Смотр выпускных квалификационных работ

математиков России 2021

СБОРНИК ДИПЛОМНЫХ РАБОТ



Нижний Новгород

2021

Смотр выпускных квалификационных работ математиков России 2021. Сборник дипломных работ. Составитель В.Е. Круглов.

Кафедра фундаментальной математики НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, 10 июня 2021 г.

Объём 1700 с.

Тираж: 1 электронный экземпляр, опубликованный на сайте Смотра https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr2021и свободно распространяемый под лицензией, описанной в стандарте Creative Commons Attribution-NoDerivs

Оглавление

Вступительное слово 7

Обращение к оценщикам 8

ВКР бакалавров

1. Александров С. А. О компактных гиперболических многогранниках Кокстера (ВКР бакалавра, Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, 2021) 10

2. Алексеев И. С. New classes of minimal knot diagrams (ВКР бакалавра, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2020) 37

3. Бабошин С. Д. Численное моделирование процесса погружения сваи импульсным погружателем (ВКР бакалавра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2019) 72

4. Блудов М. В. Цветная теорема Тверберга для неизбежных комплексов (ВКР бакалавра, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2021) 89

5. Воробьёва Д. В. Разработка инструмента лингвистического анализа контента веб-ресурсов (ВКР бакалавра, Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина, Иваново, 2021) 104

6. Гаврилов О. А. Метод решения задачи теплопроводности со специальным нелокальным условием (ВКР бакалавра, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, 2021) 278

7. Гогулина Е. Ю. Омега-классификация поверхностных диффеоморфизмов, реализующих диаграммы Смейла (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) 322

8. Гридяева Т. В. Описание спектральных задач, вырожденных во всей комплексной плоскости (ВКР бакалавра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2020) 336

9. Гущенкова А. И. Разработка методики структуризации веб-контента на основе онтологического подхода (ВКР бакалавра, Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина, Иваново, 2021) 363

10. Кобзев А. Н. Эргодические свойства перекладываний отрезков и некоторых их обобщений (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, 2021) _____482

11. Коновалова А. Г. Математическре моделирование экономики КНР (ВКР бакалавра, Российский университет дружбы народов, Москва, 2021) ____507

12. Коровкина Е. В. Разработка автоматизированной системы поиска актуальных знаний (ВКР бакалавра, Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина, Иваново, 2020) _____554

13. Лукашов О. А. Степень отображения гладких орбифолдов (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) _____649

14. Миллер А. Ю. Графы преобразований узлов (ВКР бакалавра, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,2020) ___676

15. Минц Д. И. О взаимоотношении тривиальных и нетривиальных базисных множеств структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) _____722

16. Пальшин Г. П. Топологический анализ данных интегрируемых задач вихревой динамики (ВКР бакалавра, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, 2021) _____748

17. Переладова А. Е. Разработка параллельного численного итерационного метода решения уравнения Пуассона на вложенных сетках (ВКР бакалавра, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, 2021) _____ 923

18. Рябова Т. П. Исследование статистических методов обнаружения космических летательных аппаратов (ВКР бакалавра, Московский технический университет связи и информатики, Москва, 2021) _____945

19. Тарасова Т. В. Геометрические свойства многосолитонных решений (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) _____1003

20. Уткин А. А. Математическая модель импульсного погружателя, оптимального по коэффициенту асимметрии (ВКР бакалавра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2019) _____1032

21. Шафигуллина Д. А. Исследование линейных гамильтоновых систем (ВКР бакалавра, Башкирский государственный университет, Уфа, 2020) _____1049

22. Шлиенкова О. В. Создание программного комплекса численного решения краевых задач на графе (ВКР бакалавра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2020) _____1087

23. Юнусова Р. О. Полные проективные слоения с нулевой трансверсальной кривизной (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) _____1127

ВКР магистров

24. Аксёнова Д. Д. Автоморфизмы моноидов изотопических классов струнных зацеплений (ВКР магистра, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, 2021) _____1156

25. Белова Д. В. Смешанная задача для уравнения с инволютивным отклонением и периодическими краевыми условиями (ВКР магистра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2020) _____1179

26. Бибина А. В. Стационарная модель глобальной электрической цепи (ВКР магистра, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2018) _____1202

27. Веденин А. В. Fast converging Chernoff approximations (ВКР магистра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) _____1231

28. Григорьева (Бирюкова) Е. И. Достаточные условия сходимости ряда Фурье по собственным функциям оператора с инволюцией на графе (ВКР магистра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2020) _____1274

29. Кравченко А. А. Исследование сложности аппроксимации случайных полей большой параметрической размерности (ВКР магистра, Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2020) _____1300

30. Морозов А. И. Realization of Morse-Smale surface diffeomorphisms with oriented heteroclinics (ВКР магистра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) _____1371

31. Пантелеева П. Ю. Многопрыжковые траектории сингулярно возмущённых систем с бифуркацией типа "вилка" (ВКР магистра, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2021) _____1416

32. Прудников П. С. Speed of convergence of Chernoff approximations (ВКР магистра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) _____1451

33. Пучкова Н. Д. О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4 (ВКР магистра, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2020) _____1481

34. Савонина Н. А. Создание программного комплекса исправления искаженных данных (ВКР магистра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2020) _____1506

35. Трифонов К. Н. Динамика обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного гетероклинического контура (ВКР магистра, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2019) _____1556

36. Флоридо Кальво Ф. А. Quasi-Feynman Formulas for the Schrödinger Equation on a Manifold (ВКР магистра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2021) _____1589

37. Цюцюрупа И. К. The John–Löwner Ellipsoid and related geometric problems (ВКР магистра, Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, 2021) _____1622

Положение о Смотре _____1690

Постер Смотра _____1700

Вступительное слово

Уважаемые коллеги! От лица всего Оргкомитета благодарю вас за участие в Смотре. С вашей помощью и поддержкой мы с 2019 года создаём новый важный элемент в системе математического образования в России.

Мы хотим сделать нормой ситуацию, в которой каждый сильный студент-математик будет делать диплом с мыслью о том, чтобы представить его на Смотр и заявить о себе в математическом сообществе. Мы надеемся, что уйдёт в прошлое ситуация, в которой единственными читателями хорошей дипломной работы являются научный руководитель и рецензент. И, конечно, мы надеемся, что Смотр станет удобной площадкой для общения студентов, выпускников, преподавателей, научных работников и работодателей.

На Смотр в 2021 году подано 37 работ, приём работ завершён и настала фаза собственно смотра - все желающие приглашаются смотреть работы и оценивать их. О том, как это делать, и кто может быть оценщиком, сказано в обращении к оценщикам - оно следует далее. Здесь напомню лишь, что Оргкомитет ожидает, что перед выставлением оценки оценщик уделит изучению работы хотя бы 30 минут своего времени. Мы понимаем, что глубоко изучить работу за это время невозможно, поэтому просим авторов работ отнестись к оценкам снисходительно. Всё же это именно смотр, а не конкурс, в котором каждая работа изучается подробно.

Также стоит отметить, что сборник дипломных работ не является рецензируемым изданием, поэтому публикация научного результата в составе сборника не является препятствием для публикации этого результата в составе научной статьи. Тем не менее, сборник датируется, поэтому он может быть использован для определения научного приоритета.

В заключение хочу ещё раз поблагодарить всех участников, представивших работы на Смотр, и всех оценщиков, готовых уделить время просмотру и оценке работ.

С уважением,

Иван Ремизов

Председатель оргкомитета Смотра
выпускных квалификационных работ математиков России 2021

К.ф.-м.н., доцент кафедры фундаментальной математики
НИУ ВШЭ - Нижний Новгород

Обращение к оценщикам Смотра дипломных работ математиков России 2021

Уважаемые коллеги!

Приглашаю вас принять участие в Смотре дипломных работ математиков России 2021. На Смотр представлены дипломные работы (выпускные квалификационные работы) бакалавров, специалистов, магистров со всех уголков нашей необъятной страны. Приём работ на Смотр окончен, и с 10 июня 2021 по 1 июля 2021 проходит фаза их оценки. Оценщик – это тот, кто ставит оценки за работы. Для удобства оценщиков работы свёрстаны в сборник, который с 10 июня 2021 доступен на сайте Смотра https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr2021

Существует три группы оценщиков:

1. Авторы работ, представившие свои работы на Смотр (выпускники)
2. Сотрудники научно-исследовательских и образовательных организаций (учёные и преподаватели)
3. Сотрудники любых организаций, иногда нанимающих на работу математиков (работодатели)

Каждому оценщику выдаются номера 5 работ случайным образом, и ещё от 2 до 5 работ он должен выбрать себе для оценки самостоятельно из общего списка, отправляясь от сферы своих интересов.

При оценке работ участников оценщик Смотра руководствуется следующими критериями:

1. Понятность постановки задачи. После прочтения работы должно быть ясно, какая задача решалась автором.
2. Доступность введения для неспециалистов. Базовые термины и факты исследуемой области должны быть изложены в форме, доступной для понимания широкой математической аудиторией.
3. Качество изложения основного научного результата, полученного автором.
4. Качество обоснования основного научного результата, полученного автором.
5. Качество оформления работы - стилистическое единство, качество вёрстки текста, наличие необходимых частей в работе.
6. Наличие и уровень публикаций автора по теме работы.

Оценивание проводится по бинарной шкале (0 или 1 балл), где «0» – «работа имеет существенные недостатки и в представленном на Смотр виде не может считаться достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно», а «1» – «работа является достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно». Иными словами, нравится «1», или не нравится «0».

Оценки по каждой из групп оценщиков суммируются, в результате каждая работа получает трёхмерный вектор оценки: три числа, по одному от каждой из групп оценщиков.

Обращаю ваше внимание на то, что писать рецензии или как-то обосновывать своё мнение не требуется. Это Смотр, а не конкурс, подробного разбора работ не предполагается. Тем не менее, количество положительных оценок косвенно свидетельствует о том, что работа написана на интересную тему и выполнена хорошо. Оргкомитет ожидает, что каждый оценщик посвятит изучению каждой работы как минимум 30 минут. **Таким образом, минимально достаточное для участия в оценке время составляет три с половиной часа – 7 работ, по 30 минут на каждую.**

Чтобы стать оценщиком, нужно написать письмо на почту hsennconfmath@gmail.com и указать в нём:

- Имя, Отчество, Фамилию
- Учёную степень (если имеется) или уровень образования (бакалавр, специалист, магистр), с указанием специальности
- Должность и место работы
- Согласие на публикацию представленных выше данных – они будут указаны в общем списке оценщиков и мы просим подтвердить, что Вы не против.
- Согласие или отсутствие согласия на публикацию Вашего адреса электронной почты.
- Согласие или отсутствие согласия на публикацию выставленных оценок «1» в неанонимном виде. Оценки «0» опубликованы не будут в любом случае.

Оргкомитет отметит грамотами участников Смотра, набравших максимальное количество баллов по каждой из трёх групп оценщиков, а также участников, набравших максимальное общее число баллов.

Ваша организация тоже может принять участие в награждении: предоставить всем участниками или победителям сувенирную продукцию с логотипом организации, грамоты, книги, денежные и любые другие призы, а также принять участие в торжественном закрытии Смотра в июле 2021 в Нижнем Новгороде. Вы также можете отметить авторов отдельных работ по любому удобному вам критерию.

От одной организации Оргкомитет будет рад принять до 5 оценщиков включительно. Для образовательных учреждений организацией считается факультет, а не весь университет.

Просим завершить оценку работ к 1 июля 2021 и выслать оценки на почту hsennconfmath@gmail.com Вы поможете организаторам, если завершите оценку раньше этого крайнего срока.

Вся информация о ходе Смотра доступна на сайте https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr2021

С уважением,
Иван Ремизов

Доцент кафедры фундаментальной математики ВШЭ
Председатель оргкомитета Смотра
https://www.hse.ru/org/persons/215573332

1 июня 2021
Нижний Новгород

P.S.: Для обсуждения любых вопросов в связи с изложенным выше можно связаться со мной напрямую по следующим контактным данным:
ivremizov@yandex.ru 89263595145 vk.com/ivan_remizov

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Александрова Степана Андреевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «О компактных гиперболических многогранниках Кокстера» являются разделы 3, 4, 5, 6.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- Кратко просмотрены работы, указанные на странице https://www.maths.dur.ac.uk/users/anna.felikson/Polytopes/polytopes.html, а те, которые имеют схожую тематику, прочитаны более внимательно.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем, Богачевым Николаем Владимировичем, научным сотрудником Центра перспективных исследований Сколковского института науки и технологий, доцентом Московского физико-технического института.
- Проведено выступление на научном семинаре Лаборатории комбинаторной геометрии Московского физико-технического института.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоится 17.06.2021. На Смотр представлен проект текста работы.

Александров Степан Андреевич
3 июня 2021 г. Долгопрудный, Россия

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

Выпускная квалификационная работа бакалавра по направлению 01.03.02
«Прикладная математика и компьютерные науки»

О компактных гиперболических многогранниках Коксетера

Студент 799 группы
Александров Степан Андреевич

Научный руководитель
Богачев Николай Владимирович

Долгопрудный
2021

1 Введение

1.1 Основные понятия

Рассмотрим $\mathbb{X}^n$ — либо евклидово n-мерное пространство $\mathbb{E}^n$, либо сферическое n-мерное пространство, либо гиперболическое n-мерное пространство $\mathbb{H}^n$. Группа $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется *дискретной*, если орбита любой точки из $\mathbb{X}^n$ дискретна, а стабилизатор — конечен. Если дискретная группа Γ порождена отражениями, то она порождается отражениями в гранях некоторого многогранника, каждый двугранный угол которого имеет вид $\frac{\pi}{k}$. Такие многогранники называются *многогранниками Кокстера*.

Для $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ все такие многогранники были описаны Г. Кокстером в 1933 году в [Cox34]. Э. Б. Винберг в 1984 году в [Вин84] доказал, что в отличии от $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{S}^n$, в которых, например, всегда существует прямоугольные куб и симплекс соответственно, в $\mathbb{H}^n$ компактные многогранники Кокстера не существуют при $n > 29$.

1.2 Основные результаты

Главным утверждением раздела 4 и всей работы является Теорема 4.9, которая даёт описание всех компактных гиперболических многогранников Кокстера, которые комбинаторно устроены как произведение симплексов. Главным утверждением раздела 6 является Теорема 6.5, которая улучшает оценку Винберга на размерность для многогранников, имеющих специальный вид.

2 Предварительные сведения

2.1 Пространства постоянной кривизны

Евклидовым n-мерным пространством $\mathbb{E}^n$ называется $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Плоскостью называется множество, имеющие вид $\{x \in \mathbb{E}^n \mid (x, e) = c\}$ для некоторых $e \in \mathbb{E}^n$ и $c \in \mathbb{R}$, а полупространством — множество, имеющее вид $\{x \in \mathbb{E}^n \mid (x, e) \leq c\}$ для некоторых $e \in \mathbb{E}^n$ и $c \in \mathbb{R}$.

Сферическим n-мерным пространством $\mathbb{S}^n$ называется множество $\{x \in \mathbb{E}^{n+1} \mid (x, x) = 1\}$ со скалярным произведением из $\mathbb{E}^{n+1}$. Множество $\{x \in \mathbb{S}^n \mid (x, e) = 0\}$ называется плоскостью, заданной вектором $e \in \mathbb{S}^n$, а $\{x \in \mathbb{S}^n \mid (x, e) \leq 0\}$ — полупространством, заданным вектором $e \in \mathbb{S}^n$.

Рассмотрим $\mathbb{R}^{n,1}$ — $(n+1)$-мерное вещественное векторное пространство со скалярным произведением $(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. *Векторной моделью n-мерного гиперболического пространства* $\mathbb{H}^n$ называется множество $\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x, x) = -1, x_0 > 0\}$ с метрикой ρ, заданной уравнением $\cosh \rho(x, y) = -(x, y)$. Множество $H_e = \{x \in \mathbb{H}^n \mid (x, e) = 0\}$ называется плоскостью, заданной вектором $e \in \mathbb{H}^n$, а $H_e^- = \{x \in \mathbb{H}^n \mid (x, e) \leq 0\}$ — полупространством, заданным вектором $e \in \mathbb{H}^n$.

2.2 Многогранники Кокстера

Выпуклым многогранником называется пересечение конечного числа полупространств, имеющее непустую внутренность. Многогранником Кокстера называется выпуклый многогранник, все двугранные углы которого являются целыми частями π.

Определение 2.1. *Схемой Кокстера* называется граф, любые две вершины которого соединены либо ребром с меткой из $\mathbb{N}_{\geq 2} = \{2, 3, \dots\}$, либо пунктирным ребром с меткой из $\mathbb{R}_{>1} = (1, +\infty)$, либо жирным ребром. Вместо ребра с меткой k часто рисуют ребро кратности $k - 2$.

Определение 2.2. Рассмотрим схему Кокстера S с вершинами $v_1, \dots, v_n$. *Матрицей Грама* $G(S)$ схемы S называется матрица (g_{ij}), где

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ -\cos\frac{\pi}{k}, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром с меткой } k; \\ -d, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены пунктирным ребром с меткой } d; \\ -1, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены жирным ребром.} \end{cases}$$

Если $G(S)$ обладает некоторым свойством, то будем говорить, что и схема S обладает этим свойством. Например, $\det S = \det G(S)$.

Определение 2.3. Обозначим через $F_1, \dots, F_n$ максимальные грани многогранника Кокстера P. *Схемой Кокстера* $S(P)$ многогранника P называется схема Кокстера с вершинами $v_1, \dots, v_n$. Если F_i и F_j:

1. образуют двугранный угол $\frac{\pi}{k}$, то v_i и v_j соединены ребром с меткой k;
2. расходятся, и расстояние между ними равно ρ, то v_i и v_j соединены пунктирным ребром с меткой $\cosh\rho$;
3. параллельны, то v_i и v_j соединены жирным ребром.

Предложение 2.4. *Если грани многогранника Кокстера P заданы единичными векторами $e_1, \dots, e_n$, то $G(S(P)) = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (e_i, e_j)$.*

2.3 Многогранники Кокстера в сферическом и евклидовом пространствах

Определение 2.5. Схема Кокстера называется *эллиптической*, если она является схемой некоторого многогранника Кокстера в сферическом пространстве. Схема Кокстера называется *параболической*, если она является схемой некоторого многогранника Кокстера в евклидовом пространстве.

Определение 2.6. *Произведением схем* Кокстера S_1 и S_2 называется схема Кокстера, являющаяся объединением S_1 и S_2, в котором любые две вершины $v_1 \in S_1$ и $v_2 \in S_2$ соединены ребром с меткой 2. Схема Кокстера называется связной, если она не является нетривиальным произведением схем Кокстера.

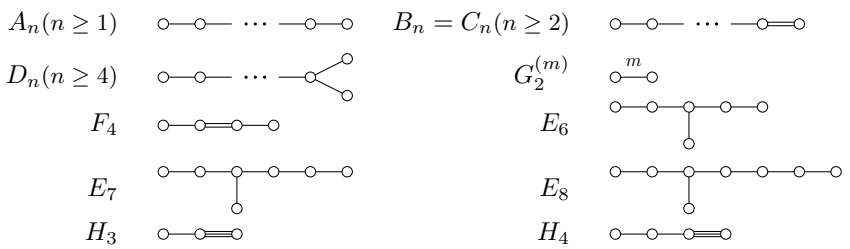


Таблица 1: Связные эллиптические схемы Кокстера

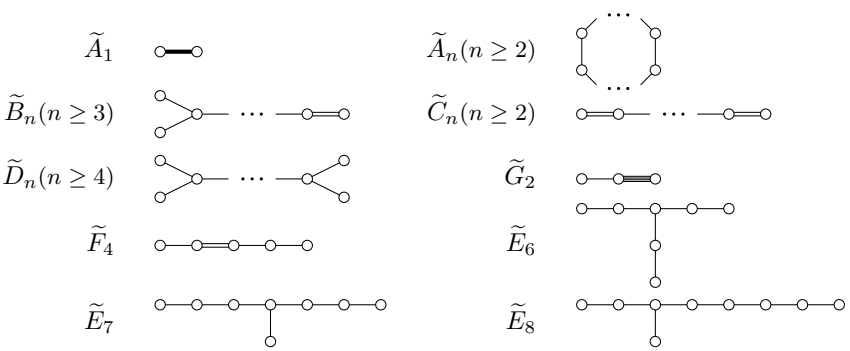


Таблица 2: Связные параболические схемы Кокстера

Теорема 2.7 ([Cox34]). *Любая эллиптическая схема Кокстера является произведением некоторого числа связных эллиптических схем Кокстера. Все связные эллиптические схемы Кокстера перечисленны в таблице 1. Любая параболическая схема Кокстера является произведением некоторого числа связных параболических схем Кокстера. Все связные параболические схемы Кокстера перечисленны в таблице 2.*

2.4 Компактные многогранники Кокстера в пространстве Лобачевского

Определение 2.8. Схему Кокстера S будем называть *гиперболической*, если сигнатура его матрицы Грама $G(S)$ равна $(d, 1)$ для некоторого d.

Теорема 2.9 ([Вин85, Теорема 2.1]). *Если G — неразложимая симметричная матрица сигнатуры $(d, 1)$ с единицами на диагонали и неположительными элементами вне диагонали, то она является матрицей Грама некоторого выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{H}^d$, который определён с точностью до движения. Если $P \subset \mathbb{H}^d$ — компактный гиперболический многогранник Кокстера, то его матрица Грама $G(P)$ имеет сигнатуру $(d, 1)$.*

Теорема 2.10 ([Вин85, Теорема 3.1]). *Если P — многогранник Кокстера, $F_1, \ldots, F_n$ — его максимальные грани, а $v_1, \ldots, v_n$ — соответствующие*

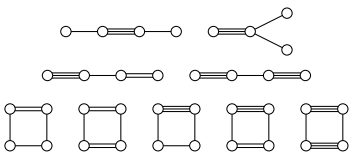
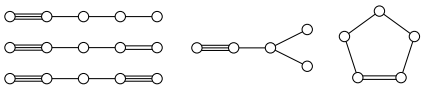
Размерность	Схемы
1	
2	 $(2 \le k, l, m < \infty,$ $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1)$
3	
4	

Таблица 3: Ланнеровские схемы

им вершины схемы $S(P)$, то пересечение $\bigcap_{i\in I} F_i$ является гранью тогда и только тогда, когда подсхема схемы $S(P)$, образованная вершинами $\{v_i \mid i \in I\}$, является эллиптической, причём коразмерность этой грани равна $|I|$.

Предложение 2.11 ([Вин85, Предложение 3.2])**.** *Если $P \subset \mathbb{H}^d$ — компактный гиперболический многогранник Кокстера, то $S(P)$ не содержит параболических подсхем.*

Определение 2.12. Если P — выпуклый многогранник, то через $\mathcal{F}(P)$ будем обозначать решётку граней многогранника P. Если S — схема Кокстера, то через $\mathcal{F}(S)$ будем обозначать решётку эллиптических подсхем схемы S.

Предложение 2.13 ([Вин85, Предложение 4.2])**.** *Схема Кокстера S является схемой некоторого компактного гиперболического многогранника Кокстера $P \subset \mathbb{H}^d$ тогда и только тогда, когда сигнатура матрицы Грама $G(S)$ равна $(d, 1)$ и существует такой выпуклый многогранник $Q \subset \mathbb{E}^d$, что $\mathcal{F}(Q) \cong \mathcal{F}(S)$.*

Важную роль играют схемы Кокстера, соответствующие компактным гиперболическим симплексам Кокстера, называемые ланнеровскими. Так как любое собственное подмножество максимальных граней симплекса имеет непустое пересечение, схемы таких симплексов характеризуются тем, что они являются гиперболическими, но любая собственная подсхема является эллиптической. Таким образом, эти схемы являются минимальными гиперболическими схемами в том смысле, что любая гиперболическая схема, не содержащая параболическую подсхему, содержит в себе ланнеровскую подсхему.

Теорема 2.14 ([Lan50])**.** *Все схемы, соответствующие компактным гиперболическим симплексам Кокстера, перечисленны в таблице 3.*

Теорема 2.15 ([Вин84, Теорема 1]). *В пространствах Лобачевского размерности $d \geq 30$ не существует компактных многогранников Кокстера.*

Таким образом, одним из главных вопросов о компактных гиперболических многогранниках Кокстера является нахождение размерностей пространств Лобачевского, в которых такие многогранники существуют. Единственный известный многогранник в $\mathbb{H}^8$ описан в [Bug]. Вопрос о существовании компактных гиперболических многогранников Кокстера большей размерности остаётся открытым.

2.5 Локальные определители

Определение 2.16. *Локальным определителем* схемы S на подсхеме T называется отношение

$$\det(S, T) = \frac{\det(S)}{\det(S \setminus T)}.$$

Предложение 2.17 ([Вин84, Предложение 12]). *Если схема S порождается такими подсхемами $S_1, \ldots, S_k$, что пересечение любых двух содержит единственную вершину v, то*

$$\det(S, v) - 1 = \sum_i (\det(S_i, v) - 1).$$

Предложение 2.18 ([Вин84, Предложение 13]). *Если схема S порождается непересекающимися подсхемами S_1 и S_2, соединёнными единственным ребром v_1v_2, то*

$$\det(S, \langle v_1, v_2 \rangle) = \det(S_1, v_1) \det(S_2, v_2) - a^2,$$

где a — вес ребра v_1v_2.

Далее при записи определителя схемы, некоторые вершины которой отмечены $\vee$, нужно считать, что имеется в виду локальный определитель на подсхеме, порождённой этими вершинами.

Предложение 2.19 ([Вин84, Таблица 2]).

$$\det\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} & k & \vee \\ m & & \\ & l & \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right) = -d(k, l, m),$$

где

$$d(k, l, m) = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{l}\right)^2 + 2\cos\frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi}{m}}{\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^2} - 1.$$

Легко проверить, что функция d возрастает по k, l и m, а изначальная схема является Ланнеровской тогда и только тогда, когда

$$d(k, l, m) > 0.$$

Предложение 2.20 ([Вин84, Предложение 15]). *Если S — схема Кокстера, порождённая двумя непересекающимися гиперболическими подсхемами S_1, S_2, соединёнными единственным ребром v_1v_2, причём подсхемы $S_1 \setminus v_1$, $S_2 \setminus v_2$ — эллиптические. Тогда если ребро v_1v_2 — простое, и*

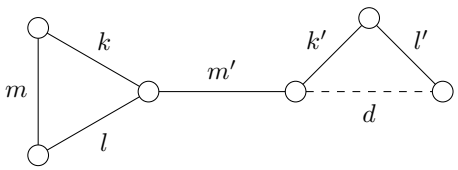
$$\det(S_1, v_1)\det(S_2, v_2) > \frac{1}{4},$$

то схема S является сверхгиперболической.

3 Сверхгиперболические схемы

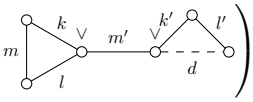
Определение 3.1. Схему S, содержащую хотя бы одно пунктирное ребро, будем называть *сверхгиперболической*, если при любых допустимых метках на пунктирных рёбрах схема S имеет отрицательный индекс инерции не меньший 2.

Заметим, что схема



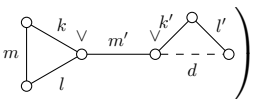
может иметь только следующие сигнатуры: $(4,1,1)$, $(5,1,0)$ или $(4,2,0)$. А значит, является гиперболической тогда и только тогда, когда

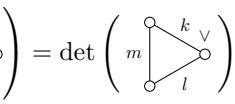
$$\det\left(\quad\right) \leq 0.$$

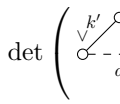


Имеем,

$$\det\left(\quad\right) = \det\left(\quad\right)\det\left(\quad\right) - \left(\cos\frac{\pi}{m'}\right)^2$$







$$= d(k,l,m)\frac{\left(\cos\frac{\pi}{l'}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{k'}\right)^2 + d^2 + 2d\cos\frac{\pi}{k'}\cos\frac{\pi}{l'} - 1}{1 - \left(\cos\frac{\pi}{l'}\right)^2} - \left(\cos\frac{\pi}{m'}\right)^2 \leq 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$d^2 + 2d\cos\frac{\pi}{k'}\cos\frac{\pi}{l'} + \left(\cos\frac{\pi}{l'}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{k'}\right)^2 - 1 - \frac{\left(1 - \left(\cos\frac{\pi}{l'}\right)^2\right)\left(\cos\frac{\pi}{m'}\right)^2}{d(k,l,m)} \leq 0.$$

Заметим, что один из корней левой части не превосходит 1, а значит, подставив $d = 1$, получаем, что неравенство имеет решения, большие единицы, тогда и только тогда, когда

$$D(k,l,m,k',l',m') = \left(\cos\frac{\pi}{l'} + \cos\frac{\pi}{k'}\right)^2 - \frac{\left(\sin\frac{\pi}{l'}\right)^2\left(\cos\frac{\pi}{m'}\right)^2}{d(k,l,m)} < 0.$$

Легко проверить, что если $d(k,l,m) > 0$, то функция D возрастает по k, l, m, k', l' и убывает по m'. Изначальная схема является сверхгиперболической тогда и только тогда, когда

$$D(k,l,m,k',l',m') \geq 0.$$

4 Произведения симплексов

Определение 4.1. Если $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ — множества схем Кокстера, то через $\mathcal{S}_1 \times_k \mathcal{S}_2$ будем обозначать множество схем Кокстера, которые порождены двумя подсхемами $S_1 \in \mathcal{S}_1$ и $S_2 \in \mathcal{S}_2$, которые пересекаются по k вершинам, и любая гиперболическая или параболическая подсхема которой лежит либо в S_1, либо в S_2. Если S_1 и S_2 — схемы Кокстера, то будем обозначать $S_1 \times_k \mathcal{S}_2 = \{S_1\} \times_k \mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_1 \times_k S_2 = \mathcal{S}_1 \times_k \{S_2\}$ и $S_1 \times_k S_2 = \{S_1\} \times \{S_2\}$.

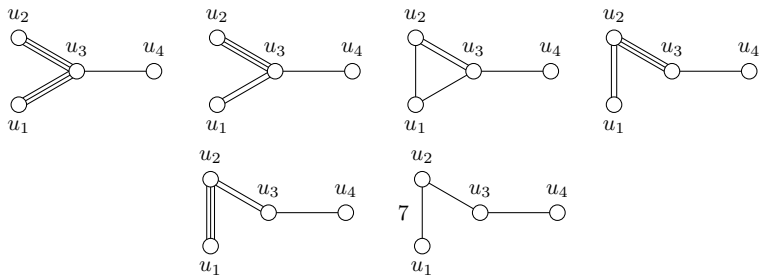
Через $\mathcal{L}_k$ будем обозначать множество ланнеровских схем порядка k, а через Δ_k — k-мерный симплекс. Если компактный гиперболический многогранник Кокстера комбинаторно эквивалентен $\Delta_{k_1-1} \times \cdots \times \Delta_{k_n-1}$, то его схема Кокстера принадлежит $\mathcal{L}_{k_1} \times_0 \cdots \times_0 \mathcal{L}_{k_n}$. Без ограничения общности считаем, что $k_1 \geq \cdots \geq k_n$. Также можно считать, что $k_1 \geq 3$, $k_n = 2$, а $n \geq 4$.

4.1 Случай $k_1 \geq 4$

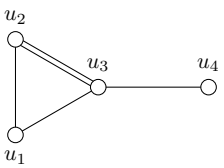
Непосредственная проверка показывает, что ни к какой ланнеровской схеме порядка 4 или 5 нельзя присоединить три вершины одним ребром кратности один так, чтобы не образовались новые Ланнеровские или параболические подсхемы. А значит, $k_1 \leq 3$.

4.2 Случай $k_1 = k_2 = 3$

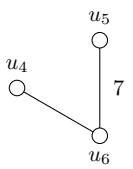
Рассмотрим $L_1 = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ и $L_2 = \langle u_4, u_5, u_6\rangle$ — Ланнеровские подсхемы порядка три. В [Tum07] доказано, что можно считать, что подсхема $\langle L_1, u_4\rangle$ должна быть одной из шести перечисленных ниже.



Так как к L_1 должно присоединяться ещё две вершины, подсхема $\langle L_1, u_4\rangle$ должна иметь только следующий вид.



В этом случае $|\det(L_1, u_3)| = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Тогда $|\det(L_2, u_4)| \leq \frac{3}{4\sqrt{2}}$. Очевидно, кратности рёбер u_4u_5 и u_4u_6 не превосходят одного. Такая схема единственна и имеет следующий вид.



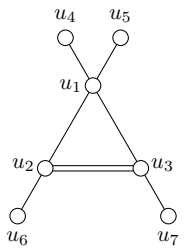
Она не подходит, так как к L_2 должно присоединяться две вершины.

4.3 Случай $k_2 = 2$

К Ланнеровской схеме порядка три нельзя присоединить пять вершин, а значит, что $n \leq 5$. Через $[u, v]$ будем обозначать кратность ребра uv.

Лемма 4.2. $n \leq 4$.

Доказательство. Пусть $n = 5$. Обозначим $L_1 = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $L_2 = \langle u_4, u_8\rangle$, $L_3 = \langle u_5, u_9\rangle$, $L_4 = \langle u_6, u_{10}\rangle$, $L_5 = \langle u_7, u_{11}\rangle$ — Ланнеровские подсхемы. Без ограничения общности можно считать, что u_4, u_5, u_6 и u_7 присоединены к L_1. Тогда подсхема $\langle L_1, u_4, u_5, u_6, u_7\rangle$ должна иметь следующий вид.



Легко проверить, что

$$[u_6, u_4] = [u_6, u_5] = [u_6, u_8] = [u_6, u_9] =$$
$$[u_7, u_4] = [u_7, u_5] = [u_7, u_8] = [u_7, u_9] = 0.$$

Значит вершины u_{10} и u_{11} должны присоединяться к подсхемам $\langle u_4, u_8\rangle$ и $\langle u_5, u_9\rangle$. Рассмотрим два случая:

1. $[u_{10}, u_{11}] \geq 1$. Тогда можно считать, что

   $$[u_{10}, u_8] = [u_{10}, u_5] = [u_{11}, u_4] = [u_{11}, u_9] \geq 1$$

   и

   $$[u_{11}, u_8] = [u_{11}, u_5] = [u_{10}, u_4] = [u_{10}, u_9] = 0.$$

   Но тогда

   $$[u_4, u_5] = [u_4, u_9] = [u_8, u_5] = [u_8, u_9] = 0,$$

   а значит, подсхема $\langle L_2, L_3\rangle$ несвязна.

2. $[u_{10}, u_{11}] = 0$. Тогда можно считать, что $[u_6, u_{11}] = 1$. В этом случае подсхему L_5 можно связать с подсхемами L_2 и L_3 только положив

   $$[u_{11}, u_8] = [u_{11}, u_9] \geq 1.$$

   Но тогда

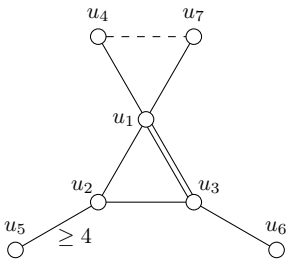
   $$[u_4, u_5] = [u_4, u_9] = [u_8, u_5] = [u_8, u_9] = 0.$$

□

Таким образом, остался только случай произведения треугольника на трёхмерный куб. Обозначим $L_1 = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $L_2 = \langle u_4, u_7\rangle$, $L_3 = \langle u_5, u_8\rangle$, $L_4 = \langle u_6, u_9\rangle$ — Ланнеровские подсхемы. Будем также считать, что подсхемы $\langle L_1, u_4\rangle$, $\langle L_1, u_5\rangle$ и $\langle L_1, u_6\rangle$ связны. Легко проверить, что в L_1 присутствуют все рёбра, а значит, что из каждой вершины, содержащейся в L_2, L_3 и L_4, выходит не более одного ребра, ведущего в L_1. Обозначим через $[u, L_1]$ кратность такого ребра для u. Если, например, $[u_7, L_1] \geq 1$ и $[u_8, L_1] \geq 1$, то L_2 и L_3 нельзя связать. Поэтому можно считать, что $[u_8, L_1] = [u_9, L_1] = 0$. Можно дополнительно считать, что $[u_4, L_1] \geq [u_7, L_1]$ и $[u_5, L_1] \geq [u_6, L_1] = 1$.

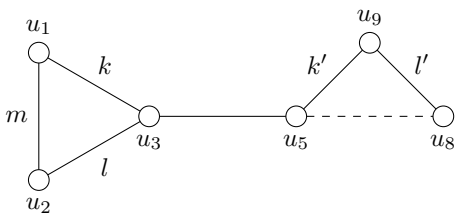
Лемма 4.3. *Если* $[u_5, L_1] \geq 2$, *то* $[u_7, L_1] = 0$.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда подсхема $\langle L_1, L_2, u_5, u_6 \rangle$ должна иметь следующий вид.

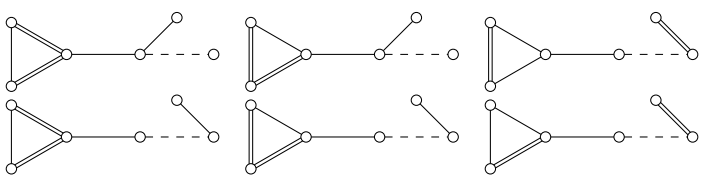


Тогда $[u_5, u_4] = [u_5, u_7] = [u_8, u_4] = [u_8, u_7] = 0$. □

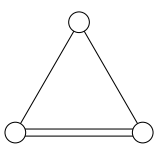
Значит, можно считать, что $[u_5, L_1] = 1$. Вершина u_8 присоединяется к L_4 или вершина u_9 присоединяется к L_3. Без ограничения общности считаем, что u_9 присоединяется к L_3. Тогда подсхема $\langle L_1, L_3, u_9 \rangle$ имеет следующий вид.



Причём $k' \geq 3$ или $l' \geq 3$. Ниже перечисленны некоторые сверхгиперболические схемы, которые имеют такой вид.

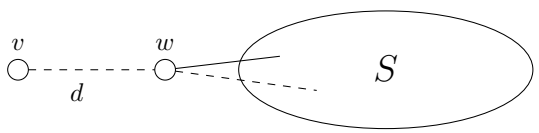


Соберём всё вместе. Используя монотонность из раздела 2, можно понять, что подсхема L_1 должна иметь следующий вид.



Есть конечное число способов присоединить подсхемы L_2, L_3 и L_4 к подсхеме L_1. Рассмотрим ребро, которое лежит в подсхеме $\langle L_2, L_3, L_4\rangle$. Если оно соединяет вершины, которые не присоединены к L_1, то оно может быть только простым, так как иначе найдётся сверхгиперболическая подсхема. В противном случае кратность этого ребра тоже ограничена. А значит, число схем, удовлетворяющих условиям, конечно.

Лемма 4.4. *Если схема S содержит гиперболическую подсхему, вершина v соединена только с вершиной w, причём ребро является пунктирным, и $\det(\langle w, S\rangle) - \det(S) \geq 0$, то схема $\langle v, w, S\rangle$ является сверхгиперболической.*



Доказательство. Если d — метка на пунктирном ребре между v и w, то

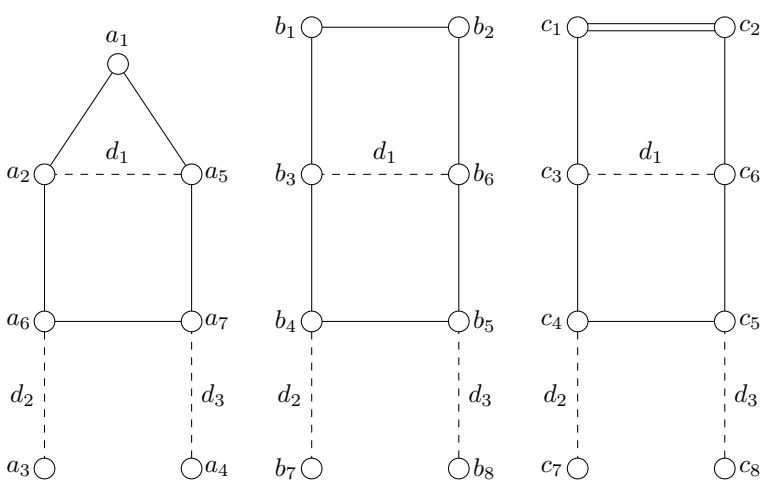
$$\det(\langle v, w, S\rangle) = \det(\langle w, S\rangle) - d^2 \det(S).$$

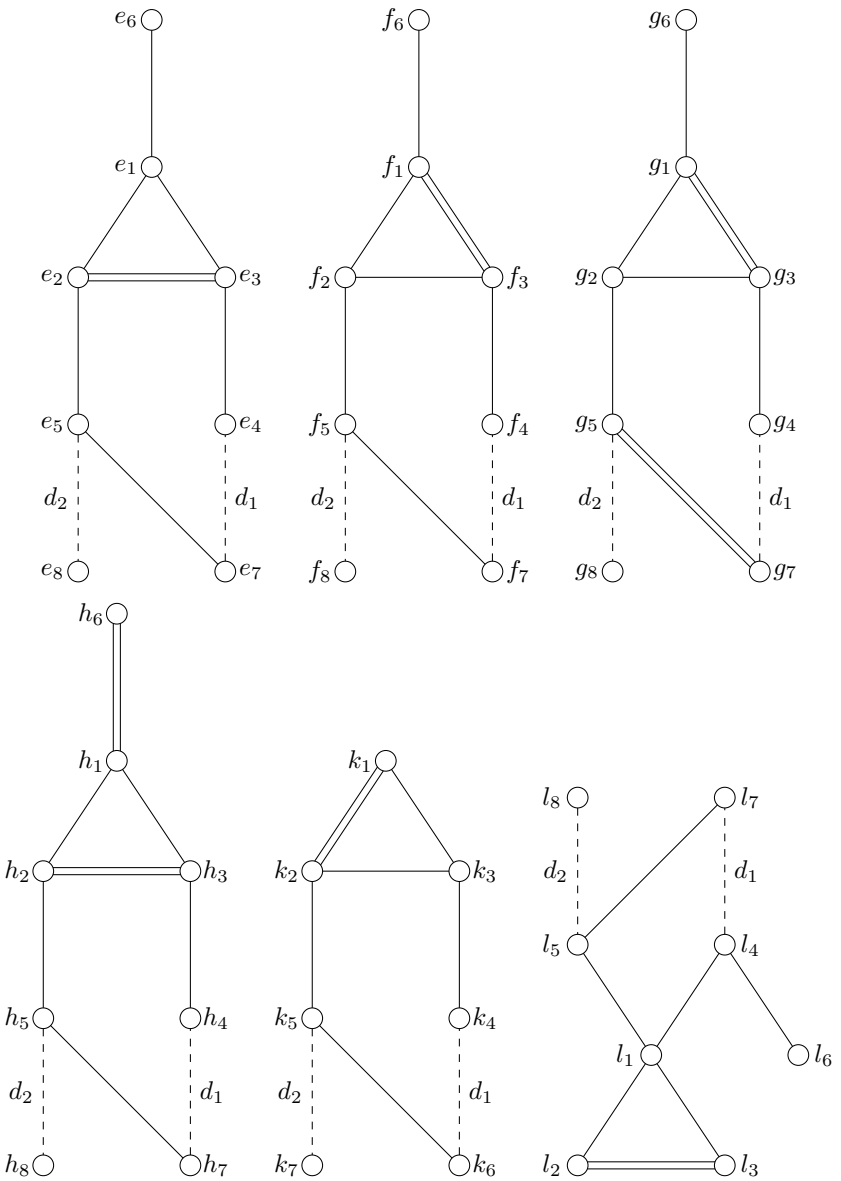
Если $\det(S) \neq 0$, то

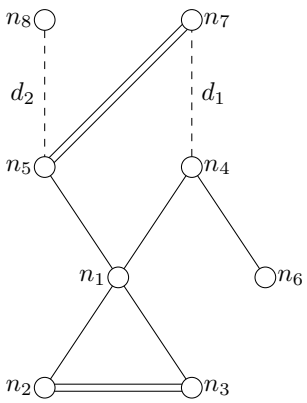
$$d \leq \sqrt{\frac{\det(\langle w, S\rangle)}{\det(S)}} = \sqrt{1 + \frac{\det(\langle w, S\rangle) - \det(S)}{\det(S)}} \leq 1,$$

что означает, что $\det(S) = 0$. Но тогда $\det(\langle w, S\rangle) \geq 0$. □

Следствие 4.5. *Следующие схемы являются сверхгиперболическими.*




e_6
e_1
e_2
e_3
e_5
e_4
d_2
d_1
e_8
e_7
f_6
f_1
f_2
f_3
f_5
f_4
d_2
d_1
f_8
f_7
g_6
g_1
g_2
g_3
g_5
g_4
d_2
d_1
g_8
g_7
h_6
h_1
h_2
h_3
h_5
h_4
d_2
d_1
h_8
h_7
k_1
k_2
k_3
k_5
k_4
d_2
d_1
k_7
k_6
l_8
l_7
d_2
d_1
l_5
l_4
l_1
l_6
l_2
l_3



Доказательство.

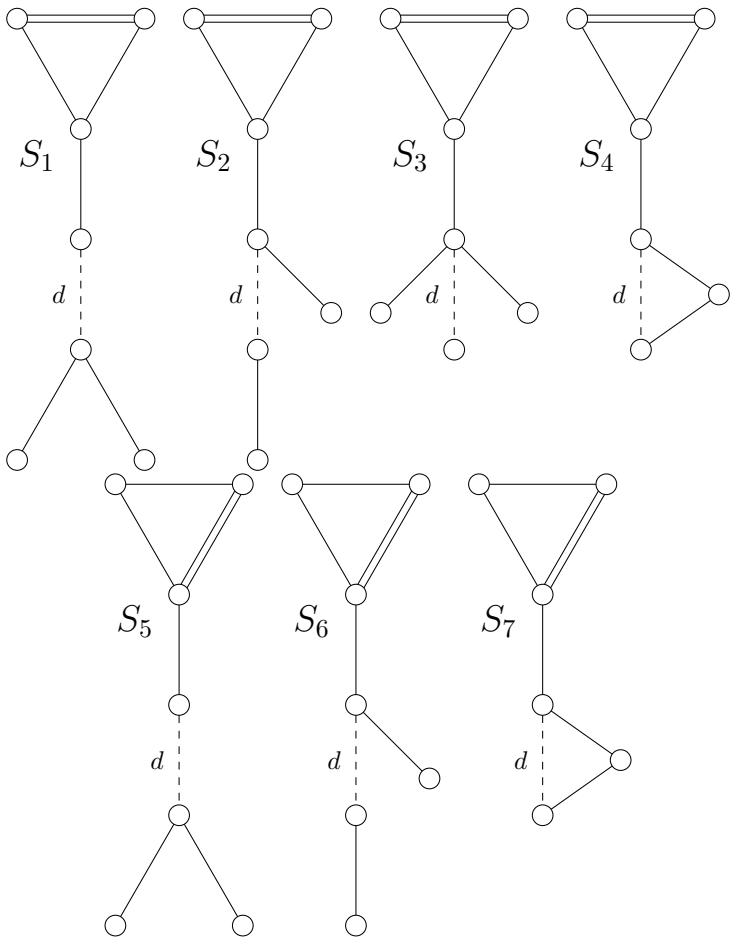
$$\det(\langle a_7, A\rangle) - \det(A) = \frac{1}{16}\big(3d_2^2 + 4d_1^2 - 2d_1 - 5\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle b_5, B\rangle) - \det(B) = \frac{1}{16}\big(2d_2^2 + 3d_1^2 - 2d_1 - 3\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle c_5, C\rangle) - \det(C) = \frac{1}{64}\big(4d_2^2 + 8d_1^2 - 4(2-\sqrt{2})d_1 - 2\sqrt{2} - 3\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle e_5, E\rangle) - \det(E) = \frac{1}{64}\big(8d_1^2 - 2(2+3\sqrt{2})d_1 + 4\sqrt{2} - 1\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle f_5, F\rangle) - \det(F) = \frac{1}{32}\big(2d_1^2 - (3+2\sqrt{2})d_1 + 2\sqrt{2} + 2\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle g_5, G\rangle) - \det(G) = \frac{1}{64}\big(4d_1^2 - 2(4+3\sqrt{2})d_1 + 8\sqrt{2} + 9\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle h_5, H\rangle) - \det(H) = \frac{1}{64}\big(4d_1^2 - 4(1+\sqrt{2})d_1 + 4\sqrt{2} + 3\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle k_5, K\rangle) - \det(K) = \frac{1}{16}\big(d_1^2 - (1+\sqrt{2})d_1 + \sqrt{2} + 1\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle l_5, L\rangle) - \det(L) = \frac{1}{64}\big(8d_1^2 - 8d_1 + 3\sqrt{2} - 4\big) \geq 0,$$
$$\det(\langle n_5, N\rangle) - \det(N) = \frac{1}{32}\big(4d_1^2 - 4\sqrt{2}d_1 + 3\sqrt{2} - 1\big) \geq 0,$$

где

$$A = \langle a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\rangle, \qquad G = \langle g_1, g_2, g_3, g_4, g_6, g_7\rangle,$$
$$B = \langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_6, b_7\rangle, \qquad H = \langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_6, h_7\rangle,$$
$$C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4, c_6, c_7\rangle, \qquad K = \langle k_1, k_2, k_3, k_4, k_6\rangle,$$
$$E = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7\rangle, \qquad L = \langle l_1, l_2, l_3, l_4, l_6, l_7\rangle,$$
$$F = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_6, f_7\rangle, \qquad N = \langle n_1, n_2, n_3, n_4, n_6, n_7\rangle.$$

□

Лемма 4.6. *Следующие схемы являются сверхгиперболическими.*

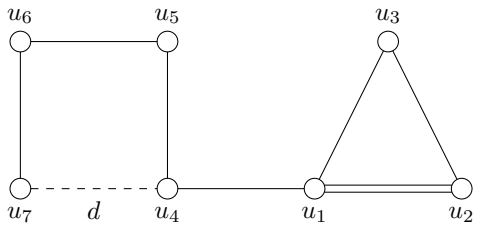


Доказательство.

$$\det(S_1) = \frac{1}{16}\Big(4\sqrt{2}d^2 - 2\sqrt{2} - 1\Big) > 0,$$
$$\det(S_2) = \frac{1}{64}\Big(16\sqrt{2}d^2 - 9\sqrt{2} - 6\Big) > 0,$$
$$\det(S_3) = \frac{1}{8}\Big(2\sqrt{2}d^2 - \sqrt{2} - 1\Big) > 0,$$
$$\det(S_4) = \frac{1}{32}\Big(8\sqrt{2}d^2 + 4\sqrt{2}d - 4\sqrt{2} - 3\Big) > 0,$$
$$\det(S_5) = \frac{1}{32}\Big(8\sqrt{2}d^2 - 4\sqrt{2} - 3\Big) > 0,$$
$$\det(S_6) = \frac{1}{64}\Big(16\sqrt{2}d^2 - 9\sqrt{2} - 9\Big) > 0,$$
$$\det(S_7) = \frac{1}{64}\Big(16\sqrt{2}d^2 + 8\sqrt{2}d - 8\sqrt{2} - 9\Big) > 0.$$

□

Лемма 4.7. *Следующая схема является сверхгиперболической.*

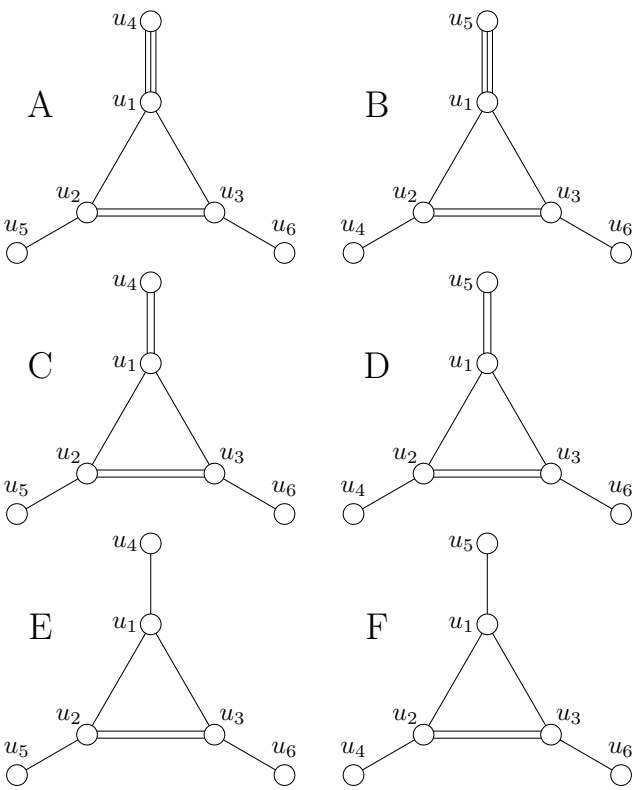


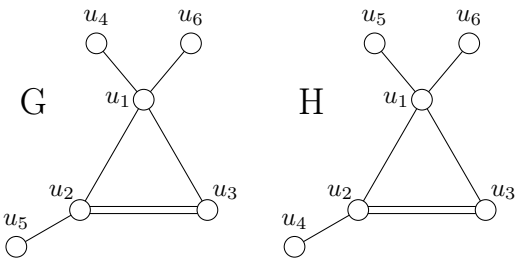
Доказательство. Определитель этой схемы равен

$$\frac{1}{32}\left(6\sqrt{2}d^2 + 4\sqrt{2}d - 5\sqrt{2} - 3\right) \geq 0.$$

□

Подсхема $\langle L_1, u_4, u_5, u_6\rangle$ имеет один из перечисленных ниже видов.





Напомним, что мы считаем, что $[u_8, L_1] = [u_9, L_1] = 0$, $[u_4, L_1] \geq [u_7, L_1]$ и $[u_5, L_1] \geq [u_6, L_1] = 1$. Рассмотрим все эти случаи.

4.3.1 Случай A

$$\begin{gathered}[u_5, u_4] = [u_5, u_7] = [u_4, u_8] = 0,\\ [u_4, u_6] = [u_4, u_9] = [u_6, u_7] = 0,\\ [u_5, u_6] = [u_5, u_9] = [u_6, u_8] = 0,\end{gathered}$$

так как в противном случае какая-нибудь подсхема, которая должна быть эллиптической, окажется параболической или гиперболической. Это означает, что $[u_7, u_8] \neq 0$, $[u_8, u_9] \neq 0$ и $[u_9, u_7] \neq 0$, и подсхема $\langle u_7, u_8, u_9\rangle$ не является эллиптической.

4.3.2 Случай B

Аналогичен предыдущему.

4.3.3 Случай C

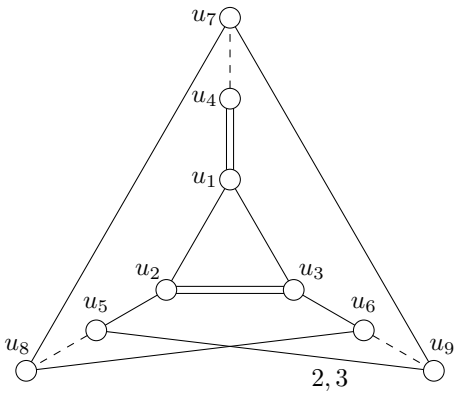
Аналогичными рассуждениями получаем, что

$$\begin{gathered}[u_5, u_4] = [u_5, u_7] = [u_4, u_8] = 0,\\ [u_4, u_6] = [u_4, u_9] = [u_6, u_7] = 0,\\ [u_5, u_6] = 0.\end{gathered}$$

А значит, что без ограничения общности

$$\begin{gathered}[u_7, u_8] = [u_7, u_9] = 1, \quad [u_8, u_9] = 0,\\ [u_6, u_8] = 1, \quad [u_5, u_9] \in \{0, 1\},\\ [u_7, u_1] = [u_7, u_2] = [u_7, u_3] = 0.\end{gathered}$$

Тогда схема имеет следующий вид.



Заметим, что подсхема $\langle u_1, u_2, u_3, u_6, u_7, u_8, u_9\rangle$ является сверхгиперболической по Лемме 4.7.

4.3.4 Случай D

$$[u_7, u_1] = [u_7, u_3] = 0.$$

Если $[u_7, u_2] = 1$, то

$$[u_4, u_5] = [u_4, u_8] = [u_7, u_5] = [u_7, u_8] = 0.$$

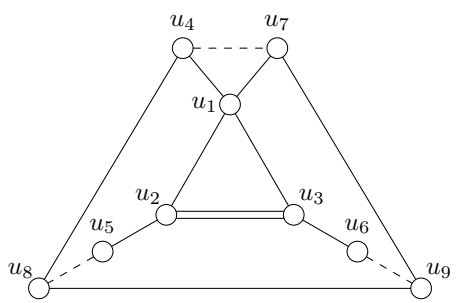
Значит, $[u_7, u_2] = 0$, что является предыдущим случаем.

4.3.5 Случай E

$$[u_5, u_4] = [u_5, u_7] = [u_6, u_4] = [u_6, u_7] = 0.$$

Если $[u_7, u_1] = 0$, то $[u_8, u_7] = 1$, так как в противном случае подсхема $\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\rangle$ будет сверхгиперболической по Следствию 4.5. Аналогично, $[u_9, u_7] = 1$. Без ограничения общности $[u_8, u_6] = 1$, но тогда подсхема $\langle u_1, u_2, u_3, u_6, u_7, u_8, u_9\rangle$ является сверхгиперболической по Лемме 4.7.

Если $[u_7, u_1] = 1$, то легко проверить, что схема должно иметь следующий вид.



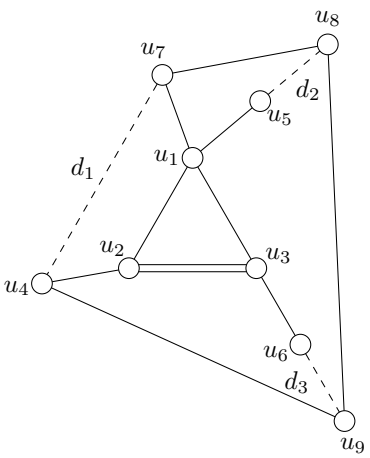
Но тогда подсхема $\langle u_1, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\rangle$ является сверхгиперболической по Следствию 4.5.

4.3.6 Случай F

Случай, когда $[u_7, L_1] = 0$, рассмотрен в предыдущем пункте, поэтому считаем, что $[u_7, L_1] \neq 0$. Тогда $[u_7, u_2] = [u_7, u_3] = 0$, а значит, $[u_7, u_1] = 1$. Так как

$$[u_4, u_5] = [u_4, u_8] = [u_7, u_5] = 0,$$

то $[u_7, u_8] \neq 0$. Легко проверить, что схема должна иметь следующий вид.



Но эта схема является сверхгиперболической, так как

$$\det(\langle u_1, u_2, u_3, u_5, u_7, u_8, u_9\rangle) = \frac{1}{32}\Big(\big(8\sqrt{2}+4\big)d_2^2 - 4d_2 - \big(5+4\sqrt{2}\big)\Big) > 0.$$

4.3.7 Случай G

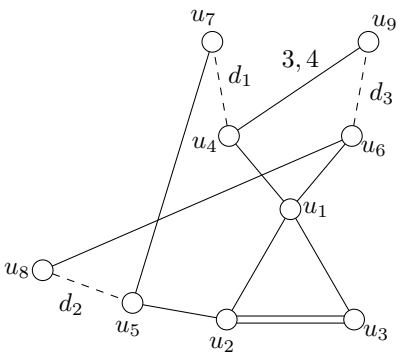
Если $[u_7, L_1] = 0$, то рассмотрим подсхему $\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_7, u_8, u_9\rangle$. Лемма 4.6 говорит, что либо

$$[u_4, u_5] = [u_4, u_8] = [u_7, u_8] = 0 \text{ и } [u_7, u_5] = 1,$$

либо

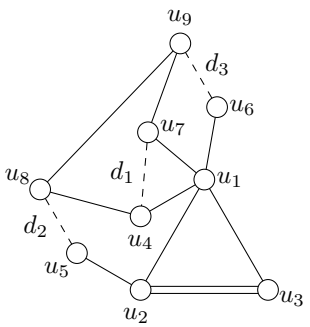
$$[u_4, u_6] = [u_4, u_9] = [u_7, u_9] = 0 \text{ и } [u_7, u_6] \geq 1.$$

Используя Лемму 4.6, легко получить, что в обоих случаях схема должна иметь следующий вид.



Но по Лемме 4.5 подсхема $\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9\rangle$ является сверхгиперболической.

Если же $[u_7, L_1] \neq 0$, то $[u_7, u_2] = 0$, а $[u_7, u_3] = 1$ разбирается в Случае F, поэтому считаем, что $[u_7, u_1] = 1$. Легко проверить, что в этом случае схема должна иметь следующий вид.

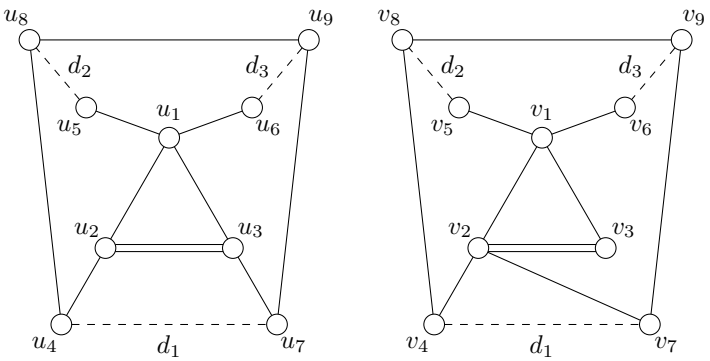


Но

$$\det(\langle u_1, u_2, u_3, u_6, u_7, u_8, u_9\rangle) = \frac{1}{32}\Big((4+8\sqrt{2})d_3^2 - 4d_3 - 4\sqrt{2} - 5\Big) > 0.$$

4.3.8 Случай H

Можем считать, что $[u_7, L_1] \neq 0$, так как обратное рассмотрено в предыдущем случае. Тогда схема имеет один из следующих видов.



Схемы $\langle u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\rangle$ и $\langle v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\rangle$ являются сверхгиперболическими по Следствию 4.5.

4.4 Классификация произведений симплексов

Из предыдущего подраздела мы получаем следующую теорему.

Теорема 4.8. *Если схема Кокстера S не содержит параболических подсхем, а решётка эллиптических подсхем $\mathcal{F}(S)$ изоморфна решётке граней произведения треугольника на трёхмерный куб, то S является сверхгиперболической.*

Весь раздел даёт следующую теорему.

Теорема 4.9. *Все компактные гиперболические многогранники Кокстера, которые комбинаторно устроены как произведение симплексов, описаны в следующих статьях: [Lan50] (симплексы), [Poi82] (двумерные кубы), [JT18] (кубы), [Kan74](симплициальные призмы), [Ess96] (произведения двух симплексов), [Tum07] (произведения трёх симплексов).*

5 Произведения многогранников

Определение 5.1. Определим отношение Ланнеровской эквивалентности $\sim_L$ как наименьшее отношение эквивалентности, для которого любые две вершины Ланнеровской подсхемы эквивалентны. Оно разбивает схему на компоненты Ланнеровской связности. Если схема состоит из одной такой компоненты, то такую схему будем называть ланнеровски связной.

Определение 5.2. Будем говорить, что $S_1 \not\sim_L S_2$, если для любых вершин $v_1 \in S_1$ и $v_2 \in S_2$ выполнено $v_1 \not\sim_L v_2$.

Лемма 5.3. *$S_1 \not\sim_L S_2$ тогда и только тогда, когда для любых эллиптических подсхем $E_1 \subset S_1$ и $E_2 \subset S_2$ подсхема $\langle E_1, E_2\rangle$ является эллиптической.*

Доказательство. Рассмотрим $S_1 \not\sim_L S_2$. Пусть $E_1 \subset S_1$ и $E_2 \subset S_2$ — эллиптические подсхемы, но $\langle E_1, E_2\rangle$ — не эллиптическая. Тогда в $\langle E_1, E_2\rangle$ есть Ланнеровская подсхема, которая не может содержаться ни в E_1, ни в E_2, а значит, есть $v_1 \in E_1$ и $v_2 \in E_2$, которые $v_1 \sim_L v_2$.

Рассмотрим S_1 и S_2, любые эллиптические подсхемы которых образует эллиптическую подсхему. Пусть $v_1 \in S_1$ и $v_2 \in S_2$, которые $v_1 \sim_L v_2$. Тогда есть Ланнеровская подсхема L, содержащая v_1 и v_2. Заметим, что $L_1 = S_1 \cap L$ и $L_2 = S_2 \cap L$ являются эллиптическими, но подсхема $\langle L_1, L_2\rangle = L$ не является эллиптической. □

Получается, компоненты Ланнеровской связности описывают комбинаторное устройство неразложимых многогранников, произведение которых описывает комбинаторное устройство всей схемы.

Семейство схем будем называть сверхгиперболическим, если все схемы этого семейства обладают таким свойством. На самом деле всё, что я писал выше доказывалось нахождением сверхгиперболической подсхемы, поэтому:

Лемма 5.4. $\mathcal{L}_3 \times_0 \mathcal{L}_3 \times_0 \mathcal{L}_n \times_0 \mathcal{L}_m$ *сверхгиперболично.*

Лемма 5.5. $\mathcal{L}_4 \times_0 \mathcal{L}_n \times_0 \mathcal{L}_m \times_0 \mathcal{L}_k$ *сверхгиперболично.*

Лемма 5.6. $\mathcal{L}_5 \times_0 \mathcal{L}_n \times_0 \mathcal{L}_m \times_0 \mathcal{L}_k$ *сверхгиперболично.*

Определение 5.7. Ланнеровским порядком $\operatorname{Lord} S$ будем называть наибольший порядок ланнеровской подсхемы схемы S.

Тогда из предыдущих лемм следует:

Теорема 5.8. *Если S — схема, соответствующая компактному гиперболическому многограннику Кокстера, являющемуся произведением хотя бы четырёх многогранников, то* $\operatorname{Lord} S \leq 3$*, причём если $S_1, \ldots, S_n$ — компоненты Ланнеровской связности схемы S, то* $\operatorname{Lord} S_k = 3$ *не более чем для одного k.*

Если семейство $\mathcal{L}_3 \times_0 \mathcal{L}_2 \times_0 \mathcal{L}_2 \times_0 \mathcal{L}_2$ тоже сверхгиперболично, то на самом деле оценка снижается до $\operatorname{Lord}(S) = 2$.

Кажется, из работ Тумаркина следует, что верны похожие утверждения. Я сейчас могу вспомнить только это:

Лемма 5.9 (Esselmann)**.** $\mathcal{L}_4 \times_0 \mathcal{L}_3$ *сверхгиперболично.*

6 Многогранники Кокстера, ланнеровский порядок которых равен двум

Если P — компактный гиперболический многогранник Кокстера, который устроен комбинаторно как d-мерный куб, или является прямоугольным, то $\operatorname{Lord} P = 2$. Известно, что в первом случае многогранники существуют в размерностях до 5, а во втором — до 4.

Теорема 6.1 (Mantel)**.** *Если граф G состоит из v вершин и e рёбер, а так же не содержит треугольников, то*

$$e \le \begin{cases} \frac{v^2}{4} & \text{при чётном } v, \\ \frac{v^2-1}{4} & \text{при нечётном } v. \end{cases}$$

Оценка достигается в том и только том случае, когда граф G является полным двудольным, размеры долей которого отличаются не более чем на 1.

Теорема 6.2 (Никулин)**.** *Если $\theta_0, \dots, \theta_{k-1}$ — неотрицательные действительные числа, то для любого простого выпуклого компактного многогранника P в пространстве размерности $d \ge 2k-1$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{Q<P \\ \dim Q = k}} \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i \alpha_i^Q < \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i A_n^{(i,k)},$$

где α_k — число граней размерности k у многогранника P, α_k^Q — число граней размерности k у многогранника Q, $Q < P$ означает, что Q является гранью P, а

$$A_d^{(i,k)} = \binom{d-i}{k-i} \frac{\binom{\lceil d/2 \rceil}{i} + \binom{\lfloor d/2 \rfloor}{i}}{\binom{\lceil d/2 \rceil}{k} + \binom{\lfloor d/2 \rfloor}{k}}.$$

Следствие 6.3. *Среднее число сторон двумерной грани простого выпуклого многогранника P размерности $d \ge 3$ меньше, чем*

$$A_d^{(1,2)} = \begin{cases} \frac{4(d-1)}{d-2} & \text{при чётном } d, \\ \frac{4d}{d-1} & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

Лемма 6.4. *Если P — простой выпуклый многогранник размерности $d \ge 3$, никакая двумерная грань которого не является треугольником, то у него найдется вершина, для которой число четырёхугольных двумерных граней, в которых она содержится, хотя бы*

$$\begin{cases} \binom{d}{2} - \frac{5d}{2} & \text{при чётном } d; \\ \binom{d}{2} - \frac{5(d-1)}{2} & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через α число четырёхугольных двумерных граней P, через β — число двумерных граней P, через α'_v — число четырёхугольных двумерных граней, в которых содержится вершина v, а через β'_v — число двумерных граней, в которых содержится вершина v. Тогда для таких c и c', что $\alpha = c\beta$ и $4c - c' A_d^{(1,2)} = 0$, верно

$$\sum_{\substack{v<P \\ \dim v = 0}} \alpha'_v - c'\beta'_v \ge 4\alpha - c' A_d^{(1,2)} \beta \ge (4c - c' A_d^{(1,2)})\beta = 0.$$

Значит, у многогранника P есть вершина v, для которой выполняется неравенство $\alpha'_v \geq c'\beta'_v$. Так как многогранник не содержит треугольных двумерных граней, то

$$4c + 5(1-c) < A_d^{(1,2)},$$

а значит,

$$c > 5 - A_d^{(1,2)}.$$

Тогда

$$\alpha'_v \geq c'\beta'_v = \frac{4c}{A_d^{(1,2)}}\beta'_v > \left(\frac{20}{A_d^{(1,2)}} - 4\right)\beta'_v = \begin{cases} (1-\frac{5}{d-1})\beta'_v & \text{при чётном } d, \\ (1-\frac{5}{d})\beta'_v & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

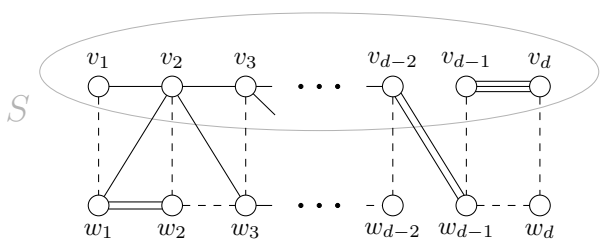
Так как P — простой, то $\beta'_v = \binom{d}{2}$, что влечёт

$$\alpha'_v > \begin{cases} \binom{d}{2} - \frac{5d}{2} & \text{при чётном } d; \\ \binom{d}{2} - \frac{5(d-1)}{2} & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

□

Теорема 6.5. *Если P — компактный гиперболический многогранник Кокстера, и $\operatorname{Lord} P = 2$, то $\dim P \leq 22$.*

Доказательство. Если P — компактный гиперболический многогранник Кокстера размерности d, такой что $\operatorname{Lord} P = 2$, то он удовлетворяет условиям Леммы 6.4. Рассмотрим эллиптическую подсхему $S = \langle v_1, \ldots, v_d \rangle$, соответствующую вершине из Леммы 6.4. Для любого k существует единственная не совпадающая с v_k вершина w_k схемы Кокстера, такая что схема $\langle v_1, \ldots, v_{k-1}, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_d \rangle$ является эллиптической. Так как $\operatorname{Lord} P = 2$, а подсхема $\langle S, w_k \rangle$ является гиперболической, то v_k и w_k соединены пунктирным ребром.

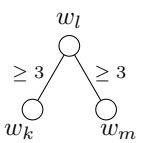


Обозначим через vv число рёбер, соединяющих вершины v_k и v_l, через vw — число эллиптических рёбер, соединяющих v_k и w_l, через wwe — число эллиптических рёбер, соединяющих w_k и w_l, и через wwh — число пунктирных рёбер, соединяющих w_k и w_l. Заметим, что

$$vv + vw + wwe + wwh \geq \binom{d}{2}, \tag{1}$$

так как в противном случае для некоторых k и l подсхемы $\langle v_k, w_k\rangle$ и $\langle v_l, w_l\rangle$ будут ортогональны. Неравенства $vv \leq d-1$ и $vw \leq 3d$ следуют из классификации эллиптических схем. Далее считаем, что d нечётно. Тогда неравенство $wwe \leq \frac{d^2-1}{4}$ следует из Теоремы 6.1 и того факта, что если $\mathrm{Lord}(T) = 2$, то схема T не может содержать эллиптический цикл из трёх вершин. Неравенство $wwh < \frac{5(d-1)}{2}$ следует из Леммы 6.4.

Посчитаем полученные оценки для $d = 23$: $vv \leq 22$, $vw \leq 69$, $wwe \leq 132$ и $wwh \leq 54$. Если $vv = 22$, то из каждой вершины w_k выходит не более одного эллиптического ребра в S. То есть в этом случае $vw \leq 23$, что противоречит неравенству 1, а значит, $vv \leq 21$. Воспользовавшись неравенством 1 получаем, что $109 \leq wwe$. Тогда из Теоремы 6.1 получаем, что хотя бы 21 вершина из $\{w_1, \ldots, w_d\}$ связана с другой вершиной этого множества. Но из таких вершин выходит не более двух эллиптических рёбер в S, что означает, что $vw \leq 48$ и $130 \leq wwe$. Применим эти рассуждения ещё раз. Получаем, что $vv = 21$, $vw = 46$, $wwe = 132$ и $wwh = 54$. Тогда Теорема 6.1 говорит о том, между какими вершинами проходят эллиптические рёбра в подсхеме $\langle w_1, \ldots, w_d\rangle$. Из этого строения можно сделать вывод, что для некоторых w_k, w_l и w_m подсхема $\langle w_k, w_l, w_m\rangle$ имеет следующий вид.



Но тогда из вершины w_l выходит не более одного эллиптического ребра в S, что означает, что $wwe < 132$. Получается, не существует компактных гиперболических многогранников Кокстера, ланнеровский порядок которых равен двум, размерности 23. При доказательстве этого факта использовались только комбинаторные рассуждения. В силу того, что если ланнеровский порядок многогранника равен двум, то для любой его грани схема этого многогранника содержит подсхему, которая описывает комбинаторное строение этой грани. Из этого следует утверждение теоремы в больших размерностях. □

Список литературы

[Poi82] H. Poincaré. «Théorie des groups fuchsiennes». В: *Acta Math.* 1 (1882), с. 1—62.

[Cox34] H. S. M. Coxeter. «Discrete groups generated by reflections». В: *Ann. Math.* 35.3 (1934), с. 588—621.

[Lan50] F. Lannér. «On complexes with transitive groups of automorphisms». В: *Comm. Sém. Math. Univ. Lund* 11 (1950), с. 1—71.

[Кап74] И. М. Каплинская. «О дискретных группах, порожденных отражениями в гранях симплициальных призм в пространствах Лобачевского». В: *Матем. заметки* 15 (1 1974), с. 159—164.

[Вин84] Э. Б. Винберг. «Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности». В: *Тр. ММО* 47 (1984), с. 68—102.

[Вин85] Э. Б. Винберг. «Гиперболические группы отражений». В: *УМН* 40 (1(241) 1985), с. 29—66.

[Ess96] F. Esselmann. «The classification of compact hyperbolic Coxeter d-polytopes with $d+2$ facets». В: *Comment. Math. Helvetici* 71 (1996), с. 229—242.

[Tum07] P. Tumarkin. «Compact hyperbolic Coxeter n-polytopes with $n+3$ facets». В: *Electron. J. Combin.* 14 (2007).

[JT18] M. Jacquemet и S. Tschantz. «All hyperbolic Coxeter n-cubes». В: *J. Combin. Theory A* 158 (2018), с. 387—406.

[Bug] V. O. Bugaenko. «Чет mathnet упал, потом допишу сюда». В: ().

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Алексеева
Ильи Сергеевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «New classes of minimal knot diagrams» являются: Definition 1.3, Theorem 1.4, Corollaries 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, Conjecture 1.11, Proposition 1.12, Corollary 1.13, Proposition 1.14, Lemma 2.4, Remark 2.5, Lemma 2.6, Corollary 2.9, Lemmas 2.10, 2.11, 3.1, Corollary 3.2, Lemma 3.3, Conjecture 4.1, Corollary 4.2, Conjecture 4.3, Corollary 4.4.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 11 февраля по 1 марта 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: minimal knot diagrams, braid index, Morton-Franks-Williams inequality, homogeneous links, growth rate of braid groups, в выдаче поисковиков был исследован ряд статей, обзор которых представлен во введении работы, и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [Y. Diao, G. Hetyei, P. Liu, The braid index of reduced alternating links, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2019: https://doi.org/10.1017/S0305004118000907], [P. Liu, Y. Diao, G. Hetyei, The Homfly polynomial of links in closed braid form, Discrete Mathematics, 2019, https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.09.027], [M. Brandenbursky, Coloring link diagrams and Conway–type polynomial of braids, 2014, https://doi.org/10.1016/j.topol.2013.10.017] и [M. Polyak, Alexander–Conway invariants of tangles, 2010, preprint] представлены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Андреем Валерьевичем Малютиным, ведущим научным сотрудником ПОМИ РАН, профессором, доктором ф.-м. наук.
- Проведены выступления на Петербургском топологическом семинаре им. В. А. Рохлина (руководитель семинара профессор, доктор ф.-м. наук Нежинский Владимир Михайлович).
- Проведена консультация с рецензентом работы Смирновой-Нагнибеда Татьяной Валерьевной, профессором, ведущим научным сотрудником Лаборатории "Современная алгебра и приложения".

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-

видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится/состоялась 25.06.2020. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.



Алексеев Илья Сергеевич

31 мая, Санкт-Петербург, Россия

ОТЗЫВ научного руководителя
на выпускную квалификационную работу
Алексеева Ильи Сергеевича
по теме «New classes of minimal knot diagrams»

Представленная Ильей работа в основной своей части относится к классической теории узлов и зацеплений, хотя ее исходная мотивировка пришла из вопросов геометрической теории групп (и к ней же относится часть полученных результатов).

В работе доказывается серия связанных результатов о минимальных диаграммах узлов и зацеплений, о диаграммах с минимальным числом окружностей Зейферта, а также о минимальных диаграммах кос или, в других терминах, о геодезических путях в группах кос. Полученные результаты существенны и новы, они находятся на передовом крае развития теории, имеют мировой уровень.

Наиболее ярким результатом работы является описание нового обширного класса минимальных (в классическом смысле, т.е. по числу перекрестков) диаграмм узлов и зацеплений. Открытый Ильей класс имеет довольно сложные устройство и описание и для ознакомления с ним требуется определенная работа. Кратко можно охарактеризовать его как класс, состоящих из тех однородных диаграмм, у которых при разбиении на косы слои составляющих кос в определенном смысле достаточно сильно перекручены. Несмотря на сложность описания, класс этот сравнительно велик и уже среди простейших диаграмм часты представители этого класса.

До работы Ильи, насколько мне известно, удалось обнаружить лишь следующие классы «зрительно распознаваемых» минимальных диаграмм:

(A) неприводимые альтернированные и (обобщающие их) адекватные диаграммы,

(P) диаграммы, являющиеся Александеровскими замыканиями некоторых специальных достаточно сильно перекрученных положительных (и отрицательных) кос, а также

(M) приведенные монтесиносовские диаграммы.

Доказательство минимальности неприводимых альтернированных диаграмм (первая гипотеза Тейта) и последующее обобщение этого результата на адекватные диаграммы представляют собой важнейшую веху в развитии теории узлов. Гипотеза оставалась открытой почти столетие, а доказательство является одним из самых известных применений полиномиальных инвариантов к геометрической части теории узлов. Эти результаты вдохновили множество исследований по структуре минимальных диаграмм и, в частности, попыток найти новые классы минимальных диаграмм, но до настоящего удалось это только для довольно узких вышеуказанных сугубо специальных классов (P) и (M). Новый класс, открытый Ильей – прорыв в этом направлении, случившийся после длительной паузы. Этот класс весьма богат – по асимптотическим размерам он вполне конкурирует с классом альтернированных и выглядит намного более широким, чем вышеупомянутые классы (P) и (M). Даже относительно небольшой в сравнении со всем открытым Ильей классом его подкласс, состоящий из замыканий локально перекрученных однородных кос, можно рассматривать как существенное, качественное расширение класса (P).

Уже одного этого результата более чем достаточно для того, чтобы оценить представленную работу на «отлично».

В дополнение отмечу, что полученное Ильей доказательство минимальности обсуждаемого класса диаграмм весьма сложно, – оно базируется на многоступенчатых построениях из недавних работ о числе окружностей Зейферта в альтернированных диаграммах, усовершенствует эти построения и экстраполирует их на более труднодоступный класс диаграмм. По всей видимости, Илье удастся еще более развить и усилить полученные результаты: с одной стороны, им найдены потенциальные возможности для ослабления некоторых определяющих рассматриваемый класс условий,

ведущие к расширению класса, а с другой, – в одной из связанных работ (речь о работе Y. Diao, G. Hetyei, P. Liu, The braid index of reduced alternating links, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2019: https://doi.org/10.1017/S0305004118000907) нами были обнаружены неточности, и верификация проделанных в этой работе построений также может привести к изменениям в конфигурации найденного класса минимальных диаграмм.

Подчеркну, что и сам новый обсуждаемый класс диаграмм, и доказательство его минимальности были найдены Ильей самостоятельно.



«11» июня 2020 г. _____ Малютин А.В.

Подпись ФИО

Saint Petersburg State University

Ilya Alekseev

Graduation qualification thesis

New classes of minimal knot diagrams

Bachelor's program
"Mathematics"
Specialization and code: 01.03.01 "Mathematics"
Cipher of the EP: SV.5000.2016

Thesis supervisor:
Senior research fellow,
PDMI,
Doctor of Science,
Andrei V. Malyutin

Thesis reviewer:
Leading researcher,
University of Geneva,
Laboratory "Modern
Algebra and Applications",
Professor,
Tatiana V. Smirnova-Nagnibeda

Saint Petersburg
2020

Abstract

The present thesis is devoted to knot theory. We study diagrams of knots, links, braids, and tangles with the minimum number of crossings, the minimum number of Seifert circles, and other properties. One of the main results is the construction of a new class of link diagrams with the minimum number of crossings. This class includes many alternating diagrams, torus ones, and numerous diagrams whose minimality has not been proven before. Besides, we construct a new larger class of link diagrams with the minimum number of Seifert circles. Also, we provide results related to geometric group theory. In particular, we describe simple criteria on a braid diagram representing a conjugacy class of a homogeneous braid to have the minimum number of crossings.

Contents

1. Introduction 2
1.1. The skein polynomial 7
1.2. Braids and links 8
1.3. Solid links 9
1.4. Homogeneous braids 11
2. The skein polynomial of solid links 12
2.1. Two special classes of resolving trees 13
2.2. Castle structure for link diagrams 16
2.3. Proof of Theorem 1.4 18
3. Polynomial invariants of tangles and braids 25
3.1. Proof of Proposition 1.12 25
3.2. Proof of Proposition 1.14 26
4. Discussion 28
References 30

1. Introduction

We use basic terminology and notions of knot theory as introduced in [3].

The central notions of the present thesis are minimal link diagrams and the crossing number of links. The latter is a natural complexity measure of links. Recall that a diagram $\mathcal{D}$ of a link $\mathcal{L}$ is said to be *minimal* if $\mathcal{D}$ has the least number of crossings among all diagrams of $\mathcal{L}$. The number of crossings of a minimal diagram of $\mathcal{L}$ is called the *crossing number* of $\mathcal{L}$.

Historically, the crossing number is closely related to the recognition problem for links. This problem is one of the most fundamental questions of both the early stages of knot theory and nowadays. The recognition problem requires to construct an algorithm that decides whether two given diagrams represent the same link. Given such an algorithm, one could determine whether a diagram $\mathcal{D}$ having n crossings is minimal as follows. List all diagrams $\mathcal{U}$ with less than n crossings, and for each $\mathcal{U}$, determine whether $\mathcal{U}$ and $\mathcal{D}$ represent the same link.

In theory, the link recognition problem has been solved (see an expository note [20]). The main work, which is based on the theory of normal surfaces, was done by W. Haken, F. Waldhausen, and K. Johannson, with important contributions by S. V. Matveev, G. Hemion, W. Jaco, and P. B. Shalen. Still, the corresponding algorithm is impractical due to complexity issues. On the other hand, for certain classes of links, spectacular classification results have been obtained. The examples include torus links, rational links, braid index 3 links,

alternating links, and hyperbolic links (see [4]). The last two classes have proven especially useful to a link tabulator wanting to classify all links up to a given crossing number.

At the same time, several remarkable phenomena were discovered concerning minimal diagrams. Namely, some easy to verify visual properties of link diagrams guarantee the minimality. The examples include reduced alternating diagrams, adequate diagrams, reduced Montesinos diagrams, and closed GMM braid diagrams, which we describe below.

One of the main results of the present thesis is the construction of a new class of minimal link diagrams of this kind.

Let us describe the known classes of minimal link diagrams and their role in the development of knot theory in more detail.

Recall that a link diagram $\mathcal{D}$ is said to be *alternating* if, as one follows each link component of $\mathcal{D}$, one passes overcrossings and undercrossings alternatively. A link $\mathcal{L}$ is said to be *alternating* if $\mathcal{L}$ admits an alternating diagram.

Traditionally, one indexes tables of prime (meaning non-composite, see Figure 1) knots by the crossing number, with a subscript to indicate which particular knot out of those with this many crossings one means. In the tables, one counts mirror images as a single knot type. We use the Rolfsen table (see [8]) for knots with ≤ 10 crossings and the KnotScape table (see [10]) for knots with ≥ 11 crossings.

The majority of knots with ≤ 9 crossings are alternating. In particular, there are only 3 non-alternating knots 8_{19}, 8_{20}, and 8_{21} among the 36 prime knots with ≤ 8 crossings, and there are only 8 non-alternating knots $9_{42}, 9_{43}, \ldots, 9_{49}$ among the 49 prime knots with 9 crossings. Nevertheless, as the crossing number increases, the percentage of prime knots that are alternating goes to 0 exponentially quickly (see Theorem 1 in [48]).

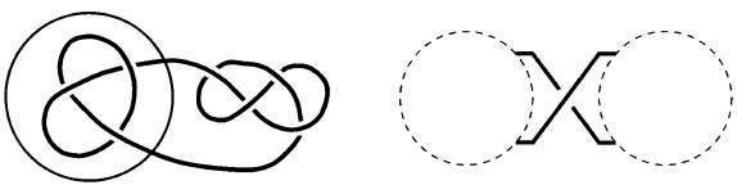


FIGURE 1. A composite link diagram (on the left). An isthmus (on the right).

A diagram $\mathcal{D}$ is said to be *reduced* if $\mathcal{D}$ has no isthmuses (see Figure 1). If $\mathcal{D}$ is not reduced, one can apply an obvious transformation that reduces the number of crossings. Therefore, any minimal diagram is reduced.

The original compilations of knot tables by P. G. Tait and C. N. Little at the end of the 19th century gave reason to believe that any reduced alternating diagram is minimal. This well-known fact, referred to as the *first Tait conjecture*, was proved in 1987 by L. Kauffman, M. B. Thistlethwaite, and K. Murasugi independently by using the *Jones polynomial* for links (see Theorem 2.10 in [35], Theorem 2 in [36], and Theorem A in [37]). Namely, they showed that the number of crossings of any diagram of a link $\mathcal{L}$ is bounded from below by the difference between the highest and the lowest degrees of the Jones polynomial $\mathcal{V}_L(t)$ of $\mathcal{L}$. Moreover, for any reduced alternating link diagram, the equality holds.

In [38] (see Corollary 3.4), M. B. Thistlethwaite used a generalization of the Jones polynomial, referred to as the *Kauffman polynomial*, and obtained similar minimality results for a more general class of links, which are called *adequate*. Note that the precise definition is

visual, that is, given a link diagram $\mathcal{D}$, it is easy to verify whether $\mathcal{D}$ is adequate. All reduced alternating diagrams are adequate. The simplest adequate non-alternating prime knots have 10 crossings, and there are 3 such: 10_{152}, 10_{153}, and 10_{154}.

It is noteworthy that if a prime diagram is not alternating, the inequality above is strict. The latter implies that any minimal diagram of each prime alternating link is alternating. By using this, in [39] (see Theorem 10), the authors showed that some specific link diagrams, referred to as *reduced*[1] *Montesinos* ones, are minimal.

Another class of minimal diagrams is of some closed braids. We denote by $\mathcal{B}_n$ the braid group with n strands. Recall that $\mathcal{B}_n$ admits the following presentation with standard Artin generators:

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ 1 \le i \le n-1;\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ |i-j| \ge 2 \rangle.$$

The relation $\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_k = \sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}$ is called the *braid relation*, and the relation $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ is called the *far commutativity* relation. An element of $\mathcal{B}_n$ is called a *braid* with n strands. Given a set of symbols S, denote by S^* the set of all words in the alphabet S. An element of $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}^*$ is called a *braid word in* $\mathcal{B}_n$.

We visualize braid words by their diagrams, which one draws vertically from top to bottom. For example, see the second picture in Figure 2 for the braid diagram corresponding to $\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}$. It is easy to see that there is a correspondence between the far commutativity classes of braid words and the plane isotopy classes of braid diagrams. By abusing the notation, one treats braid diagrams as braid words.

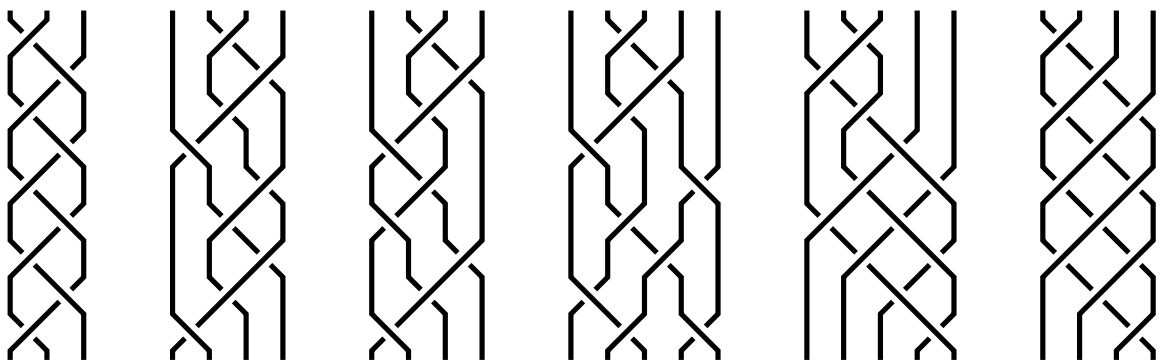


FIGURE 2. Examples of braid diagrams.

In [31], J. Gonzàlez-Meneses and P. M. G. Manchòn introduced a new class of braid diagrams, which we call the *GMM* ones. By definition, a braid word $w \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}^*$ corresponds to a GMM braid diagram if any only if one can obtain w from the empty word by a finite sequence of transformations of the following types:

(1) for some $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, inserting $\sigma_i\sigma_i$;
(2) for some $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, doubling a letter σ_i;
(3) applying either the braid relation or the far commutativity one.

See the rightmost picture in Figure 2 for an example of a GMM braid diagram.

Any braid diagram gives rise to a link diagram via the *Alexander closure*, see Figure 3. We endow the resulting link diagram with a natural downward orientation.

[1] In [39], *reduced* means something different to that of the present thesis.

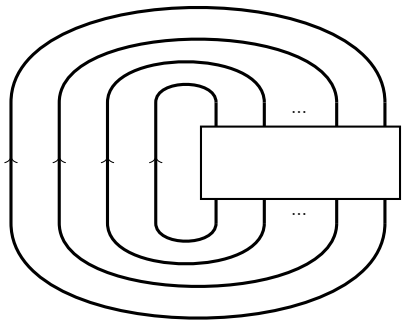


FIGURE 3. The Alexander closure of a braid diagram.

A link diagram $\mathcal{D}$ is called a *GMM diagram* if $\mathcal{D}$ is the Alexander closure of a GMM braid diagram. For example, up to mirror images, any torus link admits a GMM diagram. All GMM diagrams are minimal. In their research, J. Gonzàlez-Meneses and P. M. G. Manchòn used the *skein polynomial*, which is a generalization of the Jones polynomial. We discuss this approach in the next subsection.

Another class of diagrams is that of homogeneous ones, which was introduced in [11].

We assume that all link diagrams are oriented and lie on an oriented 2-sphere S^2. A crossing is said to be positive (resp. negative) if it has the form on the left (resp. right) picture in Figure 4.

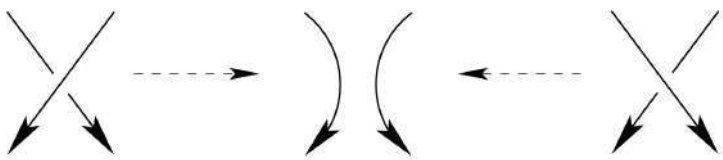


FIGURE 4. Smoothing of a crossing.

Let $\mathcal{D}$ be a link diagram. After smoothing all crossings of $\mathcal{D}$, one obtains finitely many simple closed curves, which are called *Seifert circles* of $\mathcal{D}$.

Let $\Gamma(\mathcal{D})$ be a graph whose vertex set is the set of all Seifert circles of $\mathcal{D}$ and whose edges correspond to crossings of $\mathcal{D}$.

Recall that a vertex of a finite graph is said to be a *cut vertex* if, as one removes it, the number of connected components of the graph increases. Let G be a finite graph. A subgraph H of G is called a *block* of G if, first, H is connected; second, H has no cut vertices; third, H is maximal for these properties.

A block H of $\Gamma(\mathcal{D})$ is said to be *homogeneous* if all edges of H have the same crossing type, which is either positive or negative. The diagram $\mathcal{D}$ is said to be *homogeneous* if each block of $\Gamma(\mathcal{D})$ is homogeneous.

For example, any alternating diagram is homogeneous.

A diagram $\mathcal{D}$ is said to be *positive* if all crossings of $\mathcal{D}$ are positive. A link $\mathcal{L}$ is said to be *homogeneous* (resp. positive) if $\mathcal{L}$ admits a homogeneous (resp. positive) diagram.

Note that all prime knots up to nine crossings except 8_{20}, 8_{21}, 9_{42}, 9_{44}, 9_{45}, 9_{46}, and 9_{48} are homogeneous.

Homogeneous links admit the following equivalent definition. The Seifert circles of a link diagram $\mathcal{D}$ divide the 2-sphere into regions. We say that $\mathcal{D}$ is *uniform* if, within each such region, all crossings of $\mathcal{D}$ have the same type. If $\mathcal{D}$ is uniform, then $\mathcal{D}$ is homogeneous. In general, the converse does not hold. However, for any homogeneous diagram $\mathcal{D}$, one can use flips to transform $\mathcal{D}$ into a new diagram $\mathcal{D}'$ representing the same link such that $\mathcal{D}'$ is uniform. Thus, a link $\mathcal{L}$ is homogeneous if and only if $\mathcal{L}$ admits a uniform diagram.

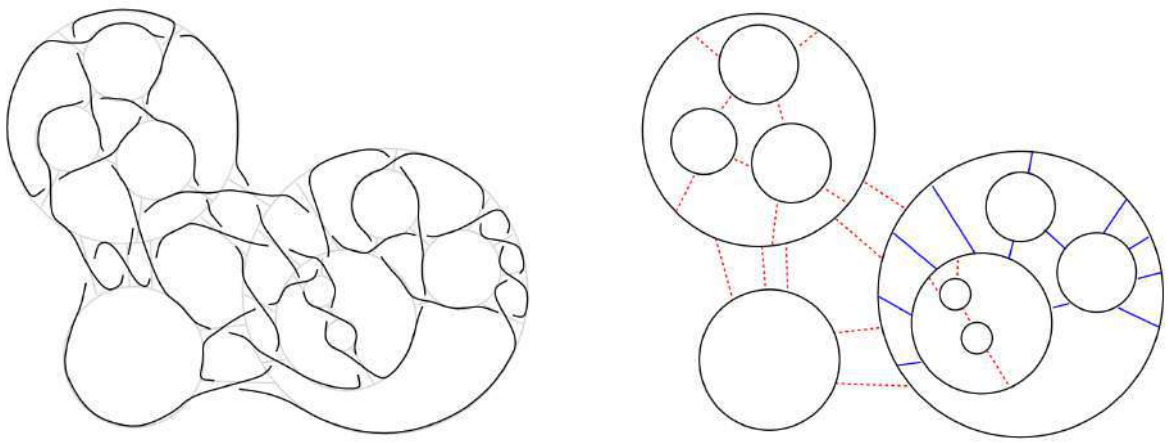


FIGURE 5. An example of a homogeneous link diagram $\mathcal{D}$ (on the left). The union of Seifert circles of $\mathcal{D}$ with an indication of crossing types (on the right). The orientation is omitted. The picture was taken from [18].

In contrast to alternating diagrams, there are non-minimal reduced homogeneous ones (for example, see Figure 12 in [11]). Also, some positive links admit both non-minimal positive diagrams and non-homogeneous minimal ones (for example, $11n_{183}$, see [26]). In [11] (see Questions 1 and 2), the author suggests studying minimal diagrams of homogeneous links. Our results show that there are sufficient conditions on a homogeneous diagram so that it is minimal. In particular, we describe a new class of minimal homogeneous diagrams.

Let us provide more reasons to study homogeneous diagrams. A natural question is whether one can read off topological properties of the link given by a diagram $\mathcal{D}$ (such as knottedness, splitness, and primeness) from $\mathcal{D}$.

In some sense, homogeneous links are visually knotted. Namely, a homogeneous link $\mathcal{L}$ is trivial if and only if for some (and hence any) homogeneous diagram $\mathcal{D}$ of $\mathcal{L}$, $\Gamma(\mathcal{D})$ has no cycles (see Theorem 3 in [11] and Corollary 7.6.3 in [3]). Recall that a link $\mathcal{L}$ is said to be *split* if $\mathcal{L}$ admits a disconnected diagram. Homogeneous links are visually split, that is, a homogeneous link $\mathcal{L}$ is split if and only if some (and hence any) homogeneous diagram of $\mathcal{L}$ is disconnected (see Corollary 3.1 in [11] and Corollary 7.6.4 in [3]). Finally, in [15], the author conjectured that homogeneous links are visually prime, that is, a homogeneous link $\mathcal{L}$ is prime if and only if some (and hence any) homogeneous diagram of $\mathcal{L}$ is prime. The conjecture holds for both alternating (see Theorem 1 in [16] and Theorem 4.4 in [6]) and positive links (see Theorem 1.4 in [14] and Theorem 1.2 in [15]).

In contrast to alternating links, for homogeneous ones, many questions remain unsolved. In particular, no analog of the flyping conjecture (see below) has been found for homogeneous links so far.

1.1. **The skein polynomial.** Before introducing the main results of the present thesis, we need some more preliminaries.

In [24, 25], the authors proved that there is a unique function that maps each link diagram $\mathcal{D}$ to a two-variable Laurent polynomial $P(\mathcal{D};a,z)\in\mathbb{Z}[a^{\pm1},z^{\pm1}]$ such that:

(1) If two link diagrams $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ represent the same link, then $P(\mathcal{D};a,z)=P(\mathcal{D}';a,z)$.
(2) One has

$$aP(\mathcal{D}_+;a,z)-a^{-1}P(\mathcal{D}_-;a,z)=zP(\mathcal{D}_0,a,z)$$

whenever $\mathcal{D}_+$, $\mathcal{D}_0$, and $\mathcal{D}_-$ are link diagrams that coincide except at a small region where the diagrams are presented as in Figure 4, respectively.
(3) If $\mathcal{D}$ is a knot diagram without crossings, then $P(\mathcal{D};a,z)=1$.

The polynomial $P(\mathcal{D};a,z)$ is referred to as the *skein polynomial*, the *HOMFLY polynomial*, the *HOMFLY-PT polynomial*, the *generalized Jones polynomial*, and the *twisted Alexander polynomial* of $\mathcal{D}$. The second condition is referred to as the *skein relation*.

Given a link $\mathcal{L}$, let $P(\mathcal{L};a,z):=P(\mathcal{D};a,z)$ for some (and hence any) diagram $\mathcal{D}$ of $\mathcal{L}$. The skein polynomial is a generalization of the Jones polynomial. Namely, for any link $\mathcal{L}$, one has

$$V_{\mathcal{L}}(t)=P(\mathcal{L};t,t^{1/2}-t^{-1/2}).$$

Denote by $s(\mathcal{D})$ the number of Seifert circles of $\mathcal{D}$ and by $|\mathcal{D}|$ the number of crossings of $\mathcal{D}$. Denote by $\omega(\mathcal{D})$ the *writhe* of $\mathcal{D}$, that is, the difference between the number of positive and the number of negative crossings of $\mathcal{D}$. A diagram $\mathcal{D}$ of a link $\mathcal{L}$ is said to be *optimal* if $\mathcal{D}$ has the least number of Seifert circles among all diagrams of $\mathcal{L}$.

The relationship between $s(\mathcal{D})$ and the skein polynomial is analogous to the relationship between $|\mathcal{D}|$ and the Jones polynomial. The analogy is as follows.

Let $Q_i(\mathcal{L};z)\in\mathbb{Z}[z^{\pm1}]$ be polynomials such that $P(\mathcal{L};a,z)=\sum_{i=e}^{E}Q_i(\mathcal{L};z)a^i$, $Q_e(\mathcal{L};z)\neq0$, and $Q_E(\mathcal{L};z)\neq0$. In [29] (see Theorem 1), the author proved that for any diagram $\mathcal{D}$ of $\mathcal{L}$, one has

$$-\omega(\mathcal{D})-(s(\mathcal{D})-1)\le e\le E\le-\omega(\mathcal{D})+(s(\mathcal{D})-1). \tag{1.1}$$

In particular,

$$(E-e)/2+1\le s(\mathcal{D}). \tag{1.2}$$

The latter is referred to as the *Morton–Franks–Williams inequality*. Given a link diagram $\mathcal{D}$, we say that (1.2) is *sharp* for $\mathcal{D}$ if $(E-e)/2+1=s(\mathcal{D})$. In this case, $\mathcal{D}$ is optimal. Note that (1.2) is sharp if and only if both outer inequalities in (1.1) are sharp.

Note that all prime knots up to 10 crossings except 9_{42}, 9_{49}, 10_{132}, 10_{150}, and 10_{156} admit diagrams, for which the Morton–Franks–Williams inequality (1.2) is sharp. The same is true for all closed positive braids with ≤3 strands (see Proposition 3.1 in [33]), fibered alternating links (see Theorem A in [28]), rational links (see Theorem B in [28]), and GMM ones (see Corollary 4.3 in [31]). Also, in [31], the authors proved that given a positive braid diagram $\mathcal{D}$, the Morton–Franks–Williams inequality (1.2) is sharp for the Alexander closure of $\mathcal{D}$ if and only if $\mathcal{D}$ is a GMM braid diagram.

Let $P_i(\mathcal{L};a)\in\mathbb{Z}[a^{\pm1}]$ be polynomials such that $P(\mathcal{L};a,z)=\sum_{i=m}^{M}P_i(\mathcal{L};a)z^i$, $P_m(\mathcal{L};a)\neq0$, and $P_M(\mathcal{L};a)\neq0$. In [29] (see Theorem 2), the author proved that for any diagram $\mathcal{D}$ of $\mathcal{L}$, one has

$$M\le|\mathcal{D}|-s(\mathcal{D})+1. \tag{1.3}$$

By combining (1.2) and (1.3), one has

$$M + (E - e)/2 \le |\mathcal{D}|.$$

Remark 1.1. The inequality (1.3) is sharp for all homogeneous diagrams (see Theorem 4 in [11], Theorem 7.6.2 in [3], and Theorem 6 in [12]). Besides, (1.3) is sharp for an almost positive diagram of a prime knot $12n_{149}$, which is not homogeneous.

Remark 1.2. Suppose (1.3) is sharp for $\mathcal{D}$. If $\mathcal{D}$ is optimal, then $\mathcal{D}$ is minimal. Indeed, for any diagram $\mathcal{D}'$ of the same link $\mathcal{L}$, one has

$$|\mathcal{D}| = M + s(\mathcal{D}) - 1 \le (|\mathcal{D}'| - s(\mathcal{D}') + 1) + s(\mathcal{D}) - 1 \le |\mathcal{D}'|.$$

This result was firstly observed in [28] (see Proposition 7.4). Moreover, in this case, any minimal diagram of $\mathcal{L}$ is optimal. Indeed, for any minimal diagram $\mathcal{D}'$ of $\mathcal{L}$, one has

$$s(\mathcal{D}') \le |\mathcal{D}'| - M + 1 = |\mathcal{D}'| - (|\mathcal{D}| - s(\mathcal{D}) + 1) + 1 = s(\mathcal{D}).$$

1.2. **Braids and links.** We follow [49] and generalize the Alexander closure of braids construction. By using this construction, in the next subsection, we describe a new class of link diagrams, for which the Morton–Franks–Williams inequality (1.2) is sharp.

Let $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_s\}$ be a set of disjoint oriented circles on the 2-sphere S^2 and

$$\|\cdot\| : \mathcal{C} \longrightarrow \{1, 2, \dots\}$$

be an arbitrary function, which is referred to as a *weight function*. Let $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ be a set of disjoint oriented simple closed arcs on S^2. A triple $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ is called a *system of weighted circles* if for all $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, and $x \in (C_i \cap \alpha_j) \cup \partial\alpha_j$, there is a neighborhood of x diffeomorphic to one of the pictures shown in Figure 6.

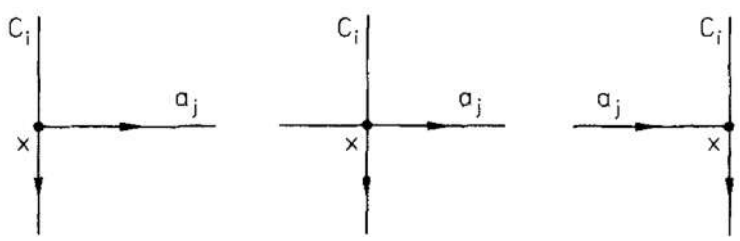


FIGURE 6. Any point $x \in (C_i \cap \alpha_j) \cup \partial\alpha_j$ has a neighborhood that looks like one of these.

Let $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ be a system of weighted circles. Given $\alpha \in \mathcal{A}$, denote by $\|\alpha\|$ the sum of weights of all circles intersecting α. Note that for all $\alpha \in \mathcal{A}$, the arc α intersects each circle $C \in \mathcal{C}$ no more than once, and $\|\alpha\| \ge 2$. A function

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \{\sigma_i^{\pm 1} \mid i \in \{1, 2, 3, \dots\}\}^*$$

is called a *braid placement* if for all $\alpha \in \mathcal{A}$, one has

$$\pi(\alpha) \in \{\sigma_i^{\pm 1} \mid i \in \{1, 2, \dots, \|\alpha\| - 1\}\}^*.$$

Any braid placement π determines a link diagram as follows. First, for each $C \in \mathcal{C}$, replace C by $\|C\|$ concentric circles (see Figure 7). Second, for each $\alpha \in \mathcal{A}$, insert a braid diagram corresponding to $\pi(\alpha)$ according to the orientation. We say that the resulting link is determined by π. Note that any link diagram arises this way.

Let $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ be a system of weighted circles. Each connected component of

$$\left(\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C\right)\cup\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha\right)$$

determines a division of S^2 into regions. The system $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ is said to be *reduced* if, for each such connected component, no topological disk region has precisely four distinct sides.

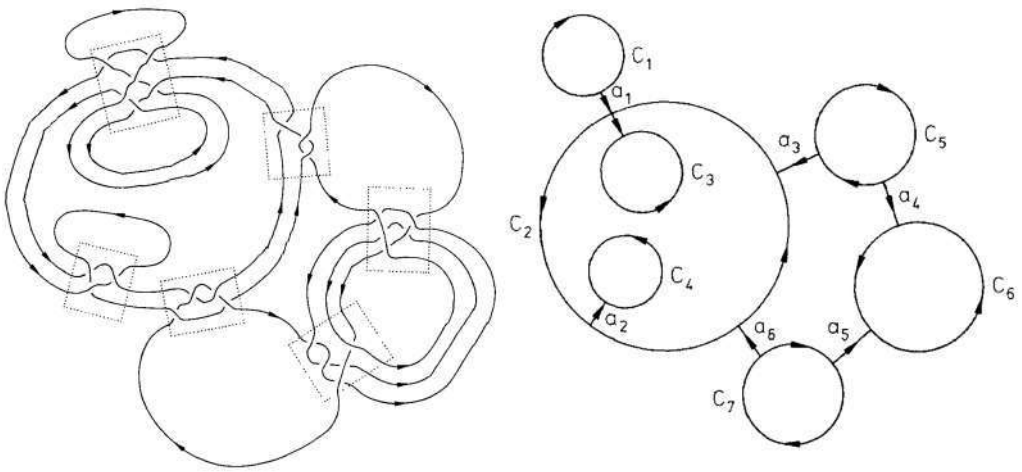


FIGURE 7. A link diagram determined by a braid placement.

1.3. **Solid links.** In this subsection, we describe our main results concerning the new class of link diagrams, referred to as *solid* ones.

In [50], J. Stallings introduced the concept of homogeneous braid words. Namely, given $r_1, \ldots, r_{n-1} \in \{1, -1\}$, a braid word w is said to be $(r_1, \ldots, r_{n-1})$-homogeneous if w contains none of the letters $\sigma_1^{-r_1}, \sigma_2^{-r_2}, \ldots, \sigma_{n-1}^{-r_{n-1}}$. We say that a word w is *homogeneous* whenever w is $(r_1, \ldots, r_{n-1})$-homogeneous for some $r_1, \ldots, r_{n-1}$. A braid is said to be *homogeneous* if it has a homogeneous braid word representative.

For example, any positive braid diagram is homogeneous. It is easy to check that the Alexander closure of a homogeneous braid diagram is a homogeneous link diagram.

Given $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ such that $i < j$, let

$$\delta_{i,j} := (\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_{j-1}\sigma_j)(\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_{j-1})\ldots(\sigma_i\sigma_{i+1})\sigma_i. \tag{1.4}$$

The braid $\Delta_{1,n}$ determined by $\delta_{1,n}$ is referred to as the *half twist*, the *fundamental braid*, and the *Garside element* in B_n. The braid $\Delta_{1,n}^2$ is referred to as the *full twist*.

Let $r_1, \ldots, r_{n-1} \in \{1, -1\}$. Let $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ be such that $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_m = n$ and for all $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, one has $r_{i_k} = r_{i_k+1} = \ldots = r_{i_{k+1}-1}$ and $r_{i_{k+1}-1} \neq r_{i_{k+1}}$.

Let $\mathcal{H}^+(r_1, \ldots, r_{n-1})$ (resp. $\mathcal{H}^-(r_1, \ldots, r_{n-1})$) be the class of all $(r_1, \ldots, r_{n-1})$-homogeneous braid words w such that for each $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ such that $r_{i_k} = 1$ (resp. $r_{i_k} = -1$), the braid word obtained from w by deleting all letters except $\sigma_{i_k}^{\pm 1}, \sigma_{i_k+1}^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{i_{k+1}-1}^{\pm 1}$ admits a decomposition of the form $v_1v_2v_3$ such that both v_1 and v_3 represent $\Delta_{i_k,i_{k+1}}$ (resp. $\Delta_{i_k,i_{k+1}}^{-1}$).

Let $\mathcal{H}^+$ (resp. $\mathcal{H}^-$) be the union of all $\mathcal{H}^+(r_1, \ldots, r_{n-1})$ (resp. $\mathcal{H}^-(r_1, \ldots, r_{n-1})$), where $n \geq 2$ and $r_1, \ldots, r_{n-1} \in \{1, -1\}$. An element of $\mathcal{H}^+$ (resp. $\mathcal{H}^-$) is called a *+solid* (resp. *−solid*) braid word. An element of $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}^-$ is called a *solid* braid word.

For example, all braid diagrams shown in Figure 2 correspond to solid braid words.

Definition 1.3. Let $\# \in \{+,-\}$. Let $(\mathcal{C},\mathcal{A},\|\cdot\|)$ be a reduced system of weighted circles and π be a braid placement. The braid placement π is said to be $\#solid$ (resp. *solid*) if for all $\alpha \in \mathcal{A}$, one has $\pi(\alpha) \in \mathcal{H}^{\#}$ (resp. $\pi(\alpha) \in \mathcal{H}^{+} \cap \mathcal{H}^{-}$). In this case, the link diagram $\mathcal{D}$ determined by π is said to be $\#solid$ (resp. *solid*). A link is said to be *solid* if it admits a solid diagram.

By using methods of [1, 2], we show that all solid diagrams are optimal. In particular, those of them, for which (1.3) is sharp, are minimal. For the corresponding links, the crossing number is equal to $M + (E - e)/2$.

Theorem 1.4. The Morton–Franks–Williams inequality (1.2) is sharp for all solid diagrams.

Corollary 1.5. All solid diagrams are optimal.

Remarks 1.1 and 1.2 imply the following results.

Corollary 1.6. All solid homogeneous diagrams are minimal.

Corollary 1.7. The Alexander closure of a homogeneous braid diagram is minimal whenever the corresponding braid word is solid.

For example, all closed positive braid diagrams with the full twist are solid. The sharpness result for them is well known (see Corollary 2.4 in [30], Theorem 10.5.1 in [3], Corollary 4.5 in [31], Theorem 1.3 in [32], and Corollary 1.4 in [34]). In particular, all torus links are solid.

If for a link diagram $\mathcal{D}$, there exist two Seifert circles that share exactly one common crossing, then $\mathcal{D}$ is not optimal. Namely, one can apply a transformation that reduces the number of Seifert circles. The transformation is referred to as the *Murasugi–Przytycki move* (see Definition 2.1 in [27]).

It follows that some reduced alternating (and hence minimal) diagrams are not optimal (compare with Remark 1.2 above). Still, if for an alternating diagram $\mathcal{D}$, any two Seifert circles of $\mathcal{D}$ have either no common crossings or at least two common crossings, then the corresponding alternating link is solid. The sharpness of the Morton–Franks–Williams inequality (1.2) for solid alternating links was firstly observed in [2] (see Theorem 1.1).

The non-homogeneous solid diagram $\mathcal{D}$ shown in Figure 8 is minimal, but (1.3) is not sharp for $\mathcal{D}$. At the same time, there exist non-minimal solid diagrams.

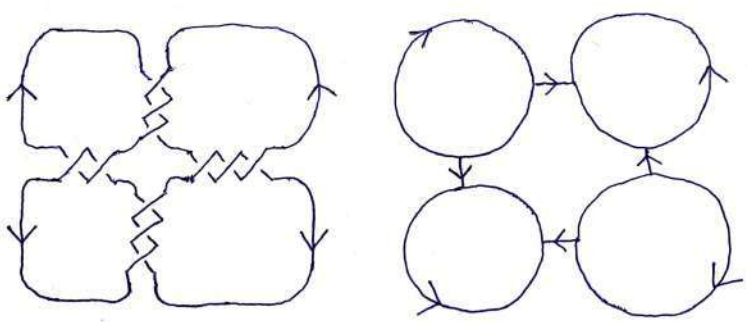


FIGURE 8. A solid non-homogeneous diagram of $11n_{74}$ and the corresponding system of weighted circles.

Among the 36 prime knots with ≤ 8 crossings, there are 4 torus and 14 solid alternating ones. Besides, among the 49 prime knots with 9 crossings, there are 1 torus and 16 solid alternating ones. The second and the third braid diagrams shown in Figure 2 provide solid homogeneous

diagrams of 9_{43} and 9_{47}. Both 9_{43} and 9_{47} admit neither adequate nor reduced Montesinos nor GMM link diagrams. Thus, Corollary 1.7 provides the first non-brute-force proof of the following result.

Corollary 1.8. The crossing number of both 9_{43} and 9_{47} is 9.

A well-known conjecture states that the crossing number is additive under connected sums, that is, connected sums of minimal link diagrams are minimal (see Problem 1.65 in [19], [20], and p. 69 in [9]). The latter is still open in general. Since connected sums of adequate (resp. GMM) diagrams are adequate (resp. GMM), the conjecture holds for both adequate and GMM diagrams. Also, connected sums of minimal diagrams of torus links are minimal (see Theorem 3.8 in [21] and Corollary 3.6 in [22]). Note that connected sums of solid homogeneous diagrams are solid homogeneous. Corollary 1.6 implies the following result.

Corollary 1.9. The conjecture that the crossing number is additive under connected sums holds for all solid homogeneous links.

Following [23], we say that a minimal diagram $\mathcal{D}$ is 1-*regular* if for any diagram $\mathcal{D}'$, the crossing numbers of links determined by connected sums of $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ are bounded from below by the number of crossings of $\mathcal{D}$. If the additivity of crossing number conjecture holds, then any minimal link diagram is 1-regular. By using properties of the Kauffman polynomial, one can show that all adequate diagrams are 1-regular. Also, all minimal diagrams of torus links are 1-regular (see Theorem 3.8 in [21]). In [21] (see Theorem 3.8), the author provided a sufficient condition on a link diagram to be 1-regular. By using Corollary 4.1 in [11], one can show that optimal homogeneous diagrams satisfy the condition. In particular, all GMM diagrams are 1-regular. Also, Corollary 1.5 implies the following result.

Corollary 1.10. All solid homogeneous diagrams are 1-regular.

Our next step is to study minimal diagrams of solid links. Recall that any minimal diagram of a prime alternating link is alternating and that some positive links admit non-positive minimal diagrams. Still, any minimal diagram of an alternating link is homogeneous. We propose the following conjecture.

Conjecture 1.11. Suppose a link $\mathcal{L}$ admits a solid homogeneous diagram. Then any minimal diagram of $\mathcal{L}$ is homogeneous.

It is not hard to check that if the Morton–Franks–Williams inequality (1.2) is sharp for a link diagram $\mathcal{D}$, then any two optimal diagrams of $\mathcal{L}$ have the same writhe. In particular (see Remark 1.2), any minimal diagram of a solid positive link is positive. Thus, Conjecture 1.11 holds for all solid positive links.

1.4. **Homogeneous braids.** In this subsection, we describe our results concerning braid diagrams. The latter provide reasons to believe that Conjecture 1.11 holds.

Let us introduce the following equivalence relations on the set of all braid diagrams with n strands:

(1) to represent the same element of $\mathcal{B}_n$;
(2) to represent conjugate elements of $\mathcal{B}_n$;
(3) to represent the same link via the Alexander closure.

Note that (1) implies (2) and (2) implies (3). One treats equivalence classes generated by the second equivalence relation as braids in the solid torus $[0,1]\times[0,1]\times S^1$.

A braid diagram is said to be *minimal* if it has the least possible number of crossings among all braid diagrams representing the same braid. The number of crossings of a minimal diagram of a braid is called the crossing number of the braid. A braid $\beta \in \mathcal{B}_n$ is said to be of *minimal conjugacy length* if β has the smallest crossing number among all braids in the conjugacy class $\{\delta^{-1}\beta\delta \mid \delta \in \mathcal{B}_n\}$. A braid diagram $\mathcal{D}$ is said to be of *minimal conjugacy length* if $\mathcal{D}$ is minimal, and the corresponding braid is of minimal conjugacy length.

Proposition 1.12. Let $r_1, \ldots, r_{n-1} \in \{1, -1\}$ and β be a $(r_1, \ldots, r_{n-1})$-homogeneous braid. A diagram $\mathcal{D}$ of β is minimal if and only if $\mathcal{D}$ is $(r_1, \ldots, r_{n-1})$-homogeneous.

Corollary 1.13. A diagram $\mathcal{D}$ of a homogeneous braid is minimal if and only if $\mathcal{D}$ is homogeneous.

A basis of the proof of Proposition 1.12 is an analog of the Conway polynomial for tangles.

Proposition 1.14. Let β be a homogeneous braid. A diagram $\mathcal{D}$ of a braid in $\{\delta^{-1}\beta\delta \mid \delta \in B_n\}$ is of minimal conjugacy length if and only if $\mathcal{D}$ is homogeneous.

A basis of the proof of Proposition 1.12 is a three-variable polynomial invariant of braids, constructed in [41].

Note that some closed solid homogeneous braids admit non-braid-like minimal diagrams. For example, both 10_{138} and $12n_{706}$ admit both closed solid homogeneous braid diagrams (see the fourth and the fifth diagrams in Figure 2) and minimal diagrams whose Seifert circles are not concentric. However, all minimal knot diagrams of both 10_{138} and $12n_{706}$ are homogeneous.

2. The skein polynomial of solid links

In this section, we prove Theorem 1.4.

Recall a general principle that is used to calculate the skein polynomial. For a trivial link diagram $\mathcal{D}$ with n components, it is not hard to show that $\mathcal{P}(\mathcal{D}; a, z) = ((a - a^{-1})z^{-1})^{n-1}$.

Given a link diagram $\mathcal{D}$, let $\mathcal{T}$ be a rooted and edge-weighted binary tree, which is directed from a root, such that:

(1) each vertex of $\mathcal{T}$ is a link diagram;
(2) the root vertex of $\mathcal{T}$ is $\mathcal{D}$;
(3) each leaf vertex of $\mathcal{T}$ represents an unlink;
(4) each internal vertex has exactly two children vertices. The corresponding three link diagrams are identical except at one crossing, and they are related by one of the two possible relations at that crossing, as shown in Figure 9.

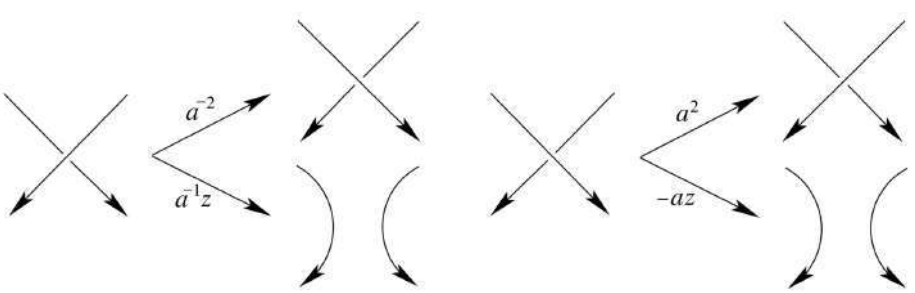


Figure 9. The edge weight assignment for a resolving tree.

The tree $\mathcal{T}$ is called a *resolving tree* (for the skein polynomial) of $\mathcal{D}$. One treats the resolving tree as a parsing tree.

Any link diagram admits a resolving tree (see below). In general, there are several resolving trees for a given diagram.

Remark 2.1. Any resolving tree $\mathcal{T}$ of $\mathcal{D}$ gives rise to a decomposition of $\mathcal{P}(\mathcal{D};a,z)$ as a sum, which is indexed by leaf vertices of $\mathcal{T}$, as follows. Note that the skein relation admits the following equivalent forms:

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_+;a,z) = a^{-2}\mathcal{P}(\mathcal{D}_-;a,z) + a^{-1}z\mathcal{P}(\mathcal{D}_0,a,z),$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_-;a,z) = a^{2}\mathcal{P}(\mathcal{D}_+;a,z) - az\mathcal{P}(\mathcal{D}_0,a,z).$$

Let $\mathcal{U}$ be a leaf vertex of $\mathcal{T}$. Denote by $\gamma(\mathcal{U})$ the number of link components of $\mathcal{U}$. Let P be a unique path on $\mathcal{T}$ from the root vertex $\mathcal{D}$ to the leaf vertex $\mathcal{U}$. It is easy to see that the contribution of $\mathcal{U}$ to $\mathcal{P}(\mathcal{D};a,z)$ is $((a-a^{-1})z^{-1})^{\gamma(\mathcal{U})-1}$ multiplied by the weights of the edges in P. Let $t(\mathcal{U})$ be the number of crossings of $\mathcal{D}$ that one smoothed in obtaining $\mathcal{U}$, and $t^-(\mathcal{U})$ be the number of negative crossings among the smoothed ones. As Figure 9 shows, the degree of a in the weight of an edge is exactly the change of writhe from the starting vertex of the edge to the ending vertex of the edge. Also, a z term in the weight of the edge indicates that the ending vertex is obtained from the starting vertex by a crossing smoothing and a negative sign in the weight indicates that the smoothed crossing is negative. It follows that

$$\mathcal{P}(\mathcal{D};a,z) = \sum_{\mathcal{U}\in\mathcal{T}_\circ} (-1)^{t^-(\mathcal{U})} z^{t(\mathcal{U})} a^{\omega(\mathcal{U})-\omega(\mathcal{D})} ((a-a^{-1})z^{-1})^{\gamma(\mathcal{U})-1},$$

where $\mathcal{T}_\circ$ is the set of leaf vertices of $\mathcal{T}$.

Remark 2.2. We think of a resolving tree as a graph of a branching process (in the sense of probability theory). Namely, at each internal vertex, one takes a crossing of the current link diagram and branch on smoothing and flipping the crossing. Hence, to construct a resolving tree, one can describe a rule that determines the corresponding crossings of intermediate link diagrams. The rule determines the evolution of the branching process.

With this idea in mind, we describe resolving trees introduced in [2].

2.1. **Two special classes of resolving trees.** By a point on a link diagram $\mathcal{D}$, we mean a point x on an arc of $\mathcal{D}$ such that x is not a crossing. By a point on a Seifert circle C of $\mathcal{D}$, we mean a point x on the intersection of C and $\mathcal{D}$.

Let $\mathcal{U}$ be a link diagram and $m = \gamma(\mathcal{D})$. Let $p_1, p_2, \ldots, p_m$ be a sequence of base points on $\mathcal{U}$ such that for $i \neq j$, the points p_i and p_j lie on distinct components of $\mathcal{U}$. One may travel through $\mathcal{D}$ by moving through each such component as follows. One starts at the first marked point p_1 and moves according to the orientation. As one reaches p_1 again, one chooses the second marked point p_2, starts moving according to the orientation. Then one continues similarly. Such travel is said to be *natural*.

During this process, one visits each crossing of $\mathcal{U}$ exactly twice. A crossing of $\mathcal{U}$ is said to be *descending* (resp. *ascending*), if one travels along the overpassing (resp. underpassing) strand first. The diagram $\mathcal{U}$ is said to be *descending* (resp. *ascending*) if each crossing of $\mathcal{U}$ is descending (resp. ascending). Note that if $\mathcal{U}$ is descending (resp. ascending), then the components of $\mathcal{U}$ are both layered from top to bottom (resp. from bottom to top) and represent unknots. In this case, $\mathcal{U}$ represents an unlink.

