных (a) и аксиальных (b) среднеквадратических значений флуктуаций скорости газа и частиц $d_p = 300$ мкм.

Таким образом, механизм генерации турбулентности дисперсной фазы в канале с гладкими и шероховатыми стенками качественно принципиально разный. В гладких трубах флуктуации скорости газа являются источником хаоти-

ческого движения частиц. В этом случае увеличение массы частиц ведет к уменьшению их интенсивности флуктуационного движения в радиальном направлении. В случае же шероховатых стенок канала, турбулентность несущего потока является лишь начальной причиной отклонения траекторий движения инерционных частиц от аксиального направления. Далее хаотическое движение дисперсной примеси является результатом столкновения частиц о случайно шероховатую стенку канала. Интенсивность хаотического движения в этом случае определяется структурой случайных неровностей поверхности трубы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе подхода Эйлера рассмотрено двухфазное движение частиц в неоднородном турбулентном потоке. При исследовании используется аппарат функции плотности вероятности распределения скоростей и координат частиц. Столкновения частиц между собой не учитываются.

Разработана процедура получения замкнутого уравнения для ФПВ распределения скоростей и координат частиц в неоднородном турбулентном потоке. Основные результаты работы следующие.

1. Получено замкнутое уравнение для ФПВ дисперсной фазы в неоднородном турбулентном потоке. Получена незамкнутая система уравнений для первых и вторых моментов флуктуаций скорости частиц.
2. Разработан метод приближенного решения уравнения для ФПВ аналогичный методу Грэда в кинетической теории газов. Нулевое приближение обращает в ноль «интеграл столкновений частиц» с турбулентными вихрями. Поправка в приближенном решении уравнения для ФПВ учитывает слагаемые линейные по градиентам осредненных параметров дисперсной фазы.
3. На основе приближенного решения уравнения для ФПВ найдены замкнутые выражения для потока импульса и турбулентной энергии частиц в неоднородном турбулентном потоке.

4. Получены граничные условия для системы уравнений для моментов на шероховатой стенке с учетом абсорбции частиц и потери импульса отраженных частиц. При этом использован метод моделирования неровностей с помощью случайных плоскостей.
5. Представлены результаты расчетов осредненных параметров дисперсной фазы при течении двухфазного потока в вертикальной круглой трубе. Произведен анализ полученных результатов для случаев гладкой и шероховатой стенки канала.

Дополнительная информация

Основные результаты настоящей выпускной квалификационной работы отражены в следующих публикациях.

1. Щадинский Д.М. Моделирование турбулентного движения частиц в пристеночной области канала на основе методов Эйлера и Лагранжа. Проблемы газодинамики и тепломассобмена в энергетических установках: Труды XXII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева (20–24 мая 2019 года, Москва, Россия) М.: Печатный салон «Шанс», 2019. с. 325–329.
2. Derevich I.V., Shchadinskiy D.M., Tun Z.H. Probabilistic model of dispersed turbulent flow in channels with rough walls // Aerosol Science and Technologies. 2020. DOI: 10.1080/02786826.2020.1739617

Работа поддержана российским фондом фундаментальных исследований, грант 20-08-01061.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Sommerfeld M. Modelling of particle-wall collisions in confined gas-particle flows. // Int. J. Multiph. Flow. 1992. Vol 18. P. 905–926. DOI:10.1017/10.1016/0301-9322(92)90067-Q
2. Sommerfeld M., Huber N. Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions. // Int. J. Multiph. Flow. 1999. Vol. 25. P. 1457–1489. DOI:10.1016/S0301-9322(99)00047-6
3. Shokri R., Ghaemi S., Nobes D.S., Sanders R.S. Investigation of particle-laden turbulent pipe flow at high-Reynolds-number using particle image / tracking velocimetry (PIV / PTV). // Int. J. Multiph. Flow. 2017. Vol. 89. P. 136–149. DOI:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2016.06.023
4. Kussin J., Sommerfeld M., Experimental studies on particle behaviour and turbulence modification in horizontal channel flow with different wall roughness. // Exp. Fluids. 2002. Vol. 33. P. 143–159. DOI:10.1007/s00348-002-0485-9
5. Benson M., Tanaka T., Eaton J.K. Effects of Wall Roughness on Particle Velocities in a Turbulent Channel Flow. // J. Fluids Eng., 2004. Vol. 127. P. 250–256.
6. Sommerfeld M., Kussin J. Wall roughness effects on pneumatic conveying of spherical particles in a narrow horizontal channel. // Powder Technol. 2004. Vol. 142. P. 180–192. DOI:10.1016/j.powtec.2004.05.002
7. Fong K.O., Amili O., Coletti F. Velocity and spatial distribution of inertial particles in a turbulent channel flow. // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 872 P. 367–406. DOI:10.1017/jfm.2019.355
8. Konan N.A., Kannengieser O., Simonin O. Stochastic modeling of the multiple rebound effects for particle-rough wall collisions. // Int. J. Multiphase Flow. 2009. Vol. 35. P. 933–945. DOI:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2009.05.006
9. Fede P., Simonin O., Ingram A. 3D numerical simulation of a lab-scale pressurized dense fluidized bed focussing on the effect of the particle-particle restitution coefficient and particle-wall boundary conditions. // Chem. Eng. Sci. 2016. Vol. 142 P. 215–235. DOI:10.1016/j.ces.2015.11.016