Choose an arbitrary base point x on $\mathcal{U}$. Then travel through $\mathcal{U}$ according to the orientation. Denote by $\mathcal{M}(\mathcal{U};x)$ the longest path starting at x one traveled before meeting either x or

an ascending crossing, that is, a crossing such that one meets its underpassing strand first. The path $\mathcal{M}(\mathcal{U};x)$ is called a maximal descending path on $\mathcal{U}$ starting at x.

One defines a maximal ascending path of $\mathcal{U}$ starting at x similarly.

Following [2], we construct two special classes of resolving trees, which we call X-*coherent* and Y-*coherent*. First, we describe a class of resolving trees, referred to as *descending* ones.

Let $\mathcal{D}$ be a link diagram. Let us describe a descending resolving tree $\mathcal{T}$ of $\mathcal{D}$. The construction of the tree consists of several phases. One starts with the one vertex tree $\mathcal{T}_0$. At the end of the kth phase, one obtains a rooted subtree $\mathcal{T}_k$ of $\mathcal{T}$. The resulting subtrees satisfy

$$\{\mathcal{D}\} = \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{T}_m = \mathcal{T}.$$

Thus, one obtains each of the trees from the previous one by extensions shown in Figure 9.

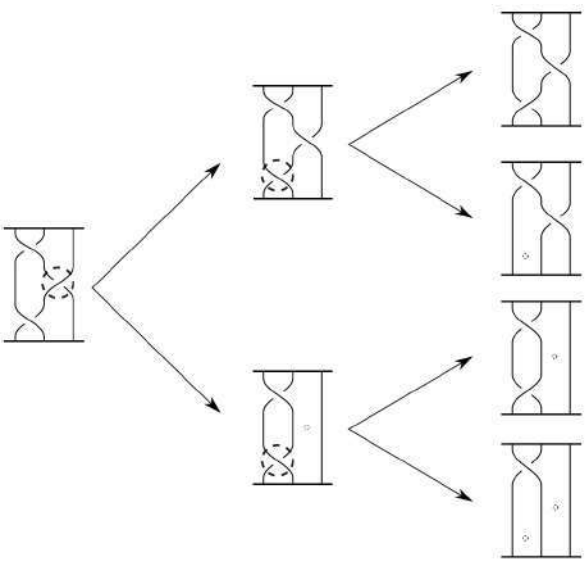


FIGURE 10. An example of a descending resolving tree. For each vertex of the tree, the base point is the input of another leftmost strand.

In the first phase, one chooses an arbitrary base point x_1 on $\mathcal{D}$. One finds the maximal descending path $\mathcal{M}(\mathcal{D};x_1)$ on $\mathcal{D}$ starting at x_1. If $\mathcal{M}(\mathcal{D};x_1)$ is closed, that is, $\mathcal{M}(\mathcal{D};x_1)$ is the whole link component of $\mathcal{D}$ containing x_1, the phase ends. Assume $\mathcal{M}(\mathcal{D};x_1)$ is not closed. In this case, one extends the current tree at a crossing of $\mathcal{D}$ that is the end of the path $\mathcal{M}(\mathcal{D};x_1)$, see Figure 9. At this moment, the tree $\mathcal{T}_1$ consists of three vertices: a parent $\mathcal{D}$ and its children $\mathcal{D}'$ and $\mathcal{D}''$. Then one finds the maximal descending path $\mathcal{M}(\mathcal{D}';x_1)$ on $\mathcal{D}'$ starting at x_1. If $\mathcal{M}(\mathcal{D}';x_1)$ is not closed, one extends the current tree $\mathcal{T}_1$ similarly by adding children of $\mathcal{D}'$. One repeats the same procedure for all leaf vertices $\mathcal{U}$ of the current tree $\mathcal{T}_1$. At the end of the first phase, for each leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}_1$, the maximal descending path $\mathcal{M}(\mathcal{U};x_1)$ on $\mathcal{U}$ starting at x_1 is closed. In this case, $\mathcal{M}(\mathcal{U};x_1)$ is the link component of $\mathcal{U}$ containing x_1. If each leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}_1$ is a knot diagram, the construction of $\mathcal{T}$ ends. Otherwise, one moves to the next phase.

In the second phase, one extends $\mathcal{T}_1$ as follows. For each leaf vertex $\mathcal{V}$ of $\mathcal{T}_1$, one chooses an arbitrary base point x_2 on a link component of $\mathcal{V}$ distinct from that of containing x_1. Note that the point x_2 depends on $\mathcal{V}$. One finds the maximal descending path $\mathcal{M}(\mathcal{V};x_2)$ on $\mathcal{U}$ starting at x_2. If $\mathcal{M}(\mathcal{V};x_2)$ is not closed, one extends the current tree at a crossing of $\mathcal{V}$ that is the

end of the path $\mathcal{M}(\mathcal{V}; x_2)$. One continues similarly. The second phase continues until for each leaf vertex $\mathcal{V}$ of the current tree $\mathcal{T}_2$, the path $\mathcal{M}(\mathcal{V}; x_2)$ is closed. In this case, $\mathcal{M}(\mathcal{V}; x_2)$ is the link component of $\mathcal{V}$ containing x_2.

One repeats the same procedure until all leaf vertices of the current tree are descending diagrams. Since any descending diagram represents an unlink, the resulting tree $\mathcal{T}$ is a resolving tree.

By varying the base points on the leaf vertices of $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_{m-1}$, one obtains a few descending resolving trees of $\mathcal{D}$. One may think of them as branching processes.

See Figure 10 for a descending resolving tree example of the Alexander closure of $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$. For the sake of simplicity, the vertices are presented as braid diagrams.

The descending resolving trees introduced in [11] (see Theorem 2). Also, see the Hoste approach in [24] and Lemma 7.5.1 in [3].

We are in the position of describing X-coherent and Y-coherent resolving trees. Here and below, we assume that all link diagrams lie on the oriented plane $\mathbb{R}^2$. Thus, one may distinguish clockwise and counterclockwise Seifert circles of $\mathcal{D}$.

Let $\mathcal{D}$ be a link diagram. Let us describe an X-coherent resolving tree $\mathcal{T}$ of $\mathcal{D}$. The construction of the tree consists of several phases. One starts with the one vertex tree $\mathcal{T}_0$. At the end of the kth phase, one obtains a rooted subtree $\mathcal{T}_k$ of $\mathcal{T}$. The resulting subtrees satisfy

$$\{\mathcal{D}\} = \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{T}_m = \mathcal{T}.$$

Thus, one obtains each of the trees from the previous one by extensions shown in Figure 9.

Following Remark 2.2, one defines two rules called descending and ascending ones. In the descending rule, one keeps a descending crossing unchanged and branches on flipping and smoothing an ascending one. In the ascending rule, one does just the opposite, that is, keeps an ascending crossing currently visited, and branches on flipping and smoothing a descending one.

At each phase, one follows either the descending or ascending rule. By definition, one follows the descending rule if and only if the Seifert circle C containing a current base point x is clockwise.

More precisely, in the first phase, one chooses an arbitrary base point x_1 on $\mathcal{D}$. One finds the maximal descending (resp. ascending) path of $\mathcal{D}$ starting at x_1 whenever the corresponding Seifert circle is clockwise (resp. counterclockwise). If the path is not closed, one extends the current tree at a crossing of $\mathcal{D}$ that is the end of the path, see Figure 9. One repeats the same procedure for all leaf vertices $\mathcal{U}$ of the current tree $\mathcal{T}_1$. At the end of the first phase, for each leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}_1$, the maximal descending (resp. ascending) path of $\mathcal{U}$ starting at x_1 is closed. If each leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}_1$ is a knot diagram, the construction ends.

In the second phase, one extends $\mathcal{T}_1$ as follows. For each leaf vertex $\mathcal{V}$ of $\mathcal{T}_1$, one chooses an arbitrary base point x_2 on a link component of $\mathcal{V}$ distinct from that of containing x_1. Note that the point x_2 depends on $\mathcal{V}$. One finds the maximal descending (resp. ascending) path of $\mathcal{V}$ starting at x_2 whenever the corresponding Seifert circle is clockwise (resp. counterclockwise). If the path is not closed, one extends the current tree at a crossing of $\mathcal{V}$ that is the end of the path. One continues similarly. The second phase ends when for each leaf vertex $\mathcal{V}$ of the current tree $\mathcal{T}_2$, the maximal descending (resp. ascending) path of $\mathcal{V}$ starting at x_2 is closed.

One repeats the same procedure until for each leaf vertex $\mathcal{U}$ of the current tree, all link components of $\mathcal{U}$ are visited. This completes the construction of $\mathcal{T}$.

It is easy to see that for any leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}$, each link component of $\mathcal{U}$ is either descending or ascending. Also, the link components of $\mathcal{U}$ are stacked over each other. Thus, $\mathcal{U}$ represents an unlink. Therefore, $\mathcal{T}$ is a resolving tree.

By varying the base points on the leaf vertices of $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_{m-1}$, one obtains a few X-coherent resolving trees of $\mathcal{D}$.

One defines a class of Y-coherent resolving trees similarly. Namely, one follows the descending rule if and only if the Seifert circle containing a current base point is counterclockwise.

To prove Theorem 1.4, we use specific X-coherent and Y-coherent resolving trees, which we define below.

2.2. **Castle structure for link diagrams.** Following [2], we describe an additional structure for a link diagram, which is called a *castle*. The castle consists of several segments on Seifert circles, which are called *floors*, and several crossings between them, which are called *ladders*.

Let $\mathcal{D}$ be a link diagram. A Seifert circle C of $\mathcal{D}$ is said to be *innermost* if C does not bound any other Seifert circle inside it.

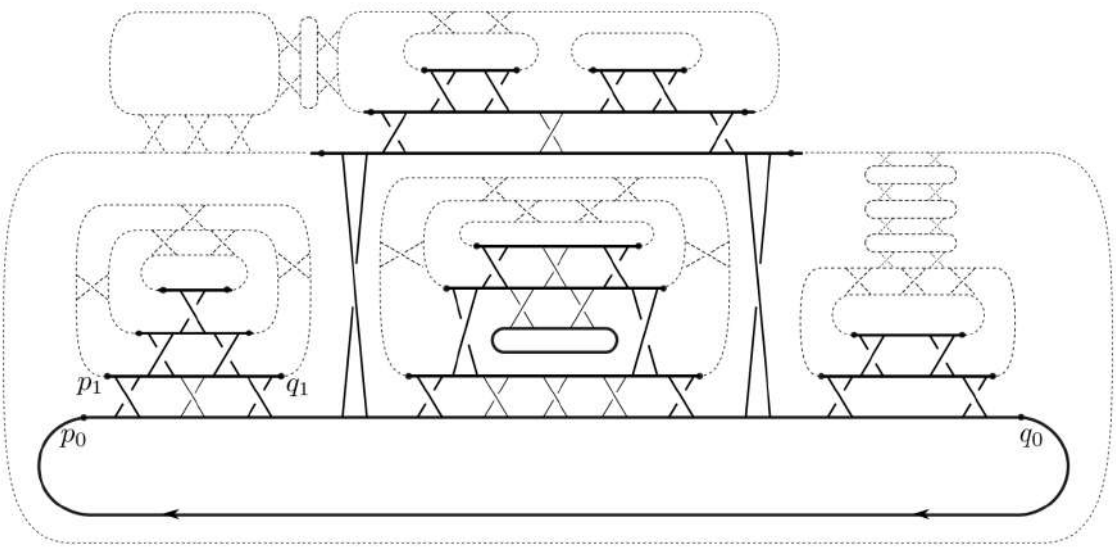


FIGURE 11. An example of a castle.

Let C be an innermost Seifert circle of $\mathcal{D}$. Choose a base point on C. If C has no adjacent crossings, the castle is empty. Assume C is adjacent to at least one crossing of $\mathcal{D}$. Starting at x and following the orientation of C, one orders the crossings adjacent to C, as shown in Figure 11. Since C is innermost, the crossings lie on the same side of C. Denote by p_0 and q_0 the ends of a segment on C that involves all of the crossings such that p_0 is the base point and q_0 is the point immediately after the last crossing adjacent to C. This segment of C is called a *floor of level* 0.

Let C' be a Seifert circle of $\mathcal{D}$ that shares common crossings with C. Let p_1 and q_1 be two points on C' immediately before the first common crossing and immediately after the last common crossing, respectively. The segment of C' between p_1 and q_1 is called a *floor of level* 1. If C shares common crossings with another Seifert circle of $\mathcal{D}$, one constructs another floor of level 1 similarly. Eventually, one constructs all floors of level 1 of the castle.

Let C' be a Seifert circle containing a floor F of level 1. If F has no common crossings with other Seifert circles of $\mathcal{D}$, then F terminates. Note that one allows C' to have adjacent crossings, not lying directly on F. Assume F has common crossings with other Seifert circles of $\mathcal{D}$. Starting at p_1 and following the orientation of C', one orders these crossings. Note that they may lie on both sides of F. Let C'' be a Seifert circle of $\mathcal{D}$ that shares common crossings with F. Let p_2 and q_2 be two points on C'' immediately before the first common crossing and immediately after the last common crossing, respectively. The segment of C'' between p_2 and q_2 is called a *floor of level* 2. If F shares common crossings with another Seifert circle of $\mathcal{D}$, one constructs another floor of level 2 adjacent to F similarly. After F is done, one moves to another floor of level 1. Eventually, one constructs all floors of level 2 of the castle.

One repeats the same procedure until one constructed all possible floors. A crossing s of $\mathcal{D}$ is called a *ladder* if s connects two floors of the castle. By definition, the resulting castle is a collection of all such floors and ladders.

It is easy to see that there may be more than one separate floor on top of any given floor. Let F_m be a top floor of level $m \geq 0$, F_{m-1} be the floor of level $m-1$ adjacent to F_m, F_{m-2} be the floor of level $m-2$ adjacent to F_{m-1}, and so on. The collection of floors $F_0, F_1, \ldots, F_m$ and all ladders between them is called a *tower* of the castle.

Remark 2.3. A castle has a unique floor of level 0 and several floors of higher levels. It is easy to see that any Seifert circle of $\mathcal{D}$ contains at most one floor of the castle. Note that there may be crossings of $\mathcal{D}$ that are not ladders of the castle and Seifert circles of $\mathcal{D}$ that do not contain floors of the castle. The castle is uniquely determined by the starting innermost Seifert circle C and a base point on it.

A castle is said to be *trapped* if there are two adjacent floors F_1 and F_2 and two adjacent ladders s_1 and s_2 connecting F_1 and F_2 such that the interior of the disk bounded by s_1, s_2, F_1, and F_2 contains a floor of the castle. In this case, the disk is called a *trap*. Otherwise, the castle is said to be *free*.

A castle shown in Figure 11 is trapped. Namely, there are two traps. Roughly speaking, a castle without trapped Seifert circles consists of several braid diagrams.

Let (C, x) be a pair consisting of an innermost Seifert circle C of $\mathcal{D}$ and a base point x on C. The pair (C, x) is said to be *appropriate* if the corresponding castle is free. Note that for a given link diagram, there may be several distinct appropriate pairs.

In [2] (see Lemma 4.3), the authors proved that any link diagram $\mathcal{D}$, there exists an innermost Seifert circle C of $\mathcal{D}$ and a base point x on it such that (C, x) is appropriate. By using the same argument, we prove the following result.

Let $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ be a system of weighted circles and π be a braid placement. Let $\mathcal{D}$ be the link diagram determined by π.

Lemma 2.4. There exists an appropriate pair (C, x) of $\mathcal{D}$ such that for all $\alpha \in \mathcal{A}$, if x lies on the braid diagram corresponding to $\pi(\alpha)$, then x is an input of a strand of $\pi(\alpha)$.

Proof. Let (C, x) be a pair consisting of an innermost Seifert circle C of $\mathcal{D}$ and a base point x on C such that for all $\alpha \in \mathcal{A}$, if x lies on the braid diagram corresponding to $\pi(\alpha)$, then x is an input of a strand of $\pi(\alpha)$. Assume that the corresponding castle K is trapped. Let F_1 and F_2 be the boundary floors of the corresponding trap B. By the definition, B contains a floor of the castle K. Let C_1 be a Seifert circle of $\mathcal{D}$ lying in the trap B and containing a floor of K such that C_1 shares a common crossing with either F_1 or F_2. Let C_2 be an arbitrary innermost Seifert circle of $\mathcal{D}$ bounded by C_1. Arcs $\alpha \in \mathcal{A}$ intersecting C_2 divide C_2 into segments. Let y

be a point on any of these segments. It is easy to see that for all $\alpha \in \mathcal{A}$, if the point y lies on the braid diagram corresponding to $\pi(\alpha)$, then y is an input of a strand of $\pi(\alpha)$.

Without loss of generality, C_1 shares common crossings with F_1. It is easy to check that the graph $\Gamma(\mathcal{D})$ is bipartite. Therefore, C_1 shares no crossings with F_2. It follows that the castle M corresponding to (C_2, y) has no floors intersecting F_2. Therefore, the intersection of M and the complement of B lies within the towers of K containing F_1.

If (C_2, y) is not appropriate, one repeats the same procedure as above. By using the argument above, it is not hard to show that the process ends after finitely many steps. The lemma is proved. □

2.3. **Proof of Theorem 1.4.** Let $\mathcal{D}$ be a link diagram. Let E (resp. e) be the highest (resp. the lowest) a-degree of the skein polynomial $\mathcal{P}(\mathcal{D}; a, z)$ of $\mathcal{D}$. We aim to prove that if $\mathcal{D}$ is $-$solid, then $E = -\omega(\mathcal{D}) + s(\mathcal{D}) - 1$. By using similar arguments, one can show that if $\mathcal{D}$ is $+$solid, then $e = -\omega(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + 1$. This will prove that the Morton–Franks–Williams inequality is sharp for any solid link diagram.

Let $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ be a system of weighted circles and π be a braid placement. Let $\mathcal{D}$ be the link diagram determined by π.

Remark 2.5. Suppose one smoothed or flipped some crossings of $\mathcal{D}$ and then deleted some link components. Let $\mathcal{D}'$ be the resulting link diagram. We construct a system of weighted circles $(\mathcal{C}', \mathcal{A}', \|\cdot\|)$ and a braid placement π' such that the link diagram determined by π' is $\mathcal{D}'$ as follows. First, for each $\alpha \in \mathcal{A}$, we smooth and flip the corresponding crossings of $\pi(\alpha)$. Second, for another link component, we remove both the corresponding parts of Seifert circles and strands of braid diagrams. If one of the braid diagrams has two strands, after removing one of them, we remove the corresponding arc from the current system of weighted circles. The resulting braid diagrams $\pi'(\alpha)$ are uniquely defined up to far commutativity. It is not hard to check that if $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ is reduced, then $(\mathcal{C}', \mathcal{A}', \|\cdot\|)$ is reduced too.

Following [2], we define a class of X-coherent resolving trees, which we call *special* X-*coherent*.

Let $\mathcal{D}$ be a link diagram. Let us describe a special X-coherent resolving tree $\mathcal{T}$ of $\mathcal{D}$. As of any X-coherent resolving tree, the construction of $\mathcal{T}$ consists of several phases. One starts with the one vertex tree $\mathcal{T}_0$. At the end of the kth phase, one obtains a rooted subtree $\mathcal{T}_k$ of $\mathcal{T}$. The resulting subtrees satisfy

$$\{\mathcal{D}\} = \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{T}_m = \mathcal{T}.$$

Let us describe the construction of $\mathcal{T}_1$. We take an arbitrary appropriate pair (C_1, x_1) of $\mathcal{D}$ such that for all $\alpha \in \mathcal{A}$, if x_1 lies on the braid diagram corresponding to $\pi(\alpha)$, then x_1 is an input of a strand of $\pi(\alpha)$. The latter exists due to Lemma 2.4. Let x_1 be a base point of the first phase. Then we construct $\mathcal{T}_1$ as described in the definition of X-coherent trees.

Let us describe the construction of $\mathcal{T}_2$. Let $\mathcal{U}$ be a leaf vertex of $\mathcal{T}_1$. Recall that $\mathcal{U}$ contains the base point x_1. Let $\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_1)$ be the link component of $\mathcal{U}$ containing x_1. Denote by $\mathcal{U}\backslash\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_1)$ the link diagram obtained from $\mathcal{U}$ by removing $\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_1)$. Let π_1 be the corresponding braid placement (see Remark 2.5 above). We take an arbitrary appropriate pair (C_2, x_2) of $\mathcal{U}\backslash\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_1)$ such that for all $\alpha \in \mathcal{A}$, if x_2 lies on the braid diagram corresponding to $\pi_1(\alpha)$, then x_2 is an input of a strand of $\pi_1(\alpha)$. The latter exists due to Lemma 2.4. Let x_2 be a base point of the second phase concerning $\mathcal{U}$. At this moment, we follow the same rules as above. Then we repeat the same procedure for all leaf vertices $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}_1$. Eventually, we construct $\mathcal{T}_2$.

Let us describe the construction of $\mathcal{T}_3$. Let $\mathcal{V}$ be a leaf vertex of $\mathcal{T}_2$. Recall that $\mathcal{V}$ contains two base points: x_1 and x_2. Let $\mathrm{LC}(\mathcal{V};x_2)$ be the link component of $\mathcal{V}$ containing x_2. Denote by $\mathcal{V}\backslash(\mathrm{LC}(\mathcal{V};x_1)\cup\mathrm{LC}(\mathcal{V};x_2))$ the link diagram obtained from $\mathcal{V}$ by removing both $\mathrm{LC}(\mathcal{V};x_1)$ and $\mathrm{LC}(\mathcal{V};x_2)$. Let π_2 be the corresponding braid placement. We take an arbitrary appropriate pair (C_3,x_3) of $\mathcal{V}\backslash(\mathrm{LC}(\mathcal{V};x_1)\cup\mathrm{LC}(\mathcal{V};x_2))$ such that for all $\alpha\in\mathcal{A}$, if x_3 lies on the braid diagram corresponding to $\pi_2(\alpha)$, then x_3 is an input of a strand of $\pi_2(\alpha)$. The latter exists due to Lemma 2.4. Let x_3 be a base point of the third phase concerning $\mathcal{V}$. At this moment, we follow the same rules as above. Then we repeat the same procedure for all leaf vertices $\mathcal{V}$ of $\mathcal{T}_2$. Eventually, we construct $\mathcal{T}_3$.

Then we proceed similarly. In the end, we obtain a special X-coherent resolving tree $\mathcal{T}$.

Recall that for a given link diagram, there may be several distinct appropriate pairs. By varying them, we obtain a few special X-coherent resolving trees of $\mathcal{D}$.

Let $\mathcal{T}$ be an arbitrary special X-coherent resolving tree of $\mathcal{D}$.

Recall that given a leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}$, $\gamma(\mathcal{U})$ denotes the number of link components in a leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}$, $t(\mathcal{U})$ denotes the number of crossings of $\mathcal{D}$ that one smoothed in obtaining $\mathcal{U}$, and $t^-(\mathcal{U})$ denotes the number of negative crossings among the smoothed ones (see Remark 2.1 above). We say that a leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}$ contributes to the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$ if

$$\omega(\mathcal{U})-\omega(\mathcal{D})+\gamma(\mathcal{U})-1=-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1.$$

We are in the position of proving Theorem 1.4. The proof is in three steps.

In the first step, we show that there exists a specific leaf vertex $\mathcal{U}^*$ of $\mathcal{T}$ contributing to the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$ such that one smoothed all positive crossings of $\mathcal{D}$ in obtaining $\mathcal{U}^*$. In the second step, we show that if a leaf vertex $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}$ contributes to the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$ of $\mathcal{P}(\mathcal{D};a,z)$, then $\gamma(\mathcal{U})=s(\mathcal{D})$, $\omega(\mathcal{U})=0$, and $t^-(\mathcal{U})\le t^-(\mathcal{U}^*)$. In the third step, we show that the previous steps imply the result.

Step 1. We start with the following observation.

Lemma 2.6. Suppose a $(-1,-1,\dots,-1)$-homogeneous braid word u represents $\Delta^{-1}_{1,n}$. Then there exist braid words of the form $u_1\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\dots\sigma_{n-1}^{-1}u_2$ and $u_3\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1}\dots\sigma_1^{-1}u_4$ lying in the same far commutativity class as of the braid word u such that $u_2,u_3\in\{\sigma_1^{-1},\sigma_2^{-1},\dots,\sigma_{n-2}^{-1}\}^*$ and $u_1,u_4\in\{\sigma_2^{-1},\sigma_3^{-1},\dots,\sigma_{n-1}^{-1}\}^*$.



FIGURE 12. An illustration for Lemma 2.6.

Proof. We show that by using the moves corresponding to the far commutativity relations, one may transform u into a braid word of the form $u_1\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\dots\sigma_{n-1}^{-1}u_2$. For the second braid word, the argument is similar.

First, the statement of the lemma holds for the braid word (1.4).

Second, any two $(-1,-1,\dots,-1)$-homogeneous braid words representing the same braid are related by the diagram transformations corresponding to the braid relations and the far commutativity relations (see Theorem 9.2.5 in [7]). It is easy to check that if one obtains a

braid word v_2 from v_1 via a single move corresponding to a braid relation, the assertion holds for v_1 if and only if it holds for v_2. Similar is true for a single move corresponding to a far commutativity relation. Therefore, the statement of the lemma holds for u. The lemma is proved. □

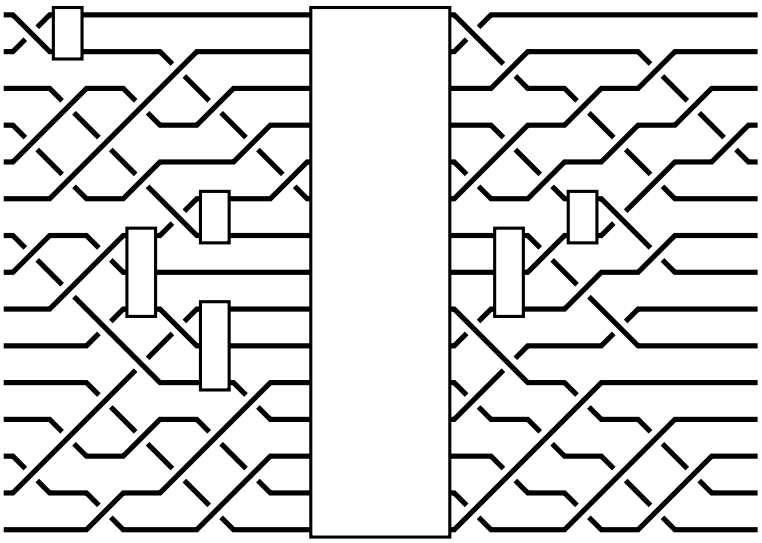


FIGURE 13. An example of a solid braid diagram. The rectangles can be filled by arbitrary braid diagrams so that the resulting one is homogeneous.

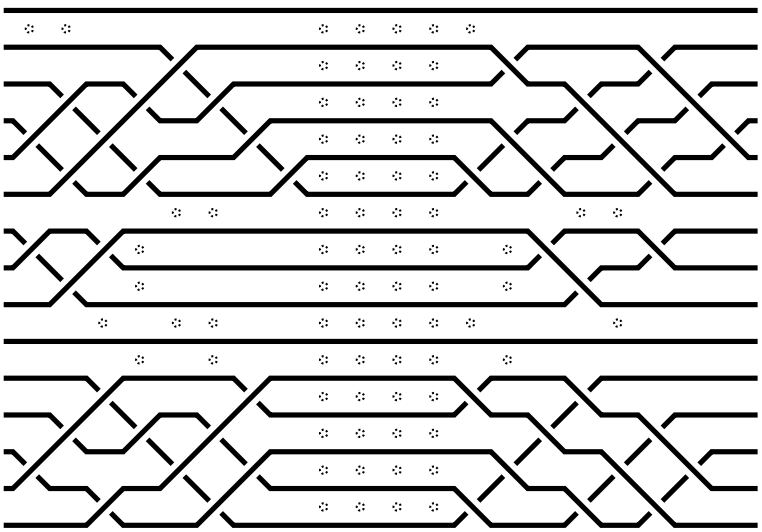


FIGURE 14. The braid diagram obtained from those in Figure 13 in the construction of $\mathcal{U}^*$.

Recall that for any leaf vertex of a resolving tree, there is a unique path from the root to the leaf. The path corresponds to a sequence of diagrams leading to the leaf vertex diagram. To prove the existence of $\mathcal{U}^*$, we construct such a path.

Let (C_1, x_1) be the appropriate pair that one used in the first phase to construct $\mathcal{T}$. Start at x_1 and move according to the orientation. Assume at the moment that C_1 intersects an

arc of the system of weighted circles. Let $\alpha \in \mathcal{A}$ be the first such arc one encountered. By the construction of (C_1, x_1), the base point x_1 is an input of a strand of $\pi(\alpha)$.

Recall that $\|\alpha\|$ denotes the number of strands in the braid diagram corresponding the braid word $\pi(\alpha)$. Given a braid diagram $\mathcal{V}$, the vertical lines containing the inputs of the strands of $\mathcal{V}$ are referred to as Seifert segments of $\mathcal{V}$.

Case 1. The first crossing one encounters is negative. This crossing has the form either σ_1^{-1} or $\sigma_{\|\alpha\|-1}^{-1}$ depending on the direction of C_1. Suppose C_1 is clockwise. Then the first crossing has the form σ_1^{-1}. Recall that in this case, one has to follow the descending rule. One has no choice but to keep the first crossing unchanged (and hence cross it). One continues traveling along the second Seifert segment of $\pi(a)$.

We assume at the moment that $i_2 > 2$. Recall that $\pi(\alpha)$ is $-$solid. One waits for a crossing of the form σ_2^{-1}. The latter exists due to Lemma 2.6. When such a crossing appears, one has no choice but to keep it unchanged. One continues traveling along the third Seifert segment of $\pi(\alpha)$ and waits for a crossing of the form σ_3^{-1}. The latter exists due to Lemma 2.6. This process continues until one crosses a crossing of the form $\sigma_{i_2-1}^{-1}$.

Let q be the last appearance of the letter $\sigma_{i_2-1}^{-1}$ in $\pi(\alpha)$ such that $\sigma_{i_2-1}^{-1}\sigma_{i_2-2}^{-1}\dots\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$ is a subsequence of the suffix of $\pi(\alpha)$ that begins at q. The latter exists due to Lemma 2.6. One continues traveling along the Seifert segment i_2 of $\pi(\alpha)$. One smooths all crossings of the forms $\sigma_{i_2-1}^{-1}$ and σ_{i_2} and waits for the crossing corresponding to q. When this crossing appears, one flips it and hence moves to the Seifert segment $i_2 - 1$ of $\pi(\alpha)$.

Let q' be the last appearance of the letter $\sigma_{i_2-2}^{-1}$ in $\pi(\alpha)$ such that $\sigma_{i_2-2}^{-1}\sigma_{i_2-3}^{-1}\dots\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$ is a subsequence of the suffix of $\pi(\alpha)$ that begins at q'. The latter exists due to Lemma 2.6. One continues traveling along the Seifert segment $i_2 - 1$ of $\pi(\alpha)$. One waits for the crossing corresponding to q'. When this crossing appears, one flips it and hence moves to the Seifert segment $i_2 - 2$ of $\pi(\alpha)$. This process continues until one flips a crossing of the form σ_1^{-1} and hence moves to the ending point of the first Seifert segment of $\pi(\alpha)$. The case $i_2 = 2$ is similar.

If C_1 is counterclockwise, the argument is the same after one replaces the descending algorithm by the ascending one. The first case is complete.

Case 2. The first crossing one encounters is positive. This crossing has the form either σ_1 or $\sigma_{\|\alpha\|-1}$ depending on the direction of C_1. Suppose C_1 is clockwise. Then the first crossing has the form σ_1. Recall that in this case, one has to follow the descending rule. One smooths the first crossing and continues traveling along the first Seifert segment of $\pi(\alpha)$. Repeating this process, one arrives at the end of the first Seifert segment of $\pi(\alpha)$ by smoothing all the crossings of the form σ_1.

If C_1 is counterclockwise, then one has to follow the ascending rule. One smooths all crossings of the form $\sigma_{\|\alpha\|-1}$ similarly. The second case is complete.

After the first arc α passed, one continues moving according to the orientation. If there is another arc intersecting C_1, one follows the same rules as above. Finally, one obtains a leaf vertex $\mathcal{U}_1^*$ of $\mathcal{T}_1$. Recall that to obtain the second base point of $\mathcal{U}_1^*$, one removes the link component $\mathrm{LC}(\mathcal{U}_1^*; x_1)$ of $\mathcal{U}_1^*$ containing x_1 from consideration. Let $\mathcal{U}_1^* \backslash \mathrm{LC}(\mathcal{U}_1^*; x_1)$ be the resulting link diagram. Let π_1 be the corresponding braid placement. By using Lemma 2.6, it is easy to see that π_1 is $-$solid. Thus, one can repeat the same process until the construction of $\mathcal{U}^*$ ends.

Note that in the construction of an X-coherent resolving tree, one visits each crossing of $\mathcal{D}$ exactly twice (and hence at least once). By the definition of $\mathcal{U}^*$, one smoothed all positive

crossings one encountered. Therefore, one smoothed all positive crossings of $\mathcal{D}$ in obtaining $\mathcal{U}^*$. The first step is complete.

Step 2. Let $\mathcal{U}$ be a leaf vertex of $\mathcal{T}$. Let P be a unique path from the root of $\mathcal{T}$ to $\mathcal{U}$. Given $i \in \{1, 2, \dots, \gamma(\mathcal{U})\}$, let $\mathcal{U}_i$ be a unique leaf of $P \cap \mathcal{T}_i$. Let $\mathcal{U}_0 := \mathcal{D}$. Recall that $\mathcal{U}_i$ contains i base points, which we denote by $x_1, x_2, \dots, x_i$. By the construction of $\mathcal{T}$, to obtain $\mathcal{U}_i$, one smooths all crossings of $\mathcal{U}_{i-1}$ adjacent to $\mathrm{LC}(\mathcal{U}_i; x_i)$ and then flips several crossings that $\mathrm{LC}(\mathcal{U}_i; x_i)$ intersects. Let

$$\mathcal{U}^{i-1} := \mathcal{U}_{i-1} \backslash (\mathrm{LC}(\mathcal{U}_{i-1}; x_1) \cup \mathrm{LC}(\mathcal{U}_{i-1}; x_2) \cup \ldots \cup \mathrm{LC}(\mathcal{U}_{i-1}; x_{i-1}))$$

be the link diagram obtained from the diagram $\mathcal{U}_{i-1}$ by removing the link components $\mathrm{LC}(\mathcal{U}_{i-1}; x_1), \mathrm{LC}(\mathcal{U}_{i-1}; x_2), \dots, \mathrm{LC}(\mathcal{U}_{i-1}; x_{i-1})$. Let (C_i, x_i) be the appropriate pair of the diagram $\mathcal{U}^{i-1}$ that is used in the construction of $\mathcal{T}$ concerning $\mathcal{U}_i$. Let K_i be the corresponding castle. The link component $\mathrm{LC}(\mathcal{U}_i; x_i)$ of $\mathcal{U}_i$ determines a path on K_i. This path corresponds to the natural travel through $\mathcal{U}_i$ starting at x_i. During this travel, one eventually exits the castle K for the first time through the endpoint of some floor of level L_i. The following results are Lemma 5.2 and Corollary 5.3 in [2], respectively.

Lemma 2.7. If the leaf vertex $\mathcal{U}$ contributes to the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$, then for each index $i \in \{1, 2, \dots, \gamma(\mathcal{U})\}$, one has $L_i = 0$.

Corollary 2.8. If the leaf vertex $\mathcal{U}$ contributes to the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$, then each link component of $\mathcal{U}$ represents a simple closed curve on $\mathbb{R}^2$.

The results above imply the following property of leaf vertices of $\mathcal{T}$ contributing to the highest a-degree term.

Corollary 2.9. If the leaf vertex $\mathcal{U}$ contributes to the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$, then $\gamma(\mathcal{U}) = s(\mathcal{D})$ and $\omega(\mathcal{U}) = 0$.

Proof. By using Lemma 2.7, we see that for each $i \in \{1, 2, \dots, \gamma(\mathcal{U})\}$, one has

$$s(\mathcal{U}^i) = s(\mathcal{U}^{i-1}) - 1.$$

Therefore, the number of link components of $\mathcal{U}$ is $s(\mathcal{D})$.

Recall that the link components of $\mathcal{U}$ are stacked over each other. Thus, the contribution of crossings between any two distinct link components of $\mathcal{U}$ to the writhe $\omega(\mathcal{U})$ is zero. By Corollary 2.8, no link component of $\mathcal{U}$ cross itself. Therefore, $\omega(\mathcal{U}) = 0$. The corollary is proved. □

Suppose $\mathcal{U}$ contributes to the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$. We need the following auxiliary result.

Lemma 2.10. Suppose $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ is reduced. Let $i \in \{1, 2, \dots, \gamma(\mathcal{U})\}$ and $\alpha \in \mathcal{A}$. Suppose the link component $\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_i)$ of $\mathcal{U}$ determines a strand $s(\alpha, i)$ on the braid diagram $\pi(\alpha)$. Then the index of the input of $s(\alpha, i)$ equals to the index of the output of $s(\alpha, i)$.

Proof. First, suppose $i = 1$. Let (C_1, x_1) be the appropriate pair of the diagram $\mathcal{U}^0 = \mathcal{D}$ that is used in the construction of $\mathcal{T}$ concerning $\mathcal{U}_1$. Let K_1 be the corresponding castle. Starting at x_1 and following the orientation of C_1, let us order the arcs of $\mathcal{A}$ intersecting C_1 as $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

Let $d_1 \in \{1, 2, \dots, \|\alpha_1\|\}$ be the index of the output of $s(\alpha_1, 1)$. We aim to prove that $d_1 = 1$.

Assume the converse, that is, $d_1 > 1$. Let $p_0 = x_1$ and q_0 be the ends of the floor of level 0 of K_1, see Figure 15. Note that $p_0, q_0 \in \mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_1)$. By Lemma 2.7, the part of $\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_1)$

located from p_0 to q_0 contains within the castle K_1. Let $j \in \{2,3,\dots,r\}$ be the minimum number such that the Seifert circle C containing the second Seifert segment of $\pi(\alpha_1)$ intersects α_j. Since K_1 is free, $j = 2$. Let B be the disk bounded by C_1, C, α_1 and α_2. Since K_1 is free, B represents a topological disk region in the complement of the connected component of the system of weighted circles $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ that has precisely four distinct sides. Thus, $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ is not reduced. This contradicts the assumption of the lemma. Therefore, $d_1 = 1$.

Similar arguments show that for all $\alpha \in \{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r\}$, the index of the input of $s(\alpha, 1)$ equals to the index of the output of $s(\alpha, 1)$. Hence, if $\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_1)$ intersects an arc $\alpha \in \mathcal{A}$, then $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$. Thus, the case $i = 1$ is complete.

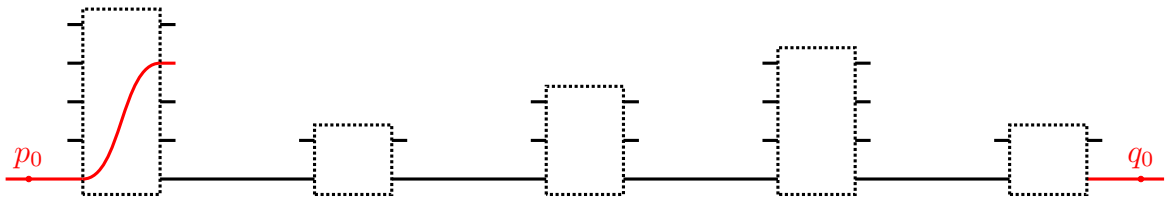


FIGURE 15. An illustration for Lemma 2.10.

Suppose $i = 2$. Let (C_2, x_2) be the appropriate pair of the diagram $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1 \backslash \mathrm{LC}(\mathcal{U}_1; x_1)$ that is used in the construction of $\mathcal{T}$ concerning $\mathcal{U}_2$. Let $(\mathcal{C}', \mathcal{A}', \|\cdot\|)$ be the corresponding system of weighted circles and π_2 be the corresponding braid placement such that the link determined by π_2 is $\mathcal{U}^1$. Since $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \|\cdot\|)$ is reduced, $(\mathcal{C}', \mathcal{A}', \|\cdot\|)$ is reduced too (see Remark 2.5). Therefore, one can apply the same arguments as above.

The case $i > 2$ is similar. The lemma is proved. □

We are in the position of proving the inequality $t^-(\mathcal{U}) \leq t^-(\mathcal{U}^*)$.

Let $\alpha \in \mathcal{A}$. Let $r_1, \dots, r_{\|\alpha\|-1} \in \{1, -1\}$ be such that $\pi(\alpha)$ is $(r_1, \dots, r_{\|\alpha\|-1})$-homogeneous. Let $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, \|\alpha\|\}$ be indexes such that $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_m = \|\alpha\|$ and for all $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, one has $r_{i_k} = r_{i_k+1} = \dots = r_{i_{k+1}-1}$ and $r_{i_{k+1}-1} \neq r_{i_{k+1}}$. By the definition of $-$solid braids, for each $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ such that $r_{i_k} = -1$, the braid word obtained from $\pi(\alpha)$ by deleting all letters except $\sigma_{i_k}^{-1}, \sigma_{i_k+1}^{-1}, \dots, \sigma_{i_{k+1}-1}^{-1}$ admits a decomposition of the form $v_{k,1} v_{k,2} v_{k,3}$ such that both $v_{k,1}$ and $v_{k,3}$ represent $\Delta^{-1}_{i_k, i_{k+1}}$. See Figure 13 above.

Let $\pi_{\gamma(\mathcal{U})}$ be the braid placement corresponding to $\mathcal{U}_{\gamma(\mathcal{U})} = \mathcal{U}$. Given a braid word w, denote by $|w|$ the length of w.

Lemma 2.11. For each $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ such that $r_{i_k} = -1$, one neither smoothed nor flipped at least $2|v_{k,1}|$ negative crossings of $\pi(\alpha)$ in obtaining $\pi_{\gamma(\mathcal{U})}(\alpha)$.

Proof. Without loss of generality, $r_1 = -1$. First, suppose $k = 1$.

Let $i \in \{1, 2, \dots, \gamma(\mathcal{U})\}$ be the index such that the input of the first Seifert segment of $\pi(\alpha)$ lies on $\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_i)$. The link component $\mathrm{LC}(\mathcal{U}; x_i)$ of $\mathcal{U}$ containing x_i determines a path P on $\pi(\alpha)$. This path corresponds to the natural travel through $\pi_{\gamma(\mathcal{U})}(\alpha)$ starting at the input of the first Seifert segment of $\pi(\alpha)$. It is easy to see that P contains crossings of $v_{1,1}$ of the form $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{i_2-1}^{-1}$ (see Lemma 2.6). Due to Lemma 2.10, the path P exits $\pi(\alpha)$ through the endpoint of the first Seifert segment of $\pi(\alpha)$. Therefore, P contains at least $i_2 - 1$ additional crossings of $\pi(\alpha)$ of the form $\sigma_{i_2-1}^{-1}, \sigma_{i_2-2}^{-1}, \dots, \sigma_1^{-1}$. Therefore, one neither smoothed nor flipped at least $2(i_2 - 1)$ negative crossings of $\pi(\alpha)$ in obtaining $\pi_{\gamma(\mathcal{U})}(\alpha)$.

For each $j \in \{1, 2, \dots, i_2 - 1\}$, we apply similar arguments concerning the link component of $\mathcal{U}$ containing the input of the index j Seifert segment of $\pi(\alpha)$. We see that one neither

smoothed nor flipped at least

$$2(i_2-1)+2(i_2-2)+\ldots+2=2i_2(i_2-1)=2|v_{1,1}|$$

negative crossings of $\pi(\alpha)$ in obtaining $\pi_{\gamma(\mathcal{U})}(\alpha)$.

For $k>1$ such that $r_{i_k}=-1$, the argument is similar. The lemma is proved. □

Denote by $t^-(\mathcal{U}^*;\alpha)$ (resp. $t^-(\mathcal{U};\alpha)$) the number of negative crossings of $\pi(\alpha)$ that one smoothed in obtaining $\mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}$). Denote by $n(\pi(\alpha))$ the number of negative crossings of $\pi(\alpha)$. One has

$$t^-(\mathcal{U}^*;\alpha)+\sum_{\substack{k\in\{1,2,\ldots,m-1\}\\ r_{i_k}=-1}}2|v_{k,1}|=n(\pi(\alpha)), \tag{2.1}$$

see Figure 14. Lemma 2.11 implies that

$$\sum_{\substack{k\in\{1,2,\ldots,m-1\}\\ r_{i_k}=-1}}2|v_{k,1}|\leq n(\pi(\alpha))-t^-(\mathcal{U};\alpha). \tag{2.2}$$

By combining (2.1) and (2.2), one has $t^-(\mathcal{U};\alpha)\leq t^-(\mathcal{U}^*;\alpha)$. Therefore,

$$t^-(\mathcal{U})=\sum_{a\in\mathcal{A}}t^-(\mathcal{U};\alpha)\leq\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}t^-(\mathcal{U}^*;\alpha)=t^-(\mathcal{U}^*).$$

The second step is complete.

Step 3. Let $\mathcal{V}$ be a leaf vertex of $\mathcal{T}$. Recall that the contribution of $\mathcal{V}$ to $\mathcal{P}(\mathcal{D};a,z)$ is

$$(-1)^{t^-(\mathcal{V})}z^{t(\mathcal{V})}a^{\omega(\mathcal{V})-\omega(\mathcal{D})}((a-a^{-1})z^{-1})^{\gamma(\mathcal{V})-1},$$

see Remark 2.1. Therefore, the highest a-degree term that $\mathcal{V}$ contributes to $\mathcal{P}(\mathcal{D};a,z)$ is

$$(-1)^{t^-(\mathcal{V})}z^{t(\mathcal{V})-\gamma(\mathcal{V})+1}a^{\omega(\mathcal{V})-\omega(\mathcal{D})+\gamma(\mathcal{V})-1}.$$

In [2] (see the beginning of section 5), the authors showed that

$$\omega(\mathcal{V})-\omega(\mathcal{D})+\gamma(\mathcal{V})-1\leq-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1.$$

Recall that in the first step, we showed that there exits a leaf vertex $\mathcal{U}^*$ of $\mathcal{T}$ that contributes to the the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$.

Let $\mathcal{U}$ be a leaf vertex of $\mathcal{T}$ that contributes to the the highest a-degree term $a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1}$. Recall that in the second step, we showed that $\gamma(\mathcal{U})=s(\mathcal{D})$, $\omega(\mathcal{U})=0$, and $t^-(\mathcal{U})\leq t^-(\mathcal{U}^*)$. It is easy to see that $\mathcal{U}$ contributes to the term

$$z^{t(\mathcal{U}^*)-s(\mathcal{D})+1}a^{-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1} \tag{2.3}$$

if and only if $t(\mathcal{U})=t(\mathcal{U}^*)$.

Suppose $t(\mathcal{U})=t(\mathcal{U}^*)$. Denote by $p(\mathcal{D})$ the number of positive crossings of $\mathcal{D}$. Given a leaf vertex $\mathcal{V}$ of $\mathcal{T}$, denote by $t^+(\mathcal{V})$ the number of positive crossings of $\mathcal{D}$ that one smoothed in obtaining $\mathcal{V}$. Recall that in the first step, we showed that $t^+(\mathcal{U}^*)=p(\mathcal{D})$. One has

$$t^-(\mathcal{U}^*)=t(\mathcal{U}^*)-t^+(\mathcal{U}^*)=t(\mathcal{U})-p(\mathcal{D})\leq t(\mathcal{U})-t^+(\mathcal{U})=t^-(\mathcal{U}).$$

Hence, $t^-(\mathcal{U})=t^-(\mathcal{U}^*)$. Therefore, the contribution of $\mathcal{U}$ to the term (2.3) has the same sign $(-1)^{t^-(\mathcal{U}^*)}$ as of $\mathcal{U}^*$. Thus, the term do not cancel. This shows that

$$E=-\omega(\mathcal{D})+s(\mathcal{D})-1.$$

The third step is complete. Theorem 1.4 is proved.

3. Polynomial invariants of tangles and braids

In this section, we show that certain polynomial invariants of tangles provide lower bounds on the crossing number.

In [51], J. Conway introduced an invariant $\nabla(\mathcal{L}; z) \in \mathbb{Z}[z^{\pm 1}]$ of links. The latter is referred to as the *Conway polynomial*. This polynomial is a specialization of the skein polynomial. Namely, $\nabla(\mathcal{L}; z) = \mathcal{P}(\mathcal{L}, 1, z)$. Following [40], we recall the definition of a polynomial invariant of ordered tangles similar to the Conway polynomial.

We assume that all tangle diagrams are oriented. In this section, we treat braid diagrams as tangle diagrams and treat braids as tangles.

Let $\mathcal{D}$ be a tangle diagram. A collection of m crossings of $\mathcal{D}$ is called an *m-state* of $\mathcal{D}$. A state S of $\mathcal{D}$ determines a new tangle diagram $\mathcal{R}(S)$ obtained from $\mathcal{D}$ by smoothing all crossings lying in S. Suppose $\mathcal{R}(S)$ has no closed components. Choose an order on the set of strands. One travels through $\mathcal{R}(S)$ by moving through each strand naturally. In this process, one passes a neighborhood of each smoothed crossing $c \in S$ twice. The state S is said to be *descending* if, for each $c \in S$, one enters this neighborhood first time on the overpass of $\mathcal{D}$.

Denote by H the union of inputs and outputs of all strands of $\mathcal{D}$. A bijective function

$$\tau : H \longrightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}$$

is called an *ordering* of $\mathcal{D}$ if $\tau(x)$ is odd whenever x is an input. A pair consisting of a tangle diagram and its ordering τ is called a τ-ordered tangle diagram.

An ordering τ is said to be *coherent* if, for any strand of $\mathcal{D}$ with input x and output y, one has $\tau(y) = \tau(x) + 1$. A state S of a τ-ordered tangle diagram is said to be *coherent* if $\mathcal{R}(S)$ contains no closed components, and the ordering of $\mathcal{R}(S)$ induced by τ is coherent.

We order the strands according to images $\tau(x)$ of their inputs $x \in H$. A coherent state S is said to be *τ-descending* if S is descending with respect to this order. Denote by $t^-(S)$ the number of negative crossings of $\mathcal{D}$ lying in S.

Let $\mathcal{D}$ be a τ-ordered tangle diagram. By $\mathcal{S}_m(\mathcal{D}, \tau)$ we denote the set of all τ-descending m-states of $\mathcal{D}$. Define the *Conway polynomial* $\nabla(\mathcal{D}, \tau; z) \in \mathbb{Z}[z]$ of $\mathcal{D}$ as follows:

$$\nabla(\mathcal{D}, \tau; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{S \in \mathcal{S}_m(\mathcal{D}, \tau)} (-1)^{t^-(S)} \right) z^m.$$

We emphasize that $\nabla(\mathcal{D}, \tau; z)$ depends on the ordering τ. In [40], the author proved (see Theorem 4.6) that if two τ-ordered tangle diagrams $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ represent the same tangle, then $\nabla(\mathcal{D}, \tau; z) = \nabla(\mathcal{D}', \tau; z)$.

3.1. **Proof of Proposition 1.12.** Given a tangle diagram $\mathcal{D}$, denote by $|\mathcal{D}|$ the number of crossings of $\mathcal{D}$. The diagram $\mathcal{D}$ is said to be *minimal* if $\mathcal{D}$ has the least possible number of crossings among all diagrams representing the same tangle.

A τ-ordered tangle diagram $\mathcal{D}$ is said to be *τ-special* if $\mathcal{S}_{|\mathcal{D}|}(\mathcal{D}, \tau)$ is non-empty, that is, a unique $|\mathcal{D}|$-state of $\mathcal{D}$ is τ-descending.

Lemma 3.1. Let $\mathcal{D}$ be a τ-ordered tangle diagram. One has

$$\deg \nabla(\mathcal{D}, \tau; z) \leq |\mathcal{D}|. \tag{3.1}$$

The equality holds if and only if $\mathcal{D}$ is τ-special.

Proof. First, for $m > |\mathcal{D}|$, the set $\mathcal{S}_m(\mathcal{D}, \tau)$ is empty. Hence, the term of degree m in $\nabla(\mathcal{D}, \tau; z)$ is zero. Therefore, $\deg \nabla(\mathcal{D}, \tau; z) \leq |\mathcal{D}|$. Second, note that $\deg \nabla(\mathcal{D}, \tau; z) = |\mathcal{D}|$ if and only if a

term of degree $|\mathcal{D}|$ in $\nabla(\mathcal{D},\tau;z)$ is non-zero. The latter is equivalent to the fact that $\mathcal{S}_{|\mathcal{D}|}(\mathcal{D},\tau)$ is non-empty. The lemma is proved. □

Corollary 3.2. Let τ be an ordering. Assume a tangle $\mathcal{T}$ admits a τ-special diagram. A diagram $\mathcal{D}$ of $\mathcal{T}$ is minimal if and only if $\mathcal{D}$ is τ-special.

Proof. First, (3.1) implies that any τ-special diagram is minimal. Second, suppose $\mathcal{D}$ is minimal. Let $\mathcal{D}'$ be a τ-special diagram of $\mathcal{T}$. One has

$$|\mathcal{D}| = |\mathcal{D}'| = \deg\, \nabla(\mathcal{D}',\tau;z) = \deg\, \nabla(\mathcal{D},\tau;z).$$

Lemma 3.1 implies that $\mathcal{D}$ is τ-special. The corollary is proved. □

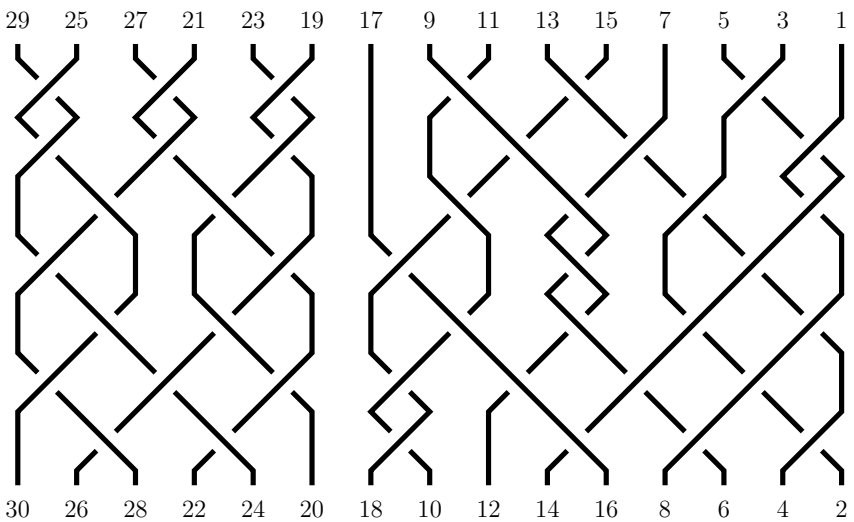


FIGURE 16. An example of a special ordering.

Let $\mathcal{D}$ be a τ-ordered tangle diagram. Suppose $\mathcal{D}$ is τ-special, that is, a unique $|\mathcal{D}|$-state S of $\mathcal{D}$ is τ-descending. Then $\mathcal{R}(S)$ has neither crossings nor closed components. Therefore, $\mathcal{D}$ is a braid diagram.

Let $\mathcal{D}$ be a τ-ordered braid diagram. It is easy to see that a unique $|\mathcal{D}|$-state S of $\mathcal{D}$ is coherent if and only if for each Seifert segment of $\mathcal{D}$ with input x and output y, one has $\tau(y) = \tau(x) + 1$. In this case, if a unique $|\mathcal{D}|$-state S of $\mathcal{D}$ is τ-descending, then $\mathcal{D}$ is homogeneous. Therefore, any special braid diagram is homogeneous.

It is easy to check that, for any homogeneous braid diagram $\mathcal{D}$, there exists at least one ordering τ such that $\mathcal{D}$ is τ-special (see Figure 16). Thus, a braid diagram $\mathcal{D}$ is special if and only if $\mathcal{D}$ is homogeneous.

Suppose a braid β admits a $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$-homogeneous diagram $\mathcal{D}$. Let τ be an ordering of $\mathcal{D}$ such that $\mathcal{D}$ is τ-special. Then any τ-special diagram of β is $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$-homogeneous. Therefore, Corollary 3.2 implies Proposition 1.12.

3.2. **Proof of Proposition 1.14.** Following [41], we recall the definition of a three-variable polynomial invariant $\mathcal{I} = \mathcal{I}(a,z,t)$ of braids similar to the skein polynomial.

Let $\mathcal{D}$ be a braid diagram with n strands. We enumerate by indexes $1, 2, \dots, n$ all the inputs of strands of $\mathcal{D}$ naturally from the leftmost to the rightmost, respectively.

Let $\mathcal{U}$ be a braid diagram and $k \geq 2$. A surjective function

$$C : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$$

is called a *coloring* of $\mathcal{U}$ with k colors. Roughly speaking, one paints each strand s of $\mathcal{U}$ in color $C(i(s))$, where $i(s)$ is the index of the input of s. A pair consisting of a braid diagram and its coloring of strands C is called a C-colored braid diagram.

Let $\mathcal{D}$ be a braid diagram. Given $m \geq 0$ and $k \geq 2$, denote by $[\mathcal{D}, m, k]$ the set of all pairs (S, C) consisting of an m-state S of $\mathcal{D}$ and a coloring C of $\mathcal{R}(S)$ with k colors such that

(1) any two strands of $\mathcal{R}(S)$ lying in the same link component of the Alexander closure of $\mathcal{R}(S)$ have the same color;
(2) for any positive (resp. negative) crossing $c \in S$ connecting two strands s_1 (the left one) and s_2 (the right one) of $\mathcal{R}(S)$, the color of s_1 is strictly more (reps. less) than that of s_2.

Given $(S, C) \in [\mathcal{D}, m, k]$, denote by $\mathcal{R}(S)_i$ the braid diagram consisting of all strands of $\mathcal{R}(S)$ colored by i. Given a braid diagram $\mathcal{U}$, denote by $\overline{\mathcal{U}}$ the Alexander closure of $\mathcal{U}$.

Define a Laurent polynomial $\mathcal{I}(\mathcal{D}; a, z, t) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}, t]$ as follows. Let

$$\mathcal{I}_k(\mathcal{D}; a, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{(S,C) \in [\mathcal{D}, m, k]} (-1)^{t^-(S)} \, a^{\omega(\mathcal{R}(S))} \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}(\overline{\mathcal{R}(S)_i}; a, z) \right) z^m$$

and $\mathcal{I}(\mathcal{D}; a, z, t) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{I}_k(\mathcal{D}; a, z) t^k$. In [41], the author proved (see Theorem 1) that if two braid diagrams $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ represent conjugate elements of $\mathcal{B}_n$, then $\mathcal{I}(\mathcal{D}; a, z, t) = \mathcal{I}(\mathcal{D}'; a, z, t)$.

Note that for any $(S, C) \in [\mathcal{D}, m, n]$ and for any $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, the diagram $\mathcal{R}(S)_i$ has precisely one strand. It follows that $\mathcal{I}_n(\mathcal{D}; a, z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Lemma 3.3. Let $\mathcal{D}$ be a braid diagram with n strands. One has

$$\deg \mathcal{I}_n(\mathcal{D}; a, z) \leq |\mathcal{D}|.$$

The equality holds if and only if $\mathcal{D}$ is homogeneous.

Proof. First, for $m > |\mathcal{D}|$, the set $[\mathcal{D}, m, n]$ is empty, thus, a term of degree m in $\mathcal{I}_n(\mathcal{D}; a, z)$ is zero. Therefore, $\deg \mathcal{I}_n(\mathcal{D}; a, z) \leq |\mathcal{D}|$. Second, note that

$$\mathcal{I}_n(\mathcal{D}; a, z) = \sum_{m=0}^{|\mathcal{D}|} \left(\sum_{(S,C) \in [\mathcal{D}, m, n]} (-1)^{t^-(S)} \right) z^m,$$

thus, the highest z-degree term of $\mathcal{I}_n(\mathcal{D}; a, z)$ is

$$(-1)^{t^-(\mathcal{D})} \cdot \#[\mathcal{D}, |\mathcal{D}|, n] \cdot z^{|\mathcal{D}|}.$$

Therefore, $\deg \mathcal{I}_n(\mathcal{D}; a, z) = |\mathcal{D}|$ if and only if $[\mathcal{D}, |\mathcal{D}|, n]$ is non-empty. It is easy to see that if $\mathcal{D}$ is not homogeneous, then $[\mathcal{D}, |\mathcal{D}|, n]$ is empty. By using arguments similar to that of proving Proposition 1.12, one can show that if $\mathcal{D}$ is homogeneous, then $[\mathcal{D}, |\mathcal{D}|, n]$ is non-empty. The lemma is proved. □

Lemma 3.3 and invariance of $\mathcal{I}$ under conjugacy imply Proposition 1.14.

4. Discussion

In this section, we describe a relation between geometric group theory and knot theory.

In geometric group theory, braid words corresponding to minimal braid diagrams are referred to as *geodesic words* (with respect to the standard Artin generators). The origin of the present thesis is to study the language of geodesics for the braid groups.

There exists an explicit description of all geodesic words in $\mathcal{B}_3$ (see [42, 43]). The same is true for minimal conjugacy length words in $\mathcal{B}_3$ (see Theorem 6.1 in [46]). The language of geodesic words in $\mathcal{B}_3$ is regular and consists of 27 different cone types. It is an intriguing open problem whether the language of geodesics for $\mathcal{B}_n$ is regular for some $n \geq 4$, see [44]. Note that in [45], the authors proved that the language of geodesic words in $\mathcal{B}_n$ with respect to the generating set of simple divisors of the Garside element is regular.

A problem due to J. Stallings (see Problem 1.8 in [19]) asks whether geodesic braid words are closed under end extension (replacing a final letter s by s^n for $n \geq 2$). We present natural generalizations of this conjecture.

Conjecture 4.1. Let w, u, v be braid words in $\mathcal{B}_n$ and $s \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}$.

(1) If ws is geodesic, then wss is geodesic.
(2) If usv is geodesic, then $ussv$ is geodesic.
(3) If ws is of minimal conjugacy length, then wss is of minimal conjugacy length.

For $n = 2$, the conjecture holds. For $n = 3$, we see that the conjecture holds because of an explicit description of both geodesic and minimal conjugacy length words in $\mathcal{B}_3$. The third part of Conjecture 4.1 is also known as Question 6.1 in [46]. Propositions 1.12 and 1.14 imply the following result.

Corollary 4.2. Conjecture 4.1 holds for all homogeneous braid words.

There is a natural analog of Conjecture 4.1 for minimal link diagrams. The link diagram transformation, similar to the extension described in Conjecture 4.1, is referred to as the *doubling of a crossing*.

Conjecture 4.3. Let $\mathcal{D}$ be an oriented link diagram. Let $\mathcal{D}'$ be a diagram obtained from $\mathcal{D}$ by the doubling of a crossing. If $\mathcal{D}$ is minimal, then $\mathcal{D}'$ is minimal too.

It is easy to check that Conjecture 4.3 holds for both all adequate and all GMM diagrams. Corollary 1.6 implies the following result.

Corollary 4.4. Conjecture 4.3 holds for all solid homogeneous diagrams.

Denote by $\Gamma_n(m)$ the number of all braids β with n strands such that the crossing number of β is m. The limit

$$v(\mathcal{B}_n) := \lim_{m \to \infty} \frac{\log \Gamma_n(m)}{m}$$

is referred to as the *growth rate* and the *logarithmic volume* of the braid group $\mathcal{B}_n$. The computations show that $v(\mathcal{B}_3) = \log 2$.

One can define the growth rate for any group with a given finite generating set similarly (see Definition 7 in [47]).

In [47] (see Theorem 1), the authors calculated the growth rate for a class of groups

$$\mathcal{LF}_n = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \mid a_i a_j = a_j a_i,\ |i - j| \geq 2 \rangle,$$

referred to as *locally free groups*. The latter are right–angled Artin groups. In particular, the authors showed that the growth rate of $\mathcal{LF}_n$ converges to $\log 7$ as n tends to infinity. By using this, they showed that

$$\log \sqrt{7} \leq \lim_{n\to\infty} v(\mathcal{B}_n) \leq \log 7,$$

see Theorem 10 in [47]. Similarly, they studied the growth rate of monoids with a given finite generating set. In particular, they calculated the growth rate for an analogous class of monoids $\mathcal{LF}_n^+$, referred to as *locally free monoids*. Also, the authors showed that the growth rate of $\mathcal{LF}_n^+$ converges to $\log 4$ as n tends to infinity. By using this, below, we show how to obtain a more accurate lower bound on the limit

$$\lim_{n\to\infty} v(\mathcal{B}_n).$$

At the end of the 19th century, P. G. Tait made three conjectures, referred to as the *Tait conjectures*, concerning alternating knots and links (see an expository note [53]):

(1) any reduced alternating diagram is minimal;
(2) any two reduced alternating diagrams representing the same link have the same writhe;
(3) any two reduced alternating diagrams representing the same link are related through a sequence of diagram transformations, referred to as *flypes* (see Figure 17).

All the Tait conjectures hold. The first Tait conjecture was discussed in the introduction of the present thesis. The second Tait conjecture follows from the third one. In [52] (see Main Theorem), W. Menasco and M. Thistlethwaite proved the third Tait conjecture, referred to as the *Tait flyping conjecture*. The latter provides a classification of alternating links.

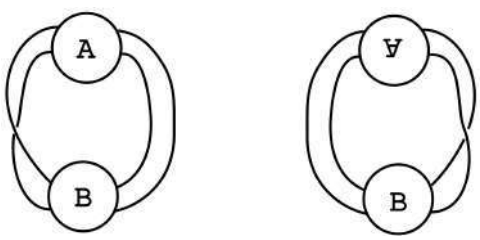


FIGURE 17. Flypes.

By using the classification of alternating knots, in [54], the authors showed that the number of knots grows at least exponentially as a function of the crossing number. We apply the same idea for braids.

Let $\mathcal{AB}_n$ be the submonoid of $\mathcal{B}_n$ generated by the set

$$\left\{\sigma_1, \sigma_2^{-1}, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}^{(-1)^n}\right\}.$$

This monoid is referred to as the *monoid of alternating braids*. By using the classification theorem for alternating links and the Alexander closure construction, it is not hard to show that the map from $\mathcal{AB}_n$ to $\mathcal{LF}_n^+$ given on generators by

$$\sigma_i^{(-1)^{i+1}} \longmapsto a_i$$

is a monoid isomorphism. Thus, the growth rate of $\mathcal{AB}_n$ is equal to that of $\mathcal{LF}_n^+$. Therefore,

$$\log 4 \leq \lim_{n\to\infty} v(\mathcal{B}_n).$$

References

[1] P. Liu, Y. Diao, G. Hetyei, *The Homfly polynomial of links in closed braid form*, Discrete Mathematics, Volume 342, Issue 1, 2019, Pages 190-200, ISSN 0012-365X, https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.09.027.

[2] Y. Diao, G. Hetyei, P. Liu, *The braid index of reduced alternating links*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2019: https://doi.org/10.1017/S0305004118000907.

[3] P. R. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2004.

[4] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, 2nd ed. de Gruyter Stud. Math. 5. Berlin: de Gruyter, 2003.

[5] M. Lackenby, *Elementary knot theory*, in Lectures on Geometry, Clay Lect. Notes, pages 29–64. Oxford Univ. Press, Oxford, 2017.

[6] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 175, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1472978.

[7] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Paterson, W. P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.

[8] D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing, 2003.

[9] C. C. Adams, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, New York: W. H. Freeman and Company, 1994.

[10] J. Hoste, M. Thistlethwaite, *KnotScape*, a knot polynomial calculation and table access program, available at http://www.math.utk.edu/~morwen.

[11] P. R. Cromwell, *Homogeneous links*, Journal of the London Mathematical Society, 2(3):535–552, 1989.

[12] P. M. G. Manchòn, *Homogeneous links and the Seifert matrix*, Pacific J. Math., 255(2):373–392, 2012.

[13] M. Ozawa, *Essential state surfaces for knots and links*, J. Aust. Math. Soc. 91 (2011) 391–404 MR2900614.

[14] M. Ozawa, *Closed incompressible surfaces in the complements of positive knots*, Comment. Math. Helv., 77: 235–243 (2002).

[15] P. R. Cromwell, *Positive braids are visually prime*, Proc. London Math. Soc. (3) 67 (1993), no. 2, 384–424.

[16] W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology 23 (1984) 37-44.

[17] T. Abe, K. Tagami, *Characterization of positive links and the s-invariant for links*, Canad. J. Math. 69 (2017), 1201-1218.

[18] D. Futer, E. Kalfagianni, J. Purcell, *Guts of surfaces and the colored Jones polynomial*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2069, Springer, Heidelberg, 2013. MR3024600.

[19] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, In Geometric Topology (Athens, GA, 1993), 35–473. AMS/IP Stud. Adv. Math. 2(2). Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.

[20] M. Lackenby, *The crossing number of composite knots*, J. Topol. 2, no. 4 (2009): 747–68.

[21] Y. Diao, *The additivity of the crossing number*, J Knot Theory Ramif 13, 7 (2004), 857–866.

[22] H. Gruber, *Estimates for the minimal crossing number*, preprint, 2003.

[23] A. V. Malyutin, *On the question of genericity of hyperbolic knots*, Int. Math. Res. Not. (2018). https://doi.org/10.1093/imrn/rny220.

[24] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12 (1985) 239–246.

[25] J. Przytycki, P. Traczyk, *Conway algebras and Skein equivalence of links*, Proc. Am. Math. Soc. 100 (1987), 744–748.

[26] A. Stoimenow, *On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton–Williams–Franks*, Trans. Amer. Math. Soc. 354(10) (2002), 3927–3954.

[27] A. Stoimenow, *On the definition of graph index*, J. Aust. Math. Soc. 94 (2013), 417–429.

[28] K. Murasugi, *On the braid index of alternating links*, Trans. Amer. Math. Soc. 326 (1) (1991), 237–260.

[29] H. R. Morton, *Seifert circles and knot polynomials*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 99(1):107–109, 1986.

[30] J. Franks, R. F. Williams, *Braids and the Jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc., 303(1):97–108, 1987.

[31] J. Gonzàlez-Meneses, P. M. G. Manchòn, *Closures of positive braids and the Morton–Franks–Williams inequality*, Topology and its Applications, Volume 174, 2014, Pages 14-24, ISSN 0166-8641, https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.06.008.

[32] T. Kalman, *Meridian twisting of closed braids and the Homfly polynomial*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 146(3), 649-660. doi:10.1017/S0305004108002016.

[33] T. Nakamura, *Notes on the braid index of closed positive braids*, Topology Appl. 2004, 135: 13–31.
[34] P. Feller, D. Krcatovich, *On cobordisms between knots, braid index, and the upsilon-invariant*, Math. Ann. 369 (2017), no. 1-2, 301–329. MR 3694648, https://doi.org/10.1007/s00208-017-1519-1.
[35] L. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology 26(3) (1987), 395–407.
[36] M. Thistlethwaite, *A Spanning Tree Expansion of the Jones Polynomial*, Topology 26(3) (1987), 297–309.
[37] K. Murasugi, *The Jones Polynomial and Classical Conjectures in Knot Theory*, Topology 26 (1987): 187-194.
[38] M. B. Thistlethwaite, *On the Kauffman polynomial of an adequate link*, Invent. Math. 93, no. 2 (1988): 285–96.
[39] W. B. R. Lickorish, M. B. Thistlethwaite, *Some links with nontrivial polynomials and their crossing-numbers*, Comment. Math. Helv., 63(1), 1988, 527-539.
[40] M. Polyak, *Alexander–Conway invariants of tangles*, preprint, 2010.
[41] M. Brandenbursky, *Coloring link diagrams and Conway–type polynomial of braids*, Topology and its Applications, Volume 161, 2014, Pages 141-158, ISSN 0166-8641.
[42] L. Sabalka, *Geodesics in the braid group on three strands*, Group theory, statistics, and cryptography, 133–150, Contemp. Math., 360, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
[43] M. Berger, *Minimum crossing numbers for 3–braids*, J. Phys. A 27 (1994), no. 18, 6205-6213.
[44] J. Mairesse, F. Mathéus, *Growth series for Artin groups of dihedral type*, Internat. J. Algebra Comput. 16 (2006), 1087–1107.
[45] R. Charney, J. Meier, *The language of geodesics for Garside groups*, Math. Zeitschrift 248 (2004), 495–509.
[46] A. Stoimenow, *Non-triviality of the Jones polynomial and the crossing numbers of amphicheiral knots*, preprint, 2007.
[47] A. M. Vershik, S. Nechaev, R. Bikbov, *Statistical properties of locally free groups with applications to braid groups and growth of random heaps*, Commun. Math. Phys. 212 (2000), 469–501.
[48] H. Chapman, *On the Structure and Scarcity of Alternating Knots*, preprint, 2018.
[49] S. Yamada, *The minimal number of Seifert circles equals the braid index of link*, Invent. Math. 891 (1987), 347–356.
[50] J. Stallings, *Constructions of fibred knots and links*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc.), 2:55–60, 1978.
[51] J. Conway, *An enumeration of knots and links*, in: J. Leech (Ed.), Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, 1969, pp. 329–358.
[52] W. Menasco, M. Thistlethwaite, *A classification of alternating links*, Ann. of Math. 138 (1993) 113–171.
[53] W. W. Menasco, *Alternating Knots*, preprint, 2019.
[54] C. Ernst, D. W. Sumners, *The growth of the number of prime knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 102 (1987), 303–315.

The author was supported by Pavel Solikov.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Бабошина Сергея Дмитриевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Численное моделирование процесса погружения сваи импульсным погружателем» являются:

- Уравнение 7, отражающее численную модель процесса погружения сваи;
- Программа, для моделирвоания процесса погружения сваи (Раздел 3: Программная реализация).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Google, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: вибрационное погружение, вибрационное внедрение, импульсный погружатель. Выдача поисковиков не содержала материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Костиным Дмитрием Владимировичем, профессором кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета.
- Проведены семинары с зав. каф., д.ф.-м.н. математического моделирования, профессором математического факультета Воронежского государственного университета Костиным Владимиром Алексеевичем (2019 г.), а также с д.ф.-м.н. профессором кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета Сапроновым Юрием Ивановичем (2018 г.)

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоялась 10.06.19. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Бабошин Сергей Дмитриевич
31 мая 2021 г. Воронеж, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФГБОУ ВО («ВГУ»)

Математический факультет

Кафедра математического моделирования

Численное моделирование процесса погружения сваи импульсным погружателем

Бакалаврская работа

Направление 01.03.04 Прикладная математика

Профиль Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

Зав. кафедрой _____ д.ф.-м.н., проф. В.А. Костин __.__.2019 г.
подпись

Обучающийся _____ С.Д. Бабошин
подпись

Руководитель _____ д.ф.-м.н. Д.В. Костин
подпись

Воронеж 2019

Содержание

Введение **3**

1 Модель погружателя **4**

1.1 Вибрационное погружение и внедрение 4

1.2 Описание процесса вибропогружения в терминах ньютоновской механики 7

2 Численное моделирование **10**

2.1 Необходимые сведения из теории разностных схем 10

2.2 Разностная схема 12

3 Программная реализация **13**

Заключение **15**

Список литературы **16**

Введение

В настоящей работе рассматривается процесс погружения сваи импульсным погружателем. Моделирование этого процесса позволяет решить ряд задач, возникающих на практике. Имеющийся на сегодняшний день математический аппарат не располагает инструментами для моделирования процесса работы полигармонических импульсных погружателей. Таким образом в данной работе ставятся и решаются следующие задачи:

1. Описать математическую модель взаимодействия элементов системы: ипмульсного погружателя, сваи и грунта;

2. Получить численное решение для уравнения, представляющего собой модель процесса погружения сваи;

3. Сравнить полученные результаты с результатами, полученными в ходе практических испытаний.

Данная работа состоит трёх частей. В первой части описывается математический аппарат вибрационной механики. Даются основные понятия, а также описываются механические процессы происходящие во время работы погружателя. Во второй части происходит численное моделирование процесса погружения с использованием метода конечных разностей, а также даются основные определения, связанные с этим методом. В третьей части описываются результаты, полученные в ходе данной дипломной работы.

Целью этой работы является составление математической модели процесса работы импульсного погружателя. Результатом этой работы будет служить программа, которая решает задачу поставленную ранее.

1 Модель погружателя

1.1 Вибрационное погружение и внедрение

Погружение в грунт тел, подвергаемых действию вибрирования, представляет собой сложное механичекское явление. Вибрационный погружатель предназначен для погружения (извлечения) свай в песчаные или глинистые грунты. Рассмотрим схему вибрационного погружателя (рис. 1), а также факторы, играющие наиболее существенную роль в процессе вибрационного погружения.

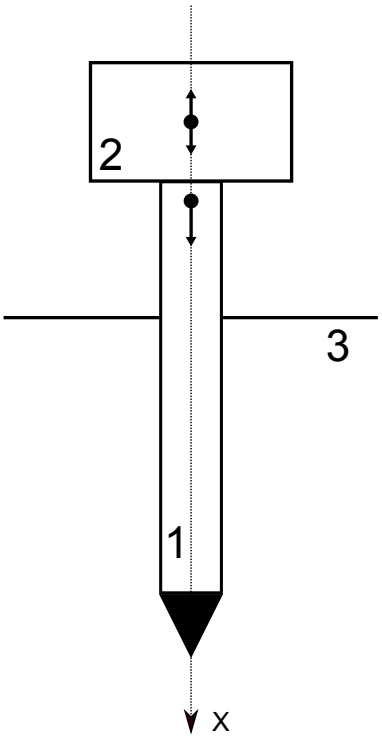


Рис. 1: Вибрационный погружатель.

К погружаемому элементу 1 (будем называть его *сваей*) жестко присоединен *вибровозбудитель* 2, генерирующий гармоническую силу $\Phi_0 \sin \omega t$ и вдавливающий сваю в *грунт* 3. Здесь Φ_0 - амплитуда колебаний, ω - частота колебаний и t - время.

Определение 1. *Сила, которая меняется с течением времени по гармоническому (синусоидальному или косинусоидальному) закону называется гармонической.*

Для выяснения основных закономерностей работы погружателя примем следующее предположение: будем считать, что при движении сваи вниз

сопротивление равно $-F+$, а при движении вверх $F-$, причём $F+ > F-$, т.к. $F-$ обусловлено только силами сопротивления, распределёнными по боковой поверхности, а $F+$ учитывает также силы сопротивления дейстующие на торец сваи. [1]

Дифференциальное уравнение движения сваи при сделанных предположениях имеет вид:

$$m\ddot{x} = mg + \Phi_0 \sin \omega t + F(\dot{x}), \tag{1}$$

где

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} -F_+ & \text{при} \quad \dot{x} > 0, \\ F_- & \text{при} \quad \dot{x} < 0, \end{cases} \tag{2}$$
$$-F_+ < F(\dot{x}) < F_- \quad \text{при} \quad \dot{x} = 0.$$

Определение 2. *Вибрационным погружением называют проникновение твёрдого тела в сопротивляющуюся среду под действием постоянной и знакопеременной сил.*

Основное отличие импульсного погружателя от вибропогружателя заключается в том, что сила, генерируемая импульсным погружателем имеет вид гармонических колебаний с явно выраженными периодическими импульсами и задаётся по следующему закону:

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kt), \ t \in [-\pi, \pi], \ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{3}$$

На рисунке (2) представлен график данной функции при $n = 6$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_6 = 1$.

Как видно из данного графика большую часть времени свая стоит на месте т.к. силы, генерируемой погружателем, недостаточно для преодоления сопротивления грунта. Поэтому, говоря о скорости погружения сваи, будем подразумевать среднюю скорость погружения.

Определение 3. *Под вибрационным внедрением будем понимать внедрение твёрдого тела в сопротивляющуюся среду с заданной средней скоростью.*

[1] Более подробно про силы дейстующие на сваю в процессе погружения будет рассказано в главе (1.2).

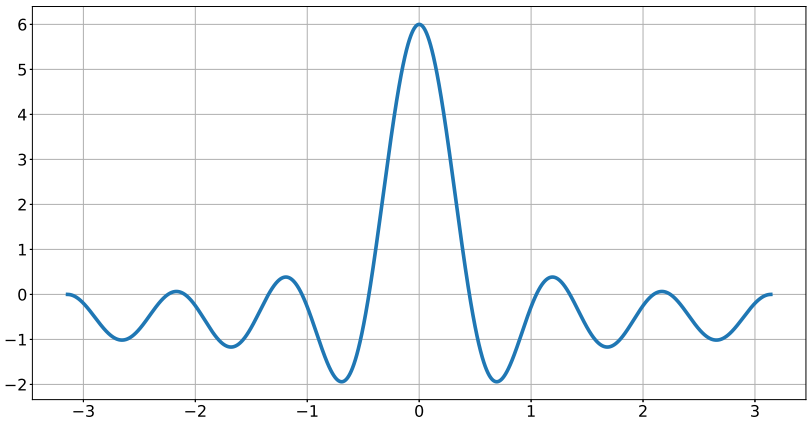


Рис. 2: Импульс, генерируемый импульсным погружателем.

В работе импульсного погружателя полезной силой считается та, которая направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду. Для компенсации горизонтальных сил, возникающих при вращении одного дебаланса, в конструкции погружателя дебалансы используются парами. Их вращение происходит в противоположные стороны, по отношению друг к другу. В таком случае, уравнение гармонического колебания пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m\omega^2 l \cos(\omega t) \tag{4}$$

где m - масса дебаланса, l - расстояние от центра масс до оси вращения дебаланса, ω - угловая скорость.

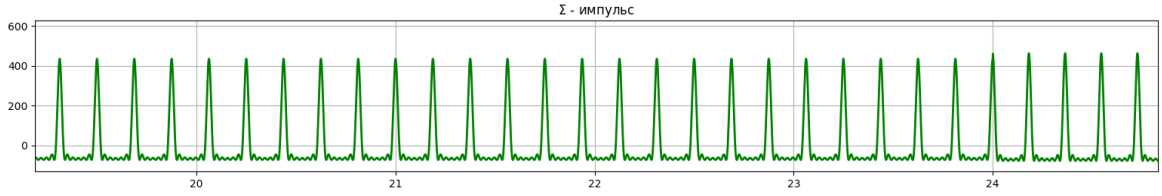


Рис. 3: Оптимальный импульс, создаваемый импульсным погружателем.

Для всех пар дебалансов сумма гармонических колебаний будет иметь вид:

$$F = \sum_{k=1}^{n} 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \tag{5}$$

где n — количество пар дебалансов, k — порядковый номер пары дебалансов.

График данной функции представлен на рисунке 3.

Основные параметры вибрационного внедрения:

1. Глубина погружения;
2. Скорость погружения.

На данный процесс оказывают влияние следующие параметры системы:

1. Длина сваи;
2. Форма и площадь сечения сваи;
3. Тип грунта.

1.2 Описание процесса вибропогружения в терминах ньютоновской механики

Расммотрим более подробно силы, действующие на сваю в процессе погружения. Примем несколько допущений:

- Свая представляет собой обсолютно твёрдое тело;
- Окружающий сваю грунт неподвижен;
- Между боковыми поверхностями сваи и грунтом действует сила сухого трения;
- Лобовое сопротивление грунта при внедрении в него сваи может изменяться;

Дадим следующие определения:

Определение 4. *Сила тяжести – сила, действующая на любое физическое тело, находящееся вблизи поверхности Земли или другого астрономического тела. Сила тяжести, действующая на материальную точку массой m вычисляется по формуле: mg, где g - ускорение, сообщаемое телу силой тяжести, которое называется ускорением свободного падения.*

Определение 5. *Лобовое сопротивление – сила, препятствующая движению тела в жидкостях и газах.*

Определение 6. *Боковое сопротивление – силы, препятствующе движению тела, распределённые по боковой поверхности.*

Определение 7. *Равнодействующая сила – векторная сумма всех сил, действующих на тело в данный момент времени.*

С учётом этих данных процесс вибрационного погружения можно описать с помощью нескольких этапов.

Этап подъёма вверх:

$$R = -F_{\text{вибр. возд.}} + F_{\text{тяж.}} + F_{\text{бс}},$$

где

R – равнодействующая сила (7),

$F_{\text{вибр. возд.}}$ – сила, создаваемая погружающей установкой,

$F_{\text{тяж.}}$ – сила тяжести (4),

$F_{\text{бс}}$ – сила бокового сопротивления (6).

Данный этап происходит при движении сваи вверх. Погружающая установка тянет сваю вверх, преодолевая силу тяжести и сопротивление грунта по боковой поверхности. Стоит заметить, что в случае с импульсным погружателем, сила тяжести и сила бокового сопротивления уравновешивают силу вибрационного воздействия, направленную вверх. Таким образом свая, которая хорошо переносит сильное сжатие, но разрушается при попытке растяжения остаётся целой.

Этап движения системы вниз до контакта с грунтом:

$$R = F_{\text{вибр. возд.}} + F_{\text{тяж.}} - F_{\text{бс}},$$

На данном этапе вибропогружатель преодолевает только боковое сопротивление грунта.

Этап контакта с грунтом:

$$R = F_{\text{вибр. возд.}} + F_{\text{тяж.}} - F_{\text{бс}} - F_{\text{лс}}, \tag{6}$$

где

$$F_{\text{лс}} - \text{сила лобового сопротивления (5)}$$

На текущем этапе добавляется сила сопротивления грунта на торце сваи. Если сила погружающей установки и сила тяжести не смогут превысить сопротивление грунта, то погружение остановится. После этого этапа происходит остановка системы, до тех пор, пока вынуждающей силы не станет достаточно чтобы поднять сваю вверх ($F_{\text{вибр. возд.}} > F_{\text{тяж.}} + F_{\text{бс}}$), после чего цикл повторяется.

В дальнейшем будем пользоваться уравнением (6) для численного моделирование процесса, т.к. оно содержит все силы действующие на систему в разные моменты времени.

2 Численное моделирование

Распишем равенство (6) более подробно. Через m обозначим массу всей установки, через $x(t)$ - глубину погружения сваи, а через t - время погружения сваи. Получаем:

- Согласно второму закону Ньютона $R = ma = m\ddot{x}$, где m - масса и a - ускорение.
- $F_{\text{тяж.}} = mg$, где g - ускорение свободного падения.
- $F_{\text{лс}} = S_{\text{пс}} h_i(x(t), \xi)$, где $S_{\text{пс}}$ - площадь поперечного сечения сваи, $h_i(x(t), \xi)$ - удельное лобовое сопротивление, ξ - коэфициент условий работы грунта под нижним концом сваи.
- $F_{\text{бс}} = Px(t)f_i(\psi)$ - сила бокового сопротивления, представляющая собой произведение периметра сваи P, глубины погружения $x(t)$ и удельной силы бокового сопротивления $f_i(\psi)$, зависящей от типа грунта.

Будем считать, что в момент времени $t = 0$ свая ещё не начала погружаться т.е. глубина погружения равна 0. Исходя из этого получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m\ddot{x} = F_{\text{вибр. возд.}} + mg + S_{\text{пс}} h_i(x(t), \xi) + Px(t)f_i(\psi) \tag{7}$$

с начальными условиями:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \tag{8}$$

Решение данного уравнения позволяет определить время и глубину погружения в зависимости от характеристик погружающей установки, размеров и веса сваи, а также типа грунта.

2.1 Необходимые сведения из теории разностных схем

Для того, чтобы описать дифференциальное уравнение, используя разностную схему необходимо сделать следующее:

1. Заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного изменения;

2. Заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором;

3. Заменить начальные и краевые условия их разностным аналогом.

При решении задач с использованием разностного метода мы не можем написать разностные решения для всех возможных аргументов, поэтому мы выберем несколько точек и будем приближённо искать решение только в этих точках. Такую совокупность точек называют сеткой (8).

Определение 8. *Сетка - множество точек, заданных в области определения некоторой функции.*

Теперь дадим определение разностной аппроксимации.

Определение 9. *Пусть дан дифференциальный оператор L, действующий на функцию $f = f(x)$. Если заменить все входящие в $L(f)$ производные разностными отношениями, то мы получим разностное выражение $L_h(f_h)$. Такая приближённая замена называется аппроксимацией дифференциального уравнения разностным оператором.*

Существует множество разностных выражений, аппроксимирующих $L(f)$. Например, пусть $L(f) = \frac{df}{dx}$. Тогда для его аппроксимации можно воспользоваться любым из следующих выражений:

$$L_h^+ f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{9}$$

$$L_h^- f = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{10}$$

$$L_h^0 f = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \text{ где } h = 0,5 \tag{11}$$

Здесь h - шаг сетки. Выражение (9) называется правая разностная производная, (10) - левая разностная производная и (11) - центральная разностная производная.

2.2 Разностная схема

Будем решать дифференциальную задачу (7) приближённо, с использованием разностной схемы. Для этого дадим следующее определение:

Определение 10. *Совокупность разностных уравнений, апроксимирующих основное дифференциальное уравнение, и дополнительные (краевые и начальные) условия называется разностной схемой.*

Рассмотрим разностную аппроксимацию дифференциальных операторов $L_x = \dot{x}$ и $L_{xx} = \ddot{x}$ на равномерной сетке с шагом h:

$$L_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \tag{12}$$

$$L_{xx} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)}{h} = \frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2} \tag{13}$$

Перепишем равенство (13) в виде:

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2}, \tag{14}$$

где $x_i = x(t_i), t_{i+1} = t_i + h$.

Заменим $\ddot{x}$ в уравнении (7) разностной аппроксимацией (14):

$$\begin{aligned} m\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} &= F_{\text{вибр. возд.}} + mg + S_{\text{пс}}h_i(x(t), \xi) + Px(t)f_i(\psi) \\ x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} &= \frac{h^2}{m}(F_{\text{вибр. возд.}} + mg + S_{\text{пс}}h_i(x(t), \xi) + Px(t)f_i(\psi)) \\ x_{i+1} &= 2x_i - x_{i-1} + \frac{h^2}{m}(F_{\text{вибр. возд.}} + mg + S_{\text{пс}}h_i(x(t), \xi) + Px(t)f_i(\psi)) \end{aligned} \tag{15}$$

Получили рекуррентное равенство, которое позволяет расчитать текущее значение x, зная два предыдущих значения. Будем считать, что $x_0 = x_1 = 0$.

3 Программная реализация

Для расчёта глубины и времени погружения сваи была написана программа на языке Python, которая расчитывает глубину погружения, используя равенство (15). Для наглядности она выводит полученные данные в виде графиков (рис. 4).

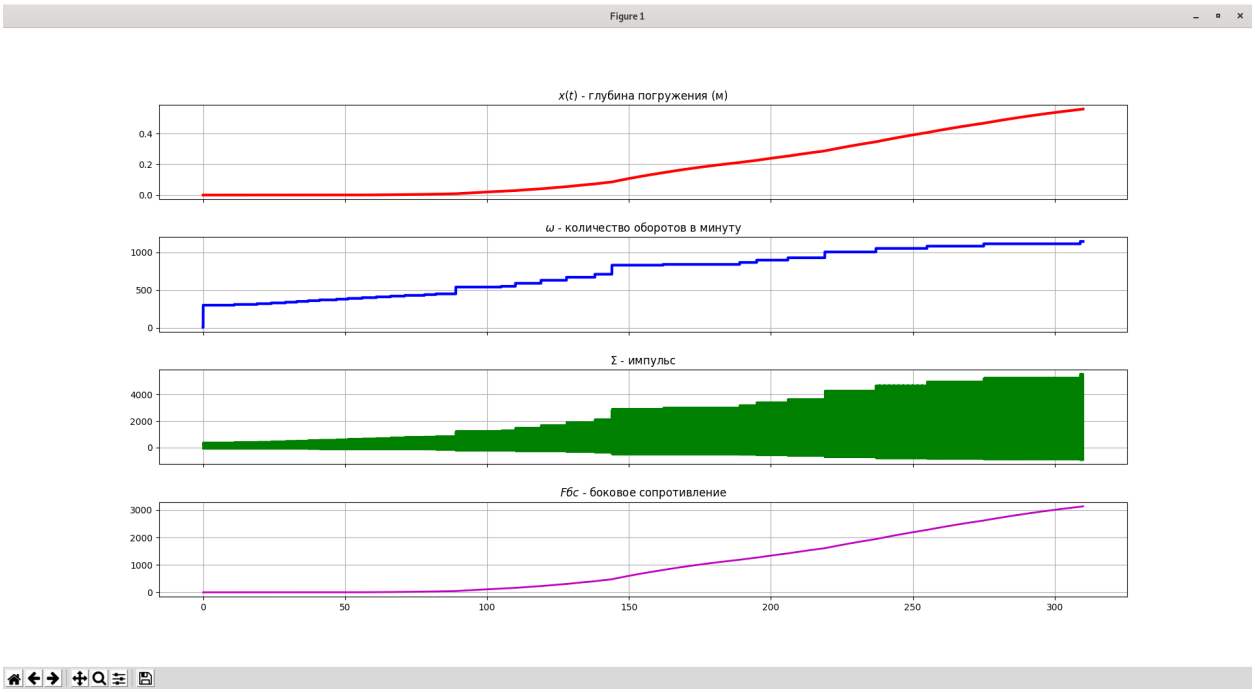


Рис. 4: Скриншот окна программы.

Параметры системы, необходимые для работы программы (такие как вес сваи, длина сваи, параметры сопротивления грунта и пр.) вводятся пользователем, перед запуском.

Проверка расчётов программы была произведена на практике. Для этого использовалась свая со следующими характеристиками:

- Свая представляет собой квадратную трубу с размером 40x40 мм и толщиной стенки 2 мм,
- Длина сваи - 1,7 м,
- Масса сваи - 4,17 кг.

Масса испульсного погружателя - 37 кг.
Результаты данного испытания можно видеть на рисунке (5).

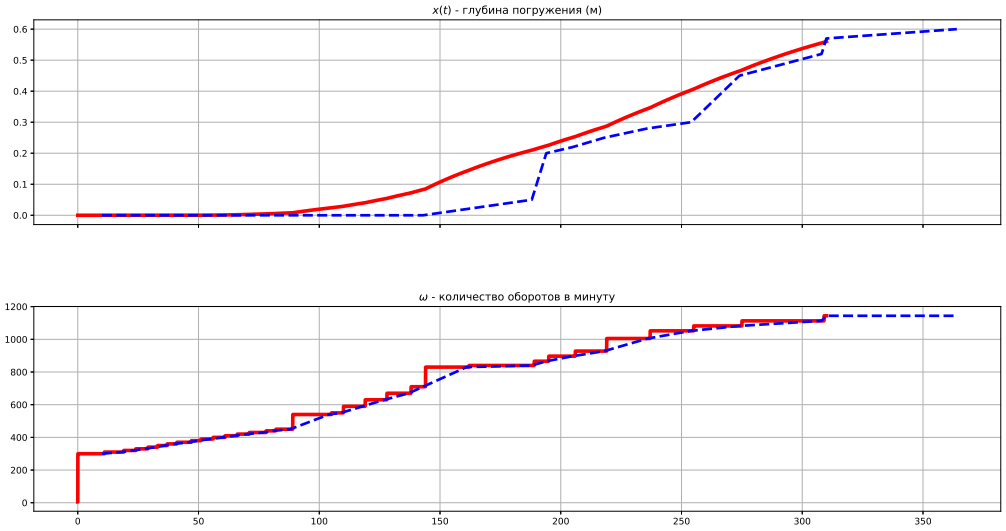


Рис. 5: Сравнение результатов численного решения и результатов, полученных на практике.

На данном рисунке красным цветом выделен график процесса погружения, расчитанного программой, а синим - результаты полученные в ходе испытания. Как мы видим полученная модель довольно точно описывает процесс погружения.

Заключение

В ходе данной работы была решена задача о нахождении глубины и скорости погружения сваи при заданных параметрах погружающей установки и грунта. Была описана математическая модель взаимодействия элементов системы, а также получено численное решение уравнения, представляющего собой модель процесса погружения сваи. Были проведены практические испытания полученной модели, которые показали, что данная модель хорошо описывает процесс погружения.

Список литературы

1. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. — М. : Физико-математическая литература, 1994.
2. *Костин В. А.*, *Костин Д. В.*, *Сапронов Ю. И.* Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов // ДАН. — 2012. — т. 445. — с. 271—273.
3. *Костин Д. В.*, *Костина Т. И.*, *Бабошин С. Д.* Численное моделирование процесса погружения сваи // Современные методы теории функций и смежные проблемы. — Воронеж, 2019. — с. 173—174.
4. *Лутц М.* Изучаем Python. — М. : Символ-Плюс, 2011.
5. *Савинов О. А.*, *Лускин А. Я.* Вибрационный метод погружения свай и его применение в строительстве. — М. : Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960.
6. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. — М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1971.
7. *Цейтлин М. Г.*, *Верстов В. В.*, *Азбель Г. Г.* Вибрационная техника и технология в свайных и буровых работах. — Ленинград : Стройиздат, 1987.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Блудова Михаила Васильевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Цветная теорема Твербрега для неизбежных комплексов» являются: определение 1.13, теорема 2.1, теорема 3.1

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, connectedpapers.com, arxiv.org по следующим ключевым словам: unavoidable complexes, colored Tverberg theorem. Были исследованы предлагаемые в выдаче поисковиков статьи (основной список см. в References) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. В работах [7], [8], [10], [13] содержатся основные идеи и понятия, однако они не содержат доказываемых в выпускной квалификационной работе теорем, которые являются явными обобщениями некоторых результатов, представленных в [7], [8].
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Паниной Гаянэ Юрьевной, профессором факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и обсуждений с научным руководителем следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 16.06.2021. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  Блудов Михаил Васильевич

31 мая 2021 г.
Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет

Блудов Михаил Васильевич

Выпускная квалификационная работа

Цветная теорема Тверберга для неизбежных комплексов

Бакалавриат
направление 01.03.01 «Математика»
основная образовательная программа СВ.5000.2017 «Математика»

Научный руководитель:
профессор, факультет математики и компьютерных наук, Санкт-Петербургский государственный университет, доктор физико-математических наук,
Панина Гаянэ Юрьевна

Рецензент:
профессор,
математический институт Сербской академии наук и искусств,
Ph.D.,
Раде Живалевич

Санкт-Петербург
2021

1 Введение

Теоремы типа Тверберга и Ван Кампена-Флореса уже многие годы являются центральной темой для исследований в комбинаторной геометрии. Среди наиболее важных результатов выделим нахождение контрпримеров к общей топологической теореме Тверберга [6, 11, 3] . Однако были получены положительные результаты в других направлениях.

Для "сбалансированных" комплексов (определение 1.8) была получена "сбалансированная теорема типа Ван Кампена-Флореса" [9, Theorem 1.2]. Затем в [7] с помощью нового подхода, основанного на концепции "сбалансированности", "коллективной неизбежности" (определение 1.11) и методах дискретной теории Морса [5], была получена теорема 1.2 (теорема Тверберга для коллективно-неизбежных комплексов), которая является обобщением [9, Theorem 1.2] и представляется наиболее общим результатом типа Тверберга и Ван Кампена-Флореса. Используя идею коллективной (r, s)-неизбежности, в этой работе было получено небольшое обобщение теоремы 1.2.

Ещё одно направление исследований состоит в изучении "цветных теорем типа Тверберга" [17, 1]. В [8], среди прочего, была получена "сбалансированная цветная теорема Тверберга" 1.3. Эта теорема использует понятие "сбалансированности" и методы дискретной теории Морса и является родственной для теоремы 1.2 (но при этом она не использует понятие неизбежности). Основной результат этой работы состоит в том, что было получено обобщение теоремы 1.3 с помощью концепции коллективной неизбежности (теорема 2.1) (и тем самым получено некоторое слияние теорем). Идею доказательства мы заимствуем из доказательства исходной теоремы 1.3, дополняя её существенными деталями.

1.1 Предварительные определения

Определение 1.1. Под $[m]$ будем подразумевать множество $\{1, \dots m\}$, а $2^{[m]}$ – множество всех подмножеств $[m]$. Мы также не будем различать $2^{[m]}$ и $\Delta_{[m]}$ – комбинаторный симплекс на m вершинах размерности $N = m - 1$ (мы также отождествляем симплекс Δ^N с комбинаторным $\Delta_{[m]}$).

Определение 1.2. *Симплициальным комплексом* будем называть пару (K, V), где V – некоторое множество (базовое множество, обычно $[m]$), $K \subset 2^V$ и удовлетворяет свойству наследственности: если $A \in K$ и $B \subset A$, то $B \in K$. Другими словами, K – множество симплексов комплекса. Для удобства, мы будем отождествлять K и сам симплициальный комплекс. Под $A \uplus B$ будем иметь в виду $A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$ – формальное дизъюнктное объединение.

Определение 1.3. Пусть K, L – симплициальные комплексы. Тогда *джойном* [12] мы назовем $K * L$ – симплициальный комплекс со множеством вершин $V(K) \uplus V(L)$ и со множеством симплексов $\{F \uplus G : F \in K, G \in L\}$. Т.е. мы взяли дизъюнктное

объединение вершин двух симплексов, затем скомбинировали все симплексы первого комплекса с симплексами второго.

Определение 1.4. Пусть $\mathscr{K} = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ – семейство симплициальных комплексов, $K_i \subset 2^{[m]}$. Тогда *проколотым джойном* этого семейства назовем симплициальный комплекс $(\mathscr{K}^*_\Delta) = K_1 *_\Delta \ldots *_\Delta K_r \subset (2^{[m]})^{*r}$ и $A \in \mathscr{K}^*_\Delta \iff A = \uplus_{i=1}^r A_i$, A_j попарно дизъюнктны и $A_j \in K_j$ для j от 1 до r.

Определение 1.5. *Симметрический проколотый джойн* определяется как

$$SymmDelJoin(\mathscr{K}) = \bigcup_{\pi \in S_r} K_{\pi_1} *_\Delta \ldots *_\Delta K_{\pi_r} \subseteq (2^{[m]})^{*r},$$

где S_r – симметрическая группа. Элементы этого джойна имеют вид $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_r \in SymmDelJoin(\mathscr{K})$. Для удобства будем обозначать их $(A_1, \ldots, A_r, B)$, где B – это $[m] \backslash \bigcup_{i=1}^r A_i$. Т.о. $(A_1, \ldots, A_r, B)$ является дизъюнктным разбиением множества вершин $[m]$.

Определение 1.6. *Раскраской* множества вершин $[m]$ в $k+1$ цвет назовем разбиение вершин на $k+1$ множество: $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$. Подмножество вершин V будем называть радужным, если каждый из цветов присутствует в нем не более одного раза, т.е. $|V \cap C_i| \leq 1$ для $i = 1, \ldots, k+1$. Симплекс $\Delta \subset \Delta_{[m]}$ назовем *радужным*, если множество его вершин $V = vert\Delta$ является радужным. Симплициальный комплекс K будем называть радужным, если все его симплексы – радужные. Через $Col\Delta_{[m]}$ обозначим симплициальный комплекс, образованный из всех радужных симплексов в $\Delta_{[m]}$.

Определение 1.7. Пусть дан симплициальный комплекс $K \subseteq \Delta_{[m]}$. Его *d-скелетом* $K^{(d)}$ будем называть множество всех таких симплексов из K, что их размерность не превосходит d.

Определение 1.8. Будем называть симплициальный комплекс $K \subset 2^m$ (m,k)-*сбалансированным*, если $\Delta^{(k-1)}_{[m]} \subseteq K \subseteq \Delta^{(k)}_{[m]}$. И если $[m]$ раскрашено, то будем называть его (m,k)-*радужно сбалансированным*, если $Col\Delta^{(k-1)}_{[m]} \subseteq K \subseteq Col\Delta^{(k)}_{[m]}$.

1.2 Коллективно-неизбежные комплексы

Коллективно-неизбежные комплексы как самостоятельный комбинаторный объект систематически начали изучаться в [13]. В [10] авторы изучают топологические свойства r-неизбежных комплексов. Здесь дадим определение этого понятия и приведем один из результатов работы [10].

Определение 1.9. Пусть дан симплициальный комплекс K на множестве вершин $[m]$. Тогда он называется r-неизбежным, если если для любого упорядоченного разбиения $[m]$ вида $(A_1, \ldots, A_r, B)$ найдётся такой индекс i, что $A_i \in K$ для $i = 1, \ldots, r$.

В [10] даётся также естественное обобщение:

Определение 1.10. Пусть дан симплициальный комплекс K на множестве вершин $[m]$. Будем называеть его (r,s)-*неизбежным*, если для любого упорядоченного разбиения $[m]$ вида $(A_1,\dots,A_r,B)$ найдутся такие s индексов, что $A_{i_j}\in K$ для $j=1,\dots,s$.

Нас же будут интересовать коллективно r-неизбежные семейства комплексов. Сформулируем определения и для них [4]:

Определение 1.11. Пусть дано семейство $\mathscr{K}=\langle K_1,\dots,K_r\rangle$ подкомплексов Δ_m. Будем называеть его *коллективно r-неизбежным*, если для любого упорядоченного разбиения $[m]$ вида $(A_1,\dots,A_r,B)$ найдётся такой индекс i, что $A_i\in K_i$ для $i=1,\dots,r$.

Определение 1.12. Пусть дано семейство $\mathscr{K}=\langle K_1,\dots,K_r\rangle$ подкомплексов $\Delta_{[m]}$. Будем называеть его *коллективно (r,s)-неизбежным*, если для любого упорядоченного разбиения $[m]$ вида $(A_1,\dots,A_r,B)$ найдутся такие s индексов, что $A_{i_j}\in K_{i_j}$ для $j=1,\dots,s$.

В [10] был получен следующий интересный результат:

Теорема 1.1. *Пусть $r=p^\nu$ – степень простого. Пусть $K=K_1*\ldots*K_s$, где K_i – это r-неизбежный комплекс на m_i вершинах ($K_i\subseteq\Delta_{[m_i]}$) для каждого $i=1,\dots,s$. Тогда если*

$$(r-1)(d+s+1)+1\le m_1+\ldots+m_s,$$

то для любого непрерывного $f\colon K\to\mathbb{R}^d$ найдется r дизъюнктных граней в K таких, что их образы будут иметь непустое пересечение.

В этой теореме доказывается высокая связность джойна r-неизбежных комплексов. Эта теорема похожа на 1.2, однако в случае коллективной неизбежности и симметризации проколотого джойна оказывается, что для доказательства высокой связности нужно накладывать также условие (m,k)-сбалансированности, а само доказательство использует методы дискретной теории Морса.

1.3 Краткий обзор теорем типа Тверберга

"Теоремы типа Тверберга" – это общее название для семейства теорем, посвященных специальным разбиениям конечного множества точек в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$.

Оригинальная теорема Тверберга [14] утверждает, что если множество $S\subset\mathbb{R}^d$ т.ч. $|S|=(r-1)(d+1)+1$, то его можно разбить на r непустых непересекающихся частей $S_1,\dots,S_r$ так, что пересечение их выпуклых оболочек будет непустым: $\cap_{i=1}^r conv(S_i)\neq\emptyset$.

Среди предшествующих, например, можем отметить теорему Радона о том, что множество из $d+2$ точек в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на два так, что их выпуклые оболочки будут пересекаться.

Оригинальную теорему можно понимать так: S – это образ N-мерного симплекса Δ^N $(N = (r-1)(d+1))$ под действием некоторого аффинного отображения f, и утверждается, что найдется r непустых непересекающихся граней, что их образы пересекутся: $f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$.

Это утверждение можно расширить до топологической теоремы Тверберга [15, 2]: если f – произвольное непрерывное отображение

$$f\colon \Delta^{(r-1)(d+1)} \to \mathbb{R}^d$$

и $r = p^\nu$ – степень простого, то утверждение остается верным: найдется r непустых непересекающихся граней, что их образы пересекутся: $f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$.

Дальнейшие обобщения можно получать, накладывая различные условия на искомые грани Δ_i, например, можем требовать чтобы каждая грань выбиралась из соответствующего ей симплициального комплекса, $\Delta_i \in K_i$, $K_i \subset \Delta^N$. Например, в [7], среди прочего, был получен следующий (основной) результат:

Теорема 1.2 (Теорема Тверберга для коллективно-неизбежных комплексов)**.** *Пусть $\mathscr{K} = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ – это коллективно r-неизбежное семейство подкомплексов Δ^N, где $r = p^\nu$ – степень простого, $N = (r-1)(d+2)$ и $m = N+1$. Если для всех $i = 1, \ldots, r$ выполнено, что K_i – (m,k)-сбалансированно, то для любого непрерывного отображения $f\colon \Delta^N \to \mathbb{R}^d$ найдется r непересекающихся граней Δ_i, что $f(\Delta_1) \cap \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$ и для каждого i верно, что $\Delta_i \in K_i$.*

Другой путь обобщения – это раскраска вершин и требование условия "радужности" искомых граней – т.е. все вершины в грани должны быть разноцветными. В [8], в частности, была получена следующая теорема:

Теорема 1.3 (Сбалансированная цветная теорема Тверберга)**.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого. Пусть целые $d \geq 1$, $k \geq 0$ и $0 < s \leq r$ таковы, что $r(k-1) + s = (r-1)d$. Пусть $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$ – раскраска вершин Δ^N, где $N+1 = m = (2r-1)(k+1)$ и $|C_i| = 2r-1$ для каждого i. Тогда для любого непрерывного отображения $f : \Delta^N \to \mathbb{R}^d$ найдется r дизъюнктных радужных симплексов, т.ч. $f(\Delta_1) \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$ и $dim(\Delta_i) \leq k$ для $i = 1, \ldots, s$, $dim(\Delta_j) \leq k-1$ для $j = s+1, \ldots, r$.*

Далее мы докажем обобщение этой теоремы (и получим, в некотором смысле, смесь из последних двух теорем).

Определение 1.13. Пусть дан кортеж $\mathscr{K} = \langle K_1, \ldots, K_r \rangle$ подкомплексов Δ_m. Если все K_i являются радужными комплексами для фиксированной раскраски $[m]$, то будем называть $\mathscr{K}$ коллективно (r,s)-*радужно-неизбежным*, если для любого упорядоченного разбиения вида $(A_1, \ldots, A_r, B)$ такого, что все симплексы A_i являются радужными, найдутся такие s индексов, что $A_{i_j} \in K_{i_j}$ для $j = 1, \ldots, s$.

2 Цветная теорема Тверберга для радужно-неизбежных комплексов

Теорема 2.1 (Цветная теорема Тверберга для радужно-неизбежных комплексов)**.** *Пусть $r = p^\nu$ – степень простого. Пусть целые $d \geq 1$, $k \geq 0$ и $0 < s \leq r$ таковы, что $r(k-1)+s = (r-1)d$. Пусть $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$ – раскраска вершин Δ_m, где $m = (2r-1)(k+1)$ и $|C_i| = 2r-1$ для каждого i. Пусть также $\mathscr{K} = \langle K_i \rangle_{i=1}^r$ – это коллективно (r,s)-радужно-неизбежное семейство подкомплексов $\Delta_{[m]}$ и K_i (m,k)-радужно-сбалансирован для каждого i . Тогда для любого непрерывного отображения $f : \Delta_{[m]} \to \mathbb{R}^d$ найдется r дизъюнктных радужных симплексов, т.ч. $f(\Delta_1) \ldots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$ и $\Delta_i \in K_i$.*

Доказательство теоремы. Эта теорема получается из стандартного рассуждения, которое можно найти, например, в [7] или в [8]. Предположим противное, то есть нашлось такое отображение $f\colon \Delta_{[m]} \to \mathbb{R}^d$, что при этом образы различных граней не пересекаются.

Построим естественным образом S_r-эквивариантное отображение

$$\Phi_f : SymmDelJoin(\mathscr{K}) \to (\mathbb{R}^d)^{*r} = \mathbb{R}^{dr+r-1}.$$

Образ этого отображения не задевает диагональ $D \subset \mathbb{R}^{dr+r-1}$. Заметим, что D – подпространство размерности d пространства $\mathbb{R}^{dr+r-1}$. Заметим, что мы можем убрать D и оставшееся $\mathbb{R}^{dr+r-1} \setminus D$ эквивариантно гомотопно $S^{(r-1)(d+1)-1}$ – имеет связность $rd+r-d-3$. Связность $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ равна $rk+s-2 = rd+r-d-2$ – получили противоречие с теоремой Воловикова [16]. ■

Осталось проверить, что $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ имеет требуемую связность.

Теорема 2.2. *Пусть $[m] = C_1 \uplus \ldots \uplus C_{k+1}$ – раскраска вершин Δ_m, где $m = (2r-1)(k+1)$ и $|C_i| = 2r-1$ для каждого i. Пусть $\mathscr{K} = \langle K_i \rangle_{i=1}^r$. Пусть также все K_i радужные, (m,k)-радужно-сбалансированные и $\mathscr{K}$ коллективно (r,s)-радужно-неизбежное семейство подкомплексов Δ_m. Тогда $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ $rk+s-2$ связно.*

Доказательство теоремы. Доказывается эта теорема с помощью дискретной теории Морса [5]. Суть ДТМ заключается в том, что мы построим дискретное векторное поле на нашем комплексе, докажем его ацикличность и, изучив критические симплексы, получим желаемое.

Мы будем понимать дискретное векторное поле как набор пар (или стрелок) из симплекса и его гиперграни. Каждый симплекс может участвовать не более чем в одной паре. Спариваем симплексы, пока это возможно. Симплексы, оставшиеся без пары, будем называть критическими. Это поле будет ацикличным, если в нем не найдется замкнутого градиентного пути. Под *градиентным путем* мы понимаем последовательность

$$G_0^p, G_0^{p+1}, G_1^p, ..., G_k^{p+1}, G_{k+1}^p,$$

где верхний индекс p указывает на размерность симплекса в нашем комплексе. Для нижнего индекса выполнено, что для каждого i : G_i^p в паре с G_i^{p+1} и $G_i^{p+1} > G_{i+1}^p$, $G_{i+1}^p \neq G_i^p$ и $G_{i+1}^{p+1} \neq G_i^{p+1}$.

После этого мы можем применить одну из основных теорем ДТМ о том, что если симплициальный комплекс с дискретной функцией Морса на нем имеет 1 нульмерную клетку и все оставшиеся клетки имеют размерность $> k$, то комплекс $k-1$ связен.

Построим дискретную функцию Морса так, что в итоге критическими симплексами будут только нульмерный симплекс (вершина) и симплексы, размерность которых не менее $rk+s-1$, то есть это те, в которых не менее $rk+s$ вершины. Это докажет, что пространство имеет связность $rk+s-2$.

Сделаем несколько замечаний про изучаемое пространство. Каждый из K_i содержит в себе все радужные симплексы на k вершинах и также содержит некоторый набор t_i радужных симплексов $D_{i,1}, \ldots, D_{i,t_j}$ на $k+1$ вершине, т.е. эти симплексы – максимальные по включению радужные симлексы, т.е. используют все возможные цвета.

Проводить построение ДФМ будем в несколько шагов.

Будем называть разбиение $(A_1, \ldots A_r, B)$ допустимым, если $(A_1, \ldots A_r, B) \in SymmDelJoin(\mathscr{K})$. Когда разбиение допустимо? Когда каждое из A_i радужно и при этом существует такая перестановка π, что $A_{\pi(i)} \in K_i$. С разбиением можем ассоциировать симплекс в $SymmDelJoin(\mathscr{K})$. Наша цель – спарить все симплексы в $SymmDelJoin(\mathscr{K})$, за исключением симплексов высокой размерности.

Симплекс назовем максимальным, если он не является гранью никакого другого симплекса из $SymmDelJoin(\mathscr{K})$.

Доказательство будет происходить в несколько шагов (всего их r). Каждый из шагов также будет разбит на $k+1$ подшаг. Каждый шаг - это процедура спаривания каких-то симплексов и анализ оставшихся.

Шаг 1 Спаривать будем только симплексы из $SymmDelJoin(\mathscr{K})$.

Шаг 1.1 Каждого цвета у нас $2r-1$ вершина. Пронумеруем их (цвета уже пронумерованы). Пусть есть симплекс $(A_1, \ldots A_r, B)$. Положим $a_1^1 = min(A_1, B) \cap C_1$ – минимальная вершина цвета 1 из A_1 и B. Тогда спарим $(A_1, \ldots A_r, B \cup a_1^1) \to (A_1 \cup a_1^1, \ldots A_r, B)$. Проанализируем, что получилось. Симплекс вида $(A_1 \cup a_1^1, \ldots A_r, B)$ не спарен $\iff$ A$_1 \cup a_1^1 = a_1^1$ и $B = [m]$ – это симплекс размерности 0 и он не будет спарен до конца всей процедуры. Симплекс вида $(A_1, \ldots A_r, B \cup a_1^1)$ не спарен, если в A_1 уже есть цвет 1 или симплекс после переноса a_1^1 получается недопустимым – то есть не принадлежит $SymmDelJoin(\mathscr{K})$.

Шаг 1.2 Положим $a_1^2 = min(A_1 \cup B \cap C_2)$ – минимальная вершина цвета 2 из A_1 и B. Тогда составим пару $(A_1, \ldots A_r, B \cup a_1^2) \to (A_1 \cup a_1^2, \ldots A_r, B)$ – если оба эти симплекса не были спарены на предыдущем этапе. Проанализируем, что получилось.

- симплекс вида $(A_1, \ldots A_r, B \cup a_1^2)$ остался не спаренным, если A_1 или уже содержит цвет 2, или при переносе a_1^2 получим недопустимый симплекс. Назовем такие

разбиения "Шаг 1.2 тип 1 неспаренные"

- если симплекс вида $(A_1 \cup a_1^2, \dots A_r, B)$ неспарен, то это значит, что мы не можем перекинуть a_1^2 в B, т.е. $(A_1, \dots A_r, B \cup a_1^2)$ уже спарен на предыдущем этапе посредством a_1^1, т.е. $a_1^1 \in B$, в A_1 нет цвета 1 и $|A_1 \cup a_1^2| = k$. Назовем такие симплексы "Шаг 1.2 тип 2 неспаренным".

Продолжим по аналогии. Шаг $i.j$ типа 1 означает, что мы не можем переместить минимальный элемент цвета j из B в A_i. Типа 2 – не можем из A_i в B. Шаги до $1.k+1$ продолжаем по аналогии. Для дальнейших рассуждений нам понадобится модификация понятия "допустимости".

Определение 2.1. Назовем симплекс $(A_1, \dots, A_r, B)$ - "шаг i" максимально допустимым, если $|A_i| = k$ и при добавлении к A_i недостающего цвета мы получим недопустимый симплекс.

Лемма 2.3. *Если после шага 1 симплекс $(A_1, \dots A_r, B)$ является неспаренным, то:*

- $|A_1| = k+1$, *или*
- $|A_1| = k$ *и* $(A_1, \dots A_r, B)$ – *"шаг 1" максимально допустимый.*

Шаг 2. На этом шаге будем спаривать, добавляя вершины к A_2.

Шаг 2.1 Положим $a_2^1 = min\left((A \cup B \cap C_2) \setminus [1, a_1^1)\right)$. Спарим $(A_1, A_2, \dots A_r, B \cup a_2^1) \to (A_1, A_2 \cup a_2^1, \dots A_r, B)$ – если оба эти симплекса не были спарены ранее.

- Если $(A_1, A_2, \dots A_r, B \cup a_2^1)$ остался без пары, то либо A_2 уже содержит цвет 1, либо $|A_2| = k$ и это "шаг 2" максимально допустимый симплекс. Это симплексы "шаг 2.1 типа 1".
- Если $(A_1, A_2 \cup a_2^1, \dots A_r, B)$ неспарен, то он "шаг 1" максимально допустимый и $|A_2| = k+1$ Это симплекс "шаг 2.1 типа 2".

Лемма 2.4. *Если после шага* 2.1 *симплекс $(A_1, \dots A_r, B)$ является неспаренным, то:*

- $|A_2| = k+1$, *или*
- $|A_2| = k$ *и* $(A_1, \dots A_r, B)$ – *"шаг 2" максимально допустимый.*

Шаги 2.2 – 2.k+1 – происходят аналогично. Собирая все вместе, можем сформулировать лемму.

Лемма 2.5. *Для шагов от* 1 *до* $r-1$ *числа a_j^i определены корректно. Заметим, что после $r-1$ шага если симплекс $(A_1, \dots A_r, B)$ остался неспаренным, то для всех i от* 1 *до* $r-1$ *мы знаем, что*

- $|A_i| = k+1$ *или*

- $|A_i| = k$ *и* $(A_1, \dots A_r, B)$ *"шаг* i*" максимально допустимый.*

Шаг r

Шаг r.1 Положим $a_r^1 = min\left((A_r \cup B \cap C_2) \setminus [1, a_{r-1}^1)\right)$. Может получиться так, что $(A \cup B \cap C_2) \setminus [1, a_r^1) = \emptyset$, т.е. a_r^1 не определено. Тогда мы точно знаем, что для i от 1 до r все A_i содержат цвет 1. Такие неспаренные симплексы обозначим как "шаг r.1 типа 3". Если же все определено корректно, то продолжаем как ранее.

Шаг r.2 Положим $a_r^2 = min\left((A_r \cup B \cap C_2) \setminus [1, a_{r-1}^2)\right)$. Если определено некорректно, то это "шаг r.2 типа 3", все A_i содержат цвет 2. В противном случае продолжаем аналогично ранее описанной процедуре.

Шаги r.2 – r.k+1 – продолжаем шаги по аналогии.

Лемма 2.6. *Оставшиеся неспаренные симплексы либо максимальные, либо имеют высокую размерность.*

Доказательство леммы. Если симплекс неспарен, то для каждого i либо $|A_i| = k+1$, либо $|A_i| = k$ и он "шаг i" максимально допустим. Тогда либо он является максимальным, либо первые $|A_i| = k+1$ для $i = 1, \dots, r-1$ – уже высокая размерность. ■

Утверждение 1. *Все неспаренные симплексы (за исключением нульмерного) имеют высокую размерность, а именно содержат не менее* $rk + s$ *точек.*

Доказательство утверждения. Достаточно рассмотреть максимальные симплексы среди неспаренных. Рассмотрим максимальный симплекс $(A_1, \dots A_r, B)$. Не умоляя общности будем считать, что $A_j \in K_j$ для всех j. Ещё раз заметим, что если для какого-то j имеем $|A_j| = k$ то $a_j^{i_j}$ – корректно определено (где i_j – это недостающий цвет в A_j). Все a_j^i различны. Пусть A_{j_l} – все такие, что $|A_{j_l}| = k$. Вернем во все множества недостающий им цвет, т.е. $A_{j_l} \mapsto A_{j_l} \cap a_{j_l}^{i_{j_l}}$. Получили новый, уже недопустимый симплекс, так как если к A_{j_l} добавить недостающий цвет, то мы получим что $A_{j_l} \cap a_{j_l}^{i_{j_l}} \notin K_{j_l}$ – иначе противоречие с максимальностью. Но воспользовавшись условием на (r,s)-радужную неизбежность у нашего семейства $\langle K_i \rangle_{i=1}^r$ мы найдем для нового симплекса как минимум s индексов, что $A_{i_j} \in K_{i_j}$ для $j = 1, \dots, s$ – это означает, что в изначальном наборе было как минимум s множеств размера $k+1$ – что и требовалось. ■

Осталось показать ацикличность. Пусть есть градиентный путь

$$\alpha_0^p, \beta_0^{p+1}, \alpha_1^p, ..., \beta_m^{p+1}, \alpha_{m+1}^p.$$

Для всех симплексов α можем определить последовательность чисел

$$\Pi(\alpha) := (a_1^1, a_1^2, \dots, a_r^1 \dots, a_r^{k+1}),$$

где все a^i_j – те, которые появляются в алгоритме спариваний. Они определены корректно, кроме, быть может, шага r. Если α спарена на каком-то шаге, то на этом шаге определено и a^i_j. Если a^i_r не определено, то положим его равным ∞.

Лемма 2.7. *На градиентном пути* $\Pi(\alpha)$ *строго уменьшает свой лексикографический порядок. Отсюда следует, что градиентный путь ацикличен.*

Доказательство леммы. Для доказательства достаточно рассмотреть короткий путь

$$\alpha^p_0, \beta^{p+1}_0, \alpha^p_1, \beta^{p+1}_1.$$

Мы проведем разбор случаев.

1. Пусть $\alpha^p_0, \beta^{p+1}_0$ спарены добавлением цвета i к A_j, а α^p_1 получается из β^{p+1}_0 удалением цвета $i' > i$ из A_j.
   - Если для спаривания мы должны удалить цвет i из A_j в α^p_1, то путь на этом останавливается.
   - В противном случае, α^p_1 спарен до шага $j.i$.
2. Пусть $\alpha^p_0, \beta^{p+1}_0$ спарены добавлением цвета i к A_j, а α^p_1 получается из β^{p+1}_0 удалением цвета $i' < i$ из A_j. Тогда α^p_1 спарен до шага $j.i$.
3. Пусть $\alpha^p_0, \beta^{p+1}_0$ спарены добавлением цвета i к A_j, а α^p_1 получается из β^{p+1}_0 удалением цвета i' из A'_j с $j' < j$. Тогда
   - либо α^p_1 спарен добавлением j', i',
   - либо α^p_1 спарен до шага $j'.i'$.
4. Пусть $\alpha^p_0, \beta^{p+1}_0$ спарены добавлением цвета i к A_j, а α^p_1 получается из β^{p+1}_0 удалением цвета i' из A'_j с $j' > j$. Тогда
   - либо α^p_1 спарен удалением цвета i из A_j и тем самым обрывает путь,
   - либо α^p_1 спарен до шага $j'.i'$.

Таким образом, лемма доказана. А это завершает доказательство теоремы 2.2. ■

3 "Монохромная" теорема Тверберга для коллективно (r, s)-неизбежных комплексов

Мы можем немного обобщить теорему Тверберга [7] для коллективно-неизбежных комплексов: а именно, мы будем требовать теперь (r, s)-неизбежность.

Теорема 3.1 (Теорема Тверберга для (r,s)-неизбежных комплексов)**.** *Пусть $\mathscr{K} = \langle K_1, \dots, K_r\rangle$ – это коллективно (r,s)-неизбежное семейство подкомплексов Δ^N, где $r = p^\nu$ – степень простого, $N = (r-1)(d+2) - s + 1$ и $m = N+1$. Если для всех $i = 1, \dots, r$ выполнено, что K_i – (m,k)-сбалансированный, то для любого непрерывного отображения $f\colon \Delta^N \to \mathbb{R}^d$ найдется r непересекающихся граней Δ_i, что $f(\Delta_1) \cap \dots \cap f(\Delta_r) \neq \emptyset$ и для каждого i верно, что $\Delta_i \in K_i$.*

Действительно, потребовав коллективную (r,s)-неизбежность, мы увеличим связность $SymmDelJoin(\mathscr{K})$ на $s-1$. Т.е. теперь она равна $m - r + s - 2$. А тогда условие на то, что $m - r + s - 2 \geq (r-1)(d+1) - 1$ эквивалентно тому, что $N \geq (r-1)(d+2) - s + 1$. Заметим, что подставив $s = 1$ мы окажемся в точности в условиях исходной теоремы о коллективно-неизбежных комплексах. Таким образом, мы можем уменьшить число N (однако это приведет к увеличению числа k, ведь мы требуем условие (m,k)-сбалансированности, а чем выше параметр s, тем больше симплексов должно быть в комплексах K_i). Если же мы подставим $r = s$, то из условия (r,s)-неизбежности мы получим, что все K_i будут в точности $\Delta_{[m]}$ и мы получим в чистом виде топологическую теорему Тверберга: $N = (r-1)(d+2) - r + 1 = (r-1)(d+1)$.

4 Коллективная (r,s)-неизбежность в терминах графов

Пусть $\mathscr{K} = \langle K_1, \dots, K_r\rangle$, при этом K_i – (m,k)-сбалансированы (или радужно-сбалансированы). Заметим, что такие K_i можно описать как $\Delta^{(k)}_{[m]} \setminus \mathscr{A}$, где $\mathscr{A}^i = \{A^i_1, \dots, A^i_{l_i}\}$ и для всех i, j имеем $|A^i_{j_i}| = k+1$. Т.е. $\mathscr{A}^i$ – это те симплексы, которых не хватает K_i до $\Delta^{(k)}_{[m]}$ (или $Col\Delta^{(k)}_{[m]}$). Тогда $\mathscr{K}$ можно сопоставить граф $\Gamma = \Gamma(\mathscr{K})$. Его вершины – пары (i,j), где $i = 1, \dots, r$ и для каждого i имеем $j = 1, \dots, l_i$. Две вершины (i,j) и (i',j') соединены ребром, если $i \neq i'$ и $A^i_j \cap A^{i'}_{j'} = \emptyset$. То есть это кнезеровский r-дольный граф $KG(\mathscr{A})$.

Предложение 4.1. *Если набор комплексов $\mathscr{K}$ является (r,s)-неизбежным, то в графе $\Gamma(\mathscr{K})$ нет клики размера $r - s + 1$.*

Доказательство предложения. Действительно, если $\mathscr{K}$ является (r,s)-неизбежным, тогда если мы нашли в построенном графе Γ клику размера $r - s + 1$, тогда мы нашли $r - s + 1$ симплекс на $k+1$ вершине – причем заметим, что найденные симплексы $A^i_{j_i}$ не принадлежат соответствующим им комплексам K_i и при этом дизъюнктны. Тогда дополним их произвольным набором из $s-1$ симплекса так, что полученный набор из r симплексов получился бы упорядоченным разбиением множества вершин m на r дизъюнктных подмножеств. Полученный набор будет контрпримером к (r,s)-неизбежности $\mathscr{K}$. ■

Замечание. В теореме 1 можем поменять условие (r,s)-неизбежности на отсутствие $r - s + 1$-клики в $\Gamma(\mathscr{K})$. Доказательство при этом не поменяется.

Замечание. Обратное в общем случае, вообще говоря, не верно. Возьмем, например, k маленьким – например, если $m > (k+2)(r-s+1)$, то мы можем просто взять $r-s+1$ множество размера $k+2$ и тогда они не будут лежать ни в каких K_i. А если положить все K_i просто k-скелетами, то построенный на них кнезеровский граф будет пустым, но при этом они не будут (r,s)-неизбежными. Однако обратное будет верно в условиях теорем 1 и 2 (понятно, что все определения продолжаются на радужный случай). Это так, потому что все симплексы радужные, и в любом разбиении количество вершин в симплексах A_i не превосходит $k+1$. А тогда если в графе нет $r-s+1$ клики, то выбрав любое разбиение мы найдем s дизъюнктных множеств размера не более $k+1$, которые не лежат в соответствующих долях Γ. Тогда они лежат в соответствующих комплексах K_i – откуда получаем коллективную радужную (r,s)-неизбежность.

5 Сравнение с предыдущими результатами

Теорема 1.3 является следствием теоремы 2.1. Действительно, рассматриваемое там конфигурационное пространство $\mathscr{C}$ является $SymmDelJoin(\mathscr{K})$, где $\mathscr{K} = \langle K_1, \dots, K_r \rangle$, при этом $K_i = Col\Delta^{(k)}_{[m]}$ для $i = 1, \dots, s$ и $K_i = Col\Delta^{(k-1)}_{[m]}$ для $i = s+1, \dots, r$. Ясно, что такой набор симплексов обладает свойством коллективной (r,s)-радужной неизбежности. Остается только заметить, что (r,s)-неизбежными являются наборы не только из s радужных k-скелетов и $r-s$ радужных $k-1$-скелетов. Для этого достаточно построить кнезеровский граф без $r-s+1$-клики. Например, все K_i могут быть равны $Col\Delta^{(k)}_{[m]} \setminus A$, где A – какой-то фиксированный радужный симплекс на $k+1$ вершине. Тогда в графе вообще не будет ни одного ребра.

6 Заключение

Таким образом, применив идею коллективной (r,s)-радужной неизбежности, мы доказали теорему 2.1, которая является обобщением теоремы 1.3 и получили "цветной аналог" теоремы 1.2. Также, расширив коллективную r-неизбежность до (r,s)-неизбежности, мы получили обобщение теоремы 1.2 и с помощью параметра s проследили прямую связь с топологической теоремой Тверберга.

References

[1] I. Bárány and D. G. Larman. "A Colored Version of Tverberg's Theorem". In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-45.2 (1992), pp. 314–320. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s2-45.2.314. eprint: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s2-45.2.314. URL: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s2-45.2.314.

[2] I. Bárány, S. B. Shlosman, and A. Szücs. "On a Topological Generalization of a Theorem of Tverberg". In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-23.1 (1981), pp. 158–164. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/s2-23.1.158. eprint: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s2-23.1.158. URL: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s2-23.1.158.

[3] Pavle V. M. Blagojević, Florian Frick, and Günter M. Ziegler. *Barycenters of Polytope Skeleta and Counterexamples to the Topological Tverberg Conjecture, via Constraints*. 2019. arXiv: 1510.07984 [math.CO].

[4] Jojić Duško et al. "Alexander r-tuples and bier complexes". In: *Publications de l'Institut Mathematique* 104.1 (118 Jan. 2018), pp. 1–22. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s1-41.1.123.

[5] R. Forman. "Topological methods in discrete geometry". In: *Sém. Lothar. Combin.* 48 (Dec. 2001).

[6] Florian Frick. *Counterexamples to the topological Tverberg conjecture*. 2015. arXiv: 1502.00947 [math.CO].

[7] Duško Jojić, Gaiane Panina, and Rade Živaljević. *A Tverberg type theorem for collectively unavoidable complexes*. 2018. arXiv: 1812.00366 [math.CO].

[8] Duško Jojić, Gaiane Panina, and Rade T. Živaljević. *Colored Tverberg problem, extensions and new results*. 2020. arXiv: 2002.09186 [math.MG].

[9] Duško Jojić, Siniša Vrećica, and Rade Živaljević. *Symmetric multiple chessboard complexes and a new theorem of Tverberg type*. 2016. arXiv: 1502.05290 [math.CO].

[10] Duško Jojić et al. *Topology of unavoidable complexes*. 2018. arXiv: 1603.08472 [math.AT].

[11] Isaac Mabillard and Uli Wagner. "Eliminating Tverberg Points, I. An Analogue of the Whitney Trick". In: *Proceedings of the Thirtieth Annual Symposium on Computational Geometry*. SOCG'14. Kyoto, Japan: Association for Computing Machinery, 2014, pp. 171–180. ISBN: 9781450325943. DOI: 10.1145/2582112.2582134. URL: https://doi.org/10.1145/2582112.2582134.

[12] Jiri Matousek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. Springer Publishing Company,Incorporated, 2007. ISBN: 3540003622.

[13] Marija Jelić Milutinović et al. *Combinatorics of 'unavoidable complexes'*. 2019. arXiv: 1612.09487 [math.CO].

[14] H. Tverberg. "A Generalization of Radon's Theorem". In: *Journal of the London Mathematical Society* s1-41.1 (Jan. 1966), pp. 123–128. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s1-41.1.123.

[15] A.Y. Volovikov. "On a topological generalization of the Tverberg theorem." In: *Math Notes* 59 (Dec. 1996), pp. 324–326. DOI: 10.1007/BF02308547.

[16] Rade Živaljević. "Topological methods in discrete geometry". In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry (Third Edition)*. Ed. by J. O'Rourke J.E. Goodman and C.D. Tóth. Boca Raton, FL: CRC Press LLC, 2017. Chap. 21, pp. 551–580.

[17] Rade T Živaljević and Siniša T Vrećica. "The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 61.2 (1992), pp. 309–318. ISSN: 0097-3165. DOI: https://doi.org/10.1016/0097-3165(92)90028-S. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009731659290028S.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Воробьевой Дарьи Витальевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Разработка инструмента лингвистического анализа контента веб-ресурсов» являются: определение индивидуальных показателей процесса чтения пользователя веб-ресурса в режиме online, отражающие уровень понимания как отдельных понятий информационного наполнения веб-страницы, так и всего контента в целом, посредством мониторинга процесса восприятия контента пользователем; определение техники чтения пользователя в режиме online, а также оценка полученных показателей процесса чтения пользователя с целью поддержки принятия решения по адаптации контента (С позиции разработки системы лингвистического анализа веб-контента, которая направлена на поддержку принятия решения об изменении информационного наполнения веб-страницы, адаптация – это перестройка контента под уровень понимания информации пользователем с учетом его индивидуальных особенностей процесса чтения). Индивидуальные параметры чтения, которые необходимы для отражения уровня понимания контента пользователем, были выявлены на основе психолингвистических методов.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 сентября 2020 г. по 17 февраля 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar по следующим ключевым словам: параметризация процесса чтения контента пользователем на веб-ресурсе, оценка уровня понимания прочитанного веб-контента на интернет-ресурса, в выдаче поисковиков было исследовано 26 официальных изданий и научных публикаций (список см. в пункте «Список литературы» выпускной квалификационной работы) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1], [7], [10], [22], [24] были найдены данные о возможности отслеживания таких показателей движения взгляда, по наличию которых можно делать вывод о том, какую технику чтения использует читатель и что влияет на восприятие отдельных единиц текста при движении взгляда, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно, так как ни в одной из работ не указывается, что нужно отслеживать индивидуальные показатели процесса чтения пользователя в режиме online и производить оценку показателей процесса чтения пользователя с целью выявления проблемных мест при восприятии информационного наполнения веб-страницы. Это необходимо для своевременной адаптации контента на веб-ресурсе под индивидуальный уровень понимания пользователя. Наличие работ, указанных в списке литературы настоящей выпускной квалификационной работы лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Татьяной Вадимовной Гвоздевой, заведующей кафедрой информационных технологий факультета информатики и вычислительной техники Ивановского государственного энергетического университета им. В.И. Ленина.
- Проведено выступление по данной тематике были представлены на научной конференции: XIV МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ «ЭНЕРГИЯ-2021» в г. Иваново

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 25.06.2021. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись Воробьева Воробьева Дарья Витальевна

28 мая 2021 г., Иваново, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет Информатики и Вычислительной техники
Кафедра Информационных технологий
Направление подготовки 09.03.03 – Прикладная информатика
Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная информатика в информационной сфере»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ Т.В. Гвоздева
(подпись)
«____»_____2021 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к выпускной квалификационной работе

на тему: «Разработка инструмента лингвистического анализа контента веб-ресурсов»

Обучающийся: _____ Воробьева Д.В.

Руководитель: к.э.н, доцент _____ Гвоздева Т.В.

Иваново 2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ЛЕНИНА»

Факультет информатики и вычислительной техники
Кафедра информационных технологий
Направление подготовки (специальность) 09.03.03 Прикладная информатика
Направленность (профиль) образовательной программы – Прикладная информатика в информационной сфере

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_____ Т.В. Гвоздева
«____»_____ 2021 г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение выпускной квалификационной работы
обучающемуся гр. 4-45 *Воробьевой Дарье Витальевне*

1. Тема работы: *Разработка инструмента лингвистического анализа контента веб-ресурсов.*
2. Исходные данные к работе: результаты производственной практики (научно-исследовательской работы), производственной практики (практики по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности).

3. Содержание работы (перечень вопросов, подлежащих разработке):
3.1. Выполнить предпроектные исследования системы продвижения инноваций в открытой информационной среде:
– исследовать процессы продвижения инноваций посредством размещения веб-ориентированного контента на Интернет-ресурсах;
– изучить процесс восприятия контента пользователем и определить роль системы мониторинга процесса восприятия контента в задачах продвижения инноваций в открытой информационной среде;
– изучить инструментальные средства оценки восприятия контента;
– исследовать принципы и функционал существующей системы «Создания и адаптации контента»
– исследовать существующие подходы к оценке процесса восприятия медийного контента, в том числе с использованием психолингвистических методов;
– сформулировать требования к системе лингвистического анализа контента веб-ресурса, обеспечивающей непрерывное наблюдение и оценку процесса восприятия пользователем представленного контента и разработать концептуальную модель системы лингвистического анализа контента веб-ресурса.
3.2. Разработать техническое задание на инструмент лингвистического анализа контента веб-ресурса.
3.3. Выполнить техническое проектирование методов и средств лингвистического анализа медийного контента открытых информационных ресурсов:
3.3.1. Выполнить формализованную постановку задачи контроля чтения контента пользователем:

– разработать параметрическую модель процесса чтения контента, разработать методы чтения и их оценки с целью поддержки принятия решения по адаптации контента;

– разработать функциональную структуру инструмента лингвистического анализа медийного контента;

– разработать решения по информационному обеспечению: определить источники данных, выбрать и разработать методы получения данных и методы передачи системе создания и адаптации контента;

– разработать решения по программному обеспечению системы: разработать архитектуру программной системы с учетом ее интеграции в систему продвижения инноваций; определить перечень необходимых сервисов и компонентов для решения задач проектирования; разработать интерфейсы взаимодействия с системой продвижения инноваций;

– разработать решения по организационно-техническому обеспечению программной системы: распределить ответственность за решение прикладных задач и задач по обслуживанию программной системы;

– разработать решения по информационной безопасности и защите информации;

3.4. Выполнить программную реализацию функций, указанных в п. 3.3.1, разработать интерфейсы доступа и регламент информационных процессов. Подготовить проектную документацию.

3.5 Разработать прототип инструмента лингвистического анализа контента веб-ресурса и выполнить его апробацию.

5. Графический материал: схема функциональной структуры, схема логической модели базы данных, схемы алгоритмов, схема организационно-технической структуры, презентация выпускной квалификационной работы и раздаточный материал (при необходимости).

Руководитель _____ Т.В. Гвоздева

Обучающийся _____ Д.В. Воробьева

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет Информатики и Вычислительной техники
Кафедра Информационных технологий
Направление подготовки 09.03.03 – Прикладная информатика
Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная информатика в информационной сфере»

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН
подготовки выпускной квалификационной работы (ВКР)

№ п/п	Наименование этапов работы	Срок выполнения	
		начало	окончание
1	Выполнение технико-экономическое обоснование целесообразности разрабатываемой системы	11.05.2021	13.05. 2021
2	Подготовка решений по информационной безопасности	13.05. 2021	14.05. 2021
3	Разработка и внедрение программной системы	14.05. 2021	20.05. 2021
4	Разработка организационной и эксплуатационной документации на программную систему	20.05. 2021	25.05. 2021
5	Оформление отчета по практике и подготовки к защите	22.05. 2021	25.05. 2021
6	Анализ и при необходимости корректировка проектных решений в соответствии с заданием на ВКР с учетом результатов производственных практик	27.05. 2021	31.05. 2021
7	Оформление ВКР и графического материала, подготовка к процедуре защиты	03.06. 2021	26.06. 2021
8	Процедура защиты ВКР	27.06. 2021	27.06. 2021
9	Завершение процедуры государственной итоговой аттестации: информационная и техническая подготовка результатов ВКР, в том числе к размещению в ЭИОС и библиотеке ИГЭУ	28.06. 2021	06.07. 2021

Руководитель _____ Т.В. Гвоздева

Обучающийся _____ Д.В. Воробьева

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ДО – деловое окружение
ИС – информационная система
ПО – программное обеспечение
ИВ – информационное воздействие
СУ – субъект управления
ОУ – объект управления
СУБД – система управления базами данных
БД – база данных

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 8

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ 9

1.1 Исследование процессов продвижения инноваций посредством размещения веб-ориентированного контента на Интернет-ресурсах 9

1.2 Сущность и роль информационного воздействия при продвижении инноваций в открытой информационной среде 11

1.3 Исследование процесса восприятия контента пользователем и определение роли системы мониторинга процесса восприятия контента в задачах продвижения инноваций в открытой информационной среде 14

1.4 Исследование принципов и функционала существующей системы «Создания и адаптации контента» 20

1.5 Исследование существующих подходов к оценке процесса восприятия медийного контента 23

1.6 Изучение инструментальных средств оценки восприятия контента 26

1.7 Формирование требований на разработку информационной системы 28

1.7.1 Определение потребностей в существующей системе «Создания и адаптации контента (СИАК)» 28

1.8 Концептуальная модель инструмента лингвистического анализа веб-контента 30

1.9 Анализ и выбор ТПР 30

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 34

ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ РАЗРАБОТКИ ИНСТРУМЕНТА ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОНТЕНТА НА ВЕБ-РЕСУРСЕ 46

1.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И ЭФФЕКТОВ ДО И ПОСЛЕ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ 48

1.2 РАСЧЕТ ЗАТРАТ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИС ДО И ПОСЛЕ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ 51

1.2.1 Расчет затрат на уровне into 51

1.2.2. Расчет затрат на уровне in. 55

1.2.3. Расчет затрат на уровне for. 56

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ - $\Delta Э_{into}$, $\Delta Э_{in}$, $\Delta Э_{for}$ 56

ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОЕКТ 57

ОБЩИЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ 59

ОПИСАНИЕ РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ 61

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ИНСТРУМЕНТА ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ВЕБ-КОНТЕНТА 73

РЕШЕНИЯ ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ ОБЕСПЕЧЕНИЮ 75

РЕШЕНИЯ ПО ПРОГРАММНОМУ ОБЕСПЕЧЕНИЮ 77

РЕШЕНИЯ ПО РЕШЕНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКОМУ ОБЕСПЕЧЕНИЮ 82
РЕШЕНИЯ ПО ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ 85
1. АУДИТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ ЗАЩИТЫ 85
2. КАТЕГОРИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ 85
3. АНАЛИЗ РИСКОВ УГРОЗ ИБ 86
4. ВЫБОР И РЕАЛИЗАЦИЯ СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ 87
КОНТРОЛЬНЫЙ ПРИМЕР 94
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 137
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 138
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. 140
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 156
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 162
ПРИЛОЖЕНИЕ 4 169

ВВЕДЕНИЕ

Конкурентоспособность любой организации на рынке определяется ее деловой средой, то есть теми потребителями, которые у нее есть. На сегодняшний день производители и потребители находятся в свободных экономических отношениях, т.е. каждый участник вправе самостоятельно выбирать и устанавливать связи с теми или иными объектами из своего делового окружения. Таким образом, чтобы оставаться конкурентоспособным необходимо, во-первых, повышать качество используемых ресурсов и технологий для производства продукта и оказания услуг, во-вторых, расширять круг деловой среды.

Среди проблем, возникающих у наукоёмких компаний, выделяется проблема, связанная с продвижением инновационных товаров на рынок. Именно эта причина в большей степени тормозит развитие инновационных предприятий и не даёт расширить им круг своей деловой среды. Продвижение инновационных продуктов связано с решением задачи снятия неопределенности об инновационном продукте и возможностях его применения потенциальными потребителями. Переход маркетинговых процессов из offline в online среду является условием, облегчающим задачу охвата большой аудитории в процессе продвижения продукции, но существующие методы продвижения с использованием интернет-средств направлены на массового потребителя, не учитывая индивидуальные особенности отдельной целевой аудитории или человека.

На данном этапе развития маркетинговых технологий наиболее популярным методом продвижения продукции через интернет является контент-маркетинг. Контент-маркетинг означает продвижение вашего бизнеса при помощи контента. Главная задача контент-маркетинга рассказать целевой аудитории о продуктах и услугах, чтобы люди захотели стать вашими клиентами. Контент-маркетологи создают, курируют, публикуют и распространяют качественный контент для привлечения внимания пользователей сети к бренду или продукции бренда.

Качественным контент можно будет назвать, если он будет интересен и понятен пользователям. Проблема восприятия контента, использующегося при продвижении инновационных продуктов заключается в высокой степени неопределенности у целевой аудитории относительно инновации. Так как инновация - нечто новое на рынке, зачастую потребители не осознают варианты её использования, хотя имеют в ней неосознанную (латентную) потребность. Поэтому необходимо решать задачу адаптации контента информационных ресурсов продвижения инноваций под особенности восприятия целевой аудитории, их знания, их язык.

Характер взаимодействия субъектов инновационной экономики и факторов, влияющих на них, обусловливает успех или провал определенных идей, технологий, инноваций. Исследования в данном направлении в настоящее время ведутся не слишком активно, хотя именно они позволяют выявить, как ресурсные и эмоциональные составляющие отношений связаны с готовностью участников взаимодействия продвигать и воспринимать инновации. В настоящее время отсутствие взаимодействия и скоординированных решений отмечается учеными на всех уровнях инновационной деятельности. Поэтому важно иметь такую систему продвижения инноваций в открытой информационной среде, которая будет способствовать решению данной проблемы.

Совершенствование существующей системы управления контентом посредством разработки инструмента лингвистического анализа веб-контента объясняется необходимостью отслеживания реакции пользователей на информационное наполнение и адаптации под уровень его понимания на основании выделенных параметров чтения.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

1.1 Исследование процессов продвижения инноваций посредством размещения веб-ориентированного контента на Интернет-ресурсах

Главной целью производственного предприятия является формирование такой стратегии, которая позволит компании добиться высоких результатов и не потерять свое место на рынке, поэтому современной тенденцией стало продвижение предприятиями инновационного товара на рынок, путем заблаговременного определения потребительских предпочтений и внедрения новейших производств. Передовые инновации считаются определяющим фактором экономического роста и повышения конкурентоспособности.

Прежде чем исследовать современные методы продвижения инноваций, дадим определение понятию «инновация». В соответствии с Федеральным законом от 23.08.1996 N 127-ФЗ (ред. от 23.05.2016) «О науке и государственной научно-технической политике», инновация – есть введенный в употребление новый или значительно улучшенный продукт, услуга, технология, метод и т.д. Таким образом, продукт или услугу можно назвать инновационными, если они по-новому удовлетворяют традиционную потребность или способны удовлетворить принципиально новую потребность. Существует несколько классификаций инноваций. Но нас интересует исключительно «базисная инновация». Базисная инновация – инновация, базирующаяся на результатах научно-технических разработок, не имеющих аналогов в мировой практике, и направленная на освоение новых систем и технологий следующих поколений.

Инновационная деятельность – деятельность (научная, технологическая, организационная, финансовая и коммерческая), направленная на реализацию инновационных проектов, а также на создание инновационной инфраструктуры и обеспечение ее деятельности.

Продвижением инновационных продуктов занимается маркетинг инноваций. На данном этапе развития маркетинговых технологий наиболее популярным методом продвижения продукции через интернет является контент-маркетинг. Осуществляется он посредством web-ресурса предприятия.

Качественным контент можно будет назвать, если он будет интересен и понятен пользователям. Проблема восприятия контента, использующегося при продвижении инновационных продуктов заключается в высокой степени неопределенности у целевой аудитории относительно инновации. Так как инновация - нечто новое на рынке, зачастую потребители не осознают варианты её использования, хотя имеют в ней неосознанную (латентную) потребность. Поэтому необходимо решать задачу адаптации контента информационных ресурсов продвижения инноваций под особенности восприятия целевой аудитории, их знания, их язык.

Использование открытых информационных ресурсов для продвижения инновационной продукции позволяет осуществлять:

a. оценку рыночной ситуации в целом;

b. проверку гипотез и минимально жизнеспособного продукта на аудитории потенциальных потребителей до вынесения на глобальный рынок;

c. продвижение продукции с помощью множества методов и различных форм представления;

d. сбор и анализ обратной связи без дополнительных затрат, на протяжении всего использования потребителем открытого информационного ресурса.

Инновационный продукт – это неизведанный продукт для потребителя. Покупателю требуется время для того, чтобы оценить будущую эффективность от использования этого продукта. Поэтому необходимо учитывать, что контент, размещенный на web-ресурсе, должен быть ориентирован на целевую аудиторию. При этом, у потенциальных потребителей будет разная степень понимания относительно сути

инновационной продукции, принципа действия и того, как она способна удовлетворить их потребности. Отсюда возникает главная проблема базисной инновации – отсутствие спроса, то есть явной потребности у делового окружения предприятия, занимающегося инновационной деятельностью. К деловому окружению относятся такие категории, как потребители ($S_{\text{потр}}$), поставщики ($S_{\text{пост}}$), партнеры и конкуренты, с которыми предприятие (S) связано по трем каналам:

1. Ресурсный канал (C_R) – множество каналов получения ресурсов.
2. Продуктовый канал (C_P) – множество каналов реализации продукции или услуг.
3. Целевой канал (C_Z) – информационный канал, отображающий потребности среды (может отсутствовать в случае продвижения инновационных продуктов или услуг).

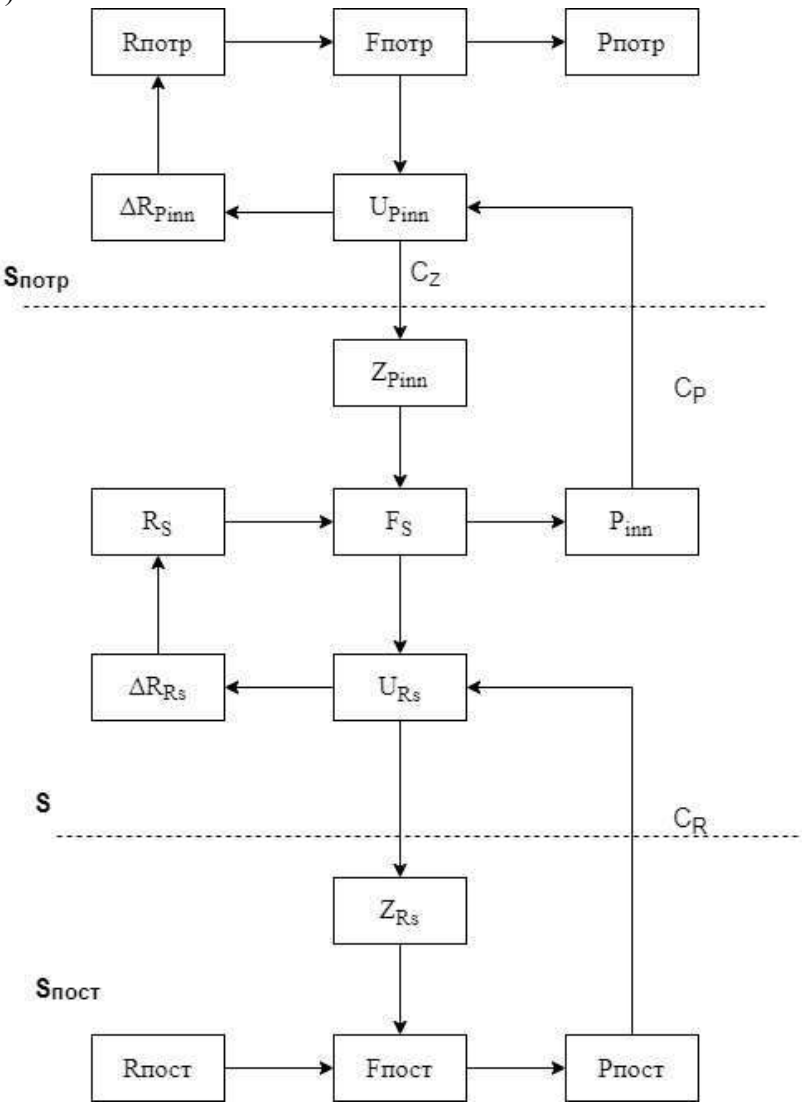


Рис. 1 Схема инновационной деятельности в условиях существования явной потребности у категорий делового окружения предприятия

Потенциальные потребители не осознают того, как инновационный продукт способен удовлетворить их потребности.

Изначально у потребителя может отсутствовать неопределенность совсем, при отсутствии каких-либо знаний о существовании этой самой инновации. А вот поставщики и партнеры могут иметь небольшое представление об инновации, если они ранее имели дело с чем-то похожим. Таким образом, их энтропия не является нулевой, но при этом не имеет максимального значения.

Как видно из рис. 1, при отсутствии потребности у потребителя, целевой и продуктовый каналы не могут существовать. Данная ситуация делает установление взаимовыгодных социально-экономических отношений с предприятием невозможным, в связи с чем возникает проблема продвижении инновации с целью снятия неопределенности у делового окружения и формирования явной потребности.

1.2 Сущность и роль информационного воздействия при продвижении инноваций в открытой информационной среде

«Экономические отношения в первую очередь подразумевают некие, парные взаимодействия кого-то с кем-то в процессе производства, распределения, обмена и потребления благ и услуг.» [18]. Достижение цели производства в рамках социально-экономической системы невозможно при наличии только технологии: технических средств, ресурсов и методов. Необходимо использовать ресурс способный к саморазвитию и самоорганизации – человек. Он является основным условием экономического роста согласно теории человеческого капитала, разработанной американским экономистом Г. Беккером. Человек является потребителем продукта, предосталвяемого на рынке, и соответственно, предназначение маркетинга состоит в определении и удовлетворении человеческих и общественных потребностей. Так как мы занимаемся продвижением инновационной продукции, необходимо определить, что такое маркетинг инноваций.

В литературе нет единого определения маркетинга инноваций. Основываясь на определениях «инновации» и «маркетинг» Тимофеев Н.В. даёт следующее определение [10]: «маркетинг инноваций – это разновидность маркетинга, целью которой является оценка и успешное целевое внедрение результатов инновационной деятельности предприятия, а также контроль успешности инновационного продукта по месту внедрения. Таким образом, это фактически один из главных инструментов инновационного менеджмента, придающих изобретению экономическое содержание и внедряющих его на рынок.».

Основополагающая роль маркетинга в инновационном процессе изучалась многими отечественными и зарубежными учёными. В настоящее время с ростом конкуренции рынок диктует новые условия функционирования и обеспечения инновационной деятельности. В связи с этим на смену традиционным методам маркетинга приходят более совершенные. В работах российских исследователей (Р. А. Фатхутдинова, А. Демченко, О. М. Хотяшевой, Л. Секерина, Е. П. Голубкова, Т. Коротковой, А. Власова, З. А. Васильева, Н. Н. Молчанова, В. Д. Секерина, Я. Матковской) появляется понятие «инновационного маркетинга».

Инновационный маркетинг рассматривается как самостоятельная концепция, согласно которой организация, в рамках инновационного процесса, должна совершенствовать используемые ей методы и средства маркетинга. В отличие от традиционного, инновационный маркетинг имеет большее влияние на повышение эффективности процесса создания, освоения и реализации инновационной продукции, что подразумевает разработку и использование инновационных приёмов в маркетинговой деятельности.

Процесс «вталкивания» инноваций начинается с привлечения внимания потенциальных покупателей к веб-сайту компании за счет качественного и полезного контента. Контент заменяет привычные традиционным продажам холодные звонки, так как покупатель сам ищет информацию, и повышает узнаваемость продуктов и бренда. Создание контента и его размещение позволяет делиться знаниями с потенциальными покупателями, что позволяет помочь им принять наиболее эффективное решение, что в итоге поможет им или их бизнесу.

Система организации потребителей (СОПк) оказывает информационное воздействие на человека как потребителя в системе экономических отношений, тем самым помогая ему идентифицировать проблему W_U – как повысить качество своего продукта и

снизить издержки ($W_U \neq \emptyset$)? Потребитель способен осознать проблему W_U без потребности в инновации, поэтому дальнейшим шагом информационного воздействия является предложение решения данной проблемы. У потребителя появляется информационная потребность U_{inf} – как решить проблему W_U (при этом $U_{inf} \neq \emptyset$). Когда потребитель узнает о существовании инновационного продукта, он удовлетворяет свою информационную потребность ($U_{inf} = \emptyset$) и осознает потребность в инновационном продукте ($U_P \neq \emptyset$). Для удовлетворения потребности в P, он задает цель Zпр для деятельности производственного предприятия. Цель – это планируемый результат, и производство направлено на преобразование ресурса в продукт, который удовлетворяет потребность потребителя. Итогом информационного воздействия является установление целесообразных отношений с предприятием.

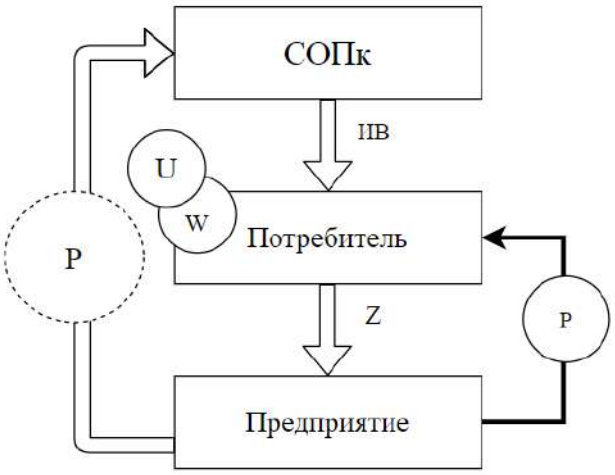


Рис. 2 Схема взаимодействия «СОПк-Потребитель-Предприятие»

В теории управления существуют такие понятия как «субъект» и «объект» управления. Управление - процесс воздействия субъекта на объект в целях перевода его в новое качественное состояние или поддержания в установленном режиме. Стоит рассмотреть этот процесс в рамках взаимодействия СОПк, потребителя и производственного предприятия (рис.3). С точки зрения теории воздействия на покупателя продавец, приближая момент заключения торговой сделки, проводит покупателя через пять интеллектуальных этапов: вижу и действую (внимание, интерес, желание, уверенность и действие). При этом не учитывается контроль состояния объекта управления в ходе оказания на него управляющего воздействия. Необходим мониторинг реакции объекта управления. Набор параметров Q', характеризующих ОУ и его деятельность в настоящий момент времени для СУ является множеством обрабатываемых параметров. Существует идеальное состояние Q, необходимое для анализа. Сравнение этих двух состояний позволяет принять управленческое решение и сформировать соответствующее информационное воздействие. Таким образом, необходимо создать условия для самоорганизации потребителя.

Субъект управления (СОПк) создает образ инновации, который должен быть воспринят потребителем. Затем обеспечивается управляющее (информационное) воздействие, в ходе которого происходит восприятие данных объектом управления. В результате происходит изменение состояния потребителя, а точнее процесс самоорганизации. Именно на данном этапе происходит переход от данных к информации, что соответствует системной триаде «Данные»-«Информация»-«Знания», а именно: данные (D), которые благодаря установленному синтаксису формируются в сообщение, реципируются и становятся ресурсом восприятия (у читателя), т.е. организации информации (I), самоорганизуя субъект восприятия (в данном контексте потребителя), т.е. данные организуются в структуру, которая в свою очередь, и будет являться

информацией), а далее организованность, ценность, полезность этой информации определяются прагматикой, т.е. результатом действий человека. При положительности результата полученная информация становится знанием, которое в последующем становится базисом для параметризации данных и основой контекста при генерации информации.

При формировании корректного образа, потребитель идентифицирует проблему и формирует потребность в инновационном продукте, так как осознает полезность от его использования в своей деятельности. Возрастает потенциал установления целесообразных отношений с предприятием. Посредством мониторинга (получения данных о реакции на воздействующую информацию) происходит отображение и анализ реакции (изменения состояния объекта):

$$\Delta Q = Q' - Q = \begin{bmatrix} \Delta W \\ \Delta U' \end{bmatrix},$$

где Q' – состояние объекта после восприятия информации.

На основе этих изменений (ΔQ) принимаются управленческие решения по реорганизации I_P (изменение формы представления). Посредством данной корректировки формируется новое информационное воздействие с целью получения нужного состояния объекта управления.

$$\Delta Q \rightarrow I'_P$$

Воздействие считается эффективным, если объект управления устанавливает целесообразные отношения с предприятием.

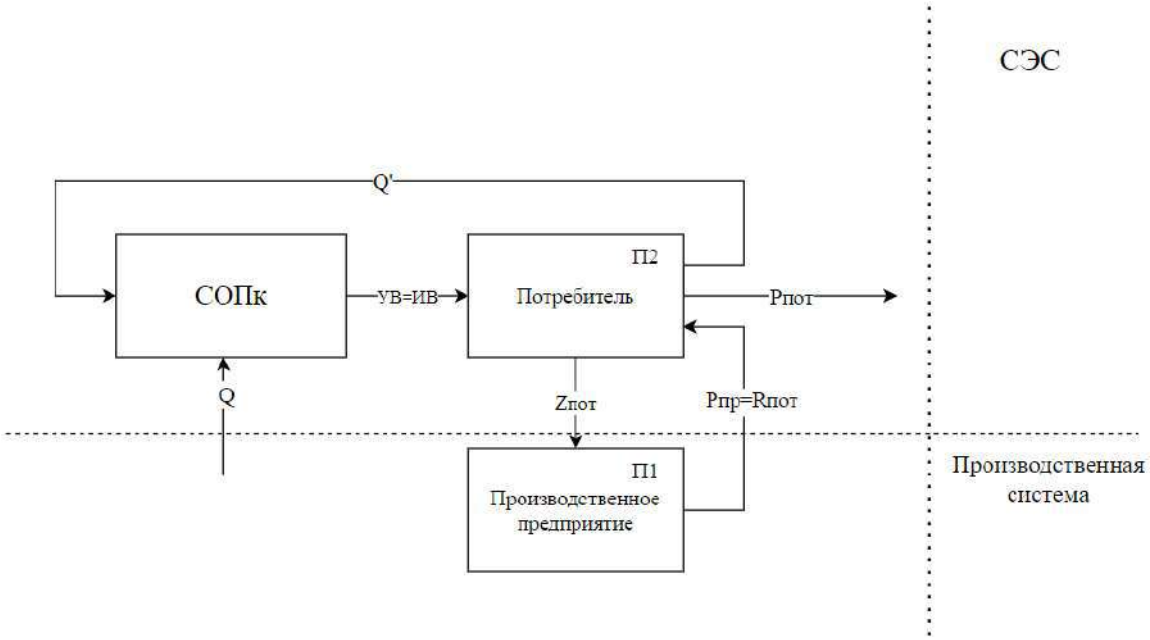


Рис. 3 Система управления $П_1$-$П_2$

По отношению к внешней среде производственная система $П_1$ является поставщиком потребляемых для $П_2$ продуктов (рис.3). $П_2$ действует, отталкиваясь от своих проблем, выявляющихся в ходе своей деятельности, а, следовательно, и своих потребностей, возникающих в процессе взаимодействия с другими объектами социально-экономической системы (СЭС). $П_1$ адаптируется под потребности $П_2$, которые поступают в $П_1$ посредством целевого канала (C_Z), как управленческого воздействия, и предоставляет продукт своей деятельности как ресурс для удовлетворения возникающих у $П_1$ потребностей. Данный характер взаимодействия позволяет поддерживать целесообразные отношения между системами $П_1$ и $П_2$.

1.3 Исследование процесса восприятия контента пользователем и определение роли системы мониторинга процесса восприятия контента в задачах продвижения инноваций в открытой информационной среде

Восприятие – это сложный процесс приема и преобразования данных, обеспечивающий отражение объективной реальности и ориентировку в окружающем мире [19].

Этапы восприятия данных человеком:

Этап 1. Происходит первичное выделение комплекса стимулов из потока информации, выборочное внимание, «захват» информации;

Этап 2. Узнавание на основе ассоциации сенсорных стереотипов, хранящихся в памяти (кодирование, упрощение информации) – интерпретация, категоризация;

Этап 3. Оценка значимости информации;

Этап 4. Преобразование и синтез информации – формирование образа, представлений; осмысление информации, понимание;

Этап 5. Сохранение информации.

Первые три этапа происходят на уровне бессознательной фазы восприятия и служат своеобразными фильтрами восприятия. Чтобы мозг начал обрабатывать информацию, особенно новую, он должен на втором этапе связать ее с ассоциациями прошлого опыта, памяти (тезаурусом). Если понятия, слова нет в памяти и нет никаких ассоциаций, которые помогли бы распознать его, оно не будет воспринято, или воспринято не с тем смыслом, который был изначально заложен.

Модель процесса восприятия данных согласно выделенным этапам, выглядит следующим образом:

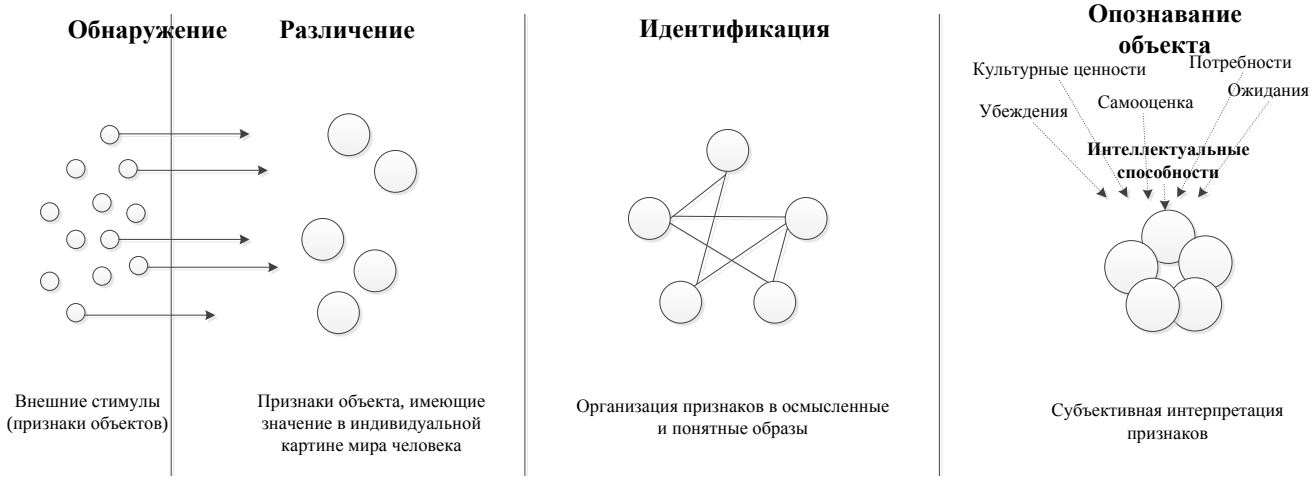


Рис. 4 Модель восприятия данных

Подробный механизм перехода данных в информацию в процессе восприятия можно интерпретировать следующим образом: данные, которые благодаря установленному синтаксису формируются в сообщение, рецептируются и становятся ресурсом восприятия, т.е. организации информации, самоорганизуя субъект восприятия, а далее организованность, ценность, полезность этой информации определяются прагматикой, т.е. результатом действий субъекта. При положительности результата полученная информация становится знанием, которое в последующем становится базисом для параметризации данных и основой контекста при генерации информации.

Психологическое определение процесса восприятия можно описать с позиции математической теории [16]. Согласно теории распознавания образов представим $X_r \subset X$ и $Y_r \subset Y$ как классы, где X и Y – словарь классов. Тогда $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ можно обозначить как алфавиты (наборы символов, данных, свойств, признаков) соответствующих классов (образов, объектов, предметов): $\{x_i\} \in X_r$ и $\{y_i\} \in Y_r$. В общем случае алфавит может быть

единым, т.е. $\{x_i, y_i\} = \{x_i\} \cup \{y_i\}$, как, впрочем, и единый словарь $(X, Y) = X \cup Y$. Учитывая зависимость протекания процесса восприятия информации от тезауруса человека, необходимо при оказании информационного воздействия на деловое окружение, учитывать языковые и когнитивные особенности целевой аудитории для адаптации контента под тезаурус потребителя для формирования корректного образа об инновационном продукте.

Для формирования правильного образа Pinn у потребителя необходимо определить уровень его понимания представленного информационного наполнения веб-страницы. Для этого необходима функция мониторинга процесса восприятия контента в общей системе управления контентом (CMS) для последующей адаптации контента под языковые, концептные особенности восприятия потребителя.

В CMS[1] используется динамически адаптирующийся веб-ресурс, который способен менять структуру представляемого контента. Система способна осуществлять адаптацию и спроектирована с учетом всех принципов реализации эффективного воздействия. Модель описанной системы представлена на рисунке 5.

[1] Гвоздева Т.В. Система управления медийным контентом Интернет-ресурса «HyperNode» / Т.В. Гвоздева, Я.С. Французяк, Д.А. Гаврилов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019615908 от 26.04.2019

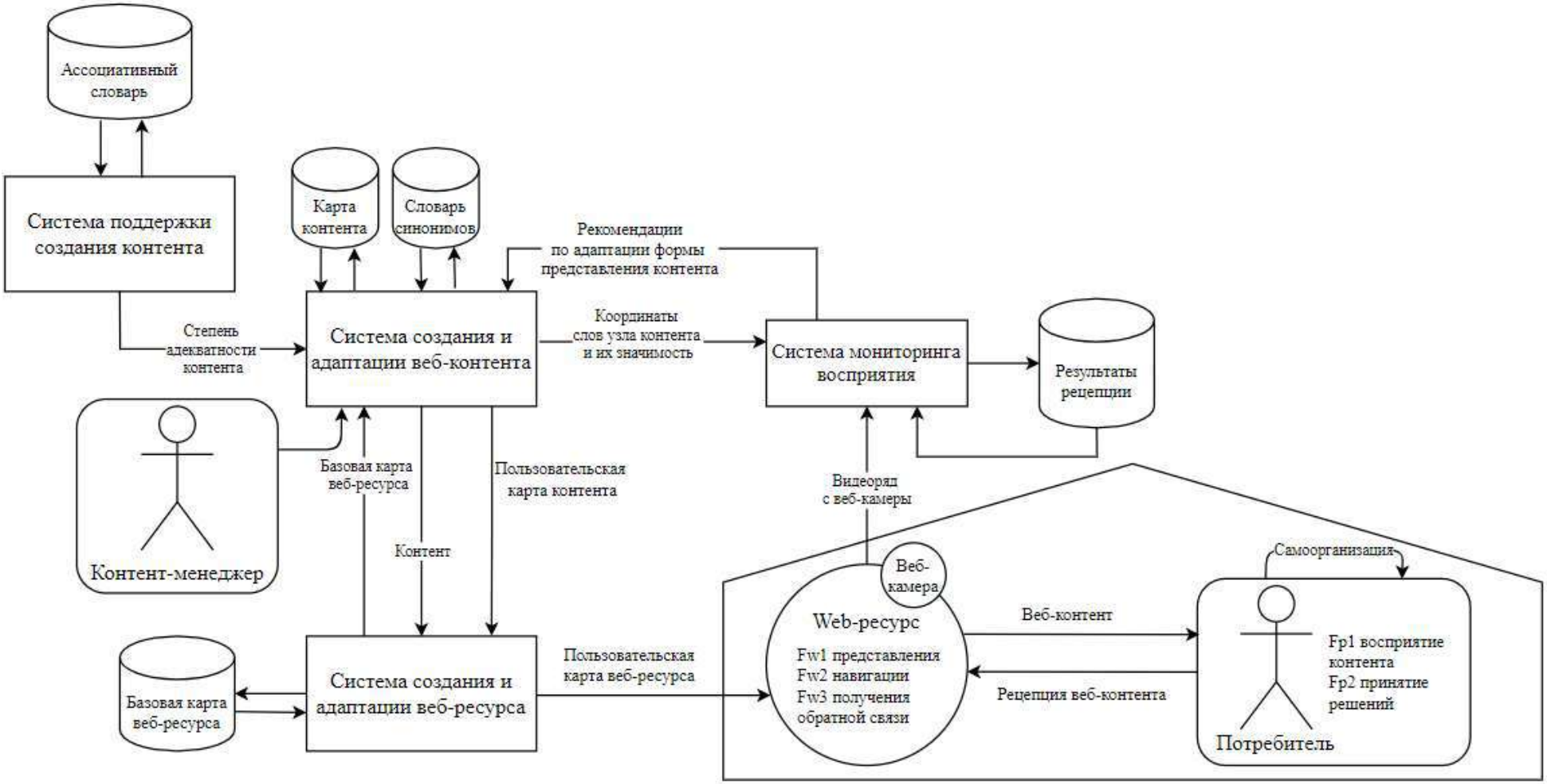


Рис. 5 Модель системы управления процессом продвижения инноваций «Как есть»

В указанной модели обозначим роль системы мониторинга восприятия в общей системе CMS (рис.5). Система создания и адаптации веб-контента формирует информационное наполнение веб-ресурса и пользовательскую карту контента. Контент размещается на web-ресурсе посредством системы создания и адаптации веб-ресурса, которая формирует пользовательскую карту и размещает ее непосредственно в системе представления. Для осуществления процесса мониторинга состояния пользователя (объекта управления), необходимо отслеживать взгляд при чтении контента. Показатели движения глаз фиксируются и передаются в виде видеоряда с веб-камеры. Система мониторинга восприятия анализирует полученные данные и выдает рекомендации по адаптации формы представления контента. Без системы мониторинга процесса восприятия контента, обратная связь не будет интерпретирована нужным образом, и, как следствие, индивидуального подхода под конкретного потребителя осуществляться не будет.

При этом стоит отметить, что существующая система мониторинга восприятия не учитывает индивидуальные особенности восприятия контента пользователем в процессе чтения. Параметризация процесса чтения пользователя необходима для системы создания и управления контентом (СИАК) для увеличения точности адаптации контента под конкретного пользователя посредством мониторинга обратной связи. Необходима такая система, которая будет отслеживать показатели, отражающие уровень понимания пользователем информационного содержания веб-страницы. За счет постоянного отслеживания состояния пользователя происходит формирование корректного образа инновационного продукта.

Контент, разработанный для продвижения инновационного продукта, содержит терминологию определенной предметной области инновации и при его восприятии человек сталкивается с неопределенностью. Состояние неопределенности находит выражение в изменении его поведения (в данном случае под поведением имеется в виду характер движения глаз). Эти изменения можно отследить при помощи системы окулографического мониторинга, который является частью системы мониторинга восприятия. При этом не производится отслеживание индивидуальных показателей процесса чтения пользователя с целью выявления проблемных мест при восприятии контента и увеличения эффективности адаптации информационного наполнения веб-страницы. А адаптация – это важнейшая функция всей системы управления контентом. Поэтому необходима система, которая будет производить параметризацию процесса чтения пользователя (рис.6).

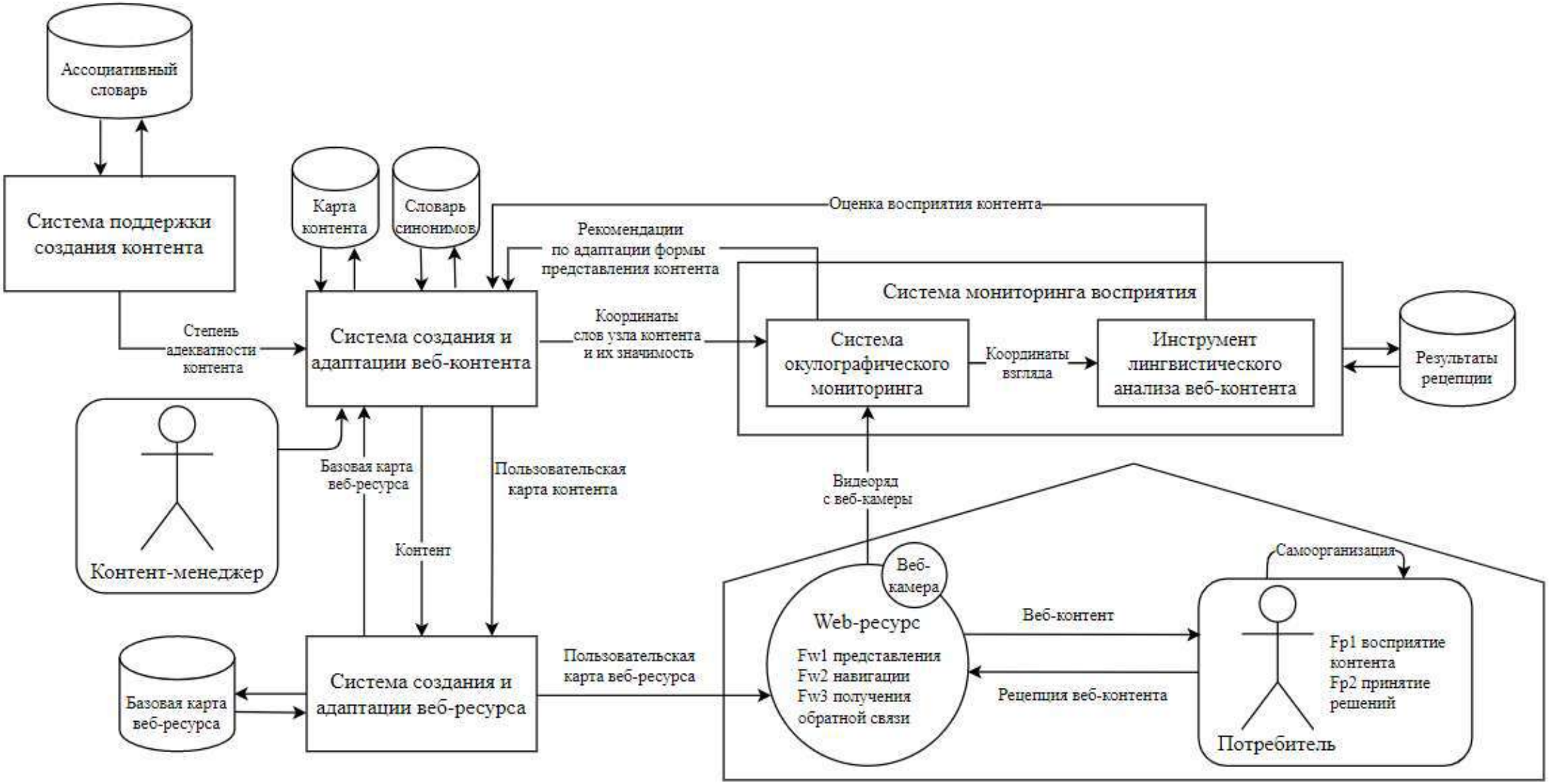


Рис. 6 Модель системы управления процессом продвижения инноваций «Как должно быть»

Инструмент лингвистического анализа веб-контента необходим для параметризации процесса чтения, формирования оценки степени понимания информационного наполнения пользователем системы и поддержки процесса адаптации информационного наполнения под индивидуальный уровень понимания пользователя. Так как процесс адаптации является важнейшим процессом при воздействии на пользователя, концептуальная модель разрабатываемой системы должна включать в себя адаптационные механизмы.

Здесь стоит детальнее рассмотреть, что в данном случае представляет собой адаптация контента с учетом оценки уровня восприятия контента пользователем. Адаптация текста как вид его интерпретации рассматривается в статье Первухина С.В. «АДАПТАЦИЯ КАК ВИД ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕКСТА». Автор описывает адаптацию текста как вид его интерпретации, сопоставляет понятия интерпретации и адаптации информационного наполнения, рассматривает их общие и отличительные черты. Адаптация часто имеет практическое значение: на примерах текстов медицинского и юридического дискурса показано, как адаптированный текст и интерпретация трансформируют информацию текста-источника в зависимости от потребностей и особенностей читателя. В контексте нашей задачи адаптация текста есть ничто иное как перестройка контента под индивидуальный уровень восприятия пользователя на основании параметров процесса чтения. Индивидуальные особенности выражаются в модели чтения пользователя, параметрах чтения, тезаурусе. Учет базовых ценностей сообщества адресата, его социальных и культурных приоритетов, учет его социального и образовательного статуса является основой для адаптации контента образовательных веб-ресурсов в научной публикации О.А.Сулеймановой, А.В. Щепиловой, Н.Н. Беклемешевой, М.А. Фоминой «ПРАГМАТИЧЕСКАЯ АДАПТАЦИЯ КОНТЕНТА САЙТА УНИВЕРСИТЕТА КАК СРЕДСТВО МОТИВАЦИИ АДРЕСАТА». Здесь также описан подход к локализации и адаптации контента иноязычного веб-ресурса под русскоязычный веб-сайт, предполагающий предпереводческий анализ текста, выполнение перевода на иностранный язык с учетом стилевой выразительности и особенностей целевой аудитории. А в публикации А. И. Пилейко и Л. И. Петровой «АДАПТАЦИЯ МЕДИАКОНТЕНТА К ВЕБ-СРЕДЕ САЙТОВ И СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ» авторы считают, что публикуемый в веб-среде контент должен проявлять характерные черты дигитальности, мультимедийности, интерактивности, гипертекстуальности. Кроме того, при подготовке информации для сайтов и социальных сетей необходимо учитывать особенности конкретной веб-среды, чтобы текст, фото, иллюстрации, аудио- видеоматериалы отвечали ожиданиям читательской аудитории, вызывали интерес, были грамотно оформлены с визуальной точки зрения.

В указанных научных публикациях авторы рассматривают адаптацию веб-контента под целевую аудиторию без необходимости непрерывной адаптации информационного наполнения под индивидуальные особенности конкретного пользователя. С позиции разработки системы лингвистического анализа веб-контента, которая направлена на поддержку принятия решения об изменении информационного наполнения веб-страницы, адаптация – это перестройка контента под уровень понимания информации пользователем с учетом его индивидуальных особенностей процесса чтения.

Индивидуальные параметры чтения, которые необходимы для отражения уровня понимания контента пользователем, были выявлены на основе психолингвистических методов. В ходе научно-исследовательской работы, были определены следующие параметры чтения:

Таблица 1. Показатели процесса чтения пользователя

Обозначение	Наименование
Fix[n]	Показатель фиксации на СЗЕ
DFix	Длительность фиксации
dt	Время отсутствия взгляда

R	Количество регрессий на СЗЕ
TimeB	Время чтения информационного блока
Rb	Показатель регрессии на информационный блок
CountFix	Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд
RecConc	Показатель узнаваемости СЗЕ
Spt opt	Показатель полноты чтения пользователя ИБ
Vr	Скорость чтения
Tipe_id =1	Тип чтеца: объективный
Tipe_id =2	Тип чтеца: субъективный

1.4 Исследование принципов и функционала существующей системы «Создания и адаптации контента»

Общая функциональная структура программной системы включает в себя следующие функции:

1. Адаптация системы к предметной области;
2. Формирование и управление контентом;
3. Организация доступа к контенту, его представление;
4. Управление правами доступа пользователей;
5. Мониторинг восприятия контента;
6. Адаптация карты контента.

Общая цель системы – система продвижения инноваций, система управления контентом, генерирующая веб-ресурс, имеющий определенную структуру (сценарий воздействия), контент (семантическое наполнение) и форму представления (графический образ). В соответствии с моделью системы управления и концептуальной моделью системы информационного воздействия программная система должна обеспечивать цикл процессов: управление контентом, мониторинг восприятия и динамическая адаптация карты контента.

Основным продуктом программной системы является контент информационного воздействия, размещенный на автоматически генерируемом веб-ресурсе.

Принципы, на которых строится данная система:

Достижение адресантом целей воздействия, возможно посредством системной организации процесса представления контента, а, следовательно, и его восприятия реципиентом. В этом заключается принцип сценарно-ориентированной организации контента.

Этим принципом контент рассматривается как упорядоченное множество информационных блоков, объединенных в шаг, где последовательность представления и обращения реципиента к каждому из них – есть сценарий информационного воздействия.

Каждый шаг сценария раскрывает содержание инновации посредством обращения к таким системным атрибутам, как эффект, ресурс, функция, продукт.

$$C_i =< I_1, I_2, \dots, I_m >,$$

где I_m–шаг сценария информационного воздействия.

$$I_m = \{i_j^m\},$$

где i_j^m – j-ый информационный блок m-ого шага сценария.

Информационный блок имеет свой собственный контент и форму его представления:

$$i_j^m = \{C_j^m, F_j^m\},$$

где C_j^m – контент информационного блока, F_j^m – форма представления контента информационного блока.

Принцип ведения непрерывного мониторинга реакции человека на представляемый ему контент с целью оценки его состояния неопределенности в момент времени, а также непрерывной адаптации контента за счет раскрытия понятий, вызывающих сложность при восприятии.

Основной особенностью данного веб-сайта является гипертекстовый метод структуризации контента информационных блоков, при котором информация представляется множеством информационных фрагментов с явно указанными ассоциативными связями между ними, поэтому:

$$C_j^m = \{n_i\},$$

где $\{n_i\}$ – множество информационных фрагментов.

Переходы (R) между узлами осуществляются с помощью указания организационных ссылок – слов, фраз или набора фраз:

$$n_i = \{l_i\},$$

где l_i – ссылка

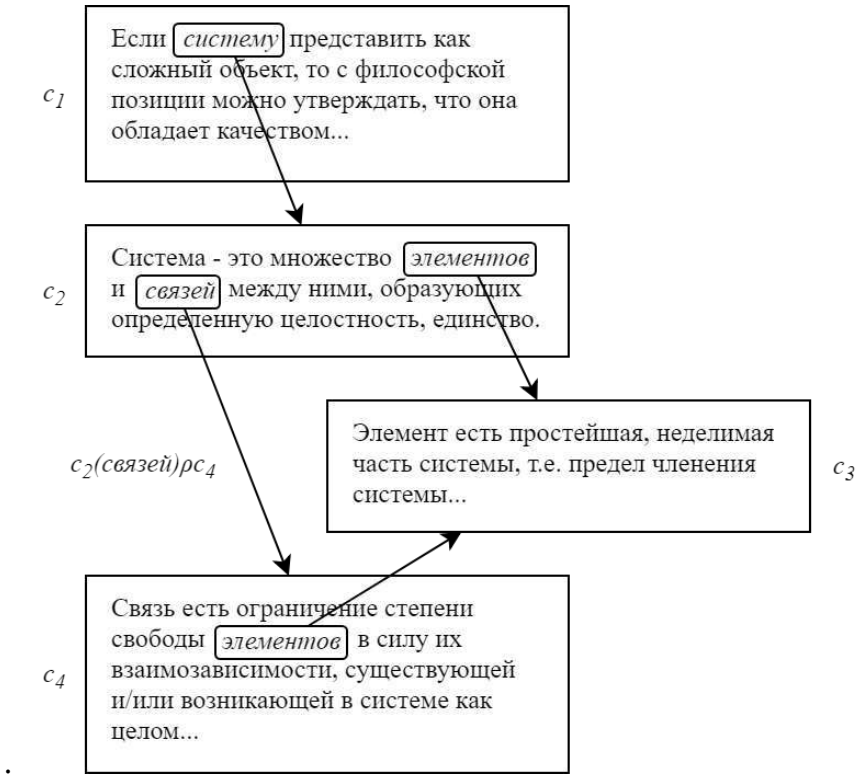


Рис. 7 Пример организационных ссылок в данной системе

Для того, чтобы выполнялся принцип непрерывной адаптации контента, предлагается в качестве ссылок использовать понятия ($l_i \equiv t_i$, t_i–понятие) более высокого уровня сложности, которые можно уточнить, дополнить и раскрыть через дочерние узлы, содержащие в себе понятия более низкого уровня сложности.

Множество понятий, обособленных от контента, и отношений между ними составляют понятийную карту предметной области. Если добавить к каждому понятию контекст – контент узла, в котором используется понятие, то получим карту контента.

Карта контента – совокупность иерархически упорядоченных узлов, содержание которых описывает отдельные воспринимаемые объекты предметной области. Таким образом, карту контента одного информационного блока можно представить следующим множеством:

$$C_{\text{карта}} = \{C_j^m, R\},$$

где C_j^m–контент (множество узлов) информационного блокаi_j^m, R – множество переходов между узлами.

Математически карту контента можно представить с помощью ориентированного графа, где вершины – узлы, а дуги – переходы. Началом дуги является узел-родитель, а концом – дочерний узел. Приведем пример карты контента одного информационного блока: нулевой уровень сложности представлен узлом n_1^0, первый – множеством узлов $\{n_2^1, n_3^1\}$, второй – $\{n_4^2, n_5^2, n_6^2\}$, третий – $\{n_7^3, n_8^3\}$. Структура контента информационного блока представлена на рис. 7:

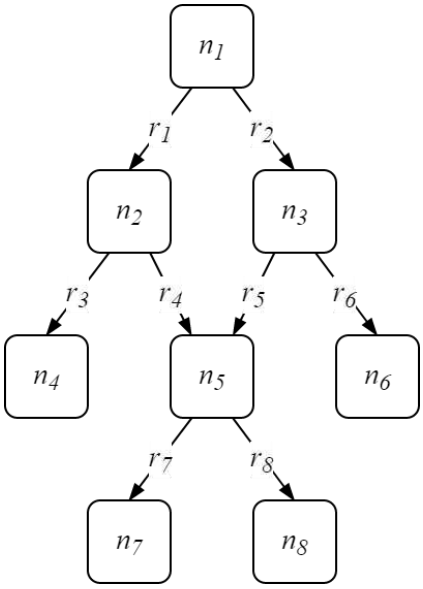


Рис. 8 Пример карты контента одного информационного блока в виде графа

Для реализации непрерывной адаптации контента строится индивидуальная карта, в которой понятия нижних уровней расширяют базовую карту, тем самым обеспечивается ее адаптивность к индивидуальным особенностям реципиента.

Как было сказано ранее, контент представлен в виде упорядоченного множества информационных блоков, объединенных в шаг, где последовательность представления и обращения реципиента к каждому из них – есть сценарий информационного воздействия.

В качестве примера разделения контента на информационные блоки возьмем текст научного содержания (Рис.9)

Исследование 2. Выборка, процедура и методы исследования: *go/no-go* LDT

Единственным отличием данного эксперимента от предыдущего является использование парадигмы *go/no-go* вместо парадигмы *yes/no*. Это означает, в частности, что в ходе эксперимента от испытуемых требовалось реагировать только на слова путем нажатия клавиши пробел, в то время как неслова не предполагали какой-либо реакции. В остальном использовались те же материалы, методы и оборудование, что и в исследовании 1.

В эксперименте приняли участие 48 испытуемых, 47 женского и 1 мужского пола, средний возраст 20,06 (*SD* = 1,71).

Рис.9 Пример текста научного содержания с разделением на информационные блоки

Данный текст разделен на информационные единицы, каждый из которых – СЗЕ текста (B_{inf}).

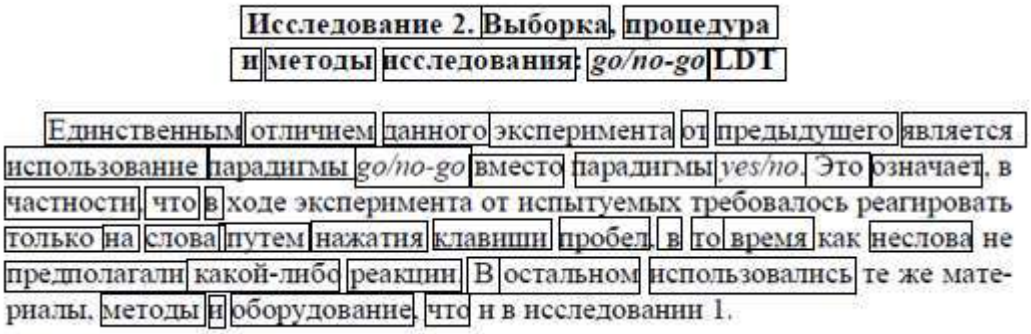


Рис. 10 Пример разделения контента на информационные единицы

Каждая семантически-значимая единица текста имеет координаты расположения на экране (xj; yj), семантическую значимость в тексте (weight), определенную в подсистеме редактирования контента на основе технологии web-mining.

1.5 Исследование существующих подходов к оценке процесса восприятия медийного контента

Психофизиологическая основа процесса чтения - это совместная работа трех различных анализаторов [7]:

- речеслуховой /акустический/ (система восприятия устной, вокальной и письменной речи)
- речедвигательный (восприятие и анализ информации от органов речи)
- зрительный /оптический/ (обеспечивающий восприятие и анализ зрительных раздражений)

Сенсомоторный уровень чтения включает в себя следующие звенья: звукобуквенный анализ удержание полученной информации смысловые догадки, возникающие на основе полученной информации сличение, т. е. контроль возникающих гипотез Сенсомоторный уровень обеспечивает «технику чтения» (скорость восприятия и его точность). На основе данных сенсомоторного уровня обеспечивается понимание задач и смысла информации (семантический уровень).

Чтение – сложный процесс, являющийся частным случаем процесса приема и переработки текстовой информации. В инженерной психологии организм человека представлен как сложная кибернетическая машина, которая воспринимает информацию из внешней и внутренней среды, перерабатывает ее и хранит необходимые сведения в системе памяти головного мозга. Такое представление дает возможность построить обобщенную кибернетическую модель одного из важнейших процессов восприятия и переработки текстовой информации — процесса чтения [21].

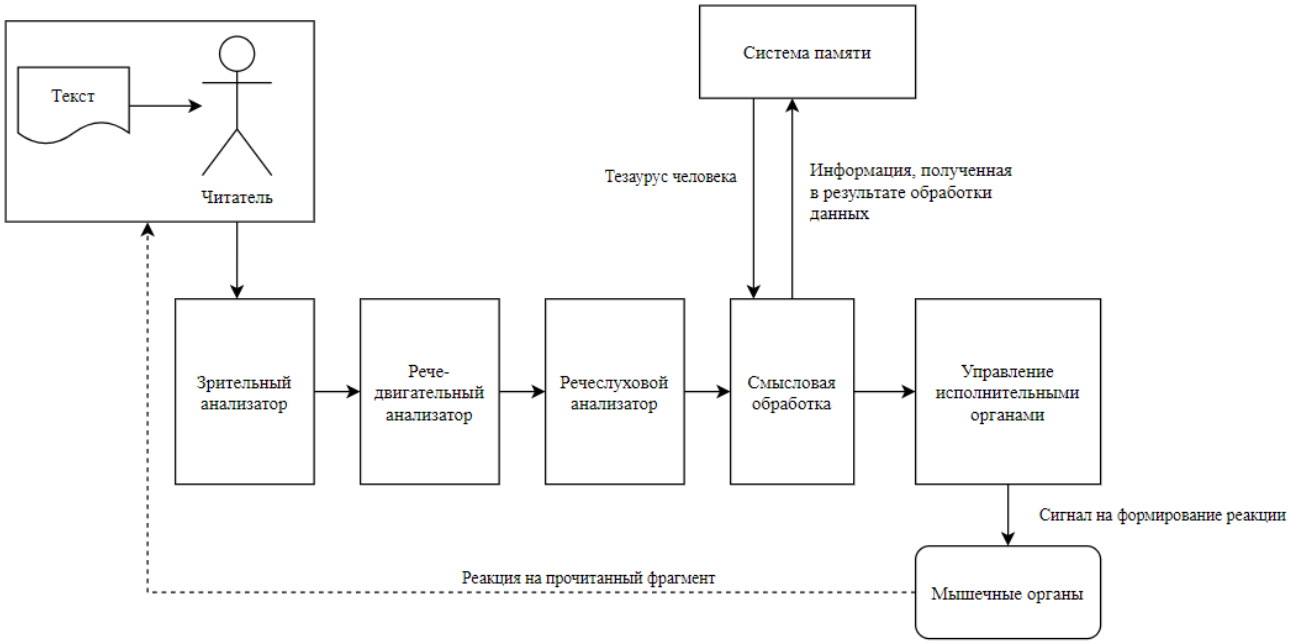


Рис. 11 Модель процесса чтения

На процесс интерпретации прочитанного текста влияет тезаурус человека. Данное утверждение соответствует семантической теории информации [16]. С психологической точки зрения смысл отражения[1] у отражаемого начинает формироваться в процессе восприятия (перцепции) в виде чувственного образа на основе получаемых чувственных данных (сигналов) в процессе ощущения (рецепции). Таким образом семантика или смысл, т.е сопряженный с мышлением лица, принимающего решения (отображающего субъекта), возникает только при формировании образа отражаемого объекта. И только в этом случае у этого субъекта снимается неопределенность об объекте его деятельности. Этот образ представляется как информация (макро-информация), причем новая ценная информация.

Необходимо определить метод отслеживания изменений человека. Для этого необходимо обратиться к области психолингвистических исследований процесса чтения человека.

В.Б. Касевич пишет: «Правила, по которым функционируют языковые единицы, принадлежат языку, но реализуются в речевой деятельности… Поскольку речевая деятельность – это функционирование системы языка, соответственно, её описание – это та часть представления языка, которая имеет дело с динамикой системы, а не со статикой» [1]. У языка нет иной формы существования, кроме динамической, поэтому чтение как процесс представляется частным проявлением языка как процесса.

В то же время именно языковой аспект чтения изучен слабо. В отечественной науке чтение традиционно рассматривается с точки зрения психологии зрительного восприятия, нейробиологии и различных патологий, педагогики и психологии обучения. Лишь недавно стали появляться лингвистически ориентированные работы, изучающие чтение на этапе формирования навыка [3]. Нормальное, без патологий, полностью сформировавшееся чтение на родном языке как один из способов функционирования этого языка в нашей стране до сих пор не рассматривалось. При этом исследования восприятия речи в другой модальности – устной имеют хорошие традиции и продолжают активно проводиться отечественными лингвистами (Л.Р. Зиндер, Л.В. Бондарко, А.С. Штерн, А.В. Венцов, В.Б. Касевич, Т.Н. Чугаева и др.). Этому в значительной мере способствует высокий уровень

[1] Отражение – фундаментальная категория диалектико – материалистической теории познания, выражающая отношение объекта как первичного и образа (знания) как вторичного. Материя (по В.И. Ленину) «обладает свойством, по существу родственным с ощущением, свойством отражения».

развития в нашей стране собственного направления психолингвистики – теории речевой деятельности (А.А. Леонтьев, Л.В. Сахарный, Е.Ф. Тарасов, Р.М. Фрумкина, А.А. Залевская и др.). Разработанность общей теории речевой деятельности и более частных вопросов восприятия устной речи создаёт все предпосылки для изучения проблем чтения.
Методологическая канва ответа на этот вопрос давно определена отечественной теорией речевой деятельности. А.А. Леонтьев писал: «Предметом анализа… является не изолированное предложение, высказывание или текст как продукты процессов речеобразования или материал для процессов речевосприятия, а сами эти процессы. … Применительно к речи это означает, что категории её анализа должны иметь статус речевых операций, а не речевых продуктов или абстракций от этих продуктов» [4]. Исследуя восприятие речи на слух, А.С. Штерн предложила различать единицы объекта восприятия (по сути, лингвистические единицы – от дифференциального признака, звука, слога до высказывания или текста) и единицы процесса восприятия. «Лингвистические единицы в терминах Выготского – это лишь элементы анализа, – пишет А.С. Штерн, – поскольку, например, слово не обладает свойствами текста, а слог – слова. Что же может быть единицей перцепции, сохраняющей свойства этого явления? <...> По-видимому, отражением элементарной речевой операции (единицы), сохраняющей свойства восприятия (целого), можно считать существенные лингвистические признаки» [6]. Этот, в целом плодотворный, подход (изучать отражение единицы) не даёт, однако, ответа на вопрос о том, что представляет собой сама единица восприятия, в данном случае – чтения. Неопределённость с единицей теории затрудняет развитие самой теории и приводит к тому, что и современные авторы пытаются искать единицу чтения среди морфем или слогов – и не находят. Например, И.В. Королёва заканчивает своё диссертационное исследование констатацией неопределённости: с одной стороны, «единицей чтения является слог», с другой стороны, «узнавание слова включает в себя морфемный разбор», то есть и морфему надо бы относить к единице чтения [3].

Поскольку составляющие чтение процессы непосредственно не наблюдаемы, исследовать вопрос о параметризации процесса чтения можно с помощью построения моделей, которые являются традиционным способом познания таких процессов.

«Лингвистические единицы в терминах Выготского – это лишь элементы анализа, – пишет А.С. Штерн, – поскольку, например, слово не обладает свойствами текста, а слог – слова. Что же может быть единицей перцепции, сохраняющей свойства этого явления? <...> По-видимому, отражением элементарной речевой операции (единицы), сохраняющей свойства восприятия (целого), можно считать существенные лингвистические признаки» [1].

Изучению лингвистического анализа текстовой информации посвящено немало научных публикаций. Ахметова Н. А., Касаболотова Г. А. в работе «Психолингвистические аспекты процесса чтения как вида речевой деятельности» рассматривают психолингвистические аспекты процесса чтения, акцентируя внимание на том, что зрительное восприятие и лексическая обработка текста происходят одновременно. При это для параметризации процесса чтения опираются на такие показатели, как: вероятностное прогнозирование, быстрота понимания слова, частотность слова, сложность слова. Механизмы оценки восприятия информации чтецом не рассматриваются, в данной статье авторы акцентируют внимание на параметрах текста, которые могут повлиять на процесс чтения текста. В научной публикации Е.Л. Григоренко «ПОНИМАНИЕ ПРОЧИТАННОГО ШКОЛЬНИКАМИ И ЕГО ПРЕДИКТОРЫ» автор приводит результаты двух исследований показателей понимания прочитанного. В первом исследовании показатели понимания связного текста предсказывались показателями аккуратности чтения единичных слов и фонологическими показателями, которые традиционно считаются предикторами овладения навыком чтения единичных слов. Во втором исследовании показатели понимания связного текста предсказывались на основе группы металингвистических показателей. Автор оценивает понимание прочитанного учащимися на основании опросов, проводимых во

время исследований и выделяет ряд предикторов, которые влияют на технику чтения учеников. А вот Коршунов Д.С. в статье «МОДЕЛИ ЧТЕНИЯ И ЕДИНИЦЫ ЧТЕНИЯ: ПОИСК УНИВЕРСАЛЬНОГО» пытается определить универсальную единицу чтения, которая представлена как продукт анализа речевой деятельности. Автор анализирует современные модели чтения, такие как: двусистемная каскадная модель визуального опознавания слов и чтения вслух, коннекционистская двусистемная модель, модели лексических составляющих, многокомпонентная модель чтения. При этом оценки уровня понимания прочитанного текста так и не производится, лишь строится модель чтения, которая совмещает в себе лексические составляющие процесса чтения: семантика, фонология, орфография. Взаимосвязь представлена в виде иерархических структур.

Лингвистический анализа текста рассматривается во взаимосвязи с эмоциональными факторами человека в научной публикации М.С. Власова, О.А. Сычева «ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭМОЦИОНАЛЬНЫХ И ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ В ПРОЦЕССЕ ПЕРЕРАБОТКИ ЛЕКСИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ (НА МАТЕРИАЛЕ ИМЕН СУЩЕСТВИТЕЛЬНЫХ РУССКОГО ЯЗЫКА)». В статье представлены результаты исследования скорости визуального распознавания слов русского языка с разной эмоциональной окраской у испытуемых с различными характеристиками эмоциональной сферы. Два эксперимента LDT в парадигмах yes/no и go/no-go показали, что наиболее быстро распознаются позитивно окрашенные слова, наименее – негативно окрашенные. Модели со смешанными эффектами позволили обнаружить тенденцию к взаимодействию эмоциональной окраски с особенностями испытуемых и частотностью слов. Авторы акцентируют внимание на связи эмоций человека и его механизмами лексической обработки, однако не рассматривают влияние когнитивных процессов на распознавание слов.

При этом стоит отметить, что ни в одной из указанных публикаций нет учета влияния механизмов кратковременной и долговременной памяти человека на уровень восприятия и распознавания слов в тексте. Так, в работе Р. В. Майер «Имитационная модель деятельности школьника, читающего текст» используя информационно-кибернетический подход, воссоздает имитационную модель деятельности чтеца (ученика), учитывающую психологические закономерности восприятия, запоминания и забывания информации, которая позволила бы исследовать основные закономерности чтения текстов. В предлагаемой имитационной модели память человека моделируется тремя массивами, в которых «запоминаются» слоги, слова и предложения. Автор учитывает влияние памяти на механизм восприятия информации чтецом, однако не учитывает модели чтения, параметры движения глаз во время чтения. Оценку понимания прочитанного, автор предлагает определять только на основании механизмов кратковременной памяти человека.

На основании проведенного исследования существующих подходов для оценки уровня восприятия информации, можем сделать выводы, что универсальной модели чтения не существует. Модель чтения может быть только схожа у чтецов, которые можно отнести к некоторому типу по набору параметров, определенных при чтении. Так, инструмент лингвистического анализа контента предусматривает разделение чтецов на субъективный и объективный тип. При этом для каждого характера своя модель чтения, которая может меняться в ходе чтения веб-контента. При этом будет производиться параметризация указанного процесса с целью выявления проблемных мест, возникающих при восприятии информации пользователем для корректной адаптации информационного наполнения под индивидуальный уровень понимания пользователя.

1.6 Изучение инструментальных средств оценки восприятия контента

На сегодняшний день задача параметризации процесса чтения является одной из важнейших в задачах продвижения и пока мало изучена. На данный момент нет

конкретного инструмента, который бы отслеживал уровень понимания контента пользователем.

Существуют инструменты анализа поведения посетителей на сайте, такие как:

- Яндекс.Метрика

Бесплатный интернет-сервис компании Яндекс, предназначенный для оценки посещаемости веб-сайтов и анализа поведения пользователей. Основной функционал: вебвизор, анализ форм, карты путей, ссылок, кликов, скроллинга.

- Google Analytics

Бесплатный сервис, предоставляемый Google для создания детальной статистики посетителей веб-сайтов.

- AskUsers

Платный сервис, с помощью которого можно провести анализ поведения пользователей в Интернете путем прямого общения с целевой аудиторией. Функционал инструмента: формирование перечня вопросов, отбор респондентов по критериям, получение готовых анкет, сохранение видеозаписи респондентов в ходе опроса.

- Hotjar

Платный сервис для обслуживания веб-ресурсов с небольшим трафиком. Основной функционал: вебвизор, карта кликов, формирование воронки продаж, разработка форм, опросов.

- Crazyegg

Платный сервис, предоставляющий функционал: составление карты (кликов, скроллинга, ссылок), конфетти (тепловая карта, в которой можно группировать по фразам, используемым для поиска, по ссылкам и другим параметрам), таблиц-отчетов (по кликам).

- Clicktale

Платный сервис, отличающийся от остальных инструментов многофункциональностью и высокой мощностью: вебвизор, аналитика форм, оповещения, два вида анализа (воронки продаж и эффективности), четыре вида карт (кликов, скроллинга, ссылок, передвижения мышки), восемь видов отчетов по карте ссылок, пять видов других отчетов.

- Sessioncam

Платный сервис, функционал которого полагается на использование записи взаимодействия конкретного посетителя с веб-ресурсом. Включает в себя: вебвизор, четыре вида карт (скроллинга, ссылок, кликов, перемещения мышки), аналитику форм, API, интеграцию с другими сервисами для веб-аналитики.

Перечисленные инструменты направлены на анализ поведения посетителей на веб-ресурсе с целью внесения изменений для работы с последующими посетителям. Из-за ограниченности функционала, отсутствия постоянного мониторинга процесса чтения контента, сервисы не направлены на индивидуальную адаптацию информационного содержания под конкретного пользователя. Предоставляемая информация о поведении пользователей позволяет оценить востребованность определенного продукта или услуги, но не отражает реакцию посетителя веб-ресурса на контент. Корректировка информационного наполнения будет происходить только на основании анализа поведения нескольких посетителей по определенным категориям делового окружения после завершения сеанса. Все не удовлетворенные контентом пользователи будут потеряны. А перестройка информационного наполнения веб-страницы коснется только последующих посетителей.

В связи с наличием вышеперечисленных недостатков у традиционных инструментов, направленных на анализ поведения пользователя на веб-ресурсе, требуется разработать инновационное решение, которое будет справляться с поставленными задачами и соответствовать принципам информационного воздействия. В связи с этим целесообразно разработать инструмент лингвистического анализа веб-контента для

параметризации процесса чтения конкретного пользователя с целью корректной адаптации под его ментальный опыт, индивидуальный словарь. На основании параметров, которые будут получены в результате функционирования подсистемы, возможно принятие управленческого решения, направленного на изменение состояния информационного наполнения с учетом реакции конечного пользователя на представленный контент (ΔQ).

1.7 Формирование требований на разработку информационной системы

1.7.1 Определение потребностей в существующей системе «Создания и адаптации контента (СИАК)»

Для определения путей совершенствования существующей системы СИАК, а также для выявления её информационных потребностей, рассмотрим функциональную структуру существующей системы (рис.12):

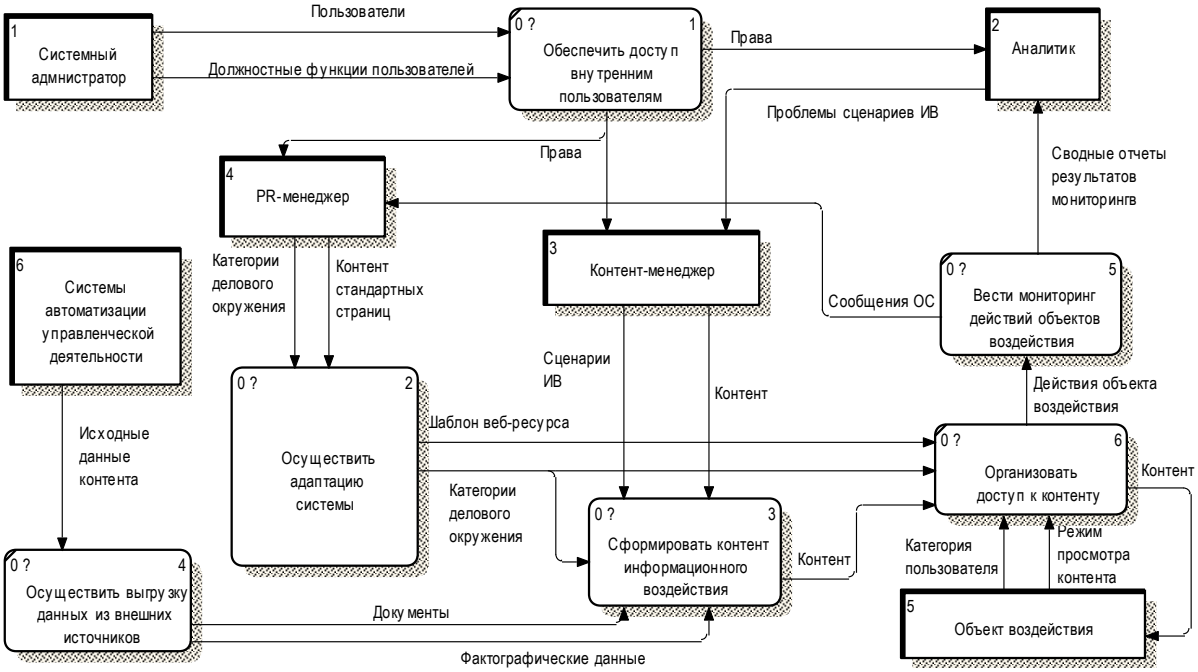


Рис. 12 Общая функциональная структура СИАК

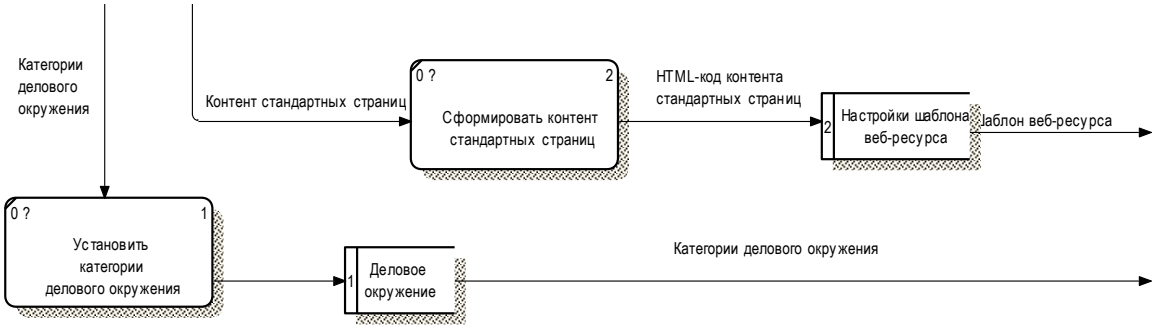


Рис. 13 Функциональная структура модуля адаптации

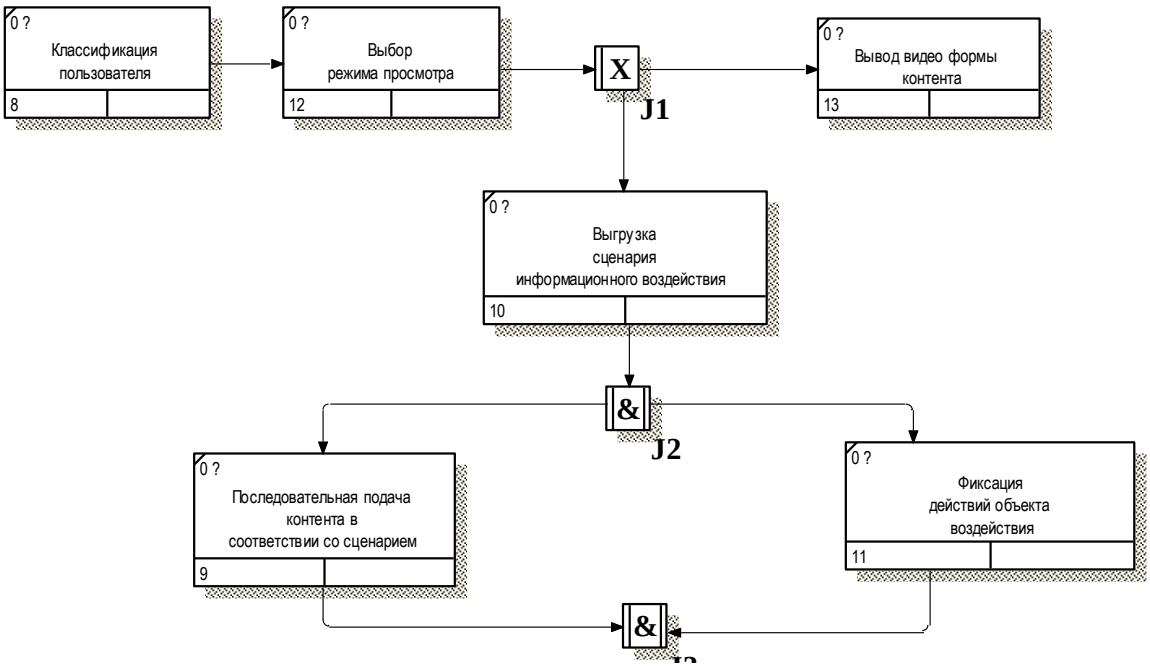


Рис. 14 Сценарий работы подсистемы представления контента

На рис. 14 можно заметить, что подача контента ведется исключительно по результатам действий объекта воздействия (реципиента). Исходя из принципов непрерывной адаптации контента, необходимо учесть тот факт, что при исследовании психокогнитивных особенностей человека, было выявлено, что иногда у реципиента возникает латентная потребность в информации, которую он не осознает. В результате своей производственной деятельности, он сталкивается с внутренними конфликтами, которые как раз-таки связаны с нехваткой информации и с большой неопределенностью. И для того, чтобы данную потребность удовлетворить, необходимо посредством получения обратной реакции от человека в процессе чтения определить те участки информационного наполнения веб-страницы, которые вызвали трудности восприятия контента пользователем.

В следствие этого, у существующей системы мониторинга восприятия появляется потребность (Uinf) в информации об уровне понимания контента пользователем, выраженная в проблему (Winf) получения оценки уровня восприятия информационного наполнения веб-страницы. Проблема определяет цель (Z) – инструмент лингвистического анализа веб-контента, направленный на определение показателей процесса чтения пользователя с целью поддержки принятия решения по адаптации контента в СИАК. Инструмент будет обеспечивать параметризацию процесса чтения с четким выделением индивидуальных показателей, представленных в таблице (2).

Таблица 2. Показатели процесса чтения пользователя

Обозначение	Наименование
Fix[n]	Показатель фиксации на СЗЕ
DFix	Длительность фиксации
dt	Время отсутствия взгляда
R	Количество регрессий на СЗЕ
TimeB	Время чтения информационного блока
Rb	Показатель регрессии на информационный блок

CountFix	Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд
RecConc	Показатель узнаваемости СЗЕ
Spt opt	Показатель полноты чтения пользователя ИБ
Vr	Скорость чтения
Tipe_id =1	Тип чтеца: объективный
Tipe_id =2	Тип чтеца: субъективный

Создания инструмента, позволяющего в режиме реального времени определять уровень понимания контента пользователем в совокупности с системой окулографического мониторинга (СОМ) позволит повысить эффективность системы создания и управления контентом (СИАК) посредством автоматизации процесса адаптации контента, а также позволит использовать комплексную систему в рамках маркетинговой деятельности, при оценке прочитанного текста (контента).

1.8 Концептуальная модель инструмента лингвистического анализа веб-контента

Инструмент лингвистического анализа веб-контента должен решать следующие задачи:

- Отслеживание показателей взгляда пользователя;
- Определение параметров чтения конкретного пользователя;
- Выявление техники чтения пользователя (в данном контенте под техникой чтения понимаем определение типа чтения – субъективный или объективный [17]).

Концептуальная модель с указанием выделенных задач представлена на рис. 15

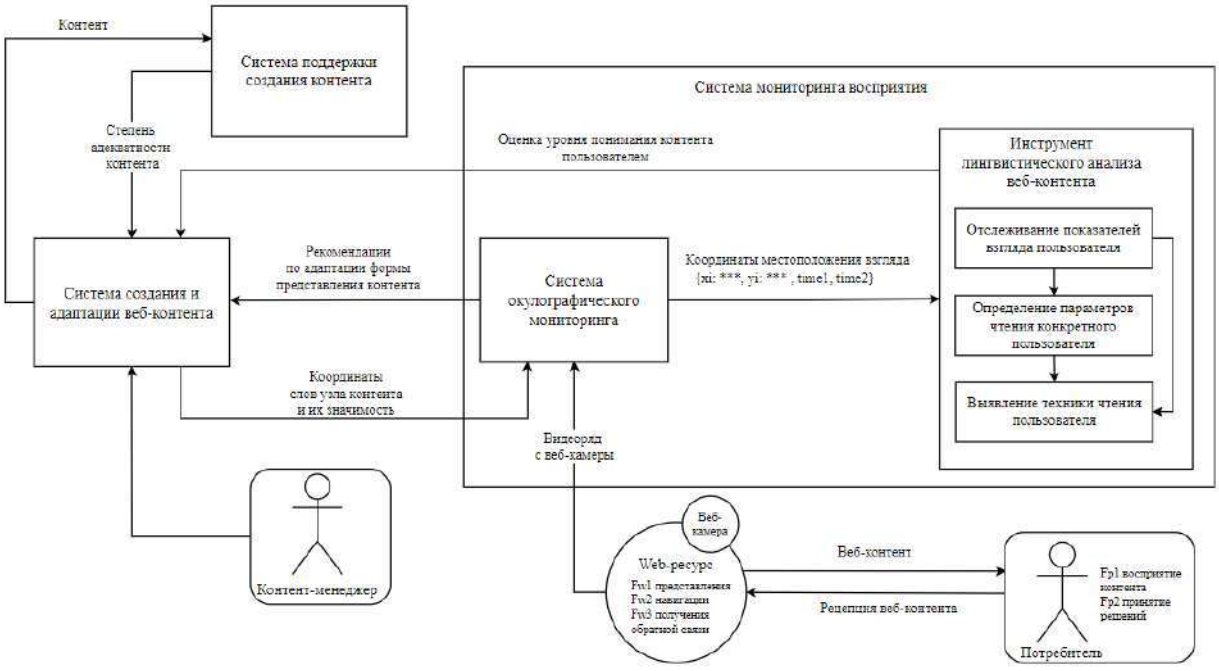


Рис.15 Концептуальная модель ИЛА

1.9 Анализ и выбор ТПР

ТПР, полностью реализующее нужный нам функционал инструмента лингвистического анализа веб-контента не существует. Поэтому стоит исследовать ТПР на реализацию некоторых задач, определенных концептуальной моделью.

Функции для отбора ТПР:

- Отслеживание показателей взгляда пользователя;

- Определение параметров чтения конкретного пользователя;
- Выявление техники чтения пользователя (в данном контенте под техникой чтения понимаем определение типа чтения – субъективный или объективный [17]).

Краткий обзор моделей движения глаз во время чтения:

1) Идеальный наблюдатель - Mr. Chips

В модели Mr. Chips модель «идеального наблюдателя» применяется к чтению. Эта модель является «идеальным наблюдателем» в том смысле, что:

- представляет идеальную стратегию чтения (чтение с минимальным количеством саккад, осуществляемое последовательно и без ошибок),
- описывает ограничения, влияющие на понимание информации.

2) Когнитивно-ориентированные модели:

- SAS (Serial Attention Shif) с реализациями с реализациями E-Z Reader

В моделях SAS лексическая обработка слова тесно связана с последовательным сдвигом внимания от слова к слову; слова обрабатываются в порядке их появления в тексте; в фокусе внимания может быть только одно слово.

- GAG (Guidance by Attentional Gradients) с реализациями SWIFT

В моделях GAG возможна параллельная обработка сразу нескольких слов, внимание не сфокусировано на одном слове, но распределено по всей области восприятия текста по принципу градиента таким образом, что чем ближе слово к фовеальной области, тем выше скорость его обработки, т. е. слова в парафовеальной области обрабатываются медленней.

3) Зрительно-моторные модели - SERIF

К зрительно-моторным моделям относятся модели, утверждающие приоритет глазодвигательного управления.

С учетом того, что «Идеальный наблюдатель» предполагает идентификацию всех слов последовательно и без ошибок, что очень сомнительно, учитывая особенности нейролингвистических процессов, происходящих при чтении текста человеком, а зрительно-моторные модели (SERIF) ориентированы на то, что движениями глаз при чтении управляют, в основном, низкоуровневые процессы (в качестве основной силы, перемещающей глаза во время чтения, постулируется необходимость перемещать глаза вперёд по тексту) то есть лингвистическая обработка, происходящая при узнавании слова или фразы, не учитывается, нам больше подходят «Когнитивно-ориентированные модели».

1.9.1 E-Z Reader (SAS)

В основе модели заложено то, что движениями глаз во время чтения управляют процессы лексической обработки. Модель отслеживает и фиксирует такие показатели движения глаз, как саккады, фиксации, регрессии.

При этом она имеет два ключевых положения:

1)В каждый момент времени внимание фиксируется только на одном слове, сдвиг внимания происходит строго *последовательно* (что не означает невозможность параллельных процессов);

2) Программирование саккады запускается механизмом лексической обработки.

Модель ориентирована на то, что чтение человека происходит последовательно, слово за словом, параллельный просмотр других строк не учитывается. Степень понимания слова здесь зависит от соотношения частотности и предсказуемости текущего и следующего слова. Если текущее слово является низкочастотным, то на его обработку уйдёт практически всё время фиксации, и следующее слово также будет обрабатываться в два этапа, даже если оно является высокочастотным (так называемый «эффект перелива», spillover effect). Если оба слова являются высокочастотными и легко предсказуемыми (служебные слова, артикли и под.), то обработка второго слова может завершиться до скачка и не требует фиксации. Кроме того, вероятность фиксации зависит от длины слова

(определяемой с помощью уже упоминавшегося низкоуровневого сканирования): чем короче слово, тем больше вероятность, что оно будет пропущено.

В данной модели не учитывается скорость чтения человека, уровень понимания не просто слов, а целых высказываний. Показатели чтения очень узкие, направлены только на то, понял ли человек слово и что он пропустил. Поэтому конкретной оценки степени понимания текста человеком нет. Не учитывается контент понятий, которые могли вызвать затруднения при чтении. Оценка степени понимания всего текста не производится.

2.2 SWIFT (GAG)

В основе модели заложено представление о параллельной обработке слов (парадигма GAG). Предлагаемый в модели механизм движений глаз при чтении учитывает взаимодействие зрительной, когнитивной и моторной систем.

Ключевые положения SWIFT.

1) Обработка лексической информации распределена в пространстве (информация может обрабатываться одновременно в нескольких местах). Принцип основан на данных нейрофизиологии.

2) Выбор момента старта и выбор цели саккады происходят отдельно друг от друга.

Данный принцип также основан на данных нейрофизиологии, подтверждающих различие между временным и пространственным аспектами порождения саккады.

3) Генерирование саккад является автономным (не зависящим от лексической обработки) произвольным процессом, корректируемым фовеальным подавлением. Фовеальное подавление действует во время фиксации трудных слов (оно требуется для того, чтобы увеличить время чтения трудного слова – если бы время фиксации всегда было произвольным, этого времени могло бы не хватить).

4) Программирование саккады происходит в две стадии. За подготовительной “гибкой” стадией следует “жёсткая” стадия, во время которой программируемая саккада уже не может быть отменена.

5) При расчёте длины саккады возникают систематические и случайные ошибки.

В SWIFT подчёркивается динамическая природа отношений между степенью лексической обработки и движениями глаз. Как только читающий начинает обрабатывать слово, его знание о тексте начинает возрастать. Следовательно, решение о том, куда и когда направлять глаза, меняется с течением времени и зависит от предыдущих мест фиксации.

Данная модель учитывает психолингвистические процессы, происходящие при чтении человека, не игнорирует контекст при распознавании трудных[2] слов, фиксирует показатели движения глаз, такие как: прогрессивные и регрессивные саккады, повторные фиксации, пропуск слов. Оценка степени понимания контента пользователем не производится.

Важным для нас отличием двух моделей является то, что у E-Z Reader при чтении слова n читающий в обычной ситуации может воспользоваться предварительным просмотром слова n+1, но не слова n+2, если только слово n+2 не является местом следующей фиксации (т.е. если слово n+1 пропускается). Данный прогноз обусловлен последовательной архитектурой E-Z Reader. В SWIFT подобного ограничения нет (предварительный просмотр слова n+2 возможен).

С учетом того, что наш инструмент лингвистического анализа контента предусматривает оценку степени понимания контента разных категорий пользователей, имеющих разную технику чтения (субъективный и объективный типы чтецов), т.е. не все пользователи будут читать текст на веб-ресурсе по слову и последовательно, как

[2] Степень трудности слова определяется в модели его частотностью, а кроме того, зависит от контекста: слово может быть предсказуемо на основании предшествующих слов, и это может облегчать его лексическую обработку. В связи с этим в модель, наряду с процессом лексической обработки, включён процесс “предсказывания” слов.

предусматривает E-Z Reader (SAS). Мы склонны к модели SWIFT, в которой учитывается, что направление глаз меняется с течением времени и зависит от предыдущих мест фиксации.

Результаты стадии предпроектного исследования, а в частности сформированные требования к информационным задачам, реализуемым по технологии канонического проектирования, требуют документирования в форме технического задания.

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

1. Общие сведения

1.1. Полное наименование системы и её условное обозначение

Полное наименование системы: Инструмент лингвистического анализа веб-контента.

Условное обозначение: СЛА

1.2. Наименование предприятий (объединений) разработчика и заказчика (пользователя) системы и их реквизиты

Наименование разработчика: Кафедра ИТ ИГЭУ им. В.И. Ленина, Воробьева Дарья Витальевна. Юридический адрес: Россия, 153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, д. 34, ауд. 501. Телефон: 8 (910) 667-60-05.

Наименование заказчика: НПЦ «АНОД». Юридический адрес: Россия, 603003, г. Нижний Новгород, ул. Свободы, д. 63. Телефон: (831)233-77-03.

1.3. Перечень документов, на основании которых создается система, кем и когда утверждены эти документы

Работа производится на основании задания на выпускную квалификационную работу, утвержденного научным руководителем и заведующим кафедрой.

1.4. Плановые сроки начала и окончания работы по созданию системы

Начало работ: 01.09.2020

Окончание работ: 29.04.2021

2. Назначение и цели создания (развития) системы

2.1. Назначение системы

Система лингвистического анализа предназначена для информационного обеспечения процесса управления (адаптации) контента, путем мониторинга процесса чтения веб-контента и оценки степени его восприятия пользователем для последующей адаптации информационного наполнения веб-страницы в динамическом режиме. Параметрическая модель, полученная на выходе системы, необходима для выявления проблемных мест при восприятии информации, а показатели скорость чтения и тип чтеца – для регулирования подачи информационных блоков при чтении.

2.2. Цели создания системы

Целями создания системы являются:

1. Обеспечение мониторинга процесса чтения пользователя материала веб-ресурса, с целью получения данных о степени восприятия контента, представленной пользователю;
2. Параметрическая модель процесса чтения конкретного пользователя, с целью выявления проблемных мест при восприятии информационного блока и поддержке решения по адаптации контента;
3. Показатели чтения – скорость чтения (Vr), тип чтеца (Tipe_id), необходимые для инструмента структуризации контента с целью регулирования подачи информационного наполнения с учетом индивидуальных особенностей пользователя при чтении;

3. Характеристика объекта информатизации

3.1. Краткие сведения об объекте информатизации или ссылки на документы, содержащие такую информацию

Объектом информатизации является процесс параметризации чтения пользователя, представленный существующей системой мониторинга процесса восприятия,

предназначенный для формирования оценки уровня восприятия контента объекта воздействия. Система необходима для принятия решения об адаптации контента под индивидуальный уровень понимания информационного наполнения пользователем. Пользователем данной системы является человек, читающий контент, размещенный на веб-ресурсе. Контент формируется в системе управления контентом (CMS), использующую технологию динамической организации веб-ресурса, соответствующую принципам информационного воздействия. В технологии динамической организации веб-ресурса каждая веб-страница разделяется на две сущности: шаблон и контент, хранящийся в базе данных и заполняющий данный шаблон.

4. Требования к системе

4.1. Требования к системе в целом

4.1.1. Требования к структуре и функционированию системы

4.1.1.1. Перечень подсистем, их назначение и основные характеристики, требования к числу уровней иерархии и степени централизации системы

В рамках разрабатываемой Системы управления контентом (CMS) выделена подсистема лингвистического анализа веб-контента. Подсистема позволит параметризировать процесс чтения веб-контента, определить технику чтения на основании группы параметров, а также оценить уровень понимания предоставленной информации пользователя. Значения показателей чтения будут определены по шкале и направлены в систему создания и адаптации веб-контента для поддержки принятия решения об адаптации контента под индивидуальный уровень понимания пользователя.

4.1.1.2. Требования к способам и средствам связи для информационного обмена между компонентами системы

В соответствии с клиент-серверной технологией CMS, передача данных между клиентским и серверным уровнем системы должна осуществляться посредством семейства протоколов TCP/IP, в частности – с использованием прикладного защищенного протокола HTTPS.

В соответствии с сервис-ориентированной архитектурой разрабатываемой системы, программные модули должны взаимодействовать посредством архитектурного стиля взаимодействия Rest с использованием стандарта JSON для обмена данными.

4.1.1.3. Требования к характеристикам взаимосвязей создаваемой системы со смежными системами, требования к ее совместимости, в том числе указания о способах обмена информацией

Инструмент лингвистического анализа веб-контента должен взаимодействовать с подсистемой окулографического мониторинга (COM) посредством получения набора данных с координатами взгляда пользователя и указанием времени, представленных json-строкой {[xi:***,yi:***,time1, time2]}. Аналогичным образом происходит взаимодействие с подсистемой создания и адаптации контента (СИАК) для передачи СЗЕ, которая вызвала затруднение у пользователя с указанием ее координат и семантической значимости в виде json-строки {word:***,xj:***,yj:***,weight}, а также для передачи значения показателя полноты чтения пользователя (Spt opt). Взаимосвязь должна осуществляться между подсистемой лингвистического анализа веб-контента и СИАК, в двустороннем направлении. СИАК должна передавать координаты расположения СЗЕ на экране и числовые показатели значимости для каждой СЗЕ текста из СИАК в виде Json-файла: {"paragraphs": [/* массив информационных блоков, порядок совпадает с порядком подачи контента */{"words": [/* массив координат слов в абзаце */ {xj: ***,yj: ***,weight: *** /* семантическая значимость */},/* ... */]},/* ... */]}}. Аналогичным образом происходит взаимодействие с подсистемой структуризации контента для передачи показателей скорости чтения и типа чтеца в виде json-строки {Vr:***, Tipe_id:***}.

4.1.2. Требования к режимам функционирования системы

Система должна поддерживать следующие режимы функционирования:

- Штатный режим, в котором ИС выполняет все заданные функции;
- Аварийный режим, в котором возможен отказ компонент программного или технического обеспечения;

Основным режимом функционирования ИС является штатный режим. В штатном режиме функционирования ПО и технические средства сотрудников маркетингового отдела предприятия и системного администратора должны обеспечивать возможность функционирования в течение рабочего дня (с 08:00 до 20:00) 6 дней в неделю. Серверное ПО и технические средства северов должны функционировать круглосуточно, с перерывами на обслуживание. Оборудование должно работать исправно для обеспечения нормального режима функционирования ИС.

Аварийный режим используется для выполнения минимально необходимых операций в условиях аварийного энергоснабжения компонентов ИС или выхода из строя части оборудования. В случае перехода системы в предаварийный режим требуется: обеспечить резервное копирование базы данных инструмента лингвистического анализа веб-контента, выключить рабочие станции операторов и все периферийные устройства.

4.1.3. Требования к численности и квалификации персонала системы и режиму его работы

4.1.3.1. Требования к численности персонала (пользователей) ИС

Эксплуатация программного комплекса должна осуществляться следующими пользователями:

1. Контент-менеджер: формирование содержимого информационных блоков, их создание и редактирование; 1 человек (Профессиональный стандарт №148 «Специалист по информационным ресурсам»).
2. Дизайнер: разработка и редактирование медийного контента (изображений, видео, инфографики); 1 человек (Профессиональный стандарт №573 «Графический дизайнер»).
3. Конечный пользователь: просмотр содержимого Интернет-ресурса и осуществление обратной связи, с помощью заполнения соответствующей формы; неограниченное количество человек.
4. Системный администратор: поддержание работы ЛВС, администрирование веб-сервера, управление базами данных; 1 человек (Профессиональный стандарт №684н «Системный администратор информационно-коммуникационных систем»).

4.1.3.2. Требования к квалификации персонала, порядку его подготовки и контроля знаний и навыков

Каждый пользователь должен владеть уверенными навыками пользования персональных компьютеров, периферийных устройств и работы с интернет-браузерами.

1. Требования к контент-менеджеру: знание языка, на котором формируется содержание Интернет-ресурса; умение разбивать большие объемы информации на группы и формировать логически связанный текст.
2. Требования к дизайнеру: владение графическими редакторами; опыт работы с векторной и растровой графикой; знание современных трендов и технологий в сфере дизайна Интернет-ресурсов.
3. Требования к конечному пользователю: не предъявляются.
4. Требования к системному администратору: знания стека протоколов TCP/IP, принципов работы ЛВС, знание серверных операционных систем (Windows Server), опыт работы с сетевым оборудованием и системами управления базами данных.

4.1.4. Требования к эргономике и технической эстетике

Структура размещения информации и представления этой структуры в программном комплексе должны соответствовать «ГОСТ Р ИСО 6385-2007. Эргономика» и «ГОСТ Р ИСО 9241-161-2016. Эргономика взаимодействия человек-система. Часть 161. Элементы графического пользовательского интерфейса»:

4.1.5. Требования к эксплуатации, техническому обслуживанию, ремонту и хранению компонентов системы

Не предъявляются.

4.1.6. Требования к защите информации от несанкционированного доступа

Требуется минимизировать вероятности уязвимости объектов и вероятности проявления угроз для снижения риска от причиненного ущерба вследствие реализации угроз. Информационные объекты защиты: программный код, индивидуальные параметры чтения пользователя, медиа-файлы (изображения, видео, документы word, excel), учетные записи пользователей, рекомендации по адаптации формы представления контента.

К конфиденциальной информации должны применяться правовые методы защиты, основанные на федеральных законах и локальных нормативных документов:

- Федеральный закон № 149-ФЗ от 27 июля 2006 года «Об информации, информатизации и защите информации»;
- Федеральный закон № 152-ФЗ от 27 июля 2006 года «О персональных данных»;
- «Требования к защите персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных», утвержденные Постановлением Правительства РФ № 1119 от 1 ноября 2012 года;
- «Требования о защите информации, не составляющей государственную тайну, содержащейся в государственных информационных системах», утвержденные приказом ФСТЭК России № 17 от 11 февраля 2013 года;
- «Состав и содержание организационных и технических мер по обеспечению безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных», утвержденный приказом ФСТЭК России № 21 от 18 февраля 2013 года;
- «Положение о разработке, производстве, реализации и эксплуатации шифровальных (криптографических) средств защиты информации», утвержденное приказом ФСБ от 9 февраля 2005 №66.

К техническим средствам, поддерживающим функционирование системы (серверы, компьютеры маркетингового отдела НПЦ «АНОД») должны применяться следующие инженерно-технические меры защиты:

1. Установлено средство охранно-пожарной сигнализации (установлены точечные и объёмные датчики охранной сигнализации, реагирующих на возникновение дыма и затуманенности за счёт включения предупреждающей сирены).
2. Установлена система контроля доступа в офисное и серверное помещение (надежные дверные замки).
3. Использование охранного освещения в целях обеспечения безопасности.
4. Регулярное создание резервных копий рабочей версии системы и базы данных на физический носитель и облачное хранилище.

К программному обеспечению ИЛА должны применяться следующие аппаратно-программные меры защиты:

1. CSRF (межсайтовая подделка запроса);
2. Для ограничения доступа к управлению системой требуется реализация подсистемы аутентификации персонала и разграничение прав доступа.
3. Для повышения надежности данных требуется использование RAID 1 — зеркального дискового массива.

4. Резервное копирование информации
5.Разграничение доступа к информации.
6. Антивирусная защита
7. Криптографическое шифрование информации

4.1.7. Требования к патентной чистоте

Патентная чистота системы должна быть обеспечена в отношении Российской Федерации.

При разработке инновационной технологии, ее владельцем является сам разработчик. Разработчик имеет право передачи использования интеллектуальной собственности заказчику.

4.1.8. Требования по стандартизации и унификации

Все техническое оборудование должно соответствовать стандартам Российской Федерации и международным стандартам.

При разработке Системы, моделировании процессов должна применяться унифицированная методология, а также должна максимально использоваться заложенная в поставляемом прикладном программном обеспечении функциональность.

4.2. Требования к задачам, выполняемым системой

4.2.1. Перечень функций, задач или их комплексов, подлежащих информатизации

Табл. 3. Требования к задачам подсистемы лингвистического анализа веб-контента

Задача	**Требования к задаче**	**Выходные данные**
Регистрация показателей движения глаз	В соответствии с возможностями системы окулографического мониторинга, обеспечивающей формирование набора данных с координатами взгляда пользователя и указанием времени, представленных json-строкой {[xi:***,yi:***,time1, time2]}обеспечить регистрацию показателей движения взгляда пользователя по семантически-значимым единицам для выявления проблемных мест при понимании информационного наполнения; Задача должна выполняться с периодичностью 250-300 мс.	{Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,time1,time2,weight,DFix,dt,R]} Показатель регрессии на информационный блок (Rb); Время чтения информационного блока (TimeB) Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд (CountFix)
Определение проблемных мест при чтении контента	В соответствии с показателями движения взгляда, представленными как входной поток в виде json-строки {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,weight,DFix,dt,R] } обеспечить определение проблемных мест при чтении контента и расчет показателя узнаваемости слова, определенном в научно-исследовательской работе, характеризующего уровень восприятия СЗЕ пользователем. Выполнение процедуры должно осуществляться сразу после получения параметров движения взгляда, с задержкой не более 300 мс.	json-строка {word:***,xj:***,yj:***,weight}

Определение уровня восприятия пользователем информационного блока	В соответствии с входным потоком «Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд (CountFix)» от задачи регистрации показателей движения взгляда и массивом информационного блока, представленного виде Json-файла структуры: {"paragraphs": [/* массив ИБ, порядок совпадает с порядком подачи контента */} обеспечить определение уровня восприятия пользователем информационного блока с помощью расчета показателя полноты чтения пользователя ИБ, характеризующего понимание контента в ИБ в соответствии с тезаурусом пользователя. Показатель утвержден в НИР. Выполнение процедуры должно осуществляться сразу после получения показателя CountFix и массива информационного блока; Длительность процедуры не больше 1 секунды;	Показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt) Количество символов в массиве ИБ (CountSymbol)
Расчет показателей техники чтения пользователя	В соответствии с входными потоками: показатель регрессии на информационный блок (Rb); время чтения информационного блока (TimeB); количество слов в массиве ИБ (CountW) и типами чтецов из сущности БД «Тип чтеца» обеспечить расчет показателей техники чтения и определить тип чтения пользователя на основании моделей чтецов, утвержденных в научно-исследовательской работе. Длительность выполнения процедуры не должна превышать 2 секунд;	json-строка {Vr:***, Tipe_id:***}

4.3. Требования к видам обеспечения

4.3.1. Требования к математическому обеспечению

Математические методы и алгоритмы, используемые для шифрования/дешифрования данных, должны быть сертифицированы уполномоченными организациями для использования на территории РФ.

Параметрическая модель чтения пользователя должна быть основана на психолингвистических методах отслеживания уровня восприятия информации, определенной в научно-исследовательской работе.

Выбранные методы и алгоритмы обработки данных должны в полном объеме обеспечивать разрабатываемую систему.

4.3.2. Требования к информационному обеспечению системы

В состав информационного обеспечения должны входить:

- информационные объекты;
- входные и выходные данные.

Входными данными для системы служат:

- Положение точек на каждом кадре для пользователя передается в виде Json-строки:

{ x: ***, y: *** , time1, time2},

где “x” - координата взгляда по оси x, относительно центра экрана;

“y” - координата взгляда по оси y, относительно центра экрана;

- СЗЕ,координаты расположения СЗЕ на экране и числовые показатели значимости для каждой СЗЕ текста из СИАК в виде Json-файла:

{"paragraphs": [/* массив информационных блоков, порядок совпадает с порядком подачи контента */{"words": [/* массив координат слов в абзаце */ {x: ***, y: ***,weight:*** /* семантическая важность */},/* ... */]},/* ... */],};

Выходными данными для системы служат:

- Показатели: скорость чтения и тип чтеца в виде json-строки {Vr:***, Tipe_id:***} для инструмента структуризации веб-контента;
- Параметры СЗЕ, вызвавшей затруднения при восприятии в виде json-строки json-строка{word:***,xj:***,yj:***,weight}
- Показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt) для системы СИАК

В хранилище данных система должна хранить:

- Идентификацию пользователя
- СЗЕ, координаты смысловых единиц текста (слов/словосочетаний) и их значимость;
- Показатели движения взгляда для дальнейшей обработки
- Типы чтения

В системе должны учитываться требования к контролю, хранению, обновлению и восстановлению данных, изложенные в РД 50-524-8411.

Система должна протоколировать все события, связанные с изменением своего информационного наполнения, и иметь возможность восстанавливать свое состояние в случае сбоя в работе, используя ранее запротоколированные изменения данных.

4.3.3. Требования к лингвистическому обеспечению

Весь интерфейс должен быть представлен на русском языке.

Клиентский уровень системы должен реализовываться с использованием следующих языков: HTML5, CSS, JavaScript.

Все записи базы данных, текстовые документы, файлы программного кода должны кодироваться согласно стандарту кодировки UTF-8.

Для реализации алгоритмов манипулирования данными в БД необходимо использовать стандартный язык запроса к данным SQL.

Для связи модулей лингвистического анализа веб-контента и отображения контента требуется использовать данные в виде Json-строки.

4.3.4. Требования к программному обеспечению системы

4.3.4.1. К независимости программных средств от используемых СВТ и операционной среды

Разрабатываемые программные средства должны быть в максимальной степени независимыми от используемых средств вычислительной техники и операционной среды.

Эта независимость должна достигаться за счет:

1. Использования кроссплатформенных систем управления базами данных;
2. Использования кроссплатформенных языков программирования и их интерпретаторов / компиляторов.
3. Использования независимого от физической среды стека сетевых протоколов TCP/IP.

Программные средства должны быть совместимы со средствами вычислительной техники, построенными по архитектуре x86 или x86-64

Так же должна быть обеспечена кроссбраузерность клиентского уровня системы – интерфейс системы должен отображаться и работать во всех современных популярных браузерах идентично.

4.3.4.2. К качеству программных средств

Требования к качеству программных средств должны соответствовать ГОСТ 28806-9012.

Программное обеспечение должно учитывать надежность технических средств и способствовать повышению надежности выполнения функций системы за счет синтаксического и семантического контроля входной информации, проверки корректности параметров процедур, и других подобных методов.

Программное обеспечение должно иметь высокую скорость работы, которая определяется и программной реализацией, и техническими средствами. Обработка должна проходить за доли секунды, так как необходимо адаптировать контент под пользователя, пока он не продолжил чтение, не устранив дефицит информации для формирования корректного образа об инновационных продуктах.

Для обеспечения возможности модернизации системы необходимо применять открытое программное обеспечение.

4.3.5. Требования к техническому обеспечению

4.3.5.1. Требования к видам технических средств, в том числе к видам комплексов технических средств, программно-технических комплексов и других комплектующих изделий, допустимых к использованию в системе

Со стороны сервера требуется:

1. Вычислительное устройство:

Таблица 4. Требования к вычислительному устройству

Процессор	4 ядра, тактовая частота 2.90 ГГц и выше
Оперативная память	10 ГБ и выше
Архитектура процессора	x86 или x64
Жесткий диск	300 МБ свободного объема* и выше
Время от момента получения запроса до момента создания полного ответа	не должно превышать 300 мсек

2. Коммутирующее сетевое устройство, организующее обмен сетевыми пакетами.

4.3.5.2. Требования к каналам связи:

Поддерживаемые протоколы передачи данных: HTTP / HTTPS.

Требования к каналу связи определяются по результатам нагрузочного тестирования проекта. При одновременной работе с пятью пользователями необходимая ширина канала сервера веб-приложения:

- минимальная: 15 Мбит/сек;
- рекомендуемая: 20 Мбит/сек.

4.3.5.3. Требования к функциональным, конструктивным и эксплуатационным характеристикам средств технического обеспечения системы

Требования не предъявляются.

4.3.6. Требования к организационному обеспечению

4.3.6.1. Требования к структуре и функциям подразделений, участвующих в функционировании системы или обеспечивающих эксплуатацию

Задачи по изменению контента, его формы, разработке и совершенствованию сценариев осуществляет контент-менеджер. Разрабатываемый контент не должен противоречить целям и задачам политики информационного воздействия фирмы. Формирование контента должно осуществляться своевременно.

Задачи по развертыванию и обслуживанию системы должен выполнять системный администратор. Системный администратор должен поддерживать систему в работоспособном состоянии.

Задачи по разработке и редактированию медийного контента осуществляет дизайнер. Медийный контент не должен противоречить целям и задачам политики информационного воздействия фирмы.

4.3.6.2. Требования к организации функционирования системы и порядку взаимодействия персонала ИС и персонала объекта информатизации

Перед началом работы с системой персонал должен пройти инструктаж от разработчиков системы.

Для доступа к управлению системой персонал должен пройти процесс аутентификации.

Дальнейшие действия персонала должны соответствовать поставленной цели и производиться в соответствии с инструкцией.

4.4. Требования к методическому обеспечению

Методическое обеспечение системы должно максимально полно описывать реализацию информационных задач, их последовательность и содержание во избежание трудностей в ее эксплуатации.

Методическое обеспечение включает в себя:

- руководство конечного пользователя по работе с системой;

5. Состав и содержание работ по созданию (развитию) системы

Состав и содержание работ по созданию системы выделены на основании ГОСТ 34.601-90(адаптированный), а конкретно по определенным его пунктам: 2.1; 2.2.

Таблица 5. Состав и содержание работ по созданию системы

Этап работ	Содержание работы
Техническое проектирование	1.Разработка общесистемных решений 2. Разработка решений по математическому обеспечению 3. Разработка решений по информационному обеспечению (с разработкой базы данных ИС) 4. Разработка модулей программного обеспечения 5. Разработка решений по техническому обеспечению 6. Разработка решений по организационному обеспечению 7. Разработка рабочей документации на ИС и ее части (п.8 настоящего документа)
Рабочее проектирование	1. Разработка и адаптация программ 2. Разработка документации по вводу ИС и ее частей в действие 3. Разработка документации по эксплуатации и сопровождению системы
Ввод системы в действие	1. Подготовка объекта автоматизации к вводу системы в действие

	2. Подготовка персонала (осуществляется на основании договора с заказчиком) 3. Проведение приемочных испытаний (вид испытания должен быть изложен в «Программе и методике испытаний»).

Сроки выполнения работ по разработке и созданию системы определяются рабочим планом.

6. Порядок контроля и приемки системы

В соответствии с ГОСТ 34.603-92 виды, состав, объем и методы испытаний системы должны быть изложены в «Программе и методике испытаний», определёнными на стадии рабочего проектирования.

Сдача-приемка ИС в составе всей системы осуществляется комиссией, в состав которой входят представители как заказчика, так и исполнителя. По результатам приемки подписывается акт приемочной комиссии. Сдача-приемка ИС также определена и изложена в «Программе и методике испытаний».

7. Требования к составу и содержанию работ по подготовке объекта автоматизации к вводу системы в действие

Требования к составу и содержанию работ по подготовке объекта автоматизации к вводу системы в действие изложены в документе «Программа и методика испытаний».

Комплекс мероприятий, проводимый со стороны заказчика системы:

- Обучение персонала (проводится обучение персонала для работы с внедряемой системой, которое должно соответствовать требованиям к квалификации персонала. Также персонал, которому предстоит обучение, должен быть ознакомлен с руководством пользователя, определенным в пункте «Требования к методическому обеспечению» настоящего технического задания)
- Установка программного обеспечения, соответствующего требованиям, изложенным в пункте «Требования к программному обеспечению» настоящего технического задания
- Обеспечение техническими средствами, соответствующими требованиям, изложенным в пункте «Требования к техническому обеспечению» настоящего технического задания.

Комплекс технических и организационных мероприятий определен в соответствии с требованиями ГОСТ 34.602-89.