10. Soleimani A., Pirker S., Schneiderbauer S. Solid boundary condition for collisional gas-solid flows at rough walls. // Powder Technol. 2015. Vol. 281. P. 28–33. DOI:10.1016/j.powtec.2015.04.067
11. Radenkovic D., Simonin O. Stochastic modelling of three-dimensional particle rebound from isotropic rough wall surface. // Int. J. Multiph. Flow 2018. Vol. 109. P. 35–50. DOI:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.07.013
12. Tsuji Y., Morikawa Y., Tanaka T., Nakatsukasa N., Nakatani M. Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel. // Int. J. Multiph. Flow. 1987. Vol. 13. P. 671–684. DOI:10.1016/0301-9322(87)90044-9
13. Squires K.D., Simonin O. LES – DPS of the effect of wall roughness on dispersed-phase transport in particle-laden turbulent channel flow. // Int. J. Heat Fluid Flow. 2004. Vol. 27. P. 619–626. DOI:10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.02.009
14. Luo K., Dai Q., Liu X., Fan J. Effects of wall roughness on particle dynamics in a spatially developing turbulent boundary layer. // Int. J. Multiph. Flow. 2019. Vol. 111. P. 140–157. DOI:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.11.015
15. Derevich I.V., Zaichik, L.I. An equation for the probability density, velocity, and temperature of particles in a turbulent flow modelled by a random gaussian field. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1990. Vol. 54. P. 631–637.
16. Reeks M.W. On the continuum equations for dispersed particles in non-uniform flows. // Phys. Fluids A. 1992. Vol. 446. P. 1290–1303. DOI:10.1063/1.858247
17. Hyland K. E., McKee S., Reeks M. W. Derivation of a pdf kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. // J. Phys. A: Math. 1999. Gen. 32 P. 6169–6190.
18. Pozorski J., Minier J.-P. Probability density function modeling of dispersed two-phase turbulent flows. // Phys. Rev. 1999. Vol 59. 855. DOI:10.1103/physreve.59.855

19. Derevich I.V. Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows - 1. Model development // Int. J. Heat Mass Transf. 2000. Vol. 43(19). P. 3709–3723. DOI:10.1016/S0017-9310(00)00038-7
20. Зайчик Л.И., Алипченков В.М. Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит, 2007. 312 с.
21. Devenish D.J., Swales D.C., Seregeev Y.A., Kurdyumov V.N. A PDF model for dispersed particles with inelastic particle-wall collisions. // Physics of Fluids. 1999. Vol. 11. P. 1858–1868. DOI:10.1063/1.870048
22. Soleimani A., Schneiderbauer S., Pirker S. A comparison for different wall-boundary conditions for kinetic theory based two-fluid models. // Int. J. Multiph. Flow. 2015. Vol. 71. P. 94–97. DOI:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2014.12.008
23. Кляцкин В.И. Стохастичесие уравнения глазами физика. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001. 528 с.
24. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Наука, 1986. 538 с.
25. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Москва : Сов. радио, 1977. 488 с.
26. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
27. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 2. М.: Наука, 1965. 720 с.
28. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теретическая физика. Гидродинамика. Том VI. М.: Наука, 1966. 736 с.

29. Grad H. Principles of the kinetic theory of gases. // In: Flügge. S. Ed. Handbuch der Physik. Springer-Verlag. 1958. P. 205–294.
30. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977. 365 с.
31. Резибуа П., Де Ленер М. [Resibois P. De Leener M.] Классическая кинетическая теория жидкостей и газов: пер. с англ. М.: Мир, 1980. 424 с.

32. Самарский А.А, Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2–е изд. М.: Физматлит, 2005. 320 с.
33. Wetchagaruna S., Riley J.J. Dispersion and temperature statistics of inertial particles in isotropic turbulence. // Phys. Fluids. 2010. Vol. 22, P. 1–15. DOI:10.1063/1.3392772
34. Derevich I.V. Spectral diffusion model of heavy inertial particles in a random velocity field of the continuum medium. // Themophysics and Aeromechanics. 2015. Vol. 22. P. 143–162. DOI:10.1134/S086986431502002X
35. Dijk P.J., Swailes D.C. Hermite-DG methods for pdf equations modelling particle transport and deposition in turbulent boundary layers. // Journal of Computational Physics. 2012. Vol. 231. P. 4904–4920. DOI:10.1016/j.jcp.2012.04.016
36. Hinze J.O. Turbulence. New York: McGraw-Hill. 1975. 790 p.
37. Swailes D.C., Sergeev Y.A., Parker A. Chapman-Enskog closure approximation in the kinetic theory of dilute turbulent gas-particulate suspensions. // Physica A. 1998. Vol. 254. P 517–547. DOI:10.1016/S0378-4371(98)00063-6
38. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
39. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
40. Kim J., Moin P., Moser R.J. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 177. P. 133–166. DOI:10.1017/S0022112087000892

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнение Навье-Стокса. Осреднение Рейнольдса