8. Требования к документированию

Перечень подлежащих к разработке документов (табл.4):

Таблица 6. Перечень разрабатываемых документов

Этап работ	Документы
Техническое проектирование	1. Документы по общесистемным решениям 2. Документы с решениями: - по математическому обеспечению; - по информационному обеспечению; - по программному обеспечению; - по организационному обеспечению; - по техническому обеспечению; - по информационной безопасности. 3. Чертежи: - схема функциональной структуры ИС; - схема организации информационной базы; - схемы алгоритмов решения проектных процедур;

	- схема автоматизации.
Рабочее проектирование	• Регламент процесса «Оценка уровня восприятия контента пользователями системы» • Руководство пользователя и обслуживающего персонала системы
Ввод системы в действие	• Программа и методика испытаний • АКТ о внедрении (использовании) результатов выпускной квалификационной работы в прикладной процесс на предприятии • Протокол испытаний

Все документы должны быть оформлены в соответствии с ГОСТ 2.105-95. Схемы алгоритмов автоматизированных функций должны быть оформлены в соответствии с ГОСТ 19.701-90. Руководство по эксплуатации должно быть оформлено в соответствии с ГОСТ 2.610-2006. Документирование производится на основании РД 50-34.698-90(адаптированный). Схемы организационно-технической структуры отдела и функциональной структуры должны быть выполнены в соответствии с РД 50-34.698-90(адаптированный).

Комплект документов предоставляется заказчику в печатном и электронном виде (формат электронного документа .doc).

9. Источники разработки

1. ГОСТ 2.105-95 – «Единая система конструкторской документации. Общие требования к текстовым документам».
2. ГОСТ 2.701-2006 «Единая система конструкторской документации. Схемы. Виды и типы. Общие требования к выполнению»;
3. ГОСТ 19.701-90 «Схемы алгоритмов, программ, данных и систем. Обозначения условные и правила выполнения»;
4. ГОСТ 34.201-89 – «Виды, комплектность и обозначение документов при создании автоматизированных систем».
5. ГОСТ 34.601-90 – «Автоматизированные системы. Стадии создания».
6. ГОСТ 34.602-89 – «Техническое задание на создание автоматизированной системы».
7. ГОСТ 34.603-92 – «Информационная технология. Виды испытаний автоматизированных систем».
8. ГОСТ 28806-90 – «Качество программных средств».
9. ГОСТ Р 57115-2016 Торговля. Предпродажная подготовка товаров отдельных видов. Общие требования.
10. ГОСТ Р 51305-99 Розничная торговля
11. ГОСТ Р 50923-96 Дисплеи. Рабочее место оператора. Общие эргономические требования и требования к производственной среде. Методы измерения;
12. ГОСТ 12.2.032-78 ССБТ. Рабочее место при выполнении работ сидя. Общие эргономические требования;
13. Постановление 37 «Квалификационный справочник должностей руководителей, специалистов и других служащих».
14. Постановление Правительства РФ от 27.09.2007 N 612 (ред. от 16.05.2020) "Об утверждении Правил продажи товаров дистанционным способом".
15. Приказ Минтруда России от 05.10.2015 N 684н "Об утверждении профессионального стандарта "Системный администратор информационно-коммуникационных систем";
16. РД 50-34.698-90 – «Автоматизированные системы. Требования к содержанию документов».

17. РД 50-524-84 – «Порядок хранения документов на машинных носителях. Методические указания».

18. Федеральный закон "О рекламе" от 13.03.2006 N 38-ФЗ (последняя редакция).

19. Федеральный закон "Об информации, информационных технологиях и о защите информации" от 27.07.2006 N 149-ФЗ.

20. ГОСТ 28906-91 (ИСО 7498-84, ИСО 7498-84 Доп. 1-84) – «Системы обработки информации. Взаимосвязь открытых систем. Базовая эталонная модель».

ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ РАЗРАБОТКИ ИНСТРУМЕНТА ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОНТЕНТА НА ВЕБ-РЕСУРСЕ

Информационное воздействие происходит путем автоматизированной адаптации контента, в соответствии с уровнем восприятия контента пользователем. Процессу восприятия способствует представление предметной области через образ. Для более эффективного формирования образа, система должна предоставлять индивидуальные параметры чтения пользователя для своевременной и целенаправленной адаптации контента под уровень понимания контента. Данные о реакции объекта управления на представленный ему контент выполняет подсистема мониторинга. Благодаря мониторингу процесса восприятия и непосредственно мониторингу самого восприятия, предприятие может оценить уровень понимания контента пользователями и принимать решения по адаптации информационного наполнения страницы. Таким образом, происходит увеличение интеллектуального капитала как пользователей, так и самого предприятия.

Данная разработка является частью существующей системы управления контентом (Scms) и осуществляет мониторинг процесса восприятия контента пользователем в совокупности с системой окулографического мониторинга посредством определения индивидуальных параметров чтения пользователя.

Инструмент лингвистического анализа контента на веб-ресурсе учитывает психолингвистические методы оценки уровня понимания прочитанного информационного наполнения веб-страницы и методы психофизиологического воздействия в целях продвижения инновационного продукта. В существующую систему управления контентом были внесены изменение ΔS с помощью инновационных решений $\Delta inf = \{\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_n\}$, где $\delta_i \equiv \Delta S_u$, Δinf – область инноваций (маркетинговые информационные системы).

ΔS – инструмент параметризации процесса чтения пользователя на основе психолингвистических методов анализа восприятия информации. Параметры движения взгляда, на которых базируется методика лингвистического анализа контента, можно выявить с помощью методов окулографии [1]. Параметры чтения определены на основании психолингвистических методов оценки уровня понимания контента (понятий, их множества) для поддержки процесса адаптации веб-контента под индивидуальный уровень восприятия

δ_1 – автоматизированная обработка результатов процесса чтения пользователем контента, с целью повышения качества его восприятия.

δ_2 – автоматизированная обработка и предоставление рекомендаций по адаптации контента, учитывая индивидуальные особенности пользователей.

Чтобы обосновать пути и методы совершенствования информационного обеспечения организации в рамках своей предметной области представим схему обоснования совершенствования информационной системы (рис.1)

Непрерывное отслеживание процесса чтения пользователя позволяет оценить повышение

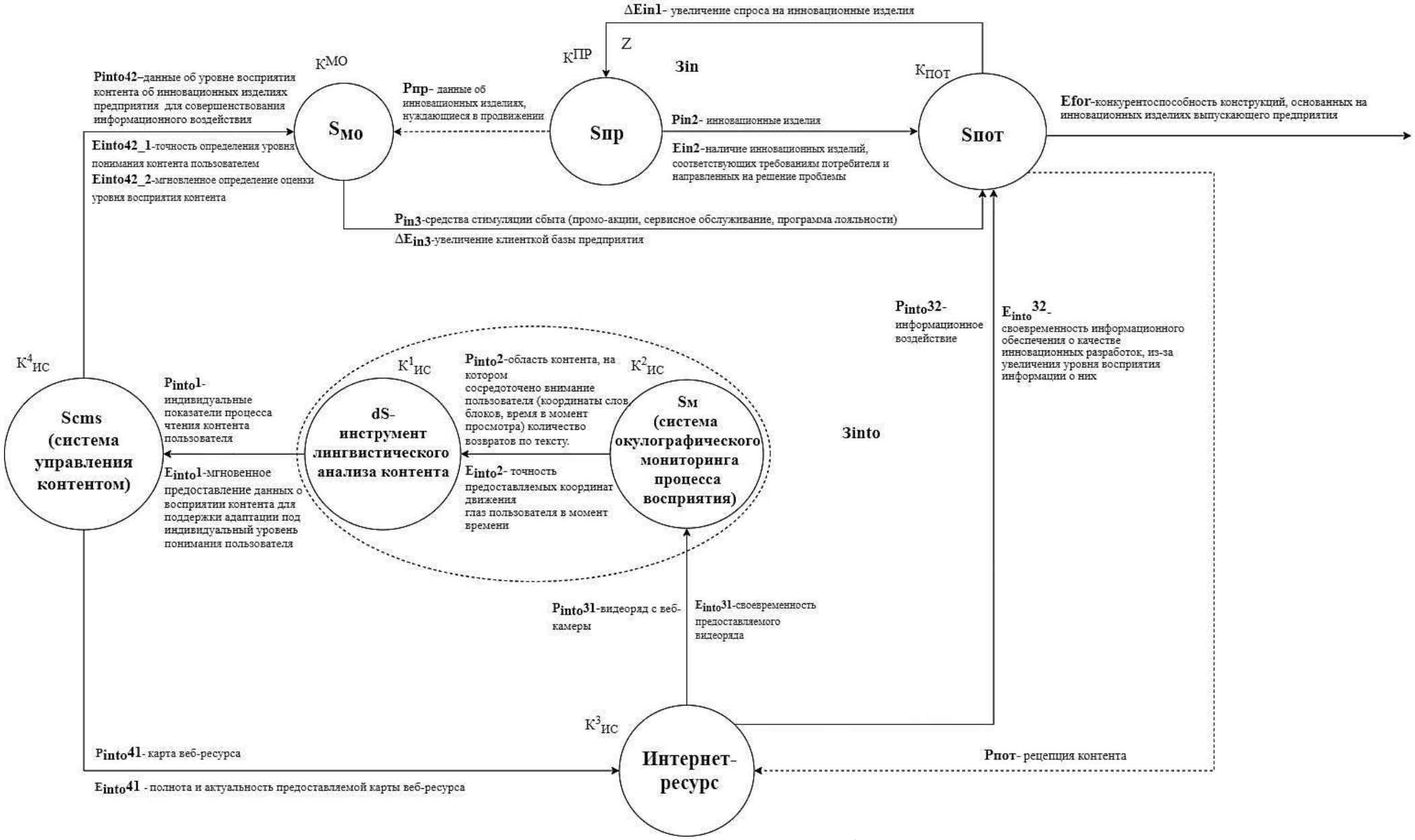


Рис.1 Схема обоснования совершенствования информационной системы

На схеме (рис.1) Sпот-потребители инновационных изделий предприятия. Отметим, что происходит изменение качества всех подсистем, а именно: ΔQпот-увеличение производительности фабрик и предприятий, закупающих конструкторские изделия высокого качества за счет возможности технических разработок на базе инновационных изделий научно-производственного центра (предприятия); ΔQпр-увеличение объемов продаж конструкторских изделий; ΔQcms-увеличение необходимого функционала для полноценной работы системы управления контентом (чем точнее будет оценка восприятия, тем точнее система будет определять, когда необходимо перестроить контент с целью снижения неопределенности у пользователя об инновационной продукции). Особое внимание обратим на ΔQис. Изменение эффекта ΔEinto внутри системы управления Smo зависит от того, как изменится качество ($\Delta K_{ИС}$) информационной системы ($S_{ИС}$), которое, в свою очередь, определяется качеством информации, генерируемой в результате функционирования $S_{ИС}$. Качество информации P_{into} определяется, исходя из ее ценности и полезности, т. е. степени достижения цели. Таким образом, $S_{ИС}$ должна своевременно представлять данные о том, как потенциальные потребители воспринимают информацию об инновационных изделиях, необходимые для маркетинговой деятельности по работе с клиентами.

1.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И ЭФФЕКТОВ ДО И ПОСЛЕ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ

Необходимо определить критерии, характеризующие системы $S_и$, $S_{пр}$, $S_{пот}$, и эффекты этих систем удовлетворения последующих систем или их индивидуальных компонентов. Критерии, указанные на схеме 2 и 3, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Критерии (К) для оценки качества подсистем

Обозначение	Критерии
$К^1_{ИС}$	Точность оценки восприятия контента (точность измеряется величиной погрешности. Чем меньше точность, тем больше погрешность измерения и, соответственно, чем меньше погрешность, тем выше точность). Так как адаптация контента ранее осуществлялась без учета индивидуальных параметров чтения пользователя, точность была минимальной и рассчитывалась малым количеством параметров (без учета типа чтеца, скорости чтения, показателя целостности восприятия информационного блока и т.д). Этим занималась система окулографического мониторинга. Так как точность измеряется величиной погрешности, то в ходе проведения апробации, величина погрешности составляла 66%, так как СОМ определял всего два показателя чтения пользователя для составления тепловой карты, то есть отслеживания индивидуальных показателей в режиме online не происходило. После внедрения инструмента лингвистического анализа, величина погрешности составила 9% за счет увеличения количества отслеживаемых индивидуальных показателей процесса чтения пользователя в режиме online.
	Время определения индивидуальных показателей процесса чтения пользователя (время определения показателей должно занимать не более 150 мс, так как в это время происходит программирование саккады и фиксации в сознании читателя [1]. Инструмент должен в режиме online определять показатели, так как процесс чтения –непрерывный процесс, определенный индивидуальными параметрами чтения пользователя).
$К^2_{ИС}$	Точность определения координат расположения взгляда пользователя (точность измеряется величиной погрешности, которая может возникнуть при определении координат взгляда пользователя в системе окулографического мониторинга)
	Мгновенная передача положения точек взгляда пользователя на каждом кадре (от того, как быстро Sм будет передавать координаты взгляда пользователя

	будет зависеть время определения индивидуальных показателей процесса чтения пользователя в инструменте лингвистического анализа контента
$К^{3}_{ИС}$	Непрерывная передача видеоряда с веб-камеры в систему окулографического мониторинга процесса восприятия (непрерывная и мгновенная передача видеоряда с веб-камеры позволяет системе окулографического мониторинга отслеживать положение точек взгляда пользователя на каждом кадре)
	Организация блоков контента с учетом значимости информационного наполнения блока (достигается посредством применения методики структуризации веб-контента)
$К^{4}_{ИС}$	Время подготовки контента (основываясь на сценарно-ориентированном и системно-ориентированном принципам информационного воздействия, контент-менеджер организованно формирует контент и определяет последовательность его представления, что влияет на время подготовки контента)
	Целенаправленность контента (степень адаптации контента под индивидуальный уровень пользователя. Так как цель контента-донести определенную информацию об инновационных изделиях предприятия потребителю, но при этом предприятие имеет разное деловое окружение, соответственно уровень восприятия контента у всех будет разный. Задача CMS – адаптировать контент под индивидуальный уровень восприятия пользователя посредством получения показателей процесса чтения от инструмента лингвистического анализа контента)
$К^{МО}$	Динамика роста клиентской базы (количество заявок пользователей, оставивших свои данные в клиентской базе после применения средств стимуляции сбыта)
$К^{ПР}_{in}$	Количество заказов инновационных импортозамещающих изделий в неделю
	Количество проданных инновационных изделий в неделю
$К_{ПОТ}$	Отсутствие в продукции потребителя дефектов

Приращение эффекта ΔEin приведет к изменению качества ΔКпот системы покупателей Sпот., что отразится в изменении степени удовлетворения ΔEfor общества в целом.

Совершенствование ΔSис приводит к изменению ее качества ΔQис, отображаемого изменением значений показателей этой системы:

- $К_{ис}^{1}$–Время определения индивидуальных показателей процесса чтения пользователя
- $К_{ис}^{2}$–Точность оценки восприятия контента об инновационных изделиях потенциальными потребителями продукции предприятия;

Изменение качества ΔQис приводит к изменению качества Рис (Pinto42), что ведет к повышению эффектов Einto42_1 и Einto42_2. При оценке эффектов, в качестве продукта информационной системы (Рис.1) рассмотрим Pinto42–данные об уровне восприятия контента об инновационных изделиях предприятия для совершенствования информационного воздействия.

Благодаря определению точности оценки степени понимания информации об инновационных изделиях потенциальными потребителями, увеличивается точность адаптации контента под конкретного пользователя, а точнее под уровень его понимания контента об инновационных изделиях. Система создания и адаптации контента (CMS) с учетом изменений в системе способна более организованно сформировать и перестроить информационное наполнение веб-страницы для снижения неопределенности у пользователя.

До совершенствования системы время определения индивидуальных показателей процесса чтения пользователя занимало 45 с. (с учетом системы окулографического мониторинга). Время определения показателей должно занимать не более 150 мс.

Инструмент лингвистического анализа отслеживает параметры в режиме online в течении 0,15 с. (150 мс), т.е. $К'_{ис1} = 45$ с., $К''_{ис1} = 0{,}15$ с.

Einto42_2-мгновенное определение оценки уровня восприятия контента. Получаем:

- E'into42_2= 0
- E''into42_2= 1

Получаем, что ΔEinto42_2=$1 - 0 = 1$

Точность оценки восприятия контента (точность измеряется величиной погрешности. Чем меньше точность, тем больше погрешность измерения и, соответственно, чем меньше погрешность, тем выше точность). Так как адаптация контента ранее осуществлялась без учета индивидуальных параметров чтения пользователя, точность была минимальной и рассчитывалась малым количеством параметров (без учета типа чтеца, скорости чтения, показателя целостности восприятия информационного блока и т.д). Этим занималась система окулографического мониторинга.

Так как точность измеряется величиной погрешности, то в ходе проведения апробации, погрешности составляла 66%, так как СОМ определял всего два показателя чтения пользователя для составления тепловой карты, то есть отслеживания индивидуальных показателей в режиме online не происходило. После внедрения инструмента лингвистического анализа, величина погрешности составила 9% за счет увеличения количества отслеживаемых индивидуальных показателей процесса чтения пользователя в режиме online.

Требуемая точность оценки степени понимания контента равна 95% (Погрешность не больше 5%). Точность, на которую направлен данный инструмент – 91% (погрешность составляет 9% в силу человеческого фактора чтеца). Получаем $К'_{ис}{}^2$=0,34, $К''_{ис}{}^2$=0,95

Einto42_1-точность определения уровня понимания контента пользователем

- E'into42_1=$\frac{0{,}34}{0{,}95} = 0{,}386$
- E''into42_1=$\frac{0{,}91}{0{,}95} = 0{,}96$

Получаем, что ΔEinto42_2=$0{,}96 - 0{,}386 = 0{,}574$

После оказания информационного воздействия, у потребителей формируется образ об инновационных конструкторских изделиях предприятия, снижается неопределенность, касательно сферы импортозамещающих конструкторских изделий научно-производственного центра, появляется потребность в данном роде услуг, что выражается в увеличении количества заказов (Кпр1 – количество заявок инновационных импортозамещающих изделий в неделю):

- К'пр1=3
- К''пр1=10

Далее рассчитаем эффект E_{in1} -увеличение спроса на инновационные изделия при количестве заказов = 8:

- E'_{in1} =0,3
- $E''_{in1} = 0{,}8$

Получаем, что $\Delta E_{in1} = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$

Отметим, что с увеличением количества заявок инновационных изделий у предприятия, увеличится их объем продаж (Кпр2-количество проданных инновационных изделий в неделю).

- К'пр2=2
- К''пр2'=8

Далее рассчитаем эффект E_{in2} - увеличение количества продаж инновационных изделий при количестве продаж в неделю 6:

- $E'_{in2} = 0{,}25$
- $E''_{in2} = 0{,}75$

Получаем, что $\Delta E_{in2} = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5$

С учетом того, что за счет усовершенствования системы управления контентом, продуктом Smo являются средства стимуляции сбыта (промо-акции, сервисное обслуживание, программа лояльности), происходит увеличение клиенткой базы предприятия (Кпр3-активность клиентской базы за месяц).

- К'пр3=5
- К''пр3'=14

Далее рассчитаем эффект E_{in3} - увеличение клиенткой базы предприятия при количестве новых клиентов равном 12:

- $E'_{in3} = \frac{5}{14} = 0{,}35$
- $E''_{in3} = \frac{12}{14} = 0{,}89$

Получаем, что $\Delta E_{in2} = 0{,}89 - 0{,}35 = 0{,}54$

Поскольку Q_P предприятия увеличилось, изменится качество клиентов потребителя и их продукции. Если представить, что потребитель изготавливает конструкции с использованием инновационных изделий предприятия, то клиенты потребителя будут использовать их в своей производственной деятельности, тогда эффект E_{for} – конкурентоспособность конструкций, зависящая от $К_{пот}$ – отсутствие в продукции потребителя дефектов (наличие высокой прочности, наличие устойчивости к коррозии на счет инновационных изделий, предусматривающих защиту конструкций). Точные показатели мы не можем вывести, однако можем рассмотреть конкретную ситуацию. Допустим, до использования инновационных изделий предприятия количество дефектов в конструкции потребителя было 4, а за счет использования инновационных изделий выпускающего предприятия 1: $К'_{пот} = 4$, $К''_{пот} = 1, \Delta К_{пот} = |1 - 4| = 3.$

Далее рассчитаем эффект E_{for} - конкурентоспособность конструкций, основанных на инновационных изделиях выпускающего предприятия при количестве дефектов равном 2:

- $E'_{for} = 0{,}25$
- $E''_{for} = 0{,}5$

Получаем, что $\Delta E_{for} = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$

1.2 РАСЧЕТ ЗАТРАТ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИС ДО И ПОСЛЕ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ

1.2.1 Расчет затрат на уровне into

Затраты на уровне into подразделяются на затраты до внедрения(текущие) и после внедрения (текущие и единовременные) новой системы.

Под текущими затратами подразумеваем такие затраты: на электроэнергию, на коммунальные услуги, на заработную плату, на оплату интернета.

Под единовременными затратами подразумеваются затраты на разработку и внедрение системы.

Рассмотрим единовременные затраты $З_{into}^{единов}$:

Для определения нормативов трудоемкости, будем использовать отраслевой стандарт автоматизированной системы управления[3]. Для этого сначала определим исходные данные нашей системы:

- Степень новизны-1-я степень. Индивидуальная разработка задач с целью развития АСУП, реализуемой на ЭВМ;
- Группа сложности программы-1. Сложные логические программы, объединённые в систему программ; организующие программы.

[3] ОСТ 4.071.030 СОЗДАНИЕ СИСТЕМЫ. НОРМАТИВЫ ТРУДОЁМКОСТИ

Данные исходные данные свидетельствуют о преобладании научной составляющей данного проекта. Далее воспользуемся таблицей с нормативами трудоёмкости на разработку АСУП (табл.1) из отраслевого стандарта ОСТ 4.071.030.

Таблица 1. Нормативы трудоемкости на разработку АСУП

Код работы	Наименование работы	Трудоёмкость разработки и оформление документации по этапам, нормо-часы			
		Всего	Разработка и оформление оригинала	Оформление подлинника	Согласование и утверждение подлинника
106000	Разработка основных требований к создаваемой системе и составление технического задания	4543	3677	588	278
301000	Разработка и обоснование проектных решений по функциональной части системы	4425	1613	2645	167
306000	Разработка и обоснование проектных решений по информационному обеспечению системы	2596	2050	337	209
307000	Разработка и обоснование проектных решений по математическому обеспечению системы	869	681	111	77
308000	Разработка и обоснование проектных решений по техническому обеспечению системы	1081	850	138	93
	Разработка программ и программной документации по группам сложности на языках программирования	2609	2174	322	113

Разработка основных требований к создаваемой системе и составление технического задания в соответствии с таблицей ОСТ 4.071.030 составляет: 4543 часа (разработка и оформление оригинала, оформление подлинника, согласование и утверждение подлинника). При этом, соответствии с ОСТ 4.071.030 ЖЦ приравнивается к 5 годам. У нас заданный срок отличается (1 год), поэтому рассчитываем количество часов для 1 года: 4543/5=908,6 ч.

Учитывая, что при 6-ти дневной смене и 8-часовом рабочем днем, мы имеем 4 месяца работы над техническим заданием. Исполнитель данной работы- системный аналитик, оплата работы [4]по Нижегородской области 50 тыс. рублей/ мес.

Посчитаем сумму, необходимую на разработку технического задания: 4*50000=200000 рублей.

Далее, рассчитаем сумму, необходимую на технорабочий проект. В таблице указаны этапы (код работ: 301000, 306000, 307000, 308000). Аналогичным образом рассчитаем количество месяцев для каждой части ТП, с учетом того, что заданный период 1 год (табл.2):

Таблица 2. Этапы технорабочего проекта

[4] https://nn.hh.ru/

Код работы	Наименование работы	Трудоёмкость разработки и оформление документации по этапам, нормо-часы				
		Всего	Разработка и оформление оригинала	Оформление подлинника	Согласование и утверждение подлинника	Количество месяцев
301000	Разработка и обоснование проектных решений по функциональной части системы	4425	1613	2645	167	4,5
306000	Разработка и обоснование проектных решений по информационному обеспечению системы	2596	2050	337	209	2,75
307000	Разработка и обоснование проектных решений по математическому обеспечению системы	869	681	111	77	1
308000	Разработка и обоснование проектных решений по техническому обеспечению системы	1081	850	138	93	1,1
	Разработка программ и программной документации по группам сложности на языках программирования	2609	2174	322	113	2,75

Получаем, что системному аналитику понадобится время, указанное в таблицах, для выполнения технического задания и технорабочего проекта с учетом 6-ти дневной рабочей недели при 8-часовом рабочем дне. Получаем, что $З_1$=12*50 000 = 600000 рублей - заработная плата системного аналитика за весь проект ИС с учетом того, что он работает в Нижнем Новгороде.

Далее используем нормативы трудоёмкости на внедрение АСУП 1-й степени новизны приведены в таблице 3.

Таблица3. Нормативы трудоёмкости на внедрение

Наименование работы	Трудоёмкость по видам работ, нормо-часы		
	Всего	Проведение испытаний	Оформление технической документации
Внедрение*	736,6	701,8	34,8
Подготовка условий для обеспечения эксплуатации системы	1223	1223	–
Комплексная проверка готовности задач, подсистем и системы к сдаче в промышленную эксплуатацию	1223	1223	–
Сдача задачи заказчику на контрольных примерах	82	82	–

Приёмо-сдаточные испытания задачи с использованием действующей на объекте информации в зависимости от частоты их решения	1155	981	174
Внедрение (мес.)	3,3	3,1	0,2

Далее рассчитаем заработную плату программиста с учетом тестирования и внедрения системы при условии продолжительности рабочего дня 8 часов 6 рабочих дней недели.

$З_2$=(3,1+0,2+3,3)*40 000=264 000 рублей-заработная плата программиста за весь проект.

Для оценки затрат на ввод программной системы в эксплуатацию необходимо эмпирическим путем установить затрачиваемое время и класс специалистов, которые выполняют данную работу.

Таблица 4. Затраты на ввод ИС в эксплуатацию

Цель труда	Трудовые затраты	Минимально необходимое время на труд, час	Специалисты, выполняющие данные задачи
Установка программного обеспечения	Установка и настройка веб-сервера	1	Системный администратор
	Установка и настройка баз данных	1	Системный администратор
	Установка и настройка программного инструментария	1	Системный администратор
Адаптация ИС	Настройка шаблонов представления контента	16	Веб-дизайнер
	Регистрация пользователей и настройка прав доступа	1	Системный администратор
	Создание веб-контента	40	Контент-менеджер

Всего минимальное необходимое время на труд составляет 60 часов.

Далее определим специалистов, чей труд используется при вводе ИС в эксплуатацию с указанием заработной платы. Приведем среднюю месячную заработную плату работников. Будем считать, что в организации принят 8-часовой рабочий день (8 * 24 = 192 часов в месяц), определим заработную плату за один час и посчитаем общие трудовые затраты.

Таблица 5. Оценка затрат на ввод ИС в эксплуатацию

Специалист	Суммарные трудовые затраты, час	Средняя заработная плата, руб.	Стоимость труда в час	Суммарная стоимость труда, руб.
Системный администратор	4	50000	260,4	1041,6
Веб-дизайнер	16	40000	208,3	3332,8
Контент-менеджер	40	25000	130,2	5208
Суммарные затраты на оплату труда (Зсум)				9582,4

Также отметим, что необходимо учесть налоги, которые предприятие платит государству: взнос в Пенсионный фонд (22%), взнос в фонд медицинского страхования (5,1%) и взнос в фонд социального страхования (2,9%) а также взнос по страховому тарифу от несчастных случаев на производстве и профзаболеваний (0,2%) (данные на 2021 год[5]).

[5] https://www.kadrof.ru/articles/1199

Получаем:

$З_{нал}$= (9582,4+264000+600000) *0,32 (22%+5,1%+2,9%+0,2%=30,2%)=279 546,4руб.

Итого: $З_{into}^{единовр}$ =$З_{тз}$+$З_1$+ $З_2$ +$З_{сум}$+$З_{нал}$=1353128,8руб (на 3 года). При этом $З_{into}^{единовр}$ на 1 год составят: 451 042,9 руб.

Далее рассмотрим текущие затраты до совершенствования системы $З'_{тек}$. Сначала рассмотрим заработную плату персонала ИС (табл.6). При эксплуатации системы работники имеют неполную рабочую ставку, им достаточно часа в день для проверки работоспособности системы и актуализации контента. Таким образом, каждый месяц работники получают 0,1 от их месячной зарплаты.

Таблица 6. Затраты на заработную плату персонала ИС

Специалист	Ср. заработная плата, руб./год
Системный администратор	50000*0,1*12=60000
Веб-дизайнер	40000 *0,1*12=48000
Контент-менеджер	25000 *0,1*12=30000
Суммарные ежегодные затраты на оплату труда:	138000
Налоги (30%):	41400
Итого $З_{зп}$:	179400 руб.

Далее рассмотрим затраты на электроэнергию. Затраты на электроэнергию для серверного и коммуникационного оборудования. Энергопотребление блоком питания сервера составляет примерно 600 Вт/час, стоимость электроэнергии 6,38 руб за 1 кВт/час2 (по Нижегородской области). При круглосуточной работе оборудования затраты составят: 6,38 * 0,6 * 24 * 30=2756,16 руб./мес.). Получаем, что за 1 год затраты составят: 2756,16*12=33073,92 руб.

Также определим затраты на использование подключения к сети Интернет, предоставляемого провайдером. Стоимость зависит от размеров организации и необходимой пропускной способности канала, по данным Ростелеком – приблизительно 3000 руб/месяц (4,16 руб/час) (по Нижегородской области). Получаем, что за 1 год затраты составят: 3000*12=36000руб.

Далее необходимо учесть затраты на дополнительные офисные принадлежности для организации с объемом штата до 35 человек уходит в среднем 5000 руб/месяц. За 1 год получаем: 5000*12=60000 руб.

Итого: $З_{into}$(тек) = Ззп+Зэл+Зоп=179400+36000+33073,92 +60000=308473,9 руб./год

Рассмотрим затраты на эксплуатацию модернизированной ИС ($З''_{тек}$).

Для начала отметим, что при усовершенствовании системы расширение или сокращение штата не потребуется. Заработные платы останутся те же, поэтому $З''_{зп}$=179400 руб./год. Далее рассмотрим затраты на электроэнергию для серверного и коммуникационного оборудования. Они остались неизменными, поскольку необходимое оборудование уже имеются на предприятии и соответствуют всем требованиям, представленным в части ТЗ, поэтому $З''_{эл}$=33073,92 руб/год. Затраты на дополнительные офисные принадлежности также остались неизменны. Получаем, что $З_{into}$" = 179400+36000+33073,92 +60000=308473,9 руб./год.

1.2.2. Расчет затрат на уровне in.

Затраты $З_{in}$ будут способствовать достижению эффекта E_{in}. К $З_{in}$относятся затраты на повышение квалификации персонала.

На данный момент $З'_{in} = 0$, так как нет никаких затрат на выполнение функций, представленных в системе. Необходимо рассчитать затраты $З''_{in}$, так как необходимо научить персонал пользоваться усовершенствованной системой.

Время обучения равно: tпод+tоб. При времени подготовки (tпод) равным 3 часа и времени обучения (tоб) 3 часа одноразово, общее время работы составляет 6 часов. Зарплата

аналитика за час составляет 210 руб. Получаем, что итоговая сумма за обучение составляет: 6*210=1260 руб., следовательно, $З_{in}$=1260 руб.

1.2.3. Расчет затрат на уровне for.

$З_{for}$ направлены на маркетинговые исследования, проводимые после того, как предприятие начнет выпускать инновационные изделия. Эти исследования нацелены на будущее повышение качества предоставляемых изделий. На данный момент определить эти затраты трудоемко, но отметим, что $З''_{for} > З'_{for}$, так как ранее предприятие не оказывало данных услуг (затраты ДО: $З'_{for}$=0). Тогда предположим, что $З''_{for}$ = X руб. Затраты $З_{into}$ и $З_{for}$ направлены как на эксплуатацию системы, так и на продвижение инновационных изделий. Поскольку одной из основных задач системы информационного воздействия является продвижение, можно сказать, что $З_{into} = З_{for}$.

$З'_{into} = З_{into}(тек) + З'_{for}$=273289,9+0=273289,9 руб./год

$З''_{into} = З_{into}^{единовр} + З''_{тек}$+X = 451 042,9+273289,9+ X=724332,8+ X,

где X-затраты на маркетинговые исследования. Если рассматривать в качестве маркетинговых исследований конкурентный анализ[6], то затраты на такую услугу составляют 20000 руб./месяц. При проведении конкурентного анализа 2 раза в год затраты на маркетинговые исследования составят: 40000 руб/год. Т.е., используя формулу, где X будет равен 40000 руб., получим $З''_{into}$=724332,8+40000=764332,8 руб./год.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ - $\Delta Э_{into}$, $\Delta Э_{in}$, $\Delta Э_{for}$

Совершенствование есть ни что иное, как повышение эффективности, то показатель эффективности Э=Е/З можно принять в качестве показателя совершенствования, дающего основание для обоснования принятых решений ($\partial_I, \Delta S_и$).

Условие обоснования совершенствования системы информационного воздействия имеет следующий вид: $\Delta Э_{into} = E''_{into} \cdot З'_{into} - E'_{into} \cdot З''_{into} > 0$. Такое условие полностью согласуется с международным стандартом управления качеством [2.2].

Используя формулу расчета эффективности, вычислим $\Delta Э_{into1}$ и $\Delta Э_{into1}$

$$\Delta Э_{into42_1} = 0{,}96 * 308473{,}9 - 0{,}386 * 764332{,}8 = 1102{,}48 > 0$$

$$\Delta Э_{into42_2} = 1 * 308473{,}9 - 0 * 764332{,}8 = 308473{,}9 > 0$$

Получаем, что $\Delta Э_{into42_1} > 0$ и $\Delta Э_{into42_2} > 0$.

Целесообразность развития предприятия определяется следующим условием:

$$\Delta Э_{in} = E''_{in} \cdot (З'_{into} + З'_{in}) - E'_{in} \cdot (З''_{into} + З''_{in}) > 0$$

$$\Delta Э_{in1} = 0{,}8 * (308473{,}9 + 0) - 0{,}3 * (764332{,}8 + 1260) = 17101{,}28 > 0$$

$$\Delta Э_{in2} = 0{,}75 * (308473{,}9 + 0) - 0{,}25 * (764332{,}8 + 1260) = 39957{,}23 > 0$$

$$\Delta Э_{in3} = 0{,}89 * (308473{,}9 + 0) - 0{,}35 * (764332{,}8 + 1260) = 6584{,}291 > 0$$

Получаем, что $\Delta Э_{in1} > 0$, $\Delta Э_{in2} > 0$ и $\Delta Э_{in3} > 0$.

Для оценки $\Delta Э_{for}$ воспользуемся формулой:

$$\Delta Э_{for} = E''_{for} \cdot (З'_{into} + З'_{in} + З'_{for}) - E'_{for} \cdot (З''_{into} + З''_{in} + З''_{for}) > 0$$

$$\Delta Э_{for} = 0{,}5 * (308473{,}9 + 0 + 0) - 0{,}25 * (764332{,}8 + 1260 + 40000) = 1271{,}9 > 0$$

Таким образом, $\Delta Э_{into} > 0$, $\Delta Э_{in} > 0$, $\Delta Э_{for} > 0$ –это говорит о том, что совершенствование системы информационного воздействия имеет положительный эффект.

[6] https://gidmark.ru/services/marketingovye-issledovaniya

ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОЕКТ

1. Общие сведения

1.1. Полное наименование системы и её условное обозначение

Полное наименование системы: Инструмент лингвистического анализа контента на веб-ресурсе.

Условное обозначение: ИЛА

1.2. Наименование предприятий (объединений) разработчика и заказчика (пользователя) системы и их реквизиты

Наименование разработчика: Кафедра ИТ ИГЭУ им. В.И. Ленина, Воробьева Дарья Витальевна. Юридический адрес: Россия, 153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, д. 34, ауд. 501. Телефон: 8 (910) 667-60-05.

Наименование заказчика: НПЦ «АНОД». Юридический адрес: Россия, 603003, г. Нижний Новгород, ул. Свободы, д. 63. Телефон: (831)233-77-03.

1.3. Перечень документов, на основании которых создается система, кем и когда утверждены эти документы

Работа производится на основании задания на выпускную квалификационную работу, утвержденного научным руководителем и заведующим кафедрой.

1.4. Плановые сроки начала и окончания работы по созданию системы

Начало работ: 01.09.2020

Окончание работ: 29.04.2021

2. Назначение и цели создания (развития) системы

2.1. Назначение системы

Система лингвистического анализа предназначена для информационного обеспечения процесса управления (адаптации) контента, путем мониторинга процесса чтения веб-контента и оценки степени его восприятия пользователем для последующей адаптации информационного наполнения веб-страницы в динамическом режиме. Параметрическая модель, полученная на выходе системы, необходима для выявления проблемных мест при восприятии информации, а показатели скорость чтения и тип чтеца – для регулирования подачи информационных блоков при чтении.

2.2. Цели создания системы

Целями создания системы являются:

1. Обеспечение мониторинга процесса чтения пользователя материала веб-ресурса, с целью получения данных о степени восприятия контента, представленной пользователю;
2. Параметрическая модель процесса чтения конкретного пользователя, с целью выявления проблемных мест при восприятии информационного блока и поддержке решения по адаптации контента;
3. Показатели чтения – скорость чтения (Vr), тип чтеца (Tipe_id), необходимые для инструмента структуризации контента с целью регулирования подачи информационного наполнения с учетом индивидуальных особенностей пользователя при чтении;

2.3. Сведения об использованных при проектировании нормативно - технических документах

- ГОСТ 2.105 - Общие требования к текстовым документам;
- ГОСТ 34.201-89 Виды, комплектность и обозначение документов при создании автоматизированных систем;

- ГОСТ 34.602-89 Техническое задание на создание автоматизированной системы;
- РД 50-34.698-90 Автоматизированные системы требования к содержанию документов;

ОБЩИЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

4.1 Основные системные решения:

Решения по структуре системы, подсистем, средствам и способам связи для информационного обмена между компонентами системы, подсистем:

В рамках системы мониторинга восприятия была выделена подсистема лингвистического анализа веб-контента.

Подсистема содержит следующий функционал:

1. Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку
2. Оценка показателей процесса чтения пользователя
3. Определение уровня восприятия пользователем информационного блока
4. Расчет показателей техники чтения пользователя

Функциональная структура представлена на рис. (16):

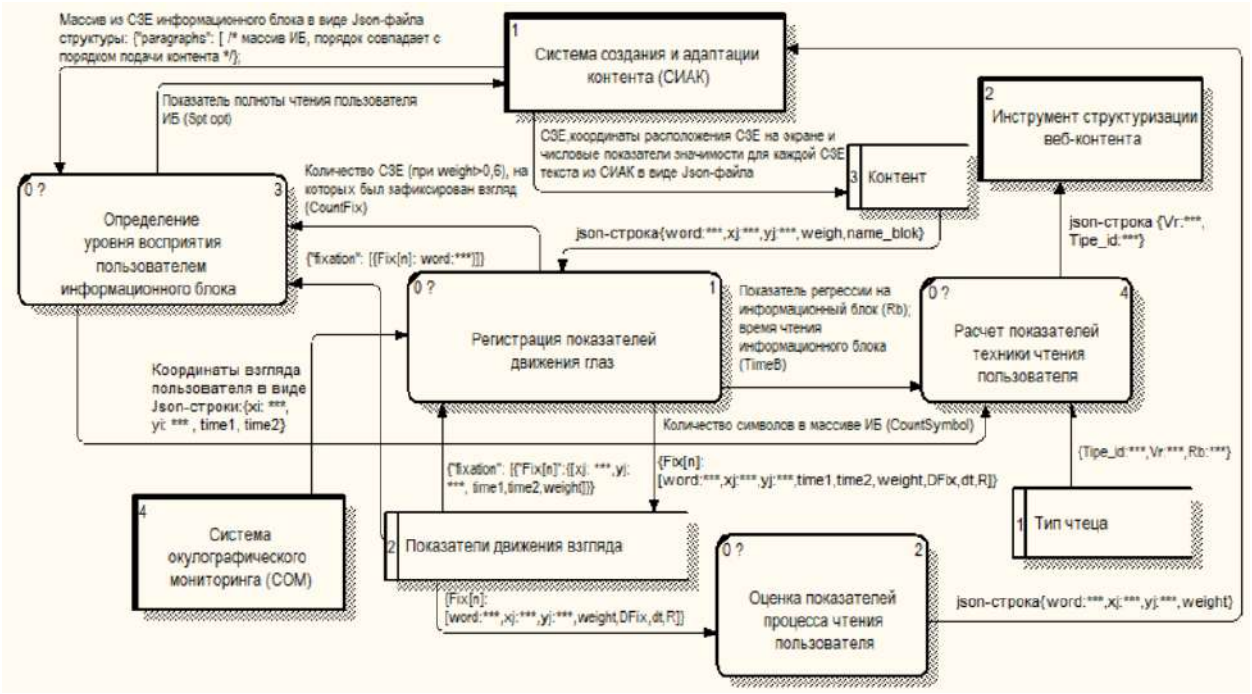


Рис.16 Функциональная структура системы в нотации DFD

В качестве формата сообщений входных/выходных данных функций была выбрана json-строка, так как это наиболее легковесный тип сериализации данных, используется для обмена сообщениями в большинстве систем и имеет высокую скорость парсинга данных. Информационный обмен между функциями происходит посредством передачи json-строки.

4.2 Решения по взаимосвязям АС со смежными системами, обеспечению ее совместимости:

Инструмент лингвистического анализа веб-контента взаимодействует с подсистемой окулографического мониторинга (COM) посредством получения набора данных с координатами взгляда пользователя и указанием времени, представленных json-строкой {[xi:***,yi:***,time1, time2]}. Структуры данных, используемые json, поддерживаются любыми современными языками программирования. Это позволяет установить интерфейс между системами, имеющие в основе разные языки программирования. Также json позволяет установить связь между клиентской и серверной частью ПО. Аналогичным образом происходит взаимодействие с подсистемой создания и адаптации контента (СИАК) для передачи СЗЕ, которая вызвала затруднение у пользователя с указанием ее координат и семантической значимости в виде json-строки {word:***,xj:***,yj:***,weight}, а также для передачи значения показателя полноты чтения

пользователя (Spt opt). Взаимосвязь осуществляется между подсистемой лингвистического анализа веб-контента и СИАК, в двустороннем направлении. СИАК передает координаты расположения СЗЕ на экране и числовые показатели значимости для каждой СЗЕ текста из СИАК в виде Json-файла: {"paragraphs": [/* массив информационных блоков, порядок совпадает с порядком подачи контента */{"words": [/* массив координат слов в абзаце */ {xj: ***,yj: ***,weight: *** /* семантическая значимость */},/* ... */]},/* ... */]}}. Аналогичным образом происходит взаимодействие с подсистемой структуризации контента для передачи показателей скорости чтения и типа чтеца в виде json-строки {Vr:***, Tipe_id:***} для последующей регулировки подачи контента в зависимости от типа чтеца.

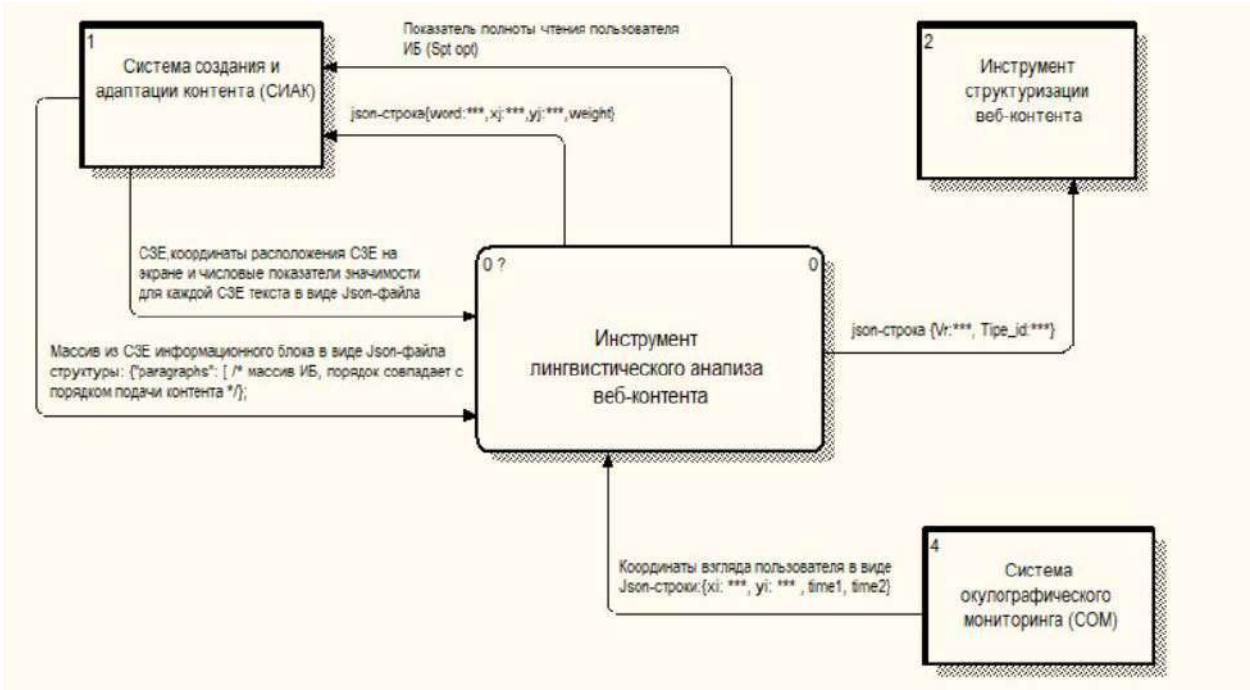


Рис.17 Контекстная диаграмма DFD

4.3 Решения по режимам функционирования, диагностированию работы системы:

Разрабатываемая подсистема имеет возможность функционировать в следующих режимах:

- *Основной режим*, в котором все подсистемы выполняют свои основные функции.
- В основном режиме функционирования система обеспечивает: работу пользователей в режиме – 24 часа в день, 7 дней в неделю (24x7) . В нашем случае система может функционировать, в то время, когда функционирует маркетинговый отдел НПЦ «АНОД» и работает системный администратор (08:00-18:00);

Диагностирование разрабатываемой системы должно не превышать 5% от ее общего функционирования.

4.4 Состав задач, реализуемых подсистемой

Для разрабатываемой системы выделены следующие задачи:

1. Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку

Данная задача начинается с получения координат местоположения зрачков пользователя на экране с указанием времени, координат расположения СЗЕ на экране, числового показателя значимости для каждой СЗЕ текста. Далее происходит определение фиксации на СЗЕ, отслеживание регрессий, подсчет их количества. Полученные показатели сохраняются в базе данных и далее являются входным потоком для оценки показателей

процесса чтения пользователя, определения уровня восприятия пользователем информационного блока, расчета показателей техники чтения пользователя.

2. Оценка показателей процесса чтения пользователя

Задача направлена на выявление СЗЕ, вызвавших трудность при восприятии у пользователя. Это определяется на основании показателя узнаваемости слова. Если узнавание не произошло, функция отправляет json-строку{word:***,xj:***,yj:***,weight} в систему создания и адаптации контента (СИАК) с целью замены трудного для восприятия слова на более знакомое для пользователя.

3.Определение уровня восприятия пользователем информационного блока

Задача направлена на определение уровня понимания пользователем информационного блока. Для этого определяется показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt), который будет являться входным потоком для системы СИАК с целью поддержки принятия решения о перестройке содержимого информационного блока.

4. Расчет показателей техники чтения пользователя

В данной задаче определяется скорость чтения пользователя и тип чтеца на основании входных данных: показатель регрессии на информационный блок (Rb); время чтения информационного блока (TimeB) от задачи регистрации показателей движения и количество слов в массиве ИБ (CountW) от задачи оценки показателей процесса чтения пользователя. Выходным потоком для инструмента параметризации веб-контента будет json-строка {Vr:***, Tipe_id:***}с указанием скорости чтения и типа чтеца.

ОПИСАНИЕ РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ

5.1. Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку

5.1.1 Содержание и формализованное описание выполнения проектной процедуры.

5.1.1.1 Математическое описание

Для регистрации фиксации Fix на СЗЕ процедура получает на вход координаты расположения зрачков пользователя (xi: ***, yi: ***), время начала и конца остановки взгляда на СЗЕ time1и time2 соответственно и СЗЕ(word), координаты СЗЕ, расположенных на веб-странице в информационном блоке (xj: ***, yj: ***) и семантическую значимость weight.

Для определения фиксации происходит сравнение координат взгляда пользователя и координат СЗЕ: если (xi=xj) && (yi=yj), то определяем фиксацию с параметрами: {Fix(n): [word, (xj: ***, yj: ***), weight, time1, time2]}. При это подсчитываем количество СЗЕ, на которых было обращено внимание пользователя и семантическая значимость (weight) которых> 0,6.Т.е., если weight>0,6, то CountFix=+1. Далее находим длительность фиксации: DFix = time2- time1, время отсутствия взгляда dt (параметр, необходимый для учета регрессии. Если dt>40с., то регрессию на СЗЕ(n) не учитываем), dt= time1(n+1) - time1(n), R – количество регрессий на СЗЕ (n). Регрессия подсчитывается, если пользователь вернулся к ранее пройденному слову. Отследить это можно по сравнениям координат взгляда пользователя и координат СЗЕ и сравнению времени начала обращению к СЗЕ time1: если (xi=xj) && (yi=yj), но time1:***≠ time1:***, то R=+1. При этом параметр dt рассчитывается только после перехода взгляда читателя к следующему слову на сроке.

Если при проверке по координатам совпадения не были найдены, необходимо провести проверку по буквенному составу слова, так как слово могло вызвать затруднения у пользователя, но иметь другие координаты. Сравниваем рассматриваемое слово посимвольно со всеми ранее зафиксированными.

Для этого определим пустую переменную w=’ ’, которая необходима для последующей посимвольной записи в нее букв текущего зафиксированного слова. С помощью стандартной функции length(), которая определяет длину массива/переменной типа string, реализуем посимвольную запись рассматриваемого слова в переменную w (w[i]

= Fix[n-1].word[i]) по циклу от i=0 до конца слова (i<length(Fix[n-1].word);). А с помощью цикла от b=1 до текущего слова(b<(n-1)), посимвольно сравним каждое ранее зафиксированное слово с рассматриваемым. Для этого определим пустую переменную lastW=’ ’, для последующей посимвольной записи в нее букв сравниваемого слова, и переменную same=0 – количество одинаковых букв при сравнении слов.

Если длина рассматриваемого слова равна длине текущего сравниваемого слова (ength(Fix[n-1].word)==length(Fix[b].word)), то начинаем посимвольное сравнение. Циклом от j=0 до конца слова (j<length(Fix[b].word)), «разбиваем» слово на буквы и записываем каждую в переменную lastW (lastW[j] = Fix[b].word[j]). Если текущий символ слова равен символу рассматриваемого слова с тем же индексом (lastW[j] == w[j]), то увеличиваем значение переменной same на 1 (same+=1). Если после перебора всех букв в текущем сравниваемом слове, количество одинаковых слов равно длине рассматриваемого слова (same==length(Fix[n-1].word)), то увеличиваем показатель регрессии на 1 (R+=1) . Иначе, если длины слов не совпадают, то переходим на следующее слово.

После выполнения процедуры, формируется следующая json-строка: {Fix[n]: word:***,xj:***,yj:***,weight,time1,time2,DFix,dt,R]}.

Строка сохраняется в БД для дальнейшей обработки при определении уровня понимания пользователем информационного блока и передается для определения проблемы восприятия семантически-значимой единицы с целью определения показателя узнаваемости слова (RecConc). Выполнение данной процедуры будет описано далее.

При этом необходимо определить показатель регрессии Rb на высказывание [26] (информационный блок).

Rb=+1, если ((xi=xj) && (yi=yj))&&((xi+1=xj+1) && (yi=yj))&&((xi+2=xj+2) && (yi=yj)) и time1:***≠ time1:***, т.е. координаты взгляда совпадают с координатами слова, причем это условие выполняется и для следующих как минимум двух идущих подряд слов в строке, но время обращения взгляда к слову time1 не совпадает с уже записанным показателем time1 в фиксации Fix(n), Fix(n+1), Fix(n+2). Это значит, что пользователь заново начал перечитывать информационный блок. В этом случае идет подсчет регрессии на высказывание (ИБ), т.е. Rb=+1. Данный показатель передается как входной параметр для функции расчета показателей уровня восприятия пользователем информационного блока.

Для функции «Расчет показателей техники чтения пользователя» необходим показатель TimeB-время чтения информационного блока. TimeB рассчитывается по формуле: Fix[n].time1-Fix[1].time1.

5.1.1.2 Описание входных, выходных, нормативно-справочных данных

Входные данные из подсистемы окулографического мониторинга СОМ:

Положение точек на каждом кадре для пользователя передается в виде Json-строки: {xi: ***, yi: *** , time1, time2}

Входные данные из подсистемы создания и адаптации контента:

Координаты расположения СЗЕ на экране и числовые показатели значимости для каждой СЗЕ текста из СИАК в виде Json-файла:

{"paragraphs": [/* массив информационных блоков, порядок совпадает с порядком подачи контента */{"words": [/* массив координат слов в абзаце */ {xj: ***,yj: ***,weight: *** /* семантическая значимость */},/* ... */]},/* ... */]}}

Входные данные из сущности БД «Показатели движения взгляда»:

{"fixation": [*/ массив структур с показателями движений взгляда пользователя /*{"Fix[n]":{[xj: ***,yj: ***, time1,time2,weight]}}

Входные данные из сущности БД «Контент»:

json-строка{word:***,xj:***,yj:***,weight, name_blok}

Выходные данные процедуры:

- {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,time1,time2,weight,DFix,dt,R]}
- TimeB-время чтения информационного блока

- Показатель регрессии на информационный блок (Rb);
- Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд (CountFix)

5.1.1.3 Список обозначений элементов предметной области с указанием их наименований

Таблица 7. Список обозначений

Обозначение	Наименование
xi	Координата взгляда по оси x, относительно центра экрана
yi	Координата взгляда по оси y, относительно центра экрана
xj	Координата СЗЕ по оси x, относительно центра экрана
yj	Координата СЗЕ по оси y, относительно центра экрана
time1	Время начала остановки взгляда на слове
time2	Время конца остановки взгляда на слове
scrollTop	Количество прокрученных пикселей колесом мыши
weigh	Семантическая значимость
Fix[n]	Показатель фиксации на СЗЕ с номером n
DFix	Длительность фиксации
dt	Время отсутствия взгляда
R	Количество регрессий на СЗЕ
TimeB	Время чтения информационного блока
Rb	Показатель регрессии на информационный блок
CountFix	Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд

5.1.1.4 Ограничения, определяющие допустимые варианты реализации процедуры (операции)

Процедура должна выполняться в соответствии с окулографическими методами регистрации движения взгляда.

5.1.1.5 Критерии оптимальности для процедуры (операции) оптимизации.

Выполнение процедуры с периодичностью 250-300мс.

5.1.2 Метод выполнения

При выполнении процедуры используется окулографический метод определения фиксации взгляда. Для определения фиксации на конкретном слове используется математическая процедура сравнения координат взгляда пользователя и координат СЗЕ.

Длительность фиксации DFix рассчитывается математической операцией нахождения разности между time1 и time2.

Время отсутствия взгляда dt (параметр, необходимый для учета регрессии. Если dt>40с., то регрессию на СЗЕ(n) не учитываем) dt= time1(n+1) - time1(n) также рассчитывается математической операцией нахождения разности между time1(n+1) – время обращения к следующему слову (n+1) и временем обращения к первому слову, на котором произошла фиксация time1(n).

R – количество регрессий на СЗЕ (n). Для определения показателя используется математическая операция сравнения координат взгляда пользователя и координат СЗЕ и сравнения времени начала обращению к СЗЕ time1: если (xi=xj) && (yi=yj), но time1:***≠ time1:***, то R=+1 (увеличение значения переменной на единицу). Количество регрессий на ИБ производится аналогично.

При расчете TimeB-время чтения информационного блока, используется процедура разности между временем обращения time1 к первому слову информационного блока и последнему.

5.1.3 Схема алгоритма

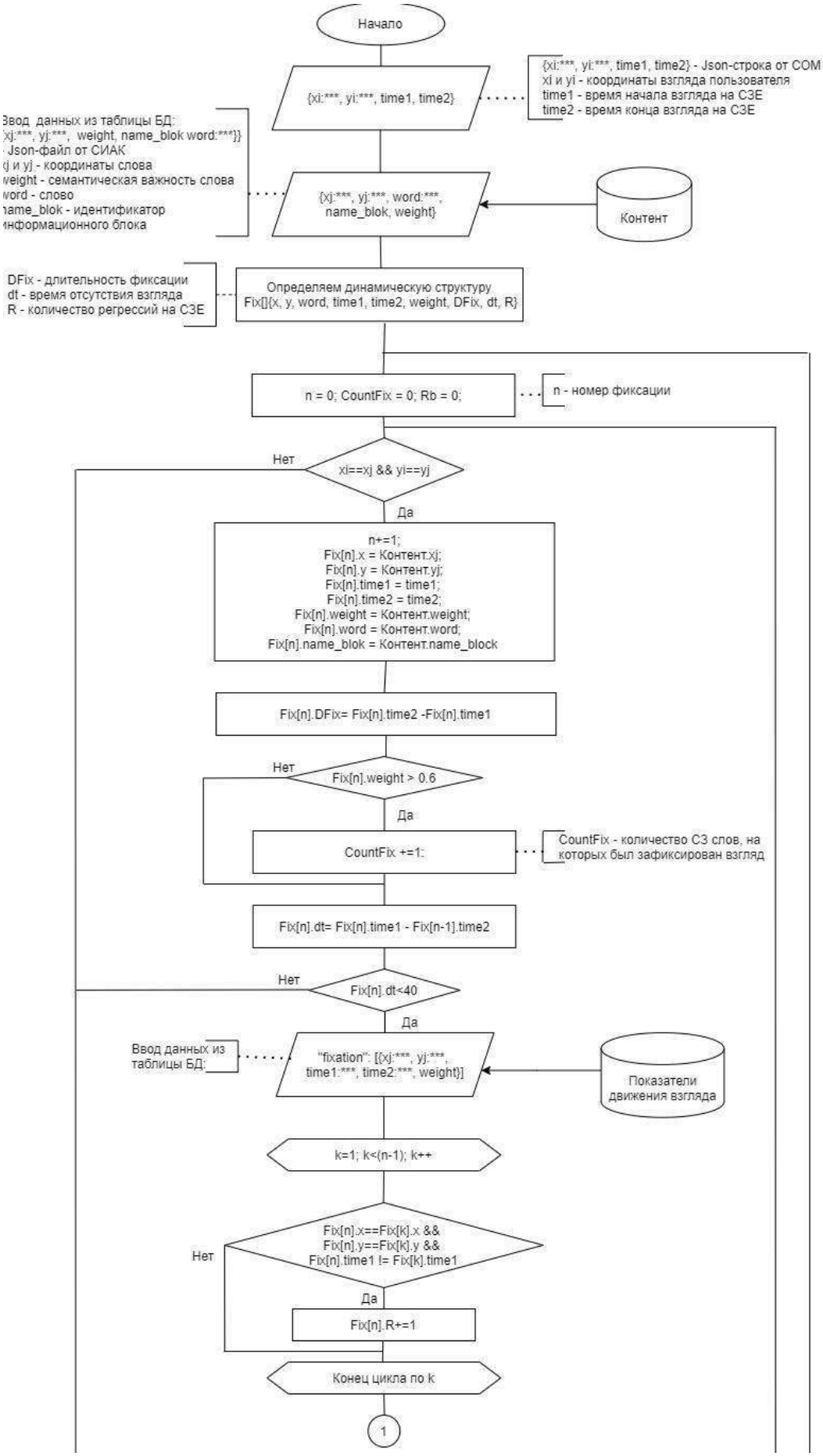


Рис.17 Схема алгоритма «Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку» (начало)

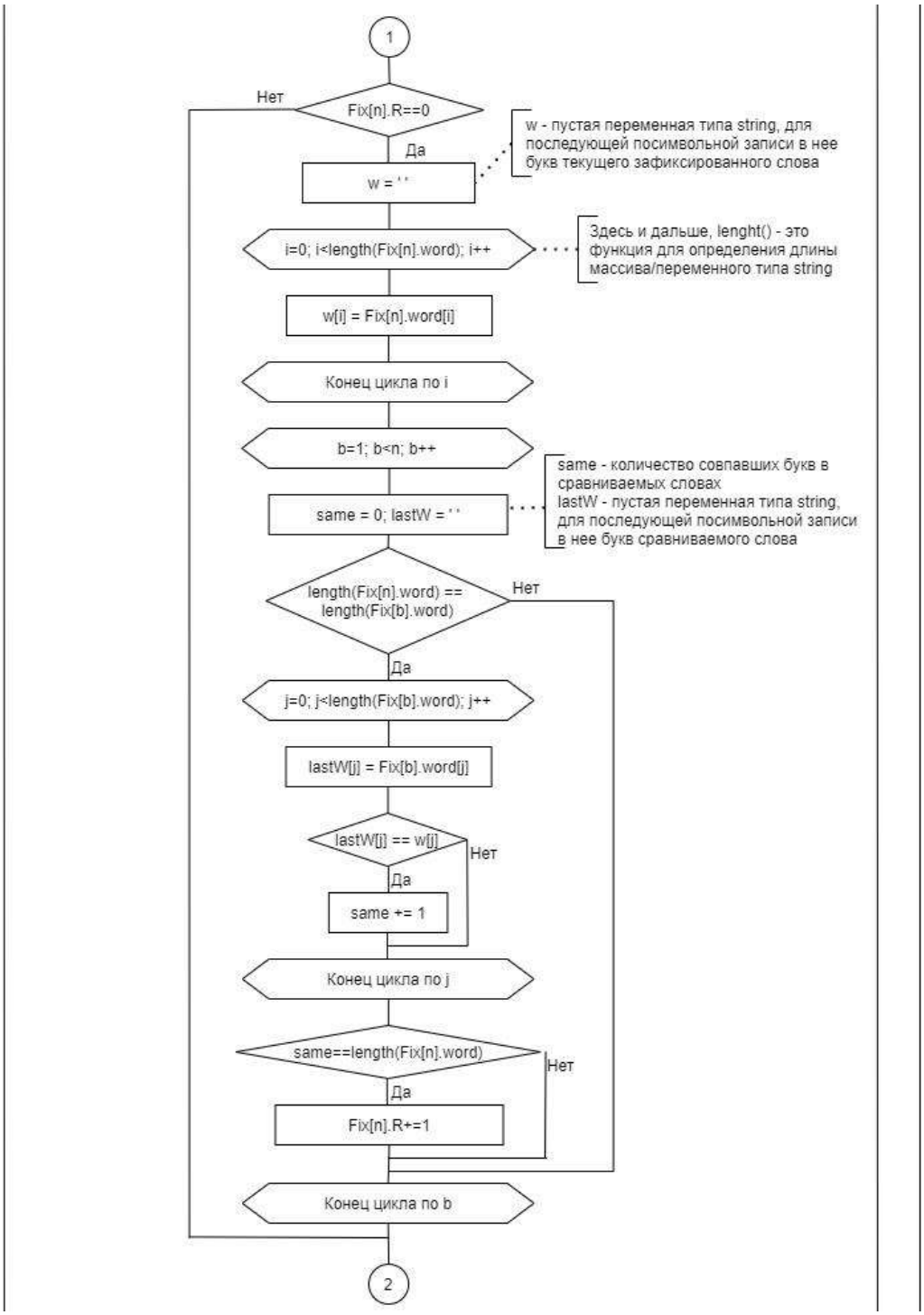


Рис.18 Схема алгоритма «Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку» (продолжение)

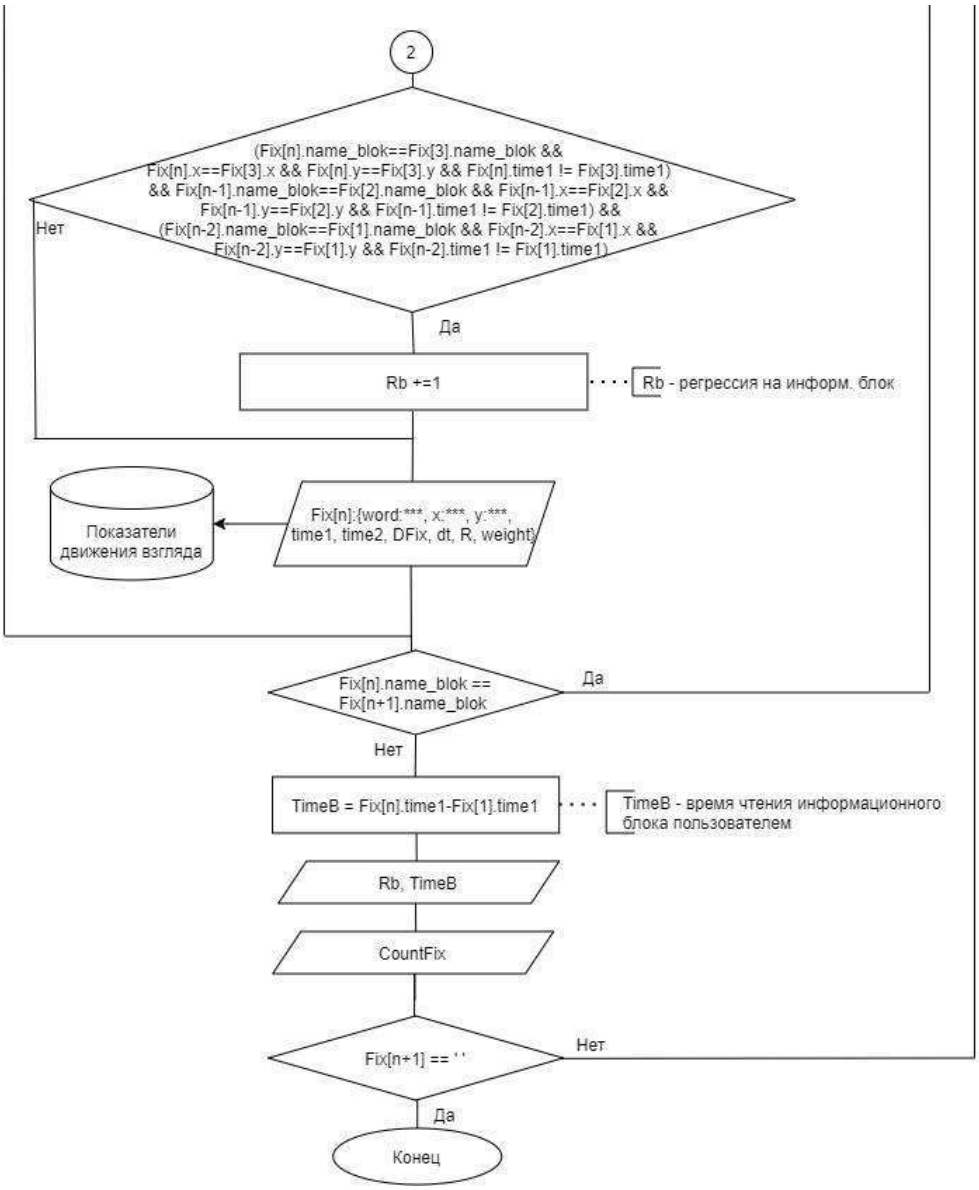


Рис. 19 Схема алгоритма «Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку» (окончание схемы)

5.2. Оценка показателей процесса чтения пользователя

5.2.1 Содержание и формализованное описание выполнения проектной процедуры.

5.2.1.1 Математическое описание

Для определения проблемы восприятия СЗЕ на вход поступает Json-строка {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,weight, DFix, dt, R]} с параметрами фиксации взгляда пользователя на слове. Для выявления проблемы, необходимо сравнить текущие показатели с эталонными, и определить узнаваемость СЗЕ для пользователя.

Как установлено в научно-исследовательской работе, DFix – длительность фиксации взгляда, при полном узнавании слова в ходе лексической обработки человеком должна составлять не более 250 мс. Т.е. если DFix>250 мс, то слово является для чтеца трудно воспринимаемым. Показатель отсутствия взгляда пользователя (dt) учитывается при регрессии на СЗЕ. Показатель dt не должен превышать 40 с (время сохранения слова в кратковременной памяти человека). Если длительность взгляда больше 40 с, значит регрессия считается оправданной для чтеца [22], так как он ищет слова, на котором остановился при чтении до отвлечения внимания от контента. Но если dt<40 с, значит слово еще хранится в кратковременной памяти человека, и регрессия (возврат к слову) является

признаком, что пользователь заново возвращается к слову и фиксирует на внимание, так как оно вызвало затруднение. Т.е. если система зафиксировала регрессию, R, показатель увеличился на единицу R=+1 при dt<40, то показатель будет учтен при определение узнаваемости слова (RecConc) для пользователя.

Показатель узнаваемости СЗЕ (RecConc) определяется следующим образом:

Если DFix≤250 мс && dt≤40 && R<1, то слово было воспринято пользователем;

Если DFix>250 мс && dt≤40 && R≥1, то слово не было воспринято пользователем. Если СЗЕ не было воспринято, необходимо заменить его на синонимичное понятие. Поэтому необходимо отправить Json-строку в систему СИАК с параметрами слова json-строка{word:***,xj:***,yj:***,weight}.

5.2.1.2 Описание входных, выходных, нормативно-справочных данных

Входные данные из функции «Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку»:

{Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,weight,DFix,dt,R]}

Выходные данные процедуры:

json-строка{word:***,xj:***,yj:***,weight}

5.2.1.3 Список обозначений элементов предметной области с указанием их наименований, единиц измерения, диапазона изменения значений

Таблица 7. Список обозначений

Обозначение	Наименование
xj	Координата СЗЕ по оси x, относительно центра экрана
yj	Координата СЗЕ по оси y, относительно центра экрана
weigh	Семантическая значимость
Fix[n]	Показатель фиксации на СЗЕ
DFix	Длительность фиксации
dt	Время отсутствия взгляда
R	Количество регрессий на СЗЕ

5.2.1.4 Ограничения, определяющие допустимые варианты реализации процедуры (операции)

Ограничений нет.

5.2.1.5 Критерии оптимальности для процедуры (операции) оптимизации.

- Выполнение процедуры сразу после получения параметров движения взгляда;
- Длительность процедуры не больше 300 мс;

5.2.2 Метод выполнения

При выполнении процедуры использовалась математическая операция сравнения показателей фиксации DFix, dt, R с эталонными показателями для определения узнаваемости слова (RecConc).

5.2.3 Схема алгоритма

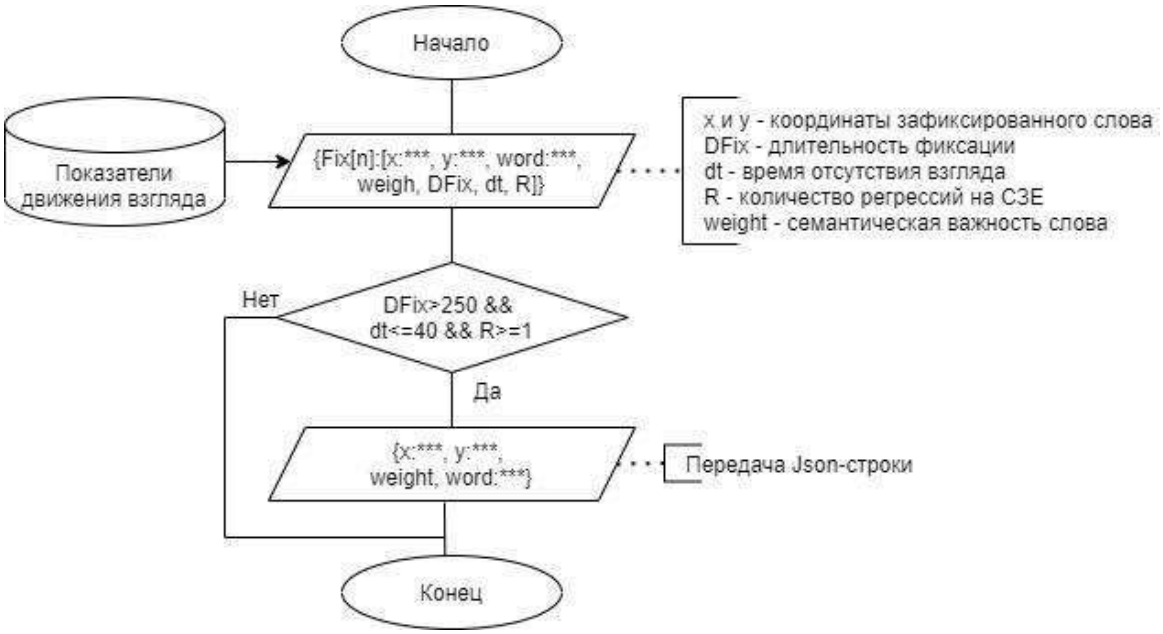


Рис.20 Схема алгоритма «Определение проблемных мест при чтении контента»

5.3 Определение уровня восприятия пользователем информационного блока

5.3.1 Содержание и формализованное описание выполнения проектной процедуры.

5.3.1.1 Математическое описание

Для определения уровня восприятия пользователем информационного блока на вход поступает CountFix - количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд и массив информационного блока от системы СИАК.

Далее подсчитываем количество слов в массиве (CountW) по циклу от 1 до N, где N – длина массива. (подробный алгоритм отражен на схеме (рис)). Аналогично подсчитываем количество символов в слове по циклу и суммируем показатель CountSymbol (количество символов в информационном блоке). Показатель полноты чтения пользователя ИБ(Spt opt) рассчитывается по формуле: Spt opt= $\frac{\text{CountFix}}{\text{CountW}}$.

Так как 0 < Spt opt < 1, необходимо обозначить значения показателя, при которых полнота чтения информационного блока будет низкой или минимально достаточной [21]. Согласно семантической теории информации [16], если субъект Y не воспринимает символы (данные), заложенные в сообщении об объекте X, то он не уменьшает свою неопределённость об этом объекте и количество принимаемой субъектом Y информации равно нулю, то есть восприятия данных не произойдет. Если же если субъект Y однозначно, правильно воспринимает все символы, (данные), заложенные в сообщении об объекте X, то он не уменьшает свою неопределённость об этом объекте и количество принимаемой субъектом информации равно нулю.

Самым оптимальным вариантом считается третий случай? Ghb rjnjhjv количество информации I(X,Y) = e ≠ 0. Снятие неопределённости субъекта Y относительно объекта X, будет тогда и только тогда, когда при $x_i \in X$ и $y_k \in Y$ существует хотя бы одна пара символов (данных) (x_i, y_k), которая при отсутствии смыслового равенства коррелируется синергетическим отношением предиката P (x, y), образуя новый образ (новую информацию об объекте).

Spt opt = 0 - пользователь не воспринимает информацию [16];

Spt opt ∈ [0,1;0,6] – низкая полнота чтения ИБ, формирование корректного образа не произошло;

Spt opt ∈ [0,7;0,9] – достаточная полнота чтения ИБ, обеспечено формирование корректного образа;

Spt opt = 1 – высокая полнота чтения ИБ, пользователь не увеличил знания о конкретном явлении.

При S opt ∈ [0,1;0,6] необходимо перестроить наполнение информационного блока. Принятие решения о перестройке контента остается за системой СИАК, поэтому показатель S opt будет являться входным потоком для СИАК с целью поддержки принятия решения об адаптации контента под пользователя.

5.3.1.2 Описание входных, выходных, нормативно-справочных данных

Входные данные из функции «Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку»:

CountFix (количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд)

Входные данные из системы СИАК:

Массив из СЗЕ информационного блока в виде Json-файла структуры: {"paragraphs": [/* массив ИБ, порядок совпадает с порядком подачи контента */};

Входные данные из сущности БД «Показатели движения взгляда»:

{"fixation": [{Fix[n]: word:***}]}

Выходные данные процедуры:

Показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt)

CountSymbol для расчета показателей техники чтения пользователя

5.3.1.3 Список обозначений элементов предметной области с указанием их наименований, единиц измерения, диапазона изменения значений

Таблица 8. Список обозначений

Обозначение	Наименование
CountFix	Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд
weigh	Семантическая значимость слова
Spt opt	Показатель полноты чтения пользователя ИБ
CountSymbol	Количество символов в массиве ИБ

5.3.1.4 Ограничения, определяющие допустимые варианты реализации процедуры (операции)

Ограничений нет.

5.3.1.5 Критерии оптимальности для процедуры (операции) оптимизации.

- Выполнение процедуры сразу после получения показателя CountFix, массива информационного блока и массива слов для подсчета количества символов в ИБ;
- Длительность процедуры не больше 1 секунды;

5.3.2 Метод выполнения

При выполнении процедуры используется цикл от 1 до N, где N – длина массива для подсчета количества слов в массиве информационного блока.

Показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt) рассчитывается с использованием математической операции деления по формуле: Spt opt= $\frac{\text{CountFix}}{\text{CountW}}$.

5.3.3 Схема алгоритма

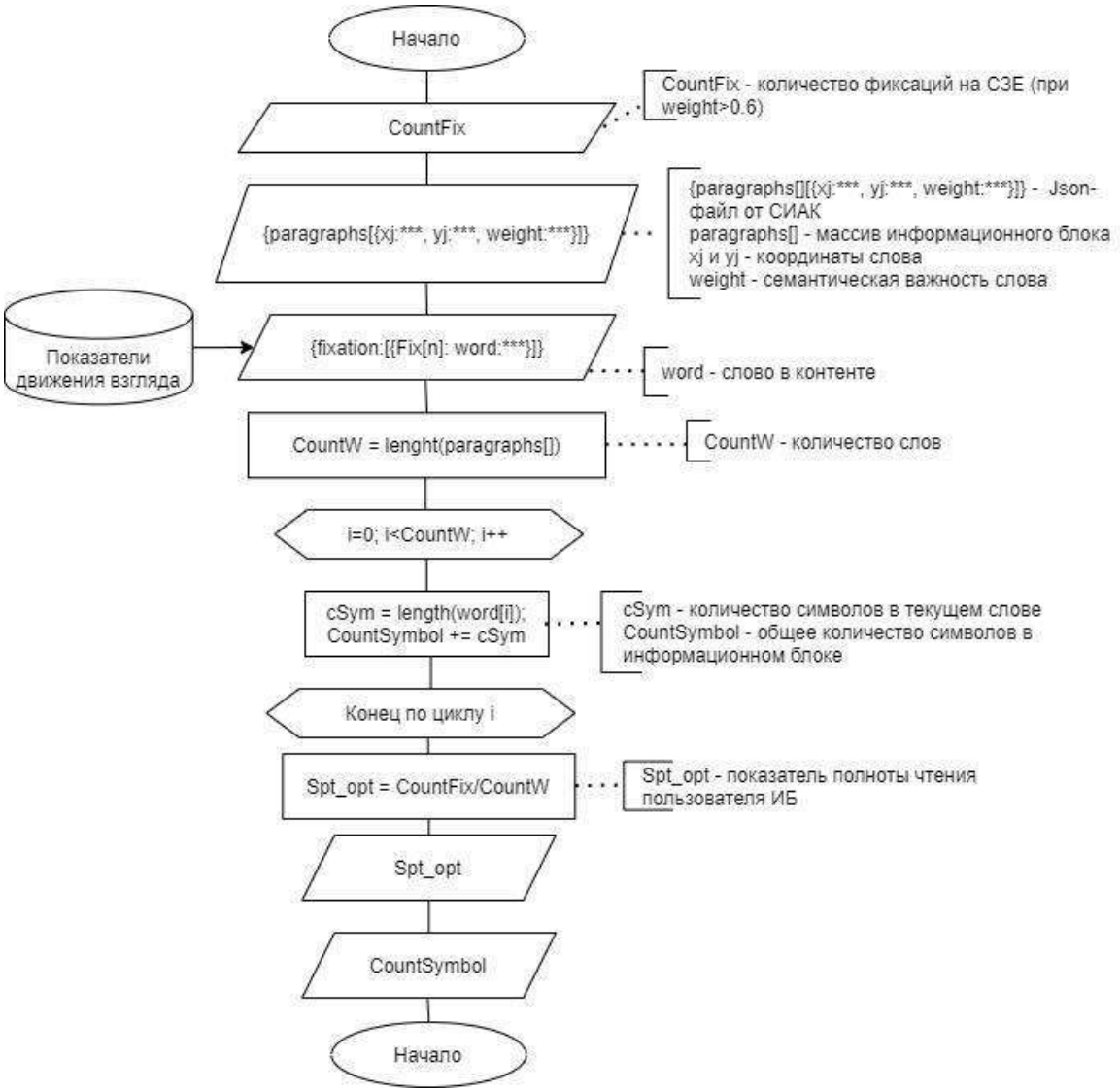


Рис. 21 Схема алгоритма «Определение уровня восприятия пользователем информационного блока»

5.4. Расчет показателей техники чтения пользователя

5.4.1 Содержание и формализованное описание выполнения проектной процедуры.

5.4.1.1 Математическое описание

Для расчета показателей техники чтения пользователя на вход поступает показатель регрессии на информационный блок (Rb), количество символов в информационном блоке (CountSymbol), (TimeB)- время, затраченное на чтение контента в информационном блоке

Скорость чтения (Vr) определяется как количество знаков, прочитанных в единицу времени:

$$Vr=CountSymbol/TimeB,$$

где Vr—скорость чтения; CountSymbol —число символов в информационном блоке; TimeB—время, затраченное на чтение символов в информационном блоке.

Также необходимо определить тип чтеца по показателям скорости и количеству регрессий на ИБ. Тип чтеца бывает субъективный и объективный [17].

Для объективного типа (1) характерны следующие числовые значения показателей:

- Скорость чтения (Vr): медленная <1250 символов/мин
- Количество регрессий (Rb) на информационный блок: Rb≤1.

Для субъективного типа (2) характерны следующие числовые значения показателей:

- Скорость чтения (Vr): быстрая >1250 символов/ мин
- Количество регрессий (Rb) на информационный блок: Rb>1.

Далее происходит сравнение текущего показателя скорости чтения с эталонными:

Если Vr≤1250 и Rb≤1, то Tipe_id =1 – тип чтеца: объективный

Если Vr>1250 и Rb>1, то Tipe_id =2 – тип чтеца: субъективный

По окончании процедуры формируется json-строка {Vr:***, Tipe_id:***}

5.4.1.2 Описание входных, выходных, нормативно-справочных данных

Входные данные из функции «Определение уровня восприятия пользователем информационного блока»:

CountSymbol - количество символов в информационном блоке;

Входные данные из функции «Регистрация показателей движения глаз»:

Rb - показатель регрессии на информационный блок

TimeB - время, затраченное на чтение контента в информационном блоке.

Выходные данные процедуры:

Json-строка {Vr:***, Tipe_id:***}

5.4.1.3 Список обозначений элементов предметной области с указанием их наименований, единиц измерения, диапазона изменения значений

Таблица 9. Список обозначений

Обозначение	Наименование
CountSymbol	Количество символов в информационном блоке
Rb	Показатель регрессии на информационный блок
TimeB	Время, затраченное на чтение контента в информационном блоке
Vr	Скорость чтения
Tipe_id	Тип чтеца

5.4.1.4 Ограничения, определяющие допустимые варианты реализации процедуры (операции)

Ограничений нет.

5.4.1.5 Критерии оптимальности для процедуры (операции) оптимизации.

- Процедура должна выполняться только после выгрузки данных о типах чтецов из БД для сравнения показателей;
- Длительность процедуры не больше 2 секунд;

5.4.2 Метод выполнения

При выполнении процедуры используется математическая процедура определения скорости чтения по формуле: Vr= CountSymbol /TimeB, где Vr—скорость чтения; CountSymbol —число символов в информационном блоке (объем); TimeB—время, затраченное на чтение контента в информационном блоке.

При определении типа чтеца используются операции сравнения текущих показателей скорости чтения (Vr) и количества регрессий (Rb) на информационный блок.

5.4.3 Схема алгоритма

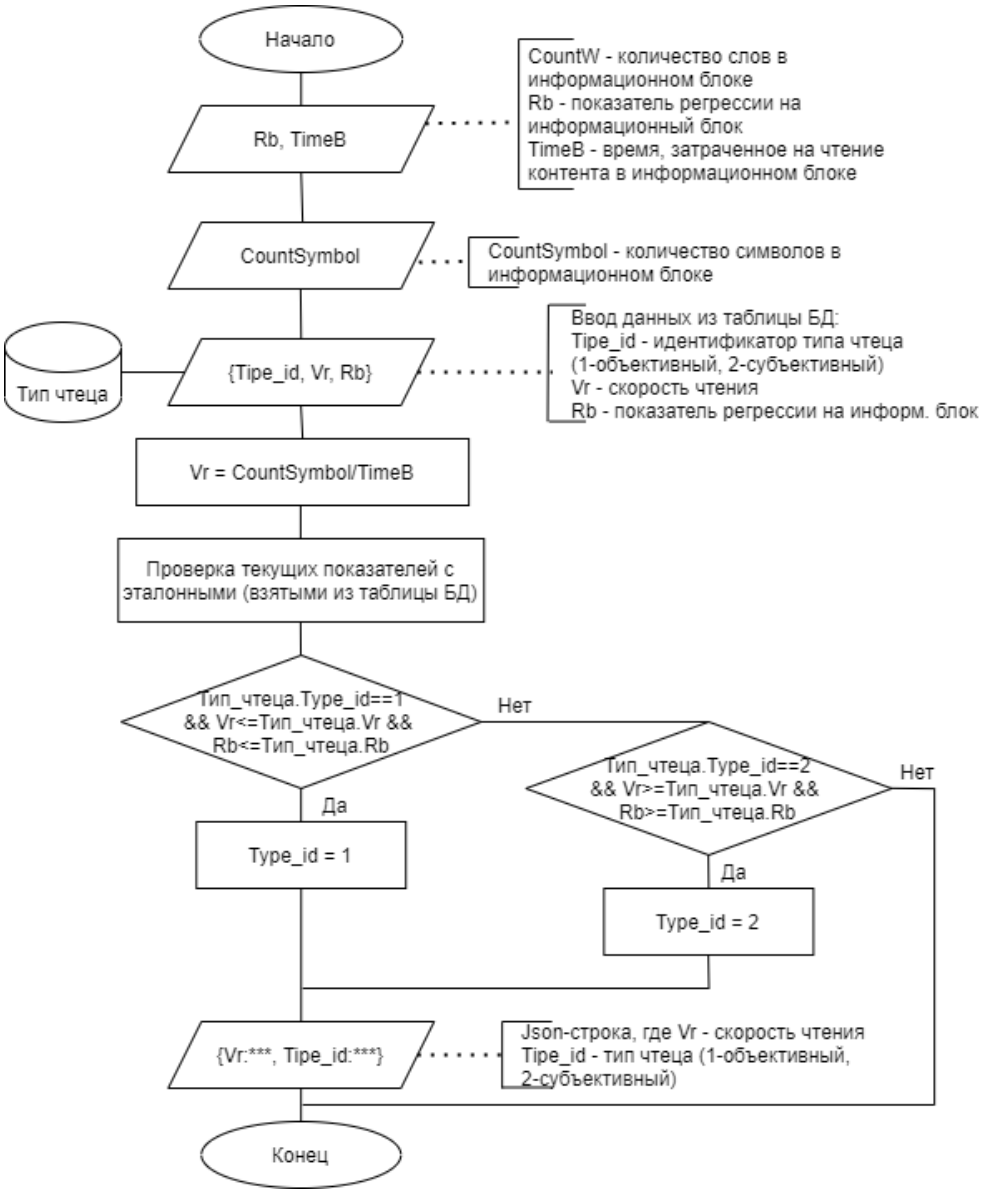


Рис.22 Схема алгоритма «Расчет показателей техники чтения пользователя»

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ИНСТРУМЕНТА ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ВЕБ-КОНТЕНТА

6.1 Элементы функциональной структуры подсистемы ИС

На диаграмме декомпозиции DFD, представленной на рис.25, представлены процедуры, выполняемые при реализации подсистемы лингвистического анализа веб-контента техническими средствами (автоматически). Процедуры были определены в соответствии с пунктом 3.3. «Описание проектных процедур (операций)» настоящего документа. Связи между процедурами были выделены на основании входных и выходных потоков каждой процедуры, указанных в пунктах 3.3.4.1.2 «Описание входных, выходных, нормативно-справочных данных» настоящего документа.

6.2 Информационные связи между элементами и с внешней средой

На диаграмме взаимодействия подсистемы с внешними сущностями, представленной на рис. 24. Связь с внешней сущностью «Система окулографического мониторинга (COM)» обусловлена тем, что данная сущность передает необходимые параметры для регистрации показателей взгляда пользователя. Соответствующие информационные потоки указаны на рис. 23-рис.25. Связь с системой создания и адаптации

контента (СИАК) обусловлена тем, что инструмент лингвистического анализа оказывает поддержку в принятии решения об адаптации контента посредством передачи параметров чтения пользователя и уровне его понимания контента. Система СИАК для этого передает информационный поток для отслеживания соответствующих показателей.

Между процедурами, представленными на рис. 25, определены информационные связи, содержание которых указано в пунктах 3.3.4.1.2 «Описание входных, выходных, нормативно-справочных данных» настоящего документа.

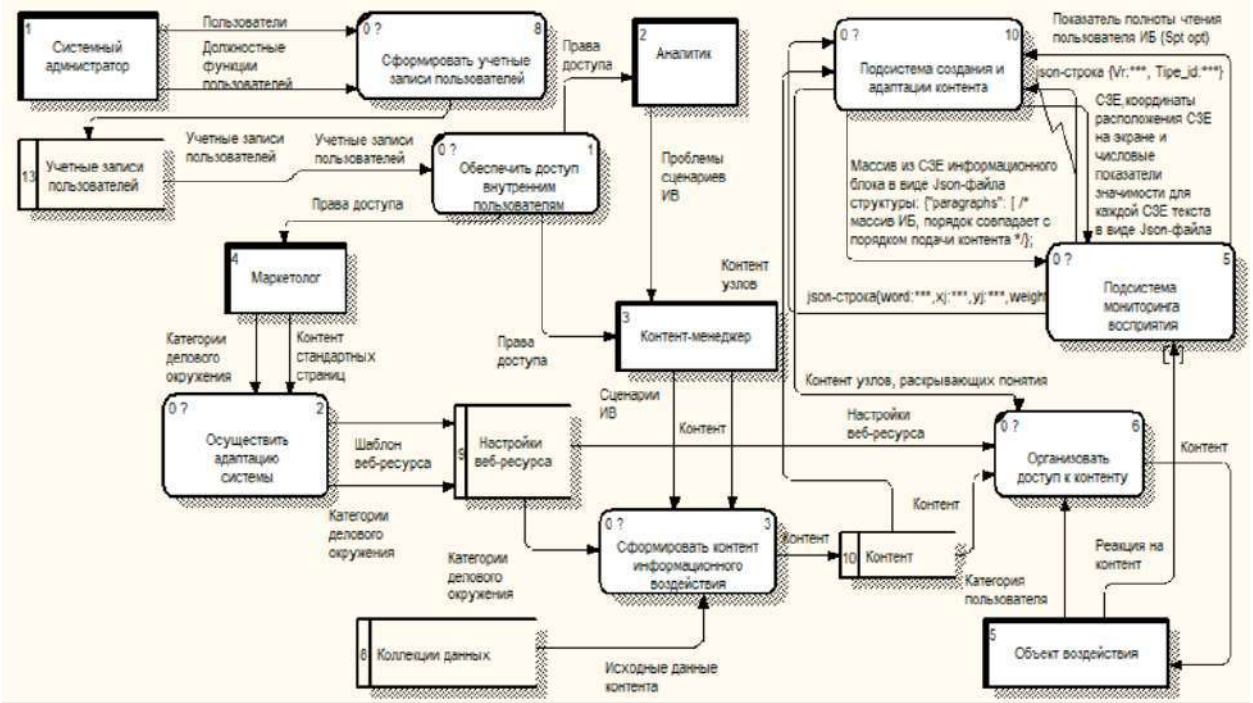


Рис.23 Диаграмма декомпозиции функционирования CMS в нотации DFD

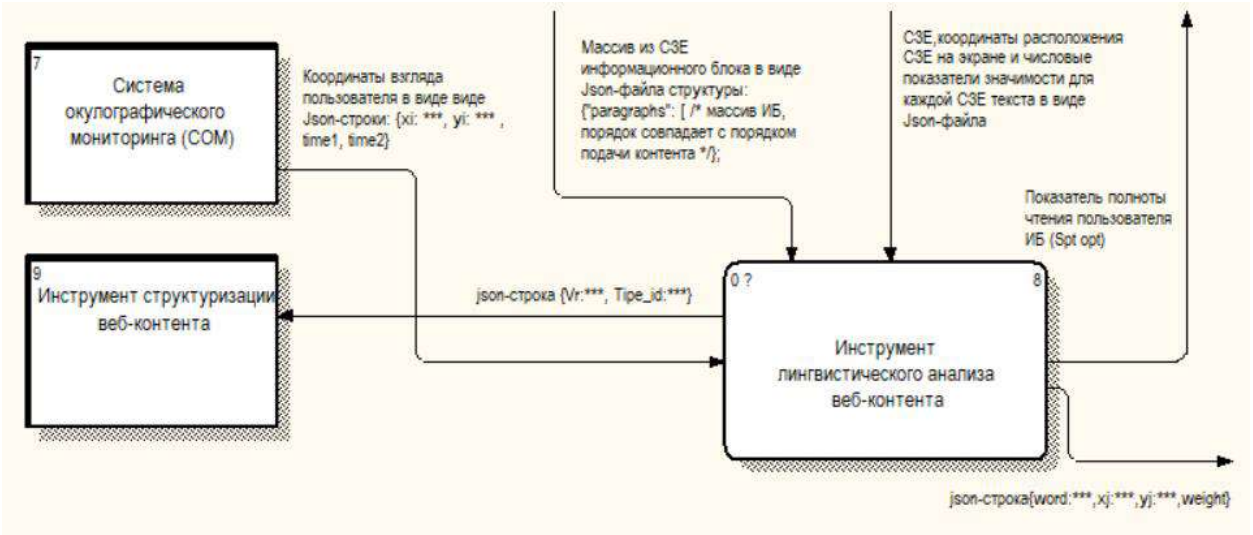


Рис. 24 Диаграмма декомпозиции подсистемы мониторинга восприятия в нотации DFD

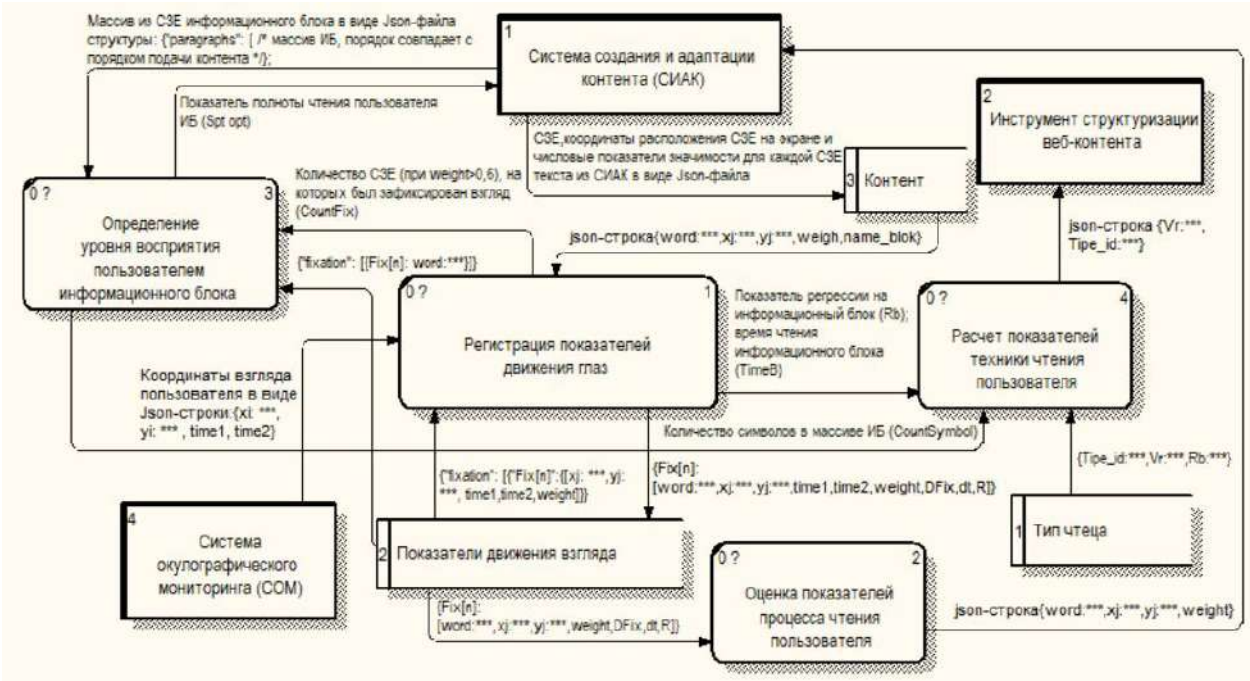


Рис. 25 Диаграмма декомпозиции инструмента лингвистического анализа веб-контента в нотации DFD

РЕШЕНИЯ ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ ОБЕСПЕЧЕНИЮ

7.1 Перечень входных документов и данных (сигналов):

Входными данными для данной функции будут являться:

Положение точек на каждом кадре для пользователя передается в виде Json-строки. данные в формате json-файла:

{x: ***, y: ***, time1, time2},

где “x” - координата взгляда по оси x, относительно центра экрана;

“y” - координата взгляда по оси y, относительно центра экрана;

time1 – время начала обращения к слову;

time2 – время конца обращения к слову;

СЗЕ, координаты расположения СЗЕ на экране и числовые показатели значимости для каждой СЗЕ текста из СИАК

Json-файл структуры: {"paragraphs": [/* массив абзацев, порядок совпадает с порядком подачи контента */

```
{
   "words": [ /* массив координат слов в абзаце */
     {x: ***,y:  ***,weight:  *** /* семантическая важность */},/* ... */]},/* ... */],}};
```

7.2 Перечень выходных документов и данных (сигналов):

Форма представления сообщения (документ, видеокадр, сигнал управления) и требования к ней:

Между клиентом и сервером будет установлена постоянная связь через технологию WebSocket, данные система будет передавать CMS-системе данные в формате json-строки: {word:***,xj:***,yj:***,weight}, а также показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt), определенный в промежутке 0 < Spt opt < 1.

Передача параметров для каждого информационного блока (B_{infi}) необходима для CMS для анализа возможных проблем, возникших у пользователя при восприятии информационного блока.

Периодичность выдачи

Параметры чтения пользователя передаются непрерывно, после запуска программы и получения входных сигналов;

Сроки выдачи и допустимое время задержки решения;

Выдача выходных параметров чтения должна проходить непосредственно после получения системой входной информации с минимальной задержкой, которая не позволит системе находиться в состоянии ожидания, так как от этого зависит процесс адаптации контента в случае возникновения проблем при восприятии контента у пользователя.

Получатели и назначение выходной информации:

Получателем выходной информации будет являться система создания и адаптации контента. Назначение выходной информации: выходная информация, будет ИО данной системы, что позволит ей выполнять соответствующий функционал.

Также получателем будет инструмент структуризации веб-контента, для которого входные параметры чтения: скорость чтения (Vr) и тип чтеца (Tipe_id) необходимы для принятия решения об изменении подачи контента, вида информационных блоков и скорости представления информационных блоков.

7.3 Описание информационного обеспечения системы

7.3.1. Организация сбора и передачи информации:

Обоснование выбора носителей данных:

Данные будут передаваться через Json-файл. Обусловлено это тем, что Json надежный формат обмена данными, предусматривающий высокую скорость обработки и чтения передаваемых данных. Параметры чтения сохраняются в БД, для последующей обработки. Модели чтения также хранятся в БД.

Принципы распределения информации по типам носителей:

В данной ИС, информация распределяется исключительно в электронном виде.

7.3.2. Построение системы классификации и кодирования

Описание принятых для применения в АС классификации объектов во вновь разработанных классификаторах и в тех действующих классификаторах, из которых используется часть кода:

В разрабатываемой системе не будут использованы разработанные классификаторы объектов;

Методы кодирования объектов классификации во вновь разработанных классификаторах:

В разрабатываемой системе не предусмотрены методы кодирования объектов классификации

7.3.3. Организация внутримашинной информационной базы:

Логическая схема базы данных выходит из функциональной декомпозиции в нотации DFD (рис.18), где каждое хранилище данных соответствует сущности базы данных.

Структура внутримашинной информационной базы (Рис.26):

Информационная база будет представляться реляционной базой данных, по следующим обоснованиям:

1. Строки таблиц содержат данные об одном объекте (например, сведения о модели чтения), а столбцы этой таблицы описывают различные характеристики этого объекта (Параметр скорости чтения/показатель регрессии для определенного типа чтеца).

2. Все строки таблицы будут иметь одинаковую структуру;

3. Наличие первичного ключа - как способ идентификации пользователей и результатах мониторинга его процесса чтения в определенный момент времени.

4. Primary key должен быть уникален и однозначно определять запись (Например, user_id). Собственно, благодаря этому можно найти нужного пользователя и извлечь из него нужные данные.

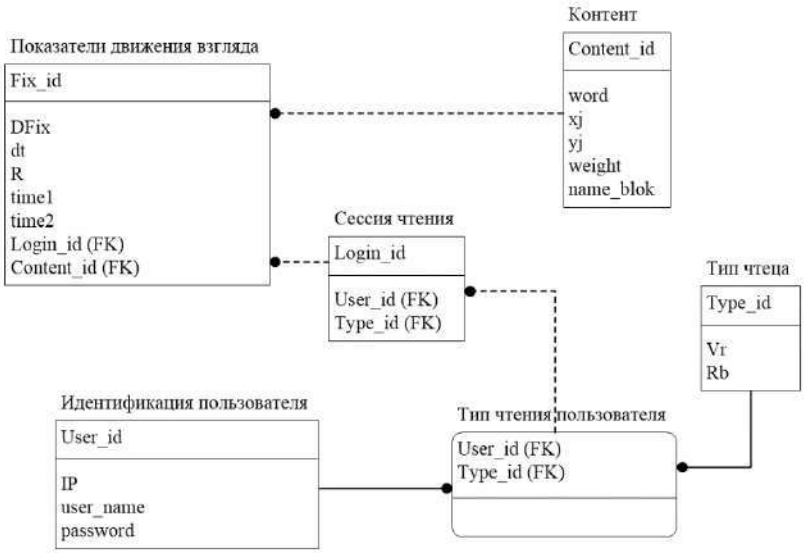


Рис.26 Логическая схема базы данных

Представленная база данных используется в случае:

- Когда необходимо получить показатели движения взгляда пользователя;
- Для определения техники чтения пользователя;
- Для определения проблемных мест при чтении контента;
- Для идентификации пользователей при прохождении сессии восприятия;

Данная база состоит из 6 сущностей:

- Показатели движения взгляда
- Сессия чтения
- Контент
- Тип чтеца
- Тип чтения пользователя
- Идентификация пользователя

РЕШЕНИЯ ПО ПРОГРАММНОМУ ОБЕСПЕЧЕНИЮ

1. Разработка структуры программного обеспечения

Модули инструмента лингвистического анализа контента веб-ресурса:

Модуль 1: Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку

Данная задача начинается с получения координат местоположения зрачков пользователя на экране с указанием времени, координат расположения СЗЕ на экране, числового показателя значимости для каждой СЗЕ текста. Далее происходит определение фиксации на СЗЕ, отслеживание регрессий, подсчет их количества. Полученные показатели сохраняются в базе данных и далее являются входным потоком для оценки показателей процесса чтения пользователя, определения уровня восприятия пользователем информационного блока, расчета показателей техники чтения пользователя.

Модуль 2: Оценка показателей процесса чтения пользователя

Задача направлена на выявление СЗЕ, вызвавших трудность при восприятии у пользователя. Это определяется на основании показателя узнаваемости слова. Если узнавание не произошло, функция отправляет json-строку{word:***,xj:***,yj:***,weight} в систему создания и адаптации контента (СИАК) с целью замены трудного для восприятия слова на более знакомое для пользователя.

Модуль 3: Определение уровня восприятия пользователем информационного блока

Задача направлена на определение уровня понимания пользователем информационного блока. Для этого определяется показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt), который будет являться входным потоком для системы СИАК с целью поддержки принятия решения о перестройке содержимого информационного блока.

Модуль 4: Расчет показателей техники чтения пользователя

В данной задаче определяется скорость чтения пользователя и тип чтеца на основании входных данных: показатель регрессии на информационный блок (Rb); время чтения информационного блока (TimeB) от задачи регистрации показателей движения и количество слов в массиве ИБ (CountW) от задачи оценки показателей процесса чтения пользователя. Выходным потоком для инструмента параметризации веб-контента будет json-строка {Vr:***, Tipe_id:***}с указанием скорости чтения и типа чтеца.

Связность:

1. Модуль 1 – функциональная связность
2. Модуль 2 – функциональная связность
3. Модуль 3 – функциональная связность
4. Модуль 4 – функциональная связность

Сцепление:

Модуль 1—Модуль 2 - сцепление по данным

Модуль 1—Модуль 3 - сцепление по данным

Модуль 1—Модуль 4 - сцепление по данным

Модуль 3—Модуль 4 - сцепление по данным

Разделения модулей, таким образом, обосновано следующим образом:

- Выполняют разный функционал;
- Чтобы между модулями было сцепление по данным;
- Чтобы внутри модуля была либо функциональная, либо информационная (последовательная) связность (с другими типами связности могли быть затруднения)
- Модули могут быть написаны разными языками программирования, разрабатываемые по разным методологиям проектирования;
- Также подразумевается, что данные модули, можно будет в дальнейшем использовать как ТПР;

Функции модулей:

1. Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку

F11 – Получение координат местоположения зрачков пользователя на экране с указанием времени;

F12 – Получение координат расположения СЗЕ на экране, числового показателя значимости для каждой СЗЕ текста;

F13 – Определение фиксации на СЗЕ;

F14 – Отслеживание регрессий;

F15 – Подсчет количества регрессий на СЗЕ (R);

F15 – Подсчет количества регрессий на ИБ (Rb);

2. Оценка показателей процесса чтения пользователя;

F21 – Получение фиксаций взгляда пользователя с указанием параметров фиксации;

F22 – Определение показателя узнаваемости слова;

3. Определение уровня восприятия пользователем информационного блока

F31 – Получение показателей движения взгляда: CountFix - количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд

F32 – Получение массива информационного блока от системы СИАК

F33 – Подсчет количества СЗЕ в массиве (CountW);

F34 – Подсчет количества символов массиве (CountSymbol);

F35 – Расчет показателя полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt);

4. Расчет показателей техники чтения пользователя;

F41 – Получение показателей: показатель регрессии на информационный блок (Rb); время чтения информационного блока (TimeB) от модуля «Регистрация показателей движения взгляда»;

F42 – Получения показателя количества символов массиве (CountSymbol) от модуля «Оценка показателей процесса чтения пользователя»;

F43 – Расчет скорости чтения пользователя (Vr);

F44 – Определение типа чтеца (Tipe_id)

2 Разработка функции частей программного обеспечения

Табл. 10 Функционал модулей программной системы

Модуль	Функционал
Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку	• F11 • F12 • F13 • F14 • F15 • F16 • Передача показателей: TimeB, Rb, CountFix • Передача {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,time1,time2,weight,DFix,dt,R]} • Получение {"fixation": [{"Fix[n]":{[xj: ***,yj: ***, time1,time2,weight]}} • Получение координат взгляда пользователя в виде Json-строки:{xi: ***, yi: *** , time1, time2} • Получение json-строки{word:***,xj:***,yj:***,weigh,name_blok} • Запись результатов регистрации показателей движения взгляда в базу данных для последующей обработки; • Формирование json-файла;
Оценка показателей процесса чтения пользователя;	• F21 • F22 • Получение {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,weight,DFix,dt,R]} • Передача json-строки{word:***,xj:***,yj:***,weight}
Определение уровня восприятия пользователем информационного блока	• F31 • F32 • F33 • F34 • F35 • Получение массива из СЗЕ информационного блока в виде Json-файла структуры: {"paragraphs": [/* массив ИБ, порядок совпадает с порядком подачи контента */}; • Передача показателя Sp opt, CountSymbol
Расчет показателей техники чтения пользователя;	• F41 • F42 • F43 • F44 • Получение Rb, TimeB, CountSymbol • Получение json-строки

	{Tipe_id:***,Vr:***,Rb:***} из БД • Сопоставление показателей типа чтеца для определения техники чтения пользователя; • Передача json-строка {Vr:***, Tipe_id:***} с указанием скорости чтения и типа чтеца

3. Выбор методов и средств разработки программного обеспечения

При установке средств разработки программной системы необходимо выбрать следующее:

- Язык программирования и среды

Выбранный язык: Python. Выбор обоснован исходя наличия необходимых библиотек, а также он содержит большой набор модулей для работы с операционной системой и позволяет писать кроссплатформенные приложения.

- Выбор методов

Программный код будет реализован на уровне обычных процедур и функций без использования сложных конструкций. Данные методы позволяют данному ПО выполнять требуемый от него функционал. Будет использоваться метод структурного программирования, так как в нем есть не зависимые модули, это удобно при ошибках в коде их легко отследить и исправить

- Прикладные методы:

Метод психолингвистического анализа процесса чтения (определение индивидуальных показателей процесса чтения пользователя для обработки и выявления проблемных мест при восприятии контента). Выбор осуществлялся исходя из-за возможной интеграции в программный код и легкой интерпретации результатов;

- СУБД

Выбор: СУБД MySQL, которая является высокопроизводительной и относительно простой в использовании СУБД. PyODBC – это стандартный API для доступа к базам данных. Большая часть баз данных продукции включает драйвер ODBC, который вы можете установить для связи с базой данных. Один из самых популярных методов связи с Python через ODBC – это пакет pyodbc.

- Средства моделирования:

IDEF – Erwin Process Modeler 7 (моделированние ИС)

Блок-схемы и диаграммы – Visio 2010 (оформление моделей/алгоритмов в соответствии с ГОСТами)

- Среда разработки:

Выбор среды: IDLE (для компиляции)

4. Разработка решений по общесистемному программному обеспечению

Для разрабатываемого прикладного ПО выбор по общесистемному ПО будет следующим:

- Платформа Windows (7,8,10). Так как на кафедре установлено Windows 7, то будем отталкиваться от данной платформы. Также PyQT 5- библиотека, может работать только с операционной системой Windows;
- Python 3 (pip, sys, ipdb для удобства пользования);
- IDLE;
- Библиотека PyQT 5 (для последующего создания интерфейса);
- OpenCV 3.4 +;
- NumPy 1.15.2 +;
- Библиотека dlib и файл «shape_predictor_68_face_landmarks.dat» (для определения лицевых ориентиров);
- На стороне клиента должен быть браузер;

- Скрипт, для построения тепловой карты (heatmap);

5. Структура программного обеспечения:

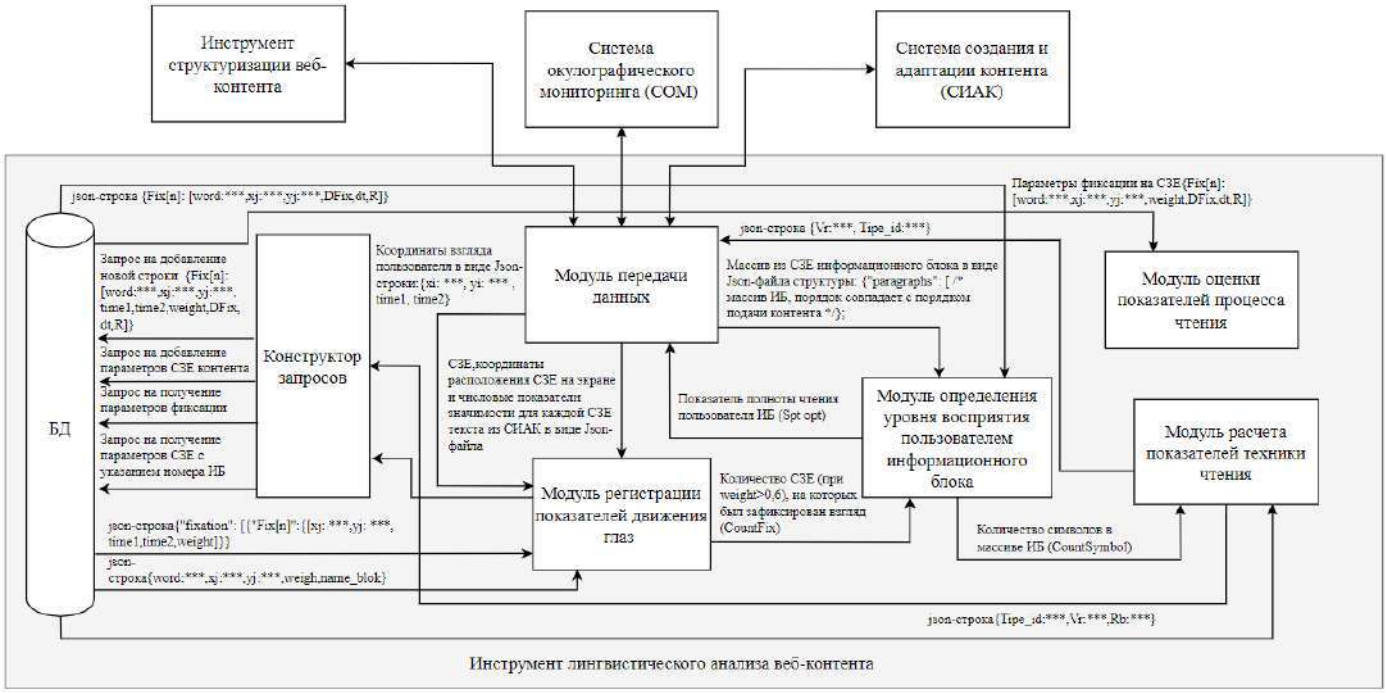


Рис.27 Структура ПО «Инструмент лингвистического анализа веб-контента»

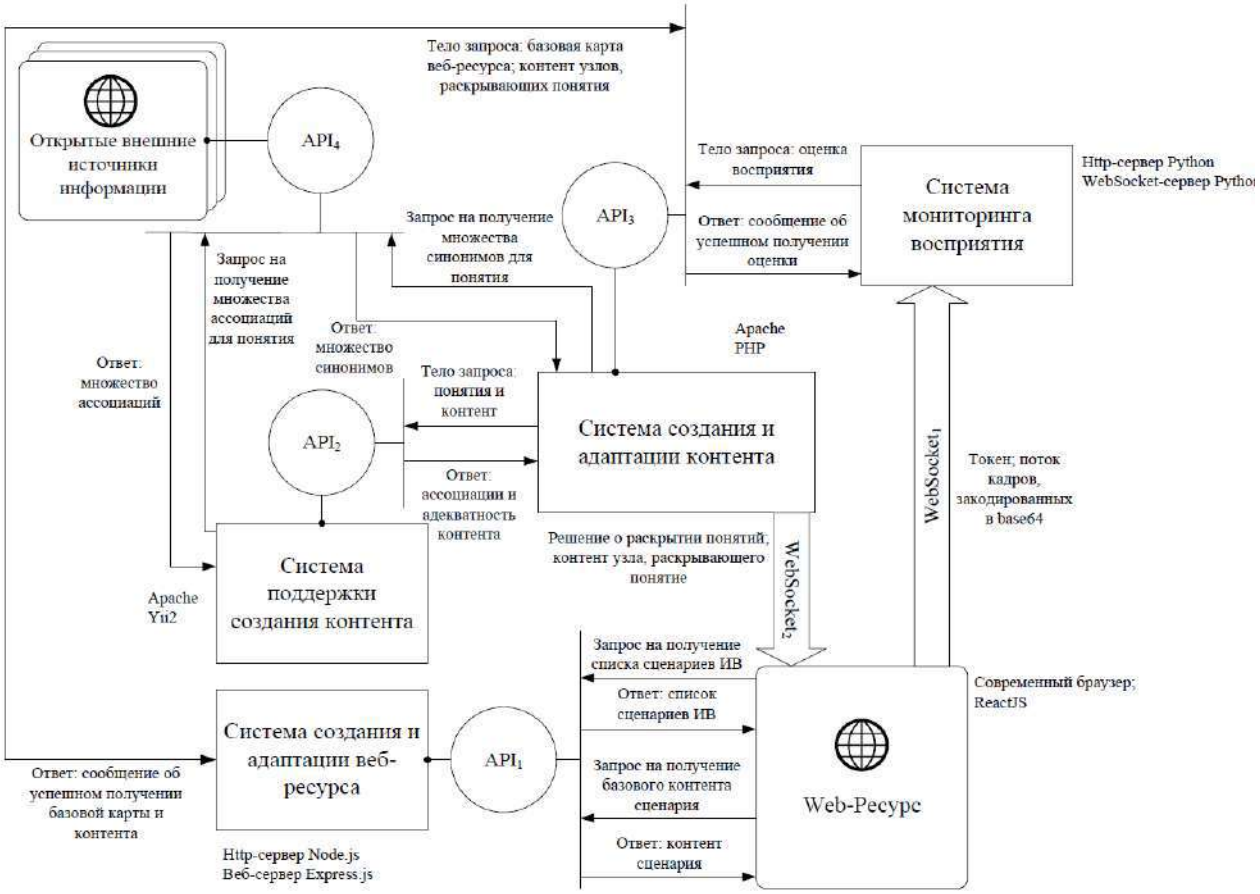


Рис.28 Программная схема взаимодействия с внешними подсистемами

РЕШЕНИЯ ПО РЕШЕНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКОМУ ОБЕСПЕЧЕНИЮ

1. Распределение ответственности персонала системы

Так как почти все функции системы автоматизированы, требуемые обязанности можно связать лишь с обслуживанием самой системы:

Обслуживание системы:

a. Настройка компонентов системы;
b. Проверка связи системы с библиотеками;
c. Администрирование БД;

Для реализации этой функции необходимо определить ответственного за ее выполнение и степень их ответственности.

Табл. 11 Распределение ответственности персонала системы

Ответственные	**Функции**	**Информация, за которую несет ответственность субъект**
Системный администратор	Обслуживание технических средств, поддержание работоспособности системы, управление базой данных и учетными записями	Все, что хранится в БД
Контент менеджер	Разработка и совершенствование сценариев информационного воздействия с использованием результатов анализа оценки уровня понимания контента	Сценарии воздействия, их содержание и форма представления
Аналитик	Анализ процесса восприятия и потребностей делового окружения	Требования к сценариям воздействия, их содержанию и форме представлению
Ответственный за взаимодействие	Поддержание коммуникаций с объектом воздействия	Ответы на вопросы; заявки на сотрудничество

Разработчик инструмента также несет ответственность за:

- Сохранение целостности информации при выполнении алгоритмов модулей;
- Надежность работы системы;
- Эргономичность системы;
- Информационную безопасность данных, хранящихся в системе;

Ответственность персонала должна быть закреплена в соответствующих должностных инструкциях, функционирование системы в целом – в положении подразделения, отвечающего за взаимодействие с деловым окружением.

2. Разработка схемы организационно-технической структуры

Так как, данная система, является подсистемой для ИО обеспечения CMS, то техническая структура системы может быть любой, полученный программный комплекс может быть развернут на удаленном хостинге. Поэтому, сформулируем инвариантную модель требуемого технического обеспечения. Для функционирования программной системы необходимо следующее техническое оборудование:

Табл.12 Техническое обеспечение программной системы

Класс устройства	**Выполняемые задачи**	**Требования к устройству**
Канал связи	Передача пакетов данных от одного узла к другому	Обеспечение передачи данных без помех.

Класс устройства	Выполняемые задачи	Требования к устройству
Система коммутирующих устройств	Маршрутизация пакетов данных в среде передачи	
Персональный компьютер (любого класса, от настольного компьютера до смартфона).	Представление получаемых результатов с сервера Ввод данных Отправка запросов	Наличие устройств ввода, вывода, манипуляций. Наличие сетевого модуля.

Для каждой организационной единицы предусмотрен компьютер, подключенный к маршрутизатору. Сопровождать и вносить изменения в нашу систему будет инженер и системный администратор. Связь между средствами технического обеспечения осуществляется с помощью маршрутизатора. Связи средств технического обеспечения с внешними средствами осуществляется с помощью сервера, к которому они подключены.

Обоснование для выбора данного комплекса технических средств (КТР): Данная КТР позволяет выполнять, тот объем работы, который от нее требуется для получения соответствующих результатов.

3. Описание комплекса технических средств

Комплекс технических средств и его структура выбирались с учетом исходных данных, приведенных в разделе 1 «Общие положения» и требований к системе в целом, изложенных в документе «Техническое задание».

3.1. Средства вычислительной техники приводят:

Основным фактором для выбора основных решений и типа ЭВМ послужило, то оборудование которое установлено в организации заказчика (НПЦ «АНОД»).

Обоснование выбора периферийных технических средств:

- В качестве основного периферийного устройства является *плоский монитор*, который необходим для использования данной системы;
- Проводная мышь, т.к беспроводная может иметь в последствии ограниченный потенциал (отсутствия источника питания).
- Для хранения данных не требуется большого объема памяти, поэтому дополнительных средств для хранения данных не требуется;
- После анализа, работы компьютера в режиме обработки изображений, мы пришли к выводу, что для обработки результатов, требуется небольшой объем ОЗУ (2Гбайт)
- Сервер баз данных и веб-сервер реализованы на базе одного физического сервера со следующими характеристиками: процессор не хуже IntelXeon E5430, не менее 8 Гб RAM, 2 HDD по 2 Тб (RAID 1).
- АРМ инженера системы представлены в виде x64 персональных компьютеров (рабочих станций).
- На стороне клиента, обязательна должна быть веб-камера, минимального качества 640x320 для получения достоверных координат положения взгляда пользователя.

4. Схема организационно-технической структуры

Универсальность технической структуры позволяет физическое развертывание программной системы за пределами предприятия (удаленный хостинг) и делает допустимой организацию удаленной работы персонала с системой. Схема организационно-технической структуры представлена на рис. 29.

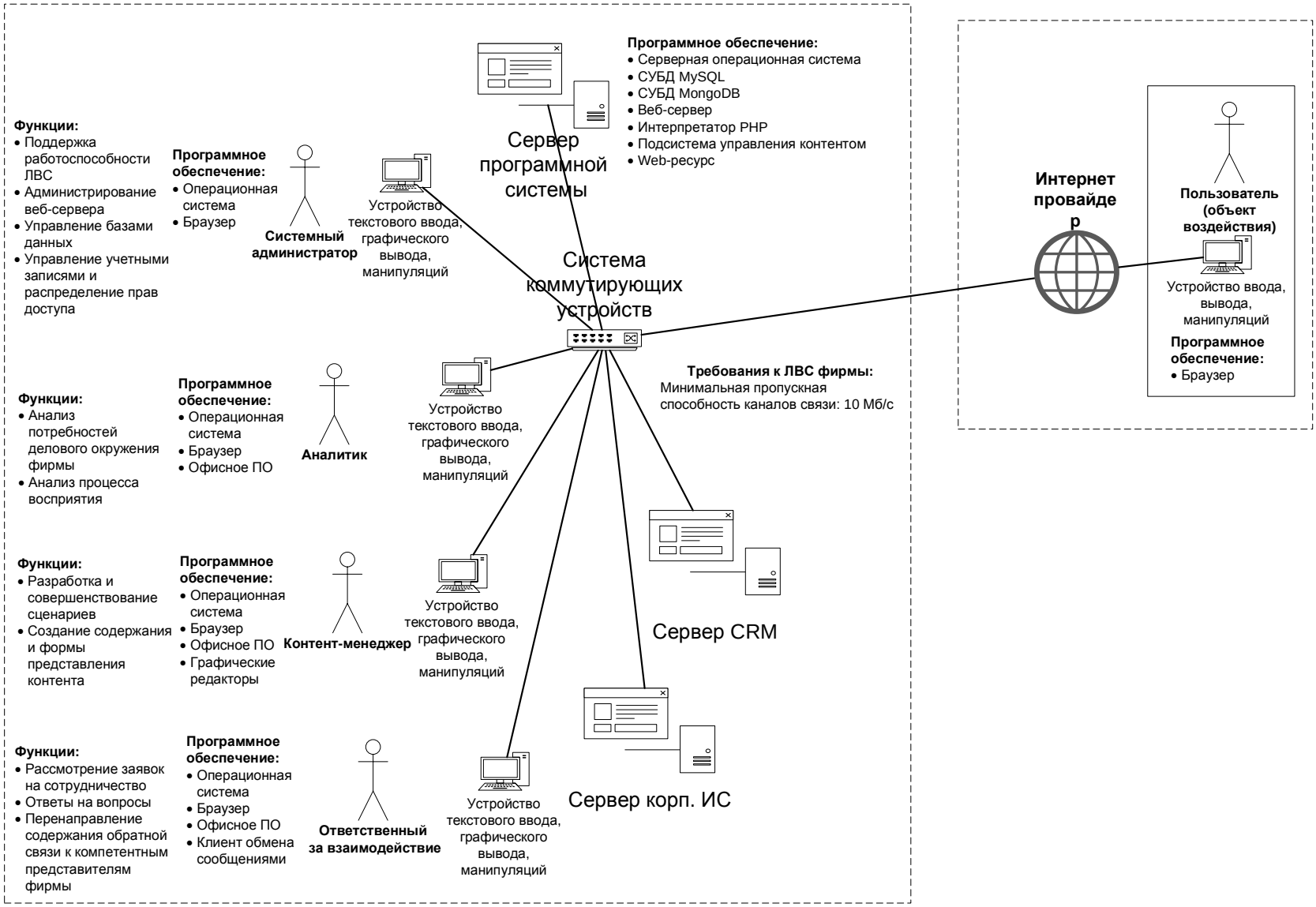


Рис. 29 Схема организационно-технической структуры

РЕШЕНИЯ ПО ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

1. АУДИТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ ЗАЩИТЫ

Выделим перечень ценных информационных объектов (ИО), которые имеют непосредственное отношение к разрабатываемой информационной системе, которым может быть причинён вред при несоблюдении мер безопасности. Все информационные объекты $\{O_i\}$, используемые и защищаемые в информационной системе, необходимо классифицировать по профилю использования. В рассматриваемой ИС можно выделить 3 профиля информационных объектов: производственная, персональная и управленческая информация.

Для каждого профиля укажем перечень принадлежащих ему объектов, средства и место их хранения, обработки и передачи.

Таблица 13. Аудит информационных объектов

Объект	Профиль	Вид данных	Средство хранения, обработки и передачи	Место
1	Производственная информация	Программный код	Операционная система	Сервер
2		Индивидуальные параметры чтения пользователя	БД	БД: сущность «Показатели движения взгляда», «Тип чтеца»
			Json-файл	Сервер
3		Медиа-файлы (изображения, видео, документы word, excel)	Операционная система	Сервер
4	Персональная информация	Учетные записи пользователей	БД	БД: сущность «Идентификация пользователя»
5.	Управленческая информация	Рекомендации по адаптации формы представления контента	Операционная система	Сервер

2. КАТЕГОРИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ

Необходимо предъявить требования конфиденциальности, целостности, доступности выделенным информационным объектам и определить возможный ущерб от нарушения требований в результате реализации угроз информационной безопасности.