Для несжимаемой жидкости уравнение Навье – Стокса имеет вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_g}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu_g \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Здесь U_i — скорость жидкости, ρ_g, ν_g — плотность и кинематическая вязкость жидкости, P — давление, t — время, $x_k, k = \overline{1,3}$ — пространственные координаты.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial U_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_i} = 0.$$

В результате осреднения по ансамблю турбулентных реализаций выделяем осредненную и случайную компоненты скорости и давления:

$$U_i(\mathbf{x},t) = \langle U_i(\mathbf{x},t)\rangle + u_i(\mathbf{x},t), \qquad \langle u_i(\mathbf{x},t)\rangle = 0,$$

$$P(\mathbf{x},t) = \langle P(\mathbf{x},t)\rangle + p(\mathbf{x},t), \qquad \langle p(\mathbf{x},t)\rangle = 0.$$

Уравнение для осредненной скорости среды

$$\frac{\partial \langle U_i\rangle}{\partial t} + \langle U_k\rangle \frac{\partial \langle U_i\rangle}{\partial x_k} = -\frac{\partial \langle u_i u_k\rangle}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho_g}\frac{\partial \langle P\rangle}{\partial x_i} + \nu_g \frac{\partial^2 \langle U_i\rangle}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Для замыкания вторых моментов используется гипотеза Прандтля

$$\langle u_i u_k\rangle = -\nu_t \left(\frac{\partial \langle U_i\rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle U_k\rangle}{\partial x_i} \right).$$

Турбулентная вязкость равна

$$\nu_t = C_1 E^{1/2} L_E.$$

Здесь $E = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle$ — турбулентная энергия единицы объема, L_E — характерный масштаб энергоемких вихрей, C_1 — константа, определяемая из эксперимента.

Уравнение для осредненной скорости среды

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_g}\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu_g + \nu_t\right)\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}\right].$$

Уравнение для турбулентной энергии среды

Уравнение для турбулентной энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle.$$

Уравнение для флуктуаций скорости $u_i = U_i - \langle U_i \rangle$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} = -\frac{\partial\left[u_i u_k - \langle u_i u_k \rangle\right]}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho_g}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu_g \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Уравнение для турбулентной энергии среды

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle = \left\langle u_i \left\{ -\langle U_k \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho_g}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu_g \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right\} \right\rangle.$$

Возникают корреляции

$$\langle u_i p \rangle = 0$$

Гипотеза Прандтля для турбулентной диффузии

$$\left\langle u_i \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle \frac{1}{2} u_i u_i u_k \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{1}{2} u_i u_i u_k \right\rangle = \left\langle E' u_k \right\rangle = -C_2 \nu_t \frac{\partial E}{\partial x_k}, \quad C_2 = \text{const}.$$

Турбулентная диссипация

$$\left\langle u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left\langle u_i u_i \right\rangle}{\partial x_k \partial x_k} - \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Уравнение для турбулентной энергии среды

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \left\langle U_k \right\rangle \frac{\partial E}{\partial x_k} + \left\langle u_i u_k \right\rangle \frac{\partial \left\langle U_i \right\rangle}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu_g + C_3 \nu_t \right) \frac{\partial E}{\partial x_k} \right] - \varepsilon,$$

где турбулентная диссипация

$$\varepsilon = \nu_g \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Слагаемое с порождением турбулентной энергии

$$\left\langle u_i u_k \right\rangle \frac{\partial \left\langle U_i \right\rangle}{\partial x_k} = -\nu_t \left(\frac{\partial \left\langle U_i \right\rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \left\langle U_k \right\rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \left\langle U_i \right\rangle}{\partial x_k}.$$

Уравнение для турбулентной энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \left\langle U_k \right\rangle \frac{\partial E}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial \left\langle U_i \right\rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \left\langle U_k \right\rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \left\langle U_i \right\rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu_g + C_3 \nu_t \right) \frac{\partial E}{\partial x_k} \right] - \varepsilon.$$

Аппроксимация турбулентной диссипации

Сумма двух слагаемых: вырождение турбулентности за счет трансфера по спектру и вязкой диссипации. Характерное время жизни энергоемкого вихря

$$T_E = \frac{L_E}{E^{1/2}}, \qquad \varepsilon = C_4 \frac{E}{T_E} + C_5 \nu_g \frac{E}{L_E^2} = C_4 \frac{E^{3/2}}{L_E} + C_5 \nu_g \frac{E}{L_E^2},$$

$$C_4 = \text{const}, \quad C_5 = \text{const}.$$

Система замкнутых уравнений гидродинамики однопараметрической модели турбулентности

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0.$$

Уравнение для осредненной скорости

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu_g + \nu_t \right) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \right].$$

Турбулентный коэффициент диффузии

$$\nu_t = C_1 L_E E^{1/2}.$$

Уравнение для турбулентной энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial E}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu_g + C_3 \nu_t \right) \frac{\partial E}{\partial x_k} \right] - \varepsilon.$$

Турбулентная диссипация

$$\varepsilon = C_4 \frac{E^{3/2}}{L_E} + C_5 \nu_g \frac{E}{L_E^2}.$$

Уравнения однопараметрической модели турбулентности в круглой трубе

Диаметр трубы D, среднемассовая скорость потока U_m. Ось x направлена по оси трубы.

Уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \langle U_r \rangle \right) = 0.$$

Условие сохранения расхода

$$\frac{\partial}{\partial x}2\pi\int_0^{D/2}\left\langle U_x\left(x,r\right)\right\rangle r\mathrm{d}r+2\pi\int_0^{D/2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left\langle U_r\left(x,r\right)\right\rangle\right)r\mathrm{d}r=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}SU_m+2\pi r\left\langle U_r\left(x,r\right)\right\rangle\Big|_0^{D/2}=\frac{\partial}{\partial x}SU_m=0.$$

Здесь $S=\pi\dfrac{D^2}{4}$ – сечение трубы.

Уравнение для осредненной скорости потока в трубе

$$\left\langle U_x\right\rangle\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial x}+\left\langle U_r\right\rangle\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r}=-\frac{1}{\rho_g}\frac{\mathrm{d}\left\langle P\right\rangle}{\mathrm{d}x}+\nu_g\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(1+\frac{\nu_t}{\nu_g}\right)\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r}\right\}.$$

Для стабилизированного участка

$$\frac{1}{\rho_g}\frac{\mathrm{d}\left\langle P\right\rangle}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\nu_g+\nu_t\right)\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r}\right\}.$$

Перепад давления на стабилизованном участке

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle P\right\rangle}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\mu_g+\mu_t\right)\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r}\right\},$$

$$2\pi\int_0^{D/2}\frac{\mathrm{d}\left\langle P\right\rangle}{\mathrm{d}x}r\mathrm{d}r=S\frac{\mathrm{d}\left\langle P\right\rangle}{\mathrm{d}x}=2\pi\int_0^{D/2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\mu_g+\mu_t\right)\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r}\right\}r\mathrm{d}r=$$

$$=2\pi r\left(\mu_g+\mu_t\right)\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r}\Bigg|_0^{D/2}=\pi D\mu_g\frac{\partial\left\langle U_x\right\rangle}{\partial r}\Bigg|_{r=D/2}=-\pi D\tau_W.$$

Здесь $\mu_g=\rho_g\nu_g$ — динамическая вязкость, $\mu_t=\rho_g\nu_t$ — динамическая турбулентная вязкость.

Получаем связь

$$S\frac{\mathrm{d}\left\langle P\right\rangle}{\mathrm{d}x}=-\pi D\tau_W<0.$$

Здесь $\tau_W = -\mu_g \left.\dfrac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial r}\right|_{r=D/2}$ — касательные напряжения на стенке трубы.

Получаем для перепада давления

$$\frac{\mathrm{d}\langle P \rangle}{\mathrm{d}x} = -\frac{4}{D}\tau_W .$$

Динамическая скорость находится из уравнения

$$\tau_W = \rho_g u_+^2 .$$

Перепад давления через коэффициент гидравлического сопротивления

$$\frac{\mathrm{d}\langle P \rangle}{\mathrm{d}x} = -f\,\frac{\rho_g U_m^2}{2}\frac{1}{D}.$$

Здесь f — коэффициент гидравлического сопротивления круглой трубы. Выражение динамической скорости через среднемассовую скорости и коэффициент гидравлического сопротивления

$$\frac{\mathrm{d}\langle P \rangle}{\mathrm{d}x} = -f\,\frac{\rho_g U_m^2}{2}\frac{1}{D} = -\frac{4}{D}\rho_g u_+^2 .$$

Получаем для динамической скорости

$$u_+ = U_m\sqrt{\frac{f}{8}}.$$

Уравнение для турбулентной энергии

$$\langle U_x \rangle \frac{\partial E}{\partial x} + \langle U_r \rangle \frac{\partial E}{\partial r} = \nu_t \left(\frac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{ r\left(\nu_g + C_3 \nu_t\right)\frac{\partial E}{\partial r} \right\} - \varepsilon .$$

Уравнения турбулентности в универсальных переменных

Масштаб скорости u_+. Безразмерная осредненная скорость $U_x^+ = \langle U_x \rangle / u_+$, $U_r^+ = \langle U_r \rangle / u_+$. Безразмерная турбулентная энергия $E^+ = E / u_+^2$. Безразмерная координата $y^+ = y u_+ / \nu_g$. Здесь $y = \frac{D}{2} - r$ — расстояние от стенки канала. Безразмерный диаметр канала $D^+ = D u^+ / \nu_g$, $r^+ = r u_+ / \nu_g$.

Уравнение неразрывности в безразмерных переменных

$$\frac{\partial U_x^+}{\partial x^+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ U_r^+ \right) = 0.$$

Давление в безразмерных переменных

$$P^+ = \frac{\langle P \rangle}{\rho_g u_+^2}.$$

Уравнение для осредненной скорости в безразмерных переменных

$$U_x^+ \frac{\partial U_x^+}{\partial x^+} + U_r^+ \frac{\partial U_x^+}{\partial r} = -\frac{\mathrm{d}P^+}{\mathrm{d}x^+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left\{ r^+ \left(1 + \nu_t^+ \right) \frac{\partial U_x^+}{\partial r^+} \right\}, \qquad \nu_t^+ = \frac{\nu_t}{\nu_g}.$$

Турбулентная вязкость в безразмерных переменных

$$\nu_t^+ = C_1 \left(E^+ \right)^{1/2} L_E^+ , \qquad L_E^+ = \frac{L_E u_+}{\nu_g}.$$

Уравнение для турбулентной энергии в безразмерных переменных

$$U_x^+ \frac{\partial E^+}{\partial x^+} + U_r^+ \frac{\partial E^+}{\partial r^+} = \nu_t^+ \left(\frac{\partial U_x^+}{\partial r^+} \right)^2 + \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left\{ r^+ \left(1 + C_3 \nu_t^+ \right) \frac{\partial E^+}{\partial r^+} \right\} - \varepsilon^+.$$

Безразмерная турбулентная диссипация

$$\varepsilon^+ = C_4 \frac{\left(E^+ \right)^{3/2}}{L_E^+} + C_5 \frac{E^+}{\left(L_E^+ \right)^2}.$$

Замыкающие соотношения

Длина пути смешения Никурадзе

$$\frac{L_E}{D_p/2} = 0.14 - 0.08\left(\frac{r}{D_p/2}\right)^2 - 0.06\left(\frac{r}{D_p/2}\right)^4.$$

Модифицированная турбулентная вязкость

$$\nu_t^+ = \frac{\nu_t}{\nu_g} = \frac{C_1 \mathrm{Re}_t}{1 + \dfrac{C_1'}{\mathrm{Re}_t}}, \qquad \mathrm{Re}_t = \frac{E^{1/2} L_E}{\nu} = \left(E^+\right)^{1/2} L_E^+.$$

Значения констант

$$C_1 = 0.51, \qquad C_1' = 14, \qquad C_3 = 0.2.$$

Константы в выражении для турбулентной диссипации

$$\varepsilon^+ = C_4 \frac{\left(E^+\right)^{3/2}}{L_E^+} + C_5 \frac{E^+}{\left(L_E^+\right)^2}, \qquad C_4 = 0.13, \qquad C_5 = 0.32.$$

Эмпирический коэффициент гидравлического сопротивления круглой трубы (формула Филоненко)

$$f = \frac{1}{\left(1.82 \log \mathrm{Re} - 1.64\right)^2}.$$

Здесь число Рейнольдса потока

$$\mathrm{Re} = \frac{U_m D}{\nu_g}.$$

Вычисления и результаты

Для решения полученной системы можно построить её разностную аппроксимацию аналогично разделу 6.5 и найти установившееся решение. Имея решение для средней скорости несущего потока $\langle U_x \rangle$ и турбулентной энергии E можно получить значения для дисперсий радиальных и аксиальных флуктуаций скорости газа по формулам [40]

$$\left\langle u_r^2 \right\rangle = \frac{1}{3} E \left[1 - \exp\left(-\frac{y_+}{A} \right) \right], \quad A \approx 11.0,$$
$$\left\langle u_x^2 \right\rangle = E.$$

Таким образом, можно получить необходимые значения осредненных параметров несущего потока.

Приложение к приказу
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород
от 16.04.2020 № 8.1.6.3-14/1604-01
УТВЕРЖДЕНО ученым советом
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород
протокол
(от 13.02.2020 № 8.1.1.7-06/1)

Положение о конкурсе
«Смотр выпускных квалификационных работ
студентов и выпускников математических или связанных с математикой
специальностей и направлений подготовки»

1. Общие положения

1.1. Настоящее Положение определяет порядок организации и проведения конкурса «Смотр выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки» (далее – Смотр), организуемого и проводимого НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.

1.2. Организатором Смотра является НИУ ВШЭ – Нижний Новгород (далее – Организатор). Проведение Смотра от имени НИУ ВШЭ – Нижний Новгород обеспечивает кафедра фундаментальной математики. Контактным лицом Организатора является Ремизов Иван Дмитриевич, iremizov@hse.ru.

1.3. Предметом Смотра является выпускная квалификационная работа (далее – конкурсная работа). Кандидатские, докторские, PhD диссертации и приравненные к ним работы не допускаются до участия в Смотре.

1.4. Смотр является открытым и проводится среди студентов, а также выпускников образовательных организаций, освоивших основные профессиональные образовательные программы высшего образования - программы бакалавриата, программы специалитета, программы магистратуры математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки в 2017, 2018, 2019, 2020 годах (далее – Участники, Авторы конкурсной работы). Срок проведения Смотра с 01.05.2020 по 15.07.2020 включительно.

1.5. Смотр проводится по следующим номинациям:

1.5.1. Лучшие работы по мнению участников Смотра (далее – Номинация 1);

1.5.2. Лучшие работы по мнению представителей научно-исследовательских организаций и организаций высшего образования (далее – Номинация 2);

1.5.3. Лучшие работы по мнению представителей других организацией, деятельность которых тесно связана с математикой (далее – Номинация 3).