Для каждого информационного объекта O_i требуется оценить уровень возможного ущерба S_i от реализации воздействующих на него угроз. Такая оценка определяется путем суммирования требований к обеспечению свойств конфиденциальности K_i, доступности A_i, целостности C_i, умноженных на весовые коэффициенты:

$$S_i = K_i * w^K + A_i * w^A + C_i * w^C$$

Оценка требуемых категорий свойств K_i, A_i, C_i определяется с использованием ранговой шкалы:

Для категории «Конфиденциальность»:

2 – «Высокая»: к данной категории относится информация, являющаяся конфиденциальной в соответствии с требованиями действующего законодательства РФ, или информация, ограничение на распространение которой вводятся решением

руководства предприятия в соответствии с принятой политикой информационной безопасности;

1 – «Средняя»: к данной категории относится информация, не отнесенная к категории «Высокая», но ознакомление с которой посторонних лиц может нанести определенный ущерб (информация для служебного пользования);

0 – «Низкая/нет требований» - к данной категории относится информация, обеспечение конфиденциальности (введение ограничений на распространение) которой не требуется.

Для категории «Целостность»:

2 – «Высокая»: к данной категории относится информация, несанкционированная модификация (искажение, уничтожение) или фальсификация которой может привести к нанесению значительного прямого ущерба, целостность и аутентичность (подтверждение подлинности источника) которой должна обеспечиваться гарантированными методами (например, средствами электронной цифровой подписи) в соответствии с обязательными требованиями действующего законодательства;

1 – «Средняя»: к данной категории относится информация, несанкционированная модификация, удаление или фальсификация которой может привести к нанесению незначительного ущерба, целостность (а при необходимости и аутентичность) которой должна обеспечиваться в соответствии с решением руководства;

0 – «Низкая/нет требований»: к данной категории относится информация, к обеспечению целостности (и аутентичности) которой требований не предъявляется.

Для категории «Доступность»:

2 – «Высокая»: доступ к информации должен осуществляться без существенных временных задержек в режиме online;

1 – «Средняя»: доступ к информации может обеспечиваться с существенными временными задержками, не препятствующими её использованию;

0 – «Низкая»: временные задержки при доступе к информации практически не лимитированы (доступ осуществляется редко с периодом в несколько недель или месяцев).

Весовые коэффициенты для каждой категории установим экспертным путем.

Табл.14 Категорирование информационных объектов

Объект	Конфиденциальность	Целостность	Доступность	Итоговая категория
Вес	0,1	0,4	0,5	
1.	1	2	0	0,9
2.	1	2	2	1,9
3.	0	2	2	1,8
4.	2	2	1	1,5
5.	1	2	2	1,9

Таким образом, стоит обратить внимание на защиту следующих объектов: O_2 (Индивидуальные параметры чтения пользователя), O_3 (медиа-файлы), O_5 (Рекомендации по адаптации формы представления контента).

3. АНАЛИЗ РИСКОВ УГРОЗ ИБ

Риски R_i угроз Y_i нанесения ущерба информационным объектам O_i можно определить по формуле:

$$R_i = P_i \cdot \sum_j P_{ij} \cdot S_j,$$

где P_i – вероятность реализации угрозы Y_i информационной безопасности (на основе отчетов компании InfoWatch [14]), P_{ij} – вероятность уязвимости объекта O_j угрозой Y_i, S_j– ущерб объекта O_j от реализации угроз информационной безопасности (из прошлой лабораторной работы).

Определим перечень информационных угроз, которые могут сформироваться и негативно воздействовать на информационные объекты:

- Y_1 – хищение информации;
- Y_2 – утечка информации;
- Y_3 – искажение информации;
- Y_4 – уничтожение информации (техногенная угроза).

Табл. 15 Анализ рисков угроз ДО

Угроза	Вероятность угрозы, P_i	Объект воздействия, O_i	Вероятность уязвимости объекта, P_{ij}	Уровень ущерба, S_j	Оценка риска, R_i
Y_1 – хищение информации	0,3	O_1	0,3	0,9	1,071
		O_2	0,5	1,9	
		O_4	0,3	1,5	
		O_5	1	1,9	
Y_2 – утечка информации	0,2	O_2	0,7	1,9	0,946
		O_4	1	1,5	
		O_5	1	1,9	
Y_3 – искажение информации	0,2	O_2	0,5	1,9	0,792
		O_3	0,6	1,8	
		O_4	0,4	1,5	
		O_5	0,7	1,9	
Y_4 – уничтожение информации (техногенная угроза)	0,3	O_1	0,6	0,9	1,44
		O_2	0,6	1,9	
		O_3	0,6	1,8	
		O_4	0,6	1,5	
		O_5	0,6	1,9	

Ранжируем угрозы по степени риска R_i: Y_3, Y_2, Y_1, Y_4.

Суммарный риск: $R_{ДО}$ =4,249

4. ВЫБОР И РЕАЛИЗАЦИЯ СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ

Средства защиты информационных объектов направлены на отражение угроз, путем уменьшения степени уязвимости объекта защиты и на снижение вероятности реализации самой угрозы.

В практике обеспечения информационной безопасности предусмотрены следующие меры защиты:

1. Организационные – ориентированы на регламентацию работы персонала, важнейшей из них является «Политика безопасности», разрабатываемая индивидуально для каждого предприятия;
2. Правовые – предусматривают соблюдение законов и норм в области информационной безопасности;
3. Аппаратно-программные – направлены на устранение угроз, непосредственно связанных с процессами хранения, обработки и передачи информации с помощью средств вычислительной техники;
4. Инженерно-технические – связаны с построением оптимальных сетей инженерных коммуникаций с учетом требований безопасности информации, а также основаны на применении специальных противопожарных средств, охранной сигнализации, визуального контроля обстановки в помещениях и на территории.

В рамках исследуемого предприятия необходимо реализовать ряд мер безопасности и защиты информации по следующим направлениям.

Таблица 16. Основные проблемы и способы их решения

Основные проблемы	Решения
Умышленное разрушение информации внутренними пользователями	Осуществляется ведение журнала посещения объектов. Было принято решение, что шифрование данных не требуется ввиду специфичности разработки, а также ввиду наличия системы распределения прав доступа и отсутствия возможности получения доступа к резервной копии у лиц без права доступа.
Кража информации внутренними и внешними злоумышленниками, в целях искажения результатов оценки процесса восприятия контента	Использование современных средств антивирусной защиты и токена JWT, организация парольной защиты информационной системы – программное решение. Осуществляется ведение журнала посещения объекта. Аутентификация и идентификация. Осуществление резервного копирование на два носителя: • на жесткий диск (в случае нарушение работы программной системы, но отсутствия физической утраты SSD диска) в виде образа; • В облачное хранилище: Google Drive
Неумышленное разрушение информации внутренними пользователями	1. Аутентификация и идентификация 2. ПО для создания резервных копий данных и восстановления из них (EaseUS ToDo Backup).
Несанкционированное подключение	Аутентификация и идентификация

4.1 ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ ПО ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Организационные меры защиты ориентированы на регламентацию работы персонала. Важнейшей из них является «Политика безопасности», разрабатываемая индивидуально для каждого предприятия. Поскольку данная работа не привязывается к конкретному предприятию, то приведем наиболее часто используемые организационные меры безопасности и необходимые в контексте систем информационного воздействия:

1. Взаимодействие со спец. органами в случае нарушения режима коммерческой тайны, при этом спец. органы проводят следственные мероприятия, устанавливая виновных лиц и меру их ответственности.
2. Организация инструктажа персонала;

Ознакомление сотрудников с правилами работы с конфиденциальной информацией при приёме на работу, а также проведение регулярных собраний и планерок (1 раз в месяц) с руководителями отделов и руководителем предприятия с целью обсуждения инцидентов, возникших в сфере защиты информации и информационной безопасности (данные о возникших инцидентах предоставляются сотрудником отдела безопасности и иными сотрудниками организации согласно протоколам, фиксирующим данные инциденты).

3. Ответственность за информационную безопасность включена в должностные обязанности сотрудников, включая ответственность за выполнение требований политики безопасности, за ресурсы, процессы и мероприятия по обеспечению безопасности.
4. Подписание соглашения о неразглашении конфиденциальной информации потенциальным работником при приеме на работу.
5. Отражение в трудовых соглашениях «Требования информационной безопасности, предъявляемые к сотруднику».

Удаление прав доступа к ИС при увольнении.

4.2 ПРАВОВОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Система информационной безопасности базируется на следующих законах РФ и стандартах:

1. Федеральный закон от 27 июля 2006 г. N 149-ФЗ "Об информации, информационных технологиях и о защите информации".

На базе этого закона формируется право обладателя информацией распоряжаться ею: разрешать или ограничивать доступ к информации, определять порядок и условия такого доступа; использовать информацию, в том числе распространять ее, по своему усмотрению; передавать информацию другим лицам по договору или на ином установленном законом основании.

2. Федеральный закон от 29 июля 2004 г. N 98-ФЗ "О коммерческой тайне".

Данный закон устанавливает понятие «Коммерческая тайна»; указывает на то, что право на отнесение информации к информации, составляющей коммерческую тайну, и на определение перечня и состава такой информации принадлежит обладателю такой информации. В данном законе указано, что информация, составляющая коммерческую тайну, полученная от ее обладателя на основании договора или другом законном основании, считается полученной законным способом.

3. ГОСТ Р ИСО/МЭК 17799-2005 «Информационная технология. Практические правила управления информационной безопасностью».

Настоящий стандарт устанавливает рекомендации по управлению информационной безопасностью лицам, ответственным за планирование, реализацию или поддержку решений безопасности в организации. Он предназначен для обеспечения общих основ для разработки стандартов безопасности и выбора практических мероприятий по управлению безопасностью в организации, а также в интересах обеспечения доверия в деловых отношениях между организациями.

4. Федеральный закон от 27.07.2006 № 152-ФЗ "О персональных данных".

Настоящим Федеральным законом регулируются отношения, связанные с обработкой персональных данных. Подписание каждым из сотрудников соглашения о неразглашении персональных данных согласно Федеральному закону «О персональных данных» от 27.07.2007 № 152-ФЗ; Подписание каждым сотрудником документа, удостоверяющего его осведомленность о действии данного закона на территории организации и устанавливающего ответственность за совершение преступлений в сфере компьютерной информации. Также необходимо учитывать согласие пользователя при обработке видеоряда с веб-камеры: веб-камера фиксирует биометрические персональные данные – то есть физиологические и биологические особенности человека, на основании которых можно установить его личность. И в этом случае этим же федеральным законом установлено, что необходимо получить на это согласие от лиц, попавших в объектив камеры, в письменной форме (либо согласие на разрешение съемки в онлайн режиме, посредством диалогового окна).

4.3 ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЕ СРЕДСТВА ЗАЩИТЫ

Разрабатываемый инструмент лингвистического анализа веб-контента относится к 1-ой группе классов защищённости ИС от НСД к информации, т.к. является многопользовательской (администратор, аналитик, пользователь, руководитель) системой[7]. В соответствии с применяемыми требованиями к мерам защиты инструмент был определён к классу 1А, т.к.:

[7] Руководящий документ. Автоматизированные системы. Защита от несанкционированного доступа к информации. Классификация автоматизированных систем и требования по защите информации

- происходит идентификация и контроль доступа субъектов к рабочим подсистемам (соответствует классам 1А-1Г);
- существует регистрация и учёт входа/выхода, доступа к защищаемым файлам, изменения полномочий субъектов доступа, сигнализация попыток нарушения защиты (соответствует классам 1А-1В);
- происходит шифрование конфиденциальной информации (соответствует классам 1А-1Б), шифрование информации, принадлежащей субъектам доступа на разных ключах по протоколу TLS (соответствует классу 1А);
- используются сертифицированные средства защиты, присутствует администратор защиты информации, имеются средства восстановления данных.

В качестве стратегии защиты от ИУ необходимо отразить в политике безопасности факт экранирования инструмента от носителей ИУ, что проявляется в использовании сертифицированных средств защиты и поддержании их работоспособности, а также упомянутый выше криптографический протокол TLS, и система логинов и паролей субъектов разного уровня доступа. Также важно упомянуть в политике о действиях пользователей по работе с системой для снижения возможных рисков утечки информации.

Данные средства защиты применяются для предотвращения умышленного искажения информации:

1. CSRF (межсайтовая подделка запроса) – вид атак на посетителей веб-сайтов, использующий недостатки протокола HTTP. Типичный способ защиты сайтов – это «секретный ключ» (secret), специальное значение, которое генерируется случайным образом и сохраняется в сессии посетителя. Его знает только сервер. Затем на основе ключа генерируется «токен» (token). Токен генерируется так, чтобы с одной стороны он был отличен от ключа, в частности, может быть много токенов для одного ключа, с другой – чтобы было легко проверить по токену, сгенерирован ли он на основе данного ключа или нет. Для каждого токена нужно дополнительное случайное значение, которое называют «соль». Токен формируется по открытому стандарту «JSONWebToken» (JWT), основанный на формате JSON. Токены создаются сервером, подписываются секретным ключом и передаются клиенту, который в дальнейшем использует данный токен для подтверждения своей личности. Токен JWT состоит из трех частей: заголовок (header), полезная нагрузка (payload) и подпись или данные шифрования. Первые два элемента — это JSON объекты определенной структуры. Третий элемент вычисляется на основании первых и зависит от выбранного алгоритма (в случае использования не подписанного JWT может быть опущен). Токены могут быть перекодированы в компактное представление – к заголовку и полезной нагрузке применяется алгоритм кодирования Base64-URL, после чего добавляется подпись и все три элемента разделяются точками.

2. Для ограничения доступа к управлению системой необходима реализация подсистемы аутентификации персонала и разграничение прав доступа.

Приведем следующие требования к подсистеме аутентификации:

1) Для того, чтобы обеспечить повышенную безопасность паролей даже в худшем случае (приложение взломано), используется адаптивная криптографическая хеш-функция формирования ключа «bcrypt»;

2) Логика проверки паролей проводится только на сервере;

3) Не авторизованным пользователям доступ к управлению системой запрещен;

4) Должно быть распределение прав доступа внутренних пользователей к различным функциям системы, что частично решает проблему угрозы неосторожных действий персонала.

3. Для повышения надежности данных будет использоваться RAID 1 — зеркальный дисковый массив. Зеркальный массив обусловлен своей простотой установки и работы, высочайшей надежностью.

4. Исходя из анализа функционала систем резервного копирования, а также из требуемого функционала было принято решение остановить свой выбор на EaseUS ToDo

Backup. EaseUS ToDo Backup – это программа с улучшенным пользовательским интерфейсом и широким перечнем функций. Несмотря на отсутствие возможности бекапа файлов и функции синхронизации, есть поддержка Dropbox и других сервисов онлайн хранения данных.

5. Важнейшей частью политики безопасности организации является разграничение доступа к информации. В качестве модели разграничения прав доступа была выбрана модель матрицы доступа потому, что нам важно знать какому пользователю системы какая информация соответствует, что и описывает данная матрица, представленная в таблице 5. Каждый пользователь имеет свой логин и пароль. Авторизация происходит в специальном окне (рис. 1);

6. В качестве средства антивирусной защиты было выбрано ПО от Лаборатории Касперского «Kaspersky Endpoint Security».

7. Разрабатываемый инструмент является частью Web-ресурса, соответственно, открывается через Web-браузер. В браузерах как в приложениях, работающих с сетью Интернет, используется криптографический протокол TLS (Протокол защиты транспортного уровня). Данный протокол является примером гибридной системы, использующей симметричное и асимметричное шифрование. TLS даёт возможность клиент-серверным приложениям осуществлять связь в сети таким образом, что нельзя производить прослушивание пакетов и осуществить несанкционированный доступ. TLS использует асимметричное шифрование для аутентификации, симметричное шифрование для конфиденциальности и коды аутентичности сообщений для сохранения целостности сообщений. Протокол TLS считается безопасным и широко используется всеми современными Web-браузерами.

Таблица 17. Матрица прав доступа («С» - создание; «Ч» – чтение; «Р» – редактирование; «У» – удаление)

Роль	Объекты				
	O_1- Программный код	O_2- Индивидуальные параметры чтения пользователя	O_3- Медиа-файлы (изображения, видео, документы word, excel)	O_4- Учетные записи пользователей	O_5- Рекомендации по адаптации формы представления контента
Администратор	Ч, Р	-	Ч	С, Ч, Р, У	Ч
Аналитик	-	Ч	С, Ч, Р, У	Ч	С, Ч, Р, У
Пользователь	-	-	Ч	-	-
Руководитель	-	-	Ч	Ч	-

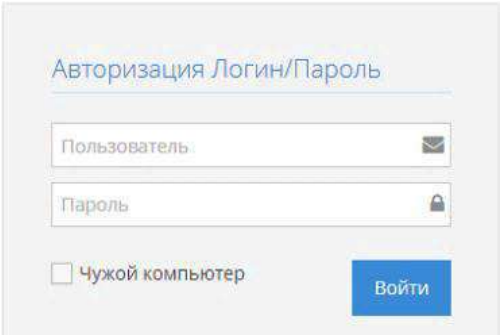


Рис. 30 Авторизация пользователя

4.4 ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ЗАЩИТЫ

Данные средства защиты применяются для предотвращения таких угроз, как хищение, утечка и уничтожение информации (Y_1, Y_2, Y_4):

1. Установлено средство охранно-пожарной сигнализации (установлены точечные и объёмные датчики охранной сигнализации, реагирующих на возникновение дыма и затуманенности за счёт включения предупреждающей сирены).

2. Установлена система контроля доступа в офисное и серверное помещение (надежные дверные замки).

3. Использование охранного освещения в целях обеспечения безопасности.

4. Регулярное создание резервных копий рабочей версии системы и базы данных на физический носитель и облачное хранилище.

Резервное копирование:

- В разрабатываемой ИС будет осуществляться копирование папок, в которых расположены БД, интерфейс для работы с ней, а также текущую версию программы, для обнаружения и исправления ошибок.
- Должно быть предусмотрено совмещение полного копирования и инкрементного копирования.

Обоснование: раз в год необходимо проводить полное копирование системы. В целях экономии памяти и времени должно применяться инкрементное копирование, так как в процессе работы будут вноситься изменения в БД.

Резервное копирование базы данных осуществляется в phpMyAdmin. В разрабатываемой ИС осуществляется копирование папок, в которых расположены БД, интерфейс для работы с ней, а также текущую версию программы, для обнаружения и исправления ошибок. Предусмотрено совмещение полного копирования и инкрементного копирования.

Полное копирование системы должно осуществляться один раз в календарный год в нерабочее время.

Инкрементное копирование должно осуществляться ежедневно (каждый рабочий день) в нерабочее время.

Также полное копирование должно осуществляться, если система перешла во внештатный режим (предаварийный или аварийный режим работы):

1. В «Предаварийном режиме» ИС должна сохранять все результаты, которые были получены в результате мониторинга, т.е сделать резервную копию БД. В данном случае системный администратор (инженер) должен:
   - не допустить перехода программного продукта в аварийный режим;
   - в режиме реального времени, попытаться вернуть программу в штатный режим;
2. В «Аварийном режиме» ИС должна полностью отключать свою деятельность, ввиду возможных нарушения целостности данных, угрозе кражи, копирования информации. После отключения системы, системный администратор (инженер) должен:
   - провести анализ причин возникновения аварийного режима;
   - проверить сохранность информационных ресурсов;
   - попытаться вернуть программу в штатный режим;
   - связаться с разработчиком ИС, а так с сопроводительными органами

4.5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО РИСКА

Поскольку используемые средства не способны полностью отвести все существующие угрозы, то обязательной процедурой для определения оправданности создания системы ИБ является определение остаточного риска. Результаты расчётов представлены в табл. 6.

Табл. 18 Анализ рисков угроз ПОСЛЕ

Угроза	Вероятность угрозы, P_i	Объект воздействия, O_i	Вероятность уязвимости объекта, P_{ij}	Уровень ущерба, S_j	Оценка риска, R_i
	0,18	O_1	0,2	0,9	0,46746

Y_1 – хищение информации		O_2	0,35	1,9	
		O_4	0,18	1,5	
		O_5	0,78	1,9	
Y_2 – утечка информации	0,12	O_2	0,6	1,9	0,48504
		O_4	0,82	1,5	
		O_5	0,88	1,9	
Y_3 – искажение информации	0,15	O_2	0,33	1,9	0,37455
		O_3	0,2	1,8	
		O_4	0,31	1,5	
		O_5	0,55	1,9	
Y_4 – уничтожение информации (техногенная угроза)	0,15	O_1	0,38	0,9	0,4914
		O_2	0,45	1,9	
		O_3	0,28	1,8	
		O_4	0,48	1,5	
		O_5	0,45	1,9	

Суммарный риск: $R_{\text{ПОСЛЕ}} = 1{,}819$ ($R_{\text{ДО}}$=4,249)

Так как значение остаточного риска меньше значения риска исходного ($R_{\text{ПОСЛЕ}} < R_{\text{ДО}}$), предшествующего внедрению средств защиты, значит выбор методов обеспечения ИБ является оправданным.

КОНТРОЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Инструмент лингвистического анализа контента на веб-ресурсе должен быть проверен на соответствие требованиям. Работоспособность разработанных решений должна быть проверена на следующих показателях:

- точность определения показателей движения взгляда
- точность определения показателя узнаваемости СЗЕ текста
- точность определения уровня понимания ИБ пользователем
- точность определения показателей техники чтения пользователя

Проверка результатов определения индивидуальных показателей процесса чтения будет происходить в ходе эксперимента:

- на множестве испытуемых, имеющих разные специальности, уровни успеваемости в университете проверим работоспособность системы;
- каждый пользователь системы из числа испытуемых должен прочитать предложенный текст и ответить на предложенные вопросы по тексту;
- необходимо проводить запись параметров чтения испытуемых;
- каждый полученный показатель необходимо обработать и интерпретировать;
- обработать результаты опроса студентов без использования системы;
- сопоставить полученные результаты с результатами работы системы.

1.Описание эксперимента

Для проверки был проведен ряд экспериментов на студентах 4 курса факультета ИВТ. Состав участников эксперимента указан в таблице 1.

Таблица 1. Состав участников эксперимента

Студент	Возраст	Пол	Курс/группа	Специализация / Профиль	Расстройства, связанные с навыками чтения
Перов Д.М	21	Мужской	4/45	09.03.03:13 - Прикладная информатика в информационной сфере	Отсутствуют
Рыбин Е.В.	21	Мужской	4/48	09.03.03:19 - Прикладная информатика в социальных коммуникациях	Отсутсвуют
Колина О.С.	21	Женский	4/42В	09.03.04:01 - Разработка программно-информационных систем	Отсутсвуют
Каверина Е.В.	21	Женский	4/42В	09.03.04:01 - Разработка программно-информационных систем	Отсутсвуют

Состав был собран из студентов разных групп и специальностей для чистоты эксперимента. Группы 4/45, 4/48 относятся к кафедре информационных технологий и имеют большинство общих дисциплин. Группа 4/42В относится к кафедре программного обеспечения компьютерных систем, имеет существенное различие в составепредподаваемых дисциплин с группами 4/45, 4/48. Указание наличия расстройств, связанных с навыками чтения необходимо, так как показатели чтения участника эксперимента с дислекцией будут отличаться от нормальных показателей при чтении текста и интерпретированы неверно. Все испытуемые являются носителями русского языка, имеют нормальное зрение и не страдают неврологическими заболеваниями. Также учитывались возрастные особенности испытуемых [6]. Эксперименты проводили с соблюдением правил биоэтики.

В экспериментах использовали 3 разных текста, примеры которых представлены на рис. 2, рис. 4, рис. 6. Выбор текста научного содержания по дисциплине «Нейробиология» был обусловлен тем, что данная дисциплина не была включена в программу учебного курса групп 4/45, 4/48 и 4/42В, а значит студенты с большой долей вероятности не стакивались с данным текстом. Выбор текста №2 обусловлен тем, что испытуемые нна 2 курссе изучали дисциплину «Культурология», а значит тематика текста не будет незнакома. Выбор текста №3 обсуловлен тем, что группы 4/45 и 4/48 изучали дисциплину «Сситемы управления знаниями»,а группа 4/42В данный материал не проходили. Поэтому результаты отслеживания параметров чтения студентов должны отразить уровень понимания данного текста в разных группах на разном уровне.

После настройки системы, каждому испытуемому предоставляли стимульные материалы (тексты) №1, №2 и №3 на экране монитора на расстоянии 90 см. (рис.1) Участники эксперимента читали в произвольном темпе с перерывами. Переыв необходим в ходе эксперимента, так как чтение также является умственным трудом, а также испытуемым необходимо дать время отдохнуть и «переключиться». Тогда результаты эксперимента будут более точно отражать реальные показатели процесса чтения каждого из участников.



Рис. 1 Схематичное изображение стимульного материала и условий предъявления текста

Так как в ходе данного эксперимента необходимо было определить насколько точно показатели процесса чтения отражают реальный увровень понимания пользователями материала, после прочтения текста испытуемым было предложено заполнить опросный лист с вопросом на понимание материала по каждому информационному блоку (для оценки уровня понимания информационного блока), например для текста №1 (рис.2) первого информационного блока был предложен вопрос: «Что легло в основу нейробиологии?» . Правильный ответ: «мозг», «исследование мозга».

Также каждому из участников было предложено отметить на распечатанном листе с текстом СЗЕ, которые были не понятны (для оценки показателя узнаваемости СЗЕ). Результаты проведения опроса среди испытуемых представлены в приложении 1 настоящего документа.

Показатели процесса чтения, отслеживаемые в ходе эксперимента, представлены в таблице 2.

Таблица 2. Показатели процесса чтения испытуемых

Обозначение	Наименование
Fix[n]	Показатель фиксации на СЗЕ

DFix	Длительность фиксации
dt	Время отсутствия взгляда
R	Количество регрессий на СЗЕ
TimeB	Время чтения информационного блока
Rb	Показатель регрессии на информационный блок
CountFix	Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд
RecConc	Показатель узнаваемости СЗЕ
Spt opt	Показатель полноты чтения пользователя ИБ
Vr	Скорость чтения
Tipe_id =1	Тип чтеца: объективный
Tipe_id =2	Тип чтеца: субъективный

2. Проведение эксперимента

В качестве стимульных материалов представлены тексты №1,№2,№3.

Текст №1. Текст научного содержания по дисциплине «Нейробиология»

В основу нейробиологии легло исследование мозга как междисциплинарной проблемы. Основные представления о структуре, функциях, молекулярных и клеточных основах деятельности мозга сформированы еще в XX веке. Интеграция научных дисциплин совершалась вокруг исследований строения нейрона, механизмов синаптической связи и организации нервных сетей с целью познания высших психических функций, таких, как память, сознание и мышление, с которыми связаны обучение, поведение и деятельность человека.

Несмотря на достигнутые успехи, сущность психической деятельности от этого не стала менее загадочной. Находясь в неразрывной связи с мозгом, психика человека, не может быть объяснена только нейрофизиологическими процессами. Важную роль в реализации этой функции играют как прогресс общества, так и социально-исторический опыт человечества.

Мозг есть материальная структура, на которой среда и общественная жизнь пишут историю личности и человечества. Опираясь на нее, человек приобретает индивидуальный опыт. Процесс начинается с ощущений, которые трансформируются в энергию нервных импульсов и воспринимаются мозгом как интегративный афферентный сигнал, на который следует адекватный ответ через двигательную систему.

Нервная система выполняет две функции: взаимодействие с внешней средой и объединение органов и систем в единое целое.

Знакомство с мозгом начинается с изучения нейронов и глии, взаимодействие между которыми обеспечивает его структурно-функциональную организацию.

Рис. 2 Пример текста научного содержания по дисциплине «Нейробиология» №1

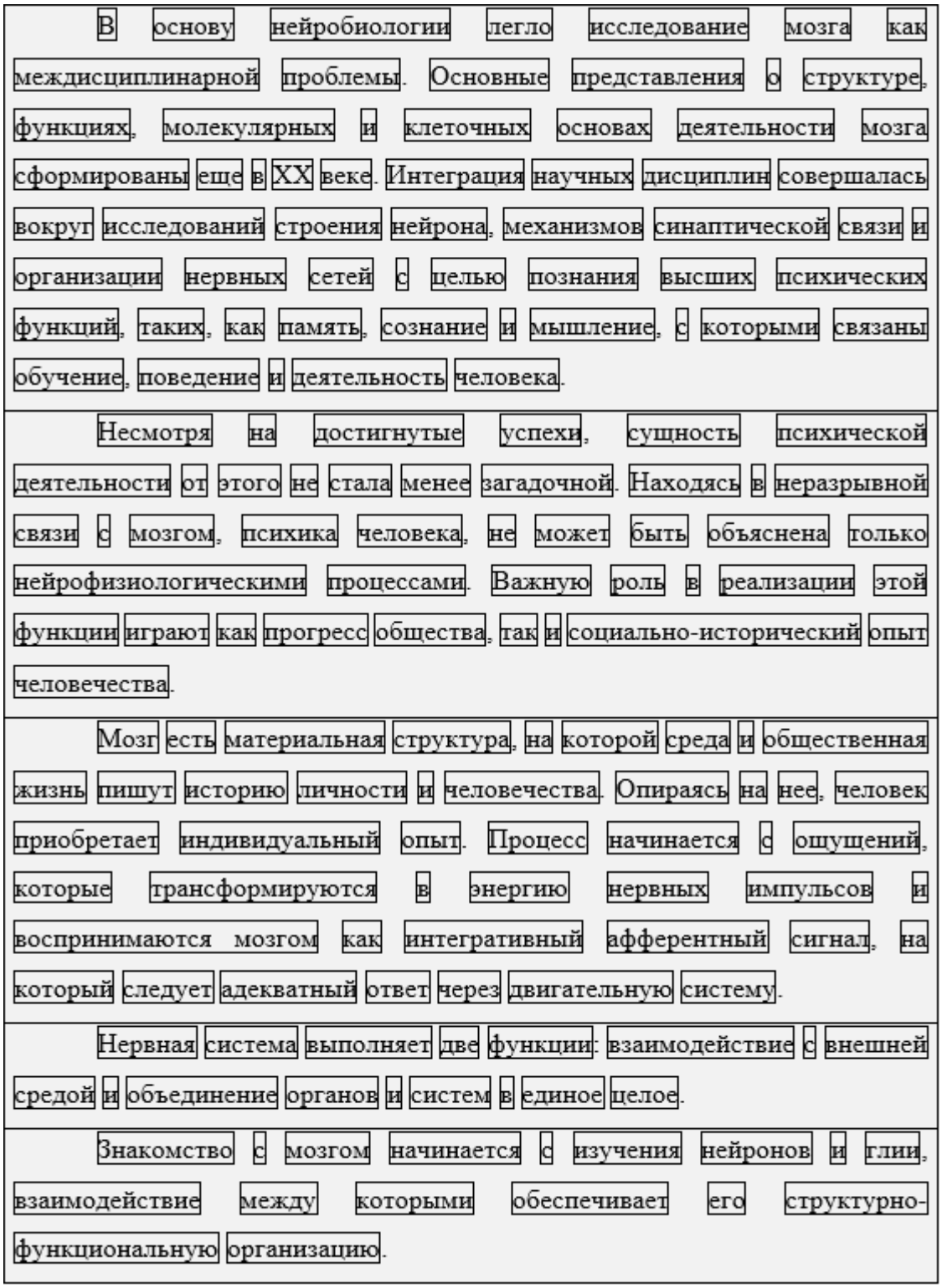


Рис.3 Текст №1, представленный в виде информационных блоков

Каждый текст представляет собой совокупность информационных блоков, каждый из которых представлен множеством понятий (семантически-значимых единиц) (рис.3). Каждая СЗЕ имеет следующие параметры: координаты расположения на экране (xj;yj), семантическая значимость (weight). Пример указанных параметров для текста №1 информационного блока 1 (рис. 3) представлены в таблице 3.

Таблица 3. Параметры текста №1 ИБ 1.

СЗЕ	Координаты расположения СЗЕ на экране	Семантическая значимость (weight)	СЗЕ	Координаты расположения СЗЕ на экране	Семантическая значимость (weight)

В	(265,176)	0,1	вокруг	(265,241)	0,3
основу	(300, 176)	0,4	исследований	(310, 241)	0,4
нейробиологии	(390, 176)	1	строения	(390, 241)	0,6
легло	(450, 176)	0,4	нейрона	(467, 241)	1
исследование	(550, 176)	0,6	механизмов	(591, 241)	0,6
мозга	(701, 176)	0,7	синаптическо й	(647, 241)	0,5
как	(800,176)	0,3	связи	(737, 241)	0,4
междисциплинар ной	(270, 192)	0,5	и	(800, 241)	0,2
проблемы	(286, 192)	0,3	организации	(265,257)	0,5
Основные	(360, 192)	0,5	нервных	(311, 257)	0,6
представления	(400, 192)	0,4	сетей	(371, 257)	0,6
о	(490, 192)	0,2	с	(410, 257)	0,1
структуре	(573,192)	0,6	целью	(589, 257)	0,3
функциях	(600, 208)	1	познания	(672, 257)	0,4
молекулярных	(650, 208)	0,7	высших	(720, 257)	0,4
и	(670, 208)	0,2	психических	(802, 257)	0,6
клеточных	(701, 208)	0,7	функций	(265,273)	0,9
основах	(734, 208)	0,4	таких	(311, 273)	0,2
деятельности	(760, 208)	0,4	как	(397, 273)	0,3
мозга	(801, 208)	0,8	память	(414, 273)	0,8
сформированы	(255,224)	0,6	сознание	(490,273)	0,8
еще	(267, 224)	0,2	и	(500, 273)	0,1
в	(314, 224)	0,1	мышление	(507, 273)	0,9
XX	(443, 224)	0,2	с	(697, 273)	0,2
веке	(561, 224)	0,1	которыми	(767, 273)	0,1
Интеграция	(579, 224)	0,6	связаны	(803, 273)	0,6
научных	(698, 224)	0,3	обучение	(265,290)	0,7
дисциплин	(770, 224)	0,7	поведение	(310, 290)	0,7
совершалась	(805, 224)	0,4	и	(337, 290)	0,3
деятельность	(371, 290)	0,3	человека	(360, 290)	0,4

Текст №2. Художественный текст – анализ картины Карла Брюллова «Последний день Помпеи».

Знаменитая картина Карла Брюллова «Последний день Помпеи» была написана в 1830-1833 гг. На этом эпическом полотне живописец запечатлел гибель города Помпеи вследствие извержения вулкана Везувий в 79 году н.э.

Брюллов изображает поистине адскую картину. Вдалеке пылает вулкан, из недр которого во все стороны растекаются ручьи огненной лавы. Отблески пламени от горящей лавы озаряют красноватым заревом заднюю часть полотна. Вспышка молнии, рассекающая облако пепла и гари, освещает переднюю часть картины.

В своей картине Брюллов использует смелую для своего времени цветовую гамму. Самое пристальное внимание обращает живописец на воздушное перспективу – ему удается создать ощущение глубокого пространства.

Перед нами – целое море людских страданий. В час настоящей трагедии обнажаются человеческие души. Вот мужчина, защищающий своих близких, отчаянно поднял руку, словно пытаясь остановить стихию. Мать, страстно обняв своих детей, с мольбой о пощаде глядит на небо. Вот сыновья на своих плечах пытаются унести слабого старика-отца подальше от опасности. Молодой юноша уговаривает упавшую мать собраться с силами и бежать. В центре картины – погибшая женщина и младенец, тянущийся к безжизненному телу матери.

Картина «Последний день Помпеи» напоминает зрителю о том, что основная ценность мира – человек. Его физическую красоту и духовное величие художник противопоставляет разрушительным силам природы.

Рис. 4 Пример художественного текста №2

205

Знаменитая картина Карла Брюллова «Последний день Помпеи» была написана в 1830-1833 гг. На этом эпическом полотне живописец запечатлел гибель города Помпеи вследствие извержения вулкана Везувий в 79 году н.э.

Брюллов изображает поистине адскую картину. Вдалеке пылает вулкан, из недр которого во все стороны растекаются ручьи огненной лавы. Отблески пламени от горящей лавы озаряют красноватым заревом заднюю часть полотна. Вспышка молнии, рассекающая облако пепла и гари, освещает переднюю часть картины.

В своей картине Брюллов использует смелую для своего времени цветовую гамму. Самое пристальное внимание обращает живописец на воздушное перспективу – ему удается создать ощущение глубокого пространства.

Перед нами – целое море людских страданий. В час настоящей трагедии обнажаются человеческие души. Вот мужчина, защищающий своих близких, отчаянно поднял руку, словно пытаясь остановить стихию. Мать, страстно обняв своих детей, с мольбой о пощаде глядит на небо. Вот сыновья на своих плечах пытаются унести слабого старика-отца подальше от опасности. Молодой юноша уговаривает упавшую мать собраться с силами и бежать. В центре картины – погибшая женщина и младенец, тянущийся к безжизненному телу матери.

Картина «Последний день Помпеи» напоминает зрителю о том, что основная ценность мира – человек. Его физическую красоту и духовное величие художник противопоставляет разрушительным силам природы.

Рис.5 Текст №2, представленный в виде информационных блоков

Пример указанных параметров для текста №2 информационного блока 1 (рис. 5) представлены в таблице 4.

Таблица 4. Параметры текста №2 ИБ 1.

СЗЕ	Координаты расположения СЗЕ на экране	Семантическая значимость (weight)
Знаменитая	(270,176)	0,4
картина	(310, 176)	0,7
Карла	(400, 176)	0,5
Брюллова	(470, 176)	0,6
Последний	(561, 176)	0,6
день	(701, 176)	0,7
Помпеи	(800,176)	1

была	(271, 192)	0,2
написана	(286, 192)	0,4
в	(360, 192)	0,2
1830-1833	(410, 192)	0,6
гг	(480, 192)	0,2
На	(573,192)	0,1
этом	(610, 208)	0,3
эпическом	(670, 208)	0,7
полотне	(690, 208)	0,5
живописец	(711, 208)	0,7
запечатлел	(774, 208)	0,4
гибель	(790, 208)	0,4
города	(801, 208)	1
Помпеи	(265,224)	0,7
вследствие	(267, 224)	0,2
извержения	(324, 224)	1
вулкана	(433, 224)	0,9
Везувий	(567, 224)	0,8
в	(601, 224)	0,4
79	(698, 224)	0,3
году	(770, 224)	0,2
н.э.	(801, 224)	0,1

Текст №3. Текст научного содержания «Нейрофизиологические основы работы интеллекта» по дисциплине «Системы управления знаниями»

2.3 Нейрофизиологические основы работы интеллекта

Восприятие иерархичности понятий объясняется биологическими принципами, которые лежат в основе работы человеческого мозга и центральной нервной системы. Медицина при помощи специальных красящих веществ и электронных микроскопов особой мощности в настоящее время располагает информацией о строении отдельной нервной клетки (нейрона), о функциональном предназначении каждой из областей мозга, о пользе или вреде отдельных веществ для высокоуровневой нервной деятельности. Однако даже эти сведения нельзя считать полными и неопровержимыми – наука признаёт, что не в состоянии на данный момент ответить на часть вопросов, касающихся мышления и нервной деятельности. Понимание того, на каких принципах строятся сны или галлюцинации человека, как распределяется по мозгу хранимый в памяти опыт, как переключение эмоций вмешивается в процесс запоминания, у учёных присутствует лишь частично.

На данный момент точно установлено, что нервная клетка является основой нервной деятельности точно также, как клетка из кровеносной системы служит основой для механизма кровообращения. Одного нейрона и одного лейкоцита будет недостаточно для запуска всей нервной системы или системы кровообращения – нужно не просто располагать большим количеством этих клеток, но и найти между ними определённые связи. Таким образом, в работе интеллекта прослеживается принцип системности.

За связи между клетками мозга отвечают особые волокна – синапсы, способные на передачу импульса. Соответственно нервная клетка умеет получать этот импульс и отправлять собственный, переходя при необходимости в возбуждённое состояние. Разнообразие форм нейронов и их соединений обеспечивает неограниченное число возможностей для доведения однотипного сигнала до клетки, которой он предназначался.

Рис. 6 Пример текста научного содержания по дисциплине «Системы управления знаниями» №3

2.3 Нейрофизиологические основы работы интеллекта

Восприятие иерархичности понятий объясняется биологическими принципами, которые лежат в основе работы человеческого мозга и центральной нервной системы. Медицина при помощи специальных красящих веществ и электронных микроскопов особой мощности в настоящее время располагает информацией о строении отдельной нервной клетки (нейрона), о функциональном предназначении каждой из областей мозга, о пользе или вреде отдельных веществ для высокоуровневой нервной деятельности. Однако даже эти сведения нельзя считать полными и неопровержимыми – наука признаёт, что не в состоянии на данный момент ответить на часть вопросов, касающихся мышления и нервной деятельности. Понимание того, на каких принципах строятся сны или галлюцинации человека, как распределяется по мозгу хранимый в памяти опыт, как переключение эмоций вмешивается в процесс запоминания, у учёных присутствует лишь частично.

На данный момент точно установлено, что нервная клетка является основой нервной деятельности точно также, как клетка из кровеносной системы служит основой для механизма кровообращения. Одного нейрона и одного лейкоцита будет недостаточно для запуска всей нервной системы или системы кровообращения – нужно не просто располагать большим количеством этих клеток, но и найти между ними определённые связи. Таким образом, в работе интеллекта прослеживается принцип системности.

За связи между клетками мозга отвечают особые волокна – синапсы, способные на передачу импульса. Соответственно нервная клетка умеет получать этот импульс и отправлять собственный, переходя при необходимости в возбуждённое состояние.

Рис.7 Текст №3, представленный в виде информационных блоков

Пример указанных параметров для текста №3 информационного блока 1 (рис. 7) представлены в таблице 5.

Таблица 5. Параметры текста №3 ИБ 1.

СЗЕ	Координаты расположения СЗЕ на экране	Семантическая значимость (weight)	СЗЕ	Координаты расположения СЗЕ на экране	Семантическая значимость (weight)
Восприятие	(265,176)	0,8	нервной	(265,241)	0,3
иерархичности	(300, 176)	0,4	клетки	(310, 241)	0,4
понятий	(390, 176)	0,3	(нейрона)	(390, 241)	1
объясняется	(450, 176)	0,2	о	(467, 241)	0,2
биологическими	(550, 176)	1	функциональном	(591, 241)	0,9
принципами	(701, 176)	0,4	предназначении	(647, 241)	0,5
которые	(800,176)	0,1	каждой	(737, 241)	0,1
лежат	(270, 192)	0,3	из	(800, 241)	0,2
в	(286, 192)	0,2	областей	(265,257)	0,4
основе	(360, 192)	0,4	мозга	(311, 257)	0,6
работы	(400, 192)	0,5	о	(371, 257)	0,3
человеческого	(490, 192)	0,4	пользе	(410, 257)	0,4
мозга	(573,192)	1	или	(589, 257)	0,1
и	(600, 208)	0,2	вреде	(672, 257)	0,2
центральной	(650, 208)	0,7	отдельных	(720, 257)	0,3
нервной	(670, 208)	0,8	веществ	(802, 257)	0,3
системы	(701, 208)	0,5	для	(265,273)	0,1
Медицина	(734, 208)	0,9	высокоуровневой	(311, 273)	0,4
при	(760, 208)	0,2	нервной	(397, 273)	0.8
помощи	(801, 208)	0,4	деятельности	(414, 273)	0,7
специальных	(255,224)	0,3	Однако	(490,273)	0,1
красящих	(267, 224)	0,7	даже	(500, 273)	0,3
веществ	(314, 224)	0,7	эти	(507, 273)	0,2
и	(443, 224)	0,1	сведения	(697, 273)	0,5
электронных	(561, 224)	0,5	нельзя	(767, 273)	0,6
микроскопов	(579, 224)	0,8	считать	(803, 273)	0,4
особой	(698, 224)	0,3	полными	(265,290)	0,6
мощности	(770, 224)	0,5	и	(310, 290)	0,1
в	(805, 224)	0,1	неопровержимыми	(337, 290)	0,6
настоящее	(267, 290)	0,2	наука	(360, 290)	0,5
время	(310,290)	0,2	признаёт	(401,290)	0,4
располагает	(410,290)	0,3	что	(456,290)	0,3
информацией	(570,290)	0,6	не	(501,290)	0,2
о	(601,290)	0,2	в	(550,290)	0,1
строении	(670,290)	0,5	состоянии	(601,290)	0,3
отдельной	(701,290)	0,3	на	(660,290)	0,1
каких	(790,290)	0,2	данный	(779,290)	0,2
принципах	(801,290)	0,6	момент	(801,290)	0,2
строятся	(265, 326)	0,5	ответить	(306)	0,3
сны	(310,326)	0,7	на	(265,306)	0,2
или	(390,326)	0,2	часть	(311,306)	0,3
галлюцинации	(460,326)	0,7	вопросов	(390,306)	0,4
человека	(501,326)	0,9	касающихся	(461,306)	0,4
как	(591,326)	0,2	мышления	(592,306)	1
распределяется	(701,326)	0,4	и	(647,306)	0,1
по	(805,326)	0,2	нервной	(737,306)	0,6
мозгу	(410,361)	1	деятельности	(801,306)	0,5
хранимый	(599,361)	0,7	Понимание	(265,312)	0,6

в	(601,361)	0,1	того	(310,312)	0,2
памяти	(680,361)	0,7	на	(391,312)	0,1
опыт	(791,361)	0,6	вмешивается	(465,312)	0,5
как	(801,361)	0,2	в	(591,312)	0,1
Переключение	(265,383)	0,4	процесс	(690,312)	0,2
эмоций	(291,383)	0,8	запоминания	(701,312)	0,6
присутствует	(381,383)	0,4	у	(790,312)	0,2
частично	(411,383)	0,2	учёных	(801,312)	0,4

3. Результаты эксперимента

Результаты отслеживания показателей процесса чтения каждого испытуемого представлены в таблицах с соответствующими показателями, определенными в таблице 2 настоящего документа. (В-«Воспринято», Н-«Не воспринято»).

1) Испытуемый №1. Перов Д.М. Текст №1. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студента Перова Д.М. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 1 представлены в табл. 6-табл.12.

Таблица 6. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
В	170	3	0	В	синаптической	350	39	2	Н
основу	200	2	0	В	связи	170	3	0	В
нейробиологии	300	44	3	Н	и	165	3	0	В
легло	211	2	0	В	организации	211	2	0	В
исследование	240	2	0	В	нервных	244	1	1	В
мозга	230	2	0	В	сетей	211	1	0	В
как	211	2	0	В	с	165	1	0	В
междисциплинарной	241	0	1	В	целью	151	2	0	В
проблемы	200	0	0	В	познания	177	2	0	В
Основные	241	2	0	В	высших	214	1	0	В
представления	171	3	0	В	психических	343	37	2	Н
о	161	5	0	В	функций	211	1	0	В
структуре	141	1	1	В	таких	156	1	0	В
функциях	165	1	0	В	как	114	1	0	В
молекулярных	243	1	0	В	память	171	2	0	В
и	171	0	0	В	сознание	180	3	0	В
клеточных	242	0	1	В	и	130	4	0	В
основах	175	0	0	В	мышление	190	3	0	В
деятельности	156	0	0	В	с	111	2	0	В
мозга	211	0	0	В	которыми	135	5	0	В
сформированы	214	2	0	В	связаны	141	1	0	В
еще	155	2	0	В	обучение	117	1	0	В
в	113	1	0	В	поведение	156	1	0	В
XX	135	1	0	В	и	114	2	0	В
веке	155	1	0	В	деятельность	171	4	0	В
Интеграция	341	33	3	Н	человека	180	1	0	В
научных	246	3	0	В					
дисциплин	244	4	1	В					
совершалась	243	3	0	В					
вокруг	244	2	0	В					
исследований	231	3	0	В					
строения	220	1	0	В					
нейрона	255	15	1	Н					
механизмов	241	2	0	В					

211

Таблица 7. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Несмотря	240	1	0	В	может	170	14	0	В
на	211	2	0	В	быть	141	7	0	В
достигнутые	170	3	0	В	объяснена	176	3	0	В
успехи	177	1	0	В	только	181	2	0	В
сущность	200	2	0	В	нейрофизиологическими	370	3	3	Н
психической	244	4	1	В	процессами	179	1	0	В
деятельности	230	7	0	В	Важную	201	10	0	В
от	221	1	0	В	роль	221	1	0	В
этого	170	2	0	В	в	198	2	0	В
не	111	3	0	В	реализации	230	3	1	В
стала	116	5	0	В	этой	201	2	0	В
менее	170	0	0	В	функции	220	1	0	В
загадочной	181	1	0	В	играют	187	2	0	В
Находясь	192	1	0	В	как	145	2	0	В
в	111	55	0	В	прогресс	190	1	0	В
неразрывной	130	1	0	В	общества	171	1	0	В
связи	112	7	0	В	так	120	1	0	В
с	151	1	0	В	и	111	0	0	В
мозгом	220	1	1	В	социально-исторический	290	4	1	Н
психика	270	3	2	Н	опыт	220	14	0	В
человека	219	3	0	В	человечества	237	1	0	В

Таблица 8. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Мозг	241	1	1	В	начинается	156	2	0	В
есть	221	2	0	В	с	141	2	0	В
материальная	170	1	0	В	ощущений	117	2	0	В
структура	141	2	0	В	которые	241	1	0	В
на	176	2	0	В	трансформируются	267	10	3	Н
которой	181	2	0	В	в	244	1	0	В
среда	370	1	0	В	энергию	231	1	0	В
и	179	1	0	В	нервных	221	11	0	В
общественная	201	1	0	В	импульсов	249	1	0	В
жизнь	221	11	0	В	и	141	2	0	В
пишут	198	1	0	В	воспринимаются	241	2	0	В
историю	230	2	1	В	мозгом	230	2	0	В
личности	201	2	0	В	как	170	1	0	В
и	220	3	0	В	интегративный	390	5	2	Н
человечества	187	1	0	В	афферентный	410	1	2	Н
Опираясь	145	4	0	В	сигнал	115	2	0	В
на	190	1	0	В	на	120	1	0	В
нее	171	1	0	В	который	131	2	0	В
человек	120	1	0	В	следует	154	1	0	В
приобретает	111	1	0	В	адекватный	191	2	1	В
индивидуальный	290	2	1	В	ответ	201	2	1	В
опыт	220	2	0	В	через	200	2	0	В
Процесс	237	2	0	В	двигательную	203	1	0	В

Таблица 9. Показатели чтения испытуемого для ИБ4 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Нервная	265	1	0	В	и	154	2	0	В

система	251	1	0	В	объединение	171	1	0	В
выполняет	214	2	0	В	органов	201	3	1	В
две	220	1	0	В	и	114	1	0	В
функции	271	2	1	Н	систем	160	2	0	В
взаимодействие	213	1	0	В	в	136	3	0	В
с	211	1	0	В	единое	201	1	1	В
внешней	179	1	0	В	целое	211	2	0	В
средой	161	2	0	В					

Таблица 10. Показатели чтения испытуемого для ИБ5 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Знакомство	265	1	0	В	взаимодействие	171	2	1	В
с	251	2	0	В	между	201	3	2	В
мозгом	214	1	0	В	которыми	114	2	1	В
начинается	220	1	0	В	обеспечивает	160	1	2	В
с	271	1	0	В	его	136	1	1	В
изучения	213	2	0	В	структурно-функциональную	310	2	9	Н
нейронов	211	2	0	В	организацию	219	1	1	В
и	219	1	0	В					
глии	277	7	1	Н					

Таблица 11. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	43	45	60	0,8
2	22	20	43	0,5
3	21	21	47	0,5
4	7	11	17	0,7
5	6	12	16	0,8

Таблица 12. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB (сек.)	CountSymb	Vr (сим./мин)	Tipe_id
1	1	43	500	698	1
2	0	22	347	946	1
3	1	21	379	1083	1
4	0	7	119	1020	1
5	2	6	148	1480	2

Испытуемый №1. Перов Д.М. Текст №2. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студента Перова Д.М. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 2 представлены в табл. 13- табл. 19.

Таблица 13. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Знаменитая	214	1	0	В	полотне	271	1	1	Н
картина	170	0	0	В	живописец	165	2	0	В
Карла	165	1	0	В	запечатлел	211	2	0	В
Брюллова	211	2	0	В	гибель	244	1	0	В
Последний	244	3	0	В	города	231	3	0	В
день	211	1	0	В	Помпеи	271	55	1	В
Помпеи	271	2	0	В	вследствие	177	2	0	В
была	151	1	0	В	извержения	287	1	0	В
написана	177	1	0	В	вулкана	241	3	0	В

в	214	2	0	B	Везувий	277	11	1	H
1830-1833	343	1	0	B	в	211	1	0	B
гг	211	2	0	B	79	191	3	0	B
На	156	3	0	B	году	181	1	0	B
этом	114	1	0	B	н.э.	170	1	0	B
эпическом	311	3	3	H					

Таблица 14. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Брюллов	241	3	1	B	от	171	1	0	B
изображает	267	1	0	B	горящей	165	2	1	B
поистине	244	2	0	B	лавы	211	55	0	B
адскую	231	2	0	B	озаряют	244	1	0	B
картину	221	14	0	B	красноватым	231	2	0	B
Вдалеке	249	12	0	B	заревом	171	3	0	B
пылает	141	1	1	B	заднюю	177	3	0	B
вулкан	241	2	1	B	часть	287	2	0	B
из	230	2	0	B	полотна	241	4	0	B
недр	170	3	0	B	Вспышка	277	1	0	B
которого	190	1	1	B	молнии	211	2	0	B
во	410	2	1	B	рассекающая	191	3	0	B
все	115	2	0	B	облако	181	1	0	B
стороны	120	1	1	B	пепла	170	2	0	B
растекаются	131	1	0	B	и	165	1	0	B
ручьи	154	1	1	B	гари	211	2	1	B
огненной	191	1	1	B	освещает	244	3	0	B
лавы	201	1	2	B	переднюю	211	1	0	B
Отблески	200	2	1	B	часть	271	2	0	B
пламени	203	3	2	B	картины	151	1	0	B

Таблица 15. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
В	171	3	0	B	обращает	165	2	0	B
своей	165	1	0	B	живописец	211	2	0	B
картине	211	2	0	B	на	221	3	0	B
Брюллов	251	1	0	B	воздушное	244	2	0	B
использует	231	2	1	B	перспективу	271	3	3	H
смелую	221	1	0	B	ему	221	1	0	B
для	177	2	0	B	удается	191	1	0	B
своего	217	1	0	B	создать	189	1	0	B
времени	241	1	0	B	ощущение	191	1	0	B
цветовую	251	1	0	B	глубокого	210	1	0	B
гамму	211	2	0	B	пространства	211	1	0	B
Самое	191	2	0	B					
пристальное	181	1	0	B					
внимание	170	1	0	B					

Таблица 16. Показатели чтения испытуемого для ИБ4 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Перед	241	2	0	B	Вот	165	2	0	B
нами	267	1	0	B	сыновья	211	2	0	B
целое	244	2	0	B	на	221	1	0	B
море	231	3	0	B	своих	244	2	0	B
людских	221	1	0	B	плечах	271	13	0	B

214

страданий	249	2	1	В	пытаются	221	3	0	В
В	141	1	0	В	унести	191	1	0	В
час	241	3	0	В	слабого	189	3	0	В
настоящей	230	1	0	В	старика-отца	191	1	0	В
трагедии	170	3	0	В	подальше	210	2	0	В
обнажаются	190	2	0	В	от	211	2	0	В
человеческие	265	1	1	Н	опасности	217	2	0	В
души	115	1	0	В	Молодой	220	2	1	В
Вот	120	2	0	В	юноша	231	3	0	В
мужчина	131	2	0	В	уговаривает	241	31	0	В
защищающий	165	1	0	В	упавшую	267	1	0	В
своих	211	1	0	В	мать	244	2	0	В
близких	221	2	0	В	собраться	231	1	0	В
отчаянно	244	1	0	В	с	221	2	0	В
поднял	271	2	0	В	силами	249	2	0	В
руку	221	1	0	В	и	141	1	0	В
словно	191	1	1	В	бежать	241	1	0	В
пытаясь	189	1	1	В	В	230	2	0	В
остановить	191	1	0	В	центре	170	1	1	В
стихию	210	1	0	В	картины	190	3	0	В
Мать	211	2	0	В	погибшая	410	1	0	В
страстно	211	1	0	В	женщина	115	4	0	В
обняв	244	3	0	В	и	120	1	0	В
своих	211	1	0	В	младенец	131	2	0	В
детей	271	1	0	В	тянущийся	271	1	2	Н
с	151	1	0	В	к	171	2	0	В
мольбой	266	2	1	Н	безжизненному	241	1	0	В
о	170	2	0	В	телу	220	1	0	В
пощаде	177	2	0	В	матери	179	1	0	В
глядит	181	1	0	В					
на	151	2	0	В					
небо	166	1	0	В					

Таблица 17. Показатели чтения испытуемого для ИБ5 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Картина	210	3	0	В	человек	230	2	1	В
Последний	211	31	0	В	Его	170	2	0	В
день	211	1	0	В	физическую	190	1	0	В
Помпеи	254	2	0	В	красоту	210	2	0	В
напоминает	267	1	0	В	и	115	13	0	В
зрителю	221	2	0	В	духовное	223	3	0	В
о	151	2	0	В	величие	258	1	0	В
том	216	1	0	В	художник	251	3	0	В
что	170	1	0	В	противопоставляет	277	1	2	Н
основная	177	2	0	В	разрушительным	291	2	2	Н
ценность	181	1	1	В	силам	261	2	0	В
мира	156	3		В	природы	171	2	0	В

Таблица 18. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	14	23	30	0,8
2	15	26	41	0,7
3	6	20	25	0,8
4	18	55	71	0,8

215

5	6	16	24	0,7

Таблица 19. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	0	14	208	891	1
2	0	15	297	1188	1
3	0	10	203	1218	1
4	0	24	500	1250	1
5	0	10	188	1128	1

Испытуемый №1. Перов Д.М. Текст №3. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студента Перова Д.М. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 2 представлены в табл. 20- табл. 24.

Таблица 20. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Восприятие	253	2	1	H	нервной	171	3	1	B
иерархичности	266	2	1	H	клетки	165	1	1	B
понятий	255	1	1	H	(нейрона)	211	2	1	B
объясняется	244	2	0	B	о	251	1	0	B
биологическими	271	13	0	B	функциональном	231	2	0	B
принципами	221	3	0	B	предназначении	221	1	0	B
которые	191	1	0	B	каждой	177	2	0	B
лежат	189	3	0	B	из	217	1	0	B
в	191	1	0	B	областей	241	1	0	B
основе	210	2	0	B	мозга	251	1	0	B
работы	211	2	0	B	о	211	2	0	B
человеческого	217	2	0	B	пользе	191	2	0	B
мозга	220	3	0	B	или	181	2	0	B
и	165	1	0	B	вреде	170	2	0	B
центральной	211	2	0	B	отдельных	241	3	1	B
нервной	221	1	0	B	веществ	267	2	0	B
системы	244	2	0	B	для	244	3	1	B
Медицина	239	1	0	B	высокоуровневой	295	1	2	H
при	221	2	0	B	нервной	311	1	2	H
помощи	191	1	0	B	деятельности	219	1	0	B
специальных	189	1	0	B	Однако	141	1	0	B
красящих	191	1	0	B	даже	241	1	0	B
веществ	210	2	0	B	эти	230	1	0	B
и	211	2	0	B	сведения	170	0	0	B
электронных	271	1	3	H	нельзя	190	0	0	B
микроскопов	244	2	1	B	считать	110	3	0	B
особой	211	3	0	B	полными	115	1	0	B
мощности	221	1	0	B	и	120	1	1	B
в	249	2	0	B	неопровержимыми	265	1	1	H
настоящее	141	1	0	B	наука	211	2	0	B
время	241	3	0	B	признаёт	244	3	1	B
располагает	230	1	0	B	что	231	1	0	B
информацией	170	3	1	B	не	171	2	0	B
о	190	2	0	B	в	177	1	0	B
строении	410	1	0	B	состоянии	287	3	0	B
отдельной	115	1	0	B	на	241	1	0	B

каких	120	1	0	В	данный	277	3	0	В
принципах	131	2	0	В	момент	211	2	0	В
строятся	271	1	0	В	ответить	191	1	0	В
сны	171	2	0	В	на	181	4	0	В
или	266	1	0	В	часть	165	2	0	В
галлюцинации	170	1	0	В	вопросов	211	2	0	В
человека	177	1	1	В	касающихся	221	1	0	В
как	181	1	0	В	мышления	257	0	0	В
распределяется	151	1	1	В	и	271	4	0	В
по	166	2	0	В	нервной	221	1	0	В
мозгу	267	1	0	В	деятельности	191	2	0	В
хранимый	244	3	0	В	Понимание	189	1	0	В
в	231	1	0	В	того	191	2	0	В
памяти	221	4	1	В	на	210	2	0	В
опыт	249	2	0	В	вмешивается	211	1	0	В
как	141	6	0	В	в	244	1	0	В
Переключение	241	3	0	В	процесс	271	2	0	В
эмоций	211	2	0	В	запоминания	221	1	0	В
присутствует	221	1	1	В	у	191	1	0	В
частично	179	7	1	В	учёных	189	0	0	В

Таблица 21. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
На	171	2	0	В	для	241	2	0	В
данный	165	2	0	В	запуска	267	2	0	В
момент	211	1	0	В	всей	244	1	0	В
точно	251	1	0	В	нервной	231	1	0	В
установлено	231	2	0	В	системы	221	2	0	В
что	221	1	0	В	или	249	1	0	В
нервная	177	2	0	В	системы	141	2	0	В
клетка	217	1	1	В	кровообращения	255	1	2	Н
является	241	1	0	В	нужно	230	1	0	В
основой	251	1	0	В	не	170	1	0	В
нервной	211	1	1	В	просто	190	1	0	В
деятельности	165	1	0	В	располагать	410	1	0	В
точно	211	2	0	В	большим	287	2	0	В
также	221	1	0	В	количеством	241	1	0	В
как	244	3	0	В	этих	277	3	0	В
клетка	271	2	1	Н	клеток	211	3	1	В
из	221	1	1	В	но	191	1	0	В
кровеносной	291	3	2	Н	и	181	1	0	В
системы	189	1	0	В	найти	170	1	0	В
служит	191	4	0	В	между	165	2	0	В
основой	210	1	0	В	ними	211	2	0	В
для	211	2	0	В	определённые	211	2	0	В
механизма	265	1	1	Н	связи	221	1	0	В
кровообращения	311	2	1	Н	Таким	244	2	0	В
Одного	190	1	0	В	образом	271	2	0	В
нейрона	210	2	0	В	в	221	1	0	В
и	115	1	0	В	работе	191	2	0	В
одного	120	2	0	В	интеллекта	189	3	1	В
лейкоцита	260	3	1	Н	прослеживается	191	1	1	В
будет	154	1	1	В	принцип	210	2	1	В
недостаточно	178	2	1	В	системности	271	1	0	В

Таблица 22. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
За	211	1	1	В	клетка	271	1	0	В
связи	221	3	1	В	умеет	221	2	0	В
между	244	1	1	В	получать	244	1	0	В
клетками	241	2	1	В	этот	271	2	0	В
мозга	221	1	1	В	импульс	255	2	0	В
отвечают	191	2	0	В	и	191	1	0	В
особые	189	1	0	В	отправлять	189	1	0	В
волокна	291	2	1	Н	собственный	191	2	0	В
синапсы	310	1	2	Н	переходя	210	1	0	В
способные	211	1	0	В	при	211	3	0	В
на	141	1	0	В	необходимости	217	1	0	В
передачу	241	1	0	В	в	241	1	0	В
импульса	250	1	2	Н	возбуждённое	131	3	1	В
Соответственно	170	1	0	В	состояние	271	1	1	В
нервная	241	1	0	В					

Таблица 23. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	39	68	114	0,6
2	26	43	62	0,7
3	18	20	29	0,7

Таблица 24. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	2	39	884	1360	2
2	0	26	473	1092	1
3	0	18	233	777	1

Результаты эксперимента по отслеживанию показателей процесса чтения участника №1 Перова Д.М.

В процессе чтения у испытуемого возникли проблемы с пониманием некоторых семантически-значимых единиц, которые были определены на основе показателя узнаваемости слова. Для наглядности, СЗЕ, которые показались читателю трудными или не узнаваемыми, выделены на таблицах 6-10 по тексту №1, в таблицах 12-17 по тексту №2, в таблицах 20-22 по тексту №3. Как было сказано ранее, студентам было предложено после прочтения отметить на листке с распечатанным текстовым материалом (тексты №1, №2, №3). При сравнении результатов было отмечено, что участники эксперимента указали те понятия в тексте, которые система определила, как «невоспринятые» чтецом. Результаты опроса среди учатников находятся в приложении 1.

2) Испытуемый №2. Рыбин Е.В. Текст №1. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студента Рыбина Е.В. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 1 представлены в табл. 25-табл.31.

Таблица 25. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
В	191	2	1	В	синаптической	265	2	2	Н
основу	201	1	1	В	связи	211	1	0	В
нейробиологии	271	3	2	Н	и	221	2	0	В
легло	178	1	0	В	организации	244	3	0	В
исследование	249	1	1	В	нервных	271	1	0	В
мозга	141	1	1	В	сетей	221	2	0	В
как	241	2	0	В	с	191	1	0	В

междисциплинарной	265	2	0	B	целью	189	3	0	B
проблемы	170	2	0	B	познания	191	1	0	B
Основные	190	1	0	B	высших	210	3	1	B
представления	410	2	0	B	психических	211	2	1	B
о	115	2	0	B	функций	217	1	1	B
структуре	120	1	0	B	таких	220	1	0	B
функциях	131	1	0	B	как	249	2	0	B
молекулярных	255	2	1	H	память	260	2	0	B
и	211	1	0	B	сознание	267	1	0	B
клеточных	244	3	1	B	и	230	2	0	B
основах	231	1	0	B	мышление	255	10	0	B
деятельности	171	4	1	B	с	190	3	0	B
мозга	177	1	0	B	которыми	410	1	0	B
сформированы	287	2	0	B	связаны	115	3	0	B
еще	241	1	0	B	обучение	120	1	0	B
в	277	2	0	B	поведение	131	2	1	B
XX	211	1	0	B	и	271	4	1	B
веке	191	1	0	B	деятельность	171	4	1	B
Интеграция	271	1	0	B	человека	241	1	1	B
научных	170	2	0	B					
дисциплин	165	2	1	B					
совершалась	211	1	0	B					
вокруг	244	1	0	B					
исследований	211	2	1	B					
строения	271	1	1	H					
нейрона	151	2	1	B					
механизмов	251	3	0	B					

Таблица 26. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Несмотря	191	2	0	B	может	144	2	0	B
на	210	2	0	B	быть	191	1	0	B
достигнутые	211	1	0	B	объяснена	221	2	0	B
успехи	211	1	0	B	только	191	1	0	B
сущность	244	2	0	B	нейрофизиологическими	310	5	2	H
психической	211	1	1	B	процессами	231	1	1	B
деятельности	202	3	1	B	Важную	210	1	0	B
от	151	1	0	B	роль	211	1	0	B
этого	150	4	0	B	в	211	3	0	B
не	141	1	0	B	реализации	244	1	0	B
стала	145	2	0	B	этой	211	4	0	B
менее	181	1	0	B	функции	271	1	0	B
загадочной	151	2	0	B	играют	151	2	0	B
Находясь	166	2	0	B	как	210	1	0	B
в	120	1	0	B	прогресс	170	2	0	B
неразрывной	131	2	0	B	общества	177	1	1	B
связи	201	1	0	B	так	181	1	0	B
с	171	1	0	B	и	151	1	0	B
мозгом	231	1	1	B	социально-исторический	166	4	0	B
психика	220	1	0	B	опыт	271	1	0	B
человека	179	1	0	B	человечества	220	2	1	B

Таблица 27. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Мозг	214	2	1	B	начинается	214	2	0	B
есть	170	1	1	B	с	170	2	0	B
материальная	165	2	1	B	ощущений	165	1	0	B
структура	211	3	1	B	которые	211	3	0	B
на	244	1	0	B	трансформируются	244	55	1	B
которой	211	2	0	B	в	211	2	0	B
среда	271	1	0	B	энергию	271	3	0	B
и	151	3	0	B	нервных	151	1	0	B
общественная	177	1	0	B	импульсов	177	4	0	B
жизнь	214	3	0	B	и	151	2	0	B
пишут	343	2	0	B	воспринимаются	243	2	0	B
историю	211	1	0	B	мозгом	200	1	1	B
личности	156	1	1	B	как	178	3	0	B
и	114	3	0	B	интегративный	310	11	2	H
человечества	311	1	0	B	афферентный	350	1	2	H
Опираясь	287	3	0	B	сигнал	211	3	2	H
на	241	1	0	B	на	244	1	0	B
нее	277	2	0	B	который	214	2	0	B
человек	211	2	0	B	следует	211	1	0	B
приобретает	191	2	0	B	адекватный	151	1	0	B
индивидуальный	181	2	1	B	ответ	177	2	0	B
опыт	170	2	1	B	через	214	1	0	B
Процесс	210	1	0	B	двигательную	241	2	1	B

Таблица 28. Показатели чтения испытуемого для ИБ4 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Нервная	221	1	0	B	и	165	2	0	B
система	260	2	0	B	объединение	211	3	1	B
выполняет	141	2	0	B	органов	230	3	1	B
две	187	3	0	B	и	150	2	0	B
функции	230	1	1	B	систем	171	4	1	B
взаимодействие	170	2	0	B	в	144	1	0	B
с	190	2	0	B	единое	201	2	0	B
внешней	199	1	0	B	целое	241	3	0	B
средой	115	3	0	B					

Таблица 29. Показатели чтения испытуемого для ИБ5 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Знакомство	244	2	0	B	взаимодействие	241	2	0	B
с	231	3	0	B	между	230	3	0	B
мозгом	221	3	0	B	которыми	170	3	0	B
начинается	200	2	0	B	обеспечивает	190	2	0	B
с	141	4	0	B	его	171	4	0	B
изучения	241	1	0	B	структурно-функциональную	310	3	0	B
нейронов	230	1	1	B	организацию	250	5	0	B
и	170	2	0	B					
глии	260	2	2	B					

Таблица 30. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt

1	27	48	60	0,8
2	16	22	43	0,5
3	12	19	47	0,4
4	7	12	17	0,7
5	3	8	16	0,5

Таблица 31. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	0	27	500	1111	1
2	2	16	347	1301	2
3	2	12	379	1895	2
4	0	7	119	1020	1
5	2	3	148	2960	2

Испытуемый №2. Рыбин Е.В. Текст №2. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студента Рыбина Е.В. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 2 представлены в табл. 32- табл. 38

Таблица 32. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Знаменитая	241	3	0	B	полотне	211	1	0	B
картина	267	1	0	B	живописец	244	2	0	B
Карла	244	2	0	B	запечатлел	231	3	0	B
Брюллова	270	2	1	H	гибель	171	3	0	B
Последний	221	1	0	B	города	177	2	0	B
день	249	2	0	B	Помпеи	217	4	1	B
Помпеи	141	1	1	B	вследствие	241	1	0	B
была	241	2	0	B	извержения	277	2	0	B
написана	230	2	0	B	вулкана	211	3	0	B
в	170	3	0	B	Везувий	191	1	1	B
1830-1833	190	1	1	B	в	150	2	0	B
гг	410	2	0	B	79	187	1	0	B
На	115	2	0	B	году	153	2	0	B
этом	120	1	0	B	н.э.	144	1	0	B
эпическом	220	1	1						

Таблица 33. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Брюллов	255	3	0	B	от	165	1	0	B
изображает	165	1	0	B	горящей	211	2	0	B
поистине	211	2	0	B	лавы	244	55	1	B
адскую	251	2	0	B	озаряют	231	1	0	B
картину	231	14	0	B	красноватым	171	2	0	B
Вдалеке	221	12	1	B	заревом	177	3	0	B
пылает	177	1	0	B	заднюю	201	3	0	B
вулкан	217	2	0	B	часть	241	2	0	B
из	241	2	0	B	полотна	244	4	0	B
недр	251	3	0	B	Вспышка	211	1	0	B
которого	211	1	0	B	молнии	191	2	0	B
во	191	2	0	B	рассекающая	181	3	0	B
все	181	2	0	B	облако	170	1	0	B
стороны	221	1	1	B	пепла	165	2	1	B
растекаются	244	1	0	B	и	244	1	0	B
ручьи	233	1	0	B	гари	231	2	0	B
огненной	221	3	0	B	освещает	221	1	0	B

221

лавы	191	1	0	B	переднюю	249	2	0	B
Отблески	189	2	0	B	часть	141	5	0	B
пламени	191	2	0	B	картины	241	1	1	B

Таблица 34. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
В	165	3	0	B	обращает	231	3	0	B
своей	211	1	0	B	живописец	221	1	1	B
картине	244	2	0	B	на	177	2	0	B
Брюллов	231	2	1	B	воздушное	141	2	0	B
использует	171	14	1	B	перспективу	256	4	2	H
смелую	177	11	0	B	ему	230	2	0	B
для	200	1	0	B	удается	170	1	0	B
своего	241	2	0	B	создать	190	2	0	B
времени	217	2	1	B	ощущение	231	2	0	B
цветовую	211	3	0	B	глубокого	270	3	1	H
гамму	191	1	1	B	пространства	255	1	1	H
Самое	181	2	0	B					
пристальное	170	3	0	B					
внимание	165	1	0	B					

Таблица 35. Показатели чтения испытуемого для ИБ4 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Перед	241	2	0	B	Вот	165	2	0	B
нами	267	1	0	B	сыновья	211	1	0	B
целое	244	2	0	B	на	221	2	0	B
море	231	3	0	B	своих	244	3	0	B
людских	221	1	0	B	плечах	271	1	0	B
страданий	249	2	1	B	пытаются	221	2	1	B
В	141	1	0	B	унести	191	1	0	B
час	241	3	0	B	слабого	189	3	0	B
настоящей	230	1	0	B	старика-отца	191	1	0	B
трагедии	170	3	0	B	подальше	210	3	0	B
обнажаются	190	2	0	B	от	211	2	0	B
человеческие	225	1	1	B	опасности	217	1	1	B
души	115	1	0	B	Молодой	220	1	0	B
Вот	120	2	0	B	юноша	231	2	0	B
мужчина	131	2	0	B	уговаривает	241	2	0	B
защищающий	165	1	0	B	упавшую	267	1	0	B
своих	211	1	0	B	мать	244	1	0	B
близких	221	2	0	B	собраться	231	2	0	B
отчаянно	244	1	0	B	с	221	1	0	B
поднял	271	2	0	B	силами	249	2	0	B
руку	221	1	0	B	и	141	1	0	B
словно	191	1	1	B	бежать	241	1	1	B
пытаясь	189	1	1	B	В	230	1	1	B
остановить	191	1	0	B	центре	170	1	0	B
стихию	210	1	0	B	картины	190	1	0	B
Мать	211	2	0	B	погибшая	110	2	0	B
страстно	211	1	0	B	женщина	115	1	0	B
обняв	244	3	0	B	и	120	3	0	B
своих	211	1	0	B	младенец	131	1	0	B

детей	271	1	0	B	тянущийся	271	1	0	B
с	151	1	0	B	к	171	1	0	B
мольбой	266	2	0	B	безжизненному	241	2	1	B
о	170	2	0	B	телу	220	2	0	B
пощаде	177	2	0	B	матери	179	2	0	B
глядит	181	1	0	B					
на	151	2	0	B					
небо	166	1	0	B					

Таблица 36. Показатели чтения испытуемого для ИБ5 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Картина	171	3	0	B	человек	165	3	0	B
Последний	165	1	0	B	Его	211	1	0	B
день	211	2	0	B	физическую	221	2	0	B
Помпеи	251	1	0	B	красоту	244	1	0	B
напоминает	231	2	1	B	и	271	2	1	B
зрителю	221	1	0	B	духовное	221	1	0	B
о	177	2	0	B	величие	191	2	0	B
том	217	1	0	B	художник	189	1	0	B
что	241	1	0	B	противопоставляет	191	1	0	B
основная	211	1	0	B	разрушительным	210	1	0	B
ценность	211	2	0	B	силам	211	2	0	B
мира	191	2	0	B	природы	165	2	0	B

Таблица 37. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	11	21	30	0,7
2	11	25	41	0,6
3	8	13	25	0,5
4	17	50	71	0,7
5	10	22	24	0,9

Таблица 38. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	0	11	208	1135	1
2	2	11	297	1620	2
3	3	8	203	1523	2
4	2	17	500	1765	2
5	0	10	188	1128	1

Испытуемый №2. Рыбин Е.В. Текст №3. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студента Рыбина Е.В. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 3 представлены в табл. 39- табл. 43

Таблица 39. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Восприятие	165	2	1	B	нервной	241	2	0	B
иерархичности	260	1	2	H	клетки	267	13	0	B
понятий	221	2	1	B	(нейрона)	244	3	0	B
объясняется	244	3	1	B	о	231	1	0	B
биологическими	211	1	1	B	функциональном	221	3	0	B
принципами	221	2	1	B	предназначении	249	1	1	B
которые	191	1	0	B	каждой	141	2	0	B

лежат	189	3	0	B	из	241	2	0	B
в	191	1	0	B	областей	230	2	0	B
основе	210	3	0	B	мозга	170	2	0	B
работы	211	2	0	B	о	190	3	0	B
человеческого	217	1	1	B	пользе	165	31	1	B
мозга	220	1	0	B	или	115	1	0	B
и	231	2	0	B	вреде	120	2	0	B
центральной	241	2	0	B	отдельных	131	1	0	B
нервной	267	1	0	B	веществ	165	2	0	B
системы	244	1	0	B	для	211	2	0	B
Медицина	231	2	1	B	высокоуровневой	221	1	1	B
при	221	1	0	B	нервной	244	1	0	B
помощи	249	2	0	B	деятельности	211	2	0	B
специальных	141	1	0	B	Однако	221	1	0	B
красящих	277	1	1	H	даже	191	3	0	B
веществ	248	1	1	H	эти	189	1	0	B
и	170	1	1	B	сведения	191	4	1	B
электронных	190	1	0	B	нельзя	210	1	0	B
микроскопов	310	2	0	B	считать	211	2	0	B
особой	115	1	0	B	полными	211	1	0	B
мощности	120	3	0	B	и	144	2	0	B
в	131	1	0	B	неопровержимыми	277	1	2	H
настоящее	271	1	0	B	наука	271	1	0	B
время	171	1	0	B	признаёт	151	1	0	B
располагает	241	2	1	B	что	166	2	1	B
информацией	220	2	0	B	не	170	1	0	B
о	179	2	0	B	в	177	3	0	B
строении	165	1	0	B	состоянии	181	1	0	B
отдельной	211	2	0	B	на	151	3	0	B
каких	221	1	0	B	данный	166	1	0	B
принципах	244	2	1	B	момент	241	2	1	B
строятся	271	1	0	B	ответить	267	2	0	B
сны	221	2	0	B	на	244	2	0	B
или	191	3	0	B	часть	231	2	0	B
галлюцинации	189	1	0	B	вопросов	221	3	0	B
человека	191	2	0	B	касающихся	249	31	0	B
как	210	1	1	B	мышления	141	1	1	B
распределяется	211	3	0	B	и	141	2	0	B
по	217	1	0	B	нервной	230	1	0	B
мозгу	220	3	0	B	деятельности	170	2	0	B
хранимый	231	2	1	B	Понимание	190	2	0	B
в	241	1	0	B	того	265	1	0	B
памяти	267	1	0	B	на	115	1	1	B
опыт	244	2	0	B	вмешивается	120	2	0	B
как	231	2	0	B	в	131	1	0	B
Переключение	221	1	0	B	процесс	165	3	0	B
эмоций	249	1	0	B	запоминания	211	1	0	B
присутствует	141	2	0	B	у	221	4	0	B
частично	241	1	1	B	учёных	244	1	1	B

Таблица 40. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc

На	211	2	1	В	для	241	3	1	В
данный	221	1	0	В	запуска	267	1	0	В
момент	244	2	0	В	всей	244	3	0	В
точно	271	3	0	В	нервной	231	1	0	В
установлено	221	1	0	В	системы	221	2	0	В
что	191	2	0	В	или	249	2	0	В
нервная	189	1	0	В	системы	141	2	0	В
клетка	191	3	0	В	кровообращения	241	2	0	В
является	210	1	1	В	нужно	230	3	1	В
основой	211	3	0	В	не	170	3	0	В
нервной	211	2	0	В	просто	190	1	0	В
деятельности	244	1	0	В	располагать	410	2	0	В
точно	211	1	0	В	большим	115	1	0	В
также	271	2	0	В	количеством	120	3	0	В
как	151	1	0	В	этих	131	1	0	В
клетка	266	2	0	В	клеток	271	3	0	В
из	170	3	1	В	но	171	1	1	В
кровеносной	177	1	0	В	и	241	2	0	В
системы	181	2	0	В	найти	220	2	0	В
служит	151	1	0	В	между	179	2	0	В
основой	166	3	0	В	ними	241	2	0	В
для	211	1	0	В	определённые	267	3	0	В
механизма	221	3	0	В	связи	244	1	0	В
кровообращения	244	2	0	В	Таким	231	1	0	В
Одного	271	1	1	В	образом	221	2	1	В
нейрона	221	1	0	В	в	249	1	0	В
и	191	2	0	В	работе	141	3	0	В
одного	189	1	0	В	интеллекта	241	1	0	В
лейкоцита	291	2	2	Н	прослеживается	230	3	1	В
будет	210	3	1	В	принцип	170	1	1	В
недостаточно	211	1	1	В	системности	290	2	2	Н

Таблица 41. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
За	191	2	0	В	клетка	141	2	0	В
связи	189	1	0	В	умеет	241	1	0	В
между	191	1	0	В	получать	230	1	0	В
клетками	210	2	0	В	этот	170	2	0	В
мозга	211	1	1	В	импульс	190	1	0	В
отвечают	211	2	0	В	и	410	2	0	В
особые	204	1	0	В	отправлять	115	1	0	В
волокна	211	1	1	В	собственный	120	3	1	В
синапсы	271	1	0	В	переходя	131	3	1	В
способные	151	1	0	В	при	271	1	0	В
на	166	1	0	В	необходимости	141	1	0	В
передачу	191	2	0	В	в	141	2	0	В
импульса	189	2	0	В	возбуждённое	230	2	0	В
Соответственно	191	1	0	В	состояние	170	1	0	В
нервная	210	1	0	В					

Таблица 42. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	29	80	114	0,7
2	17	12	62	0,2

3	12	23	29	0,8

Таблица 43. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	2	29	884	1829	2
2	2	17	473	1669	2
3	1	12	233	1165	1

Результаты эксперимента по отслеживанию показателей процесса чтения участника №2 Рыбина Е.В.

В процессе чтения у испытуемого возникли проблемы с пониманием некоторых семантически-значимых единиц, которые были определены на основе показателя узнаваемости слова. Для наглядности, СЗЕ, которые показались читателю трудными или не узнаваемыми, выделены на таблицах 25-29 по тексту №1, в таблицах 32-36 по тексту №2, в таблицах 39- 41 по тексту №3. Как было сказано ранее, студентам было предложено после прочтения отметить на листке с распечатанным текстовым материалом (тексты №1, №2, №3). При сравнении результатов было отмечено, что участники эксперимента указали те понятия в тексте, которые система определила, как «невоспринятые» чтецом. Результаты опроса среди учатников находятся в приложении 1.

3) Испытуемый №3. Колина О.С. Текст №1. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студентки Колиной О.С. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 1 представлены в табл. 44-табл.50

Таблица 44. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
В	191	2	1	В	синаптической	275	2	3	Н
основу	201	1	1	В	связи	211	1	0	В
нейробиологии	271	3	2	Н	и	221	2	0	В
легло	178	1	0	В	организации	244	3	0	В
исследование	249	1	1	В	нервных	271	1	0	В
мозга	141	1	1	В	сетей	221	2	0	В
как	241	2	0	В	с	191	1	0	В
междисциплинарной	265	2	0	В	целью	189	3	0	В
проблемы	170	2	0	В	познания	191	1	0	В
Основные	190	1	0	В	высших	310	1	1	Н
представления	410	2	0	В	психических	320	1	2	Н
о	115	2	0	В	функций	217	1	1	В
структуре	120	1	0	В	таких	220	1	0	В
функциях	131	1	0	В	как	249	2	0	В
молекулярных	255	2	1	Н	память	260	2	0	В
и	211	1	0	В	сознание	267	1	0	В
клеточных	244	3	1	В	и	230	2	0	В
основах	231	1	0	В	мышление	255	10	0	В
деятельности	171	4	1	В	с	190	3	0	В
мозга	177	1	0	В	которыми	410	1	0	В
сформированы	287	2	0	В	связаны	115	3	0	В
еще	241	1	0	В	обучение	120	1	0	В
в	277	2	0	В	поведение	131	2	1	В
XX	211	1	0	В	и	271	4	1	В
веке	191	1	0	В	деятельность	171	4	1	В
Интеграция	271	1	2	Н	человека	241	1	1	В
научных	170	2	0	В					
дисциплин	165	2	1	В					
совершалась	211	1	0	В					
вокруг	244	1	0	В					

исследований	211	2	1	B					
строения	271	1	1	H					
нейрона	151	2	1	B					
механизмов	251	3	0	B					

Таблица 45. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Несмотря	191	2	0	B	может	144	2	0	B
на	210	2	0	B	быть	191	1	0	B
достигнутые	211	1	0	B	объяснена	221	2	0	B
успехи	211	1	0	B	только	191	1	0	B
сущность	244	2	0	B	нейрофизиологическими	310	5	2	H
психической	211	1	1	B	процессами	231	1	1	B
деятельности	202	3	1	B	Важную	210	1	0	B
от	151	1	0	B	роль	211	1	0	B
этого	150	4	0	B	в	211	3	0	B
не	141	1	0	B	реализации	244	1	0	B
стала	145	2	0	B	этой	211	4	0	B
менее	181	1	0	B	функции	271	1	0	B
загадочной	151	2	0	B	играют	151	2	0	B
Находясь	166	2	0	B	как	210	1	0	B
в	120	1	0	B	прогресс	170	2	0	B
неразрывной	131	2	0	B	общества	177	1	1	B
связи	201	1	0	B	так	181	1	0	B
с	171	1	0	B	и	151	1	0	B
мозгом	231	1	1	B	социально-исторический	166	4	0	B
психика	220	1	0	B	опыт	271	1	0	B
человека	179	1	0	B	человечества	220	2	1	B

Таблица 46. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Мозг	214	2	1	B	начинается	214	2	0	B
есть	170	1	1	B	с	170	2	0	B
материальная	165	2	1	B	ощущений	165	1	0	B
структура	211	3	1	B	которые	211	3	0	B
на	244	1	0	B	трансформируются	244	55	1	B
которой	211	2	0	B	в	211	2	0	B
среда	271	1	0	B	энергию	271	3	0	B
и	151	3	0	B	нервных	151	1	0	B
общественная	177	1	0	B	импульсов	177	4	0	B
жизнь	214	3	0	B	и	151	2	0	B
пишут	343	2	0	B	воспринимаются	243	2	0	B
историю	211	1	0	B	мозгом	200	1	1	B
личности	156	1	1	B	как	178	3	0	B
и	114	3	0	B	интегративный	310	11	2	H
человечества	311	1	0	B	афферентный	350	1	2	H
Опираясь	287	3	0	B	сигнал	211	3	2	H
на	241	1	0	B	на	244	1	0	B
нее	277	2	0	B	который	214	2	0	B
человек	211	2	0	B	следует	211	1	0	B
приобретает	191	2	0	B	адекватный	151	1	0	B
индивидуальный	181	2	1	B	ответ	177	2	0	B

опыт	170	2	1	B	через	214	1	0	B

Таблица 47. Показатели чтения испытуемого для ИБ4 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Нервная	221	1	0	B	и	165	2	0	B
система	260	2	0	B	объединение	211	3	1	B
выполняет	141	2	0	B	органов	230	3	1	B
две	187	3	0	B	и	150	2	0	B
функции	230	1	1	B	систем	171	4	1	B
взаимодействие	170	2	0	B	в	144	1	0	B
с	190	2	0	B	единое	201	2	0	B
внешней	199	1	0	B	целое	241	3	0	B
средой	115	3	0	B					

Таблица 48. Показатели чтения испытуемого для ИБ5 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Знакомство	244	2	0	B	взаимодействие	241	2	0	B
с	231	3	0	B	между	230	3	0	B
мозгом	221	3	0	B	которыми	170	3	0	B
начинается	200	2	0	B	обеспечивает	190	2	0	B
с	141	4	0	B	его	171	4	0	B
изучения	241	1	0	B	структурно-функциональную	310	3	0	B
нейронов	230	1	1	B	организацию	250	5	0	B
и	170	2	0	B					
глии	260	2	2	B					

Таблица 49. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	42	48	60	0,8
2	22	30	43	0,7
3	17	19	47	0,4
4	7	14	17	0,8
5	8	10	16	0,6

Таблица 50. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	1	42	500	714	1
2	0	22	347	946	1
3	2	17	379	1338	2
4	0	7	119	1020	1
5	0	8	148	1110	1

Испытуемый №3. Колина О.С. Текст №2. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студентки Колиной О.С. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 2 представлены в табл. 51- табл. 55.

Таблица 51. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Знаменитая	234	1	0	B	полотне	271	1	1	H
картина	170	0	0	B	живописец	165	2	0	B
Карла	165	1	0	B	запечатлел	211	2	0	B
Брюллова	211	2	0	B	гибель	244	1	0	B
Последний	214	3	0	B	города	231	3	0	B
день	217	1	0	B	Помпеи	271	55	1	B
Помпеи	271	2	0	B	вследствие	177	2	0	B

была	157	1	0	В	извержения	287	1	0	В
написана	177	1	0	В	вулкана	241	3	0	В
в	114	2	0	В	Везувий	277	11	1	Н
1830-1833	343	1	0	В	в	211	1	0	В
гг	111	2	0	В	79	191	3	0	В
На	156	3	0	В	году	181	1	0	В
этом	114	1	0	В	н.э.	170	1	0	В
эпическом	311	3	0	Н					

Таблица 52. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Брюллов	241	3	1	В	от	171	1	0	В
изображает	267	1	0	В	горящей	165	2	1	В
поистине	244	2	0	В	лавы	211	55	0	В
адскую	231	2	0	В	озаряют	244	1	0	В
картину	221	14	0	В	красноватым	231	2	0	В
Вдалеке	249	12	0	В	заревом	171	3	0	В
пылает	141	1	1	В	заднюю	177	3	0	В
вулкан	241	2	1	В	часть	287	2	0	В
из	230	2	0	В	полотна	241	4	0	В
недр	170	3	0	В	Вспышка	277	1	0	В
которого	190	1	1	В	молнии	211	2	0	В
во	410	2	1	В	рассекающая	191	3	0	В
все	115	2	0	В	облако	181	1	0	В
стороны	120	1	1	В	пепла	170	2	0	В
растекаются	131	1	0	В	и	165	1	0	В
ручьи	154	1	1	В	гари	211	2	1	В
огненной	191	1	1	В	освещает	244	3	0	В
лавы	201	1	2	В	переднюю	211	1	0	В
Отблески	200	2	1	В	часть	271	2	0	В
пламени	203	3	2	В	картины	151	1	0	В

Таблица 53. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
В	161	3	0	В	обращает	165	2	0	В
своей	165	1	0	В	живописец	211	2	0	В
картине	211	2	0	В	на	221	3	0	В
Брюллов	251	1	0	В	воздушное	254	2	1	В
использует	231	2	1	В	перспективу	271	3	2	Н
смелую	221	1	0	В	ему	221	1	0	В
для	177	2	0	В	удается	191	1	0	В
своего	217	1	0	В	создать	189	1	0	В
времени	231	1	0	В	ощущение	191	1	0	В
цветовую	251	1	0	В	глубокого	210	1	0	В
гамму	211	2	0	В	пространства	211	1	0	В
Самое	191	2	0	В					
пристальное	181	1	0	В					
внимание	180	1	0	В					

Таблица 54. Показатели чтения испытуемого для ИБ4 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Перед	245	2	0	В	Вот	165	2	0	В
нами	257	1	0	В	сыновья	211	2	0	В
целое	244	2	0	В	на	221	1	0	В

море	230	3	0	B	своих	244	2	0	B
людских	221	1	0	B	плечах	271	13	0	B
страданий	249	2	1	B	пытаются	221	3	0	B
В	141	1	0	B	унести	191	1	0	B
час	241	3	0	B	слабого	189	3	0	B
настоящей	230	1	0	B	старика-отца	191	1	0	B
трагедии	170	3	0	B	подальше	210	2	0	B
обнажаются	190	2	0	B	от	211	2	0	B
человеческие	265	1	0	B	опасности	217	2	0	B
души	115	1	0	B	Молодой	220	2	1	B
Вот	120	2	0	B	юноша	231	3	0	B
мужчина	131	2	0	B	уговаривает	241	31	0	B
защищающий	165	1	0	B	упавшую	267	1	0	B
своих	211	1	0	B	мать	244	2	0	B
близких	221	2	0	B	собраться	231	1	0	B
отчаянно	244	1	0	B	с	221	2	0	B
поднял	217	2	0	B	силами	249	2	0	B
руку	221	1	0	B	и	141	1	0	B
словно	191	1	1	B	бежать	241	1	0	B
пытаясь	189	1	1	B	В	230	2	0	B
остановить	191	1	0	B	центре	170	1	1	B
стихию	210	1	0	B	картины	190	3	0	B
Мать	211	2	0	B	погибшая	410	1	0	B
страстно	211	1	0	B	женщина	115	4	0	B
обняв	244	3	0	B	и	120	1	0	B
своих	211	1	0	B	младенец	131	2	0	B
детей	271	1	0	B	тянущийся	211	1	2	B
с	151	1	0	B	к	171	2	0	B
мольбой	266	2	0	B	безжизненному	241	1	0	B
о	170	2	0	B	телу	220	1	0	B
пощаде	177	2	0	B	матери	179	1	0	B
глядит	181	1	0	B					
на	151	2	0	B					
небо	166	1	0	B					

Таблица 55. Показатели чтения испытуемого для ИБ5 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Картина	210	3	0	B	человек	230	2	1	B
Последний	211	31	0	B	Его	170	2	0	B
день	211	1	0	B	физическую	190	1	0	B
Помпеи	254	2	0	B	красоту	210	2	0	B
напоминает	267	1	0	B	и	115	13	0	B
зрителю	221	2	0	B	духовное	223	3	0	B
о	151	2	0	B	величие	258	1	0	B
том	216	1	0	B	художник	251	3	0	B
что	170	1	0	B	противопоставляет	217	1	1	B
основная	177	2	0	B	разрушительным	291	2	0	B
ценность	181	1	1	B	силам	261	2	0	B
мира	156	3		B	природы	171	2	0	B

Таблица 56. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	15	21	30	0,7
2	16	33	41	0,8

230

3	10	18	25	0,7
4	25	50	71	0,7
5	5	22	24	0,9

Таблица 57. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	1	15	208	832	1
2	1	16	297	1114	1
3	0	10	203	1218	1
4	1	25	500	1200	1
5	2	5	188	2256	2

Испытуемый №3. Колина О.С. Текст №3. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студента Колиной О.С. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 3 представлены в табл.58- табл. 62.

Таблица 58. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Восприятие	165	2	1	H	нервной	241	2	0	B
иерархичности	251	1	2	H	клетки	267	13	0	B
понятий	221	2	1	B	(нейрона)	244	3	0	B
объясняется	244	3	1	B	о	231	1	0	B
биологическими	211	1	1	B	функциональном	221	3	0	B
принципами	221	2	1	B	предназначении	249	1	1	B
которые	191	1	0	B	каждой	141	2	0	B
лежат	189	3	0	B	из	241	2	0	B
в	191	1	0	B	областей	230	2	0	B
основе	210	3	0	B	мозга	170	2	0	B
работы	211	2	0	B	о	190	3	0	B
человеческого	217	1	1	B	пользе	165	31	1	B
мозга	220	1	0	B	или	115	1	0	B
и	231	2	0	B	вреде	120	2	0	B
центральной	241	2	0	B	отдельных	131	1	0	B
нервной	267	1	0	B	веществ	165	2	0	B
системы	244	1	0	B	для	211	2	0	B
Медицина	231	2	1	B	высокоуровневой	310	1	1	H
при	221	1	0	B	нервной	300	1	1	H
помощи	249	2	0	B	деятельности	211	2	0	B
специальных	141	1	0	B	Однако	221	1	0	B
красящих	261	1	1	H	даже	191	3	0	B
веществ	270	1	1	H	эти	189	1	0	B
и	170	1	1	B	сведения	191	4	1	B
электронных	190	1	0	B	нельзя	210	1	0	B
микроскопов	310	2	0	B	считать	211	2	0	B
особой	115	1	0	B	полными	211	1	0	B
мощности	120	3	0	B	и	144	2	0	B
в	131	1	0	B	неопровержимыми	277	1	2	H
настоящее	271	1	0	B	наука	271	1	0	B
время	171	1	0	B	признаёт	151	1	0	B
располагает	241	2	1	B	что	166	2	1	B
информацией	220	2	0	B	не	170	1	0	B
о	179	2	0	B	в	177	3	0	B

строении	165	1	0	В	состоянии	181	1	0	В
отдельной	211	2	0	В	на	151	3	0	В
каких	221	1	0	В	данный	166	1	0	В
принципах	244	2	1	В	момент	241	2	1	В
строятся	271	1	0	В	ответить	267	2	0	В
сны	221	2	0	В	на	244	2	0	В
или	191	3	0	В	часть	231	2	0	В
галлюцинации	189	1	0	В	вопросов	221	3	0	В
человека	191	2	0	В	касающихся	249	31	0	В
как	210	1	1	В	мышления	141	1	1	В
распределяется	211	3	0	В	и	141	2	0	В
по	217	1	0	В	нервной	230	1	0	В
мозгу	220	3	0	В	деятельности	170	2	0	В
хранимый	231	2	1	В	Понимание	190	2	0	В
в	241	1	0	В	того	265	1	0	В
памяти	267	1	0	В	на	115	1	1	В
опыт	244	2	0	В	вмешивается	120	2	0	В
как	231	2	0	В	в	131	1	0	В
Переключение	221	1	0	В	процесс	165	3	0	В
эмоций	249	1	0	В	запоминания	211	1	0	В
присутствует	141	2	0	В	у	221	4	0	В
частично	241	1	1	В	учёных	244	1	1	В

Таблица 59. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
На	171	2	0	В	для	241	2	0	В
данный	165	2	0	В	запуска	267	2	0	В
момент	211	1	0	В	всей	244	1	0	В
точно	251	1	0	В	нервной	231	1	0	В
установлено	231	2	0	В	системы	221	2	0	В
что	221	1	0	В	или	249	1	0	В
нервная	177	2	0	В	системы	141	2	0	В
клетка	217	1	1	В	кровообращения	215	1	2	В
является	241	1	0	В	нужно	230	1	0	В
основой	251	1	0	В	не	170	1	0	В
нервной	211	1	1	В	просто	190	1	0	В
деятельности	165	1	0	В	располагать	410	1	0	В
точно	211	2	0	В	большим	287	2	0	В
также	221	1	0	В	количеством	241	1	0	В
как	244	3	0	В	этих	277	3	0	В
клетка	211	2	1	1	клеток	211	3	1	В
из	221	1	1	В	но	191	1	0	В
кровеносной	291	3	2	Н	и	181	1	0	В
системы	189	1	0	В	найти	170	1	0	В
служит	191	4	0	В	между	165	2	0	В
основой	210	1	0	В	ними	211	2	0	В
для	211	2	0	В	определённые	211	2	0	В
механизма	265	1	1	В	связи	221	1	0	В
кровообращения	311	2	1	В	Таким	244	2	0	В
Одного	190	1	0	В	образом	271	2	0	В
нейрона	210	2	0	В	в	221	1	0	В
и	115	1	0	В	работе	191	2	0	В
одного	120	2	0	В	интеллекта	189	3	1	В
лейкоцита	260	3	1	Н	прослеживается	191	1	1	В

будет	154	1	1	В	принцип	210	2	1	В
недостаточно	178	2	1	В	системности	271	1	0	В

Таблица 60. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
За	191	2	0	В	клетка	141	2	0	В
связи	189	1	0	В	умеет	241	1	0	В
между	191	1	0	В	получать	230	1	0	В
клетками	210	2	0	В	этот	170	2	0	В
мозга	211	1	1	В	импульс	290	1	2	Н
отвечают	211	2	0	В	и	410	2	0	В
особые	204	1	0	В	отправлять	115	1	0	В
волокна	211	1	1	В	собственный	120	3	1	В
синапсы	271	1	1	Н	переходя	131	3	1	В
способные	151	1	0	В	при	271	1	0	В
на	166	1	0	В	необходимости	141	1	0	В
передачу	191	2	0	В	в	141	2	0	В
импульса	251	2	1	Н	возбуждённое	230	2	0	В
Соответственно	191	1	0	В	состояние	170	1	0	В
нервная	210	1	0	В					

Таблица 61. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	44	80	114	0,7
2	30	31	62	0,5
3	24	23	29	0,8

Таблица 62. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	1	44	884	1205	1
2	1	30	473	946	1
3	0	24	233	583	1

Результаты эксперимента по отслеживанию показателей процесса чтения участника №3 Колиной О.С.

В процессе чтения у испытуемого возникли проблемы с пониманием некоторых семантически-значимых единиц, которые были определены на основе показателя узнаваемости слова. Для наглядности, СЗЕ, которые показались читателю трудными или не узнаваемыми, выделены на таблицах 44-48 по тексту №1, в таблицах 51-55 по тексту №2, в таблицах 58-60 по тексту №3. Как было сказано ранее, студентам было предложено после прочтения отметить на листке с распечатанным текстовым материалом (тексты №1, №2, №3). При сравнении результатов было отмечено, что участники эксперимента указали те понятия в тексте, которые система определила, как «невоспринятые» чтецом. Результаты опроса среди учатников находятся в приложении 1.

3) Испытуемый №4. Каверина Е.В. Текст №1. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студентки Кавериной Е.В. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 1 представлены в табл. 63-табл.69.

Таблица 63. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
В	191	2	1	В	синаптической	265	2	2	Н
основу	201	1	1	В	связи	255	1	1	Н
нейробиологии	291	3	2	Н	и	221	2	0	В

легло	178	1	0	B	организации	244	3	0	B
исследование	249	1	1	B	нервных	271	1	0	B
мозга	141	1	1	B	сетей	221	2	0	B
как	241	2	0	B	с	191	1	0	B
междисциплинарной	265	2	0	B	целью	189	3	0	B
проблемы	170	2	0	B	познания	191	1	0	B
Основные	190	1	0	B	высших	210	3	1	B
представления	410	2	0	B	психических	211	2	1	B
о	115	2	0	B	функций	217	1	1	B
структуре	120	1	0	B	таких	220	1	0	B
функциях	131	1	0	B	как	249	2	0	B
молекулярных	255	2	1	H	память	260	2	0	B
и	211	1	0	B	сознание	267	1	0	B
клеточных	244	3	1	B	и	230	2	0	B
основах	231	1	0	B	мышление	255	10	0	B
деятельности	171	4	1	B	с	190	3	0	B
мозга	177	1	0	B	которыми	410	1	0	B
сформированы	217	2	0	B	связаны	115	3	0	B
еще	241	1	0	B	обучение	120	1	0	B
в	277	2	0	B	поведение	131	2	1	B
XX	211	1	0	B	и	271	4	1	B
веке	191	1	0	B	деятельность	171	4	1	B
Интеграция	281	1	2	B	человека	241	1	1	B
научных	170	2	0	B					
дисциплин	165	2	1	B					
совершалась	211	1	0	B					
вокруг	244	1	0	B					
исследований	211	2	1	B					
строения	271	1	10	B					
нейрона	151	2	1	B					
механизмов	251	3	0	B					

Таблица 64. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Несмотря	191	2	0	B	может	144	2	0	B
на	210	2	0	B	быть	191	1	0	B
достигнутые	211	1	0	B	объяснена	221	2	0	B
успехи	211	1	0	B	только	191	1	0	B
сущность	244	2	0	B	нейрофизиологическими	29	4	1	H
психической	211	1	1	B	процессами	231	1	1	B
деятельности	202	3	1	B	Важную	210	1	0	B
от	151	1	0	B	роль	211	1	0	B
этого	150	4	0	B	в	211	3	0	B
не	141	1	0	B	реализации	244	1	0	B
стала	145	2	0	B	этой	211	4	0	B
менее	181	1	0	B	функции	271	1	0	B
загадочной	151	2	0	B	играют	151	2	0	B
Находясь	166	2	0	B	как	210	1	0	B
в	120	1	0	B	прогресс	170	2	0	B
неразрывной	131	2	0	B	общества	177	1	1	B
связи	201	1	0	B	так	181	1	0	B
с	171	1	0	B	и	151	1	0	B
мозгом	231	1	1	B	социально-исторический	166	4	0	B

психика	220	1	0	B	опыт	271	1	0	B
человека	179	1	0	B	человечества	220	2	1	B

Таблица 65. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Мозг	217	2	1	B	начинается	214	2	0	B
есть	170	1	1	B	с	170	2	0	B
материальная	165	2	1	B	ощущений	165	1	0	B
структура	215	3	1	B	которые	211	3	0	B
на	144	1	0	B	трансформируются	244	55	1	B
которой	211	2	0	B	в	211	2	0	B
среда	271	1	0	B	энергию	271	3	0	B
и	151	3	0	B	нервных	151	1	0	B
общественная	177	1	0	B	импульсов	177	4	0	B
жизнь	214	3	0	B	и	151	2	0	B
пишут	343	2	0	B	воспринимаются	243	2	0	B
историю	211	1	0	B	мозгом	200	1	1	B
личности	156	1	1	B	как	178	3	0	B
и	124	3	0	B	интегративный	410	1	2	H
человечества	311	1	0	B	афферентный	370	1	2	H
Опираясь	287	3	0	B	сигнал	211	3	2	H
на	241	1	0	B	на	244	1	0	B
нее	277	2	0	B	который	214	2	0	B
человек	211	2	0	B	следует	211	1	0	B
приобретает	191	2	0	B	адекватный	151	1	0	B
индивидуальный	181	2	1	B	ответ	177	2	0	B
опыт	170	2	1	B	через	214	1	0	B
Процесс	210	1	0	B	двигательную	241	2	1	B

Таблица 66. Показатели чтения испытуемого для ИБ4 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Нервная	221	1	1	B	и	165	2	0	B
система	250	2	0	B	объединение	270	3	1	H
выполняет	141	2	0	B	органов	261	1	1	H
две	187	3	0	B	и	150	2	0	B
функции	230	1	1	B	систем	171	4	1	B
взаимодействие	170	2	0	B	в	144	1	0	B
с	190	2	0	B	единое	201	2	0	B
внешней	199	1	0	B	целое	241	3	0	B
средой	115	3	0	B					

Таблица 67. Показатели чтения испытуемого для ИБ5 текста №1

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Знакомство	204	2	0	B	взаимодействие	241	2	0	B
с	131	3	0	B	между	230	3	0	B
мозгом	221	3	0	B	которыми	170	3	0	B
начинается	200	2	0	B	обеспечивает	190	2	0	B
с	141	4	0	B	его	171	4	0	B
изучения	241	1	0	B	структурно-функциональную	310	3	0	B
нейронов	230	1	1	B	организацию	250	5	0	B
и	170	2	0	B					
глии	271	2	2	H					

Таблица 68. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	45	48	60	0,8
2	25	30	43	0,7
3	22	19	47	0,4
4	8	12	17	0,7
5	8	13	16	0,8

Таблица 69. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	1	45	500	667	1
2	0	25	347	833	1
3	0	22	379	1034	1
4	0	8	119	893	1
5	1	8	148	1110	1

Испытуемый №4. Каверина Е.В. Текст №2. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студентки Кавериной Е.В. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 2 представлены в табл. 70- табл. 76.

Таблица 70. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Знаменитая	241	3	0	В	полотне	211	1	0	В
картина	267	1	0	В	живописец	244	2	0	В
Карла	244	2	0	В	запечатлел	231	3	0	В
Брюллова	210	2	1	В	гибель	171	3	0	В
Последний	221	1	0	В	города	177	2	0	В
день	249	2	0	В	Помпеи	217	4	1	В
Помпеи	141	1	1	В	вследствие	241	1	0	В
была	241	2	0	В	извержения	277	2	0	В
написана	230	2	0	В	вулкана	211	3	0	В
в	170	3	0	В	Везувий	191	1	1	В
1830-1833	190	1	1	В	в	150	2	0	В
гг	410	2	0	В	79	187	1	0	В
На	115	2	0	В	году	153	2	0	В
этом	120	1	0	В	н.э.	144	1	0	В
эпическом	270	1	1	Н					

Таблица 71. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Брюллов	155	3	0	В	от	165	1	0	В
изображает	195	1	0	В	горящей	211	2	0	В
поистине	215	2	0	В	лавы	244	55	1	В
адскую	251	2	0	В	озаряют	231	1	0	В
картину	211	14	0	В	красноватым	171	2	0	В
Вдалеке	221	12	1	В	заревом	177	3	0	В
пылает	177	1	0	В	заднюю	201	3	0	В
вулкан	217	2	0	В	часть	241	2	0	В
из	241	2	0	В	полотна	244	4	0	В
недр	251	3	0	В	Вспышка	211	1	0	В
которого	211	1	0	В	молнии	191	2	0	В
во	191	2	0	В	рассекающая	181	3	0	В
все	181	2	0	В	облако	170	1	0	В

стороны	221	1	1	В	пепла	165	2	1	В
растекаются	244	1	0	В	и	244	1	0	В
ручьи	233	1	0	В	гари	231	2	0	В
огненной	221	3	0	В	освещает	221	1	0	В
лавы	191	1	0	В	переднюю	249	2	0	В
Отблески	289	2	2	Н	часть	141	5	0	В
пламени	191	2	0	В	картины	241	1	1	В

Таблица 72. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
В	155	3	0	В	обращает	231	3	0	В
своей	210	1	0	В	живописец	221	1	1	В
картине	244	2	0	В	на	177	2	0	В
Брюллов	231	2	1	В	воздушное	310	2	1	Н
использует	171	14	1	В	перспективу	256	1	2	Н
смелую	177	11	0	В	ему	230	2	0	В
для	140	1	0	В	удается	170	1	0	В
своего	241	2	0	В	создать	190	2	0	В
времени	217	2	1	В	ощущение	231	2	0	В
цветовую	211	3	0	В	глубокого	240	3	0	В
гамму	191	1	1	В	пространства	215	1	1	В
Самое	181	2	0	В					
пристальное	170	3	0	В					
внимание	165	1	0	В					

Таблица 73. Показатели чтения испытуемого для ИБ4 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Перед	211	2	0	В	Вот	165	2	0	В
нами	257	1	0	В	сыновья	211	1	0	В
целое	244	2	0	В	на	221	2	0	В
море	231	3	0	В	своих	244	3	0	В
людских	221	1	0	В	плечах	271	1	0	В
страданий	229	2	1	В	пытаются	221	2	1	В
В	141	1	0	В	унести	191	1	0	В
час	241	3	0	В	слабого	189	3	0	В
настоящей	233	1	0	В	старика-отца	191	1	0	В
трагедии	170	3	0	В	подальше	210	3	0	В
обнажаются	190	2	0	В	от	211	2	0	В
человеческие	225	1	1	В	опасности	217	1	1	В
души	115	1	0	В	Молодой	220	1	0	В
Вот	120	2	0	В	юноша	231	2	0	В
мужчина	131	2	0	В	уговаривает	241	2	0	В
защищающий	165	1	0	В	упавшую	267	1	0	В
своих	211	1	0	В	мать	244	1	0	В
близких	221	2	0	В	собраться	231	2	0	В
отчаянно	244	1	0	В	с	221	1	0	В
поднял	261	2	0	В	силами	249	2	0	В
руку	221	1	0	В	и	141	1	0	В
словно	191	1	1	В	бежать	241	1	1	В
пытаясь	189	1	1	В	В	230	1	1	В
остановить	191	1	0	В	центре	170	1	0	В
стихию	210	1	0	В	картины	190	1	0	В
Мать	211	2	0	В	погибшая	110	2	0	В
страстно	211	1	0	В	женщина	115	1	0	В

обняв	244	3	0	B	и	120	3	0	B
своих	211	1	0	B	младенец	131	1	0	B
детей	271	1	0	B	тянущийся	271	1	0	B
с	151	1	0	B	к	171	1	0	B
мольбой	266	2	0	B	безжизненному	241	2	1	B
о	170	2	0	B	телу	220	2	0	B
пощаде	177	2	0	B	матери	179	2	0	B
глядит	181	1	0	B					
на	151	2	0	B					
небо	166	1	0	B					

Таблица 74. Показатели чтения испытуемого для ИБ5 текста №2

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Картина	181	3	0	B	человек	165	3	0	B
Последний	161	1	0	B	Его	211	1	0	B
день	211	2	0	B	физическую	221	2	0	B
Помпеи	261	1	0	B	красоту	244	1	0	B
напоминает	231	2	1	B	и	271	2	1	B
зрителю	221	1	0	B	духовное	221	1	0	B
о	177	2	0	B	величие	191	2	0	B
том	217	1	0	B	художник	189	1	0	B
что	241	1	0	B	противопоставляет	191	1	0	B
основная	211	1	0	B	разрушительным	210	1	0	B
ценность	211	2	0	B	силам	211	2	0	B
мира	191	2	0	B	природы	165	2	0	B

Таблица 75. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	16	21	30	0,7
2	14	25	41	0,6
3	10	13	25	0,5
4	18	50	71	0,7
5	7	22	24	0,9

Таблица 76. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	1	16	208	780	1
2	2	14	297	1273	2
3	1	10	203	1218	1
4	1	18	500	1667	1
5	2	7	188	1611	2

Испытуемый №3. Каверина Е.В. Текст №3. В ходе эксперимента были определены показатели процесса чтения студента Кавериной Е.В. по каждому информационному блоку. Результаты по тексту № 3 представлены в табл.77- табл. 81.

Таблица 77. Показатели чтения испытуемого для ИБ1 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
Восприятие	165	2	1	B	нервной	241	2	0	B
иерархичности	260	1	2	H	клетки	267	13	0	B
понятий	221	2	1	B	(нейрона)	244	3	0	B
объясняется	244	3	1	B	о	231	1	0	B
биологическими	211	1	1	B	функциональном	221	3	0	B
принципами	221	2	1	B	предназначении	249	1	1	B
которые	191	1	0	B	каждой	141	2	0	B

лежат	189	3	0	B	из	241	2	0	B
в	191	1	0	B	областей	230	2	0	B
основе	210	3	0	B	мозга	170	2	0	B
работы	211	2	0	B	о	190	3	0	B
человеческого	217	1	1	B	пользе	165	31	1	B
мозга	220	1	0	B	или	115	1	0	B
и	231	2	0	B	вреде	120	2	0	B
центральной	241	2	0	B	отдельных	131	1	0	B
нервной	267	1	0	B	веществ	165	2	0	B
системы	244	1	0	B	для	211	2	0	B
Медицина	231	2	1	B	высокоуровневой	255	1	2	H
при	221	1	0	B	нервной	344	1	1	H
помощи	249	2	0	B	деятельности	211	2	0	B
специальных	141	1	0	B	Однако	221	1	0	B
красящих	277	1	1	H	даже	191	3	0	B
веществ	248	1	1	B	эти	189	1	0	B
и	170	1	1	B	сведения	191	4	1	B
электронных	290	1	1	H	нельзя	210	1	0	B
микроскопов	310	2	0	B	считать	211	2	0	B
особой	115	1	0	B	полными	211	1	0	B
мощности	120	3	0	B	и	144	2	0	B
в	131	1	0	B	неопровержимыми	287	1	1	H
настоящее	271	1	0	B	наука	271	1	0	B
время	171	1	0	B	признаёт	151	1	0	B
располагает	241	2	1	B	что	166	2	1	B
информацией	220	2	0	B	не	170	1	0	B
о	179	2	0	B	в	177	3	0	B
строении	165	1	0	B	состоянии	181	1	0	B
отдельной	211	2	0	B	на	151	3	0	B
каких	221	1	0	B	данный	166	1	0	B
принципах	244	2	1	B	момент	241	2	1	B
строятся	271	1	0	B	ответить	267	2	0	B
сны	221	2	0	B	на	244	2	0	B
или	191	3	0	B	часть	231	2	0	B
галлюцинации	189	1	0	B	вопросов	221	3	0	B
человека	191	2	0	B	касающихся	249	31	0	B
как	210	1	1	B	мышления	141	1	1	B
распределяется	211	3	0	B	и	141	2	0	B
по	217	1	0	B	нервной	230	1	0	B
мозгу	220	3	0	B	деятельности	170	2	0	B
хранимый	231	2	1	B	Понимание	190	2	0	B
в	241	1	0	B	того	265	1	0	B
памяти	267	1	0	B	на	115	1	1	B
опыт	244	2	0	B	вмешивается	120	2	0	B
как	231	2	0	B	в	131	1	0	B
Переключение	271	1	2	H	процесс	165	3	0	B
эмоций	255	1	1	H	запоминания	211	1	0	B
присутствует	141	2	0	B	у	221	4	0	B
частично	241	1	1	B	учёных	244	1	1	B

Таблица 78. Показатели чтения испытуемого для ИБ2 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
На	211	2	1	B	для	241	3	1	B

данный	221	1	0	B	запуска	267	1	0	B
момент	244	2	0	B	всей	244	3	0	B
точно	271	3	0	B	нервной	231	1	0	B
установлено	221	1	0	B	системы	221	2	0	B
что	191	2	0	B	или	249	2	0	B
нервная	189	1	0	B	системы	141	2	0	B
клетка	191	3	0	B	кровообращения	241	2	0	B
является	210	1	1	B	нужно	230	3	1	B
основой	211	3	0	B	не	170	3	0	B
нервной	211	2	0	B	просто	190	1	0	B
деятельности	244	1	0	B	располагать	410	2	0	B
точно	211	1	0	B	большим	115	1	0	B
также	271	2	0	B	количеством	120	3	0	B
как	151	1	0	B	этих	131	1	0	B
клетка	266	2	0	B	клеток	271	3	0	B
из	170	3	1	B	но	171	1	1	B
кровеносной	177	1	0	B	и	241	2	0	B
системы	181	2	0	B	найти	220	2	0	B
служит	151	1	0	B	между	179	2	0	B
основой	166	3	0	B	ними	241	2	0	B
для	211	1	0	B	определённые	267	3	0	B
механизма	221	3	0	B	связи	244	1	0	B
кровообращения	244	2	0	B	Таким	231	1	0	B
Одного	231	1	1	B	образом	221	2	1	B
нейрона	221	1	1	B	в	249	1	0	B
и	191	2	1	B	работе	141	3	0	B
одного	189	1	1	B	интеллекта	241	1	0	B
лейкоцита	291	2	3	H	прослеживается	230	3	1	B
будет	210	3	1	B	принцип	270	1	2	H
недостаточно	211	1	1	B	системности	290	2	2	H

Таблица 79. Показатели чтения испытуемого для ИБ3 текста №3

СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc	СЗЕ	DFix	dt	R	RecConc
За	161	2	0	B	клетка	141	2	0	B
связи	177	1	0	B	умеет	241	1	0	B
между	191	1	0	B	получать	230	1	0	B
клетками	210	2	0	B	этот	170	2	0	B
мозга	201	1	1	B	импульс	190	1	0	B
отвечают	211	2	0	B	и	410	2	0	B
особые	204	1	0	B	отправлять	115	1	0	B
волокна	211	1	1	B	собственный	120	3	1	B
синапсы	271	1	3	H	переходя	131	3	1	B
способные	151	1	0	B	при	271	1	0	B
на	166	1	0	B	необходимости	141	1	0	B
передачу	191	2	0	B	в	141	2	0	B
импульса	189	2	0	B	возбуждённое	230	2	0	B
Соответственно	191	1	0	B	состояние	170	1	0	B
нервная	210	1	0	B					

Таблица 80. Показатели процесса чтения по информационным блокам №1-№5

№ Блока	TimeB	CountFix	CountW	Spt opt
1	41	68	114	0,6
2	25	50	62	0,8
3	17	20	29	0,7

Таблица 81. Показатели техники чтения испытуемого по ИБ №1-№5

№ Блока	Rb	TimeB	CountSymb	Vr	Tipe_id
1	2	41	884	1294	2
2	0	25	473	1135	1
3	0	17	233	822	1

Результаты эксперимента по отслеживанию показателей процесса чтения участника №4 Кавериной Е.В.

В процессе чтения у испытуемого возникли проблемы с пониманием некоторых семантически-значимых единиц, которые были определены на основе показателя узнаваемости слова. Для наглядности, СЗЕ, которые показались читателю трудными или не узнаваемыми, выделены на таблицах 63-67 по тексту №1, в таблицах 70-74 по тексту №2, в таблицах 77-79 по тексту №3. Как было сказано ранее, студентам было предложено после прочтения отметить на листке с распечатанным текстовым материалом (тексты №1, №2, №3). При сравнении результатов было отмечено, что участники эксперимента указали те понятия в тексте, которые система определила, как «не воспринятые» чтецом. Результаты опроса среди участников находятся в приложении 1.

Результаты отслеживания показателей чтения пользователей, полученные в ходе эксперимента, совпали с результатами опроса участников эксперимента, в котором им предложено было отметить слова, которые были не понятны или вызвали затруднения и ответить на вопросы на понимание каждого из информационных блоков, на которые был разделен текстовый материал.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы были исследованы процессы продвижения инноваций посредством размещения веб-ориентированного контента на Интернет-ресурсах, изучен процесс восприятия контента пользователем и существующие инструментальные средства для оценки восприятия веб-контента. Одними из важнейших решенных задач в данной работе являются: определение роли системы мониторинга процесса восприятия контента в задачах продвижения инноваций в открытой информационной среде, разработка параметрической модели процесса чтения контента и оценки уровня восприятия с целью поддержки принятия решения по адаптации контента.

На основании проделанной работы, были выявлены психологические особенности, закономерности изменения модели чтения конкретного пользователя в процессе восприятия, разработана параметрическая модель процесса чтения контента для последующей реализации в информационной системе.

В техническом задании выявлены требования к информационной системе, на основании проведённого исследования предметной области. Разработаны решения по математическому, информационному, организационному обеспечениям, определена функциональная структура инструмента лингвистического анализа веб-контента в техническом проекте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коршунов Д.С. МОДЕЛИ ЧТЕНИЯ И ЕДИНИЦЫ ЧТЕНИЯ: ПОИСК УНИВЕРСАЛЬНОГО // Вестник Военного университета: сб. статей. – Москва, 2011. № 4 (27). С. 60 – 67.

2. Касевич В.Б. Труды по языкознанию: в 2 т. / под ред. Ю.А. Клейнера. СПб.: Филологический факультет СПбГУ, 2006. Т. 1. 664 с.

3. Королёва И.В. Роль лингвистических факторов в развитии процессов чтения: экспериментальное исследование на материале русского языка: дис. …канд. филол. наук. СПб, 2006. 227 с. Машинопись.

4. Леонтьев А.А. От редактора // Слобин Д. Психолингвистика. Грин Дж. Психолингвистика. Хомский и психология /пер. с англ. / под общ. ред. и с предисл. А.А. Леонтьева. Изд. 5-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 352 с.

5. Кузнецов О.А., Хромов Л.Н. Техника быстрого чтения. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Книга, 1983. - 175 с.: ил.;

6. Стоп-слова в SEO-текстах [Электронный ресурс] //: Что такое стоп-слова? : [сайт]. URL: https://studiof1.ru/blog/seo/stop-slova-v-tekstax/

7. Шехтер М.С. Зрительное опознание: закономерности и механизмы. М.: Педагогика, 1981. 264 с.

8. Штерн А.С. Перцептивный аспект речевой деятельности: экспериментальное исследование. СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1992. 236 с.

9. Coltheart M. Dual route and connectionist models of reading: an overview // London Review of Education. 2006. Vol. 4(1). Pp. 5–17.

10. Ю. А. Косарев, И. В. Ли, А. Л. Ронжин, Е. А. Скиданов, J. Savage. Обзор методов понимания речи и текста // Труды СПИИРАН. Вып. 1, т. 2. — СПб: СПИИРАН, 2002.

11. Grainger J., Ziegler J.C. A dual-route approach to orthographic processing. Frontiers in Psychology // Language Sciences. 2011. Vol. 2 (54). Pp. 1–13.

12. Harm M.W., Seidenberg M.S. Computing the Meanings of Words in Reading: Cooperative Division of Labor Between Visual and Phonological Processes // Psychological Review. 2004. № 111. Pp. 662–720.

13. Perfetti C.A., Liu Y., Tan L.H. The lexical constituency model: Some implications of research on Chinese for general theories of reading // Psychological Review. 2005. № 112. Pp.43–59.

14. Как узнать формулу расчета скорости чтения? [Электронный ресурс] //: Нормы скорости чтения: [сайт]. URL: https://bukva.info/blog/kak-uznat-skorost-chteniya/

15. Seidenberg M.S. Computational models of reading: Connectionist and dual-route approaches [Электронный ресурс] // Language & Cognitive Neuroscience Lab: [сайт]. URL: http://lcnl.wisc.edu/publications/archive/184.pdf (Дата обращения 10.09.2011).

16. Белов А.А. Теоретические основы информационных систем/ Белов А.А.- Иваново: Министерство образования и науки Российской Федерации, ФГБОУВО "Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина, 2019. – 92с.

17. Егоров Т.Г. Психология овладения навыком чтения / Егоров Т.Г. – Москва: Академия педагогических наук РСФСР, 1953. – 264.

18. Ткаченко А. А. Сущность и виды социально-экономических отношений // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № S17. – 0,3 п. л.

19. Сизова О.А. Психолого-педагогические условия (методы, приемы) эффективного восприятия информации в процессе педагогического общения при реализации программы внеурочной деятельности // Журнал «Про_ДОД». -2016.