1.6. Кафедра фундаментальной математики не менее чем за три рабочих дня до даты начала приема конкурсных работ публикует на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород информацию об условиях Смотра, критерии и порядок оценок конкурсных работ, место, срок и порядок представления конкурсных работ, размер и форму награды, порядок и сроки объявления результатов Смотра.

1.7. Положение и изменения к нему утверждаются ученым советом НИУ ВШЭ – Нижний Новгород и вводится в действие приказом директора НИУ ВШЭ – Нижний Новгород

1.8. Положение действует на период проведения Смотра.

2. Условия Конкурса

2.1. Смотр проходит в два этапа:

2.1.1. первый этап Смотра проводится с 01.05.2020 по 10.06.2020 включительно и состоит из следующих мероприятий:

с 01.05.2020 по 31.05.2020 включительно осуществляется сбор конкурсных работ.

Конкурсные работы, поступившие после окончания срока приема конкурсных работ, к Смотру не допускаются.

с 01.06.2020 по 10.06.2020 включительно осуществляется отбор конкурсных работ на соответствие правилам оформления конкурсных работ.

Список Участников по итогам первого отборочного этапа конкурсных работ будет опубликован на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород 10.06.2020;

2.1.2. второй этап Смотра проводится с 11.06.2020 по 01.07.2020 включительно и состоит из следующих мероприятий:

- присвоение конкурсным работам порядковых номеров и их публикация в сборнике;
- оценка конкурсных работ членами Жюри для выявления Победителей в Номинациях 1-3.

2.2. Информация о Победителях Смотра по каждой номинации по итогам второго этапа Смотра будет опубликована 08.07.2020 на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr.

2.3. Награждение Победителей Смотра по каждой номинации осуществляется 15.07.2020.

3. Участники Смотра

3.1. Участниками Смотра являются студенты, а также выпускники образовательных организаций, освоившие основные профессиональные образовательные программы высшего образования - программы бакалавриата, программы специалитета, программы магистратуры математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки в 2017, 2018, 2020 годах.

3.2. Участники, принимая участие в Смотре, соглашаются с правилами проведения Смотра, изложенными в настоящем Положении.

3.3. Участник может обращаться за консультациями, разъяснениями и технической поддержкой по вопросам, связанным с участием в Смотре, к Организатору.

3.4. В случае нарушения Участником настоящего Положения, а равно установления факта недобросовестного поведения в рамках Смотра, Организатор вправе не допустить такого Участника к участию в Смотре и отстранить на любом этапе от дальнейшего участия в Смотре и лишить призового места.

4. Жюри Смотра

4.1. Рассмотрение конкурсных работ Участников и определение Победителя Смотра по каждой номинации осуществляет жюри Смотра, состав которого

формируется Оргкомитетом Смотра и публикуется на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.

4.2. Для выявления Победителей в каждой номинации формируется три группы Жюри, состоящие из:

4.2.1 всех участников Смотра для выявления Победителя в Номинации 1 (далее – группа Жюри 1);

4.2.2 представителей научно-исследовательских организаций и организаций высшего образования для выявления Победителя в Номинации 2 (далее – группа Жюри 2);

4.2.3 представителей других организацией, деятельность которых тесно связана с математикой для выявления Победителя в Номинации 3 (далее – группа Жюри 3).

4.3. При оценке работ Участников член жюри Смотра по каждой номинации руководствуется следующими критериями:

4.3.1. Понятность постановки задачи. После прочтения работы должно быть ясно, какая задача решалась автором.

4.3.2. Доступность введения для неспециалистов. Базовые термины и факты исследуемой области должны быть изложены в форме, доступной для понимания широкой математической аудиторией.

4.3.3. Качество изложения основного научного результата, полученного автором.

4.3.4. Качество обоснования основного научного результата, полученного автором.

4.3.5. Качество оформления работы - стилистическое единство, качество вёрстки текста, наличие необходимых частей в работе.

4.3.6. Наличие и уровень публикаций автора по теме работы.

4.4. Каждый член жюри Смотра проводит оценку работ Участников по критериям, указанным в п. 4.3. настоящего Положения, по бинарной шкале (0 или 1 балл), где «0» – «конкурсная работа имеет существенные недостатки и в представленном на Смотр виде не может считаться достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно», а «1» – «конкурсная работа является достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно».

4.5. Каждый член группы Жюри обязан оценить 5 работ, присланных ему Оргкомитетом случайным образом, а также может выбрать для оценки по своему усмотрению любые другие от 0 до 5 работ из опубликованных в сборнике конкурсных работ.

4.6. Набранные баллы от каждой группы Жюри суммируются отдельно. Авторы работ, набравших наибольшее количество баллов от одной группы Жюри, признаются Победителями в соответствующей Номинации.

5. Правила оформления конкурсных работ и порядок их представления

5.1. Конкурсная работа должна быть выполнена в формате PDF и содержать:

5.1.1. Полный текст выпускной квалификационной работы со всеми пригодными для изображения в статическом виде приложениями.

5.1.2. Отзыв научного руководителя о работе (необязательно). Направляя отзыв, участник подтверждает согласие научного руководителя на публикацию отзыва в сети Интернет.

5.1.3. Скан/фото заполненного и подписанного Заявления о новизне согласно приложению.

5.2. К конкурсной работе должно прилагаться письмо с информацией об Участнике. Информация об Участнике должна содержать следующие данные:

5.2.1. фамилия, имя, отчество;

5.2.2. контактный номер телефона;

5.2.3. страна и город проживания

5.2.4. информация о (планируемой) дате защиты представленной на Смотр выпускной квалификационной работы

5.3. Конкурсная работа направляется Организатору в электронном виде. Конкурсные работы в электронном виде направляются Организатору на корпоративную электронную почту по адресу: hsennconfmath@gmail.com.

5.4. Конкурсные работы должны быть направлены Организатору в срок до 31.05.2020 включительно.

6. Подведение итогов Смотра

6.1. Решение жюри Смотра должно быть принято не позднее 10.06.2020 (I этап) и 01.07.2020 (II этап).

6.2. Оргкомитет осуществляет сбор и обработку оценок, выставленных членами жюри Смотра, в электронном виде заочно. Очных заседаний членов Жюри не предусмотрено.

6.3. Решение жюри Смотра оформляется протоколами заседания Оргкомитета, которые подлежат опубликованию на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород не позднее 08.07.2020.

6.4. Победителями Смотра по каждой номинации являются участники, набравшие высший балл по результатам заочного голосования жюри Смотра.

6.5. Решение жюри Смотра является окончательным и обязательным для Участников.

6.6. Подлинники протоколов заседаний Оргкомитета и прилагаемые к ним материалы хранятся в структурном подразделении НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, обеспечивающем проведение Смотра, в течение пятилетнего срока оперативного хранения.

6.7. Протоколы заседаний Оргкомитета и прилагаемые к ним материалы являются документами постоянного срока хранения. По истечении пятилетнего срока оперативного хранения протоколы и прилагаемые к ним материалы передаются по описи на архивное хранение в Общий отдел НИУ ВШЭ – Нижний Новгород в установленном в НИУ ВШЭ – Нижний Новгород порядке.

7. Финансирование Смотра

7.1. Призовой фонд Смотра отсутствует, денежное вознаграждение Победителей Смотра по каждой номинации не предусмотрено.

7.2. По результатам подведения итогов Смотра Победитель Смотра из каждой номинации награждается – нематериальным вознаграждением в виде диплома I или II степени Победителя Смотра в соответствующей номинации.

8. Авторские права

8.1. Конкурсная работа является результатом творческой деятельности соответствующего Автора конкурсной работы.

8.2. Автор конкурсной работы гарантирует Организатору Смотра, что:

8.2.1. на момент направления (передачи) конкурсной работы он является единственным ее правообладателем, обладает всеми необходимыми правами для принятия всех условий проведения Смотра, предусмотренных настоящим Положением. В случае если Авторами конкурсной работы являются несколько лиц, Автор, направляющий конкурсную работу Организатору, обязуется заблаговременно получить согласие остальных лиц на направление работы Организатору и обеспечить достижение соглашения с остальными лицами в отношении распоряжения исключительным правом на конкурсную работу в соответствии с условиями, предусмотренными настоящим Положением;

8.2.2. использование конкурсной работы Организатором Смотра в соответствии с условиями настоящего Положения не приведет к нарушению прав и законных интересов третьих лиц;

8.2.3. им за свой счет будут предприняты все необходимые действия, исключающие возникновение (или обеспечивающие возмещение уже понесенных) расходов Организатора Смотра, связанных с требованиями и претензиями третьих лиц в отношении использования конкурсной работы. До полного выяснения обстоятельств использования и удовлетворения соответствующих требований и претензий конкурсная работа, послужившая их основанием, исключается из Смотра.

8.3. Автор конкурсной работы предоставляет Организатору Смотра право использования конкурсной работы на условиях простой (неисключительной) лицензии путем:

8.3.1. воспроизведения в любой форме, без ограничения количества экземпляров;

8.3.2. распространения, включая воспроизведенные экземпляры, путем продажи или иного отчуждения;

8.3.3. доведение до всеобщего сведения;

8.3.4. включения в составные и иные произведения;

8.3.5. перевода или другой переработки с возможностью последующего использования любыми способами такого перевода или иным образом переработанного произведения (производного произведения) и распоряжения исключительным правом на производное произведение.

Использование конкурсной работы Организатором Смотра допускается на территории любого государства (на территории всего мира) в течение всего срока действия исключительного права на конкурсную работу с момента предоставления права использования, без выплаты вознаграждения за использование конкурсной работы и без представления отчетов. Право использования конкурсной работы считается предоставленным в момент получения Организатором Смотра конкурсной работы в порядке, указанном в настоящем Положении, безотносительно результатов оценки работ Участников Смотра.

8.4. Автор конкурсной работы дают свое согласие на:

8.4.1. использование конкурсной работы Организатором Смотра с указанием имени Автора при каждом таком использовании;

8.4.2. использование созданной им конкурсной работы в составе сборника работ.