20. ВИДЫ РЕЧЕВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ [Электронный ресурс]//:Чтение как вид речевой деятельности:[сайт].
URL:https://studme.org/159658/ritorika/vidy_rechevoy_deyatelnosti/

21. Модель процесса чтения [Электронный ресурс]//: Модель процесса чтения: [сайт]. URL: http://www.skorochteni.ru/glavy/lesson-1/model-of-the-reading-process/

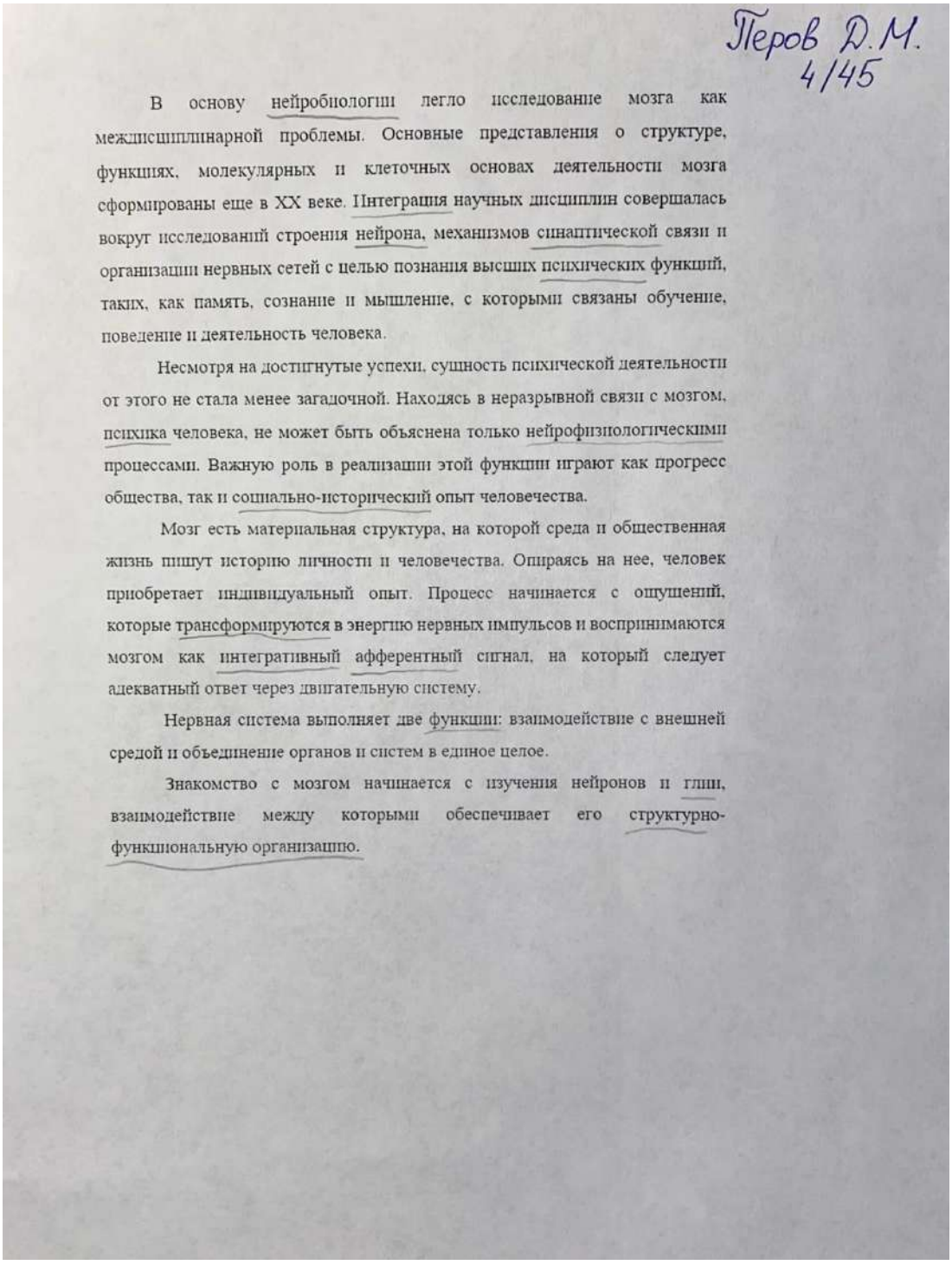
22. Майер Р.В. Имитационная модель деятельности школьника, читающего текст // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2019. -№6. – с.79-91.

23. Дубасова А.В - Движения глаз во время чтения: От общих теорий к частным. Обзор, подготовленный в Лаборатории когнитивных исследований СПбГУ. СПбГУ, 2010.

24. Фёдорова, О. В. (2008). Методика регистрации движений глаз «Визуальный мир»: шанс для сближения психолингвистических традиций. Вопросы языкознания (6), 98-120.

25. Солсо Р. Л. Когнитивная психология. М., 1996. – С. 124.

26. Андреев О.А. Техника быстрого чтения. / Андреев О.А.. – Москва: Феникс, 2014. – 316.



Перов Д.М.
4/45

В основу нейробиологии легло исследование мозга как междисциплинарной проблемы. Основные представления о структуре, функциях, молекулярных и клеточных основах деятельности мозга сформированы еще в XX веке. Интеграция научных дисциплин совершалась вокруг исследований строения нейрона, механизмов синаптической связи и организации нервных сетей с целью познания высших психических функций, таких, как память, сознание и мышление, с которыми связаны обучение, поведение и деятельность человека.

Несмотря на достигнутые успехи, сущность психической деятельности от этого не стала менее загадочной. Находясь в неразрывной связи с мозгом, психика человека, не может быть объяснена только нейрофизиологическими процессами. Важную роль в реализации этой функции играют как прогресс общества, так и социально-исторический опыт человечества.

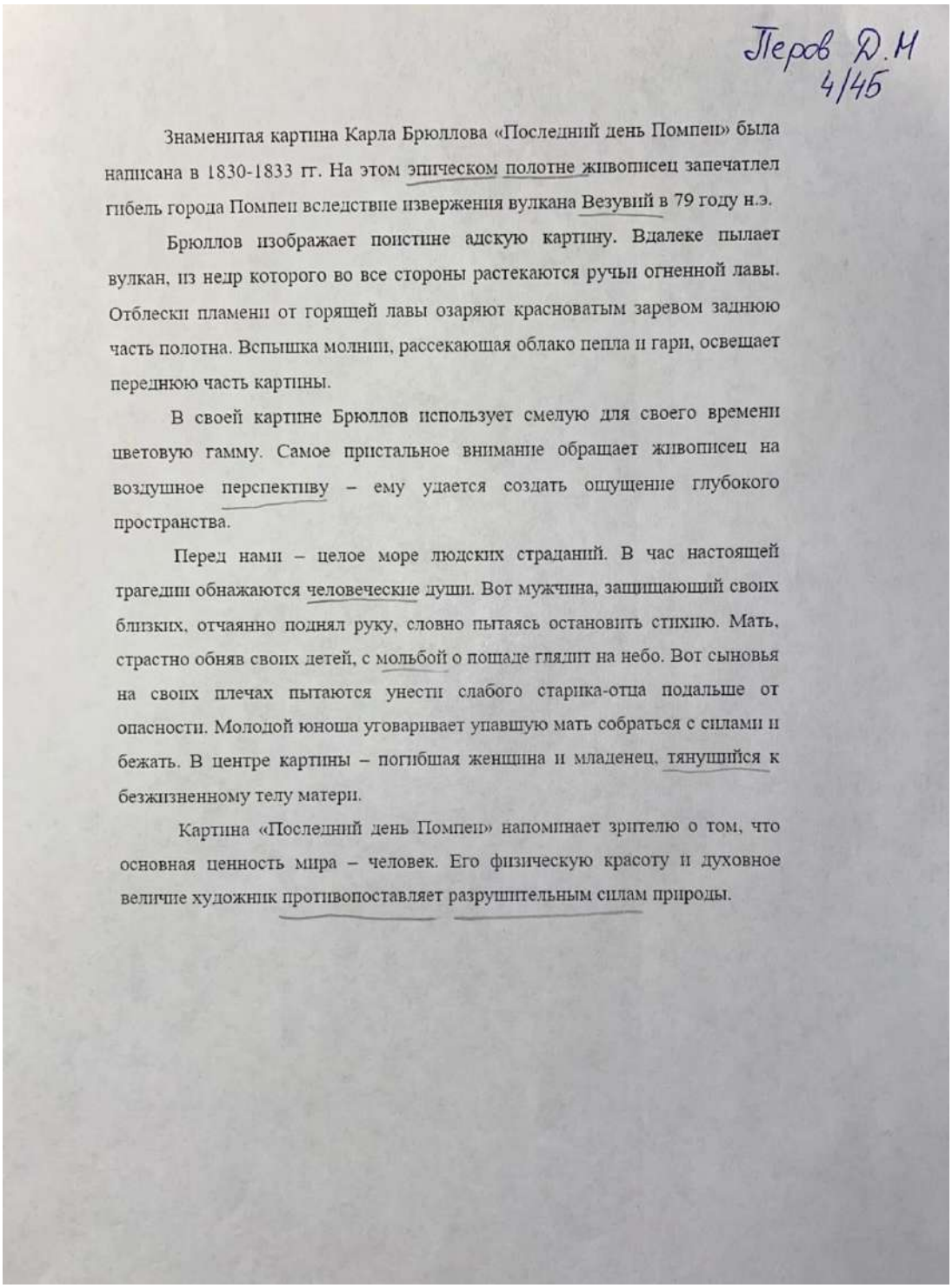
Мозг есть материальная структура, на которой среда и общественная жизнь пишут историю личности и человечества. Опираясь на нее, человек приобретает индивидуальный опыт. Процесс начинается с ощущений, которые трансформируются в энергию нервных импульсов и воспринимаются мозгом как интегративный афферентный сигнал, на который следует адекватный ответ через двигательную систему.

Нервная система выполняет две функции: взаимодействие с внешней средой и объединение органов и систем в единое целое.

Знакомство с мозгом начинается с изучения нейронов и глии, взаимодействие между которыми обеспечивает его структурно-функциональную организацию.

Рис. 1 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №1 (текст №1)

245


Перов Д.М
4/45

Знаменитая картина Карла Брюллова «Последний день Помпеи» была написана в 1830-1833 гг. На этом эпическом полотне живописец запечатлел гибель города Помпеи вследствие извержения вулкана Везувий в 79 году н.э.

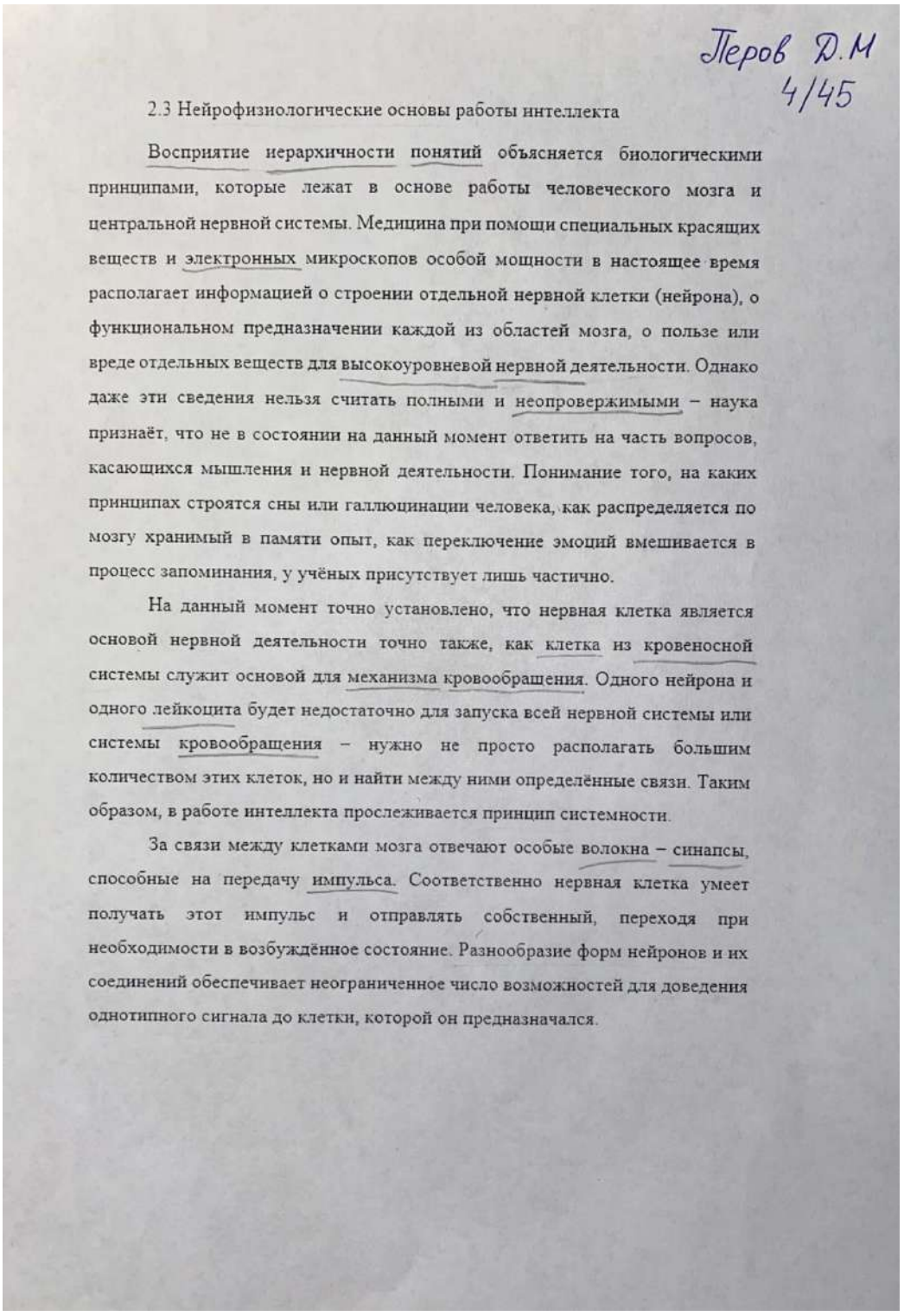
Брюллов изображает поистине адскую картину. Вдалеке пылает вулкан, из недр которого во все стороны растекаются ручьи огненной лавы. Отблески пламени от горящей лавы озаряют красноватым заревом заднюю часть полотна. Вспышка молнии, рассекающая облако пепла и гари, освещает переднюю часть картины.

В своей картине Брюллов использует смелую для своего времени цветовую гамму. Самое пристальное внимание обращает живописец на воздушное перспективу – ему удается создать ощущение глубокого пространства.

Перед нами – целое море людских страданий. В час настоящей трагедии обнажаются человеческие души. Вот мужчина, защищающий своих близких, отчаянно поднял руку, словно пытаясь остановить стихию. Мать, страстно обняв своих детей, с мольбой о пощаде глядит на небо. Вот сыновья на своих плечах пытаются унести слабого старика-отца подальше от опасности. Молодой юноша уговаривает упавшую мать собраться с силами и бежать. В центре картины – погибшая женщина и младенец, тянущийся к безжизненному телу матери.

Картина «Последний день Помпеи» напоминает зрителю о том, что основная ценность мира – человек. Его физическую красоту и духовное величие художник противопоставляет разрушительным силам природы.

Рис. 2 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №1 (текст №2)


Перов Д.М
4/45

2.3 Нейрофизиологические основы работы интеллекта

Восприятие иерархичности понятий объясняется биологическими принципами, которые лежат в основе работы человеческого мозга и центральной нервной системы. Медицина при помощи специальных красящих веществ и электронных микроскопов особой мощности в настоящее время располагает информацией о строении отдельной нервной клетки (нейрона), о функциональном предназначении каждой из областей мозга, о пользе или вреде отдельных веществ для высокоуровневой нервной деятельности. Однако даже эти сведения нельзя считать полными и неопровержимыми – наука признаёт, что не в состоянии на данный момент ответить на часть вопросов, касающихся мышления и нервной деятельности. Понимание того, на каких принципах строятся сны или галлюцинации человека, как распределяется по мозгу хранимый в памяти опыт, как переключение эмоций вмешивается в процесс запоминания, у учёных присутствует лишь частично.

На данный момент точно установлено, что нервная клетка является основой нервной деятельности точно также, как клетка из кровеносной системы служит основой для механизма кровообращения. Одного нейрона и одного лейкоцита будет недостаточно для запуска всей нервной системы или системы кровообращения – нужно не просто располагать большим количеством этих клеток, но и найти между ними определённые связи. Таким образом, в работе интеллекта прослеживается принцип системности.

За связи между клетками мозга отвечают особые волокна – синапсы, способные на передачу импульса. Соответственно нервная клетка умеет получать этот импульс и отправлять собственный, переходя при необходимости в возбуждённое состояние. Разнообразие форм нейронов и их соединений обеспечивает неограниченное число возможностей для доведения однотипного сигнала до клетки, которой он предназначался.

Рис. 3 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №1 (текст №3)

Испытуемый №1. Перов Д.М., 4/45

Текст №1. Текст научного содержания по дисциплине «Нейробиология»

- Вопрос по ИБ1: Что легло в основу нейробиологии?

Ответ: исследования мозга

- Вопрос по ИБ2: С чем связана сущность психической деятельности?

Ответ: с деятельностью нейронов мозга

- Вопрос по ИБ3: Как человек приобретает индивидуальный опыт?

Ответ: последствием влияния внешней среды и общества

- Вопрос по ИБ4: Какие функции есть у нервной системы?

Ответ: двигательные, опорные, рецептирующие

- Вопрос по ИБ5: О каком взаимодействии идёт речь в тексте?

Ответ: между нейронами мозга

Текст №2. Художественный текст – анализ картины Карла Брюллова «Последний день Помпеи».

- Вопрос по ИБ1: Что изображено на картине Карла Брюллова?

Ответ: гибель города Помпеи

- Вопрос по ИБ2: Описание чего представлено в тексте?

Ответ: ~~опис~~ происходящего на картине

- Вопрос по ИБ3: Какое ощущение создает художник?

Ответ: погружение в происходящее на картине

- Вопрос по ИБ4: Что художнику удалось передать на картине?

Ответ: противопоставление природы и человека

- Вопрос по ИБ5: Что является основной ценностью мира?

Ответ: человеческая жизнь

Текст №3. Текст научного содержания «Нейрофизиологические основы работы интеллекта» по дисциплине «Системы управления знаниями»

- Вопрос по ИБ1: Какие принципы лежат в основе работы человеческого мозга?

Ответ: принцип совместной работы нейронов

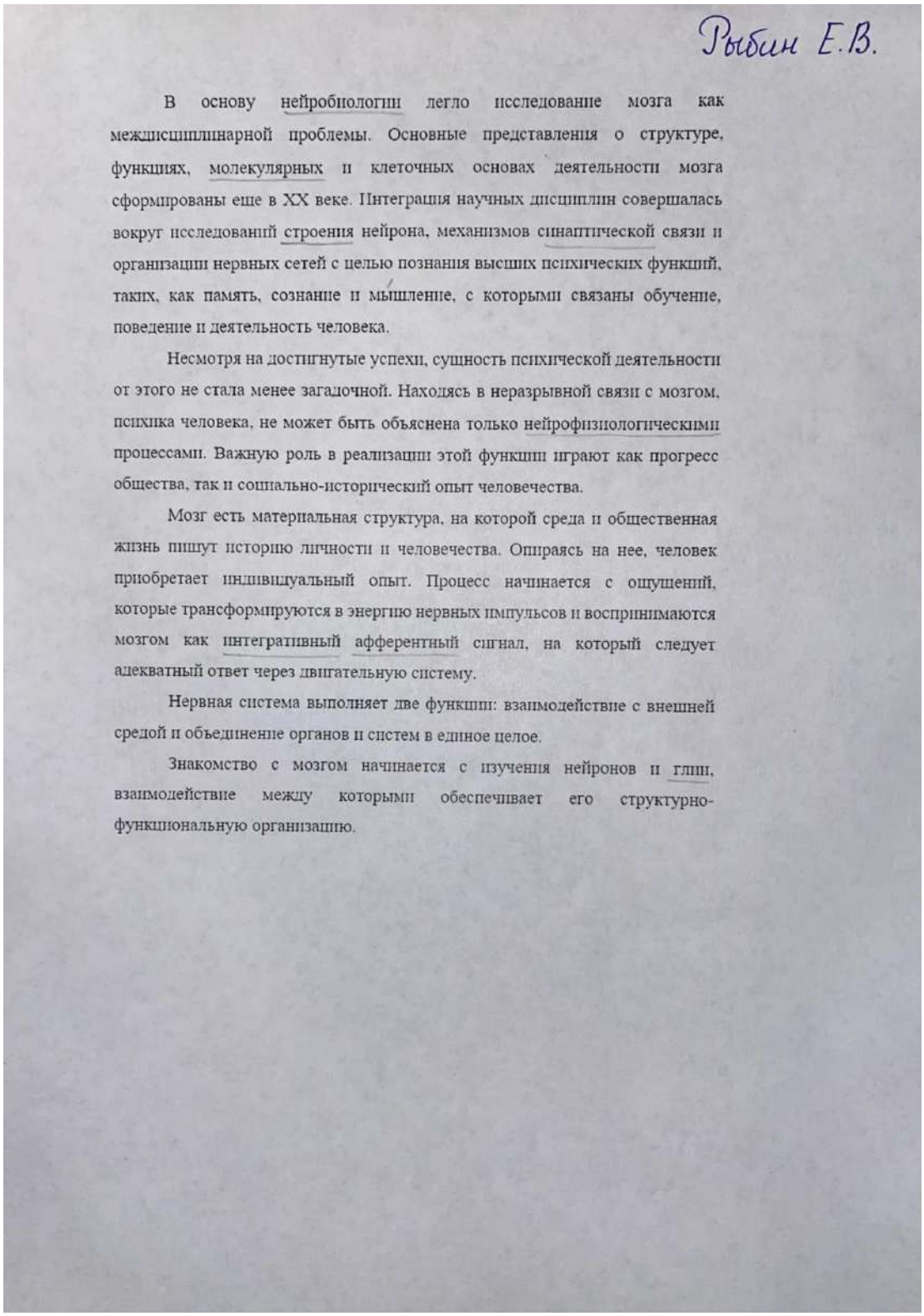
- Вопрос по ИБ2: Какой принцип заложен в работе интеллекта?

Ответ: принцип системности

- Вопрос по ИБ3: Какой элемент нервной системы способен на передачу импульса?

Ответ: синапс

Рис. 4 Лист опроса на понимание текста испытуемым №1



Рыбин Е.В.

В основу нейробиологии легло исследование мозга как междисциплинарной проблемы. Основные представления о структуре, функциях, молекулярных и клеточных основах деятельности мозга сформированы еще в XX веке. Интеграция научных дисциплин совершалась вокруг исследований строения нейрона, механизмов синаптической связи и организации нервных сетей с целью познания высших психических функций, таких, как память, сознание и мышление, с которыми связаны обучение, поведение и деятельность человека.

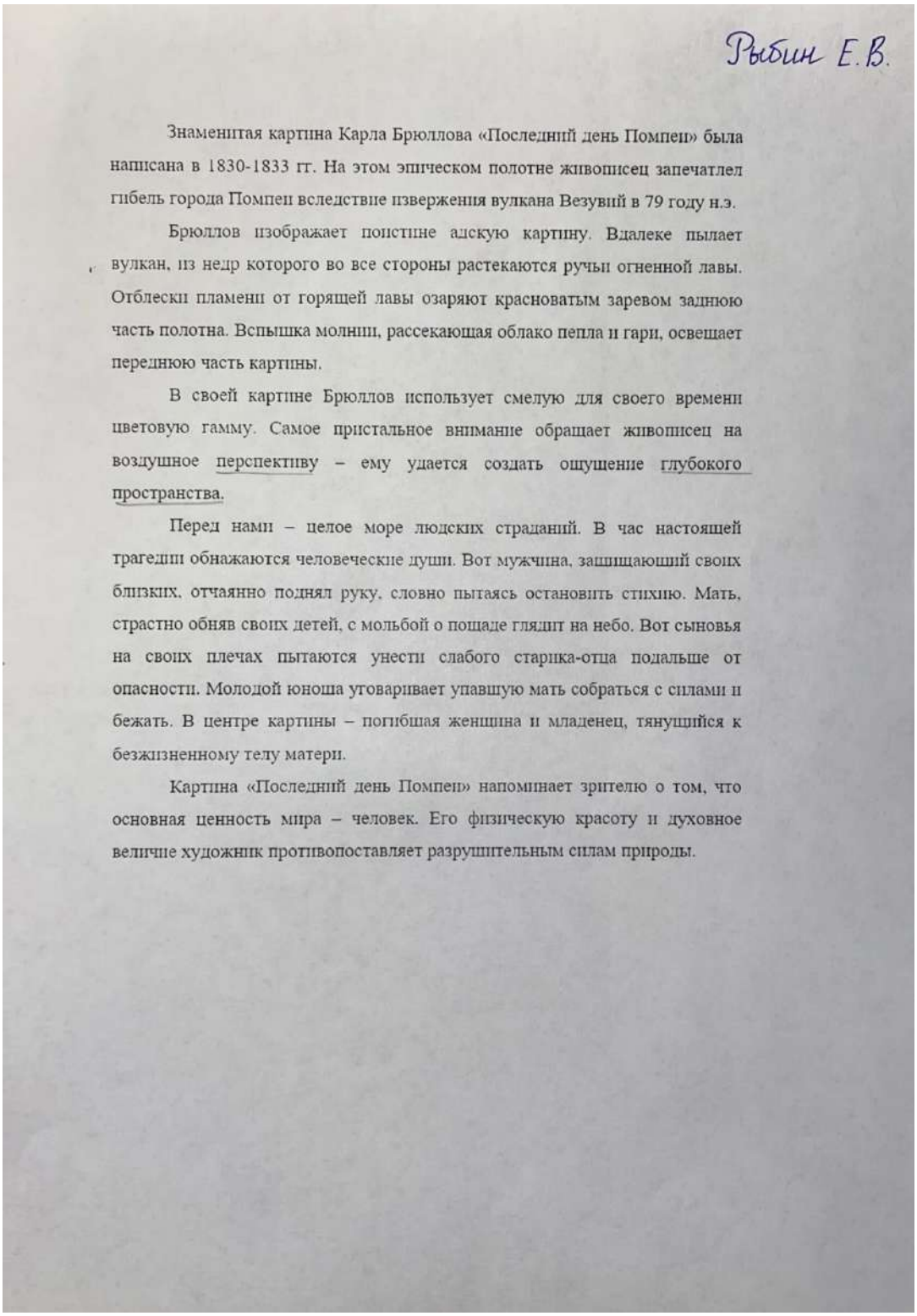
Несмотря на достигнутые успехи, сущность психической деятельности от этого не стала менее загадочной. Находясь в неразрывной связи с мозгом, психика человека, не может быть объяснена только нейрофизиологическими процессами. Важную роль в реализации этой функции играют как прогресс общества, так и социально-исторический опыт человечества.

Мозг есть материальная структура, на которой среда и общественная жизнь пишут историю личности и человечества. Опираясь на нее, человек приобретает индивидуальный опыт. Процесс начинается с ощущений, которые трансформируются в энергию нервных импульсов и воспринимаются мозгом как интегративный афферентный сигнал, на который следует адекватный ответ через двигательную систему.

Нервная система выполняет две функции: взаимодействие с внешней средой и объединение органов и систем в единое целое.

Знакомство с мозгом начинается с изучения нейронов и глии, взаимодействие между которыми обеспечивает его структурно-функциональную организацию.

Рис. 5 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №2 (текст №1)



Рыбин Е.В.

Знаменитая картина Карла Брюллова «Последний день Помпеи» была написана в 1830-1833 гг. На этом эпическом полотне живописец запечатлел гибель города Помпеи вследствие извержения вулкана Везувий в 79 году н.э.

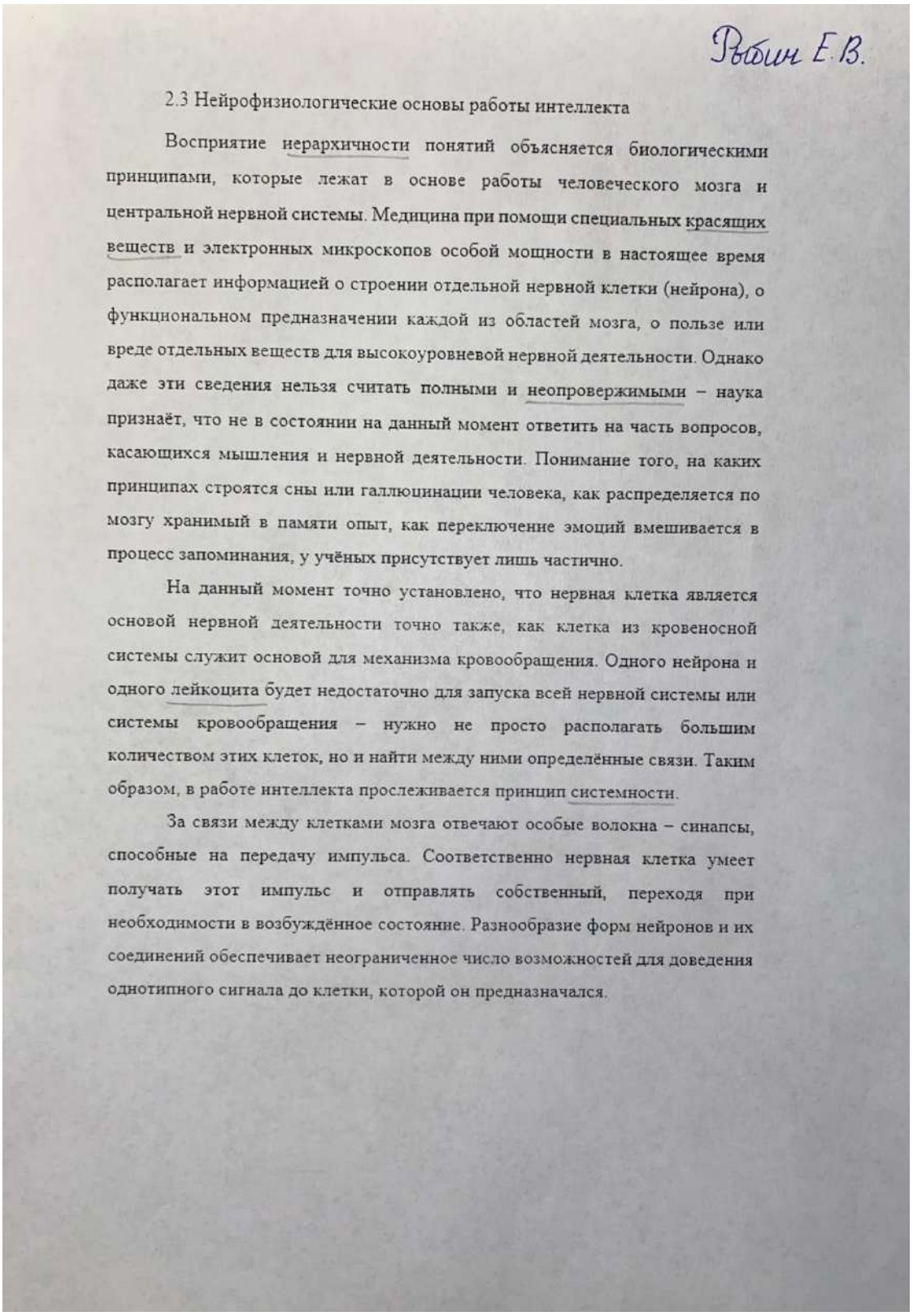
Брюллов изображает поистине адскую картину. Вдалеке пылает вулкан, из недр которого во все стороны растекаются ручьи огненной лавы. Отблески пламени от горящей лавы озаряют красноватым заревом заднюю часть полотна. Вспышка молнии, рассекающая облако пепла и гари, освещает переднюю часть картины.

В своей картине Брюллов использует смелую для своего времени цветовую гамму. Самое пристальное внимание обращает живописец на воздушное перспективу – ему удается создать ощущение глубокого пространства.

Перед нами – целое море людских страданий. В час настоящей трагедии обнажаются человеческие души. Вот мужчина, защищающий своих близких, отчаянно поднял руку, словно пытаясь остановить стихию. Мать, страстно обняв своих детей, с мольбой о пощаде глядит на небо. Вот сыновья на своих плечах пытаются унести слабого старика-отца подальше от опасности. Молодой юноша уговаривает упавшую мать собраться с силами и бежать. В центре картины – погибшая женщина и младенец, тянущийся к безжизненному телу матери.

Картина «Последний день Помпеи» напоминает зрителю о том, что основная ценность мира – человек. Его физическую красоту и духовное величие художник противопоставляет разрушительным силам природы.

Рис. 6 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №2 (текст №2)


Рыбин Е.В.

2.3 Нейрофизиологические основы работы интеллекта

Восприятие иерархичности понятий объясняется биологическими принципами, которые лежат в основе работы человеческого мозга и центральной нервной системы. Медицина при помощи специальных красящих веществ и электронных микроскопов особой мощности в настоящее время располагает информацией о строении отдельной нервной клетки (нейрона), о функциональном предназначении каждой из областей мозга, о пользе или вреде отдельных веществ для высокоуровневой нервной деятельности. Однако даже эти сведения нельзя считать полными и неопровержимыми – наука признаёт, что не в состоянии на данный момент ответить на часть вопросов, касающихся мышления и нервной деятельности. Понимание того, на каких принципах строятся сны или галлюцинации человека, как распределяется по мозгу хранимый в памяти опыт, как переключение эмоций вмешивается в процесс запоминания, у учёных присутствует лишь частично.

На данный момент точно установлено, что нервная клетка является основой нервной деятельности точно также, как клетка из кровеносной системы служит основой для механизма кровообращения. Одного нейрона и одного лейкоцита будет недостаточно для запуска всей нервной системы или системы кровообращения – нужно не просто располагать большим количеством этих клеток, но и найти между ними определённые связи. Таким образом, в работе интеллекта прослеживается принцип системности.

За связи между клетками мозга отвечают особые волокна – синапсы, способные на передачу импульса. Соответственно нервная клетка умеет получать этот импульс и отправлять собственный, переходя при необходимости в возбуждённое состояние. Разнообразие форм нейронов и их соединений обеспечивает неограниченное число возможностей для доведения однотипного сигнала до клетки, которой он предназначался.

Рис. 7 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №2 (текст №3)

Испытуемый №2. Рыбин Е.В., 4/48

Текст №1. Текст научного содержания по дисциплине «Нейробиология»

- Вопрос по ИБ1: Что легло в основу нейробиологии?

Ответ: исследование мозга

- Вопрос по ИБ2: С чем связана сущность психической деятельности?

Ответ: с мозгом

- Вопрос по ИБ3: Как человек приобретает индивидуальный опыт?

Ответ: посредством среды

- Вопрос по ИБ4: Какие функции есть у нервной системы?

Ответ: связь со средой и представление органов как систему

- Вопрос по ИБ5: О каком взаимодействии идёт речь в тексте?

Ответ: мозга с физическим окружением

Текст №2. Художественный текст – анализ картины Карла Брюллова «Последний день Помпеи».

- Вопрос по ИБ1: Что изображено на картине Карла Брюллова?

Ответ: Последний день Помпеи

- Вопрос по ИБ2: Описание чего представлено в тексте?

Ответ: картины

- Вопрос по ИБ3: Какое ощущение создает художник?

Ответ: Ужасное

- Вопрос по ИБ4: Что художнику удалось передать на картине?

Ответ: Ужасы и последний день

- Вопрос по ИБ5: Что является основной ценностью мира?

Ответ: Человек

Текст №3. Текст научного содержания «Нейрофизиологические основы работы интеллекта» по дисциплине «Системы управления знаниями»

- Вопрос по ИБ1: Какие принципы лежат в основе работы человеческого мозга?

Ответ: Биологические

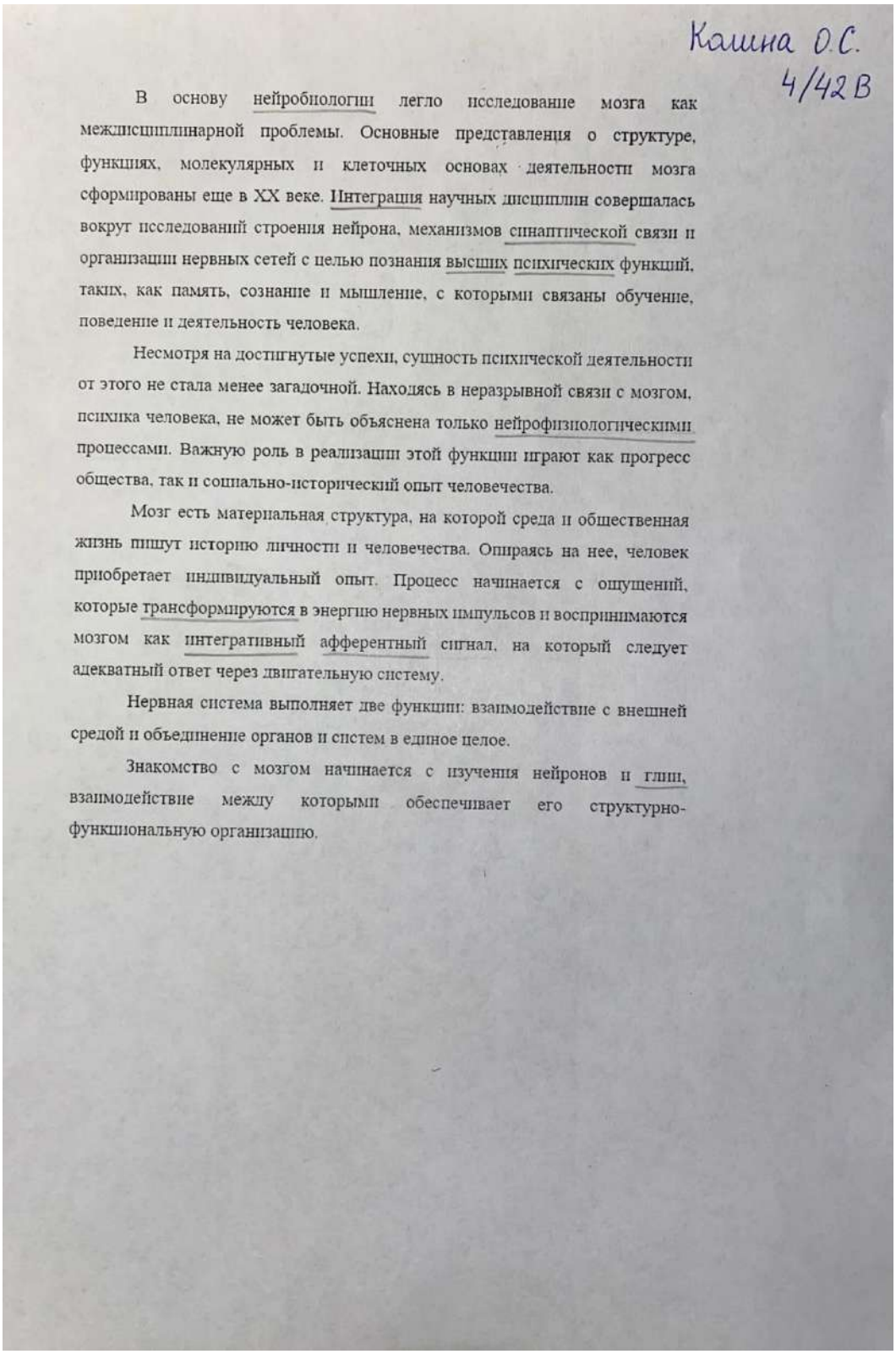
- Вопрос по ИБ2: Какой принцип заложен в работе интеллекта?

Ответ: —

- Вопрос по ИБ3: Какой элемент нервной системы способен на передачу импульса?

Ответ: синапс

Рис. 8 Лист опроса на понимание текста испытуемым №2


Камина О.С.
4/42В

В основу нейробиологии легло исследование мозга как междисциплинарной проблемы. Основные представления о структуре, функциях, молекулярных и клеточных основах деятельности мозга сформированы еще в XX веке. Интеграция научных дисциплин совершалась вокруг исследований строения нейрона, механизмов синаптической связи и организации нервных сетей с целью познания высших психических функций, таких, как память, сознание и мышление, с которыми связаны обучение, поведение и деятельность человека.

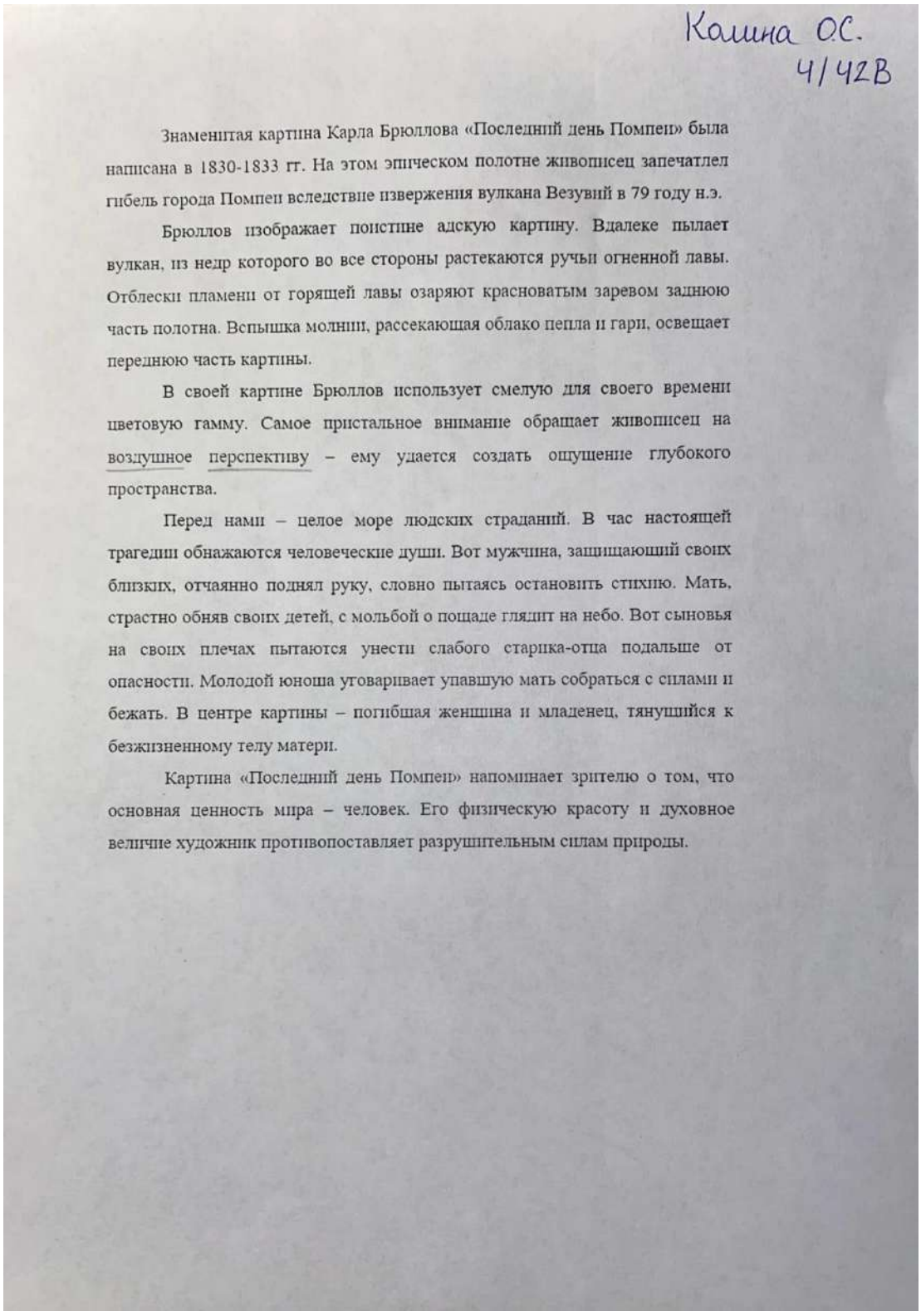
Несмотря на достигнутые успехи, сущность психической деятельности от этого не стала менее загадочной. Находясь в неразрывной связи с мозгом, психика человека, не может быть объяснена только нейрофизиологическими процессами. Важную роль в реализации этой функции играют как прогресс общества, так и социально-исторический опыт человечества.

Мозг есть материальная структура, на которой среда и общественная жизнь пишут историю личности и человечества. Опираясь на нее, человек приобретает индивидуальный опыт. Процесс начинается с ощущений, которые трансформируются в энергию нервных импульсов и воспринимаются мозгом как интегративный афферентный сигнал, на который следует адекватный ответ через двигательную систему.

Нервная система выполняет две функции: взаимодействие с внешней средой и объединение органов и систем в единое целое.

Знакомство с мозгом начинается с изучения нейронов и глии, взаимодействие между которыми обеспечивает его структурно-функциональную организацию.

Рис. 9 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №3 (текст №1)



Камина О.С.
4/42В

Знаменитая картина Карла Брюллова «Последний день Помпеи» была написана в 1830-1833 гг. На этом эпическом полотне живописец запечатлел гибель города Помпеи вследствие извержения вулкана Везувий в 79 году н.э.

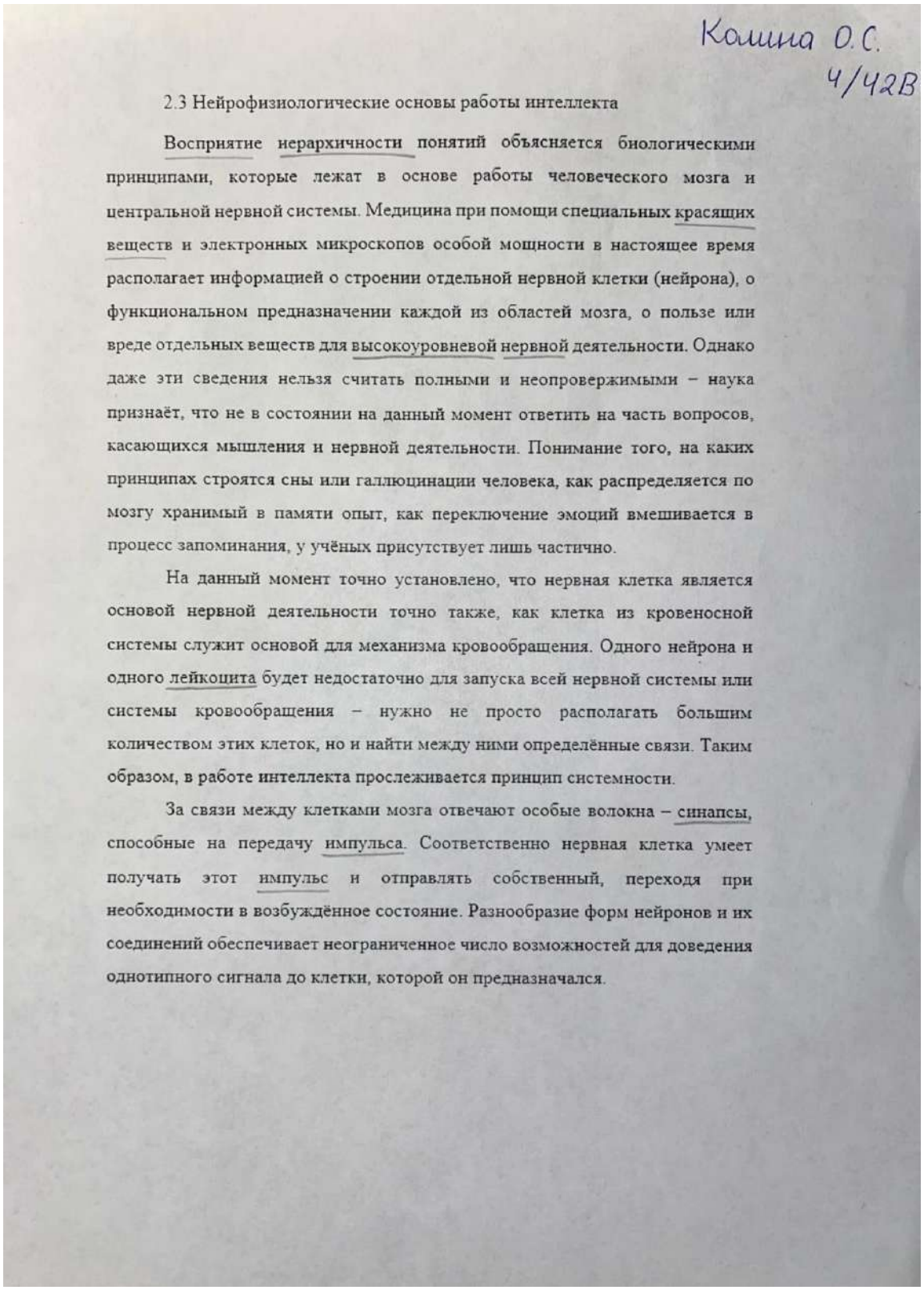
Брюллов изображает поистине адскую картину. Вдалеке пылает вулкан, из недр которого во все стороны растекаются ручьи огненной лавы. Отблески пламени от горящей лавы озаряют красноватым заревом заднюю часть полотна. Вспышка молнии, рассекающая облако пепла и гари, освещает переднюю часть картины.

В своей картине Брюллов использует смелую для своего времени цветовую гамму. Самое пристальное внимание обращает живописец на воздушное перспективу – ему удается создать ощущение глубокого пространства.

Перед нами – целое море людских страданий. В час настоящей трагедии обнажаются человеческие души. Вот мужчина, защищающий своих близких, отчаянно поднял руку, словно пытаясь остановить стихию. Мать, страстно обняв своих детей, с мольбой о пощаде глядит на небо. Вот сыновья на своих плечах пытаются унести слабого старика-отца подальше от опасности. Молодой юноша уговаривает упавшую мать собраться с силами и бежать. В центре картины – погибшая женщина и младенец, тянущийся к безжизненному телу матери.

Картина «Последний день Помпеи» напоминает зрителю о том, что основная ценность мира – человек. Его физическую красоту и духовное величие художник противопоставляет разрушительным силам природы.

Рис. 10 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №3 (текст №2)


Комина О.С.
4/42В

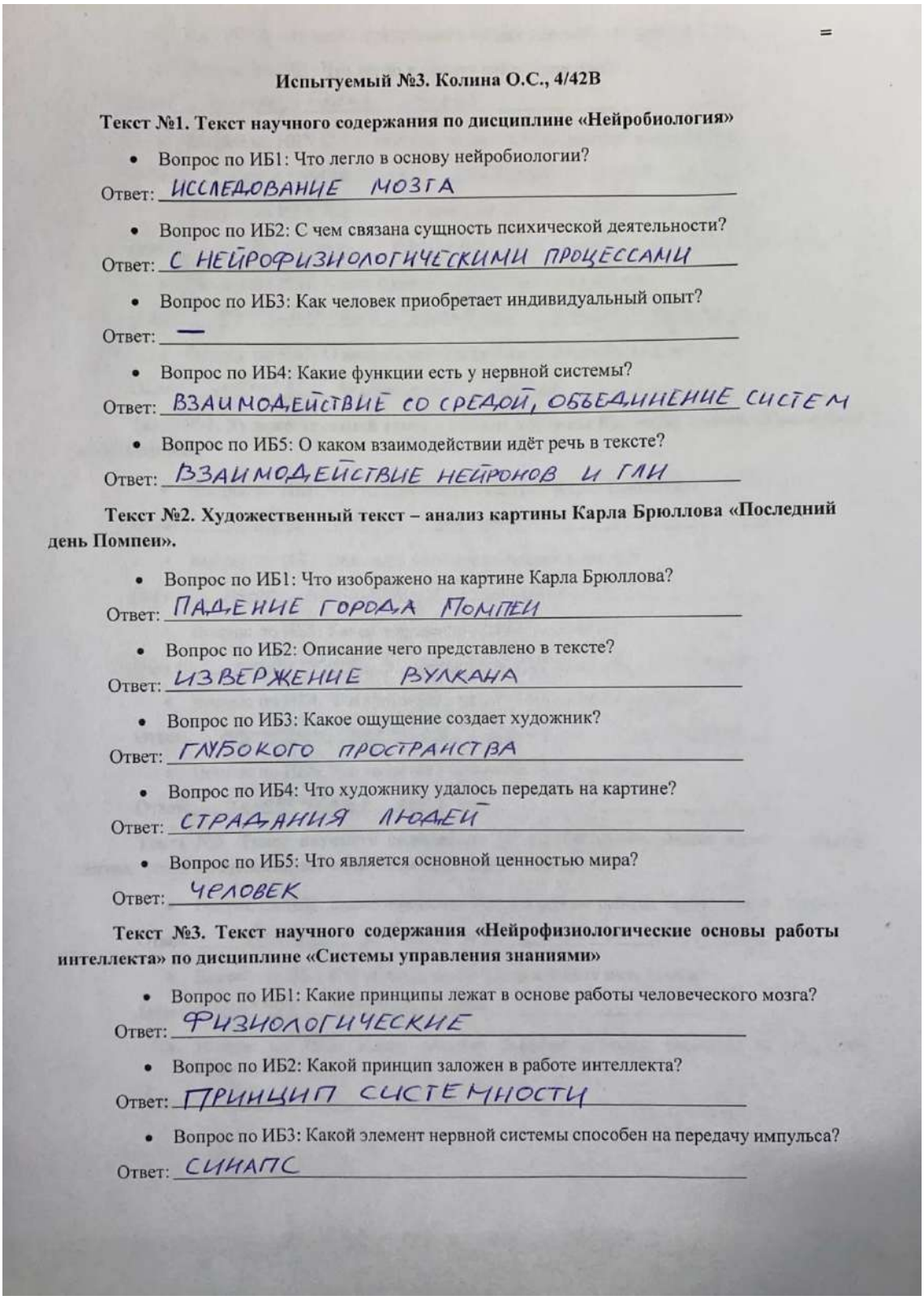
2.3 Нейрофизиологические основы работы интеллекта

Восприятие иерархичности понятий объясняется биологическими принципами, которые лежат в основе работы человеческого мозга и центральной нервной системы. Медицина при помощи специальных красящих веществ и электронных микроскопов особой мощности в настоящее время располагает информацией о строении отдельной нервной клетки (нейрона), о функциональном предназначении каждой из областей мозга, о пользе или вреде отдельных веществ для высокоуровневой нервной деятельности. Однако даже эти сведения нельзя считать полными и неопровержимыми – наука признаёт, что не в состоянии на данный момент ответить на часть вопросов, касающихся мышления и нервной деятельности. Понимание того, на каких принципах строятся сны или галлюцинации человека, как распределяется по мозгу хранимый в памяти опыт, как переключение эмоций вмешивается в процесс запоминания, у учёных присутствует лишь частично.

На данный момент точно установлено, что нервная клетка является основой нервной деятельности точно также, как клетка из кровеносной системы служит основой для механизма кровообращения. Одного нейрона и одного лейкоцита будет недостаточно для запуска всей нервной системы или системы кровообращения – нужно не просто располагать большим количеством этих клеток, но и найти между ними определённые связи. Таким образом, в работе интеллекта прослеживается принцип системности.

За связи между клетками мозга отвечают особые волокна – синапсы, способные на передачу импульса. Соответственно нервная клетка умеет получать этот импульс и отправлять собственный, переходя при необходимости в возбуждённое состояние. Разнообразие форм нейронов и их соединений обеспечивает неограниченное число возможностей для доведения однотипного сигнала до клетки, которой он предназначался.

Рис. 11 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №3 (текст №3)



Испытуемый №3. Колина О.С., 4/42В

Текст №1. Текст научного содержания по дисциплине «Нейробиология»

- Вопрос по ИБ1: Что легло в основу нейробиологии?

Ответ: ИССЛЕДОВАНИЕ МОЗГА

- Вопрос по ИБ2: С чем связана сущность психической деятельности?

Ответ: С НЕЙРОФИЗИОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

- Вопрос по ИБ3: Как человек приобретает индивидуальный опыт?

Ответ: —

- Вопрос по ИБ4: Какие функции есть у нервной системы?

Ответ: ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СО СРЕДОЙ, ОБЪЕДИНЕНИЕ СИСТЕМ

- Вопрос по ИБ5: О каком взаимодействии идёт речь в тексте?

Ответ: ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЙРОНОВ И ГЛИ

Текст №2. Художественный текст – анализ картины Карла Брюллова «Последний день Помпеи».

- Вопрос по ИБ1: Что изображено на картине Карла Брюллова?

Ответ: ПАДЕНИЕ ГОРОДА ПОМПЕИ

- Вопрос по ИБ2: Описание чего представлено в тексте?

Ответ: ИЗВЕРЖЕНИЕ ВУЛКАНА

- Вопрос по ИБ3: Какое ощущение создает художник?

Ответ: ГЛУБОКОГО ПРОСТРАНСТВА

- Вопрос по ИБ4: Что художнику удалось передать на картине?

Ответ: СТРАДАНИЯ ЛЮДЕЙ

- Вопрос по ИБ5: Что является основной ценностью мира?

Ответ: ЧЕЛОВЕК

Текст №3. Текст научного содержания «Нейрофизиологические основы работы интеллекта» по дисциплине «Системы управления знаниями»

- Вопрос по ИБ1: Какие принципы лежат в основе работы человеческого мозга?

Ответ: ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ

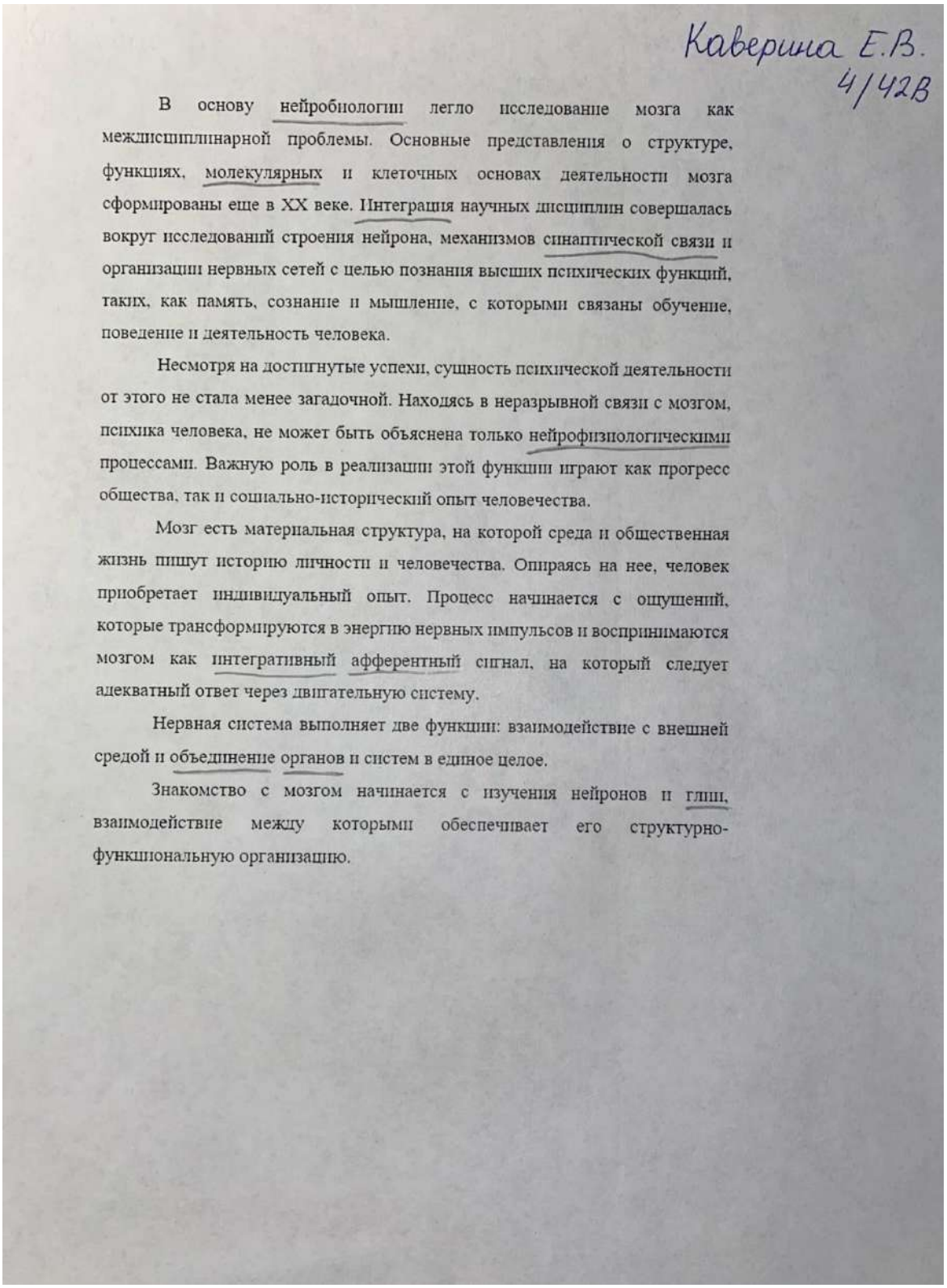
- Вопрос по ИБ2: Какой принцип заложен в работе интеллекта?

Ответ: ПРИНЦИП СИСТЕМНОСТИ

- Вопрос по ИБ3: Какой элемент нервной системы способен на передачу импульса?

Ответ: СИНАПС

Рис. 12 Лист опроса на понимание текста испытуемым №3



Каверина Е.В.
4/42В

В основу нейробиологии легло исследование мозга как междисциплинарной проблемы. Основные представления о структуре, функциях, молекулярных и клеточных основах деятельности мозга сформированы еще в XX веке. Интеграция научных дисциплин совершалась вокруг исследований строения нейрона, механизмов синаптической связи и организации нервных сетей с целью познания высших психических функций, таких, как память, сознание и мышление, с которыми связаны обучение, поведение и деятельность человека.

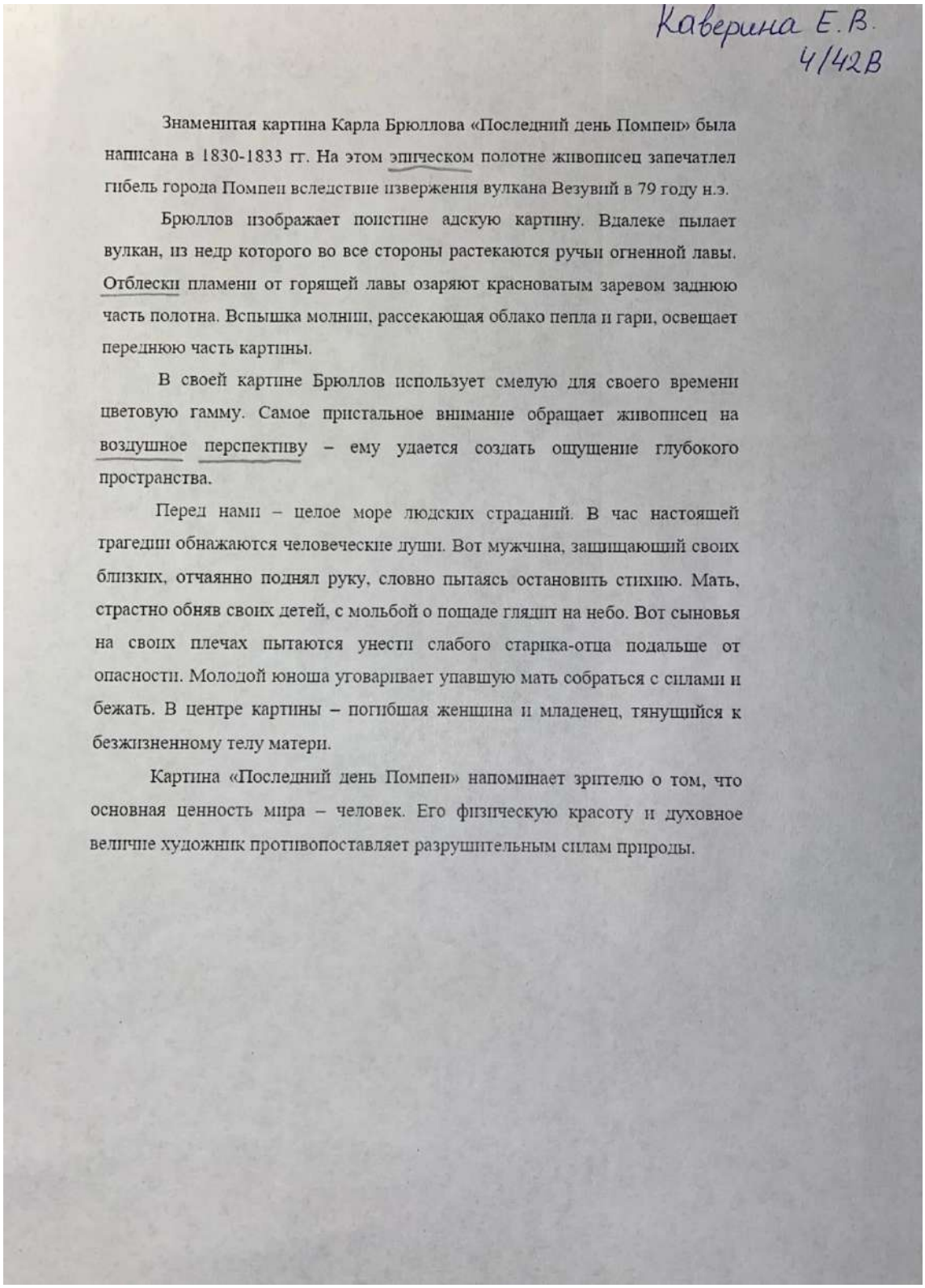
Несмотря на достигнутые успехи, сущность психической деятельности от этого не стала менее загадочной. Находясь в неразрывной связи с мозгом, психика человека, не может быть объяснена только нейрофизиологическими процессами. Важную роль в реализации этой функции играют как прогресс общества, так и социально-исторический опыт человечества.

Мозг есть материальная структура, на которой среда и общественная жизнь пишут историю личности и человечества. Опираясь на нее, человек приобретает индивидуальный опыт. Процесс начинается с ощущений, которые трансформируются в энергию нервных импульсов и воспринимаются мозгом как интегративный афферентный сигнал, на который следует адекватный ответ через двигательную систему.

Нервная система выполняет две функции: взаимодействие с внешней средой и объединение органов и систем в единое целое.

Знакомство с мозгом начинается с изучения нейронов и глии, взаимодействие между которыми обеспечивает его структурно-функциональную организацию.

Рис. 13 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №4 (текст №1)


Каверина Е.В.
4/42В

Знаменитая картина Карла Брюллова «Последний день Помпеи» была написана в 1830-1833 гг. На этом эпическом полотне живописец запечатлел гибель города Помпеи вследствие извержения вулкана Везувий в 79 году н.э.

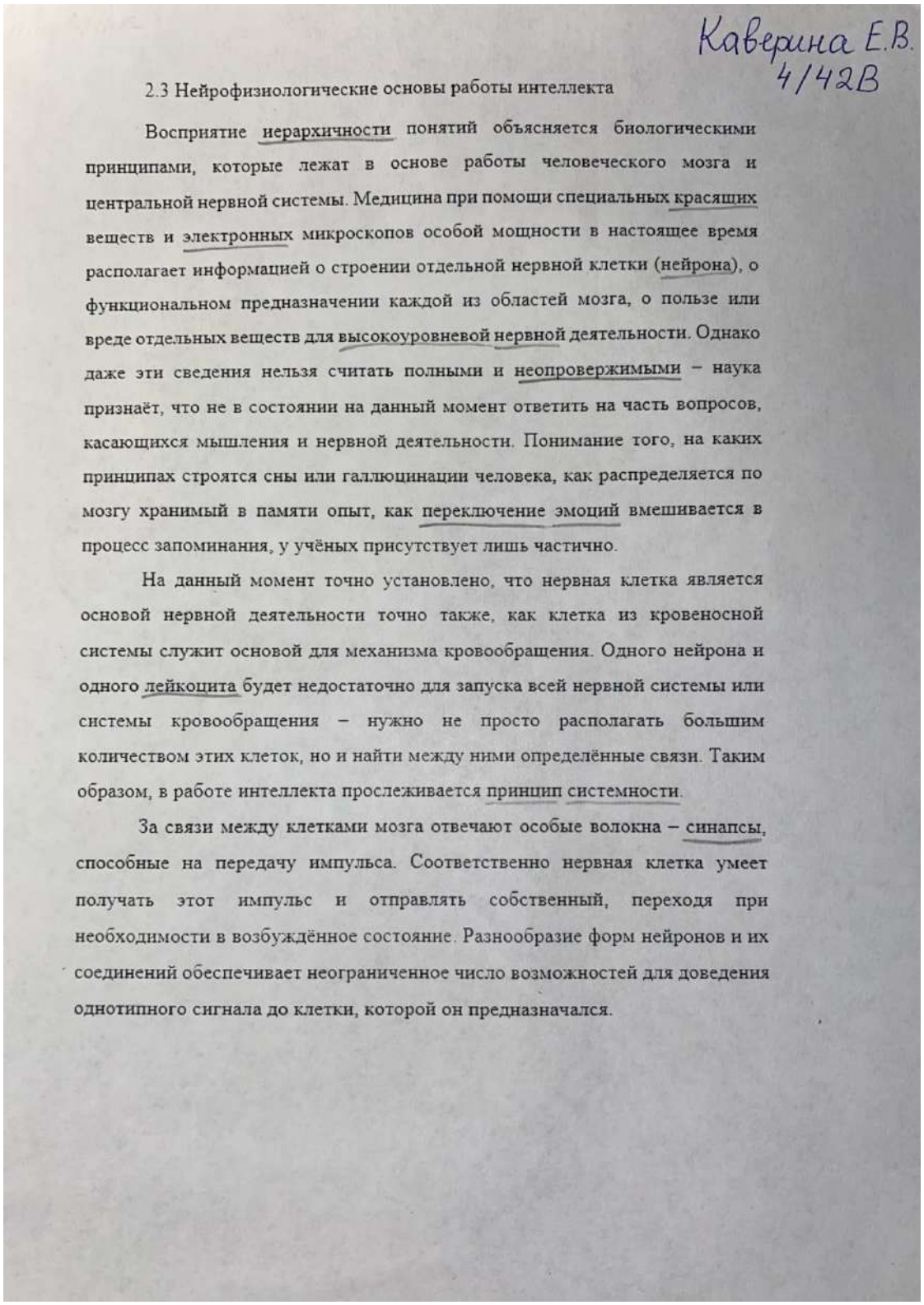
Брюллов изображает поистине адскую картину. Вдалеке пылает вулкан, из недр которого во все стороны растекаются ручьи огненной лавы. Отблески пламени от горящей лавы озаряют красноватым заревом заднюю часть полотна. Вспышка молнии, рассекающая облако пепла и гари, освещает переднюю часть картины.

В своей картине Брюллов использует смелую для своего времени цветовую гамму. Самое пристальное внимание обращает живописец на воздушное перспективу – ему удается создать ощущение глубокого пространства.

Перед нами – целое море людских страданий. В час настоящей трагедии обнажаются человеческие души. Вот мужчина, защищающий своих близких, отчаянно поднял руку, словно пытаясь остановить стихию. Мать, страстно обняв своих детей, с мольбой о пощаде глядит на небо. Вот сыновья на своих плечах пытаются унести слабого старика-отца подальше от опасности. Молодой юноша уговаривает упавшую мать собраться с силами и бежать. В центре картины – погибшая женщина и младенец, тянущийся к безжизненному телу матери.

Картина «Последний день Помпеи» напоминает зрителю о том, что основная ценность мира – человек. Его физическую красоту и духовное величие художник противопоставляет разрушительным силам природы.

Рис. 14 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №4 (текст №2)


Каверина Е.В.
4/42В

2.3 Нейрофизиологические основы работы интеллекта

Восприятие иерархичности понятий объясняется биологическими принципами, которые лежат в основе работы человеческого мозга и центральной нервной системы. Медицина при помощи специальных красящих веществ и электронных микроскопов особой мощности в настоящее время располагает информацией о строении отдельной нервной клетки (нейрона), о функциональном предназначении каждой из областей мозга, о пользе или вреде отдельных веществ для высокоуровневой нервной деятельности. Однако даже эти сведения нельзя считать полными и неопровержимыми – наука признаёт, что не в состоянии на данный момент ответить на часть вопросов, касающихся мышления и нервной деятельности. Понимание того, на каких принципах строятся сны или галлюцинации человека, как распределяется по мозгу хранимый в памяти опыт, как переключение эмоций вмешивается в процесс запоминания, у учёных присутствует лишь частично.

На данный момент точно установлено, что нервная клетка является основой нервной деятельности точно также, как клетка из кровеносной системы служит основой для механизма кровообращения. Одного нейрона и одного лейкоцита будет недостаточно для запуска всей нервной системы или системы кровообращения – нужно не просто располагать большим количеством этих клеток, но и найти между ними определённые связи. Таким образом, в работе интеллекта прослеживается принцип системности.

За связи между клетками мозга отвечают особые волокна – синапсы, способные на передачу импульса. Соответственно нервная клетка умеет получать этот импульс и отправлять собственный, переходя при необходимости в возбуждённое состояние. Разнообразие форм нейронов и их соединений обеспечивает неограниченное число возможностей для доведения однотипного сигнала до клетки, которой он предназначался.

Рис. 15 Результат определения проблемных мест при чтении испытуемым №4 (текст №3)

Испытуемый №4. Каверина Е.В., 4/42В

Текст №1. Текст научного содержания по дисциплине «Нейробиология»

- Вопрос по ИБ1: Что легло в основу нейробиологии?

Ответ: исследование мозга

- Вопрос по ИБ2: С чем связана сущность психической деятельности?

Ответ: с прогрессом общества и соц.-истор. опытом

- Вопрос по ИБ3: Как человек приобретает индивидуальный опыт?

Ответ: —

- Вопрос по ИБ4: Какие функции есть у нервной системы?

Ответ: взаимод. с внешней средой и объедин. органов и систем

- Вопрос по ИБ5: О каком взаимодействии идёт речь в тексте?

Ответ: между нейронами и теми

Текст №2. Художественный текст – анализ картины Карла Брюллова «Последний день Помпеи».

- Вопрос по ИБ1: Что изображено на картине Карла Брюллова?

Ответ: гибель города Помпеи

- Вопрос по ИБ2: Описание чего представлено в тексте?

Ответ: описание людей и природы

- Вопрос по ИБ3: Какое ощущение создает художник?

Ответ: ужаса, страданий и безысходности

- Вопрос по ИБ4: Что художнику удалось передать на картине?

Ответ: сущность человеческой души

- Вопрос по ИБ5: Что является основной ценностью мира?

Ответ: человек

Текст №3. Текст научного содержания «Нейрофизиологические основы работы интеллекта» по дисциплине «Системы управления знаниями»

- Вопрос по ИБ1: Какие принципы лежат в основе работы человеческого мозга?

Ответ: —

- Вопрос по ИБ2: Какой принцип заложен в работе интеллекта?

Ответ: системности

- Вопрос по ИБ3: Какой элемент нервной системы способен на передачу импульса?

Ответ: синапсе

Рис. 16 Лист опроса на понимание текста испытуемым №4

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПОЛИТИКА ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНГВИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КОНТЕНТА ВЕБ-РЕСУРСОВ (ИЛАК)

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

С целью автоматизации процессов, в НПЦ «АНОД» введена в действие ИС «ИЛАК».

К работе с компонентами ИС допущены системные администраторы, администратор информационной безопасности (далее - Администратор) и пользователи информационной системы (далее - Пользователи). В НПЦ «АНОД» назначен ответственный за организацию обработки персональных данных (далее - Ответственный).

С целью защиты информации от несанкционированного нарушения ее конфиденциальности, целостности и доступности в ИС организационными и программно-аппаратными средствами, правовыми и инженерно-техническими средствами реализована система защиты информации.

Несмотря на то, что многие действия по защите информации производятся прозрачно для Пользователя, он остается активным участником процесса по защите конфиденциальной информации и является вовлеченным в процессы обеспечения информационной безопасности в НПЦ «АНОД».

Пользователи ИС не являются привилегированными пользователями информационной системы и получают доступ к ресурсам информационной системы в соответствии с Положением о разграничении доступа в ИС «ИЛАК» Каждому Пользователю предоставляется минимально необходимый для выполнения своих служебных обязанностей доступ к ресурсам ИС.

Пользователи ИС при работе с техническими средствами и информационными технологиями, являющимися частью ИС должны соблюдать положения настоящей Политики.

Настоящая Политика разработана с учетом положений, следующих законодательных и нормативно-правовых актов:

- Федеральный закон № 149-ФЗ от 27 июля 2006 года «Об информации, информатизации и защите информации»;
- Федеральный закон № 152-ФЗ от 27 июля 2006 года «О персональных данных»;
- «Требования к защите персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных», утвержденные Постановлением Правительства РФ № 1119 от 1 ноября 2012 года;
- «Требования о защите информации, не составляющей государственную тайну, содержащейся в государственных информационных системах», утвержденные приказом ФСТЭК России № 17 от 11 февраля 2013 года;
- «Состав и содержание организационных и технических мер по обеспечению безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных», утвержденный приказом ФСТЭК России № 21 от 18 февраля 2013 года;
- «Положение о разработке, производстве, реализации и эксплуатации шифровальных (криптографических) средств защиты информации», утвержденное приказом ФСБ от 9 февраля 2005 №66.

2. ОБЩИЕ ОБЯЗАННОСТИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ПО ЗАЩИТЕ ИНФОРМАЦИИ В ИС

Пользователь в ИС выполняет только те действия, которые необходимы для выполнения его служебных обязанностей. Любые посторонние действия в ИС запрещены.

Пользователь подписывает соглашение о неразглашении конфиденциальной информации перед началом выполнения служебных обязанностей, связанных с доступом к такой информации.

Пользователь незамедлительно оповещает Администратора о любой подозрительной активности в ИС.

Пользователю запрещено использовать личные технические средства (ноутбуки, смартфоны, планшеты, фотокамеры, флеш-носители, съемные жесткие диски и пр.) для несанкционированного копирования, фотографирования, распространения и передачи защищаемой информации.

Пользователь принимает участие в инструктажах по информационной безопасности, проводимым Администратором и Ответственным. При получении дополнительных материалов от Администратора и Ответственного во время инструктажей, Пользователь самостоятельно изучает их с целью повышения своей осведомленности в вопросах информационной безопасности и защиты персональных данных.

Пользователь визуально контролирует целостность технических средств на своем рабочем месте (отсутствие попыток физического вскрытия системного блока и пр.). При подозрении на нарушение целостности технических средств ИС, Пользователь сообщает об этом Администратору. Пользователю запрещен самостоятельный ремонт технических средств ИС, а также привлечение посторонних лиц для такого ремонта.

В случае объективной необходимости, Пользователь участвует в составе группы реагирования на инциденты информационной безопасности в расследованиях причин инцидентов безопасности.

В целях блокирования возможности несанкционированного ознакомления с защищаемой информацией на экране монитора, Пользователь должен блокировать сеанс работы в ИС при покидании рабочего места более чем на 2 минуты. Блокировка сеанса работы в ИС производится нажатием клавиш Win+L.

Пользователю запрещены любые действия в ИС до прохождения процедуры идентификации и аутентификации в системе (до ввода логина и пароля).

Пользователю запрещено изменение источника загрузки своего автоматизированного рабочего места (далее - АРМ) и загрузка АРМ с внешних носителей.

Антивирусная защита в ИС реализована прозрачно для пользователя, установка антивирусных программ, обновление антивирусных баз, запуск антивирусных проверок, сбор информации о найденных вирусах производится Администратором централизованно. Пользователю запрещено изменять настройки антивирусного программного обеспечения или отключать его (даже на короткое время). Пользователь должен оповещать Администратора о локальных сообщениях антивирусного программного обеспечения на его АРМ. Пользователь должен оповещать Администратора о любых аномалиях в работе АРМ.

Пользователю запрещается самостоятельная установка любого программного обеспечения, даже необходимого для выполнения своих служебных обязанностей. Установка разрешенного в ИС программного обеспечения осуществляется Администратором и системными администраторами ИС. Также к установке и настройке программного обеспечения в ИС, при условии соблюдения мер по защите информации, допускаются сотрудники сторонних организаций.

Пользователь должен пресекать попытки посторонних лиц (или лиц, не имеющих соответствующих полномочий) тем или иным образом получить доступ к его учетным данным, конфиденциальной информации в ИС, ключевой информации криптосредства и к любой другой защищаемой информации. Пользователь незамедлительно сообщает Администратору о подобных попытках (как удачных, так и неудачных).

Администратор отключает возможность использования на АРМ технологий мобильного кода (JavaScript, AdobeFlash, макросы в Microsoft Office и др.). Пользователю запрещено использовать технологии мобильного кода в обход принятых в НПЦ «АНОД» политик информационной безопасности.

Пользователь в меру своих сил и возможностей содействует проведению служебных расследований, инициированных в связи с инцидентами информационной безопасности.

В НПЦ «АНОД» действует политика управления информационными потоками и фильтрации сетевого трафика. Пользователь работает только с теми сетевыми ресурсами (сетевые папки, веб-сайты и пр.), которые разрешены и, работа с которыми необходима Пользователю для выполнения своих служебных обязанностей. Белый список внешних сетевых ресурсов приведен в приложении к Политике информационной безопасности. Пользователь имеет право сделать запрос Администратору на разрешение работы с заблокированными сетевыми ресурсами, обосновав необходимость внесения нового ресурса в белый список. Пользователю запрещено получать доступ к запрещенным внешним ресурсам в обход политик безопасности.

Пользователь осуществляет обработку защищаемой информации в ИС в соответствии с технологическими процессами обработки информации, описанными в Политике информационной безопасности.

Пользователь принимает меры по противодействию несанкционированному просмотру защищаемой информации с экрана монитора посторонними лицами. К таким мерам относятся:

- сворачивание окна, в котором отображена защищаемая информация или блокирование сеанса Пользователя при нахождении посторонних лиц вблизи рабочего места Пользователя с фронтальной стороны монитора;
- ориентация монитора задней частью к дверным проемам и окнам;
- в случае вынужденной ориентации монитора фронтальной частью к окну, Пользователь во время работы с защищаемой информацией закрывает шторы, жалюзи.

Пользователь должен знать и соблюдать положения настоящей Политики, а также других внутренних нормативных документов НПЦ «АНОД». При возникновении у Пользователя вопросов по защите информации и защите персональных данных в НПЦ «АНОД», он обращается к Администратору и Ответственному. Новые Пользователи ГИС перед началом выполнения своих служебных обязанностей изучают положения настоящей Политики.

При работе с криптографическими средствами защиты информации (СКЗИ) Пользователь выполняет предписание Политики по обеспечению безопасности эксплуатации СКЗИ.

3. ПРАВИЛА УПРАВЛЕНИЯ ИДЕНТИФИКАТОРАМИ, УЧЕТНЫМИ ЗАПИСЯМИ И ПАРОЛЯМИ

В НПЦ «АНОД» с целью обеспечения информационной безопасности внедрены политики управления идентификаторами, учетными записями и паролями.

Пользователь перед началом работы в ИС получает учетные данные (персональный идентификатор, логин, временный пароль) у Администратора. Администратор выдает учетные данные Пользователю на основании заявки, заполненной по форме.

При первом входе в систему Пользователь изменяет первичный временный пароль, назначенный ему Администратором. Временной промежуток между выдачей временного пароля и первым входом Пользователя в информационную систему не должен составлять более одного часа. Пароли должны соответствовать следующим требованиям:

- минимальная длина пароля составляет 8 символов, пароль должен содержать буквы английского алфавита верхнего и нижнего регистров, как минимум одну цифру и один спецсимвол;
- новый пароль должен отличаться минимум на два символа от предыдущего;

- запрещается использование пользователями пяти последних использованных паролей при создании новых паролей.

Максимальное время действия пароля - 90 дней. По истечении срока действия пароля, Пользователь должен придумать новый пароль, удовлетворяющий требованиям к паролям.

Пользователю запрещено записывать и хранить пароли в местах, доступных для просмотра посторонним лицам (на отдельных листах бумаги, в не запираемой тумбе, под клавиатурой, на мониторе и т. п.).

Пользователь должен удостовериться, что при вводе пароля никто не наблюдает за процессом ввода пароля.

Пользователю запрещено разглашать другим пользователям свой пароль, в том числе Администратору.

Пользователю запрещено вводить свои учетные данные для предоставления возможности временной работы в ГИС другим Пользователями или посторонним лицам, поскольку все выполненные этими лицами действия в ГИС будут считаться действиями, выполненными Пользователем. Ответственность за неправомерные действия таких посторонних лиц несет Пользователь.

Пользователю запрещено оставлять без присмотра персональный идентификатор (электронный ключ).

При подозрении на компрометацию пароля или иной идентификационной информации, Пользователь должен незамедлительно сообщить об этом Администратору.

4. ПРОТИВОДЕЙСТВИЕ МЕТОДАМ СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И ПРАВИЛА РАБОТЫ С ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТОЙ

Применение злоумышленником методов социальной инженерии является самым эффективным и разрушительным способом нарушения информационной безопасности на любом предприятии в обход всех технических мер по защите информации. Методы социальной инженерии направлены на использование человеческого фактора (человеческих слабостей и недостатков) с целью получения от Пользователя защищаемой информации или его учетных данных в ГИС (логин и пароль). Злоумышленники - социальные инженеры для достижения своих целей могут эксплуатировать следующие особенности того или иного Пользователя:

- лень;
- спешка (паника);
- безразличие;
- профессиональный интерес;
- желание;
- жадность;
- сострадание;
- доверчивость;
- страх.

Основным способом реализации методов социальной инженерии является обман Пользователя. Поскольку социальная инженерия нацелена на слабости человека, а не на технические недоработки или уязвимости информационной системы, наиболее эффективным методом противодействия социальной инженерии является повышение осведомленности Пользователей о методах социальной инженерии.

Взаимодействие социального инженера с Пользователем бывает трех типов: контактное (личное), телефонное и взаимодействие через электронные каналы связи. Наиболее распространено взаимодействие через электронные каналы связи, в особенности по электронной почте.

При личном и телефонном общении Пользователь должен убедиться, что разговаривает именно с тем человеком, за которого себя выдает собеседник. При личном

или телефонном взаимодействии социальный инженер обычно использует следующие тактики:

- представившись сотрудником технической поддержки какого-либо сервиса или службы, социальный инженер сообщает Пользователю о какой-либо поломке или нарушении в функционировании того или иного необходимого в работе сервиса, вызывая тем самым панику и заставляя Пользователя сообщить свои учетные данные;
- представившись руководителем высокого ранга, социальный инженер изображает гнев и недовольство действием или бездействием Пользователя, вынуждая сообщить учетные данные или иную конфиденциальную информацию;
- представившись сотрудником организации, деятельность которой так или иначе может быть интересна Пользователю вынуждает сообщить учетную или иную конфиденциальную информацию;
- иные подобные тактики.

При взаимодействии через электронную почту, социальный инженер преследует одну из двух основных целей:

1) заражение АРМ Пользователя вредоносным программным обеспечением через запуск приложенного к письму файла или переходом по вредоносной ссылке;

2) переход Пользователя по поддельной ссылке, по которой находится точная копия формы авторизации легального сервиса и ввод в эту форму идентификационной информации (как правило, при первом вводе логина и пароля поддельная форма сообщает о неправильном вводе пароля и перенаправляет на настоящую форму авторизации сервиса).

Наиболее распространенные примеры применения методов социальной инженерии с использованием каналов электронной почты:

- письмо от налоговой инспекции с предложением установить из вложенного файла новые формы для сдачи налоговых деклараций;
- письмо из банка о просроченном платеже по кредиту, подробности во вложенном файле;
- письмо из суда о возбуждении административного/уголовного дела, подробности во вложении;
- письмо от провайдера об одностороннем изменении тарифного плана, подробности во вложении;
- письмо от банка (или любого другого учреждения) о блокировке учетной записи на сайте или личного кабинета, необходимо пройти по ссылке, ввести учетные данные и вручную разблокировать личный кабинет или учетную запись;
- письмо от сервиса электронной почты (gmail.com, mail.ru, yandex.ru и т. п.) о грядущей блокировке почтового ящика, об исчерпании свободного места и т. д., необходимо пройти по ссылке, ввести учетные данные и выполнить некоторые действия.

При работе с электронной почтой в контексте противодействия методам социальной инженерии Пользователь руководствуется следующей информацией:

- совпадение адреса отправителя электронного письма с доверенным адресом не является гарантией подлинности самого письма, поскольку поле «от кого» может быть подделано злоумышленником;
- любые письма с вложениями являются подозрительными;
- любые письма, в которых отсутствует альтернативная контактная информация отправителя (ФИО, должность, мобильный, рабочий телефон, почтовый адрес) являются подозрительными;
- при получении неожидаемого электронного письма с вложением или ссылкой от якобы доверенного отправителя, необходимо по альтернативным каналам связи (лично, по телефону, через мессенджер) уточнить факт отправки такого письма;
- государственные и иные организации (банки, операторы связи и т. д.) не уведомляют своих клиентов о каких-либо проблемах, исках, блокировках по электронной

почте, это делается официальным письмом на бумажном носителе, через СМС (например, в случае подключенного онлайн банкинга) или по телефону;

- необходимо тщательно проверять корректность ссылок, по которым просят пройти в письме, чаще всего злоумышленники используют похожие, но другие доменные имена, чтобы ввести Пользователя в заблуждение, например, заменяя букву “b” на букву “d” или цифру “1” на букву “l” и наоборот.

Атаки социальных инженеров могут быть веерными (нацеленными на как можно большее число жертв), так и целенаправленными (нацеленными на конкретную организацию или на конкретного человека). В случае целенаправленных атак, социальный инженер изучает информацию о потенциальной жертве и об организации из открытых источников (сайт компании, сайты партнеров и контрагентов, электронные биржи труда, социальные сети, новостные ленты и прочие ресурсы). В случае, если о Пользователе публикуется информация в открытых источниках или он сам публикует информацию о своем месте работы, роде деятельности, должностных обязанностях, Пользователь должен быть готов к применению этой информации социальным инженером против него.

В случае подозрения Пользователя на применение против него методов социальной инженерии, Пользователь незамедлительно сообщает о данном факте Администратору.

5. РАБОТА СО СЪЕМНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ ИНФОРМАЦИИ

Пользователю разрешается использовать только учтенные съемные носители информации в ИС (флешки, съемные жесткие диски, карты памяти и пр.).

При необходимости использования для исполнения служебных обязанностей съемных носителей информации Пользователь в письменной форме делает запрос Администратору на выдачу учтенного съемного носителя информации. Пользователь расписывается за получение и сдачу учтенного съемного носителя информации в Журнале учета носителей информации.

При необходимости выноса съемного носителя из помещения, Пользователь обеспечивает защиту съемного носителя от утери, кражи или компрометации защищаемой информации на этом носителе.

В случае утери, кражи или компрометации учтенного носителя, Пользователь оперативно сообщает об этом Администратору.

Пользователь несет ответственность за сохранность выданных ему съемных носителей информации и за конфиденциальность защищаемой информации, записанной на него.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

РЕГЛАМЕНТ ПРОЦЕССА «ЛИНГВИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЕБ-КОНТЕНТА»

1. Общие положения

Настоящий документ является регламентом выполнения процесса «Лингвистический анализ веб-контента» в системе мониторинга восприятия контента НПЦ АНОД и разработан в целях:

- Обеспечение мониторинга процесса чтения пользователя материала веб-ресурса, с целью получения данных о степени восприятия контента, представленной пользователю;
- Параметрическая модель процесса чтения конкретного пользователя, с целью выявления проблемных мест при восприятии информационного блока и поддержке решения по адаптации контента;
- Показатели чтения – скорость чтения (Vr), тип чтеца (Tipe_id), необходимые для инструмента структуризации контента с целью регулирования подачи информационного наполнения с учетом индивидуальных особенностей пользователя при чтении;
- Установления ответственности за результаты процесса и его подпроцессов;
- Установления периодичности выполнения функций подпроцессов;
- Установления входной и выходной информации процесса и его подпроцессов.

2. Содержание деятельности

Содержанием деятельности по процессу «Лингвистический анализ веб-контента» является определение уровня понимания контента пользователем в режиме реального времени в совокупности с системой окулографического мониторинга (СОМ). Это позволит повысить эффективность системы создания и управления контентом (СИАК) посредством автоматизации процесса адаптации контента, а также позволит использовать комплексную систему в рамках маркетинговой деятельности, при оценке прочитанного текста (контента).

3. Ответственный за процесс

Ответственным за выполнение деятельности лингвистического анализа веб-контента является контент-менеджер.

4. Исполнители процесса

Исполнителями процесса являются

- контент-менеджер;
- конечный пользователь;
- системный администратор.

5. Входы процесса

Таблица 1. Входы процесса «Лингвистический анализ веб-контента»

Вход процесса	Поставщик	Время поступления
Координаты взгляда пользователя { x: ***, y: *** , time1, time2}	Система окулографического мониторинга	При восприятии контента конечным пользователем
СЗЕ, координаты расположения СЗЕ на экране и числовые показатели	Система создания и адаптации контента	При восприятии контента конечным пользователем

значимости для каждой СЗЕ текста: {"paragraphs": [/* массив информационных блоков, порядок совпадает с порядком подачи контента */{"words": [/* массив координат слов в абзаце */ {x: ***, y: ***,weight:*** /* семантическая важность */},/* ... */]},/* ... */],}		

6. Выходы процесса

Таблица 2. Выходы процесса «Лингвистический анализ веб-контента»

Выход процесса	Получатель	Время выхода
Показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt)	Система создания и адаптации контента	Сразу после расчета показателя (Spt opt)
JSON-строка {Vr:***, Tipe_id:***}	Инструмент структуризации веб-контента	Сразу после определения техники чтения пользователя
JSON-строка {word:***,xj:***,yj:***,weight}	Система создания и адаптации контента	Сразу после определения СЗЕ, вызвавшего затруднение (мгновенно)

7. Матрица ответственности процесса

Таблица 3. Матрица ответственности процесса

Подпроцессы	Системный администратор	Конечный пользователь	Контент-менеджер
Регистрация показателей движения глаз	ОТ, УЧ, ИН	УЧ	ИН
Оценка показателей процесса чтения пользователя	ОТ, УЧ, ИН	-	ИН
Определение уровня восприятия пользователем информационного блока	ОТ, УЧ, ИН	-	ИН
Расчёт показателей техники чтения пользователей	ОТ, УЧ, ИН	-	ИН

8. Описание подпроцессов

8.1. Подпроцесс «Регистрация показателей движения глаз»

Ответственным за выполнение подпроцесса является системный администратор. Исполнителями подпроцесса являются: контент-менеджер, конечный пользователь (чьи показатели движения получает система).

Периодичность выполнения подпроцесса: 150-300 мс.

Подпроцесс осуществляется с помощью интерфейса системы лингвистического анализа веб-контента. Работа с системой осуществляется на основании документа «Руководство пользователя».

Входы подпроцесса:

Таблица 4. Входы подпроцесса «Регистрация показателей движения глаз»

Вход подпроцесса	Поставщик	Время поступления	Форма представления
Координаты взгляда пользователя { x: ***, y: *** , time1, time2}	Система окулографического мониторинга	При восприятии контента конечным пользователем	JSON-строка

СЗЕ, координаты расположения СЗЕ на экране и числовые показатели значимости для каждой СЗЕ текста: {"paragraphs": [/* массив информационных блоков, порядок совпадает с порядком подачи контента */{"words": [/* массив координат слов в абзаце */ {x: ***, y: ***,weight:*** /* семантическая важность */},/* ... */]},/* ... */],}	Система создания и адаптации контента	При восприятии контента конечным пользователем	JSON-файл

Выходы подпроцесса:

Таблица 5. Выходы подпроцесса «Регистрация показателей движения глаз»

Выход подпроцесса	Получатель	Время выхода	Форма представления
Показатели движения взгляда {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,weight,DFix,dt,R]}	Информационный объект в хранилище данных «Показатели движения взгляда»	Мгновенно после регистрации фиксации на СЗЕ	JSON-строка
Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд (CountFix)	Функция определения уровня восприятия пользователем ИБ	Мгновенно после определения показателя CountFix	JSON-строка
Показатель регрессии на информационный блок (Rb)	Функция расчёта показателей техники чтения пользователя	Мгновенно после определения показателя регрессии	Переменная
Время чтения ИБ (TimeB)	Функция расчёта показателей техники чтения пользователя	Мгновенно после определения показателя TimeB	Переменная

Требования к качеству: в соответствии с возможностями системы окулографического мониторинга, обеспечивающей формирование набора данных с координатами взгляда пользователя и указанием времени, представленных JSON-строкой {[xi:***,yi:***,time1, time2]} обеспечить регистрацию показателей движения взгляда пользователя по семантически значимым единицам для выявления проблемных мест при понимании информационного наполнения.

Схема подпроцесса (в нотации IDEF3):

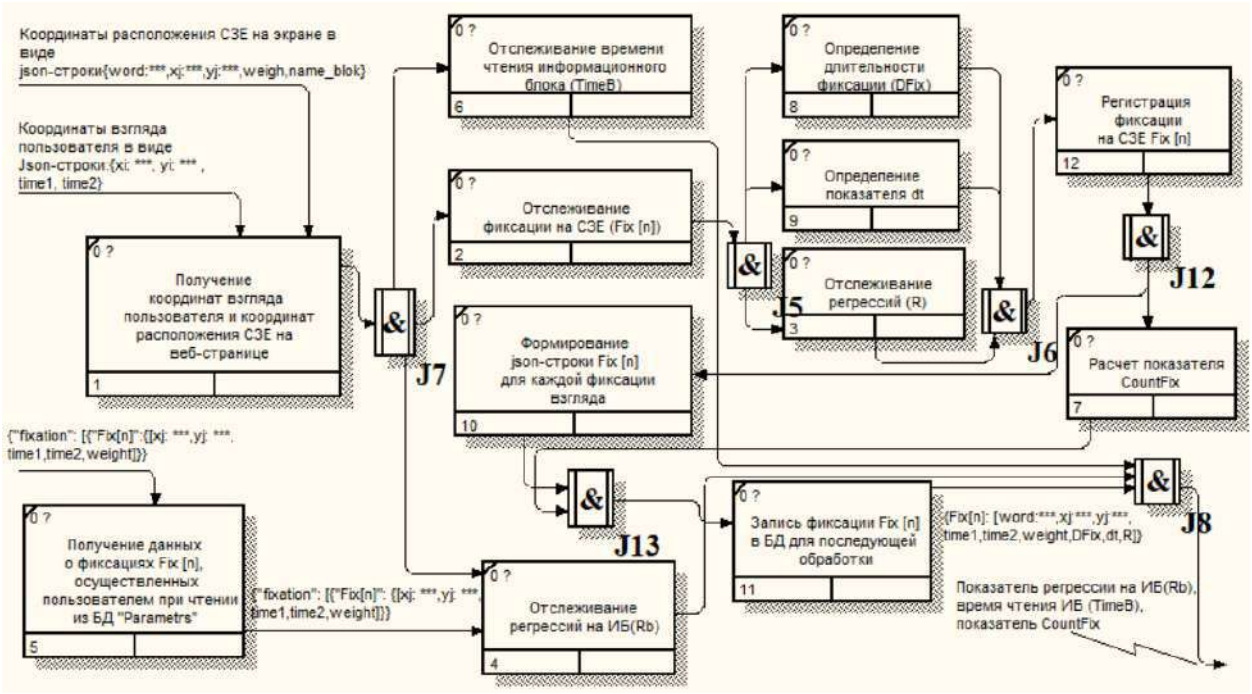


Рис. 1 Схема процесса «Регистрация показателей движения взгляда»

8.2. Подпроцесс «Оценка показателей процесса чтения пользователя»

Ответственным за выполнение подпроцесса является системный администратор.

Периодичность выполнения подпроцесса: сразу после получения параметров движения взгляда, с задержкой не более 150 мс.

Подпроцесс осуществляется с помощью интерфейса системы лингвистического анализа веб-контента. Работа с системой осуществляется на основании документа «Руководство пользователя».

Входы подпроцесса:

Таблица 6. Входы подпроцесса «Оценка показателей процесса чтения пользователя»

Вход подпроцесса	Поставщик	Время поступления	Форма представления
Показатель фиксации {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,weight,DFix,dt,R]}	Информационный объект в хранилище данных «Показатели движения взгляда»	Сразу после регистрации фиксации на СЭЕ	JSON-строка

Выходы подпроцесса:

Таблица 7. Выходы подпроцесса «Оценка показателей процесса чтения пользователя»

Выход подпроцесса	Получатель	Время выхода	Форма представления
Параметры СЭЕ, вызвавшей затруднения при восприятии {word:***,xj:***,yj:***,weight}	Система создания и адаптации контента	Сразу после получения параметров движения взгляда, с задержкой не более 150 мс	JSON-строка

Требования к качеству: В соответствии с показателями движения взгляда, представленными как входной поток в виде JSON-строки {Fix[n]:

[word:***,xj:***,yj:***,weight,DFix,dt,R]} обеспечить определение проблемных мест при чтении контента и расчет показателя узнаваемости слова, определенном в научно-исследовательской работе, характеризующего уровень восприятия СЗЕ пользователем.

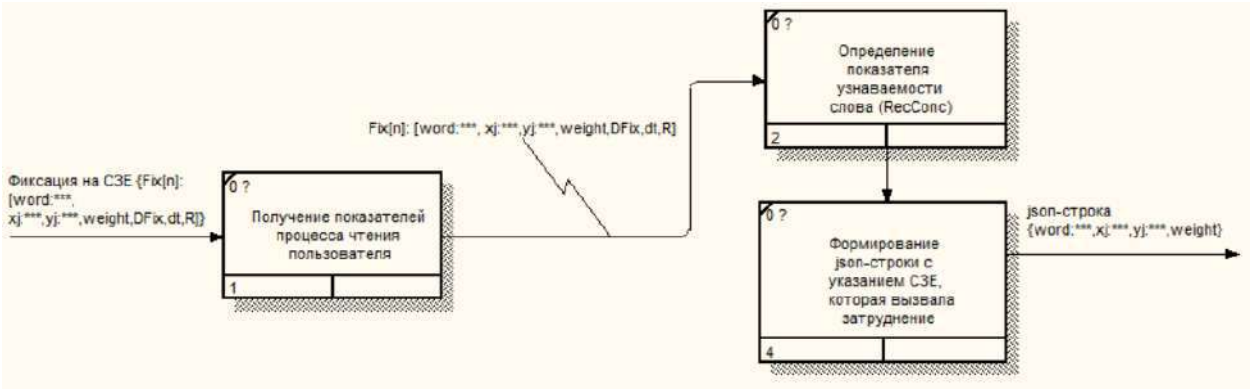


Рис. 2 Схема процесса «Оценка показателей процесса чтения пользователя»

8.3. Подпроцесс «Определение уровня восприятия пользователем информационного блока»

Ответственным за выполнение подпроцесса является системный администратор.

Периодичность выполнения подпроцесса: выполнение процедуры каждый раз после прочтения информационного блока пользователем;

Подпроцесс осуществляется с помощью интерфейса системы лингвистического анализа веб-контента. Работа с системой осуществляется на основании документа «Руководство пользователя».

Входы подпроцесса:

Таблица 8. Входы подпроцесса «Определение уровня восприятия пользователем информационного блока»

Вход подпроцесса	Поставщик	Время поступления	Форма представления
Массив из СЗЕ информационного блока: {"paragraphs": [/* массив информационных блоков, порядок совпадает с порядком подачи контента */{"words": [/* массив координат слов в абзаце */ {x: ***, y: ***,weight:*** /* семантическая важность */},/* ... */]},/* ... */],}	Система создания и адаптации контента	При восприятии контента пользователем	JSON-файл
Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд (CountFix)	Подсистема определения уровня восприятия пользователем ИБ	Сразу после расчета показателя CountFix (мгновенно)	JSON-строка

Выходы подпроцесса:

Таблица 9. Выходы подпроцесса «Определение уровня восприятия пользователем информационного блока»

Выход подпроцесса	Получатель	Время выхода	Форма представления
Показатель полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt)	Система создания и адаптации контента	Сразу после расчета показателя Spt opt	Переменная
Количество символов в массиве ИБ (CountSymbol)	Подсистема расчёта показателей техники чтения пользователя	Сразу после расчета показателя CountSymbol	Переменная

Требования к качеству: в соответствии с входным потоком «Количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд (CountFix)» от задачи регистрации показателей движения взгляда и массивом информационного блока, представленного виде Json-файла структуры: {"paragraphs": [/* массив ИБ, порядок совпадает с порядком подачи контента */} обеспечить определение уровня восприятия пользователем информационного блока с помощью расчета показателя полноты чтения пользователя ИБ, характеризующего понимание контента в ИБ в соответствии с тезаурусом пользователя.

Схема подпроцесса (в нотации IDEF3):

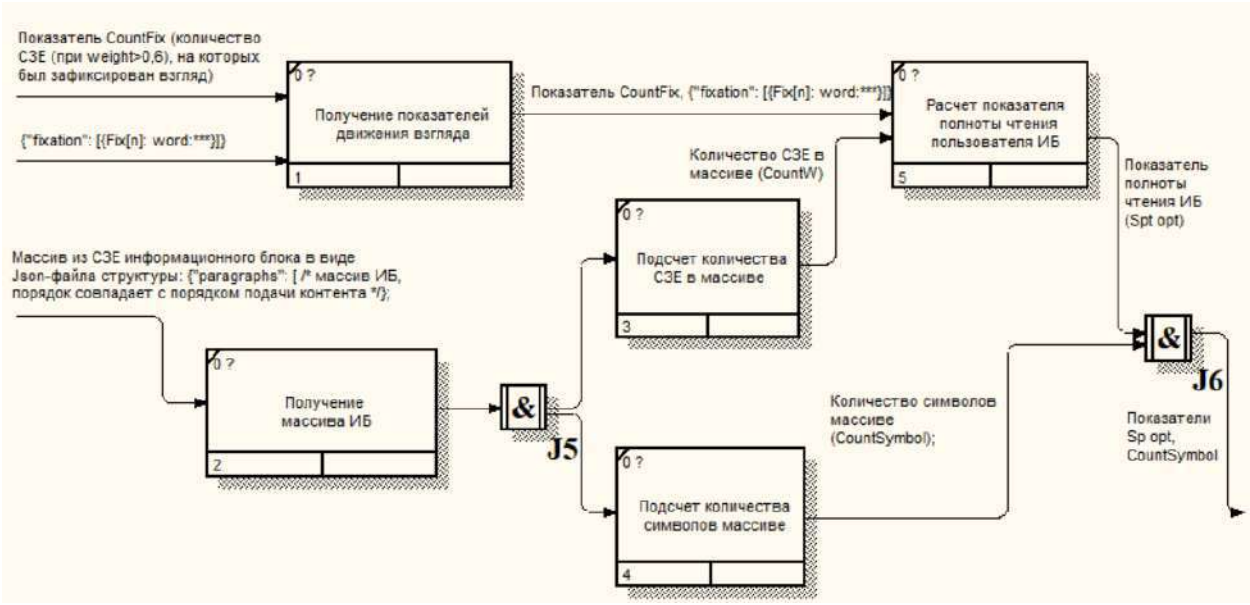


Рис. 3 Схема подпроцесса «Определение уровня восприятия пользователем информационного блока»

8.4. Подпроцесс «Расчёт показателей техники чтения пользователей»

Ответственным за выполнение подпроцесса является системный администратор.

Периодичность выполнения подпроцесса: выполнение процедуры каждый раз после прочтения информационного блока пользователем;

Подпроцесс осуществляется с помощью интерфейса системы лингвистического анализа веб-контента. Работа с системой осуществляется на основании документа «Руководство пользователя».

Входы подпроцесса:

Таблица 10. Входы подпроцесса «Расчёт показателей техники чтения пользователей»

Вход подпроцесса	Поставщик	Время поступления	Форма представления
Количество символов в массиве ИБ (CountSymbol)	Подсистема определения уровня восприятия пользователем ИБ	Сразу после расчета показателя CountSymbol (мгновенно)	Переменная

Показатель регрессии на информационный блок (Rb)	Подсистема регистрации показателей движения глаз	Сразу после расчета показателя регрессии на ИБ (мгновенно)	Переменная
Время чтения ИБ (TimeB)	Подсистема регистрации показателей движения глаз	Сразу после расчета показателя TimeB (мгновенно)	Переменная

Выходы подпроцесса:

Таблица 11. Выходы подпроцесса «Расчёт показателей техники чтения пользователей»

Выход подпроцесса	Получатель	Время выхода	Форма представления
Тип чтеца {Vr:***, Tipe_id:***}	Инструмент структуризации веб-контента	Мгновенно после поступления запроса на выполнение	JSON-строка

Требования к качеству: в соответствии с входными потоками: показатель регрессии на информационный блок (Rb); время чтения информационного блока (TimeB); количество слов в массиве ИБ (CountW) и типами чтецов из сущности БД «Тип чтеца» обеспечить расчет показателей техники чтения и определить тип чтения пользователя на основании моделей чтецов, утвержденных в научно-исследовательской работе.

Схема подпроцесса (в нотации IDEF3):

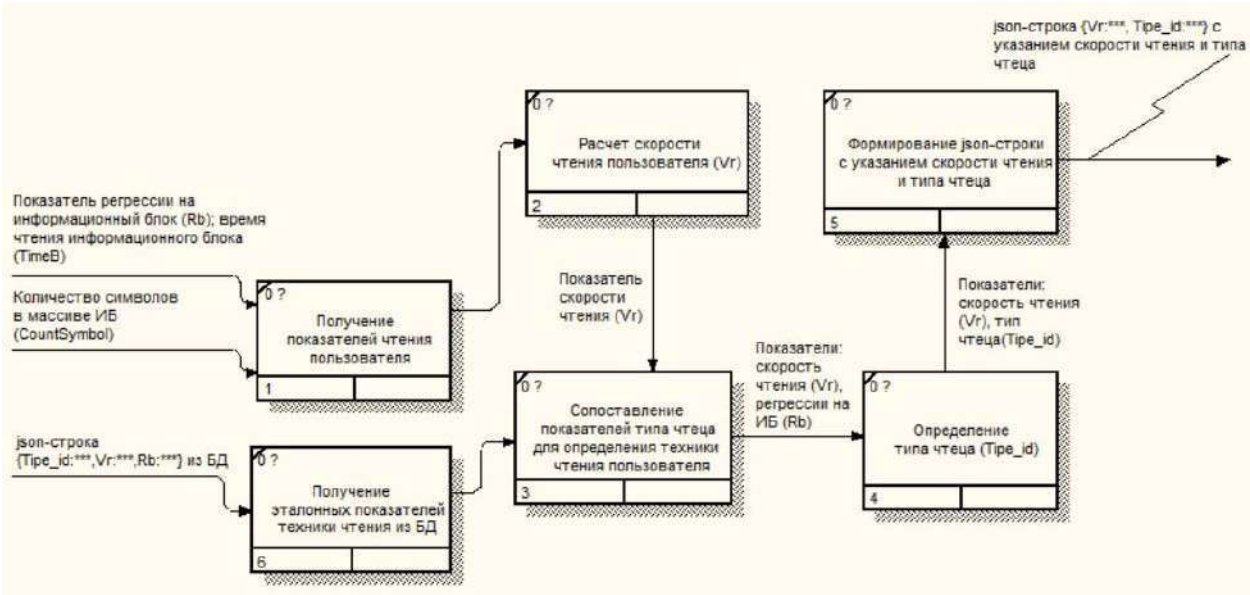


Рис. 4 Схема процесса «Расчёт показателей техники чтения пользователей»

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Область применения

Осуществления информационного воздействия в Интернет-пространстве.

1.2. Краткое описание возможностей

Система лингвистического анализа предназначена для информационного обеспечения процесса управления (адаптации) контента, путем мониторинга процесса чтения веб-контента и оценки степени его восприятия пользователем для последующей адаптации информационного наполнения веб-страницы в динамическом режиме. Параметрическая модель, полученная на выходе системы, необходима для выявления проблемных мест при восприятии информации, а показатели скорость чтения и тип чтеца – для регулирования подачи информационных блоков при чтении.

1.3. Уровень подготовки пользователя

Пользователь системы должен быть инструктирован к правилам проведения эксперимента, должен обладать уверенными знаниями о предметной области предприятия, а также обладать опытом работы с ПК и современными версиями таких браузеров, как GoogleChrome или MozillaFirefox.

2. НАЗНАЧЕНИЕ И УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ

2.1. Виды деятельности, функции, для которых предназначено данное средство

Система направлена на обеспечение мониторинга процесса чтения пользователя материала веб-ресурса, с целью получения данных о степени восприятия контента, представленной пользователю. Подсистема лингвистического анализа позволит параметризировать процесс чтения веб-контента, определить технику чтения на основании группы параметров, а также оценить уровень понимания предоставленной информации пользователя. Значения показателей чтения будут определены по шкале и направлены в систему создания и адаптации веб-контента для поддержки принятия решения об адаптации контента под индивидуальный уровень понимания пользователя.

2.2. Условия, при соблюдении которых обеспечивается применение средства в соответствии с назначением

Так как инструмент располагается на сервере предприятия, то работа с системой возможна в случае, если запущена серверная часть CMS. Для корректного отображения пользовательского интерфейса CMS рекомендуется использование современных версий браузеров GoogleChrome или MozillaFirefox.

3. ПОДГОТОВКА К РАБОТЕ

3.1. Состав и содержание дистрибутивного носителя данных

Дистрибутив программного обеспечения предоставляется в виде архивированного файла «ILA.zip», внутри которого содержатся следующие файлы и папки:

1. Папка «server» – серверная часть CMS;

2. Файл «package.json» – хранит список всех дополнительных библиотек, необходимых для работы инструмента.

3.2. Порядок загрузки данных и программ

Установка инструмента лингвистического анализа контента на веб-ресурсе осуществляется в следующем порядке:

1. Распаковать архив «ILA.zip» в любую директорию на компьютере;
2. Произвести установку дополнительных библиотек, описанных в папке «package»;
3. После окончания установки библиотек, перезагрузить ПК.

4. ОПИСАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

4.1. Описание всех выполняемых задач, функций

Таблица 1. Описание выполняемых функций

Функция	Процедуры
1.Регистрация показателей движения глаз по информационному блоку	• F11 – Получение координат местоположения зрачков пользователя на экране с указанием времени; • F12 – Получение координат расположения СЗЕ на экране, числового показателя значимости для каждой СЗЕ текста; • F13 – Определение фиксации на СЗЕ; • F14 – Отслеживание регрессий; • F15 – Подсчет количества регрессий на СЗЕ (R); • F15 – Подсчет количества регрессий на ИБ (Rb); • Передача показателей: TimeB, Rb, CountFix • Передача {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,time1,time2,weight,DFix,dt,R]} • Получение {"fixation": [{"Fix[n]":{[xj: ***,yj: ***, time1,time2,weight]}} • Получение координат взгляда пользователя в виде Json-строки: {xi: ***, yi: *** , time1, time2} • Получение json-строки {word:***,xj:***,yj:***,weigh,name_blok} • Запись результатов регистрации показателей движения взгляда в базу данных для последующей обработки; • Формирование json-файла;
2.Оценка показателей процесса чтения пользователя;	• F21 – Получение фиксаций взгляда пользователя с указанием параметров фиксации; • F22 – Определение показателя узнаваемости слова; • Получение {Fix[n]: [word:***,xj:***,yj:***,weight,DFix,dt,R]} • Передача показателя CountW • Передача json-строки{word:***,xj:***,yj:***,weight}
3.Определение уровня восприятия пользователем информационного блока	• F31 – Получение показателей движения взгляда: CountFix - количество СЗЕ (при weight>0,6), на которых был зафиксирован взгляд • F32 – Получение массива информационного блока от системы СИАК • F33 – Подсчет количества СЗЕ в массиве (CountW); • F34 – Подсчет количества символов массиве (CountSymbol); • F35 – Расчет показателя полноты чтения пользователя ИБ (Spt opt); • Получение массива из СЗЕ информационного блока в виде Json-файла структуры: {"paragraphs": [/* массив ИБ, порядок совпадает с порядком подачи контента */};

	• Передача показателя Sp opt, CountSymbol
4.Расчет показателей техники чтения пользователя;	• F41 – Получение показателей: показатель регрессии на информационный блок (Rb); время чтения информационного блока (TimeB) от модуля «Регистрация показателей движения взгляда»; • F42 – Получения показателя CountW (количество слов в массиве ИБ) от модуля «Оценка показателей процесса чтения пользователя»; • F43 – Расчет скорости чтения пользователя (Vr); • F44 – Определение типа чтеца (Tipe_id) • Получение Rb, TimeB, CountSymbol • Получение json-строки {Tipe_id:***,Vr:***,Rb:***} из БД • Сопоставление показателей типа чтеца для определения техники чтения пользователя; • Передача json-строка {Vr:***, Tipe_id:***}с указанием скорости чтения и типа чтеца

4.2. Описание операций технологического процесса обработки данных, необходимых для выполнения задач

Функции 1-4 (табл. 1) выполняются в автоматизированном режиме. В качестве формата сообщений входных/выходных данных функций используется json-строка, так как это наиболее легковесный тип сериализации данных, используемый для обмена сообщениями в большинстве систем и имеет высокую скорость парсинга данных. Информационный обмен между функциями происходит посредством передачи json-строки (табл.1). Информационные потоки между функциями, указанные в таблице 1, представленные в виде json-строк, отражены на функциональной структуре системы (рис. 1).

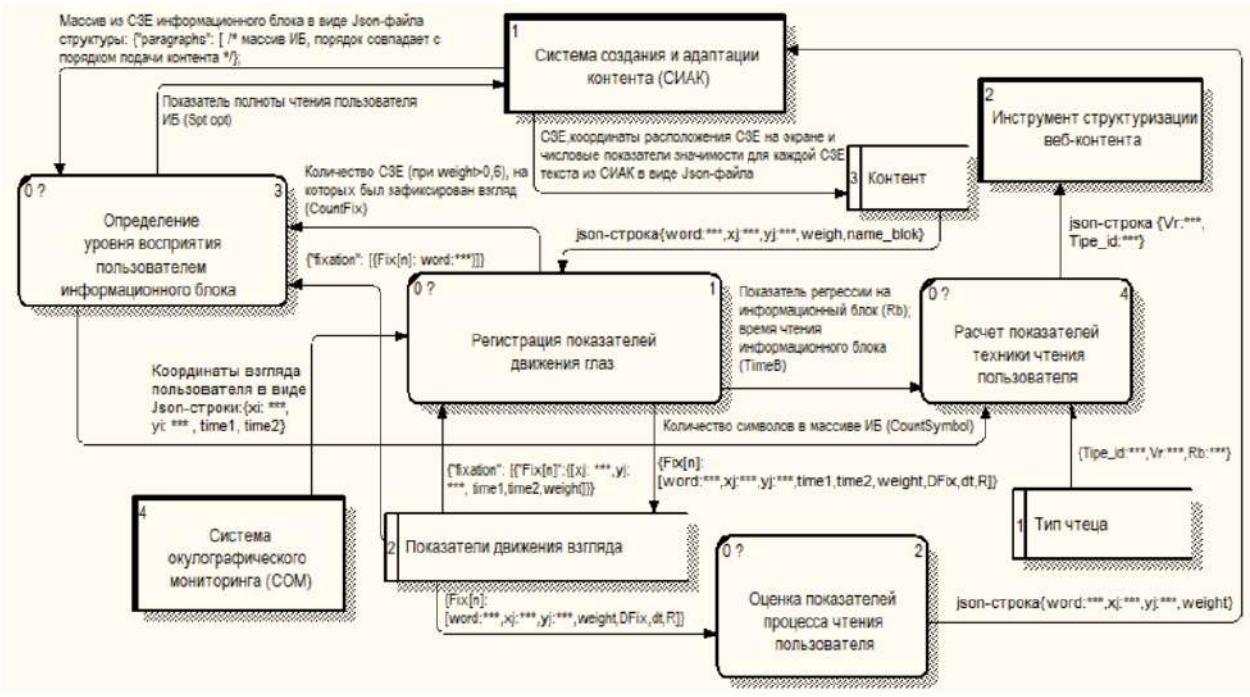


Рис.1 Функциональная структура системы в нотации DFD

Пример структуры передаваемого Json-файла (рис.1) из функции «Оценка показателей процесса чтения пользователя» к подсистеме создания и адаптации контента (СИАК), представлен на рис. 2.

```
"paragraphs": [/* массив абзацев,
порядок совпадает с порядком
подачи контента */{
 "words": [/* массив координат слов
 в абзаце */{
"x": 100,
"y": 100,
"weight": 0.7 /* семантическая важность */},
],],}
```

Рис. 2 Структура передаваемого Json-файла

Где “x” - координата СЗЕ по оси x, “y” - координата СЗЕ по оси y,“weight” – семантическая важность;

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Гаврилова Олега Алексеевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Метод решения задачи теплопроводности со специальным нелокальным условием» являются: Утверждения 2.3.1, 3.2.1, 3.2.2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Иваном Владимировичем Тихоновым, профессором кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
- Проведена переписка с Василием Николаевичем Денисовым, профессором кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
- Проведена серия выступлений на специальном семинаре «Обратные и некорректно поставленные задачи» кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (руководитель семинара профессор Александр Михайлович Денисов).

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится/состоялась 31 мая 2021 года. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Гаврилов Олег Алексеевич
29.05.2021
Москва, Россия

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Отзыв на выпускную квалификационную работу

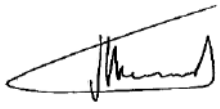
Гаврилова Олега Алексеевича

«Метод решения задачи теплопроводности со специальным нелокальным условием»

В выпускной квалификационной работе Гаврилова О. А. дано систематическое рассмотрение вопроса о методах решения одного класса нелокальных задач теплопроводности. В одномерном уравнении теплопроводности с краевыми условиями первого рода требуется восстановить решение при помощи дополнительного условия, связывающего значения неизвестной функции в начальный и финальный моменты времени. В процессе выполнения работы Гаврилов О. А. провел теоретический анализ поставленной нелокальный задачи и изучил вопрос о ее корректности. Им был составлен специальный алгоритм решения, использующий принцип сжимающего оператора и метод последовательных приближений. Затем разработана компьютерная модель, реализующая предложенный алгоритм. Проведена серия вычислительных экспериментов, показавших высокую надежность алгоритма. Кроме того, дано сравнение численных результатов, полученных на основе операторного метода, с аналитическими ответами, найденными методом Фурье. Предложен комбинированный метод, сочетающий отдельные элементы метода разделения переменных и метода последовательных приближений. Также рассмотрен более сложный «коэффициентный» случай, требующий чисто операторного подхода.

Отмечу, что при подготовке ВКР Гаврилов О. А. проявил должную заинтересованность и несомненную способность к научной работе. Все основные намеченные цели были достигнуты им самостоятельно, текст подготовлен достаточно хорошо и весьма полно отражает проведенное исследование. Считаю, что работа Гаврилова О. А. может быть допущена к защите и заслуживает оценки «отлично».

Научный руководитель:

д.ф-м.н., профессор  И. В. Тихонов



Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики

Гаврилов Олег Алексеевич

Метод решения задачи теплопроводности со специальным нелокальным условием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тихонов Иван Владимирович

Москва, 2021

Оглавление

1 Введение и описание работы **3**

2 Постановка и исследование задачи **5**

2.1 Общая постановка задачи 5

2.2 Метод Фурье для частного случая 6

2.3 Операторный метод для частного случая 9

2.4 Комбинированный метод 13

2.5 Обобщение операторного метода 16

2.6 Пример метода Фурье для общего случая 17

3 Численная реализация алгоритмов **19**

3.1 Разностная схема для частного случая 19

3.2 Сравнение двух разностных схем для общего случая 21

4 Примеры **25**

4.1 Пример 1 25

4.2 Пример 2 27

4.3 Пример 3 29

4.4 Пример 4 30

4.5 Пример 5 32

4.6 Пример 6 34

4.7 Пример 7 36

4.8 Пример 8 38

5 Заключение **40**

Литература **41**

Глава 1

Введение и описание работы

В современной математике важную роль играет активно развивающаяся теория обратных и некорректно поставленных задач. В частности, многие прикладные проблемы сводятся к исследованию и интерпретации наблюдений, полученных в ходе некоторого эксперимента: по измеренным в его результате косвенным проявлениям необходимо сделать выводы о свойствах объекта или процесса. Другими словами, требуется определить причины, если известны полученные в результате наблюдений следствия. Подобные задачи естественно называть обратными. Их решение, связанное с обращением причинно-следственных связей, может быть сопряжено со значительными трудностями. Для успешного результата активно применяются математические методы.

Понятие обратных задач тесно связано с понятием некорректных задач. Последнее было сформулировано Ж. Адамаром в связи с исследованием некоторых уравнений математической физики [1]. Решение всякой количественной задачи состоит в нахождении заранее неизвестной величины z по заданной исходной информации u и может быть записано в виде

$$z = R(u). \tag{1.1}$$

При этом обычно предполагается, что z и u являются элементами метрических пространств Z и U соответственно. Задача (1.1) называется *корректно поставленной на паре пространств* Z, U, если выполнены условия:
1) для всякого элемента $u \in U$ существует решение $z \in Z$;
2) решение (если существует) определяется однозначно;
3) решение задачи z непрерывно зависит от исходных данных u.
Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из этих условияй, называются *некорректно поставленными*. Условия 1) и 2) характеризуют математическую

определённость задачи, а условие 3) — физическую детерминированность (иначе сложно дать какую-либо интерпретацию задачи, если сколь угодно малым возмущениям начальных данных могут соответствовать большие изменения решения), а также возможность применения вычислительных методов в случае приближённых исходных данных.

Обратные задачи, возникающие при обработке результатов экспериментов, как правило, являются некорректно поставленными. Следовательно, требуется дополнительный анализ вопросов, связанных с существованием, единственностью и устойчивостью решения. Методы такого анализа широко развиваются в теории обратных и некорректно поставленных задач.

Большое значение на практике имеет некорректная параболическая задача с обратным временем [2]. Связанная с ней нелокальная задача рассматривается в работе [3]; там же обсуждается метод регуляризации для одномерной задачи теплопроводности. Похожая задача с нелокальным условием более общего вида рассматривалась в [4]. Некоторый предельный случай (расширение отрезка до всей числовой прямой) исследован в работе [5]. В данной выпускной квалификационной работе рассматривается задача для одномерного уравнения теплопроводности с боковым теплообменом и нелокальным условием по временной переменной. Предложены конструктивные методы решения, проведено теоретическое исследование по их сравнению. Разработаны формальные алгоритмы решения с использованием вычислительных методов. Для их реализации написана корректно работающая программа на языке *MATLAB*. Проведено множество вычислительных экспериментов.

Глава 2

Постановка и исследование задачи

2.1 Общая постановка задачи

Рассмотрим следующую одномерную задачу для уравнения теплопроводности с боковым теплообменом на отрезке с однородными краевыми условиями первого рода, заданную в течение ограниченного промежутка времени:

$$u_t = a^2 u_{xx} - c(x)u, \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.2}$$

$$\alpha u(x,0) + (1-\alpha)u(x,T) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{2.3}$$

Здесь и далее считаем, что

- $a^2 > 0$ – коэффициент температуропроводности,
- $T > 0$ – продолжительность измерений,
- $l > 0$ – длина стержня,
- $u = u(x,t) \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T])$,
- $c(x)$ – коэффициент бокового теплообмена в точке $x \in (0,l)$,
- $\alpha \in (0,1)$ – заданное число,
- $\psi(x)$ – заданная функция на отрезке $x \in [0,l]$,
- и, кроме того, выполнены условия согласования: $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Значения параметров a, l, T и функция $\psi(x)$, $x \in [0,l]$, предполагаются известными; требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (2.1)-(2.3).