8.5. Принимая участие в Смотре, Автор конкурсной работы выражает свое согласие на:

8.5.1. сбор, запись, систематизацию, хранение, уточнение, извлечение, использование, удаление и уничтожение Организатором следующих своих персональных данных, предоставленных и предоставляемых Организатору, в частности: фамилии, имени, отчества; даты, года, места рождения; образования, квалификации и их уровня; профессии (специальности); места и адреса работы, должности; места регистрации и проживания; номера телефонов (мобильный, домашний, рабочий); адреса электронной почты; адресов страниц Автора в социальных сетях и прочих Интернет-сайтах; иных данных, предоставляемых Организатору, а также обусловленных участием Автора в Смотре;

8.5.2. передачу третьим лицам (распространение, в том числе посредством корпоративного сайта (портала) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, предоставление, доступ) Организатором следующих своих персональных данных, предоставленных и предоставляемых Организатору, в частности: фамилии, имени, отчества; даты, года, места рождения; образования, квалификации и их уровня; профессии (специальности); места и адреса работы, должности; города регистрации и проживания; адреса электронной почты; адресов страниц Автора в социальных сетях и прочих Интернет-сайтах.

8.6. Принимая участие в Смотре, Автор конкурсной работы выражает свое согласие, что обработка персональных данных Автора может осуществляться как с помощью средств вычислительной техники (автоматизированная обработка), так и без их применения.

8.7. Целями предоставления согласия Автора на обработку его персональных данных является обеспечение соблюдения Организатором прав Автора на имя, обеспечения равных условий для всех Участников и гласности проведения Смотра, распространения его результатов. Срок, в течение которого действует согласие Автора, равен сроку действия исключительного права на конкурсную работу. Отзыв согласия Автора на обработку его персональных данных осуществляется в порядке, предусмотренном Федеральным законом от 27.07.2006 № 152-ФЗ «О персональных данных».

8.8. Представленные на Смотр работы проверяются Оргкомитетом на соответствие формальным требованиям настоящего Положения. При этом рецензирования работ не происходит, члены жюри представляют лишь оценки, но не рецензии. В Сборнике указывается дата его публикации. В силу этого:

8.8.1. Сборник не может считаться рецензируемым научным изданием;

8.8.2. Публикация научных результатов в составе выпускной квалификационной работы в Сборнике не является препятствием для публикации их в составе статьи в рецензируемых научных изданиях;

8.8.3. Публикация работы в Сборнике может быть использована для установления научного приоритета;

8.8.4. Опубликованная в Сборнике работа не может быть полностью бесследно отозвана после публикации Сборника

Приложение
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от _____

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием _____ являются:

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: *перечислить сделанное (поиск в Интернете, выступления на семинарах, консультации с коллегами и т.п.)*

Подтверждаю, что являюсь автором представляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится/состоялась _____. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.

Подпись ФИО полностью

Дата
город, страна

Пример заполнения приложения

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Иванова Ивана Ивановича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Конструкции, связанные с продолжением интеграла Петтиса» являются: Определение 2.3, Лемма 3.1, доказательство Теоремы 3.4, Замечания 1.2, 1.3, 1.7.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

В период с 01 января по 15 февраля 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: продолжение интеграла Петтиса, Pettis integral continuation, в выдаче поисковиков было исследовано 23 статьи, 5 тезисов докладов, 6 монографий, 25 препринтов, 4 диссертации (список см. в приложении 1 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1-4], [5], [7] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Иваном Петровичем Сидоровым, доцентом кафедры математики факультета естественных наук Пензенского государственного университета.

Проведена переписка с профессором кафедры дифференциальных уравнений факультета математики Казанского государственного университета Сидором Петровичем Ивановым.

Проведено выступление на научном семинаре отдела математики и информатики Самарского государственного педагогического университета (руководитель семинара член-корреспондент РАН Петр Иванович Сидоров).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором представляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 30.05.2020. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись Иванов Иван Иванович 15 мая 2020

г. Пермь, Россия

Смотр выпускных квалификационных работ математиков России 2020

Уважаемые коллеги!

Приглашаем Вас и Ваших учеников принять участие в **Смотре выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей России.**

На Смотр можно представить как готовящуюся к защите в 2020 году выпускную квалификационную работу бакалавра, специалиста или магистра, так и защищённую в 2017, 2018, 2019, 2020 годах. **Участие в Смотре заочное и бесплатное**, участники присылают свои работы **по электронной почте** в Оргкомитет. Главное требование — работа должна содержать новый математический материал (то есть хотя бы одно из этого: новые определения, теоремы, доказательства, замечания, пригодные для проверки гипотезы и прочее) и должно быть указано, что именно автор работы сделал для того, чтобы убедиться, что этот материал действительно новый.

Подробности: ***https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr***

Этапы проведения Смотра:

- **1 мая по 31 мая** – сбор заявок и выпускных квалификационных работ;
- **1 июня по 10 июня** – вёрстка сборника выпускных квалификационных работ, формирование списка оценщиков;
- **10 июня** – публикация сборника работ на сайте Смотра и рассылка сборника для оценки участникам и оценщикам Смотра;
- **11 июня по 1 июля** – сбор оценок от членов Жюри;
- **8 июля** – публикация оценок;
- **15 июля** – подведение итогов Смотра, награждение авторов.

Кафедра фундаментальной математики