Физически условие (2.3) означает, что в каждой точке стержня известно среднее взвешенное температуры в начальный и конечный моменты времени. В дальнейшем будем называть это условие нелокальным, а задачу (2.1)-(2.3) — *нелокальной задачей теплопроводности.*

2.2 Метод Фурье для частного случая

Интерес представляет задача с классическим уравнением теплопроводности, то есть с нулевым коэффициентом $c(x)$. Сначала проведём исследование для такой задачи.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \tag{2.4}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.5}$$

$$\alpha u(x,0) + (1-\alpha)u(x,T) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{2.6}$$

Воспользуемся методом Фурье (разделения переменных) и будем искать частное решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставим это выражение в (2.4):

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{2.7}$$

Так как в левой части равенства стоит функция от t, в правой — от x, то они обе тождественно равны некоторой константе, которую мы обозначили через $(-\lambda)$. Из правого равенства и из краевых условий (2.5) получаем для $X(x)$ задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in [0,l], \\ X(0) = 0, \; X(l) = 0. \end{cases}$$

Известно (см., например, [6]), что её решение следующее:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Теперь для каждого n решим задачу (2.7) относительно $T(t)$.

$$T_n'(t) = -\lambda_n a^2 T_n(t),$$

$$T_n(t) = C_n\, e^{-\lambda_n a^2 t} = C_n\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad C_n = \text{const}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Получаем частное решение (2.4)-(2.5):

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\ \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Из принципа суперпозиции следует, что любая линейная комбинация частных решений (2.4)-(2.5) тоже является решением. Теперь можем формально записать общее решение (2.4)-(2.5):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\ e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\ \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{2.8}$$

Далее введём функцию

$$\varphi(x) \equiv u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

и переобозначим $C_n = \varphi_n$, поскольку очевидно, что C_n представляют собой коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{\sin\frac{\pi n x}{l}\}$. Из условия (2.6)

$$\psi(x) = \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)u(x,T) =$$

$$= \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{\pi n x}{l} + (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\ e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}\sin\frac{\pi n x}{l} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\ \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{2.9}$$

$$\psi_n = \varphi_n\left(\alpha + (1-\alpha)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}\right), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Представление (2.9) — не что иное, как разложение функции $\psi(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[0, l]$. Коэффициенты этого разложения вычисляются по формуле

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2.10}$$

Приравнивая правые части в (2.9) и (2.10), получаем формулу для вычисления коэффициентов Фурье неизвестной функции $\varphi(x)$:

$$\varphi_n = \left(\alpha + (1-\alpha)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \dots , \tag{2.11}$$

Подставляем выражение (2.11) в формулу общего решения (2.8) и выписываем окончательный результат

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}}{\alpha + (1-\alpha)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}}\ \sin\frac{\pi n x}{l}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi \tag{2.12}$$

В силу условий на $\psi(x)$ ряд (2.12) сходится равномерно в прямоугольнике $\{(x,t) \in [0,l]\times[0,T]\}$, значит, можно поменять местами операторы суммирования и интегрирования (о почленном собственном интегрировании функциональных рядов см., например, [7]):

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}}{\alpha + (1-\alpha)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}} \sin\frac{\pi n \xi}{l} \sin\frac{\pi n x}{l}\, d\xi,$$

$$u(x,t) = \int\limits_0^l K(x,t,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi, \tag{2.13}$$

$$K(x,t,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}}{\alpha + (1-\alpha)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}} \sin\frac{\pi n \xi}{l} \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{2.14}$$

$$(x,t,\xi) \in D = \{(x,t,\xi) \mid x,\xi \in [0,l],\ t \in [0,T]\}.$$

Так как в выражении (2.14) ряд состоит из непрерывных функций и сходится равномерно на множестве D, то функция $K(x,t,\xi)$ непрерывна этом множенстве. Известно (см. [8]), что при таком условии задача вычисления интегрального оператора (2.13) является корректно поставленной. Это означает, что решение существует, единственно и устойчиво относительно входных данных. Отсюда следует, что и исходная задача (2.4-2.6) является корректной, поскольку она эквивалентна задаче вычисления (2.13).

В итоге вычислительный алгоритм нахождения приближённого решения задачи (2.4)-(2.6) по методу Фурье заключается в следующем:

1. Задаём количество слагаемых p. Чем больше это значение — тем выше точность вычислений.

2. Вычисляем первые p коэффициентов Фурье функции $\psi(x)$ на отрезке $[0,l]$:

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = \overline{1,p}\,.$$

3. Составляем сумму

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{p} \psi_n \frac{e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}}{\alpha + (1-\alpha)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}} \sin\frac{\pi n x}{l}\,.$$

Это и есть приближение искомого решения.

2.3 Операторный метод для частного случая

Рассмотрим ту же задачу (2.4)-(2.6). Обозначим через $u(x,T;\varphi)$ решение «прямой» задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l \quad 0 < t < T, \tag{2.15}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.16}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < l, \tag{2.17}$$

взятое при $t = T$. Задачу (2.15)-(2.17) будем называть *классической*.

Введём оператор $\mathcal{B}_\alpha : L_2[0,l] \to L_2[0,l]$, зависящий от параметра α из задачи (2.4)-(2.6), такой что

$$(\mathcal{B}_\alpha\varphi)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) u(x,T;\varphi), \quad \varphi \in L_2[0,l]. \tag{2.18}$$

Очевидно, что $\mathcal{B}_\alpha$ — линейный оператор (при всех $\alpha \in (0,1)$).

Запишем нелокальное условие (2.6) исходной задачи, приняв старое обозначение $u(x,0) = \varphi(x)$. В данном случае $\varphi(x)$ — неизвестная функция, которую хотим найти, чтобы свести задачу (2.4)-(2.6) к классической задаче (2.15)-(2.17).

$$\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,l].$$

Заметим, что $u(x,T) \equiv u(x,T;\varphi) = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(\mathcal{B}_\alpha\varphi)(x)$. Получаем операторное уравнение относительно неизвестной функции φ:

$$\varphi - \mathcal{B}_\alpha\varphi = \frac{\psi}{\alpha}. \tag{2.19}$$

Если представить его в виде $\varphi = \frac{\psi}{\alpha} + \mathcal{B}_\alpha\varphi$, то можем записать цепочку равенств для любого $N = 0, 1, 2, ...$:

$$\varphi = \frac{\psi}{\alpha} + \mathcal{B}_\alpha\left(\frac{\psi}{\alpha} + \mathcal{B}_\alpha\varphi\right) = \frac{\psi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\mathcal{B}_\alpha\psi + \mathcal{B}_\alpha^2\left(\frac{\psi}{\alpha} + \mathcal{B}_\alpha\varphi\right) = ... =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{N}\mathcal{B}_\alpha^k\psi + \mathcal{B}_\alpha^{N+1}\varphi.$$

Имеет смысл рассмотреть (пока формально) так называемый *ряд Неймана* — ряд из степеней оператора $\mathcal{B}_\alpha$, действующих на ψ :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{B}_\alpha^k\psi. \tag{2.20}$$

Утверждение 2.3.1. *При* $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ *ряд Неймана (2.20) сходится по норме пространства* $L_2[0, l]$.

Доказательство. Пусть $y \in L_2[0, l]$ — произвольная функция, тогда можем рассматривать её разложение в ряд Фурье на отрезке $[0, l]$ по системе синусов:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad x \in [0, l].$$

Справедливо равенство Парсеваля (см., например, [7]):

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2, \tag{2.21}$$

в котором норма понимается (здесь и далее) в смысле пространства $L_2[0, l]$. Выпишем решение задачи (2.15)-(2.17), где в начальном условии принято $\varphi = y$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \, \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{2.22}$$

По определению оператора $\mathcal{B}_\alpha$ выполнено равенство $(\mathcal{B}_\alpha y)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) u(x, T; y)$. Тогда с учётом (2.22)

$$(\mathcal{B}_\alpha y)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) u(x, T; y) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Запишем равенство Парсеваля для этой функции:

$$\|\mathcal{B}_\alpha y\|^2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 \, e^{-2\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}. \tag{2.23}$$

Из равенств (2.21), (2.23) очевидно, что $\|\mathcal{B}_\alpha y\| < \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \|y\|$, если $y \not\equiv 0$. Значит,

$$\exists \|\mathcal{B}_\alpha\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \neq 0} \frac{\|\mathcal{B}_\alpha y\|}{\|y\|} = b < \frac{1-\alpha}{\alpha} \leq 1,$$

так как по условию $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Получаем, что в этом случае линейный оператор $\mathcal{B}_\alpha$ ограничен, причём его норма строго меньше 1.

Далее $\forall N, m \in \mathbb{N}$ рассмотрим частичные суммы ряда (2.20) и воспользуемся критерием Коши (см. [7]):

$$\left\| \sum_{k=N}^{N+m} \mathcal{B}_\alpha^k \psi \right\| \leq \sum_{k=N}^{N+m} \|\mathcal{B}_\alpha^k \psi\| \leq \sum_{k=N}^{N+m} \|\mathcal{B}_\alpha\|^k \|\psi\| = \sum_{k=N}^{N+m} b^k \|\psi\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, ряд Неймана (2.20) сходится по норме пространства $L_2[0,l]$, причём экспоненциально (со скоростью геометрической прогрессии). □

Далее будем считать выполненным условие $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Тогда можем рассматривать $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi$ как элемент $L_2[0,l]$. Подставив выражение $\varphi = \frac{1}{\alpha} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi$ в левую часть уравнения (2.19), получим

$$\varphi - \mathcal{B}_\alpha \varphi = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi - \mathcal{B}_\alpha \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi - \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^{k+1} \psi \right) = \frac{\psi}{\alpha}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что линейный оператор $\mathcal{B}_\alpha$ ограничен, следовательно, непрерывен (см., например, [9]), то есть переводит всякую сходящуюся по норме последовательность в сходящуюся. Это значит, что можем менять местами $\mathcal{B}_\alpha$ и оператор бесконечного суммирования:

$$\mathcal{B}_\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B} \left(\mathcal{B}_\alpha^k \psi \right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^{k+1} \psi.$$

Получаем, что функция

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^k \psi, \tag{2.24}$$

являющаяся сильным пределом ряда (2.20) в пространстве $L_2[0,l]$, действительно является решением операторного уравнения (2.19).

Далее из определения оператора $\mathcal{B}_\alpha$ следует заметить, что

$$\mathcal{B}_\alpha^k \psi = (-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k u(x, kT;\, \psi), \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{2.25}$$

То есть для нахождения степеней оператора $\mathcal{B}_\alpha$ достаточно решить задачу (2.15)-(2.17), в которой в качестве начального условия (2.17) берётся функция ψ, и в полученное решение последовательно подставлять значения $t = T, 2T, 3T, ...$

Можем убедиться, что данный метод решения не противоречит предыдущему методу. Пусть $v(x,t)$ — решение (2.15)-(2.17) с начальным условием $\psi(x)$:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \, \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x) \sin\frac{\pi n x}{l}\, dx. \tag{2.26}$$

Последовательно подставим в это решение значения $t = 0,\ T,\ 2T, \ldots$. Так как для функции $\varphi(x)$ справедливо соотношение (2.24), то в силу выражения (2.25)

$$\varphi(x) \equiv \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{B}_\alpha^k\psi)(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k v(x,kT).$$

Подставим сюда выражение для v из (2.26):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 kT} \, \sin\frac{\pi n x}{l}\,. \tag{2.27}$$

Очевидно, что для всех $x \in [0,l]$ двойной ряд, соответствующий повторному ряду (2.27), сходится абсолютно. Следовательно (см. [7]), можно изменить порядок суммирования:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{\pi n x}{l} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 kT}.$$

Воспользуемся тем, что сумма внутреннего ряда выписывается явно (как сумма геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n}{1+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}} \sin\frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n}{\alpha+(1-\alpha)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}} \sin\frac{\pi n x}{l}\,.$$

Получаем ту же формулу (2.12), то есть такую же связь между коэффициентами Фурье функций φ и ψ, как и в методе разделения переменных.

Итак, алгоритм решения задачи (2.4)-(2.6) для функции $u = u(x,t)$ с помощью операторного метода при условии $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ состоит в следующем:

1. Задаём число q — максимальную степень оператора $\mathcal{B}_\alpha$ в ряде Неймана. Чем оно больше, тем выше точность. Так как скорость сходимости является экспоненциальной, на практике для достижения хорошей точности это число достаточно брать не очень большим (примеры экспериментов будут разобраны далее).

2. На основе исходной задачи (2.4)-(2.6) составляем классическую задачу (2.15)-(2.17), где в качестве φ берётся функция ψ из условия (2.6).

3. Решаем полученную задачу каким-либо численным методом в прямоугольнике $x \in [0, l],\ \ t \in [0, qT]$. Обозначим полученное решение как $v(x, t)$.

4. Составляем сумму

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k v(x,kT) \equiv \frac{1}{\alpha}\left(\psi(x)+\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k v(x,kT)\right).$$

Это есть приближение функции $\varphi(x) \equiv u(x, 0)$, то есть мы свели нелокальную задачу к классической, решение которой находится известным образом.

2.4 Комбинированный метод

В предыдущем пункте было показано, как можно построить приближённое решение задачи (2.4)-(2.6) в случае $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Если это условие нарушается, то норма оператора $\mathcal{B}_\alpha$ может оказаться больше единицы, что приведёт к расходимости ряда Неймана. Возникает вопрос о том, можно ли построить решение в случае малых значений параметра $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Для этого предлагается использовать сильные стороны каждого из двух рассмотренных ранее способов решения, чтобы получить сходящийся метод.

Рассматриваем всё ту же задачу (2.4)-(2.6) и и оператор $\mathcal{B}_\alpha$, введённый по правилу (2.18), который, как мы знаем, можно записать в виде

$$(\mathcal{B}_\alpha y)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty} y_n\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Уже было показано, что решение можно искать с помощью ряда Неймана (2.20) по степеням оператора $\mathcal{B}_\alpha$. Изучим случай, когда норма этого оператора больше или равна единице, то есть выполнено

$$\|\mathcal{B}_\alpha\|^2 \equiv \sup_{\|y\|=1}\|\mathcal{B}_\alpha y\|^2 \equiv \sup_{\|y\|=1}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\, e^{-2\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \geq 1.$$

Такое может иметь место, если $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Добиться уменьшения нормы оператора возможно за счёт отбрасывания конечного числа первых слагаемых в сумме – тогда останутся экспоненты достаточно высоких порядков, чтобы скомпенсировать величину $(1-\alpha)/\alpha$, стоящую перед суммой. Для простоты сначала рассмотрим случай одного слагаемого.

Введём по аналогии с оператором $\mathcal{B}_\alpha$ следующий оператор, отличающийся от него только тем, что индекс в сумме начинается с 2:

$$(\mathcal{B}_{\alpha,1}\, y)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\sum_{n=2}^{\infty} y_n\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T} \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Предположим, что $\|\mathcal{B}_{\alpha,1}\| < 1$. Тогда ряд, составленный из степеней такого оператора, будет сходящимся. Выясним связь между операторами $\mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{B}_{\alpha,1}$. Из их определений очевидно, что

$$\mathcal{B}_{\alpha,1}\, y = \mathcal{B}_\alpha\left(y - y_1 \sin\frac{\pi x}{l}\right).$$

Другими словами, действие оператора $\mathcal{B}_{\alpha,1}$ на функцию $y \in L_2[0,l]$ – это всё равно что действие оператора $\mathcal{B}_\alpha$ на проекцию y на подпространство P_1, образованное системой из всех базисных синусов, начиная со второго:

$$P_1 = \mathcal{L}\left\{\sin\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{3\pi x}{l},\ \ldots\right\} \subset L_2[0,l],$$

где символ $\mathcal{L}$ обозначает линейную оболочку.

Вернёмся к операторному уравнению (2.19) и рассмотрим его в терминах проекций. Обозначим через $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ проекции функций φ и ψ соответственно на подпространство P_1. Тогда выполнены очевидные равенства:

$$\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{l}, \quad \psi(x) = \widetilde{\psi}(x) + \psi_1 \sin\frac{\pi x}{l}.$$

Подставим эти выражения в операторное уравнение (2.19):

$$\left(\widetilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{l}\right) - \mathcal{B}_\alpha\left(\widetilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\widetilde{\psi}(x) + \psi_1 \sin\frac{\pi x}{l}\right).$$

Зная действие оператора $\mathcal{B}_\alpha$, можем переписать равенство в виде:

$$\widetilde{\varphi} - \mathcal{B}_\alpha\widetilde{\varphi} + \left(\varphi_1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 T} - \frac{\psi_1}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi x}{l} = \frac{\widetilde{\psi}}{\alpha}.$$

Далее следует воспользоваться формулой (2.11), связывающей коэффициенты Фурье φ_n и ψ_n. Из неё следует, что в последнем равенстве выражение, стоящее во внешних круглых скобках, равно нулю. Таким образом,

$$\widetilde{\varphi} - \mathcal{B}_\alpha\widetilde{\varphi} = \frac{\widetilde{\psi}}{\alpha},$$

то есть получаем операторное уравнение, аналогичное уравнению (2.19), но уже в терминах проекций. Как было ранее показано, его формальное решение:

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{B}_{\alpha}^{k}\widetilde{\psi} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{B}_{\alpha,1}^{k}\psi.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на пространстве P_1 операторы $\mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{B}_{\alpha,1}$ действуют одинаково. По предположению $\|\mathcal{B}_{\alpha,1}\| < 1$, поэтому ряд, стоящий в правой части, сходится. Для отыскания функции $\varphi(x)$ достаточно вычислить по формуле (2.11) недостающий коэффициент Фурье:

$$\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{l}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть более общий случай, когда в бесконечной сумме отбрасывается произвольное конечное число гармоник – достаточное для того, чтобы норма оператора получилась меньше единицы. Другими словами, пусть $m \in \mathbb{N}$ и оператор $\mathcal{B}_{\alpha,m}$ таков, что $\|\mathcal{B}_{\alpha,m}\| < 1$,

$$(\mathcal{B}_{\alpha,m}\, y)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\sum_{n=m+1}^{\infty} y_n\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{B}_{\alpha,m}\, y = \mathcal{B}_\alpha\left(y - y_1\sin\frac{\pi x}{l} - ... - y_m\sin\frac{\pi m x}{l}\right),$$

то есть оператор $\mathcal{B}_{\alpha,m}$ действует так же, как оператор $\mathcal{B}_\alpha$ на подпространстве

$$P_m = \mathcal{L}\left\{\sin\frac{\pi(m+1)x}{l},\ \sin\frac{\pi(m+2)x}{l},\ ...\right\} \subset L_2[0,l].$$

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично разобранному случаю $m = 2$.

В итоге получаем схему решения задачи (2.4)-(2.6) с использованием комбинированного метода в случае $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$:

1. Задаём число $m \in \mathbb{N}$. Обычно оно подбирается эмпирическим путём для каждой конкретной задачи. Вычисляем первые m коэффициентов Фурье известной функции ψ:

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, ..., m.$$

2. Находим соответствующую проекцию:

$$\widetilde{\psi}(x) = \psi(x) - \psi_1 \sin\frac{\pi x}{l} - ... - \psi_m \sin\frac{\pi m x}{l}, \quad x \in [0, l].$$

3. Задаём число $q \in \mathbb{Z}_+$ и аналогично операторному методу составляем следующую конечную сумму:

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{q} \mathcal{B}_\alpha^k \widetilde{\psi}.$$

4. Вычисляем первые m коэффициентов Фурье функции φ по формуле

$$\varphi_n = \psi_n \left(\alpha + (1-\alpha)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T}\right)^{-1}, \quad n = 1, 2, ..., m\,.$$

5. Прибавляем недостающие гармоники – составляем сумму

$$\widetilde{\varphi}(x) + \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{l} + ... + \varphi_m \sin\frac{\pi m x}{l}.$$

Это есть приближение неизвестной функции $\varphi(x)$.

2.5 Обобщение операторного метода

Вернёмся к общей постановке задачи (2.1)-(2.3). Нетрудно убедиться, что рассмотренный ранее операторный метод можно расширить на этот случай. Оператор $\mathcal{B}_\alpha$ вводится по такому же правилу:

$$(\mathcal{B}_\alpha \psi)(x) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) u(x, T; \psi), \quad \varphi \in L_2[0, l],$$

где $u(x, T; \psi)$ является решением соответствующей прямой задачи с начальной функцией ψ. Далее практически все рассуждения из пункта 2.3 можно дословно перенести на рассматриваемый случай.

Отметим, что метод Фурье в общем случае не является применимым, поскольку решения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля не выписываются в явном виде сразу для всех коэффициентов $c(x)$. Метод Фурье можно рассматривать разве что для конкретных задач, в которых дана конкретная функция $c(x)$. Пример такой задачи разобран далее.

2.6 Пример метода Фурье для общего случая

Рассмотрим задачу

$$u_t = u_{xx} - c(x)u, \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T, \tag{2.28}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u(\pi,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.29}$$

$$\alpha u(x,0) + (1-\alpha)u(x,T) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le \pi. \tag{2.30}$$

Эта задача аналогична (2.1)-(2.3), но для простоты принято $l = \pi$, $a^2 = 1$. Воспользуемся методом разделения переменных и представим неизвестную функцию u в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le T.$$

Тогда из условий (2.28)-(2.29) получается задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + (\lambda - c(x))X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, \; X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Её решения (собственные функции и собственные значения) не выписываются в явном виде, но можно попытаться построить их для конкретного примера функции $c(x)$. Положим

$$c(x) = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad 0 < x < \pi,$$

где n – зафиксированное целое неотрицательное число. Тогда дифференциальное уравнение в (2.31) имеет вид:

$$X''(x) + \left(\lambda - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) X(x) = 0.$$

Найдём общее решение этого уравнения, зависящее от λ. Сначала сделаем замену неизвестной функции: $X(x) = y(x)\sqrt{x}$. Получим уравнение

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Теперь заменим аргумент функции: $s := x\sqrt{\lambda}$; и введём $z(s) \equiv z(x\sqrt{\lambda}) = y(x)$. Относительно $z(s)$ получается уравнение Бесселя порядка n:

$$s^2 z''(s) + sz'(s) + (s^2 - n^2)z(s) = 0.$$

Это уравнение хорошо изучено (см., например, [6]). Его общее решение представляет собой линейную комбинацию

$$z(s) = AJ_n(s) + BN_n(s),$$

где A, B – произвольные постоянные, J_n – функция Бесселя, N_n – функция Неймана одного и того же индекса n. Возвращаясь к исходному уравнению относительно $X(x)$, получим

$$X(x) = \sqrt{x}\left(AJ_n\left(x\sqrt{\lambda}\right) + BN_n\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right).$$

Из граничного условия $X(0) = 0$ следует, что $B = 0$, поскольку функции Неймана не ограничены в окрестности нуля. Тогда можно положить $A = 1$ и использовать второе граничное условие $X(\pi) = 0$, из которого следует $J_n\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0$. Нули функции Бесселя индекса n можно записать как $\mu_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (2.31) имеют следующий вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{\pi}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{x}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}x}{\pi}\right), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Выпишем решение задачи (2.28)-(2.30) по методу разделения переменных:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

где A_k – пока неизвестные коэффициенты. Найдём их из условия (2.30):

$$\psi(x) = \alpha u(x,0) + (1-\alpha)u(x,T) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\lambda_k T} X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(x), \quad B_k = A_k\left(\alpha + (1-\alpha)\, e^{-\lambda_k T}\right).$$

Так как собственные функции $X_k(x)$ образуют полную систему в пространстве $L_2[0,\pi]$, коэффициенты Фурье B_k вычисляются по формулам

$$B_k = \frac{(\psi, X_k)}{(X_k, X_k)} = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^{\pi} \psi(x)\sqrt{x}\, J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}x}{\pi}\right) dx,$$

$$\|X_k\|^2 = \int_0^{\pi} x\, J_n^2\left(\frac{\mu_k^{(n)}x}{\pi}\right) dx, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Глава 3

Численная реализация алгоритмов

3.1 Разностная схема для частного случая

В процессе реализации операторного метода, описанного в пункте 2.3, требуется несколько раз решать классическую задачу для уравнения теплопроводности, а именно задачу (2.15)-(2.17). Построим для неё *чисто неявную разностную схему*. Сначала введём в прямоугольнике $D = \{(x,t) \,:\, x \in [0,l],\, t \in [0,T]\}$ равномерную сетку размеров $(N+1) \times (M+1)$:

$$\omega_{\tau h} = \omega_\tau \times \omega_h,$$

$$\omega_\tau = \{t_n = \tau n,\ n = 0,1,...,M\},\ \tau = \frac{T}{M},$$

$$\omega_h = \{x_i = hi,\ i = 0,1,...,N\},\ h = \frac{l}{N}.$$

Поставим в соответствие задаче (2.4)-(2.6) следующую разностную схему, заменив операторы дифференцирования их сеточными аналогами:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2\,\frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}, \qquad i = \overline{1, N-1},\ n = \overline{0, M-1},$$

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0, \qquad n = \overline{0, M-1},$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \qquad i = \overline{0, N}.$$

Здесь $u_i^n \equiv u(x_i, t_n) \equiv u(hi, \tau n)$ — искомое решение в точке $(x_i, t_n) \in \omega_{\tau h}$. Эта разностная схема называется неявной, поскольку для получения решения на $(n+1)$-м слое по времени необходимо решить трёхточечное уравнение

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \gamma\left(u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}\right), \quad \gamma = \frac{a^2\tau}{h}.$$

Преобразуем эти уравнения и используем краевые условия:

$$\begin{cases} -\gamma u_{i-1}^{n+1} + (2\gamma+1)u_i^{n+1} - \gamma u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Значение n здесь фиксировано, то есть решаем задачу для вычисления $(n+1)$-го слоя по времени. На каждом шаге коэффициенты системы остаются прежними, кроме правой части уравнения — она меняется. Заметим, что данная система линейных алгебраических уравнений описывается трёхдиагональной матрицей:

$$Au^{n+1} = u^n,$$
$$u^n = (u_0^n,\ u_1^n,\ ...,\ u_N^n)^T, \quad A \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\gamma+1 & -\gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\gamma & 2\gamma+1 & -\gamma & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 2\gamma+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\gamma+1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\gamma & 2\gamma+1 \end{pmatrix}.$$

Линейные системы с трёхдиагональной матрицей удобно решать *методом прогонки*. Для этого вводятся вспомогательные прогоночные коэффициенты, а элементы вектора-решения вычисляются последовательно от конца к началу. Формулы для коэффициентов и для решения имеют следующий вид:

$$c_i = 2\gamma + 1 - \gamma a_{i-1},\ \ i = \overline{2, N-2}, \quad c_1 = 2\gamma + 1;$$

$$a_i = \frac{\gamma}{c_i},\ \ i = \overline{1, N-2};$$

$$b_i = \frac{u_i^n + \gamma b_{i-1}}{c_i},\ \ i = \overline{2, N-1}, \quad b_1 = \frac{u_1^n}{2\gamma+1};$$

$$u_{N-1}^{n+1} = b_{N-1}, \quad u_i^{n+1} = a_i u_{i+1}^{n+1} + b_i,\ \ i = \overline{N-2, 1}.$$

Рассмотренный численный метод решения хорошо изучен ([10], [11], [12]). Известно, например, что вычислительная сложность метода прогонки составляет всего $O(N)$ арифметических операций. С учётом того, что нужно решить M таких линейных систем (3.1) (по одной для каждого шага времени) общая сложность вычислений составляет $O(MN)$.

Заметим также, что матрица A является матрицей с диагональным преобладанием. Отсюда следует, что задача с такой матрицей является корректно

поставленной: решение систем (3.1) всегда существует, единственно и устойчиво. Последнее условие означает, что в процессе вычислений на комьпютере ошибки округления нарастать не будут.

Кроме того, чисто неявная разностная схема является абсолютно сходящейся, то есть она не имеет ограничений на τ и h. Можно также показать, что решение будет устойчиво по отношению к начальным данным.

3.2 Сравнение двух разностных схем для общего случая

Теперь для задачи (2.1)-(2.3) с произвольным коэффициентом $c(x)$ рассмотрим соответствующую прямую задачу с классическим начальным условием. Сопоставим ей две разностные схемы, отличающиеся лишь в выборе временного слоя в линейной части уравнения, соответствующей слагаемому с $c(x)$:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = a^2\,\frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - c_i u_i^n, \quad i=\overline{1,N-1},\ n=\overline{0,M-1}, \tag{3.2}$$

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0, \qquad n=\overline{0,M-1}, \tag{3.3}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \qquad i=\overline{0,N}, \tag{3.4}$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} = a^2\,\frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - c_i u_i^{n+1}, \quad i=\overline{1,N-1},\ n=\overline{0,M-1}, \tag{3.5}$$

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0, \qquad n=\overline{0,M-1}, \tag{3.6}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \qquad i=\overline{0,N}. \tag{3.7}$$

Покажем, что вторая разностная схема (3.5)-(3.7) абсолютно устойчива, в отличие от первой (3.2)-(3.4), которая является условно устойчивой. Далее воспользуемся некоторыми сведениями из [11].

Пусть $H = \{y(x), x \in \omega_h,\ y_0 = y_N = 0\}$ – пространство сеточных функций на ω_h, обращающихся в ноль на концах отрезка, со скалярным произведением

$$(y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad y,v \in H, \quad y_i \equiv y(x_i), \quad v_i \equiv v(x_i).$$

Будем рассматривать сеточные функции $y^n \in H$, зависящие от параметра t_n. *Двуслойной разностной схемой в каноническом виде* называется семейство

$$B\,\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + Ay^n = f^n, \quad n = 0, 1, ..., M-1, \quad y^0 \in H, \tag{3.8}$$

где A, B – некоторые линейные операторы в H, $f^n \in H$. Далее предполагаем, что B^{-1} существует в H, то есть решение задачи y^{n+1} существует и единственно.

Разностная схема (3.8) называется *устойчивой*, если существуют постоянные C_1, C_2, не зависящие от τ, h, n, такие что для любых $f^n, y^0 \in H$ выполнено

$$\|y^n\| \le C_1\|y^0\| + C_2 \max_{0\le j<n} \|f^j\|, \quad n = 1, ..., M.$$

Теорема. *Пусть в схеме (3.8) оператор A является самосопряжённым, положительно определённым и не зависит от n. Тогда при выполнении неравенства $B \ge \frac{\tau}{2}A$ схема (3.8) устойчива.*

Утверждение 3.2.1. *Схема (3.2)-(3.4) является условно устойчивой.*

Доказательство. Используем метод гармоник – будем искать решение в виде

$$y_i^n(\theta) = q^n e^{i\theta I},$$

где θ – произвольный вещественный параметр; q – число, подлежащее определению; I – мнимая единица. Подставим это выражение в (3.2). Граничные и начальные условия теперь не учитываются, так как не влияют на устойчивость.

$$\frac{q^{n+1}e^{i\theta I} - q^n e^{i\theta I}}{\tau} = \frac{q^{n+1}e^{(i-1)\theta I} - 2q^{n+1}e^{i\theta I} + q^{n+1}e^{(i+1)\theta I}}{h^2} - c_i q^n e^{i\theta I},$$

$$q - 1 = q\gamma(2\cos\theta - 2) - \tau c_i, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

Положим $\theta = 0$, тогда $q = 1 - \tau c_i$. Отсюда следует, что $|q| > 1$ при $\tau c_i > 2$, то есть в этом случае решение y_i^n неограниченно возрастает с увеличением n. Значит, $\tau c_i < 2$ – необходимое условие устойчивости. □

Утверждение 3.2.2. *Схема (3.5)-(3.7) является абсолютно устойчивой.*

Доказательство. Схему можно переписать в каноническом виде:

$$B\,\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + Ay^n = 0, \quad n = 0, ..., M-1, \quad y^n \in H,$$
$$A = C - \Lambda, \quad B = E + \tau(C - \Lambda),$$

где C – оператор умножения на коэффициент c_i, а Λ – оператор второй разностной производной, то есть

$$(Cy)_i = c_i y_i, \quad (\Lambda y)_i = y_{\bar{x}x,i} \equiv \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad y \in H.$$

Для того чтобы применить теорему, нужно показать, что $A^* = A > 0$ и $B \geq \frac{\tau}{2}A$. Докажем эти три факта по отдельности. Для этого нам понадобится следующая

Лемма. *В пространстве H справедлив разностный аналог формулы интегрирования по частям: для любых $y, v \in H$*

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_{\overline{x},i} v_i h = -\sum_{i=1}^{N-1} y_i v_{x,i} h.$$

а) Проверим, что оператор A является положительно определённым. Для произвольного элемента $y \in H$ выполнено:

$$(Ay, y) = ((C - \Lambda)y, y) = (Cy, y) - (\Lambda y, y) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i y_i h - \sum_{i=1}^{N-1} y_{\overline{x}x,i} y_i h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} c_i (y_i)^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} (y_{\overline{x},i})^2 h \geq 0,$$

так как $c_i \geq 0$. Если $(Ay, y) = 0$, то $y_{\overline{x},i} \equiv 0$, а из краевых условий $y_0 = y_N = 0$ следует, что $y \equiv 0$. Таким образом, $A > 0$.

б) Покажем самосопряжённость оператора A. Для произвольных функций $y, v \in H$ справедливы равенства:

$$(Ay, v) = ((C - \Lambda)y, v) = (Cy, v) - (\Lambda y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i v_i h - \sum_{i=1}^{N-1} y_{\overline{x}x,i} v_i h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} c_i y_i v_i h + \sum_{i=1}^{N-1} y_{\overline{x},i} v_{\overline{x},i} h.$$

В последнее выражение y, v входят симметрично, поэтому

$$(Ay, v) = (Av, y) \quad \Rightarrow \quad A^* = A.$$

в) Наконец проверим выполнение операторного неравенства $B - \frac{\tau}{2}A \geq 0$. Выберем произвольный элемент $y \in H$, тогда

$$\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right)y, y\right) = \left(\left(E + \frac{\tau}{2}(C - \Lambda)\right)y, y\right) = (y, y) + \frac{\tau}{2}((C - \Lambda)y, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (y_i)^2 h + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N-1} c_i (y_i)^2 h - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N-1} y_{\overline{x}x,i} y_i h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (y_i)^2 h + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N-1} c_i (y_i)^2 h + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{\overline{x},i})^2 h \geq 0.$$

Таким образом, условия теоремы выполнены сразу для всех $\tau, h > 0$. Отсюда следует, что разностная схема (3.5)-(3.7) абсолютно устойчива. $\square$

Проведённое сравнение двух разностных схем может быть полезно при выборе способа реализации вычислений для каждой конкретной задачи. Например, первая схема (3.2)-(3.4) легко переносится из случая, описанного в пункте 3.1. Она приводится в виду, очень похожему на (3.1) – в системе линейных уравнений изменится лишь правая часть, а матрица останется такой же и с постоянными элементами вдоль каждой диагонали. При выборе второй разностной схемы (3.5)-(3.7) появляется преимущество в устойчивости, но реализацию метода прогонки для решения системы приходится немного изменять, поскольку теперь меняется матрица системы, причём её элементы на главной диагонали не равны между собой. Кроме того, на конкретных примерах было показано, что во многих случаях вторая разностная схема даёт гораздо большую скорость сходимости при уменьшении τ. В дальнейшем при реализации алгоритмов для общего случая задачи с коэффициентом $c(x)$ мы будем пользоваться именно этой разностной схемой.

Глава 4

Примеры

Для численного решения и визуализации данных была разработана компьютерная программа в двух версиях (для решения задачи без коэффициента и для общего случая) с использованием пакета *MATLAB*. При написании программы использовались справочные материалы из [13], [14].

Далее во всех примерах для простоты зафиксированы следующие значения:

- $a^2 = 1$ – коэффициент температуропроводности в уравнении,
- $l = \pi$ – длина отрезка (стержня),
- $T = 2$ – продолжительность измерений (максимальное значение t),
- $N = 100$ – число узлов сетки по пространственной переменной x,
- $M = 100$ – число узлов сетки по временной переменной t.

В примерах 4.1–4.5 рассмотрена задача без коэффициента, то есть (2.4)-(2.6). В оставшихся примерах 4.6–4.8 изучен общий случай – задача (2.1)-(2.3). На всех иллюстрациях приняты одни и те же цветовые обозначения; все примеры сопровождаются подробными комментариями.

4.1 Пример 1

Для обеих иллюстраций на следующей странице выбраны параметры:

$$\psi(x) = x(\pi - x), \quad \alpha = 0{,}5, \quad t = 1,$$

20 слагаемых ряда Фурье при вычислении точного решения,
1 и 3 слагаемых ряда Неймана соотвественно для численного решения.

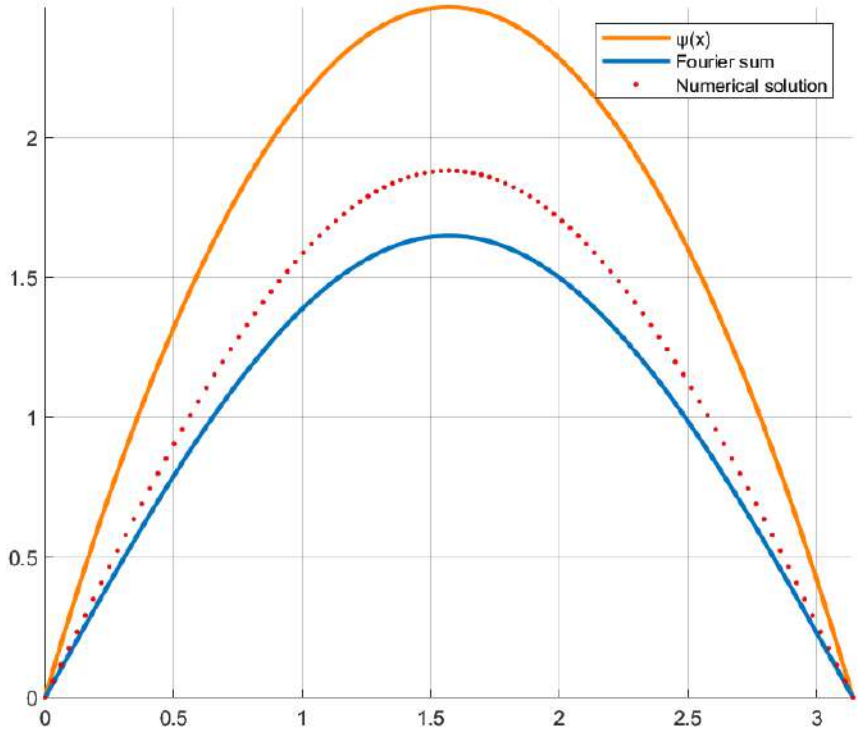


Рис. 4.1: Заданная функция $\psi(x) = x(\pi - x)$ (верхний непрерывный график) и сравнение точного и приближённого решений на первой итерации.

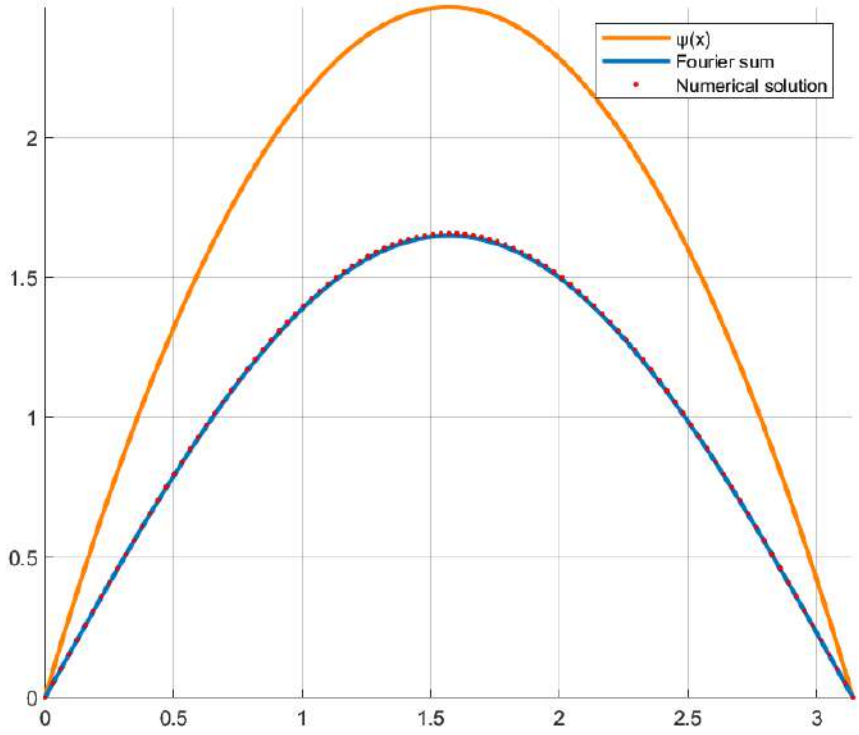


Рис. 4.2: Заданная функция $\psi(x) = x(\pi - x)$ (верхний непрерывный график) и сравнение точного и приближённого решений на третьей итерации.

На рисунках 4.1-4.2 оранжевым цветом показан точный график введённой функции $\psi(x) = x(\pi - x)$. Нижний непрерывный график синего цвета обозначает частичную сумму ряда Фурье; его можно считать точным решением, так как число слагаемых взято достаточно большим, чтобы график стабилизировался. Красный точечный график обозначает частичную сумму ряда Неймана, то есть численное (сеточное) решение. На этих двух рисунках изображены два случая: число слагаемых ряда Неймана при вычислении приближённого решения равно 1 и 3 соответственно при всех тех же значениях остальных параметров. Можно убедиться, что численное решение при данном $t = 1$ сходится с ощутимой скоростью к точному при увеличении числа слагаемых. Заметим, что $\alpha = 0{,}5$ выбрано таким образом, чтобы было справедливо утверждение 2.3.1, обеспечивающее сходимость ряда Неймана.

4.2 Пример 2

Рассматриваем ту же функцию $\psi(x)$, тот же момент времени t и то же число слагаемых ряда Фурье 20, но параметр α возьмём ближе к нулю:

$$\psi(x) = x(\pi - x), \quad \alpha = 0{,}1, \quad t = 1.$$

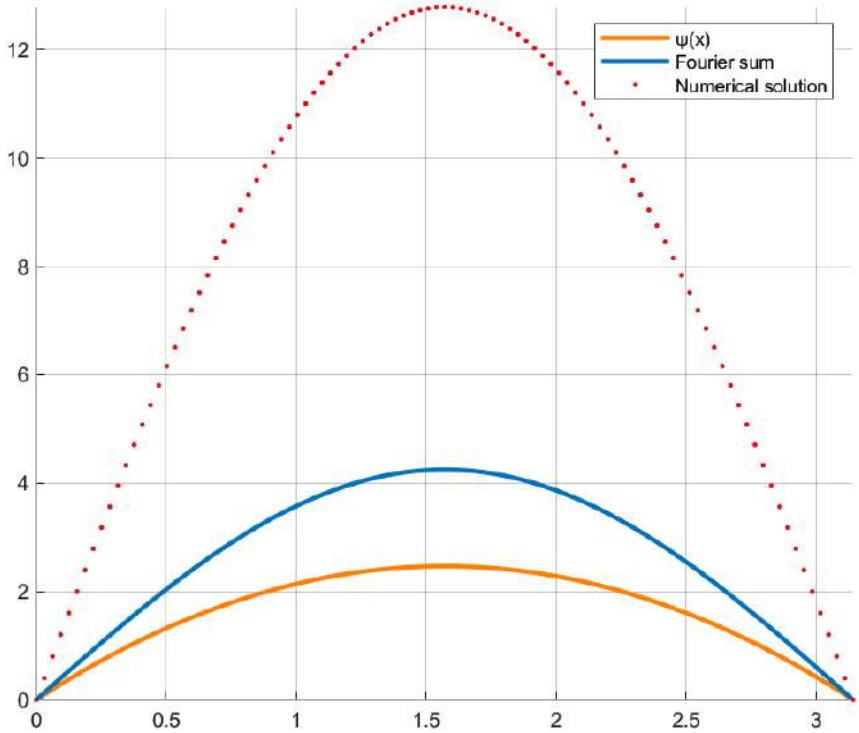


Рис. 4.3: Отклонение численного решения от точного; 3 слагаемых ряда.

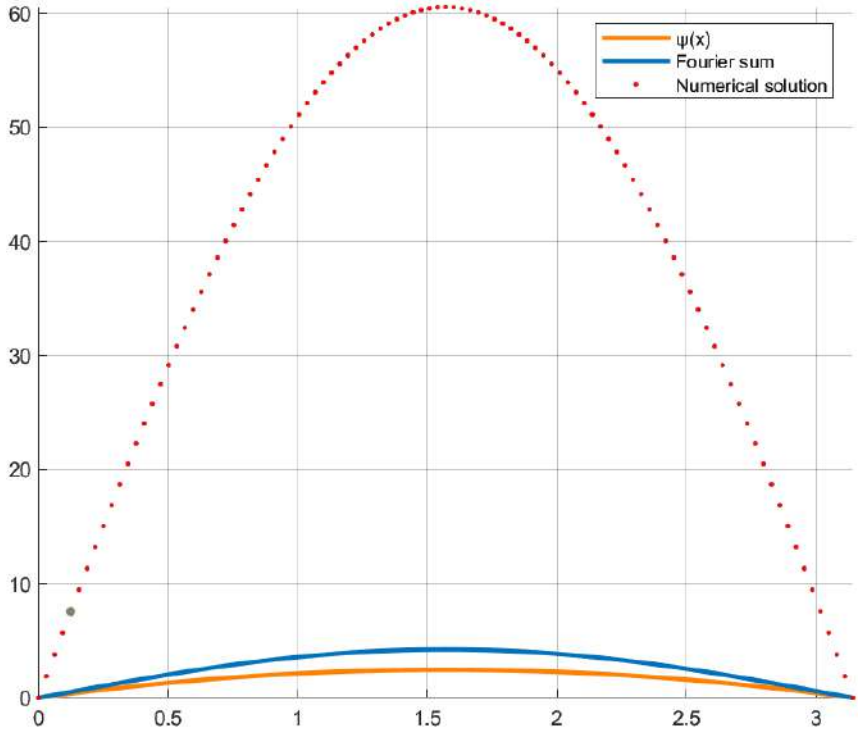


Рис. 4.4: Ещё более сильное отклонение; 11 слагаемых ряда.

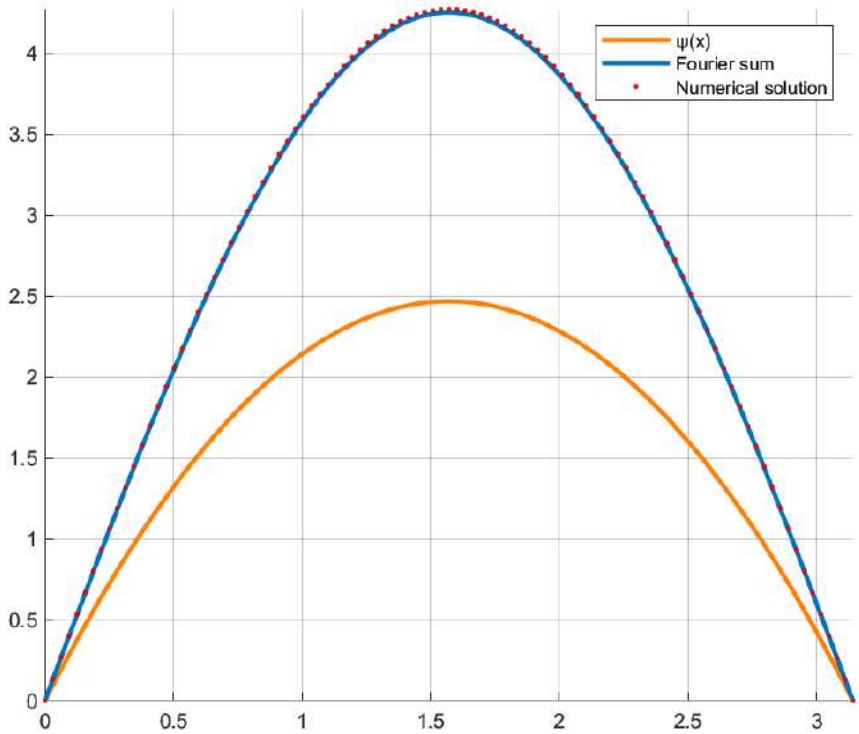


Рис. 4.5: Использование комбинированного метода с поправкой на одну гармонику; сближение графиков точного и численного решений.

На рисунках 4.3-4.4 показано, как растёт решение по операторному методу (сеточная функция) при увеличении числа слагаемых ряда Неймана – 3 и 11 соответствнно. Как мы уже знаем, расходимость объясняется малостью параметра α. На рисунке 4.5 применён комбинированный метод, который был подробно изложен в пункте 2.4, в котором число гармоник равно 1. Из рисунка видно, что такая поправка действительно может предотвратить расходимость численного решения при малых α.

4.3 Пример 3

Пусть

$$\psi(x) = x^2(\pi - x)^4, \quad \alpha = 0{,}2, \quad t = 0{,}5.$$

Число слагаемых ряда Фурье – 8 (напомним, что оно берётся достаточно большим, чтобы график аналитического решения стабилизировался). На рисунках ниже представлены случаи соответственно 1 и 9 слагаемых ряда Неймана для численного решения. В этом примере, в частности, видно, что даже при малых α может наблюдаться сходимость операторного метода, то есть условие $\alpha \geq 0{,}5$, полученное в пункте 2.3, не является для этого необходимым.

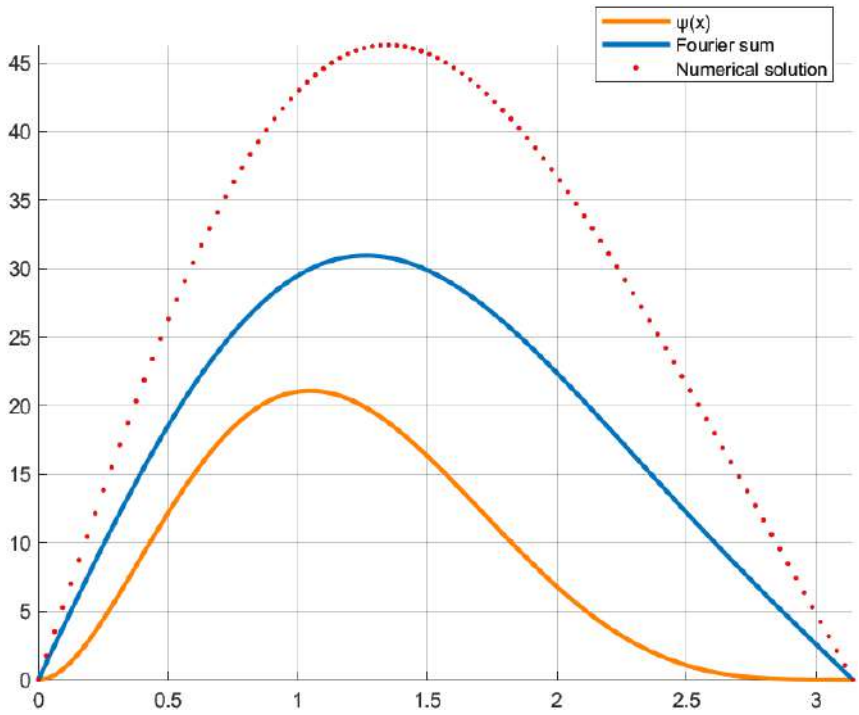


Рис. 4.6: Графики $\psi(x) = x^2(\pi - x)^4$, точного и численного решений при одном слагаемом ряда Неймана.

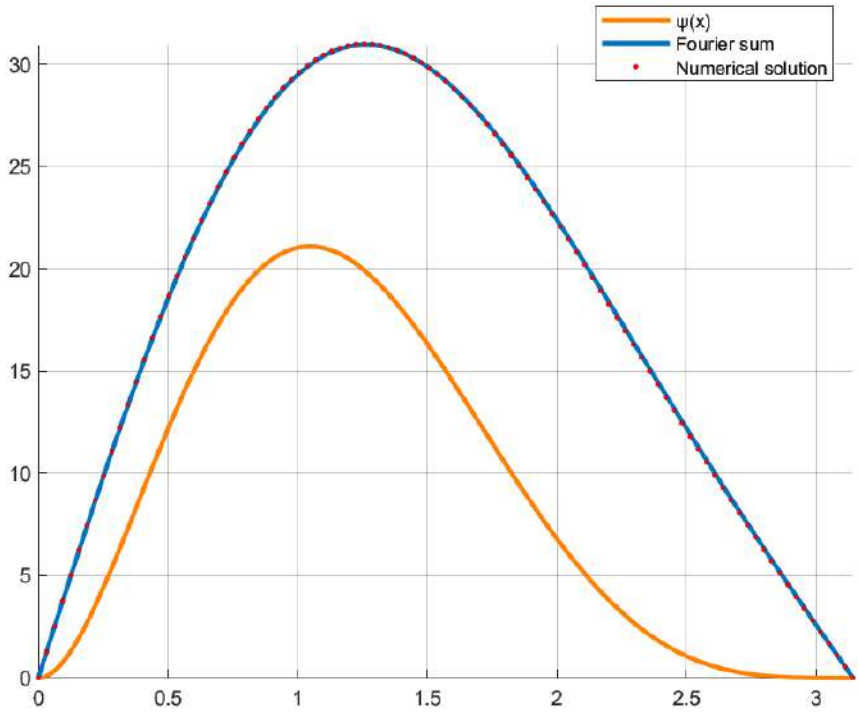


Рис. 4.7: Графики $\psi(x) = x^2(\pi - x)^4$, точного и численного решений при девяти слагаемых ряда Неймана.

4.4 Пример 4

Возьмём ту же функцию ψ, как в предыдущем примере; пусть значение параметра α ещё меньше:

$$\psi(x) = x^2(\pi - x)^4, \quad \alpha = 0{,}01, \quad t = 1.$$

Число слагаемых ряда Фурье – 8, ряда Неймана – 5. На рисунках ниже представлены ситуации до и после применения комбинированного метода, описанного в пункте 2.4, с поправкой на одну гармонику.

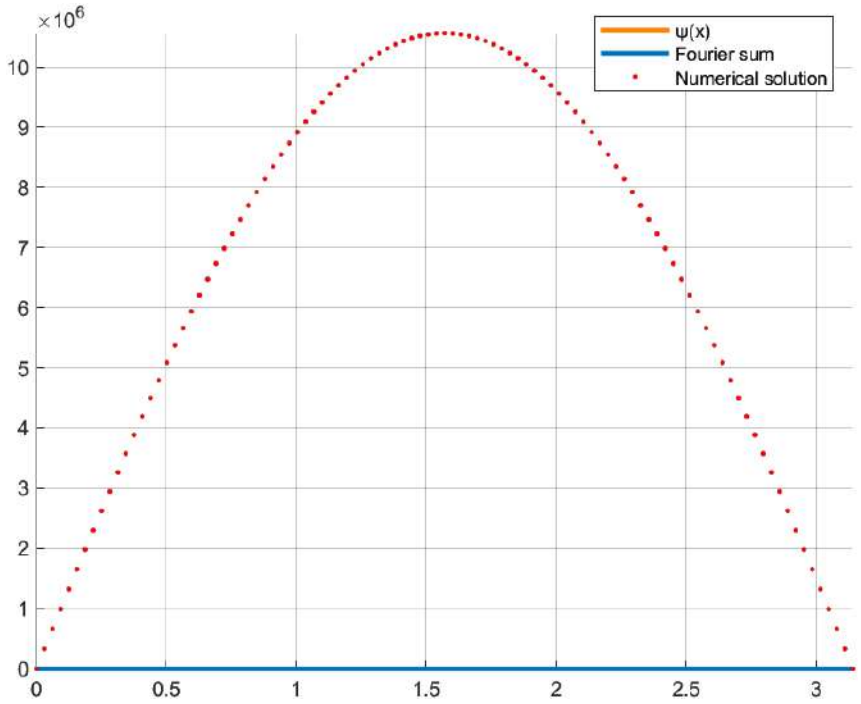


Рис. 4.8: Расходимость численного решения из-за малости α.

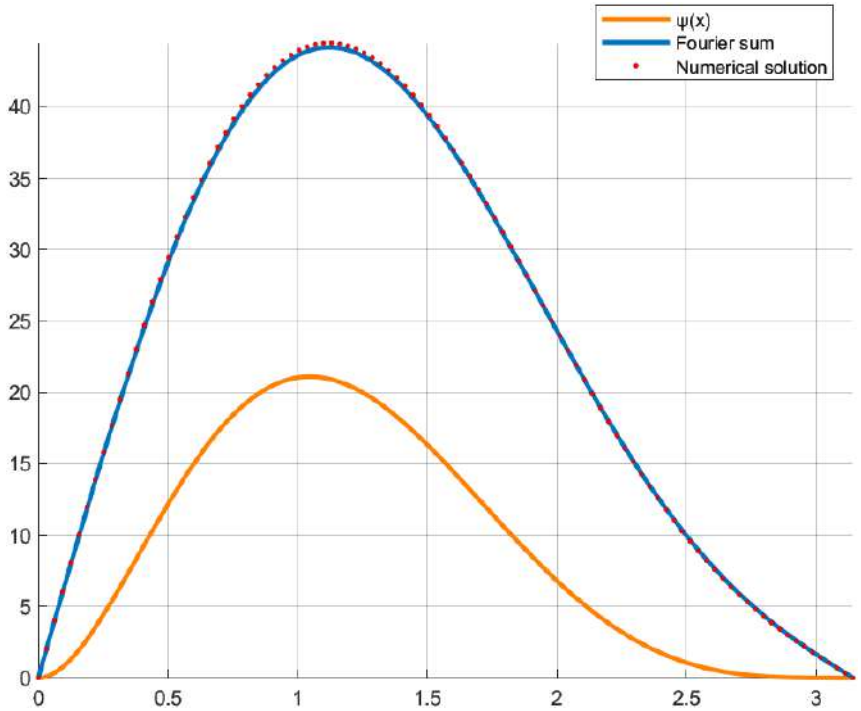


Рис. 4.9: После применения комбинированного метода с одной гармоникой.

4.5 Пример 5

Пусть

$$\psi(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x, \quad \alpha = 0{,}01, \quad t = 1.$$

Число слагаемых ряда Неймана – 13. На рисунках ниже представлены случаи применения операторного метода, комбинированного метода с одной гармоникой и комбинированного метода с тремя гармониками соответственно. Этот пример показывает, что иногда поправки лишь на одну гармонику бывает недостаточно для сходимости.

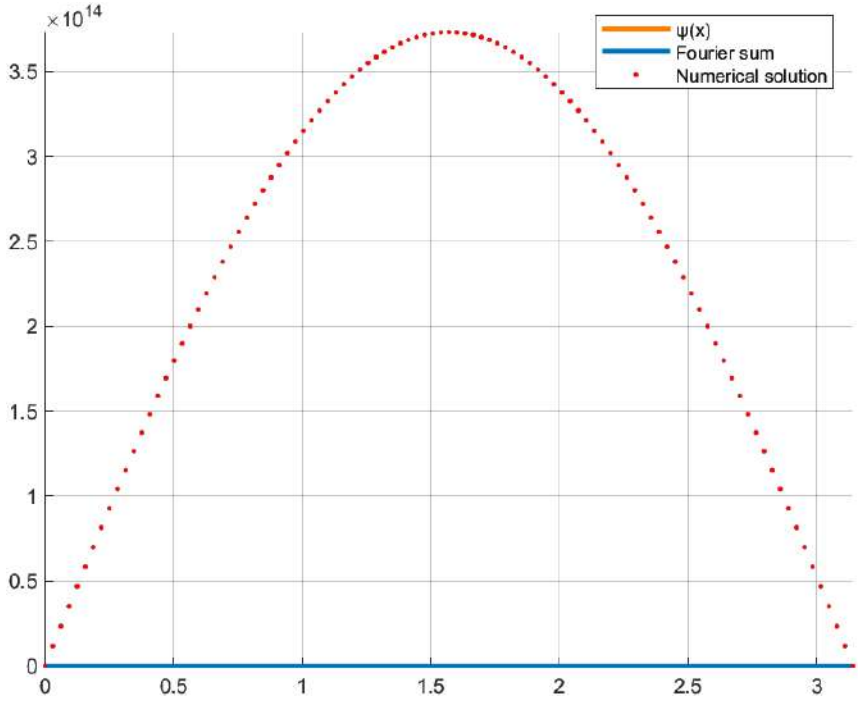


Рис. 4.10: Сильная расходимость операторного метода.

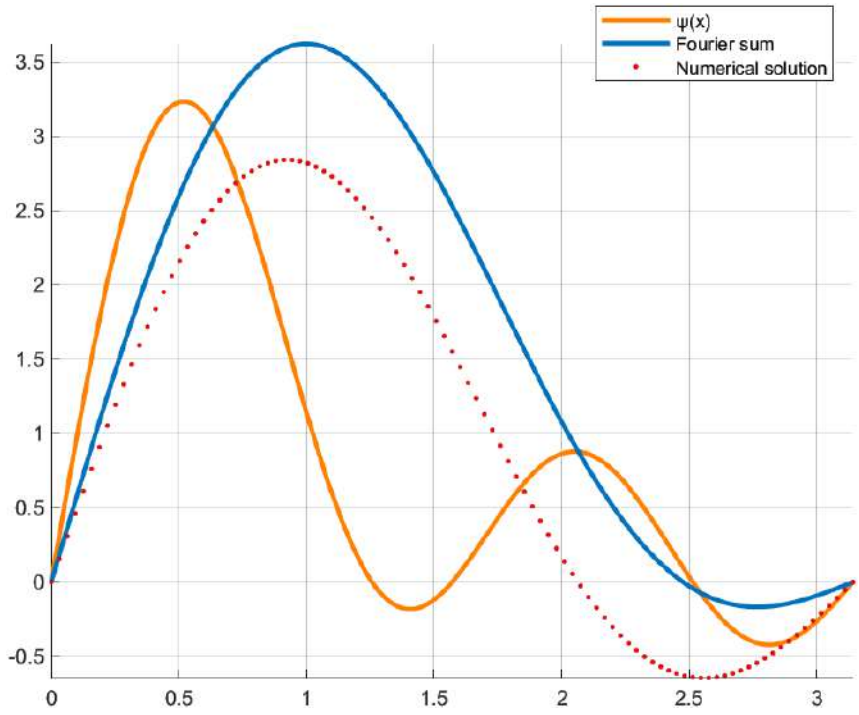


Рис. 4.11: После применения комбинированного метода с одной гармоникой.

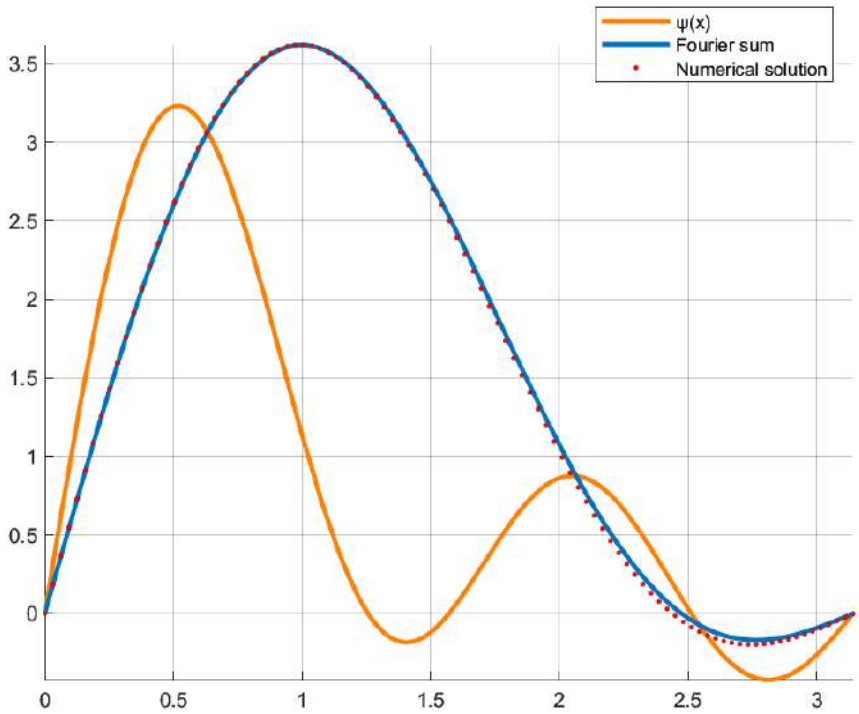


Рис. 4.12: После применения комбинированного метода с тремя гармониками.

4.6 Пример 6

Далее рассмотрим общую задачу с коэффициентом (2.1)-(2.3). Помимо всех параметров, которые были даны в предыдущих примерах, здесь также следует указывать функцию $c(x)$. Также, как мы знаем, метод Фурье для такой задачи не работает, поэтому решение имеется только численное – по операторному методу. В этом примере входные данные следующие:

$$\psi(x) = x(\pi - x), \quad c(x) = x, \quad \alpha = 0{,}1, \quad t = 1.$$

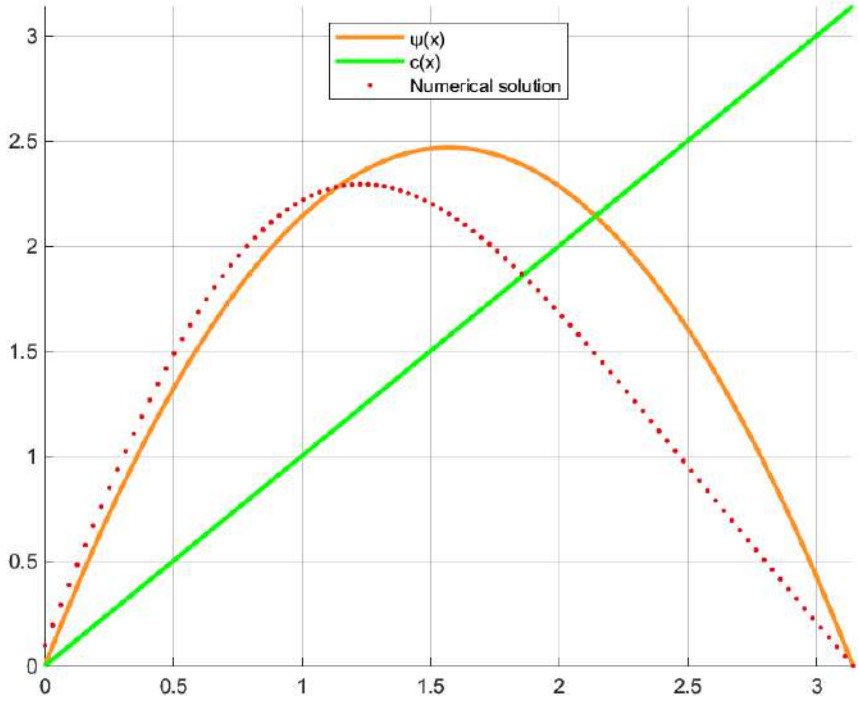


Рис. 4.13: Использование операторного метода для задачи с коэффициентом; одно слагаемое ряда Неймана.

На рисунке 4.13 изображены графики функций $\psi(x)$, $c(x)$ и график численного решения (сеточная функция) с одним слагаемым ряда Неймана. Из рисунка видно, например, что из-за наличия коэффициента $c(x)$ график решения становится несимметричным и чуть наклоняется влево. Кроме того, не наблюдается расходимости численного решения, несмотря на малый параметр α – такой же, как в примере 4.2.

Поскольку в данном случае у нас нет точного решения, с которым можно было бы провести сравнение, возникает вопрос: как проверить корректность нашего алгоритма? На рисунке 4.14 показан пример естественного теста, который можно провести, чтобы убедиться в том, что вычислительная программа даёт адекватный результат. Возьмём два слагаемых ряда Неймана. Тест заключается в том, что составляется сумма

$$\alpha\widehat{u}(x,0) + (1-\alpha)\widehat{u}(x,T),$$

где $\widehat{u}(x,t)$ – приближённое решение в виде сеточной функции. Эта сумма, естественно, должна быть близка к $\psi(x)$ в силу нелокального условия (2.3). На рисунке 4.14 видно, что полученная сеточная функция совпадает с $\psi(x)$, то есть на этом примере алгоритм работает хорошо.

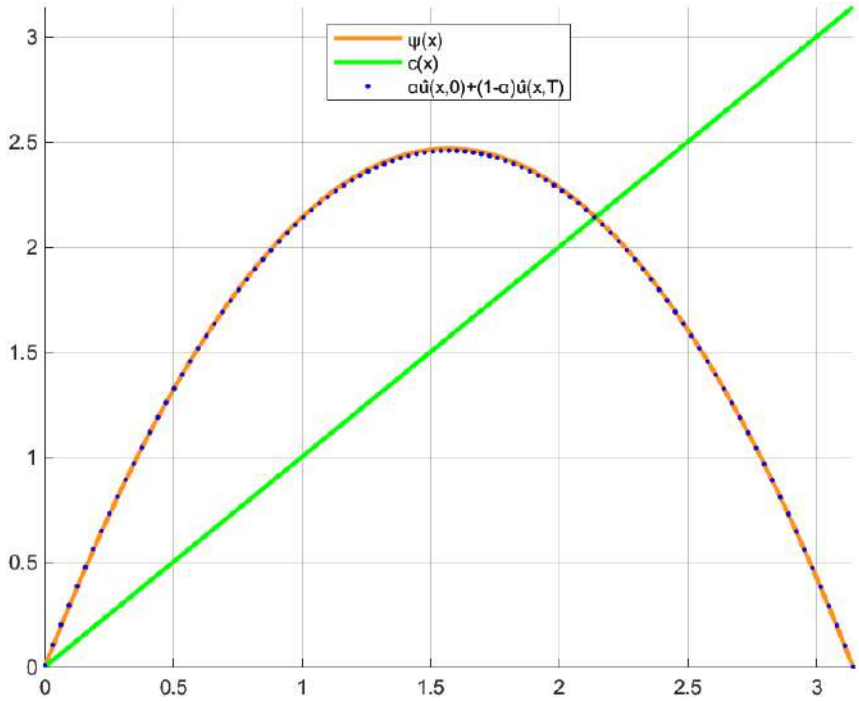


Рис. 4.14: Тест операторного метода для задачи с коэффициентом; два слагаемых ряда Неймана.

4.7 Пример 7

Рассмотрим следующие входные данные:

$$\psi(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{10}, \quad c(x) = 100e^{-10(x-2)^2}, \quad \alpha = 0{,}01, \quad t = 0{,}5,$$

3 слагаемых ряда Неймана.

Все три графика при данных параметрах изображены на рисунке 4.15. Аналогично предыдущему примеру можем провести тест корректности алгоритма. Результаты показаны на рисунках 4.16-4.17 при 1 и 3 слагаемых ряда Неймана. Заметим, что в качестве $c(x)$ здесь берётся локализованная функция типа «колокол». На рисунке 4.16 видно, что в точках, где значение $c(x)$ велико, наблюдается более высокая скорость сходимости. Но в итоге при увеличении числа слагаемых тестовая сеточная функция всё так же стремится к $\psi(x)$.

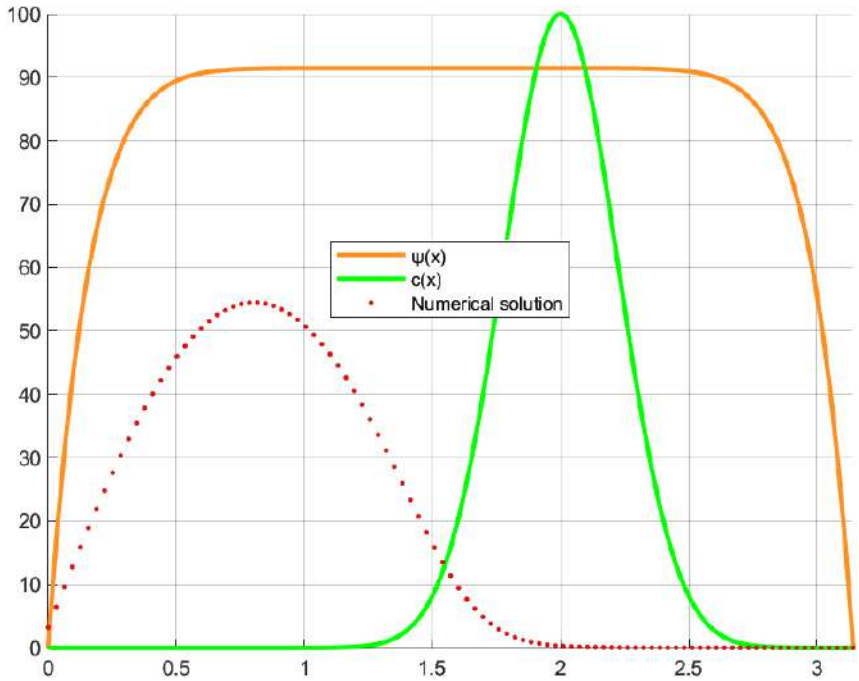


Рис. 4.15: Использование операторного метода для задачи с коэффициентом.

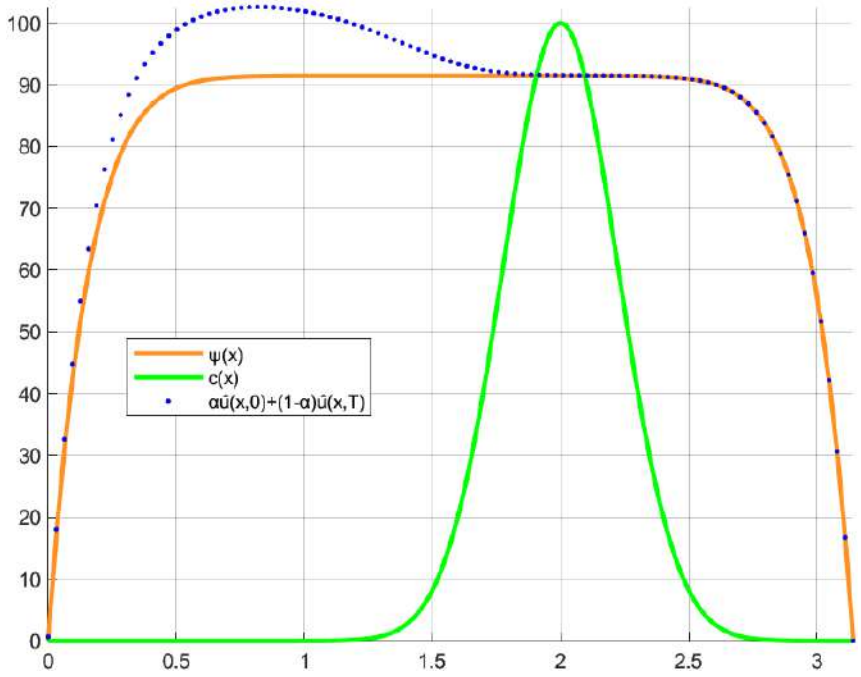


Рис. 4.16: Тест операторного метода для задачи с коэффициентом; одно слагаемое ряда Неймана.

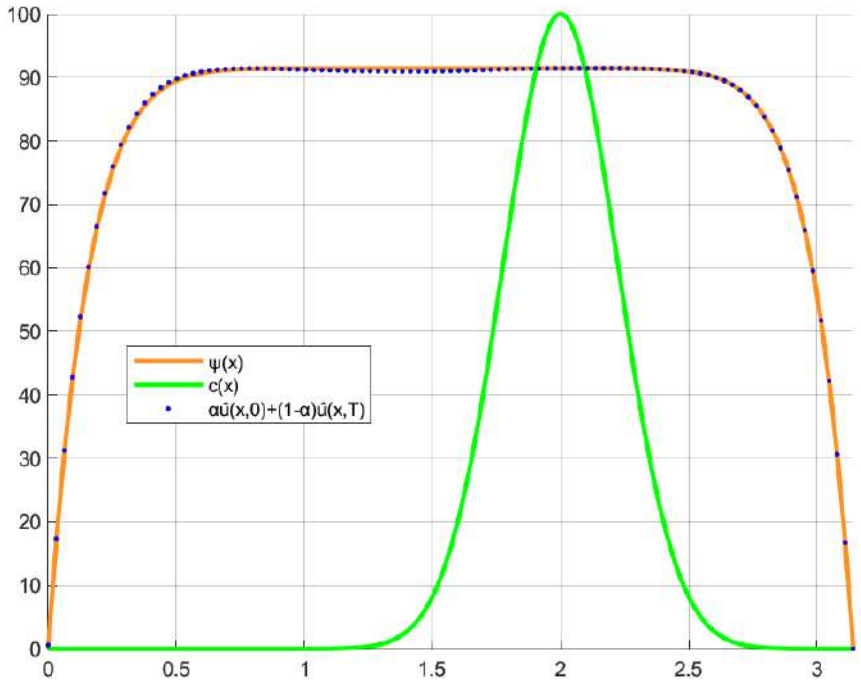


Рис. 4.17: Тест операторного метода для задачи с коэффициентом; три слагаемых ряда Неймана.

4.8 Пример 8

Как было описано в пункте 2.6, метод Фурье можно применять для конкретных коэффициентов вида

$$c(x) = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

В этом примере $n = 1$. Рассмотрен метод Фурье на следующих исходных данных (для простоты $\psi(x)$ берётся в виде суммы двух собственных функций):

$$\psi(x) = \sqrt{x}\left(J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}x}{\pi}\right) + J_1\left(\frac{\mu_2^{(1)}x}{\pi}\right)\right), \quad c(x) = \frac{3}{4x^2}, \quad \alpha = 0{,}2, \quad t = 0.$$

Здесь J_1 – функция Бесселя первого порядка, $\mu_1^{(1)} \approx 3{,}8317$, $\mu_2^{(1)} \approx 7{,}0156$. Теперь можно сравнивать численное решение с точным. На рисунках ниже график $c(x)$ для наглядности опускается, поскольку эта функция не ограничена в окрестности нуля.

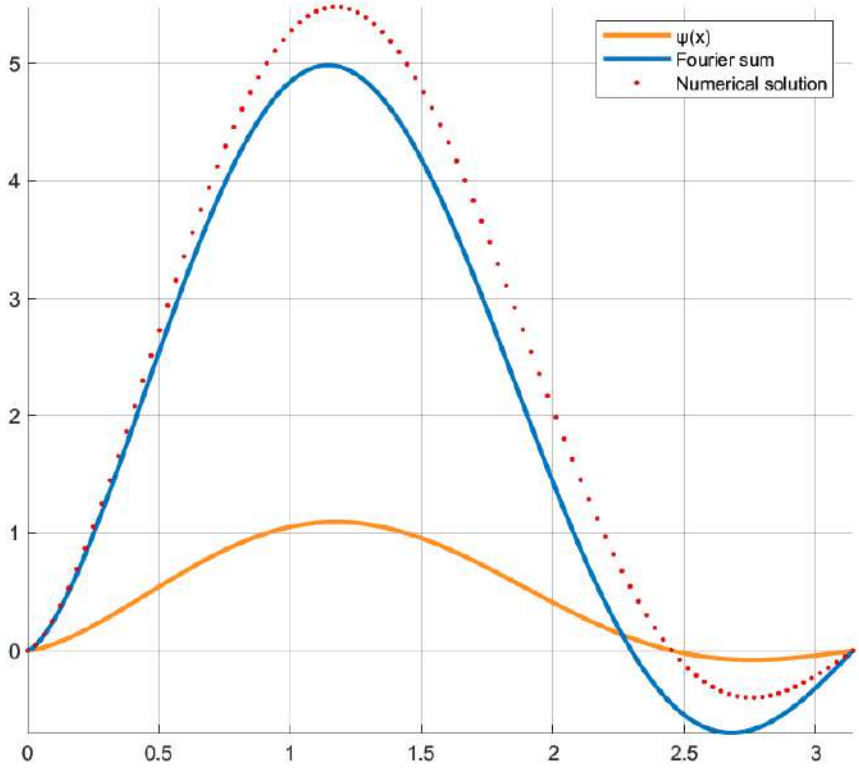


Рис. 4.18: Точное и численное решения в случае с коэффициентом; 1 слагаемое ряда Неймана.

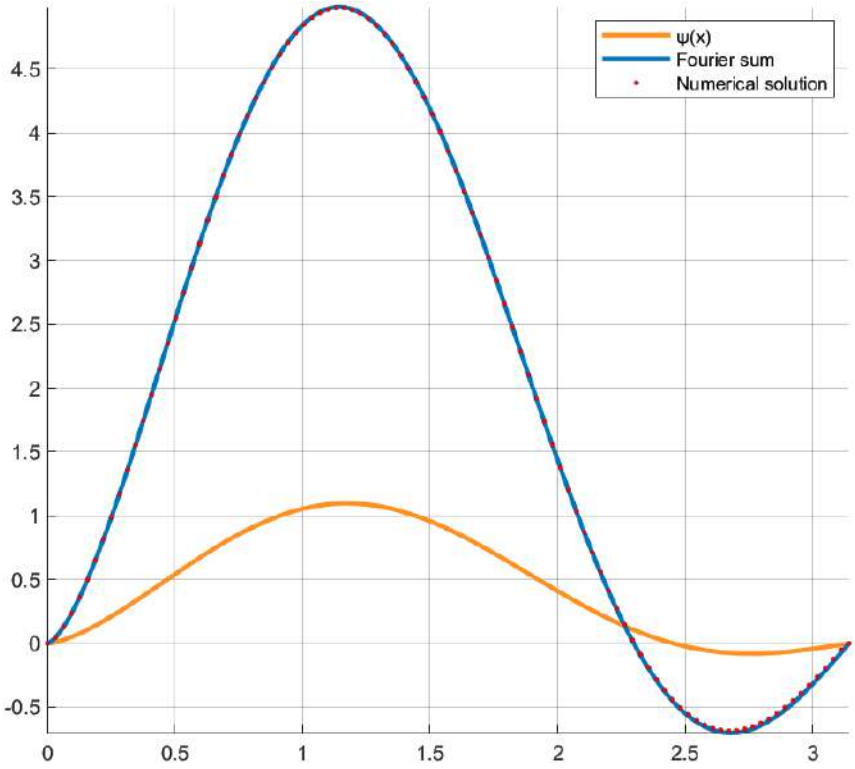


Рис. 4.19: Точное и численное решения в случае с коэффициентом; 5 слагаемых ряда Неймана.

Глава 5

Заключение

В настоящей работе исследовалась нелокальная по времени задача для одномерного уравнения теплопроводности.

- Рассмотрен важный частный случай данной задачи при отсутствии бокового теплообмена в стержне (коэффициента в уравнении). Проведён теоретический анализ задачи, установлена её однозначная разрешимость, исследована корректность. Использован метод разделения переменных (метод Фурье) для нахождения аналитического решения.
- Предложены операторный метод, который распространяется также на общий случай с коэффициентом, и алгоритм численного решения нелокальной задачи. Выделены ключевые этапы построения решения.
- Для частного случая также предложен комбинированный метод решения, использующий преимущества первых двух и регуляризующий задачу в случаях, когда она становится близка к некорректной.
- Рассмотрены две разностные схемы для решения прямой задачи теплопроводности, проведено сравнение устойчивости.
- Разработана цельная компьютерная программа, которая реализует теоретические алгоритмы и визуализирует вычисления.
- Проведена серия вычислительных экспериментов для различных значений входных данных, подтвердившая высокую надёжность алгоритмов.

В результате проделанной работы все поставленные цели достигнуты и исследование можно считать завершённым.

Литература

[1] Жак Адамар. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* Перев. с франц. – М., 1978.

[2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1974.

[3] Вабищевич П. Н. *Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности* // Дифференциальные уравнения, 1981, том 17, номер 7, с. 1193-1199.

[4] Кангужин Б. Е. *О единственности решения нелокальной по времени задачи для уравнения теплопроводности* // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвящённого 60-летию профессора В. Н. Врагова / Под ред. А. И. Кожанова. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 2005. – С. 130-132.

[5] Королёв Г. М. *Специальная нелокальная задача для одномерного уравнения теплопроводности* // Герценовские чтения, материалы научной конференции, 9-13 апреля 2018 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. – С. 96-100.

[6] Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* Изд-во МГУ, Наука, 2004.

[7] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. *Математический анализ* Изд-во МГУ, 2004.

[8] Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач.* Изд-во МГУ, 1994.

[9] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[10] Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* – М.: Наука, 1989.

[11] Абакумов М. В., Гулин А. В. *Лекции по численным методам математической физики.* – М.: ИНФРА-М, 2013.

[12] Ионкин Н. И. *Численные методы: курс лекций.* Москва : Макс Пресс, 2016.

[13] [Электронный ресурс] *MATLAB documentation.*
URL: https://uk.mathworks.com/help/matlab/index.html

[14] Дьяконов В. П. *MATLAB. Полный самоучитель.* ДМК Пресс, 2012.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Гогулиной Е.Ю.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием “Омега-классификация поверхностных диффеоморфизмов, реализующих диаграммы Смейла” являются: Лемма 1.1, доказательство Леммы 1.1, теорема 1, доказательство Теоремы 1, Теорема 2, доказательство Теоремы 2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: диаграмма Смейла, Smale diagram. Все работы не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1], [5] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Починкой Ольгой Витальевной, заведующей кафедрой фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального Исследовательского Университета “Высшая Школа Экономики” Нижний Новгород

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 16 июня 2021 года. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Подпись
ФИО полностью
Гогулина Екатерина Юрьевна

Дата
27.05.2021
город, страна
Нижний Новгород, Россия

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Нижегородский филиал
Факультет информатики, математики и компьютерных наук

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Омега-классификация поверхностных диффеоморфизмов, реализующих диаграммы Смейла

по направлению подготовки Математика
образовательная программа «Математика»

Выполнила:
Студентка группы 17ФМ
Гогулина Екатерина Юрьевна
Научный руководитель:
Профессор, доктор
физ.-мат. наук,
Починка Ольга Витальевна

Нижний Новгород 2021

1 Введение и формулировка результатов

Пусть f – диффеоморфизм связного замкнутого n-многообразия M^n. Говорят, что диффеоморфизм f *удовлетворяет аксиоме A (является A-диффеоморфизмом)*, если его неблуждающее множество является гиперболическим, и периодические точки плотны в нем. Для A-диффеоморфизмов справедлива теорема о спектральном разложении С. Смейла [5], устанавливающая единственное представление неблуждающего множества $NW(f)$ в виде конечного объединения попарно не пересекающихся компактных, инвариантных и топологически транзитивных подмножеств

$$NW(f) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_r,$$

называемых *базисными*. Более того,

$$M^n = \bigcup_{\rho=1}^{r} W^s_{\Lambda_\rho} = \bigcup_{\rho=1}^{r} W^u_{\Lambda_\rho}.$$

Говорят, что A-диффеоморфизм f *удовлетворяет аксиоме B (является (A,B)-диффеоморфизмом)*, если из условия $W^s_{\Lambda_i} \cap W^u_{\Lambda_j} \neq \emptyset$ следует, что существуют периодические точки $p \in \Lambda_i$, $q \in \Lambda_j$ такие, что многообразия W^s_p и W^u_q имеют точку трансверсального пересечения. На множестве базисных множеств любого (A, B)-диффеоморфизма f можно ввести отношение $\prec$ С. Смейла [5]. Именно, пусть Λ_i, Λ_j — базисные множества (A, B)-диффеоморфизма f. Говорят, что Λ_i, Λ_j *находятся в отношении* $\prec$ $(\Lambda_i \prec \Lambda_j)$, если

$$W^s_{\Lambda_i} \cap W^u_{\Lambda_j} \neq \emptyset.$$

В силу [5] отношение $\prec$ для (A, B)-диффеоморфизмов является отношением частичного порядка. Последовательность, состоящая из попарно различных базисных множеств $\Lambda_i = \Lambda_{i_0}, \Lambda_{i_1}, ..., \Lambda_{i_m} = \Lambda_j \, (m \geqslant 1)$, такая что $\Lambda_{i_0} \prec \Lambda_{i_1} \prec \ldots \prec \Lambda_{i_m}$ называется *цепью длины* $m \in \mathbb{N}$, *соединяющей базисные множества* Λ_i *и* Λ_j. Такая цепь называется *максимальной*, если в нее нельзя добавить ни одного нового базисного множества.

Диаграммой Смейла Δ_f (A,B)-диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется граф, вершины которого соответствуют базисным множествам, а ориентированные ребра последовательно соединяют вершины максимальных цепей. В действительности диаграмма Смейла является частным случаем диаграмм Хассе.

Диаграммой Хассе частично упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется граф, вершинами которого являются элементы множества X, а пара (x, y) образует ребро, если $x \prec y$ и $\nexists z : \; x \prec z, \; z \prec y$[1].

[1]Впервые систематически такого рода визуализация описана Биркгофом [2] в 1948 году, им же дано название в честь использовавшего подобные диаграммы Хельмута Хассе, однако такого рода рисунки встречаются и в более ранних трудах, например, в учебнике французского математика Анри Фохта (нем. Henri Vogt) [10] 1895 года издания.

Лемма 1.1. *Диаграмма Смейла любого (A, B)-диффеоморфизма является связной диаграммой Хассе.*

В работе [5], в качестве проблемы (Проблема 6.6a) сформулирован следующий вопрос: какие диаграммы могут соотвествовать (A, B)-диффеоморфизмам?

Настоящая работа дает частичный ответ на этот вопрос. С помощью хирургической операции Смейла мы конструируем модельные диффеоморфизмы двумерного тора. Назовем *модельным диффеоморфизмом тора*, диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, полученный из алгебраического диффеоморфизма Аносова $\widehat{C}$ хирургической операцией Смейла вдоль инвариантных многообразий конечного (возможно пустого) множества попарно не пересекающихся периодических орбит: вдоль устойчивых многообразий орбит $\mathcal{O}^s = \{O_1^s, \ldots, O_k^s\}$ и вдоль неустойчивых многообразий периодических орбит $\mathcal{O}^u = \{O_1^u, \ldots, O_l^u\}$.

Теорема 1. *Модельные диффеоморфизмы $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует матрица $H \in GL(2, \mathbb{Z})$ такая, что $HC = C'H$ и $\widehat{H}(\mathcal{O}^s) = \mathcal{O}'^s$, $\widehat{H}(\mathcal{O}^u) = \mathcal{O}'^u$.*

В разделе 5 мы вводим класс G (A, B)-диффеоморфизмов поверхности, являющихся связной суммой модельных диффеоморфизмов. В работе [1] показано, что любая связная диаграмма Хассе реализуется некоторым диффеоморфизмом из класса G.

Размеченная диаграмма – это диаграмма Смейла, в которой около каждой вершины дополнительно указан класс топологической сопряженности ограничения диффеоморфизма на соответствующем базисном множестве. Две размеченные диаграммы называются *изоморфными*, если существует изоморфизм соответствующих графов, сохраняющий инцидентность, ориентацию ребер и классы топологической сопряженности вершин. Из свойств (A, B)-диффеоморфизмов следует, что размеченная диаграмма не меняет класс изоморфности при малых возмущениях.

Назовем диффеоморфизмы $f : M^n \to M^n$, $g : M'^n \to M'^n$ *объемлюще Ω-сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M'^n$ такой, что $hf|_{NW_f} = gh|_{NW_f}$.

В разделе 6 приведены диффеоморфизмы из класса G с изоморфными размеченными диаграммами Смейла, не являющиеся объемлюще Ω-сопряженными. Выделим подкласс $G_* \subset G$ диффеоморфизмов, у которых любые два модельных диффеоморфизма связаны не более, чем по одной орбите. Для таких диффеоморфизмов класс изоморфности размеченной диаграммы Смейла является полным инвариантом объемлющей Ω-сопряженности.

Теорема 2. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G_*$ объемлюще Ω-сопряжены тогда и только тогда, когда их размеченные диаграммы изоморфны.*

2 Диаграмма Смейла – связная диаграмма Хассе

В настоящем разделе мы докажем связность диаграммы Смейла. Для этого сначала напомним некоторые определения из теории графов (подробнее см., например, [8]).

Граф Γ – это пара (V, E), где V – множество *вершин*, а E – множество *пар вершин*, которые называются *ребрами*.

Две вершины называются *смежными*, если они *связаны* ребром (т.е. они составляют ребро), а ребро в этом случае называется *инцидентным* каждой из вершин.

Набор вершин $\{v_1, (v_1, v_2), v_2, \ldots, v_{k-1}, (v_{k-1}, v_k), v_k\}$ называется *путем* длины k. Граф называется *связным*, если каждые две его вершины соединены путем.

Доказательство Леммы 1.1.

Доказательство. Пусть на множестве $NW(f)$ задано отношение частичного порядка $\prec$ и диаграмма Хассе $(NW(f), \prec) = \Gamma$ имеет несколько компонент связности, то есть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$. Тогда компоненте связности Γ_i будет соответствовать подмножество неблуждающего множества $NW_i(f) = \Lambda_{i_1} \cup \cdots \cup \Lambda_{i_m}$. Многообразие, соответствующее неблуждающему множеству $NW_i(f)$, можно представить в виде $M_i^n = \bigcup\limits_{r=i_1}^{i_m} W^s_{\Lambda_r} = \bigcup\limits_{r=i_1}^{i_m} W^u_{\Lambda_r}$. Отсюда следует, что многообразие M_i^n открыто и замкнуто, а значит совпадает с объемлющим многообразием M^n. Таким образом, компонента связности Γ_i совпадает с Γ. Это противоречит тому, что граф Γ имеет несколько компонент связности. □

3 Модельные диффеоморфизмы на торе

В этом разделе для описания структуры неблуждающего множества поверхностных (A, B)-диффеоморфизмов, реализующих любые диаграммы Смейла, мы определяем модельные диффеоморфизмы на двумерном торе.

3.1 Диффеоморфизм Аносова на 2-торе

Пусть $C \in SL(2, \mathbb{Z})$ – гиперболическая матрица с собственными значениями λ_1, λ_2 такими что $\lambda = |\lambda_1| > 1$ и $|\lambda_2| = 1/\lambda$. Так как матрица C имеет определитель, равный 1, то она индуцирует гиперболический автоморфизм $\widehat{C} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ с неподвижной точкой O. Согласно [4] этот диффеоморфизм является диффеоморфизмом Аносова и обладает двумя трансверсальными инвариантными слоениями (устойчивым и неустойчивым), любой слой каждого из которых всюду плотен на торе. Кроме того, множество периодических точек диффеоморфизма $\widehat{C}$ также плотно на $\mathbb{T}^2$.

3.2 “Хирургическая операция” Смейла

С. Смейл предложил так называемую "хирургическую операцию"для получения диффеоморфизма с одномерным аттрактором и неподвижной источниковой точкой. Идея состоит в раздувании некоторой окрестности неподвижной точки, при этом область вне этой окрестности не меняется.

Пусть (x, y) – локальные координаты в некоторой окрестности $U(O)$ точки $O \in \mathbb{T}^2$ такие, что $\widehat{C}(x, y) = (x/\lambda, \lambda y)$. Тогда $Ox \subset W^s_O$, $Oy \subset W^u_O$ и $\{y = const\}$ и $\{x = const\}$ являются устойчивым и неустойчивым слоениями. Пусть $\sigma : \mathbb{R} \to [0, 1]$ – функция, заданная формулой

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{1+\exp\left(\frac{\frac{1}{2}-x}{x^2(x-1)^2}\right)}, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Определим линейную функцию $\beta_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такую, что $\beta_{a,b}(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $a < b$. Тогда композиция $\tau_{a,b} = \sigma \circ \beta_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ переводит отрезок $[a, b]$ в отрезок $[0, 1]$. Положим

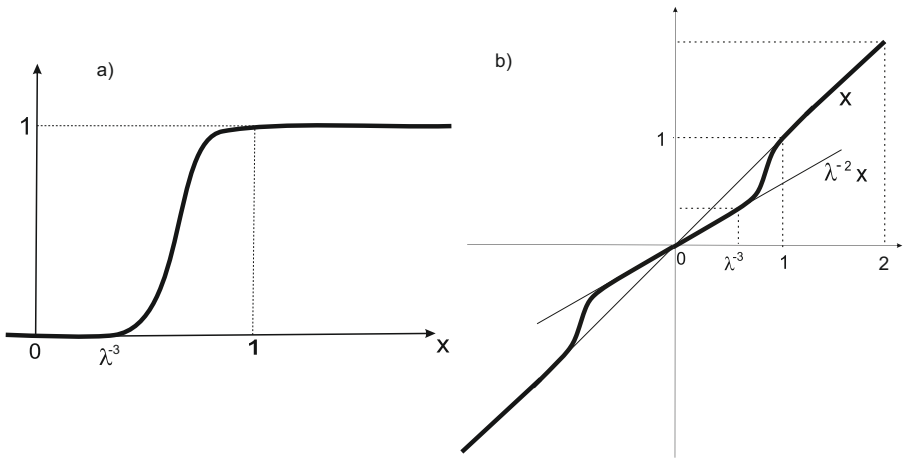


Рис. 1: a) График функции $\mu(x)$; b) График функции $\nu(x)$

$\mu(x) = \tau_{\lambda^{-3},1}(x)$ (см. Рис. 1 a)). Определим функцию $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой $\nu(x) = \lambda^{-2(1-\mu(|x|))}x$ (см. Рис. 1 b)). Положим $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Определим диффеоморфизм $B_{C,O^s} : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ формулой

$$B_{C,O^s}(x, y) = (\nu^{-1}(x), y).$$

По построению, $B_{C,O^s}(x, y) = (\lambda^2 x, y)$, если $x^2 + y^2 \leqslant \lambda^{-6}$ и является тождественным на $\partial\mathbb{D}^2$. Определим диффеоморфизм $\widehat{B} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, совпадающий с диффеоморфизмом B внутри окрестности $U(0)$ и тождественный вне этой окрестности. Тогда согласно [9], диффеоморфизм $F_{C,O^s} = \widehat{B} \circ \widehat{C}$ является DA-диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из одномерного аттрактора Λ_{C,O^s}, обладающего единственной связкой степени 2 с двумя различными граничными неподвижными p_{O^s} и q_{O^s}, и ис-

точниковой неподвижной точкой α_{O^s} (см. Рис. 2).

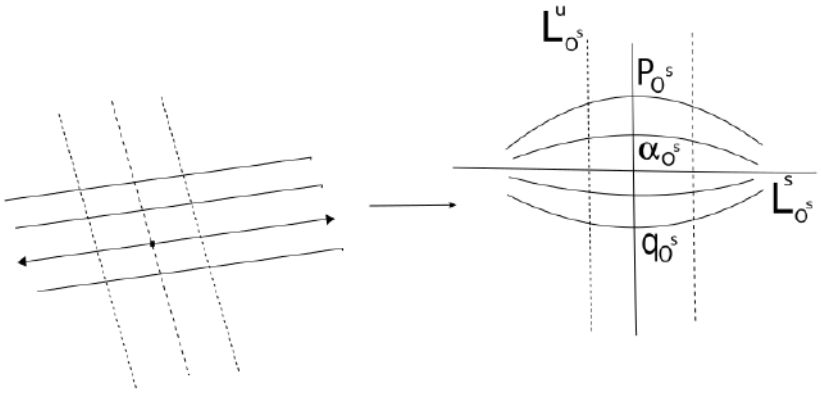


Рис. 2: DA-диффеоморфизм F_{C,O^s}

Описанная конструкция называется *хирургической операцией Смейла* вдоль устойчивого многообразия неподвижной точки. Поскольку в окрестности источниковой точки в локальных координатах x, y диффеоморфизм F_{C,O^s} является линейным растяжением, то в бассейне $W^u_{\alpha_{O^s}}$ существует пара трансверсальных F_{C,O^s}-инвариантных слоений, имеющих вид $\{y = const\}$ и $\{x = const\}$ в локальных координатах x, y. Таким образом, диффеоморфизм F_{C,O^s} обладает парой трансверсальных инвариантных слоений L^s_{C,O^s}, L^u_{C,O^s}, содержащих, как слои, компоненты связности многообразий $W^s_{\Lambda_{C,O^s}}$, $W^u_{\Lambda_{C,O^s}}$, соответственно (см. Рис. 2).

Аналогичным образом описанная хирургическая операция делается в окрестности любой периодической точки диффеоморфизма Аносова. Также она естественно обобщается на хирургическую операцию вдоль неустойчивого многообразия периодической точки.

3.3 Обобщение хирургической операции

Назовем *модельным диффеоморфизмом тора*, диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, полученный из алгебраического диффеоморфизма Аносова $\widehat{C}$ хирургической операцией Смейла вдоль инвариантных многообразий конечного (возможно пустого) множества попарно не пересекающихся периодических орбит: вдоль устойчивых многообразий орбит $\mathcal{O}^s = \{O^s_1, \ldots, O^s_k\}$ периодов $m_1, \ldots, m_k$, соответственно, (*s-орбиты*) и вдоль неустойчивых многообразий периодических орбит $\mathcal{O}^u = \{O^u_1, \ldots, O^u_l\}$ периодов $n_1, \ldots, n_l$, соответственно, (*u-орбиты*).

По построению неблуждающее множество диффеоморфизма $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ содержит единственное нетривиальное базисное множество $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ обладает парой трансверсальных инвариантных слоений $L^s_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $L^u_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, содержащих, как слои, компоненты связности многообразий $W^s_{\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}$, $W^u_{\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}$, соответственно. Множество $\alpha_{\mathcal{O}^s}$ является множеством источниковых периодических орбит и мно-

жество $\omega_{\mathcal{O}^u}$ является множеством стоковых периодических орбит диффеоморфизма $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$. При этом, базисное множество $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ имеет одну из следующих возможных структур:

- имеет топологическую размерность два и является аттрактором и репеллером одновременно, если $\mathcal{O}^s = \mathcal{O}^u = \emptyset$;

- имеет топологическую размерность один (см. Рис. 3) и является аттрактором (репеллером), если $\mathcal{O}^s \neq \emptyset, \mathcal{O}^u = \emptyset$ ($\mathcal{O}^s = \emptyset, \mathcal{O}^u \neq \emptyset$);

- имеет топологическую размерность ноль (см. Рис. 4) и является седловым базисным множеством, если $\mathcal{O}^s \neq \emptyset$ и $\mathcal{O}^u \neq \emptyset$.

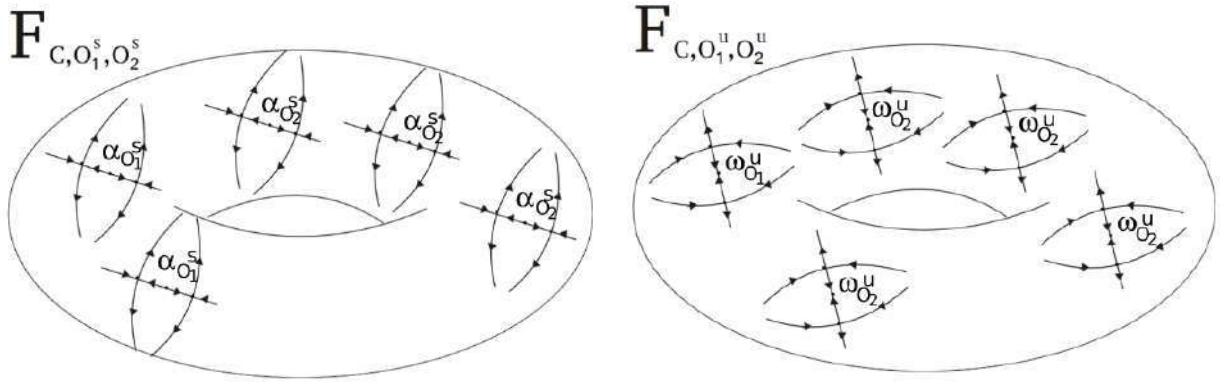


Рис. 3: Диффеоморфизм F_{C,O_1^s,O_2^s} с s-орбитами периодов 2, 3 и аттрактором Λ_{C,O_1^s,O_2^s}; диффеоморфизм F_{C,O_1^u,O_2^u} с u-орбитами периодов 1, 4 и репеллером Λ_{C,O_1^u,O_2^u}

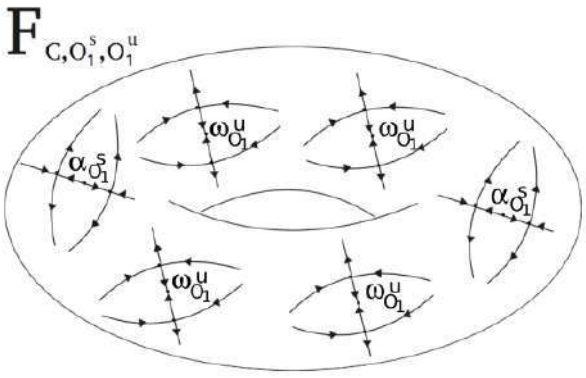


Рис. 4: Диффеоморфизм F_{C,O_1^s,O_1^u} с s-орбитой периода 4, u-орбитой периода 2 и седловым базисным множеством Λ_{C,O_1^s,O_1^u}

4 Топологическая сопряженность модельных диффеоморфизмов тора

В настоящем разделе мы докажем необходимые и достаточные условия топологической сопряженности модельных диффеоморфизмов тора (теорему 1). Перед этим приведем

некоторую необходимую информацию.

Любому модельному диффеоморфизму $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ соответствуют гиперболическая матрица C и по построению этот диффеоморфизм имеет вид $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} = \widehat{B}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} \circ \widehat{C}$, где $\widehat{B}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – изотопный тождественному диффеоморфизм. Таким образом, диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ изотопен диффеоморфизму $\widehat{C}$. Следующее предложение следует из работ [6], [3], [7].

Предложение 4.1. *Среди гомотопных тождественному непрерывных отображений тора $\mathbb{T}^2$ существует единственное отображение $h_{F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}$, полусопрягающее диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ с алгебраическим автоморфизмом $\widehat{C}$ (см. диаграмму на рис.**??**). При этом, отображение $h_{F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}$ переводит множество $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ на весь тор $\mathbb{T}^2$, и множество $E_{F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}} = \{x \in \mathbb{T}^2 : h^{-1}_{F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}(x)$ состоит более чем из одной точки$\}$ является объединением неустойчивых многообразий точек из $\mathcal{O}^s$ и устойчивых многообразий точек из $\mathcal{O}^u$ алгебраического автоморфизма $\widehat{C}$. Кроме того, $h^{-1}_{F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}(W^u_{O^s_i}) = W^u_{\alpha_{O^s_i}} \cup W^u_{p_{O^s_i}} \cup W^u_{q_{O^s_i}}$ и $h^{-1}_{F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}(W^s_{O^u_j}) = W^s_{\omega_{O^u_j}} \cup W^s_{p_{O^u_j}} \cup W^s_{q_{O^u_j}}$.*

Докажем, что модельные диффеоморфизмы $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует матрица $H \in GL(2,\mathbb{Z})$ такая, что $HC = C'H$ и $\widehat{H}(\mathcal{O}^s) = \mathcal{O}'^s$, $\widehat{H}(\mathcal{O}^u) = \mathcal{O}'^u$.

Доказательство теоремы 1. Для простоты обозначений положим $F = F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F' = F_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$, $\Lambda = \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $\Lambda' = \Lambda_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$, $L^u = L^u_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $L'^u = L^u_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$, $L^s = L^s_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $L'^s = L^s_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$.

Необходимость. Пусть диффеоморфизмы $F, F' : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Индуцированный изоморфизм $h_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ однозначно определяется матрицей $H \in GL(2,\mathbb{Z})$, которая в силу сопряжения удовлетворяет условию $HC = C'H$ и, следовательно, условию $\widehat{H}\widehat{C} = \widehat{C}'\widehat{H}$. Поскольку h – сопрягающий гомеоморфизм, то $h(\mathcal{O}^s) = \mathcal{O}'^s$ и $h(\mathcal{O}^u) = \mathcal{O}'^u$.

Из предложения 4.1 следует, что $h_F F = \widehat{C} h_F$, $h_{F'} F' = \widehat{C}' h_{F'}$ и $h_F(\mathcal{O}^\delta) = \mathcal{O}^\delta$, $h_{F'}(\mathcal{O}'^\delta) = \mathcal{O}'^\delta$ для $\delta \in \{u, s\}$. Из единственности отображения $h_{F'}$ следует, что $h_{F'} = \widehat{H} h_F h^{-1}$ и, следовательно, $h_{F'}(\mathcal{O}'^\delta) = \widehat{H} h_F h^{-1}(\mathcal{O}'^\delta)$. Откуда $\widehat{H}(\mathcal{O}^\delta) = \mathcal{O}'^\delta$.

Достаточность. Пусть существует матрица $H \in GL(2,\mathbb{Z})$ такая, что $HC = C'H$ и $\widehat{H}(\mathcal{O}^s) = \mathcal{O}'^s$, $\widehat{H}(\mathcal{O}^u) = \mathcal{O}'^u$. Построим гомеоморфизм $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, сопрягающий диффеоморфизмы F и F'. Сопряжение будем строить по шагам.

Обозначим через $p_{\mathcal{O}^s}$, $q_{\mathcal{O}^u}$, $p_{\mathcal{O}'^s}$, $q_{\mathcal{O}'^u}$ объединение граничных орбит $p_{O^s_i}$, $p_{O^u_i}$, $p_{O'^s_i}$, $p_{O'^u_i}$, соответственно. Положим $\tilde{W} = W^u_{q_{\mathcal{O}^s}} \cup W^s_{p_{\mathcal{O}^u}}$, $\tilde{W}' = W^u_{q_{\mathcal{O}'^s}} \cup W^s_{p_{\mathcal{O}'^u}}$ и $\tilde{\Lambda} = \Lambda \setminus \tilde{W}$, $\tilde{\Lambda}' = \Lambda' \setminus \tilde{W}'$. Из предложения 4.1 следует, что отображения $\tilde{h}_F = h_F|_{\tilde{\Lambda}} : \tilde{\Lambda} \to \mathbb{T}^2 \setminus W$, $\tilde{h}_{F'} = h_{F'}|_{\tilde{\Lambda}'} : \tilde{\Lambda}' \to \mathbb{T}^2$ являются взаимно-однозначными, откуда следует, что отображение

$$\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}_{F'} \widehat{H} \tilde{h}_F : \tilde{\Lambda} \to \tilde{\Lambda}'$$

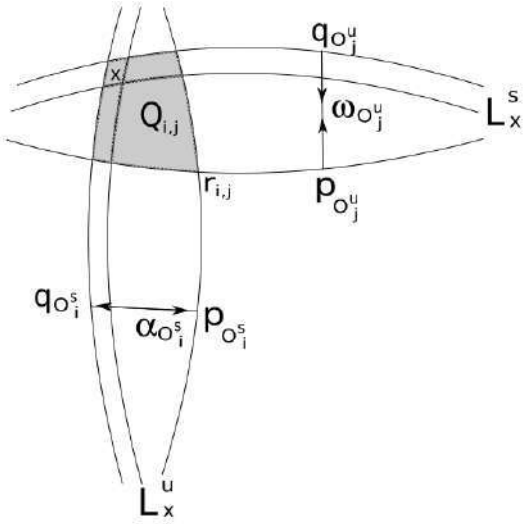


Рис. 5: Построение сопрягающего гомеоморфизма

является гомеоморфизмом, сопрягающим $F|_{\tilde{\Lambda}}$ и $F'|_{\tilde{\Lambda}'}$. По условию $\widehat{H}(\mathcal{O}^s) = \mathcal{O}'^s$, $\widehat{H}(\mathcal{O}^u) = \mathcal{O}'^u$, тогда $\tilde{h}(p_{O_i^s}) = p_{O_i'^s}$ и $\tilde{h}(p_{O_j^u}) = p_{O_j'^u}$. Покажем, как продолжить $\tilde{h}$ до гомеоморфизма $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, сопрягающего F и F'.

Для этого обозначим через W_i^s объединение замыканий устойчивых сепаратрис седловых точек множеств $p_{O_i^s}$ и $q_{O_i^s}$, лежащих в $W^u_{\alpha_{O_i^s}}$ и через W_j^u объединение замыканий неустойчивых сепаратрис седловых точек множеств $p_{O_j^u}$ и $q_{O_j^u}$, лежащих в $W^s_{\omega_{O_j^u}}$. Введем аналогичные обозначения $W_i'^s$, $W_j'^u$ для диффеоморфизма F'. Продолжим гомеоморфизм $\tilde{h}|_{p_{O_i^s}}$ до гомеоморфизма $h_i^s : W_i^s \to W_i'^s$, сопрягающего $F|_{W_i^s}$ с $F'|_{W_i'^s}$ и гомеоморфизм $\tilde{h}|_{p_{O_j^u}}$ до гомеоморфизма $h_j^u : W_j^u \to W_j'^u$ сопрягающего $F|_{W_i^s}$ с $F'|_{W_i'^s}$ с $F|_{W_j^u}$ с $F'|_{W_j'^u}$. Положим $W^s = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W_i^s$, $W'^s = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W_i'^s$, $W^u = \bigcup\limits_{j=1}^{l} W_j^u$, $W'^u = \bigcup\limits_{j=1}^{l} W_j'^u$. Обозначим через $h^s : W^s \to W'^s$ гомеоморфизм, составленный из h_i^s и через $h^u : W^u \to W'^u$ гомеоморфизм, составленный из h_j^u. Кроме того, обозначим через $\hat{h}^s : L^u \to L'^u$, $\hat{h}^u : L^s \to L'^s$ отображение слоев, индуцированное отображениями h^s, h^u, соответственно.

Пусть $r_{i,j}$ произвольная точка, принадлежащая множеству $W^u_{p_{O_i^s}} \cap W^s_{p_{O_j^u}}$. Тогда (см. Рис. 5) существует единственная компонента линейной связности множества $W^u_{\alpha_{O_i^s}} \cap W^s_{\omega_{O_j^u}}$, содержащая $r_{i,j}$ в своем замыкании, обозначим через $Q_{r_{i,j}}$ ее замыкание. Замыкание аналогичной компоненты для точки $r'_{i,j} = \tilde{h}(r_{i,j})$ обозначим через $Q_{r'_{i,j}}$. Покажем, как продолжить гомеоморфизм $\tilde{h}$ на множество $Q_{r_{i,j}}$, что и завершит доказательство леммы.

Любая точка $x \in Q_{r_{i,j}}$ является точкой пересечения слоя $L_x^u \in L^u$ и $L_x^s \in L^s$. Определим гомеоморфизм $h : Q_{r_{i,j}} \to Q_{r'_{i,j}}$ формулой $h(x) = \hat{h}^s(L_x^u) \cap \hat{h}^u(L_x^s) \cap Q_{r'_{i,j}}$.

5 Связная сумма модельных диффеоморфизмов

Рассмотрим модельные диффеоморфизмы $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F'_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такие, что $\mathcal{O}^u \neq \emptyset$, $\mathcal{O}'^s \neq \emptyset$ и периодические орбиты $O^u \in \mathcal{O}^u$, $O^s \in \mathcal{O}'^s$ имеют одинаковый период. Поскольку O^u – стоковая орбита, а O^s – источниковая орбита, то существуют диффеоморфизм $\varphi : W^s_{O^u} \setminus O^u \to W^u_{O^s} \setminus O^s$ такой, что

$$\varphi \circ F^{-1}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}|_{W^s_{O^u}\setminus O^u} = F'_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u} \circ \varphi|_{W^s_{O^u}\setminus O^u}.$$

Положим

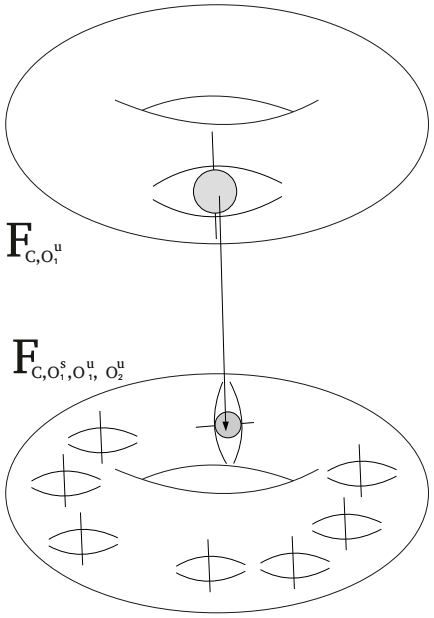


Рис. 6: Связная сумма модельных диффеоморфизмов

$$Q = (\mathbb{T}^2 \setminus O^u) \sqcup (\mathbb{T}^2 \setminus O^s),\ \hat{Q} = (\mathbb{T}^2 \setminus O^u) \cup_\varphi (\mathbb{T}^2 \setminus O^s)$$

и обозначим через $p : Q \to \hat{Q}$ естественную проекцию.

Связной суммой модельных диффеоморфизмов $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F'_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$ *вдоль орбит* O^u, O^s назовем диффеоморфизм $\phi : \hat{Q} \to \hat{Q}$, совпадающий с диффеоморфизмом $pF_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}p^{-1}|_{p(\mathbb{T}^2\setminus O^u)}$ на $p(\mathbb{T}^2 \setminus O^u)$ и с диффеоморфизмом $pF'_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}p^{-1}|_{p(\mathbb{T}^2\setminus O^s)}$ на $p(\mathbb{T}^2 \setminus O^s)$.

На рисунке 6 изображена связная сумма модельных диффеоморфизмов. Здесь $\hat{Q}$ – ориентируемая поверхность рода два (крендель). Операция связной суммы естественным образом обобщается на случай нескольких модельных диффеоморфизмов и нескольких периодических орбит.

Обозначим через G класс (A, B)-диффеоморфизмов, являющихся связной суммой модельных диффеоморфизмов тора. В работе [1] показано, что любая связная диаграмма Хассе реализуется некоторым диффеоморфизмом из класса G. В силу теоремы 1, размеченная диаграмма Смейла для диффеоморфизма $f \in G$ состоит из диаграммы

Хассе, соответствующей порядку базисных множеств диффеоморфизма f, где каждая вершина оснащена набором $C, \mathcal{O}^s, \mathcal{O}^u$, соответствующим модельному базисному множеству $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$. Для диффеоморфизмов f, $f' \in G$ изоморфность их графов Хассе и выполнение условий теоремы 1 на изоморфных размеченных вершинах является необходимым и достаточным условием их Ω-сопряженности. Однако сопрягающий гомеоморфизм в общем случае не продолжается с базисных множеств на несущую поверхность. В следующем разделе мы построим демонстрирующий этот эффект примеры и выделим подкласс $G_* \subset G$ диффеоморфизмов, для которых размеченная диаграмма Смейла является полным инвариантом объемлющей Ω-сопряженности.

6 Размеченная диаграмма – полный инвариант объемлющей Ω-сопряженности

Очевидно, что из одинакового набора модельных диффеоморфизмов можно "связать" диффеоморфизмы, не являющиеся объемлюще Ω-сопряженными (см. Рис. 7).

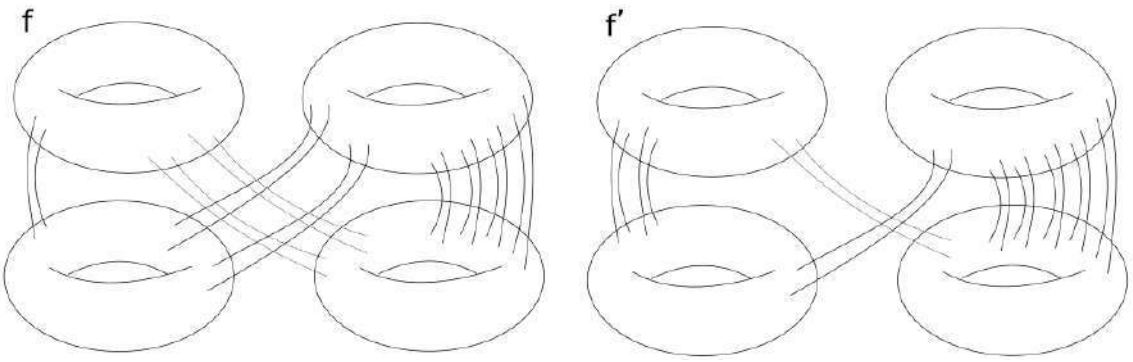


Рис. 7: Диффеоморфизмы f и f', не являющиеся объемлюще Ω-сопряженными

Выделим подкласс $G_* \subset G$ диффеоморфизмов, у которых любые два модельных диффеоморфизма склеены не более, чем по одной орбите.

Докажем, что диффеоморфизмы $f, f' \in G_*$ объемлюще Ω-сопряжены тогда и только тогда, когда их размеченные диаграммы изоморфны.

Доказательство теоремы 2.

Необходимость. Поскольку любые два модельных диффеоморфизма в связной сумме диффеоморфизма из класса G_* склеены не более, чем по одной орбите, то из объемлющей Ω-сопряженности диффеоморфизмов $f, f' \in G_*$ следует изоморфность их размеченных диаграмм Смейла.

Достаточность. Из изоморфности размеченных диаграмм диффеоморфизмов $f, f' \in G_*$ и теоремы 1 следует существование гомеоморфизмов, сопрягающих модельных диффеоморфизмы, соответствующие изоморфным вершинам. Составленное из этих гомеоморфизмов отображение определено на несущей поверхности всюду, кроме колец, связывающих две модели. Продолжив произвольным образом отображение

на кольца, мы получим искомый гомеоморфизм, осуществляющий объемлющую Ω-сопряженность диффеоморфизмов f, f'.

Список литературы

[1] Баринова М. К., Гогулина Е. Ю., Починка О. В. Реализация ациклической диаграммы Смейла омега-устойчивым диффеоморфизмом поверхности. Огарёв-Online. 2020. № 13. С. 1-10.

[2] Биркгоф Г., Теория структур, 1948 г, 22-25

[3] Гринес В. З., О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II. Тр. ММО. 34. 1977. 243–252.

[4] Каток А., Хасселблатт Б. Введение в современную теорию динамических систем. Факториал 1999. 767 С.

[5] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. Успехи мат. наук, 25:1 (1970), 113–185.

[6] J. Franks. Anocov Diffeomorphisms, Global Analysis. Proc. Simp. in Pure Math. 14. AMS, Providence, R.I. 1970. 61–94.

[7] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland. Springer International Publishing. 2016.

[8] F. Harary Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA (1969).

[9] S. Smale. The "DA" maps of Smale and Sructural Stability. Proceedings of the Analysis. Vol. XIV. Americal Mathematical Society, 1970, 329- 334.

[10] H. G. Vogt. Leçons sur la résolution algébrique des équations. - Nony, 1895. - C. 91.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Гридяевой Татьяны Витальевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Описание спектральных задач, вырожденных во всей комплексной плоскости» являются: Методы пунктов 3.4 и 4.3, а также доказанные леммы в предыдущих пунктах.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В работах Блошанской С. К., Ионкина Н. И., Ильина В. А. и его учеников, а также в работах других авторов изучалась структура спектра ряда краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. На примерах краевых задач второго порядка было показано, что все собственные значения могут быть как простыми, так и кратными, причем их алгебраическая кратность может быть больше двух. Представляют интерес краевые задачи, вырожденные во всей комплексной плоскости. Примеры краевых задач без регулярных значений спектрального параметра известны. Однако совокупность функционалов, задающих краевые условия, при которых краевые задачи не имеют изолированных собственных значений, не описана.
- В период работы над бакалаврской работой с 01 сентября 2018 г. по 15 июля 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс и Google по следующим ключевым словам: линейные краевые задачи высших порядков, изолированные собственные значения собственной функции краевой задачи. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Михаилом Григорьевичем Завгородним, доцентом кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета.
- В 2019 г. и 2020 г. проведены выступления секции кафедры функционального анализа и операторных уравнений (руководители семинара - доц. Кунаковская О.В., доц. Завгородний М.Г.) в рамках научной сессии математического факультета Воронежского государственного университета.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше

математический материал действительно является новым и имеет практическую значимость.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоялась 26.06.2020. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Подпись Гридяева Татьяна Витальевна

30 мая 2021 г. Воронеж, Россия

ОТЗЫВ

научного руководителя о выпускной квалификационной работе бакалавра Гридяевой Татьяны Витальевны, обучающейся по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математическое и компьютерное моделирование, на математическом факультете Воронежского государственного университета на тему

«Описание спектральных задач, вырожденных во всей комплексной плоскости»

Спектральные свойства краевых задач, заданных на конечном отрезке, достаточно хорошо изучены. Известны примеры краевых задач, вырожденных при любом значении спектрального параметра. Однако совокупность таких задач не описана.

Студентке математического факультета Гридяевой Т.В. была поставлена задача, найти все возможные двухточечные краевые условия, при которых соответствующие краевые задачи вырождены во всей комплексной плоскости.

С поставленной задачей Гридяева Т.В. справилась хорошо. Она доказала, что для краевых задач как второго, так и четвертого порядка при нормированных двухточечных краевых условиях существует единственная краевая задача, вырожденная во всей комплексной плоскости. Были полностью описаны краевые условия таких задач. Показано, что краевая задача второго порядка при любом значении спектрального параметра имеет одну и ту же собственную функцию (с точностью до постоянного множителя), а краевая задача четвертого порядка имеет одно и то же трехмерное собственное подпространство. Выполнен анализ поведения характеристического определителя краевой задачи при условиях, близких к условиям вырождения. Для этого была написана программа построения графиков. Выяснено, что характеристический определитель имеет двукратные нули (собственные значения), которые не меняются при изменении одного из коэффициентов краевых условий. Причем, когда краевые условия совпадают с условиями вырождения, график характеристического определителя совпадает с осью абсцисс.

Бакалавр Гридяева Т.В. показала ответственное отношение к обучению, хорошую математическую подготовку, продемонстрировала умения и навыки построения алгоритмов и программирования.

Считаю, что выпускная квалификационная работа Гридяевой Т.В. отвечает всем требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам, и безусловно заслуживает оценки «отлично».

Руководитель
доцент кафедры функционального анализа
и операторных уравнений,
доцент, канд. физ.-мат. наук _____ М.Г. Завгородний
подпись *расшифровка*

17.06.2020г.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «ВОРОНЕЖСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математический факультет

Кафедра функционального анализа и операторных уравнений

Описание спектральных задач, вырожденных во всей комплексной плоскости

Бакалаврская работа

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профиль Математическое и компьютерное моделирование

Зав.кафедрой _____д. ф.-м. н., проф. М. И. Каменский __.__.20__г.

Обучающийся _____ Т. В. Гридяева

Руководитель _____к.ф.-м.н., доц. М. Г. Завгородний

Воронеж 2020

Содержание

1. Аннотация 3

2. Актуальность 3

3. Краевые задачи второго порядка 3

3.1. Постановка задачи 3

3.2. Условия тривиальности определителя $\Delta(\rho)$ 4

3.3. Второе доказательство теоремы 1 11

3.4. Основной результат для краевых задач второго порядка 12

3.5. Примеры краевых задач второго порядка, не имеющих изолированных собственных значений 13

4. Краевые задачи четвертого порядка 15

4.1. Постановка задачи 15

4.2. Условия тривиальности определителя $\Delta(\rho)$ 15

4.3. Основной результат для краевых задач четвертого порядка 17

4.4. Собственная функция краевой задачи четвертого порядка, не имеющей изолированных собственных значений 17

5. Поведение характеристического определителя краевой задачи при краевых условиях близких к условиям (8) 21

Литература 24

1. Аннотация

В работе изучаются линейные краевые задачи второго и четвертого порядков со спектральным параметром. Необходимо найти условия, при которых изучаемые краевые задачи вырождены для любого значения спектрального параметра.

Составлялись характеристические определители изучаемых краевых задач, и находились условия на коэффициенты функционалов, при которых эти определители тождественно равны нулю, то есть краевые задачи вырождены. Получили условия, при которых краевые задачи второго и четвертого порядков вырождены для любого спектрального параметра из комплексной плоскости. Также были рассмотрены примеры краевых задач второго и четвертого порядков. В ходе их рассмотрения мы выяснили, что все краевые задачи второго порядка без регулярных значений спектрального параметра имеют одну и ту же собственную функцию (с точностью до постоянного множителя) при любом значении параметра, а все краевые задачи четвертого порядков без регулярных значений спектрального параметра имеют одно и то же собственное подпространство.

2. Актуальность

В работах Блошанской С. К. (см. [1]), Ионкина Н. И. (см. [2]), Ильина В. А. (см. [3]) и его учеников, а также в работах других авторов изучалась структура спектра ряда краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. На примерах краевых задач второго порядка было показано, что все собственные значения могут быть как простыми, так и кратными, причем их алгебраическая кратность может быть больше двух. Представляют интерес краевые задачи, вырожденные во всей комплексной плоскости. Примеры краевых задач без регулярных значений спектрального параметра известны. Однако совокупность функционалов, задающих краевые условия, при которых краевые задачи не имеют изолированных собственных значений, не описана.

3. Краевые задачи второго порядка

Рассмотрим сначала краевые задачи второго порядка.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу второго порядка на собственные значения для дифференциального уравнения

$$u''(x) = \lambda u(x) \tag{1}$$

при двухточечных краевых условиях общего вида $C^2_{[0,1]}$

$$f_k u = \alpha_{k1} u(0) + \alpha_{k2} u'(0) + \beta_{k1} u(1) + \beta_{k2} u'(1) = 0, \quad k = 1,2, \qquad (2)$$

где α_{kn} и β_{kn} – некоторые константы. Полагаем, что линейные функционалы f_1 и f_2 заданы на пространстве $C^2_{[0,1]}$ и линейно независимые.

Фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (1) образуют функции $g_1(x,\rho) = e^{\rho x}$ и $g_2(x,\rho) = e^{-\rho x}$, где $\rho = \sqrt{\lambda}$. Отметим, что ρ комплексный параметр.

Составим характеристический определитель $\Delta(\rho) = \left| f_k g_j(\cdot,\rho) \right|_{k,j=1,2}$. Или в развернутом виде

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12}\rho + (\beta_{11} + \beta_{12}\rho)e^{\rho} & \alpha_{11} - \alpha_{12}\rho + (\beta_{11} - \beta_{12}\rho)e^{-\rho} \\ \alpha_{21} + \alpha_{22}\rho + (\beta_{21} + \beta_{22}\rho)e^{\rho} & \alpha_{21} - \alpha_{22}\rho + (\beta_{21} - \beta_{22}\rho)e^{-\rho} \end{vmatrix}.$$

Известно (см. [4]), что краевая задача вырожденная тогда и только тогда, когда характеристический определитель $\Delta(\rho)$ равен нулю. Таким образом, нам требуется выяснить, при каких коэффициентах α_{kn} и β_{kn} функционалов f_k, определитель $\Delta(\rho)$ тождественно равен нулю.

3.2. Условия тривиальности определителя $\Delta(\rho)$

Сначала докажем вспомогательный факт.

Лемма 1. *Определитель* $\Delta(\rho) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда для коэффициентов* α_{ij}, β_{ij}, *при* $i,j = 1,2$ *выполнены следующие условия*

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Доказательство.

Требуется найти, при каких значениях $\alpha_{ij)}$ и β_{ij} определитель $\Delta(\rho) \equiv 0$, где

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} f_1 g_1 & f_1 g_2 \\ f_2 g_1 & f_2 g_2 \end{vmatrix}$$

В силу задания функционалов (2) запишем определитель следующим образом:

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}+\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho}+\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}-\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{11}+\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{\rho}+\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}-\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}$$

По свойству определителей можно представить определитель $\Delta(\rho)$ в следующем виде:

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{11}-\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{21} & \alpha_{21}-\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & \alpha_{11}-\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{22}\rho & \alpha_{21}-\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}-\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}-\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}-\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}-\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}$$

Далее, проделывая ту же процедуру, получаем:

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{11}\\ \alpha_{21} & \alpha_{21}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{21} & -\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & \alpha_{11}\\ \alpha_{22}\rho & \alpha_{21}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & -\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{22}\rho & -\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{12}\rho+\beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{22}\rho+\beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}$$

Или

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\alpha_{12}\rho\\ \alpha_{21} & -\alpha_{22}\rho\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & \alpha_{11}\\ \alpha_{22}\rho & \alpha_{21}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & -\alpha_{12}\rho\\ \alpha_{22}\rho & -\alpha_{22}\rho\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & \beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{22}\rho & \beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{12}\rho\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{22}\rho\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & \beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & \beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{12}\rho\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{22}\rho\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}-\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}$$

Или

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\alpha_{12}\rho\\ \alpha_{21} & -\alpha_{22}\rho\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{21} & -\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & \alpha_{11}\\ \alpha_{22}\rho & \alpha_{21}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & \beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{22}\rho & \beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12}\rho & -\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \alpha_{22}\rho & -\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{12}\rho\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{22}\rho\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & \beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & \beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{11}\mathrm{e}^{\rho} & -\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{21}\mathrm{e}^{\rho} & -\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{11}\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \alpha_{21}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{12}\rho\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & -\alpha_{22}\rho\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \beta_{11}\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & \beta_{21}\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{\rho} & -\beta_{12}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\\ \beta_{22}\rho\mathrm{e}^{\rho} & -\beta_{22}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\end{vmatrix}+$$

Вынесем все общие множители, зависящие от ρ, за знак определителей:

$$\Delta(\rho)=\rho\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\alpha_{12}\\ \alpha_{21} & -\alpha_{22}\end{vmatrix}+\mathrm{e}^{-\rho}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix}+\rho\mathrm{e}^{-\rho}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\beta_{12}\\ \alpha_{21} & -\beta_{22}\end{vmatrix}+\rho\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{11}\\ \alpha_{22} & \alpha_{21}\end{vmatrix}+$$

$$+\rho\mathrm{e}^{-\rho}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{11}\\ \alpha_{22} & \beta_{21}\end{vmatrix}+\rho^{2}\mathrm{e}^{-\rho}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & -\beta_{12}\\ \alpha_{22} & -\beta_{22}\end{vmatrix}+\mathrm{e}^{\rho}\begin{vmatrix}\beta_{11} & \alpha_{11}\\ \beta_{21} & \alpha_{21}\end{vmatrix}+\rho\mathrm{e}^{\rho}\begin{vmatrix}\beta_{11} & -\alpha_{12}\\ \beta_{21} & -\alpha_{22}\end{vmatrix}+$$

$$+\rho\begin{vmatrix}\beta_{11} & -\beta_{12}\\ \beta_{21} & -\beta_{22}\end{vmatrix}+\rho\mathrm{e}^{\rho}\begin{vmatrix}\beta_{12} & \alpha_{11}\\ \beta_{22} & \alpha_{21}\end{vmatrix}+\rho^{2}\mathrm{e}^{\rho}\begin{vmatrix}\beta_{12} & -\alpha_{12}\\ \beta_{22} & -\alpha_{22}\end{vmatrix}+\rho\begin{vmatrix}\beta_{12} & \beta_{11}\\ \beta_{22} & \beta_{21}\end{vmatrix}+$$

Приведем подобные и перегруппируем слагаемые:

$$\Delta(\rho)=\rho\left(-\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{11}\\ \alpha_{22} & \alpha_{21}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12} & \beta_{11}\\ \beta_{22} & \beta_{21}\end{vmatrix}\right)$$
$$+\rho\mathrm{e}^{-\rho}\left(-\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{12}\\ \alpha_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{11}\\ \alpha_{22} & \beta_{21}\end{vmatrix}\right)$$
$$+\rho\mathrm{e}^{\rho}\left(-\begin{vmatrix}\beta_{11} & \alpha_{12}\\ \beta_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12} & \alpha_{11}\\ \beta_{22} & \alpha_{21}\end{vmatrix}\right)+\mathrm{e}^{\rho}\begin{vmatrix}\beta_{11} & \alpha_{11}\\ \beta_{21} & \alpha_{21}\end{vmatrix}$$
$$+\mathrm{e}^{-\rho}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix}+\rho^2\mathrm{e}^{\rho}\begin{vmatrix}\beta_{12} & -\alpha_{12}\\ \beta_{22} & -\alpha_{22}\end{vmatrix}+\rho^2\mathrm{e}^{-\rho}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & -\beta_{12}\\ \alpha_{22} & -\beta_{22}\end{vmatrix}$$

Проделаем эту процедуру еще раз и получим:

$$\Delta(\rho)=-2\rho\left(\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}\right)+\rho\mathrm{e}^{-\rho}\left(-\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{12}\\ \alpha_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{11}\\ \alpha_{22} & \beta_{21}\end{vmatrix}\right)$$
$$+\rho\mathrm{e}^{\rho}\left(-\begin{vmatrix}\beta_{11} & \alpha_{12}\\ \beta_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12} & \alpha_{11}\\ \beta_{22} & \alpha_{21}\end{vmatrix}\right)+\mathrm{e}^{\rho}\begin{vmatrix}\beta_{11} & \alpha_{11}\\ \beta_{21} & \alpha_{21}\end{vmatrix}$$
$$+\mathrm{e}^{-\rho}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix}+\rho^2\mathrm{e}^{\rho}\begin{vmatrix}\beta_{12} & -\alpha_{12}\\ \beta_{22} & -\alpha_{22}\end{vmatrix}+\rho^2\mathrm{e}^{-\rho}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & -\beta_{12}\\ \alpha_{22} & -\beta_{22}\end{vmatrix}$$

Так как требуется $\Delta(\rho)\equiv 0$ и функции $y_1=\rho, y_2=\rho\mathrm{e}^{-\rho}, y_3=\rho\mathrm{e}^{\rho}$, $y_4=\mathrm{e}^{\rho}$, $y_5=\mathrm{e}^{-\rho}, y_6=\rho^2\mathrm{e}^{\rho}, y_7=\rho^2\mathrm{e}^{-\rho}$ – линейно независимы, то коэффициенты при этих функциях должны быть равны нулю.

Таким образом, получили систему:

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}=0\\ -\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{12}\\ \alpha_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{11}\\ \alpha_{22} & \beta_{21}\end{vmatrix}=0\\ -\begin{vmatrix}\beta_{11} & \alpha_{12}\\ \beta_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{12} & \alpha_{11}\\ \beta_{22} & \alpha_{21}\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}\beta_{11} & \alpha_{11}\\ \beta_{21} & \alpha_{21}\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}\beta_{12} & -\alpha_{12}\\ \beta_{22} & -\alpha_{22}\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}\alpha_{12} & -\beta_{12}\\ \alpha_{22} & -\beta_{22}\end{vmatrix}=0\end{cases} \qquad (3)$$

Исключим из системы (3) избыточные равенства, тогда получим:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Определитель* $\Delta(\rho)$ *равен тождественно нулю тогда и только тогда, когда линейно независимые функционалы* f_1 *и* f_2 *представимы в виде:* $f_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2$, $f_2 = c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2$, *где функционалы* $\varphi_1 u = u(0) - u(1)$, $\varphi_2 u = u'(0) - u'(1)$ *и* c_{kj} *– произвольные константы такие, что* $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Доказательство. Выпишем матрицу из коэффициентов функционалов:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

Так как функционалы f_1 и f_2 линейно независимы, то и строки матрицы A линейно независимы, то $rang A = 2$, то есть существует минор второго порядка матрицы A, отличный от нуля. Из элементов матрицы A можно составить шесть миноров второго порядка, поэтому рассмотрим шесть случаев, полагая один из этих миноров отличным от нуля.

1) Пусть $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

Совершая элементарные преобразования над строками матрицы A, получим матрицу следующего вида:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{\beta}_{11} & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & 1 & \tilde{\beta}_{21} & \tilde{\beta}_{22} \end{pmatrix}$$

В силу (4) получаем:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_{11} & \tilde{\beta}_{12} \\ \tilde{\beta}_{21} & \tilde{\beta}_{22} \end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix} 1 & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & \tilde{\beta}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\beta}_{11} \\ 1 & \tilde{\beta}_{21} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & \tilde{\beta}_{11} \\ 0 & \tilde{\beta}_{21} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\beta}_{12} \\ 1 & \tilde{\beta}_{22} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

В силу двух последних равенств системы имеем:

$$\tilde{\beta}_{12} = \tilde{\beta}_{21} = 0$$

Тогда в силу первых двух равенств системы и полученного выше результата имеем:

$$\tilde{\beta}_{11} = \pm 1, \qquad \tilde{\beta}_{22} = \mp 1$$

Таким образом, функционалы можно записать в следующем виде:

$$f_1 u = u(0) \pm u(1),$$

$$f_2 u = u'(0) \mp u'(1).$$

2) Пусть $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} \neq 0$

Тогда матрица A примет следующий вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\alpha}_{12} & 0 & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{\beta}_{22} \end{pmatrix}$$

В силу (4) получаем:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & \tilde{\alpha}_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\beta}_{12} \\ 1 & \tilde{\beta}_{22} \end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix} 1 & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & \tilde{\beta}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{12} & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & \tilde{\beta}_{22} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что третье равенство системы не выполняется. Следовательно, в силу леммы при заданных условиях определить не может быть равен 0.

3) Пусть $\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{12}\\ \alpha_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix} \neq 0$

Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}1 & \tilde{\alpha}_{12} & \tilde{\beta}_{11} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

В силу (4) получаем:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix}1 & \tilde{\alpha}_{12}\\ 0 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\tilde{\beta}_{11} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\tilde{\alpha}_{12} & \tilde{\beta}_{11}\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix}1 & \tilde{\beta}_{11}\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix}\tilde{\alpha}_{12} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что второе равенство системы не выполняется. Следовательно, в силу леммы при заданных условиях определить не может быть равен 0.

4) Пусть $\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{12}\\ \alpha_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix}\alpha_{12} & \beta_{11}\\ \alpha_{22} & \beta_{21}\end{vmatrix} \neq 0$

Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_{11} & 1 & 0 & \tilde{\beta}_{12}\\ \tilde{\alpha}_{21} & 0 & 1 & \tilde{\beta}_{22}\end{pmatrix}$$

В силу доказанной леммы, получаем:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix}\tilde{\alpha}_{11} & 1\\ \tilde{\alpha}_{21} & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & \tilde{\beta}_{12}\\ 1 & \tilde{\beta}_{22}\end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix}\tilde{\alpha}_{11} & \tilde{\beta}_{12}\\ \tilde{\alpha}_{21} & \tilde{\beta}_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix}\tilde{\alpha}_{11} & 0\\ \tilde{\alpha}_{21} & 1\end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix}1 & \tilde{\beta}_{12}\\ 0 & \tilde{\beta}_{22}\end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

В силу двух последних равенств системы имеем:

$$\tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\beta}_{22} = 0$$

Тогда в силу первых двух равенств системы имеем:

$$\tilde{\alpha}_{21} = \pm 1, \qquad \tilde{\beta}_{12} = \mp 1$$

Таким образом, функционалы можно записать в следующем виде:

$$f_1 u = u'(0) \pm u'(1),$$

$$f_2 u = \mp u(0) + u(1).$$

5) Пусть $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & 1 & \tilde{\beta}_{11} & 0 \\ \tilde{\alpha}_{21} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

И получаем:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 1 \\ \alpha_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \beta_{11} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что четвертое равенство системы не выполнено. Следовательно, в силу леммы при заданных условиях определить не может быть равен 0.

6) Пусть $\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & \tilde{\alpha}_{21} & 1 & 0 \\ \tilde{\alpha}_{21} & \tilde{\alpha}_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

И получаем:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & \tilde{\alpha}_{12} \\ \tilde{\alpha}_{21} & \tilde{\alpha}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & 0 \\ \tilde{\alpha}_{21} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{12} & 1 \\ \tilde{\alpha}_{22} & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & 1 \\ \tilde{\alpha}_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{12} & 0 \\ \tilde{\alpha}_{22} & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

В силу двух последних равенств системы имеем:

$$\tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{21} = 0$$

А в силу первых двух равенств системы имеем:

$$\tilde{\alpha}_{11} = \pm 1, \qquad \tilde{\alpha}_{22} = \mp 1$$

Тогда функционалы можно записать в следующем виде:

$$f_1 u = \pm u(0) + u(1),$$
$$f_2 u = \mp u'(0) + u'(1).$$

Теорема доказана.

3.3. Второе доказательство теоремы 1

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1 докажем один факт о квазиполиномах.

Рассмотрим два квазиполинома $P(\rho) = p_1(\rho) + p_2(\rho)e^{\rho}$ и $Q(\rho) = q_1(\rho) + q_2(\rho)e^{\rho}$, где $p_i(\rho)$, $q_i(\rho)$ – многочлены одной и той же степени $2m$, $m \geq 1$.

Лемма 2. *Пусть квазиполиномы $P(\rho)$ и $Q(\rho)$ пропорциональны, то есть пусть существует отличная от нуля и ограниченная на любом круге $\mathrm{B}_r = \{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| \leq r, r > 0\}$ функция $h(\rho)$ такая, что $P(\rho) = h(\rho)Q(\rho)$ для любого $\rho \in \mathrm{B}_r$. Тогда для коэффициентов α_i и β_i – при старших степенях многочленов $p_i(\rho)$ и $q_i(\rho)$ соответственно верно равенство $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$ и, кроме того, функция $h(\rho)$ постоянная и $h(\rho) \equiv \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$.*

Доказательство. В силу условий леммы нули квазиполиномов $P(\rho)$ и $Q(\rho)$ совпадают с учетом их кратностей. А это означает (см. [5, теорема1.1.3, с.12]), что $h(\rho) = e^{H(\rho)}$, где $H(\rho)$ – многочлен.

Найдем предел функции $h(\rho)$ при $|\rho| \to \infty$ вдоль луча комплексной плоскости, исходящего из нуля. Для любого такого луча, лежащего в правой полуплоскости, предел равен $\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$, а для любого луча, лежащего в левой

полуплоскости, он равен $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$. Отсюда и следует утверждение леммы. **Лемма доказана.**

Второе доказательство теоремы 1. Рассмотрим тождество

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha_{12}\rho+(\beta_{11}+\beta_{12}\rho)e^{\rho} & \alpha_{11}-\alpha_{12}\rho+(\beta_{11}-\beta_{12}\rho)e^{-\rho} \\ \alpha_{21}+\alpha_{22}\rho+(\beta_{21}+\beta_{22}\rho)e^{\rho} & \alpha_{21}-\alpha_{22}\rho+(\beta_{21}-\beta_{22}\rho)e^{-\rho} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Из второго столбца вынесем $e^{-\rho}$. Получим

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha_{12}\rho+(\beta_{11}+\beta_{12}\rho)e^{\rho} & \beta_{11}-\beta_{12}\rho+(\alpha_{11}-\alpha_{12}\rho)e^{\rho} \\ \alpha_{21}+\alpha_{22}\rho+(\beta_{21}+\beta_{22}\rho)e^{\rho} & \beta_{21}-\beta_{22}\rho+(\alpha_{21}-\alpha_{22}\rho)e^{\rho} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Так как столбцы определителя правой части пропорциональны, то в силу леммы 2 коэффициенты α_{12}, β_{12} и α_{22}, β_{22} связаны соотношениями $-\alpha_{12}\alpha_{12}=-\beta_{12}\beta_{12}$ и $-\alpha_{22}\alpha_{22}=-\beta_{22}\beta_{22}$, то есть

$$\alpha_{12}=\beta_{12}, \qquad \alpha_{22}=\beta_{22}. \tag{5}$$

Кроме того, выполняются следующие равенства

$$\begin{cases} \alpha_{11}+\alpha_{12}\rho+(\beta_{11}+\beta_{12}\rho)e^{\rho}=-\beta_{11}+\beta_{12}\rho+(-\alpha_{11}+\alpha_{12}\rho)e^{\rho}, \\ \alpha_{21}+\alpha_{22}\rho+(\beta_{21}+\beta_{22}\rho)e^{\rho}=-\beta_{21}+\beta_{22}\rho+(-\alpha_{21}+\alpha_{22}\rho)e^{\rho}. \end{cases}$$

Отсюда получаем еще два условия

$$\alpha_{11}=-\beta_{11}, \qquad \alpha_{21}=-\beta_{21}. \tag{6}$$

Наконец, в силу соотношений (5) и (6) имеем

$$f_1 u = \alpha_{11}u(0)+\alpha_{12}u'(0)-\alpha_{11}u(1)+\alpha_{12}u'(1),$$

$$f_2 u = \alpha_{21}u(0)+\alpha_{22}u'(0)-\alpha_{21}u(1)+\alpha_{22}u'(1).$$

Мы получили утверждение теоремы при $c_{kj}=\alpha_{kj}$. Требование $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ необходимо в силу линейной независимости функционалов f_1 и f_2. **Теорема доказана.**

3.4. Основной результат для краевых задач второго порядка

В силу теоремы 1 верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Краевая задача (1), (2) вырождена при любом значении спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда линейно*

независимые функционалы f_1 *и* f_2*, задающие условия (2), представимы в виде:* $f_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2$, $f_2 = c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2$*, где функционалы* $\varphi_1 u = u(0) - u(1)$, $\varphi_2 u = u'(0) + u'(1)$ *и* c_{kj} *– произвольные константы такие, что* $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

3.5. Примеры краевых задач второго порядка, не имеющих изолированных собственных значений

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$u''(x) = \lambda u(x) \tag{7}$$

при краевых условиях

$$u(0) - u(1) = 0, \qquad u'(0) + u'(1) = 0 \tag{8}$$

Так как функционалы f_1 и f_2, задающие условия (8), тогда $f_1 = \varphi_1$ и $f_2 = \varphi_2$ и $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 1$, то в силу теоремы 2 краевая задача (7), (8) вырожденная при любом параметре λ, то есть краевая задача (7), (8) имеет ненулевое решение – собственную функцию. Найдем ненулевое решение.

Общее решение дифференциального уравнения (7) имеет вид $t_1 e^{\rho x} + t_2 e^{-\rho x}$, где t_k – произвольные константы и $\rho = \sqrt{\lambda}$. Оно должно удовлетворять условиям

$$u(0) - u(1) = t_1 + t_2 - t_1 e^{\rho} - t_2 e^{-\rho} = 0.$$

$$u'(0) + u'(1) = \rho t_1 - \rho t_2 + \rho t_1 e^{\rho} - \rho t_2 e^{-\rho} = 0.$$

Получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 - t_1 e^{\rho} - t_2 e^{-\rho} = 0; \\ \rho t_1 - \rho t_2 + \rho t_1 e^{\rho} - \rho t_2 e^{-\rho} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1(1 - e^{\rho}) = t_2(e^{-\rho} - 1) \\ \rho t_1(1 + e^{\rho}) = \rho t_2(e^{-\rho} + 1) \end{cases}$$

Возьмем $t_1 = 1$, тогда из первого равенства системы получим $t_2 = e^{\rho}$.

Тогда решение данной краевой задачи можем записать в виде

$$u(x) = e^{\rho x} + e^{\rho} e^{-\rho x}.$$

Проверка: $u(0)-u(1)=1+e^{\rho}-e^{\rho}-e^{\rho}e^{-\rho}=0$,

$$u'(0)+u'(1)=\rho-\rho e^{\rho}+\rho e^{\rho}-\rho e^{\rho}e^{-\rho}=0$$

Итак, краевая задача (7), (8) имеет собственную функцию $u(x)=e^{\rho x}+e^{\rho(1-x)}$ при любом параметре λ.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения (7) при краевых условиях

$$\begin{cases} \mathrm{c}_{11}u(0)-\mathrm{c}_{11}u(1)+\mathrm{c}_{12}u'(0)+\mathrm{c}_{12}u'(1)=0, \\ \mathrm{c}_{21}u(0)-\mathrm{c}_{21}u(1)+\mathrm{c}_{22}u'(0)+\mathrm{c}_{22}u'(1)=0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда получим

$$\begin{cases} \mathrm{c}_{11}(t_1+t_2-t_1e^{\rho}-t_2e^{-\rho})+\mathrm{c}_{12}(\rho t_1-\rho t_2+\rho t_1e^{\rho}-\rho t_2e^{-\rho})=0 \\ \mathrm{c}_{21}(t_1+t_2-t_1e^{\rho}-t_2e^{-\rho})+\mathrm{c}_{22}(\rho t_1-\rho t_2+\rho t_1e^{\rho}-\rho t_2e^{-\rho})=0 \end{cases}$$

$$\rho t_1-\rho t_2+\rho t_1e^{\rho}-\rho t_2e^{-\rho}=\frac{-\mathrm{c}_{11}(t_1+t_2-t_1e^{\rho}-t_2e^{-\rho})}{\mathrm{c}_{12}}$$

Тогда

$$\mathrm{c}_{21}t_1+\mathrm{c}_{21}t_2-\mathrm{c}_{21}t_1e^{\rho}-\mathrm{c}_{21}t_2e^{-\rho}-\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}t_1-\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}t_2+\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}t_1e^{\rho}+$$

$$+\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}t_2e^{-\rho}=0$$

Приведем подобные слагаемые относительно линейно независимых функций

$$t_1\left(\mathrm{c}_{21}-\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}\right)+t_2\left(\mathrm{c}_{21}-\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}\right)-t_1e^{\rho}\left(\mathrm{c}_{21}-\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}\right)-$$

$$-t_2e^{-\rho}\left(\mathrm{c}_{21}-\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}\right)=0$$

Тогда

$$\left(\mathrm{c}_{21}-\frac{\mathrm{c}_{22}\mathrm{c}_{11}}{\mathrm{c}_{21}}\right)(t_1+t_2-t_1e^{\rho}-t_2e^{-\rho})=0$$

$$t_1+t_2-t_1e^{\rho}-t_2e^{-\rho}=0$$

$$t_1(1-e^{\rho})=t_2(e^{-\rho}-1)$$

При $t_1=1$ из первого равенства системы получим $t_2=e^{\rho}$.

Следовательно, при любых c_{kj} таких, что $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, краевая задача (7), (9) имеет одну и туже собственную функцию $u(x) = e^{\rho x} + e^{\rho(1-x)}$ при любом параметре λ.

4. Краевые задачи четвертого порядка

В этом пункте рассматриваются краевые задачи четвертого порядка.

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу четвертого порядка на собственные значения для дифференциального уравнения

$$u^{(4)}(x) = \lambda u(x) \tag{10}$$

при краевых условиях

$$f_k u = \sum_{s=1}^{4} (\alpha_{ks} u^{(s-1)}(0) + \beta_{ks} u^{(s-1)}(1)) = 0\,, \qquad k = \overline{1,4}, \tag{11}$$

где α_{ks} и β_{ks} – некоторые константы. Полагаем, что линейные функционалы f_k, $k = \overline{1,4}$, заданы на пространстве $C^4_{[0,1]}$ и линейно независимые.

Фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (10) образуют функции $g_s(x) = e^{w_s \rho x}$, $s = \overline{1,4}$, где $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$, $w_4 = -i$, $\rho = \sqrt[4]{\lambda}$.

Отметим, что ρ комплексный параметр.

Составим характеристический определитель $\Delta(\rho) = \left| f_k g_j(\cdot, \rho) \right|_{k,\, j=\overline{1,4}}$. Или в развернутом виде

$$\Delta(\rho) = \det \left\| p_{k1}(\omega_j \rho) + p_{k2}(\omega_j \rho) e^{\omega_j \rho} \right\|_{k,\, j=\overline{1,4}},$$

где $p_{k1}(\rho)$, $p_{k2}(\rho)$ – многочлены третьей степени:

$$p_{k1}(\rho) = \alpha_{k1} + \alpha_{k2}\rho + \alpha_{k2}\rho^2 + \alpha_{k2}\rho^2, \qquad p_{k2}(\rho) = \beta_{k1} + \beta_{k2}\rho + \beta_{k3}\rho^2 + \beta_{k4}\rho^3.$$

Известно (см. [4]), что краевая задача вырожденная тогда и только тогда, когда характеристический определитель $\Delta(\rho)$ равен нулю. Таким образом, нам требуется выяснить, при каких коэффициентах α_{kn} и β_{kn} функционалов f_k, определитель $\Delta(\rho)$ тождественно равен нулю.

4.2. Условия тривиальности определителя $\Delta(\rho)$

Теорема 3. *Определитель* $\Delta(\rho)$ *равен тождественно нулю тогда и только тогда, когда линейно независимые функционалы* $f_k, k = \overline{1,4}$

представимы в виде: $f_k = \sum_{j=1}^{4} c_{kj}\,\varphi_j,\ \ k = \overline{1,4}$, *где функционалы, где* $\varphi_j u = u^{j-1}(0) + (-1)^j u^{j-1}(1)$ *и* c_{kj} *– произвольные константы такие, что* $\det\left\|c_{kj}\right\|_{k,j=\overline{1,4}} \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\det\left\| p_{k1}(\omega_j\rho) + p_{k2}(\omega_j\rho)e^{\omega_j\rho}\right\|_{k,\,j=\overline{1,4}} \equiv 0\,.$$

Из третьего столбца вынесем $e^{-\rho}$, а из четвертого $e^{-i\rho}$. Получим

$$\left| p_{k1}(\rho) + p_{k2}(\rho)e^{\rho} \quad p_{k1}(i\rho) + p_{k2}(i\rho)e^{i\rho} \quad p_{k2}(-\rho) + p_{k1}(-\rho)e^{\rho} \quad p_{k2}(-i\rho) + p_{k1}(-i\rho)e^{i\rho}\right|_{k=\overline{1,4}} \equiv 0\,.$$

Определитель равен нулю, следовательно, его столбцы линейно зависимы. Так как нули квазиполиномов $p_{k1}(\rho) + p_{k2}(\rho)e^{\rho}$ и $p_{k2}(-\rho) + p_{k1}(-\rho)e^{\rho}$ лежат в некоторой полосе, лежащей вдоль мнимой оси, а нули квазиполиномов $p_{k1}(i\rho) + p_{k2}(i\rho)e^{i\rho}$ и $p_{k2}(-i\rho) + p_{k1}(-i\rho)e^{i\rho}$ лежат в некоторой полосе, лежащей вдоль вещественной оси, то естественно предположить, что пропорциональны первый и третий столбцы, а, так же второй и четвертый. Отсюда в силу леммы 2 для коэффициентов функционалов получим следующие соотношения:

$$\alpha_{k4} = \beta_{k4}, \qquad k = \overline{1,4}\,. \tag{12}$$

Кроме того, выполняются следующие равенства

$$\alpha_{k1} + \alpha_{k2}\rho + \alpha_{k3}\rho^2 + \alpha_{k4}\rho^3 + \left(\beta_{k1} + \beta_{k2}\rho + \beta_{k3}\rho^2 + \beta_{k4}\rho^3\right)e^{\rho} =$$

$$= -\beta_{k1} + \beta_{k2}\rho - \beta_{k3}\rho^2 + \beta_{k4}\rho^3 + \left(-\alpha_{k1} + \alpha_{k2}\rho - \alpha_{k3}\rho^2 + \alpha_{k4}\rho^3\right)e^{\rho}, \qquad k = \overline{1,4};$$

$$\alpha_{k1} + \alpha_{k2}\rho i - \alpha_{k3}\rho^2 - \alpha_{k4}\rho^3 i + \left(\beta_{k1} + \beta_{k2}\rho i - \beta_{k3}\rho^2 - \beta_{k4}\rho^3 i\right)e^{i\rho} =$$

$$= -\beta_{k1} + \beta_{k2}\rho i + \beta_{k3}\rho^2 - \beta_{k4}\rho^3 i + \left(-\alpha_{k1} + \alpha_{k2}\rho i + \alpha_{k3}\rho^2 - \alpha_{k4}\rho^3 i\right)e^{i\rho}, \qquad k = \overline{1,4};$$

Отсюда получаем еще условия

$$\begin{cases} \alpha_{k1} = -\beta_{k1} \\ \alpha_{k2} = \beta_{k2} \\ \alpha_{k3} = -\beta_{k3} \\ \alpha_{k4} = \beta_{k4} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha_{k1} = -\beta_{k1} \\ \alpha_{k2} = \beta_{k2} \\ -\alpha_{k3} = \beta_{k3} \\ \alpha_{k4} = \beta_{k4} \end{cases}, \tag{13}$$

Наконец, в силу соотношений (12) и (13) имеем

$$f_k u = \alpha_{k1} u(0) + \alpha_{k2} u'(0) + \alpha_{k3} u''(0) + \alpha_{k4} u'''(0) - \alpha_{k1} u(1) + \alpha_{k2} u'(1) -$$

$$-\alpha_{k3} u''(1) + \alpha_{k4} u'''(1)$$

Или же $f_k u = \sum_{s=1}^{4} (\alpha_{ks} u^{(s-1)}(0) + (-1)^s \alpha_{ks} u^{(s-1)}(1))$, $k = \overline{1,4}$

Мы получили утверждение теоремы при $c_{kj} = \alpha_{kj}$. Требование $\det \left\| c_{kj} \right\|_{k,j=\overline{1,4}} \neq 0$ необходимо в силу линейной независимости функционалов $f_k, k = \overline{1,4}$. **Теорема доказана.**

4.3. Основной результат для краевых задач четвертого порядка

В силу теоремы 3 верно следующее утверждение.

Теорема 4. *Краевая задача* (10), (11) *вырождена при любом значении спектрального параметра* $\lambda \in \mathbb{C}$ *тогда и только тогда, когда линейно независимые функционалы* $f_k, k = \overline{1,4}$, *задающие условия* (11), *представимы в виде:* $f_k = \sum_{j=1}^{4} c_{kj} \varphi_j$, $k = \overline{1,4}$, *где функционалы* $\varphi_j u = u^{j-1}(0) + (-1)^j u^{j-1}(1)$ *и* c_{kj} – *произвольные константы такие, что* $\det \left\| c_{kj} \right\|_{k,j=\overline{1,4}} \neq 0$.

4.4. Собственная функция краевой задачи четвертого порядка, не имеющей изолированных собственных значений

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения (10) при краевых условиях

$$\begin{gathered} c_{k1} u(0) - c_{k1} u(1) + c_{k2} u'(0) + c_{k2} u'(1) + c_{k3} u''(0) - c_{k3} u''(1) + \\ + c_{k4} u'''(0) + c_{k4} u'''(1) = 0, \quad k = \overline{1,4} \end{gathered} \tag{14}$$

где $\det \left\| c_{kj} \right\|_{k,j=\overline{1,4}} \neq 0$

Общее решение дифференциального уравнения (10) имеет вид $t_1 e^{\rho x} + t_2 e^{-\rho x} + t_3 e^{i\rho x} + t_4 e^{-i\rho x}$, где t_k – произвольные константы и $\rho = \sqrt[4]{\lambda}$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$c_{k1}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - (t_1 e^{\rho} + t_2 e^{-\rho} + t_3 e^{i\rho} + t_4 e^{-i\rho})) + c_{k2}(\rho t_1 - \rho t_2 +$$

$$+ i\rho t_3 - i\rho t_4 + (\rho t_1 e^{\rho} - \rho t_2 e^{-\rho} + i\rho t_3 e^{i\rho} - i\rho t_4 e^{-i\rho})) + c_{k3}(\rho^2 t_1 + \rho^2 t_2 -$$

$$-\rho^2 t_3 - \rho^2 t_4 - (\rho^2 t_1 e^{\rho} + \rho^2 t_2 e^{-\rho} - \rho^2 t_3 e^{i\rho} - \rho^2 t_4 e^{-i\rho})) + c_{k4}(\rho^3 t_1 - \rho^3 t_2 -$$

$$-i\rho^3 t_3 + i\rho^3 t_4 + (\rho^3 t_1 e^{\rho} - \rho^3 t_2 e^{-\rho} - i\rho^3 t_3 e^{i\rho} + i\rho^3 t_4 e^{-i\rho})) = 0$$

Сгруппируем слагаемые относительно неизвестных t_k

$$((c_{k1}+c_{k3}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{k2}\rho+c_{k4}\rho^3)(1+e^{\rho}))t_1+((c_{k1}+c_{k3}\rho^2)(1-$$

$$-e^{-\rho})-(c_{k2}\rho+c_{k4}\rho^3)(1+e^{-\rho}))t_2+((c_{k1}-c_{k3}\rho^2)\left(1-e^{i\rho}\right)+(c_{k2}\rho-$$

$$-c_{k4}\rho^3)(1+e^{i\rho}))t_3+((c_{k1}-c_{k3}\rho^2)\left(1-e^{-i\rho}\right)-(c_{k2}\rho-$$

$$-c_{k4}\rho^3)\left(1+e^{-i\rho}\right))t_4$$

Составим матрицу и найдем фундаментальную систему решений

Пусть

$$a_{k1}=(c_{k1}+c_{k3}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{k2}\rho+c_{k4}\rho^3)(1+e^{\rho})$$

$$a_{k2}=(c_{k1}+c_{k3}\rho^2)(1-e^{-\rho})-(c_{k2}\rho+c_{k4}\rho^3)(1+e^{-\rho})$$

$$a_{k3}=(c_{k1}-c_{k3}\rho^2)\left(1-e^{i\rho}\right)+(c_{k2}\rho-c_{k4}\rho^3)(1+e^{i\rho})$$

$$a_{k4}=(c_{k1}-c_{k3}\rho^2)\left(1-e^{-i\rho}\right)-(c_{k2}\rho-c_{k4}\rho^3)\left(1+e^{-i\rho}\right)$$

Тогда получим матрицу следующего вида

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$$

Умножим первую строчку матрицы на $-\frac{(c_{21}+c_{23}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{22}\rho+c_{24}\rho^3)(1+e^{\rho})}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}$,

$-\frac{(c_{31}+c_{33}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{32}\rho+c_{34}\rho^3)(1+e^{\rho})}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}$, $-\frac{(c_{41}+c_{43}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{42}\rho+c_{44}\rho^3)(1+e^{\rho})}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}$ и сложим

со второй, третьей и четвертой соответственно. Получим

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&\tilde{a}_{22}&\tilde{a}_{23}&\tilde{a}_{24}\\0&\tilde{a}_{32}&\tilde{a}_{33}&\tilde{a}_{34}\\0&\tilde{a}_{42}&\tilde{a}_{43}&\tilde{a}_{44}\end{pmatrix},$$

где

$\tilde{a}_{22}=$

$-\frac{((c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{-\rho})-(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{-\rho}))((c_{21}+c_{23}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{22}\rho+c_{24}\rho^3)(1+e^{\rho}))}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}+$

$$+\frac{((c_{21}+c_{23}\rho^2)(1-e^{-\rho})-(c_{22}\rho+c_{24}\rho^3)(1+e^{-\rho}))((c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho}))}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}$$

$= 0$

Аналогично $\tilde{a}_{kj} = 0$

Тогда получим матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $t_2 = 1, t_3 = 0, t_4 = 0$, тогда

$$\left(-\frac{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{-\rho})-(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{-\rho})}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}, 1,0,0\right)$$

Или

$$\left(-\frac{e^{-\rho}((c_{11}+c_{13}\rho^2)(e^{\rho}-1)-(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(e^{\rho}+1))}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}, 1,0,0\right)$$

Тогда краевая задача (10), (14) имеет собственную функцию

$$u_1(x) = -\frac{e^{-\rho}((c_{11}+c_{13}\rho^2)(e^{\rho}-1)-(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(e^{\rho}+1))}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}e^{\rho x} + e^{-\rho x}$$

Преобразуем выражение

$$k = -\frac{e^{-\rho}((c_{11}+c_{13}\rho^2)(e^{\rho}-1)-(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(e^{\rho}+1))}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}$$

$$k = -\frac{e^{-\rho}((c_{11}+c_{13}\rho^2)(e^{\rho}-1)-(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(e^{\rho}+1))}{-((c_{11}+c_{13}\rho^2)(e^{\rho}-1)-(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho}))} = e^{-\rho}.$$

Получим

$$u_1(x) = e^{-\rho}e^{\rho x} + e^{-\rho x} = e^{-\rho(1-x)} + e^{-\rho x}$$

Пусть $t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = 0$, тогда

$$\left(-\frac{(c_{11}-c_{13}\rho^2)\left(1-e^{i\rho}\right)+(c_{12}\rho-c_{14}\rho^3)\left(1+e^{i\rho}\right)}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}, 0,1,0\right)$$

Тогда краевая задача (10), (14) имеет собственную функцию

$$u_2(x) = -\frac{(c_{11}-c_{13}\rho^2)(1-e^{i\rho})+(c_{12}\rho-c_{14}\rho^3)(1+e^{i\rho})}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}e^{\rho x} + e^{i\rho x}$$

Пусть $t_2 = 0, t_3 = 0, t_4 = 1$, тогда

$$\left(-\frac{(c_{11}-c_{13}\rho^2)(1-e^{-i\rho})-(c_{12}\rho-c_{14}\rho^3)(1+e^{-i\rho})}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}, 0,0,1\right)$$

Или

$$\left(-\frac{e^{-i\rho}((c_{11}-c_{13}\rho^2)(e^{i\rho}-1)-(c_{12}\rho-c_{14}\rho^3)(e^{i\rho}+1))}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}, 0,0,1\right)$$

Тогда краевая задача (10), (14) имеет собственную функцию

$$u_3(x) = -\frac{e^{-i\rho}((c_{11}-c_{13}\rho^2)(e^{i\rho}-1)-(c_{12}\rho-c_{14}\rho^3)(e^{i\rho}+1))}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}e^{\rho x} + e^{-i\rho x}$$

Умножим $u_2(x)$ на $e^{-i\rho}$ и найдем разность функций $u_3(x) - u_2(x)$. Получим

$$u_4(x) = e^{-i\rho x} - e^{-i\rho}e^{i\rho x} = e^{-i\rho x} - e^{-i\rho(1-x)}$$

Утверждение. *Краевая задача (10), (14) при любом параметре λ вырождена и имеет три линейно независимые собственные функции:*

$$u_1(x) = e^{-\rho(1-x)} + e^{-\rho x}$$

$$u_2(x) = -\frac{(c_{11}-c_{13}\rho^2)(1-e^{i\rho})+(c_{12}\rho-c_{14}\rho^3)(1+e^{i\rho})}{(c_{11}+c_{13}\rho^2)(1-e^{\rho})+(c_{12}\rho+c_{14}\rho^3)(1+e^{\rho})}e^{\rho x} + e^{i\rho x}$$

$$u_3(x) = e^{-i\rho x} - e^{-i\rho(1-x)}$$

5. Поведение характеристического определителя краевой задачи при краевых условиях близких к условиям (8)

Рассмотрим краевую задачу

$$u''(x) = -\rho^2 u(x) \tag{15}$$

при краевых условиях

$$u(0) - (1-\varepsilon)u(1) = 0, \qquad u'(0) + u'(1) = 0. \tag{16}$$

где ρ и ε – вещественные параметры.

Общее решение дифференциального уравнения (15) имеет вид $t_1\cos(x\rho) + t_2\sin(x\rho)$, где t_k – произвольные константы. Оно должно удовлетворять условиям

$$u(0) - (1-\varepsilon)u(1) = t_1 - (1-\varepsilon)t_1 cos\rho - (1-\varepsilon)t_2 sin\rho = 0.$$

$$u'(0) + u'(1) = \rho t_2 - \rho t_1 sin\rho - \rho t_2 cos\rho = 0.$$

Получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} t_1 - (1-\varepsilon)t_1 cos\rho - (1-\varepsilon)t_2 sin\rho = 0; \\ \rho t_2 - \rho t_1 sin\rho + \rho t_2 cos\rho = 0. \end{cases}$$

Зададим характеристический определитель $\Delta_\varepsilon(\rho)$:

$$\Delta_\varepsilon(\rho) = \begin{vmatrix} 1-(1-\varepsilon)cos\rho & -(1-\varepsilon)sin\rho \\ -\rho sin\rho & \rho(1+cos\rho) \end{vmatrix}$$

И построим его графики при $\varepsilon_1 = 0{,}5$; $\varepsilon_2 = 0{,}1$; $\varepsilon_3 = 0{,}01$; $\varepsilon_4 = 0{,}001$.

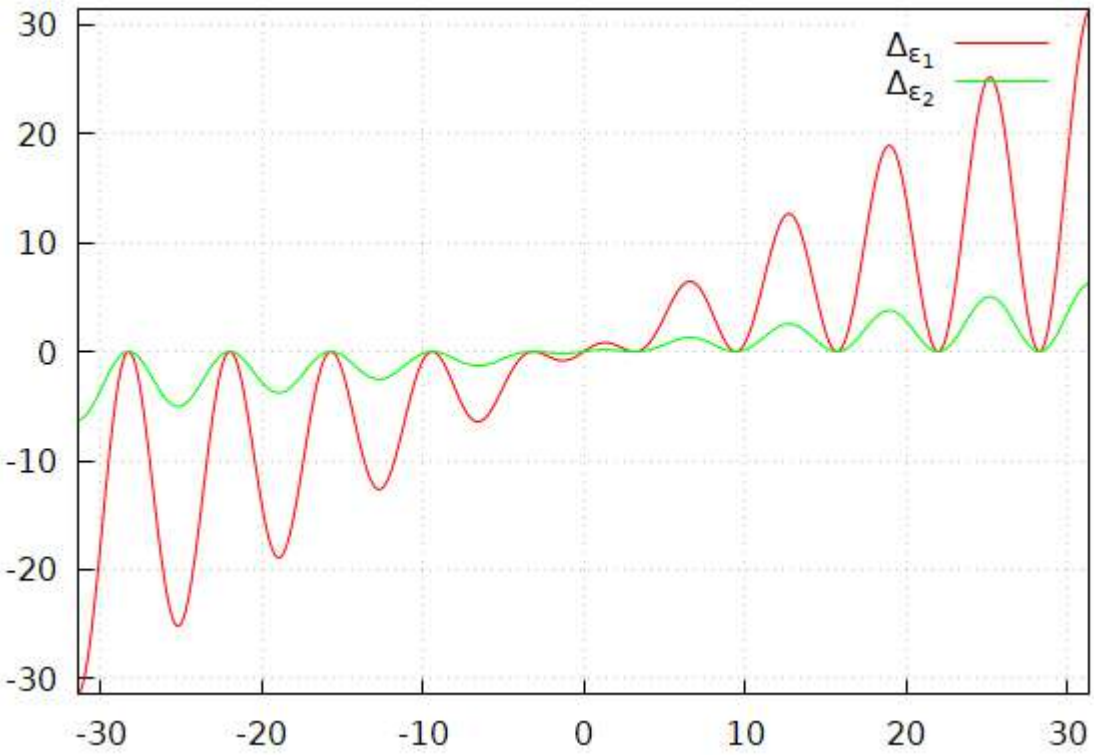


Рис.1 Графики функции при $\varepsilon_1 = 0{,}5$ и $\varepsilon_2 = 0{,}1$

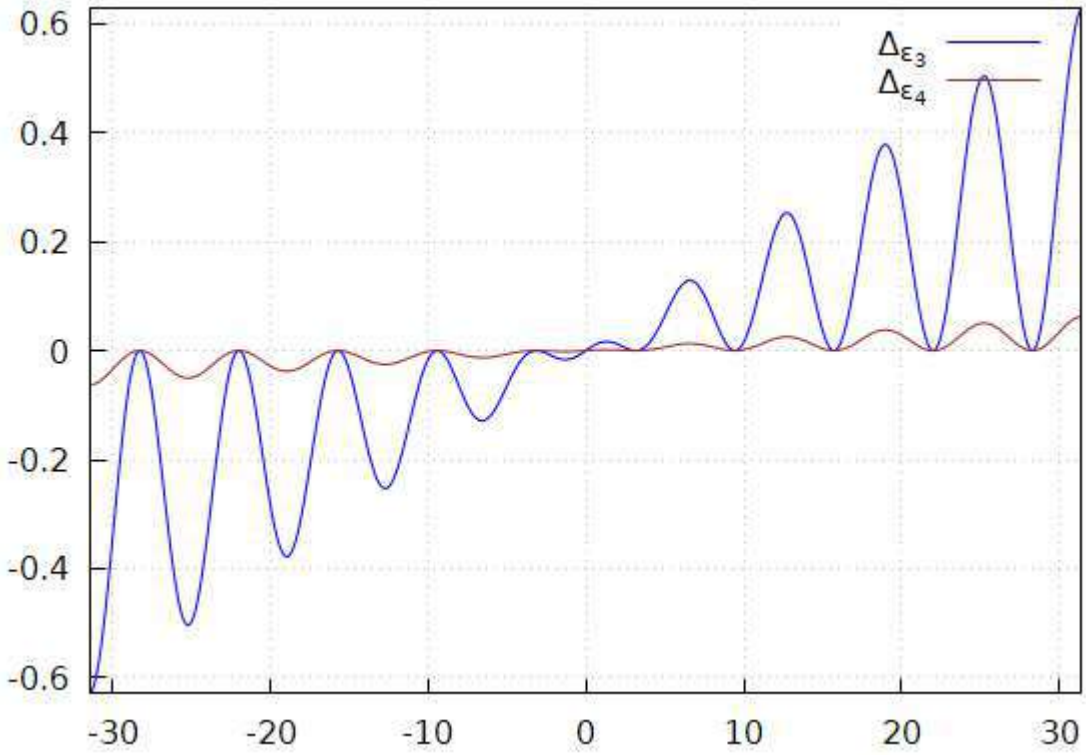


Рис.2 Графики функции при $\varepsilon_1 = 0{,}01$ и $\varepsilon_2 = 0{,}001$

Мы видим, что при уменьшении ε графики стремятся к нулю, амплитуда уменьшается. При $\varepsilon \to 0$ $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\rho(cos\rho + 1) = 0$. По графику видно, собственные двукратные значения характеристического определителя $\Delta_\varepsilon(\rho)$ от ε не зависят. Также мы видим, что при уменьшении ε амплитуда колебаний уменьшается и стремится нулю. График вытягивается в прямую.

Литература

1. Блошанская С. К. , О существовании присоединенных функций оператора второго порядка. *Докл. АН СССР*, 1982, том 262, номер 5 – 1036–1039 с.

2. Ионкин Н. И., Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977, том 13, №1-2 – 294 – 304 с.

3. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности под системы собственных и присоединенных функций пучка М,В, Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов. Докл. АН СССР, 1976, том 227, № 4 – 796–799 с.

4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 528 с.

5. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 536 с.

6. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. – Мир, 1997. – 119 – 130 с.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Гущенковой Александры Игоревны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Разработка инструмента структуризации веб-контента на основе онтологического подхода» являются: функция расчета значимости отдельных единиц текста на основе карты контента, функция формирования блоков текста и их расположения на веб-странице и функция анализа результатов структуризации веб-контента после размещения текста на веб-ресурсе

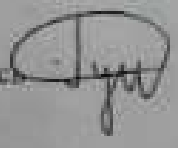
Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 10 сентября по 15 мая 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google по следующим ключевым словам: структуризация контента на веб-ресурсе, в выдаче поисковиков было исследовано 11 статьи, 3 тезисов докладов, и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [6-11], были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Гвоздевой Татьяной Вадимовной, к.э.н., доцентом, заведующей кафедры информационных технологий Ивановского государственного энергетического университета.
- Проведено выступление на научной конференции Ивановского государственного энергетического университета.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет в тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 26.06.2021. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись  Гущенкова Александра Игоревна

20.05.2021 г. Иваново, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет Информатики и Вычислительной техники
Кафедра Информационных технологий
Направление подготовки 09.03.03 – Прикладная информатика
Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная информатика в информационной сфере»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ Т.В. Гвоздева
(подпись)
«____»_____20___ г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к выпускной квалификационной работе

на тему: «Разработка методики структуризации веб-контента на основе онтологического подхода»

Обучающийся: _____ Гущенкова А.И.

Руководитель: к.э.н, доцент _____ Гвоздева Т.В.

Иваново 2021

364

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ЛЕНИНА»

Факультет информатики и вычислительной техники
Кафедра информационных технологий
Направление подготовки (специальность) 09.03.03 Прикладная информатика
Направленность (профиль) образовательной программы – Прикладная информатика в информационной сфере

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_____ Т.В. Гвоздева
«____»_____ 20___ г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение выпускной квалификационной работы
обучающемуся гр. 4-45 Гущенковой Александры Игоревны

1. Тема работы: *Разработка инструмента структуризации веб-контента на основе онтологического подхода*
утвержденная приказом ректора от *00.00.0000* № _____.

2. Исходные данные к работе: результаты производственной практики (научно-исследовательской работы), производственной практики (практики по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности) и производственной практики (преддипломной практики).

3. Содержание работы (перечень вопросов, подлежащих разработке):
3.1. Выполнить предпроектное исследование процесса продвижения инноваций в открытой информационной среде:
- Изучить процесс продвижения инноваций посредством размещения web-ориентированного контента на Интернет-ресурсах, оценить роль и значимость содержания и структуры размещаемого контента в задачах его восприятия;
- Исследовать процесс создания контента и его представления, провести анализ современных требований и подходов организации web-ориентированных ресурсов, в целях совершенствования структуры контента и методики его представления;
- Изучить современные методы и средства структуризации контента, основанные на онтологическом подходе;
- Разработать концептуальную модель инструмента структуризации веб-контента.

3.3. Разработать техническое задание на инструмент структуризации веб-контента.
3.2. Выполнить технико-экономическое обоснование целесообразности разработки инструмента структуризации веб-контента и его включения в систему управления продвижением инноваций.
3.4. Выполнить проектирование методов структуризации веб-контента на основе онтологического подхода:

365

- Разработать математическую модель структуры веб-контента, разработать основные методы формирования контента на основе онтологического подхода, и определить методику структуризации веб-контента;
- Разработать функциональную структуру инструмента структуризации веб-контента;
- Разработать решения по информационному обеспечению инструмента: определить источники данных, выбрать и разработать методы интеграции со смежными системами;
- Разработать решения по программному обеспечению инструмента структуризации веб-контента: разработать архитектуру программной системы с учетом ее интеграции в систему продвижения инноваций; определить перечень необходимых сервисов и компонентов для решения задач проектирования;
- Разработать решения по организационному и техническому обеспечению инструмента структуризации веб-контента;
- Разработать решения по информационной безопасности и защите информации информационных объектов инструмента структуризации веб-контента.

3.5. Выполнить программную реализацию инструмента структуризации веб-контента, разработать прототип системы и выполнить его апробацию: выполнить реализацию функций расчета значимости отдельных единиц текста (предложений), формирования блоков текста и их расположения на веб-странице, анализа результатов структуризации веб-контента после размещения текста на веб-ресурсе. Подготовить проектную документацию, выполнить тестирование и внедрение системы;
3.6. Выполнить адаптацию инструмента для предприятия АО «Мосинжпроект», процесса создания контента для внутренних и внешних пользователей.

4. Графический материал: схема функциональной структуры, схема логической модели базы данных, схемы алгоритмов, схема организационно-технической структуры, презентация выпускной квалификационной работы и раздаточный материал (при необходимости).

Руководитель _____ Т.В. Гвоздева

Обучающийся _____ А.И. Гущенкова

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет Информатики и Вычислительной техники
Кафедра Информационных технологий
Направление подготовки 09.03.03 – Прикладная информатика
Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная информатика в информационной сфере»

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН
подготовки выпускной квалификационной работы (ВКР)

/п	Наименование этапов работы	Срок выполнения	
		начало	окончание
1	Выполнение технико-экономическое обоснование целесообразности разрабатываемой системы	11.05.2021	13.05.2021
2	Подготовка решений по информационной безопасности	13.05.2021	14.05.2021
3	Разработка и внедрение программной системы	14.05.2021	20.05.2021
4	Разработка организационной и эксплуатационной документации на программную систему	20.05.2021	25.05.2021
5	Оформление отчета по практике и подготовки к защите	22.05.2021	25.05.2021
6	Анализ и при необходимости корректировка проектных решений в соответствии с заданием на ВКР с учетом результатов производственных практик	27.05.2021	31.05.2021
7	Оформление ВКР и графического материала, подготовка к процедуре защиты	03.06.2021	26.06.2021
8	Процедура защиты ВКР	27.06.2021	27.06.2021
9	Завершение процедуры государственной итоговой аттестации: информационная и техническая подготовка результатов ВКР, в том числе к размещению в ЭИОС и библиотеке ИГЭУ	28.06.2021	06.07.2021

Руководитель _____ Т.В. Гвоздева

Обучающийся _____ А.И. Гущенкова

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ИС – информационная система

ПО – программное обеспечение

ИВ – информационное воздействие

СУ – субъект управления

ОУ – объект управления

ПрО – предметная область

Оглавление

Введение ... 7

1. Предпроектное исследование ... 8

1.1. Исследование актуальности задачи продвижения инноваций ... 8

1.2. Роль и сущность маркетинга в инновационной деятельности ... 9

1.3. Определение роли структуры контента при продвижении инноваций ... 16

1.4. Исследование технологий формирования веб-контента ... 21

1.5. Исследование методов структуризации веб-контента ... 22

1.6. Разработка методики структуризации веб-контента ... 23

2. Техническое задание ... 29

3. Техно-рабочее проектирование ... 53

3.1. Решения по функциональному обеспечению ... 53

3.2. Решения по математическому обеспечению ... 55

3.3. Решения по информационному обеспечению ... 69

3.4. Решения по программному обеспечению ... 71

3.4.1. Разработка структуры программного обеспечения ... 71

3.4.2 Разработка функции частей программного обеспечения ... 72

3.4.3. Выбор методов и средств разработки программного обеспечения ... 72

3.4.4. Разработка решений по общесистемному программному обеспечению ... 73

3.4.5.Структура программного обеспечения 74

3.5. Решения по организационному и техническому обеспечению ... 75

3.6. Решения по информационной безопасности и защите информации ... 77

3.7. Контрольный пример ... 84

Заключение ... 89

Список литературы ... 90

Приложение 1 ... 92

Приложение 2 ... 95

Введение

Интернет пространство является неотъемлемой частью жизни огромного количества людей. Интернет пространство настолько огромно и многогранно, что в нем постоянно зарождаются инновационные направления и тенденции.

Одним из инновационных направлений стал Интернет-маркетинг, что означает организацию маркетинга в среде Интернета. Во всем мире именно этот вид маркетинга получил всеобщее признание благодаря высокой эффективности в усвоении информации, удобству и широким возможностям обеспечения и усиления связей между производителем и потребителем. На данный момент Интернет является эффективной платформой для развития методов продвижения инноваций.

Однако, существующие технологии не способны организовать качественное информационное воздействие при продвижении инновации, вследствие чего инновация медленно проникает на рынок, а производитель теряет свою конкурентоспособность.

При информационном воздействии в открытом информационном пространстве ценность для читателей представляют конкретные фрагменты текста, в которых могут содержаться ответы на интересующие вопросы. Кроме того, при переходе от печатного текста на бумаге к тексту, публикуемому в веб-среде изменяется стиль чтения, поэтому веб-текст гораздо сложнее читать и воспринимать. Появляется необходимость точечного представления информации, поэтому необходимо усовершенствовать структуру контента на веб-ресурсах.

Для организации более качественного воздействия при продвижении инноваций в открытом информационном пространстве необходимо осуществить разработку инструмента структуризации веб-контента, который выполняет функцию расчета значимости отдельных единиц текста на основе карты контента, функцию формирования блоков текста и их расположения на веб-странице и функцию анализа результатов структуризации веб-контента после размещения текста на веб-ресурсе.

1. Предпроектное исследование

1.1. Исследование актуальности задачи продвижения инноваций

Чтобы перейти к определению сущности продвижения инноваций необходимо изучить понятие инновация.

Инновация (инновации) – это результат успешно коммерциализированного новшества (новации). Инновации должны обладать новизной, удовлетворять рыночному спросу, приносить прибыль инноваторам.

Новацией называют нечто уникальное, появившееся недавно и предлагаемое для дальнейшего эффективного применения. Это может быть какого-либо рода изобретенный прибор, устройство, производственная технология, научная разработка, метод и прочее.

Рассматривая термин «инновация» не как готовый продукт, а как процесс, академик Д. Твишиани дает определение: «Инновация — это комплексный процесс создания, распространения и использования нового практического средства для новой общественной потребности» [1]. Исходя из данного определения можно сказать, что продукт или услугу можно назвать инновационными, если они по-новому удовлетворяют традиционную потребность или способны удовлетворить принципиально новую потребность.

По значимости различают:

1. Псевдоинновации – инновации, направленные на частичное улучшение устаревших поколений техники и технологий;
2. Улучшающие – инновации, реализующие мелкие и средние изобретения и преобладающие на фазах распространения и стабильного развития научно-технического цикла;
3. Базисные – инновации, базирующееся на результатах научно-технических разработок, не имеющих аналогов в мировой практике, и направленные на освоение новых систем и технологий следующих поколений.

Опираясь на предложенное определение термина «инновация», профессор В. А. Дрещинский и аспирант М. А. Марков в своей статье [2] описывают проблемы продвижения инноваций. Под инновационной деятельностью подразумевается деятельность (научная, технологическая, организационная, финансовая и коммерческая), направленная на реализацию инновационных проектов, а также на создание инновационной инфраструктуры и обеспечение ее деятельности.

Потенциальные потребители не осознают того, как инновационный продукт способен удовлетворить их потребности. Изначально у потребителя может отсутствовать неопределенность совсем, при отсутствии каких-либо знаний о существовании инновации. Поставщики и партнеры могут иметь представление об инновации, если они ранее имели дело с чем-то похожим, таким образом, их неопределенность не является нулевой и не имеет максимального значения.

При отсутствии потребности у потребителя, целевой и продуктовый каналы не могут существовать. Данная ситуация делает установление взаимовыгодных социально-экономических отношений с предприятием невозможным, в связи с чем возникает проблема продвижении инновации с целью снятия неопределенности у делового окружения и формирования явной потребности.

При продвижении инноваций компании ищут бюджетные и инновационные каналы. В настоящее время такими каналами являются мобильные телефоны и интернет. Именно мобильные устройства позволяют потребителям тесно «общаться» организациями, узнать актуальную информацию об услугах и товарах.

При разработке методов продвижения инноваций, часто обращаются к принятым в практике маркетинга моделям AIDA (от англ. AIDA – Attention, Interest, Desire, Action – внимание, интерес, желание, действие) и ACCA (от англ. – Attention, Comprehension, Conviction, Action - внимание, понимание, убеждение, действие) [15].

Одним из принципов моделей является привлечение внимания венчурных инвесторов. Для этого предлагается участие в венчурных ярмарках, популяризация инновации в СМИ, а также демонстрация виртуальной модели инновации, подразумевающая наглядность и понятность. Это говорит о необходимости представления образа инновационного проекта объекту и отслеживания его реакции на представленную информацию. В таком случае, проблему продвижения инноваций способно решить информационное воздействие.

1.2. Роль и сущность маркетинга в инновационной деятельности

Рассмотрим маркетинговую деятельность при продвижении инновационной продукции на предприятии, используя методы системного анализа.

Под предприятием (организацией) понимается отдельный хозяйствующий субъект, производящий продукцию, либо оказывающий услуги, либо выполняющий работы для извлечения выгоды и удовлетворения потребностей общества.

Каждый день у населения (S_c – внешняя среда), которое выполняет социальную функцию (F_c), возникает потребность U_c в биологических, духовных и социальных

372

нуждах. Для того, чтобы решить проблему W_c способа удовлетворения своих нужд люди обращаются в организации определенной специализации, направленные на их решение $Z_{пр}= P_{пр}$.

У компании возникает потребность $U_{пр}$ в потребителях. Чтобы решить проблему $W_{пр}$ малого спроса услуг, маркетинговому отделу необходимо осуществить продвижение услуг (маркетинговая деятельность) $F_м$, тем самым увеличить спрос на услуги $Z_м= P_м$. Для осуществления продвижения услуг необходимо $U_м$ информационное обеспечение отдела маркетинга, чтобы решить проблему нехватки $W_м$ данных для продвижения услуг компании маркетологи обращаются к ИС, которая их предоставляет $Z_{ис}= P_{ис}$.

Во время маркетинговой деятельности возникает потребность $U_{ис}$ в продвижении инновационной продукции предприятия с помощью системы управления контентом (CMS). Чтобы решить проблему формирования образа об инновационной продукции у потребителя необходим Интернет-ресурс $Z_{cms}=P_{cms}$ с организованным и представленным содержанием об инновационной продукции.

Для большей наглядности представим описание предметной области в виде атрибутивной модели (Рисунок 1).

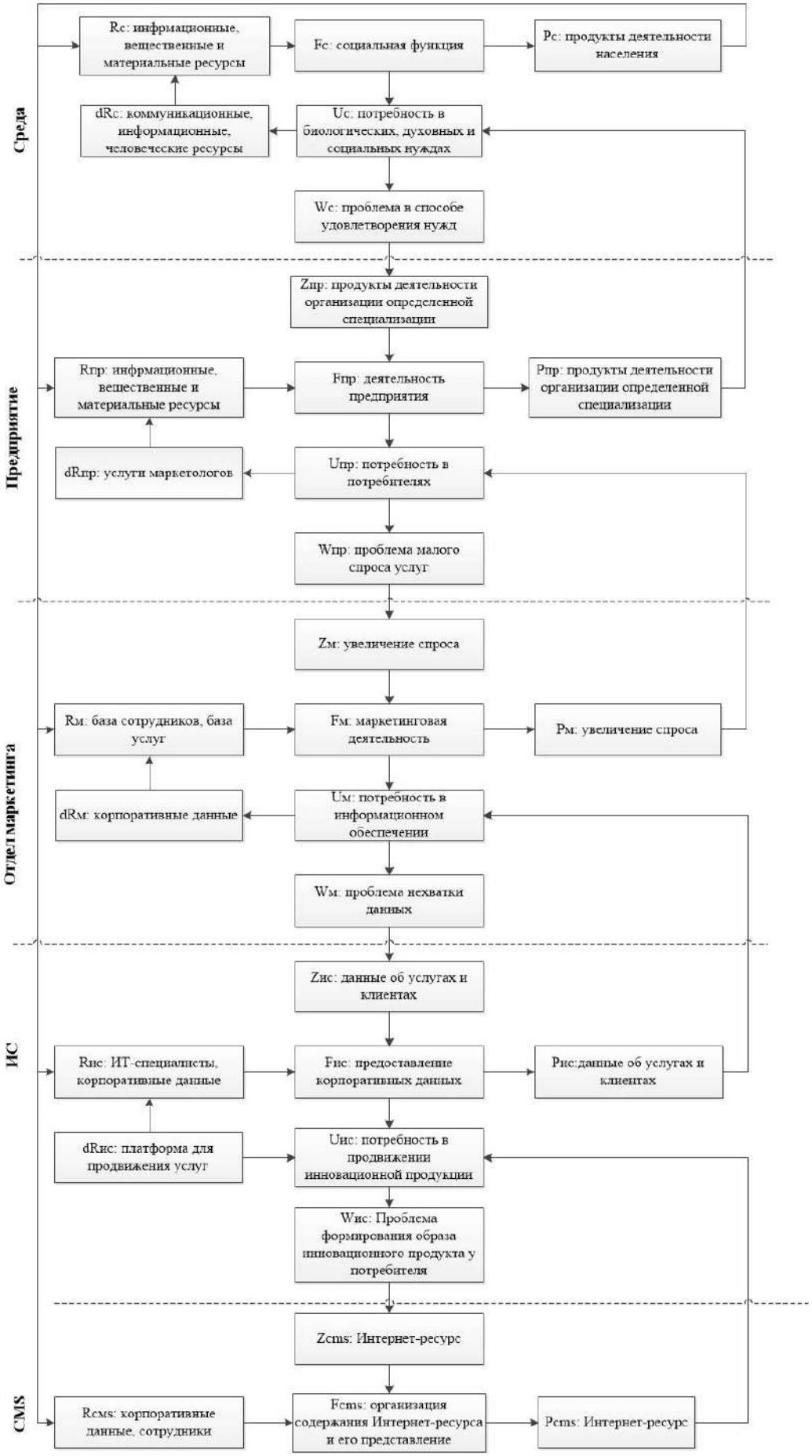


Рисунок 1. Атрибутивная модель открытой целесообразной системы

У потребителей будет разная степень понимания относительно сути инновационной продукции, принципа действия и того, как она способна удовлетворить их потребности. Таким образом, проблема (W) базисной инновации заключается в отсутствии спроса, то есть явной потребности, у делового окружения предприятия, занимающегося инновационной деятельностью.

Информационное воздействие является разновидностью управления – коммуникационным действием, при котором адресант рассматривает адресата, как средство достижения своих целей, а адресат сообщает о своей реакции (Q) на воздействующую информацию по каналу обратной связи. Эффект информационного воздействия заключается в идентификации проблем и формировании потребностей у делового окружения, побуждающее их к установлению целесообразных отношений с предприятием.

Рассмотрим информационное воздействия с позиции модели «субъект-объект» (Рисунок 2):

1. Субъект управления (СУ) – человек или множество людей, чья деятельность организационно привязана к управлению объектом внешней среды;

2. Объект управления (ОУ) – часть среды, при воздействии на которую изменяется результативность функционирования системы.

Субъект управления (маркетолог на предприятии) создает форму представления образа инновации. Затем обеспечивается информационное воздействие на деловое окружение с помощью системы организации потребителей (СОП), в результате которого происходит восприятие объектом управления (потребителем) воздействующей информации, в следствии чего изменяется исходное состояние объекта (Q), что приводит к осознанию проблем (W) и формированию потребности (U). После чего потребитель формирует цель, выраженную дефицитом ресурса.

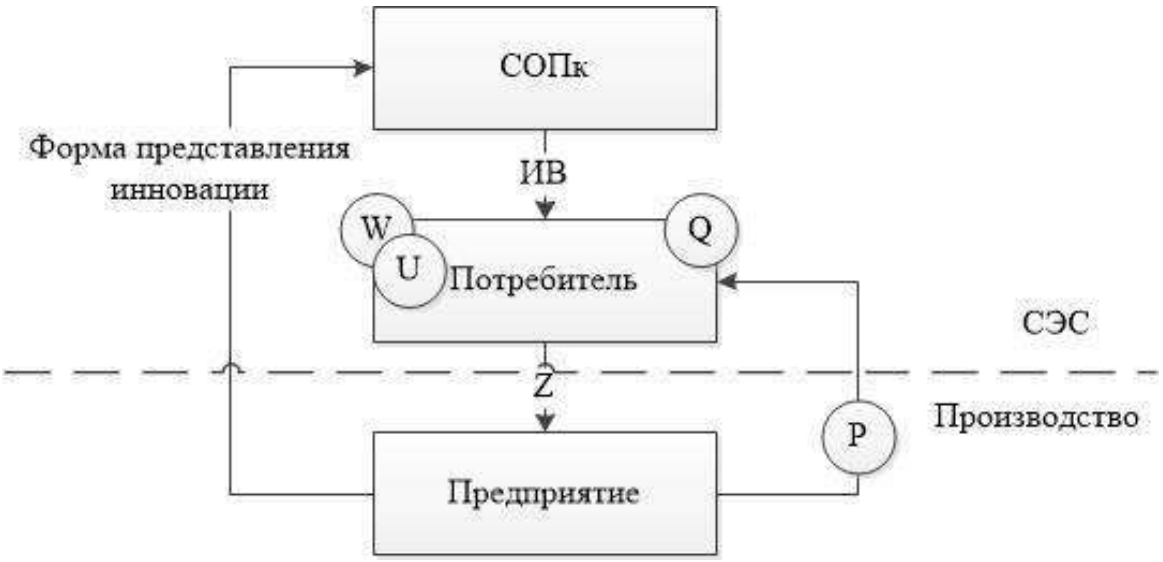


Рисунок 2. Модель «Субъект-объект»

Система управления контентом (CMS)- система, используемая для обеспечения и организации совместного процесса создания, редактирования и управления контентом.

Принцип работы, исследуемой CMS, значительно отличается от принципа работы стандартных систем управления контентом, которые имеют ряд недостатков при информационном воздействии:

1. Отсутствие конкретной последовательности сценария информационного воздействия. Пользователь имеет возможность самостоятельно организовывать последовательность представления контента.
2. Отсутствие встроенного функционала мониторинга процесса восприятия контента, дающего полный образ посетителей веб-сайта.
3. Отсутствие встроенного функционала структуризации контента веб-сайта, обеспечивающего эффективную организацию текста на экране.
4. Отсутствие возможности адаптации контента к особенностям объекта воздействия. Данный недостаток является ключевым, так как полнота представленного образа инновации играет главную роль в принятии объектом управления решения по установлению целесообразных отношений с предприятием.

Система редактирования контента на основе web-mining получает текст от контент-менеджера и формирует ассоциации и степень адекватности, передавая данные в систему создания и адаптации контента, где создается базовая карта контента, которая впоследствии передается в систему создания и адаптации веб-ресурса.

Для измерения состояния реципиента используется подсистема мониторинга процесса восприятия. Полученные результаты мониторинга используются: системой создания и адаптации контента и субъектом управления (контент-менеджером).

Такую систему управления контентом будет более корректно назвать «системой генерации и адаптации веб-ресурса», исходя из ее функциональных возможностей и места в общей системе информационного воздействия (Рисунок 3).

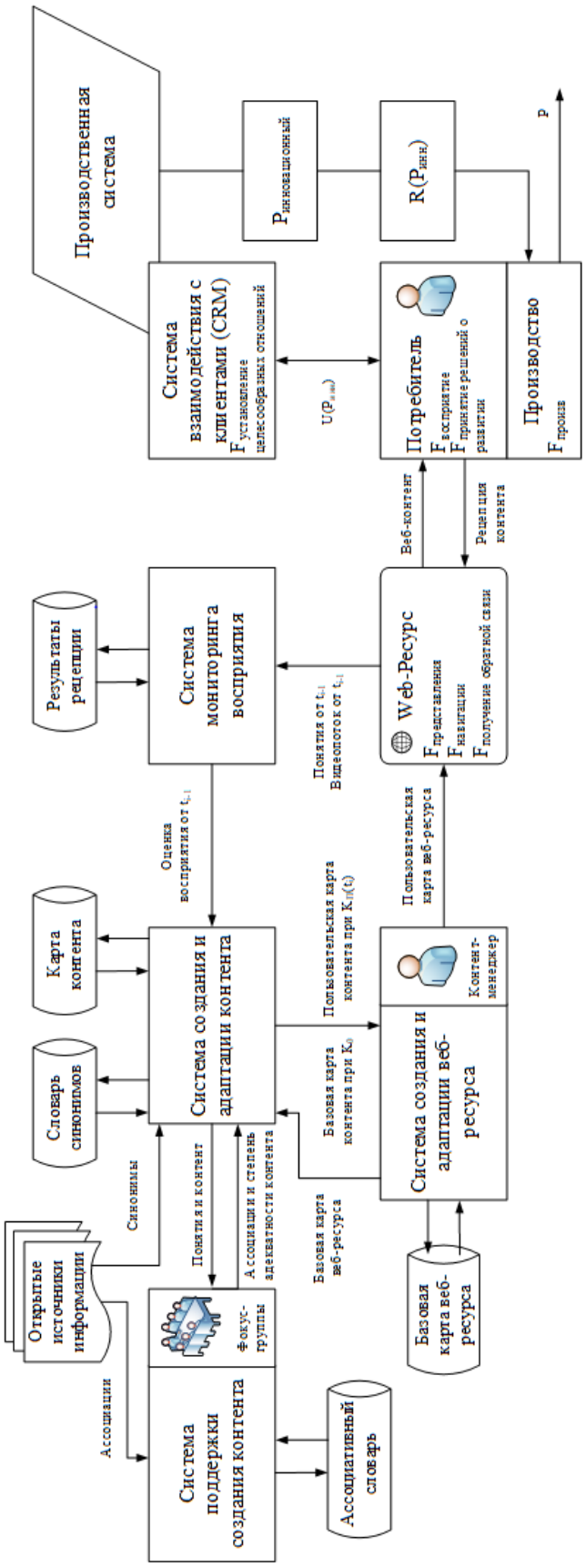


Рисунок 3. Модель системы управления процессом продвижения инноваций в открытом информационном пространстве

1.3. Определение роли структуры контента при продвижении инноваций

Поскольку информационное воздействие происходит в Интернете, контент размещается на Интернет-ресурсе («веб-ресурс», «веб-сайт»). Веб-сайт– совокупность логически связанных между собой веб-страниц, содержащих контент, реализованная с помощью интегрированных средств технического и программно-аппаратного характера.

В переводе с английского языка «Content» означает «содержание». Сам термин пришел к нам из виртуального пространства медиа-коммуникационной сферы. Некоторые определения понятия «контент»:

– содержание (наполнение) чего-либо (это могут быть текстовые материалы или видео, аудиозаписи или картинки);

– любой вид информации (текст, аудио, видео, изображение), составляющей содержание инфопродукта.

Автор статьи «Понятие «контент»: типология, виды и технология получения дидактического контента в образовательном процессе» Т.П. Павленко [3] под веб-контентом подразумевает ту часть информационной составляющей сетевого ресурса, которую пользователь может использовать по своему усмотрению.

В контексте веб-ресурса ценность для читателей представляют не длинные тексты, в глубине которых могут содержаться ответы на интересующие вопросы, а конкретные фрагменты текстов с этими ответами. То есть появляется необходимость точечного представления информации. Как отмечает Н. Карр [4], раньше читатель, как аквалангист, погружался в глубины океана слов, а теперь он скользит по поверхности, как водный лыжник.

Существует множество способов представления контента на веб-странице: сплошной, блочный, листинговый и другие. Один из способов точечного представления информации являются текстовые блоки (блочный способ). Блочная структура контента - множество фрагментов контента, которые могут быть представлены пользователю в различных последовательностях (постоянных или изменяемых).

$\text{Page} = \{\text{block}_1, \text{block}_2, \ldots, \text{block}_n\},$

где Page- рабочая область (work area) на которой расположен контент, block – блок текста.

Блок текста (фрагмент текста) — это часть текста документа, размер которого может колебаться от одного символа до целого документа. У блока есть начало и конец, а сам блок — это текст, заключенный в заданные рамки.

Каждый фрагмент текста, выделяемый в качестве информационного блока, снабжается метаинформацией – метками, к которым относятся пробел, прописные буквы, точка, точка с запятой, абзац, заголовок и подзаголовок, маркированный список, выделение текста шрифтом. Кроме того, к метаинформации относятся элементы кода, которые не всегда видны пользователю. Каждый информационный блок имеет определенный размер и относится к определенному классу, в зависимости от значимости информационного блока.

Block = { Ω, c, h, content },

Где Ω - класс блока, c - ширина, h - высота, content - текст.

Так как веб-текст гораздо сложнее читать и воспринимать, при переходе от печатного текста на бумаге к тексту, публикуемому в веб-среде, изменяется стиль чтения текста. При открытии веб-страницы пользователи сначала просматривают весь контент на веб-ресурсе, чтобы убедиться, что нашли нужный. Таким образом, пользователь привык к быстрой прокрутке всей информации с остановками только на важных частях.

Существует две главные моделей чтения: F – паттерн [11] и Z- паттерн [12].

Исследования движения глаз Кары Перниц показали, что большинство людей просматривают контент по форме буквы «F». При F-образном сканировании рисунок характеризуется множеством фиксаций, сосредоточенных в верхней и левой частях страницы. F-паттерн лучше использовать для перегруженных текстом страниц, где каждый информационный блок сосредоточен на текстовом контенте и имеет большой объем текста.

Z-паттерн встречается на страницах, которые не сосредоточены на тексте. Это делает Z-паттерн хорошим решением для простых дизайнов с минимумом текста и несколькими ключевыми элементами, которые необходимо увидеть, то есть более 50% информационных блоков сосредоточены на медиа-контента.

Прежде чем рассматривать методы структуризации веб-контента необходимо определить структуру самой веб-страницы.

Существуют законы композиции, которые определяют восприятие человеком художественных полотен, фотографий, печатных изданий. Экран монитора в данном случае тоже можно рассматривать как «картинную плоскость». Законы, по которым строится художественное полотно, известны, и один из принципов этого построения – «золотое сечение» (Рисунок 4) [7].

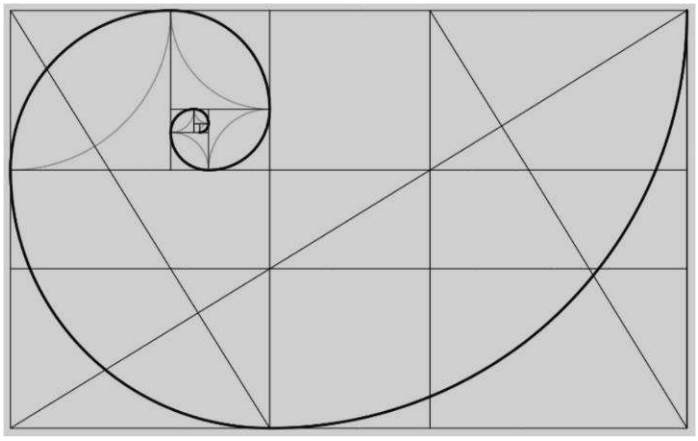


Рисунок 4. Вид золотой спирали

Золотое сечение, также известное как “фи” по-гречески, это математическая константа. Оно может быть выражено уравнением a/b=a+b/a=1,618033987, где a больше, чем b. Это также можно объяснить последовательностью Фибоначчи, другой «божественной пропорцией». Последовательность Фибоначчи начинается с 1 (некоторые говорят с 0) и добавляет к нему предыдущее число, чтобы получить последующее (т.е. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 …).

Если попытаться найти частное от деления двух последующих чисел Фибоначчи (т.е. 8/5 или 5/3), результат очень близок к золотому сечению 1,6 или φ (фи).

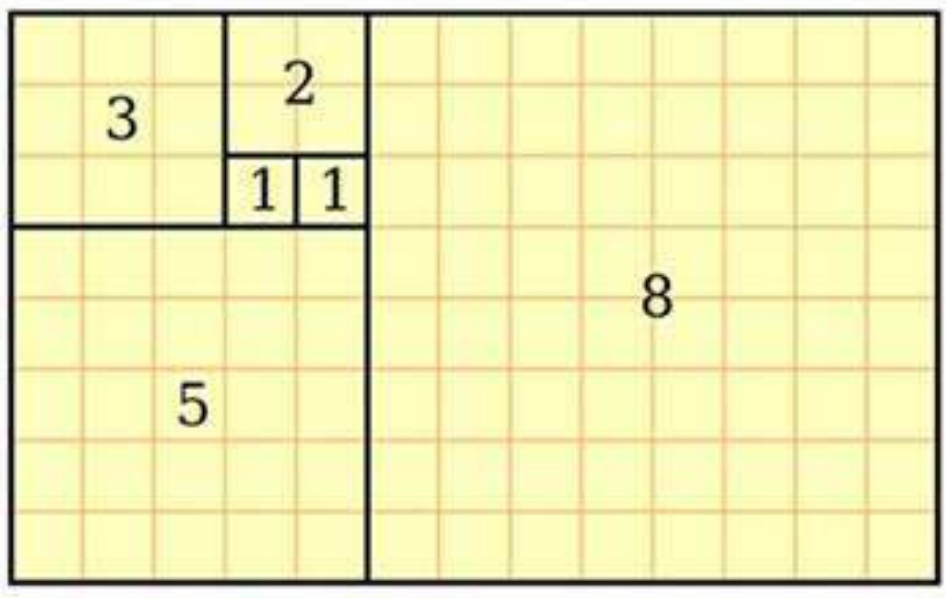


Рисунок 5.Схема пропорций золотого прямоугольника

Золотая спираль создается с помощью золотого прямоугольника. При наличии прямоугольника из квадратов 1, 1, 2, 3, 5 и 8 соответственно (Рисунок 5), можно приступить к строительству золотого прямоугольника. При использовании стороны квадрата в качестве радиуса создается дуга, которая касается точек квадрата по

диагонали. При повторении этой процедуры с каждым квадратом в золотом треугольнике в конечном итоге получится золотая спираль.

В фотографии правило «золотого сечения» используется следующим образом [8]: когда важные объекты располагаются в кадре в определённых точках – зрительных центрах. Эти точки находятся на расстоянии 5/8 и 3/8 от края (Рисунок 6).

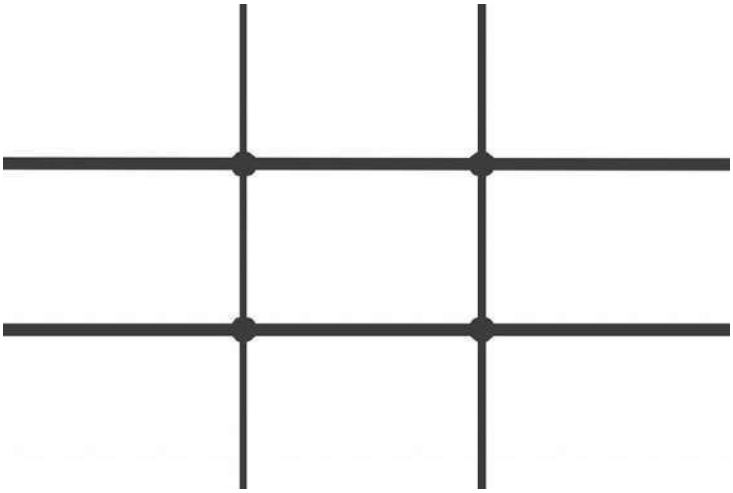


Рисунок 6. Схема зрительных центров

Также для привлечения внимания авторы помещают самые важные фрагменты статьи в первый абзац. За вступительным абзацем следуют абзацы, содержащие важные детали. Затем следует общая информация и любые другие сведения, которые авторы сочли благоприятными для повествования. Этот способ подачи дозированной информации называется «Перевернутая пирамида» (Рисунок 7) [9]. Исходя из этого можно произвести классификацию блоков на три основных: значимый блок, блок с важными деталями и блок с информацией второго плана.



Рисунок 7. Схема способа подачи контента «Перевернутая пирамида»

Подводя итог вышесказанному, стоит выделить основные моменты формирования модели веб-страницы:

1) Ширина контента на сайте

Ширина контента на веб-сайте должна составлять 1024 пикселей, которую можно разбить на две части так (5/8=1,6), чтобы они смотрелись идеально в соответствии с правилом «золотого сечения» (Рисунок 8) [7].



Рисунок 8. Расположение веб-контента

Лучшей будет ширина в 633, а остальные 391 пойдут на боковую панель. Контент шириной в 633 пикселей будет легко восприниматься смотрящим. Как вариант – разбить основную часть ещё на два блока, но, чтобы отношение частей также соответствовало правилу золотого сечения.

2) Зрительные центры

Для привлечения внимания посетителей к той или иной информации, необходимо использовать зрительные центры (Рисунок 6) [8]. Не стоит использовать на одной странице сразу все четыре, лучше – один или два. Также необходимо воспользоваться правилом перевернутой пирамиды (Рисунок 7) [9], когда информация располагается структурировано и приоритетно: ее ценность и важность убывает от начала текста к его концу. Стоит отметить, что между данными блоками стоит делать отступ больше обычного, отступы также играют большую роль при восприятии контента.

3) Расположение деталей

Первым делом взгляд человека стремиться в верхний левый угол, там обычно располагается логотип сайта [5]. Навигацию целесообразно размещать на верхней горизонтальной линии – это привычно, удобно и понятно, а также она всегда будет на виду. Такое расположение блоков сделает сайт более удобным для просмотра.

4) Шрифт текста

Если размер шрифта – 11, подзаголовок должен быть написан в более крупном шрифте. Необходимо умножить размер шрифта текста на число золотого сечения [7], чтобы получить большее число (11*1,6=17). Соответственно подзаголовок должен быть написан в 17 размере шрифта.

1.4. Исследование технологий формирования веб-контента

Существует две основные технологии формирования контента: статическая и динамическая [5].

В случае статической технологии, контент формируется в виде HTML-кода с соответствующими стилевыми настройками, который записан в HTML-файл. Данный файл напрямую отправляется пользователю, а содержимое файла интерпретируется браузером. Полученный в результате интерпретации контент отображается на экране устройства.

Главным недостатком такого подхода является статичность контента, то есть теряется возможность динамического добавления, редактирования и удаления контента. Для внесения изменений придется редактировать весь HTML-код файла.

Достоинство – возможность использования всех средств оформления контента (доступность всех стилевых настроек, анимации и прочих графических методов воздействия), отсутствие ограничений, связанных со структурой контента, что позволяет сделать контент уникальным, отличным от контента других HTML-файлов.

В технологии динамической организации веб-ресурса каждая веб-страница разделяется на две сущности: шаблон и контент, хранящийся в базе данных и заполняющий данный шаблон.

Достоинства: быстрое и простое управление контентом (добавление, редактирование, удаление), структурированность информации, возможность создания универсального веб-ресурса, адаптируемого к индивидуальным особенностям реципиента, что соответствует принципу непрерывной адаптации воздействующей информации.

Недостатки: требовательность к программно-техническому обеспечению, поскольку требуется установка серверного программного обеспечения.

При динамической организации веб-ресурса существует такое средство формирования контента, как конструктор веб-страниц.

Принцип действия конструктора заключается в следующем: существует множество шаблонов (форм представления) информационных блоков с установленными стилевыми настройками и поведением на экране. Контент-менеджер способен создавать информационный блок, задавать ему шаблон и наполнять содержимым, а также устанавливать последовательность вывода этих блоков, что соответствует сценарно-ориентированному принципу организации контента.

Для реализации программного средства системы управления контентом следует использовать технологию динамической организации веб-ресурса, потому что она

соответствует изложенным ранее принципам информационного воздействия, где шаблон (форма) представления контента является важной составляющей при восприятии веб-контента пользователями.

1.5. Исследование методов структуризации веб-контента

Структуризация предполагает, как тематическую рубрикацию контента, так и разбиение его на информационные блоки, которые могут использоваться по отдельности.

Одними из современных форм существования рубрикаторов являются онтологии [7]. Рубрика́ция — система взаимосвязанных и соподчинённых заголовков издания, выражающих взаимосвязь и соподчинённость возглавляемых ими рубрик.

Открывателем «онтологий» как формальных явных описаний терминов предметной области и отношений между ними можно по праву считать Томаса Грубера, который в 1993 году в своей работе упомянул этот термин [7]. Онтологию по Т. Груберу можно представить, как описание декларативных знаний, сделанное в виде классов с отношением иерархии между ними.

Определение современных онтологий значительно упростилось, и онтологию можно определить, как спецификацию концептуализации, имеющей вид: O= {C, R, A}, где O – онтология, C – совокупность концептов предметной области, R – совокупность отношений между ними, A – набор аксиом (законов и правил, которые описывают законы и принципы существования концептов).

Существует множество моделей онтологий (Таблица 1).

Таблица 1. Классификация моделей онтологий

Тип модели	**Формальное определение**
Словарь ПрО	{C, Ø, Ø}
Пассивный словарь ПрО	{C, Ø, F}, C=C1∪C2, C∩X2= Ø, F={:=} C1- множество интерпретируемых терминов C2- множество интерпретирующих терминов
Активный словарь ПрО	{C, Ø, F}, C=C1∪C2, C1∩C2= Ø ∃ (C∈C1, y1, y2, …, yk∈ C2), C= f(y1, y2, …, yk), f∈F
Таксономия понятий ПрО	{C, R, Ø}, R ={is-a}
Сетевая структура	{C, R, Ø}, R ={is-a, part-of, отношения ПрО}
Расширяемая сетевая структура	{C, R, A}, R ={is-a, part-of, отношения ПрО, F(R)}
Расширяемая онтология	{C, R, A}, F(C), F(R)

Словарь предметной области требует наличия только концептов X, в то время как таксономия понятий требует дополнительного указания отношений между этими концептами в виде отношения is-a для моделирования наследования концептов.

В качестве методов структуризации веб-контента на основе онтологического подхода, использующих технологию динамической организации веб-ресурса, были исследованы:

– Концептуально-гипертекстовая модель управления контентом [13];

На первом этапе создается тезаурус предметной области с учетом частотности используемых понятий. На втором этапе на материале всего тезауруса предметной области строится ее обобщенная информационная модель. На третьем этапе моделируется понятийный потенциал ядра онтологии предметной области. На четвертом этапе моделирования научной картины мира (НКМ) создается концептуально-гипертекстовая модель управления корпусом текстов.

– Метод структуризации контента, основанный на визуальном представлении [6].

На первом этапе происходит извлечение визуального блока с помощью алгоритма Domtree. На втором этапе обнаружение разделителей (сепараторов). На последнем этапе происходит построение структуры содержимого на основе блоков из Domtree и сепараторов.

Ни один из исследованных методов нельзя полностью взять за основу, но позаимствовать из второго метода следует то, как представлена структура страницы и определяются ее значения с помощью понятийной карты, представленной в первом методе. Также стоит обратить внимание на то, что метод структуризации контента, основанный на визуальном представлении независим от базового представления документации, такого как HTML, и хорошо работает даже тогда, когда структура HTML сильно отличается от структуры макета, что в последующем потребуется подсистеме создания и адаптации веб-ресурса.

1.6. Разработка методики структуризации веб-контента

На основе приведенных выводов и исследований произведем разработку методики структуризации веб-контента, которая включает в себя следующие задачи: формирование текстовых блоков, определение параметров размещения информационных блоков, оценка результатов структуризации (Рисунок 9).

Для формирования текстовых блоков необходимы контент, созданный контент менеджером, и семантическая значимость слов, поступающую из системы редактирования контента на основе web-mining. Для определения параметров размещения блоков

инструмент получает начальные координаты пользователей из БД, координаты точек фиксации пользователей и параметры подачи динамического контента после размещения контента на веб-ресурс от системы мониторинга процесса восприятия.

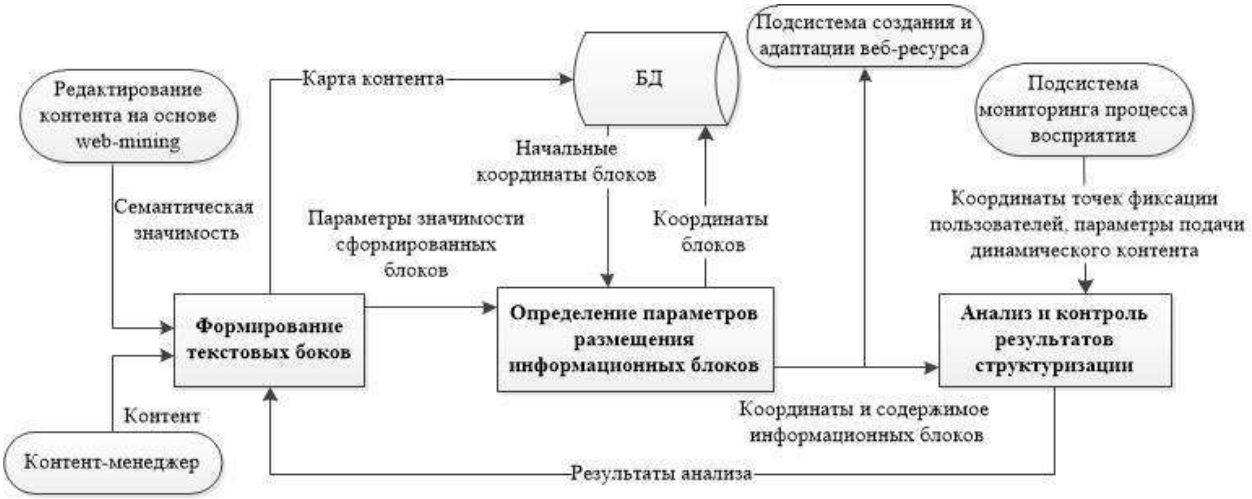


Рисунок 9. Схема работы инструмента структуризации веб-контента

На основе значений семантической важности слов строится онтология предметной области с помощью модели «Таксономия понятий ПрО» (Таблица 1) O= {C, R}, где O – онтология, C – совокупность концептов предметной области, R – совокупность отношений между ними. Онтология всего текста строится, чтобы впоследствии определить тип текста для передачи типа в систему мониторинга процесса восприятия контента для более точной оценки восприятия пользователями текста. В качестве примера модели онтологии представлена структурная модель онтологии предметной области (ВУЗ) (Рисунок 10).



Рисунок 10. Структурная модель онтологии

Выделенные контент-менеджером абзацы берутся за основу для определения первоначальных разделителей в тексте (сепараторов). По каждому выделенному блоку в тексте строится онтология, в первую очередь определяются концепты (C) и отношения между ними (R).

В зависимости от количества концептов (C) и их уровня семантической значимости, а также отношений (R) между ними определяется значимость отдельных блоков текста. При наличии блоков с маленьким объемом текста (менее двух предложений и менее 30 слов) абзац объединяется с другим (следующим или предыдущим) в зависимости от количества общих концептов и связей (ближе/дальше от главного концепта соседних абзацев).

Затем происходит определение весов сепараторов на основе определенных ранее онтологий. Чем дальше связи (>R) между концептами у рядом находящихся блоков и меньше количество общих концептов (>C), тем больший вес имеет сепаратор.

После того как стали известны значимость текстовых блоков и веса сепараторов происходит определение координат места размещения информационных блоков соответствии с шаблоном html-структуры страницы веб-ресурса.

Шаблон html-структуры web-страницы $\omega = (I, Ф, \delta)$, где $I = (\Omega', \Omega''.., \Omega^n)$ - конечный набор информационных блоков. Все эти блоки не перекрываются. Класс информационного блока определен в зависимости от значимости блока, то есть от концептов и их уровня семантической значимости. В зависимости от выводов со страницы 14 шаблон веб-страницы выглядит следующим образом (Рисунок 11): выделены три основных информационных блока с началом координат (103, 270), остальные блоки (x_i, y_i) шириной 633 px (a_i), высота 333 px (b_i) которых меняется в зависимости от объема текста (количества подблоков).

Ф - конечный набор визуальных сепараторов (разделителей блоков). Каждый сепаратор имеет вес $W(I_i, I_i+1) = \delta(I_i, I_{i+1})$, где δ отношения каждых двух блоков. $\delta(I_i, I_{i+1})$= ΔC (I_i, I_{i+1})= число одинаковых концептов/общее число концептов, указывающий на его видимость (чем больше вес сепаратора, тем больше расстояние между блоками $Rast(I_i, I_{i+1})$ $W(Ii, Ii+1)=(y_i - y_{i+1} - b_i)\backslash 5$.

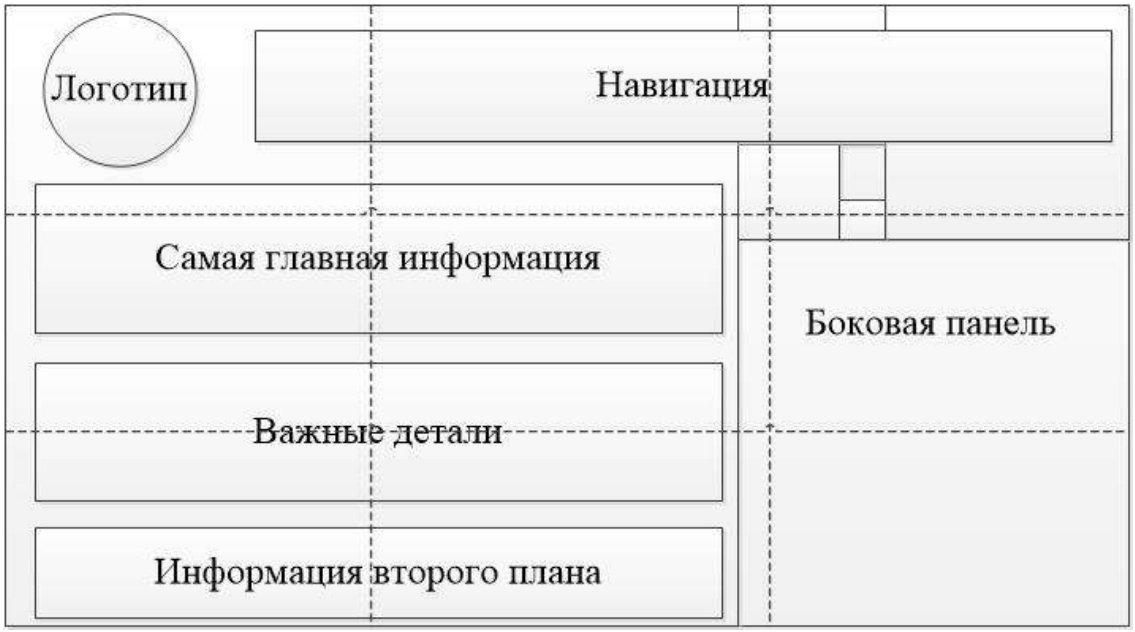


Рисунок 11. Макет веб-страницы

Структура Интернет-ресурса должна соответствовать данному макету, также необходимо обратить внимание на зрительные центры, лежащие внутри информационных блоков, именно на их месте должны располагаться наиболее значимые концепты предметной области для привлечения внимания пользователей. Как видно по блоку с самой важной информацией, наиболее важный концепт должен находиться в середине первой (редко-второй) строки.

Также необходимо определить способ подачи контента (F или Z - шаблон) для передачи данных в систему мониторинга процесса восприятия для последующего совершенствования системы управления контентом. Способ подачи контента определяется при расчете объема контента. При объеме более 300 слов (это примерно одна страница А4 12 шрифтом) [16] и более двух изображений будет использован F-макет [11], и наоборот, Z – макет [12].

В итоге можно представить структуру информационного воздействия продвигаемой продукции, как страницу, состоящую из трех классов, где последовательность представления и обращения реципиента к каждому из них – есть сценарий информационного воздействия. Каждый класс имеет начало координат размещения (x_i, y_i), высоту b_i, ширину a_i, сепараторы (разделители) $\Phi(I_i, I_{i+1})$ и информационные блоки I_i:

$$\Omega_i = \{(x_i, y_i),\ a_i, b_i, \Phi(I_i, I_{i+1}), I_i\}.$$

Каждый информационный блок I_i определяется онтологией, которая состоит из концептов текста (C) и отношений между концептами (R) и значимостью W_i:

$$I_i=\{O_i, W_i\}$$

На основе этих данных можно представить карту контента (Рисунок 12).

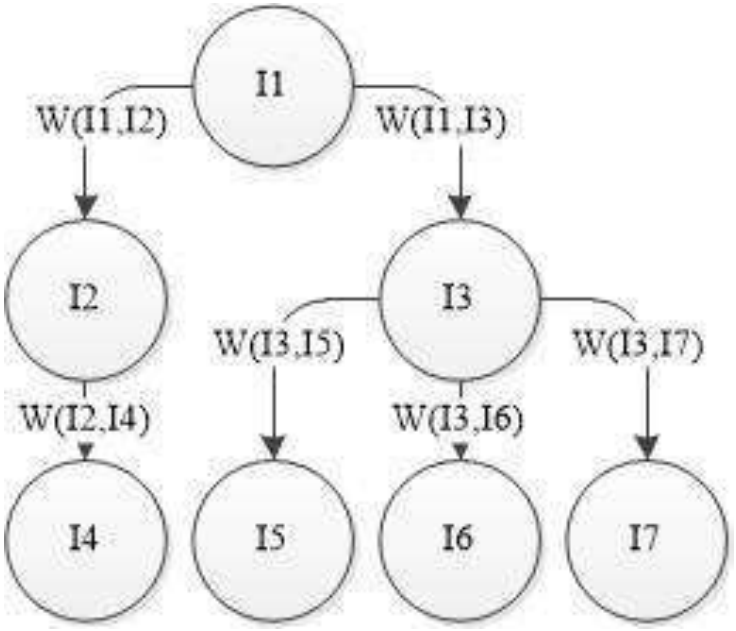


Рисунок 12. Карта контента

После определения координат размещения контента параметры и содержимое информационных блоков отправляются в систему создания и адаптации веб-контента, которая передает содержимое веб-странице системе представления контента. С помощью техники чтения подача контента происходит динамическая, путем движения глаз пользователей (координат), которая зависит от скорости чтения контента пользователем.

Также для индивидуализации подачи контента в скором времени будет разработан подход динамического представления контента, путем перемещения блоков на основе индивидуальной карты контента и техники чтения пользователя.

После размещения контента на Интернет-ресурсе подсистема мониторинга процесса восприятия передает подсистеме адаптации координаты фиксации пользователей для сопоставления их с координатами информационных блоков.

Координаты фиксации, определенные с помощью тепловой карты, они помогают отслеживать реакцию пользователей на определенные изменения на веб-сайте, насколько правильно был определен способ подачи контента (F или Z - шаблон), организация блоков и насколько правильно сделан акцент на главных концептах текста. Оценка происходит с помощью сопоставления точек фиксации с координатами информационных блоков с учетом динамического представления контента.

Чтобы определить место инструмента структуризации в системе управления контентом, необходимо построить концептуальную модель, описав связи с другими модулями системы (Рисунок 13).

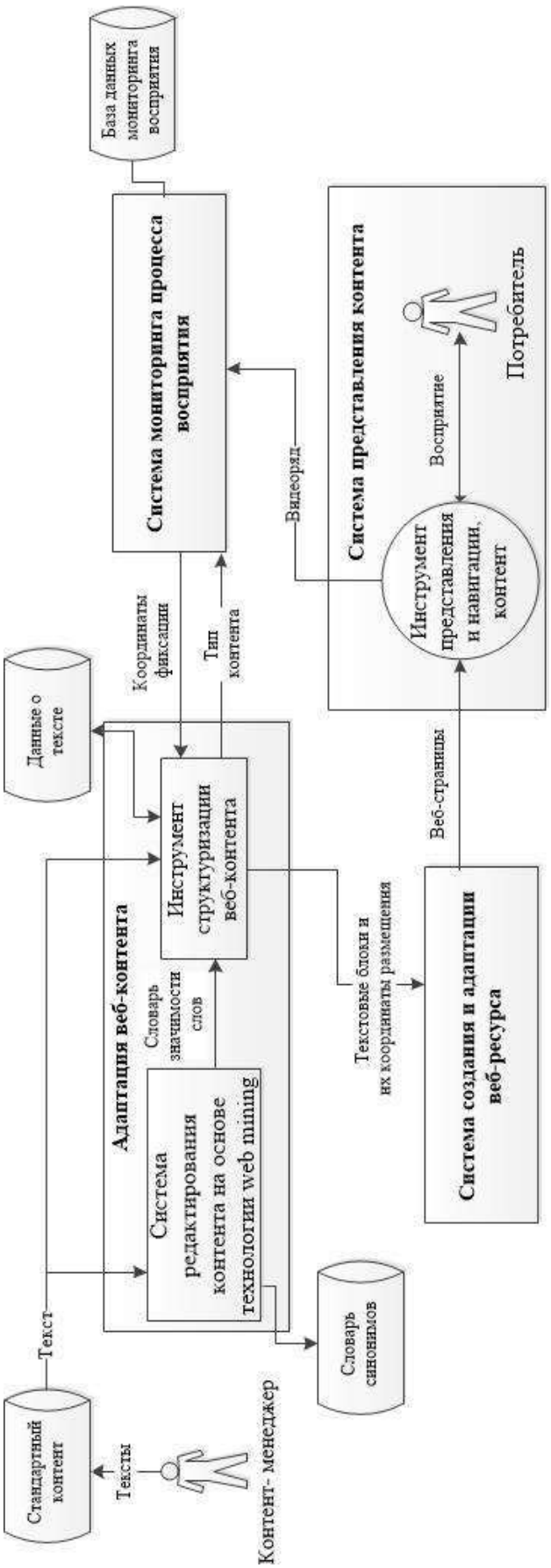


Рисунок 13. Концептуальная модель инструмента структуризации веб-контента

2. Техническое задание

1. Общие сведения

1.1. Полное наименование системы и её условное обозначение

Полное наименование системы: Инструмент структуризации веб-контента.

1.2. Наименование предприятий (объединений) разработчика и заказчика (пользователя) системы и их реквизиты

Наименование разработчика: Кафедра ИТ ИГЭУ им. В.И. Ленина, Гущенкова Александра Игоревна. Юридический адрес: Россия, 153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, д. 34, ауд. 501. Телефон: 8 (915) 816-09-64.

Наименование заказчика: АО «Мосинжпроект»: 101000, Москва, Сверчков пер. д.4/1. Телефон: 26-98-53.

2. Назначение и цели создания (развития) системы

2.1. Назначение системы

Инструмент структуризации веб-контента предназначен для поддержки процесса формирования инновационного контента посредством создания его структуры и в заданной форме представления его пользователю, основанном на онтологическом подходе с помощью семантической значимости слов и тепловой карты контента, с целью обеспечения информационного воздействия на пользователей.

2.2. Цели создания системы

Целями создания инструмента являются:

1. Текст упорядоченный по информационным блокам и организованный в местоположении удобном для восприятия пользователями;
2. Динамически формируемый контент с помощью техники чтения пользователей;
3. Показатели, характеризующие структуризацию веб-контента, основанные на тепловой карте контента.

3. Характеристика объекта информатизации

3.1. Краткие сведения об объекте информатизации или ссылки на документы, содержащие такую информацию

Объектом информатизации является процесс создания контента, предназначенный для осуществления информационного воздействия на пользователей, сбора данных о восприятии контента пользователями и динамического структурирования контента на основе этих данных, путем разбиения текста на информационные блоки по семантической значимости слов, определения расстояния между ними, и путем оценки целесообразности структуризации контента на основе тепловой карты.

4. Требования к системе

4.1. Требования к системе в целом

4.1.1. Требования к структуре и функционированию системы

1. Подсистема структуризации веб-контента

4.1.1.2. Требования к способам и средствам связи для информационного обмена между компонентами системы

Передача данных между серверным приложением и базами данных должна осуществляться посредством протоколов TCP/IP сетевого и транспортного уровня и специализированными протоколами прикладного уровня.

4.1.1.3. Требования к характеристикам взаимосвязей создаваемой системы со смежными системами, требования к ее совместимости, в том числе указания о способах обмена информацией

Инструмент структуризации веб-контента должен взаимодействовать по API с модулем редактирования контента на основе технологии web mining, получая данные о семантической значимости слов, и с модулем мониторинга процесса восприятия контента, получая данные точек фиксации пользователей на основе тепловой карты и передавая тип размещения контента.

4.1.2. Требования к численности и квалификации персонала системы и режиму его работы

4.1.2.1. Требования к численности персонала (пользователей) ИС

Эксплуатация программного комплекса должна осуществляться следующими пользователями:

1. Контент-менеджер: формирование содержимого информационных блоков, их создание и редактирование; 1 человек (Профессиональный стандарт №148 «Специалист по информационным ресурсам»).

2. Дизайнер: разработка мультимедийного контента (изображений, видео, инфографики); 1 человек (Профессиональный стандарт №573 «Графический дизайнер»).

3. Конечный пользователь: просмотр содержимого Интернет-ресурса; неограниченное количество человек.

4. Системный администратор: поддержание работы ЛВС, администрирование веб-сервера, управление базами данных; 1 человек (Профессиональный стандарт №684н «Системный администратор информационно-коммуникационных систем»).

4.1.2.2. Требования к квалификации персонала, порядку его подготовки и контроля знаний и навыков

Каждый пользователь должен владеть уверенными навыками пользования персональных компьютеров, периферийных устройств и работы с интернет-браузерами.

1. Требования к контент-менеджеру: знание языка, на котором формируется содержание Интернет-ресурса; умение формировать текст и выполнять работы по редактуре и корректуре материалов.

2. Требования к дизайнеру: владение графическими редакторами; опыт работы с векторной и растровой графикой; знание современных трендов и технологий в сфере дизайна Интернет-ресурсов.

3. Требования к конечному пользователю: не предъявляются.

4. Требования к системному администратору: знания стека протоколов TCP/IP, принципов работы ЛВС, знание серверных операционных систем (Windows Server), опыт работы с сетевым оборудованием и системами управления базами данных.

4.1.3. Требования к эргономике и технической эстетике

Структура размещения информации и представления этой структуры на Интернет-ресурсе должны соответствовать «ГОСТ Р ИСО 6385-2007. Эргономика» и «ГОСТ Р ИСО 9241-161-2016. Эргономика взаимодействия человек-система. Часть 161. Элементы графического пользовательского интерфейса»:

1. Используемые шрифты и информационные блоки должны быть адаптивными к разным размерам устройств и масштабированию.

2. Максимально удобное соотношение между размерами рабочей области и другими элементами системы.

3. Используемая цветовая гамма, должна обеспечивать возможность долговременного взаимодействия пользователя с Интернет-ресурсом. Использование ярких цветов допускается только для выделения элементов, требующих привлечения внимания пользователя.

4.1.4. Требования к эксплуатации, техническому обслуживанию, ремонту и хранению компонентов системы

Не предъявляются.

4.1.5. Требования к защите информации от несанкционированного доступа

У инструмента структуризации веб-контента можно выделить 2 профиля информационных объектов: производственная, персональная. Они включают: программный код, координаты расположения контента медиа-файлы (изображения, видео, документы word, excel), учетные записи пользователей.

В рамках исследуемого предприятия необходимо определить ряд мер безопасности и защиты информации по следующим направлениям:

1) *Организационные (административные)*

- разработана должностная инструкция в соответствии с кадровым составом предприятия
- произведено обучение сотрудников правилам работы с конфиденциальной информацией;
- осуществлена надежная охрана помещений;
- создана штатная организационная структура по защите ценной информации;
- осуществлено разграничение доступа к информации как один из самых важных элементов в системе комплексной защиты информации.

2) *Правовые*

- каждый из сотрудников подписал соглашение о неразглашении персональных данных согласно закону «О персональных данных» от 27.07.2007 № 152-ФЗ;
- при приеме на работу и раз в год происходит извещение каждого сотрудника о распространении действия закона «Статьи 271-274 Уголовного кодекса Российской Федерации от 13.06.1996 N 63-ФЗ. Глава 28. ПРЕСТУПЛЕНИЯ В СФЕРЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ИНФОРМАЦИИ» в рамках данного предприятия;
- каждый сотрудник подписал документ, удостоверяющего его осведомленность о действии данного закона на территории организации и устанавливающего ответственность за совершение преступлений в сфере компьютерной информации.

3) *Инженерно-технические*

- установлены средства охранно-пожарной сигнализации;
- установлена система контроля доступа в рабочие и серверные помещения (надежные дверные замки).

4) *Аппаратно-программные*

- установлены источники бесперебойного питания для каждого компьютера;
- для каждого компьютера применено резервное копирование данных за счёт подключения внешнего жесткого диска или иного магнитного накопителя;
- реализовано удалённое хранение наиболее ценных и важных массивов данных с помощью облачного хранилища;
- установлен антивирус на каждую рабочую станцию.

4.1.6. Требования к патентной чистоте

Патентная чистота системы должна быть обеспечена в отношении Российской Федерации.

4.1.7. Требования по стандартизации и унификации

Все техническое оборудование должно соответствовать стандартам Российской Федерации и международным стандартам.

4.2. Требования к функциям (задачам), выполняемым системой

4.2.1. Перечень функций, задач или их комплексов, подлежащих информатизации

Таблица 2. Задачи, выполняемые подсистемой структуризации веб-контента

Задача	Выходные данные	Требования к задаче
1. Формирование текстовых блоков	Параметры значимости сформированных текстовых блоков, веса сепараторов (разделителей).	Первоначально определяется онтология всего текста для определения типа контента, чтобы передать эти данные в подсистему мониторинга процесса восприятия для более глубокого анализа понимания текста. Блоки определяются в зависимости от абзацев, выделенных контент-менеджером. По каждому выделенному блоку в тексте строится онтология O= {C, R}. В зависимости от количества концептов, их семантической значимости и отношений между ними определяется значимость блоков текста. При наличии блоков с маленьким объемом текста абзац объединяется с другим в зависимости от количества общих концептов и связей. Затем происходит определение весов сепараторов на основе определенных ранее онтологий. Чем дальше связи между концептами у ближних блоков и меньше количество общих концептов, тем больший вес имеет сепаратор.
2. Определение параметров размещения информационных блоков	Параметры размещения информационных блоков и содержимое информационных блоков.	На основе определенных онтологий блоков и определенных значений: начало координат (103, 270) px (x_i, y_i) шириной 633 px (a_i), высотой 333 px (b_i), которая меняется в зависимости от объема текста (количества подблоков) определяется высота блока и координаты начала следующего блока: x_i-неизменна, $y_{i+1}=y_i+b_i+W(i,$

		i+1), где W(i, i+1) – размер сепаратора (разделителя между блоками).
3. Оценка результатов структуризации	Показатели оценки структуры веб-страницы, показатели восприятия структуры контента пользователями	Оценка результатов процесса восприятия структуры рассчитывается с помощью точек фиксации пользователей, путем сопоставления их с координатами информационных блоков, учитывая их динамическое представление.

4.2.2. Временной регламент реализации каждой функции, задачи (или комплекса задач)

Таблица 3. Временной регламент реализации задач, выполняемых подсистемой структуризации веб-контента

Задача	Временной регламент
1. Формирование текстовых блоков	Выполнение только при создании контента и при адаптации. Выполняется вручную, данные передаются автоматически.
2. Размещение блоков текста	
3. Оценка результатов структуризации	Выполняется при каждом внесении изменений в содержание и структуру контента после каждого прочтения контента пользователем. Выполняется вручную, данные передаются автоматически.

4.3. Требования к видам обеспечения

4.3.1. Требования к математическому обеспечению

В соответствии с пунктом ТЗ 4.1.3 об эргономике, необходимо динамически изменять размеры элементов пользовательского интерфейса, в зависимости от ширины и высоты дисплея используемого устройства. В качестве готовых HTML- и CSS-шаблонов должен использоваться фреймворк Bootstrap 4, позволяющий автоматически менять размеры элементов.

4.3.2. Требования к информационному обеспечению системы

4.3.2.1. К составу, структуре и способам организации данных в системе

Состав входных данных/документов:

1. Текст поступает от контент-менеджера;
2. Значения семантической значимости слов поступают от системы редактирования контента на основе технологии web mining;
3. Параметры фиксации пользователя от модуля мониторинга процесса восприятия контента.

Состав выходных данных:

1. Параметры (координаты) размещения информационных блоков поступают в систему создания и адаптации контента;
2. Содержание информационных блоков поступают в систему создания и адаптации контента.

4.3.2.2. По применению систем управления базами данных

Инструменту структуризации веб-контента необходимо хранить данные о блоках текста (высота, ширина, вес, начало координат размещения…) для их изменения после оценки структуризации.

СУБД должны обеспечивать:

1. Многопользовательский доступ;
2. Резервное копирование;
3. Разграничение прав доступа.

4.3.2.3. К структуре процесса сбора, обработки, передачи данных в системе и представлению данных

Система должна обеспечивать выгрузку данных из смежных подсистем (Таблица 4), с последующей очисткой и структуризацией для дальнейшего хранения в БД и хранилище документов.

Таблица 4. Выгружаемые данные

Подсистема	**Выгружаемые данные в подсистему**	**Выгружаемые данные из подсистемы**
Мониторинг процесса восприятие информации	Тип контента (Json)	Координаты фиксации пользователей, скорость и время представления контента (Json)
Редактирование контента на основе технологии web-mining	-	Семантическая значимость слов (Json)

Адаптации и создания веб-ресурса	Параметры размещения информационных блоков и их содержимое (Json)	-

Тест в формате Microsoft Word выгружается из базы данных стандартных текстов.

Структура процесса сбора данных из смежных систем должна состоять из следующих этапов:

1. Выгрузка данных. Должны выгружаться только требуемые данные, не составляющие коммерческую тайну фирмы.
2. Проверка данных. Должна проводиться проверка данных на соответствие типам данных.
3. Сохранение данных.

4.3.3. Требования к лингвистическому обеспечению

Инструмент должен реализовываться с использованием следующих языков: HTML5, CSS, JavaScript.

Все записи базы данных, текстовые документы, файлы программного кода должны кодироваться согласно стандарту кодировки UTF-8.

4.3.4. Требования к программному обеспечению системы

4.3.4.1. К независимости программных средств от используемых СВТ и операционной среды

Разрабатываемые программные средства должны быть в максимальной степени независимыми от используемых средств вычислительной техники и операционной среды.

Эта независимость должна достигаться за счет:

1. Использования кроссплатформенных систем управления базами данных;
2. Использования кроссплатформенных языков программирования и их интерпретаторов / компиляторов.
3. Использования независимого от физической среды стека сетевых протоколов TCP/IP.

Программные средства должны быть совместимы со средствами вычислительной техники, построенными по архитектуре x86 или x86-64

Так же должна быть обеспечена кроссбраузерность клиентского уровня системы – интерфейс системы должен отображаться и работать во всех современных популярных браузерах идентично.

4.3.4.2. К качеству программных средств

Программное обеспечение должно учитывать надежность технических средств и способствовать повышению надежности выполнения функций системы за счет синтаксического и семантического контроля входной информации, проверки корректности параметров процедур, и других подобных методов.

Для обеспечения возможности модернизации инструмента структуризации веб-контента необходимо применять открытое программное обеспечение.

4.3.5. Требования к техническому обеспечению

4.3.5.1. Требования к видам технических средств, в том числе к видам комплексов технических средств, программно-технических комплексов и других комплектующих изделий, допустимых к использованию в системе

Со стороны как внутренних, так и внешних пользователей требуется устройство текстового ввода, графического вывода и устройство манипуляций. Перечисленные устройства могут быть совмещены в одном аппаратном средстве.

Со стороны сервера требуется

1. Вычислительное устройство. Архитектура процессора должна быть x86 или x86-64.
2. Коммутирующее сетевое устройство, организующее обмен сетевыми пакетами.

4.3.5.2. Требования к функциональным, конструктивным и эксплуатационным характеристикам средств технического обеспечения системы

Требования не предъявляются.

4.3.6. Требования к организационному обеспечению

4.3.6.1. Требования к структуре и функциям подразделений, участвующих в функционировании системы или обеспечивающих эксплуатацию

Задачи по формированию контента, его формы, разработке и совершенствованию сценариев осуществляет контент-менеджер и дизайнер. Разрабатываемый контент не должен противоречить целям и задачам политики информационного воздействия фирмы. Формирование контента должно осуществляться своевременно.

Задачи по сопровождению системы осуществляет аналитик. Аналитик должен своевременно формировать требования к изменениям системы и доносить эту информацию до контент-менеджера и/или системного администратора.

Задачи по развертыванию и обслуживанию системы должен выполнять системный администратор. Системный администратор должен поддерживать систему в работоспособном состоянии.

4.3.6.2. Требования к организации функционирования системы и порядку взаимодействия персонала ИС и персонала объекта информатизации

Перед началом работы с системой персонал должен пройти инструктаж от разработчиков системы, а также пройти процесс авторизации.

Для доступа к управлению системой персонал должен пройти процесс аутентификации.

Дальнейшие действия персонала должны соответствовать поставленной цели и производиться в соответствии с инструкцией.

4.4. «Состав и содержание работ по созданию (развитию) системы»

Состав и содержание работ по созданию АС разрабатывается на основании ГОСТ 34.601-90 (с изменениями).

Работы по созданию (развитию) системы выполняются в три этапа:

1. Техническое проектирование (срок)
   - 1.1. Разработка проектных решений по системе и ее частям
   - 1.2. Разработка документации
   - 1.3. Разработка заданий на проектирование в смежных частях проекта объекта автоматизации
2. Рабочее проектирование (срок)
   - 2.1. Разработка рабочей документации на систему и ее части
   - 2.2. Разработка или адаптация программ
3. Ввод в действие (срок)
   - 3.1. Подготовка объекта автоматизации к вводу ИС в действие
   - 3.2. Подготовка персонала
   - 3.3. Комплектация ИС поставляемая изделиями (программными и техническими средствами, программно-техническими комплексами, информационными изделиями)
   - 3.4. Строительно-монтажные работы
   - 3.5. Проведение предварительных испытаний

2.8. «Порядок контроля и приемки системы»

Состав, объем и методы предварительных испытаний системы определяются в соответствии с документом ГОСТ 34.603 «Программа и методика испытаний», разрабатываемым на стадии «Рабочая документация».

Таблица 5. Состав, объем и методы предварительных испытаний системы

Участники испытаний	**Место и срок проведения**	**Порядок согласования документации**	**Статус приемочной комиссии**
Организации Заказчика и Разработчика	На территории заказчика	Проведение предварительных испытаний. Фиксирование выявленных неполадок в Протоколе испытаний. Устранение выявленных неполадок. Проверка устранения выявленных неполадок. Принятие решения о возможности передачи АИС в опытную эксплуатацию. Составление и подписание Акта приёмки АИС в опытную эксплуатацию.	Экспертная группа

2.9. «Требования к составу и содержанию работ по подготовке объекта автоматизации к вводу системы в действие»

В организации Заказчика должен быть проведен комплекс мероприятий определенный в соответствии с ГОСТ 34.602.

1) Технические мероприятия

− Силами Заказчика в срок до начала этапа «Проведение предварительных испытаний» должны быть выполнены следующие работы: осуществлена подготовка помещения для размещения АТК системы в соответствии с требованиями, приведенными в техническом задании; осуществлена закупка и установка необходимого АТК; организовано необходимое сетевое взаимодействие.

2) Организационные мероприятия

Силами Заказчика в срок до начала этапа работ «Проведение предварительных испытаний» должны быть решены организационные вопросы по взаимодействию с системами-источниками данных. К данным организационным вопросам относятся: организация доступа к базам данных источников; определение регламента информирования об изменениях структур систем-источников; выделение ответственных специалистов со стороны Заказчика.

3) Изменения в информационном обеспечении

Для организации информационного обеспечения системы должен быть разработан и утвержден регламент подготовки и публикации данных из систем-источников.

2.10. «Требования к документированию»

Таблица 6. Требования к документированию

Этап	Документ
Техническое проектирование	· Пояснительная записка к техническому проекту (РД 50-34.698, п. 2.2) · Схема функциональной структуры системы (РД 50-34.698-90, п. 2.3) · Описание организационной структуры (РД 50-34.698-90 п. 3.1) · Общее описание системы (РД 50-34.698-90 п. 2.11) · Описание автоматизируемых функций, постановка задачи и алгоритм функции (РД 50-34.698-90 п. 2.5, п. 2.6, п. 7.1, соответственно) · Описание информационного обеспечения системы (РД 50-34.698-90, п. 5.3) · Описание организации информационной базы (РД 50-34.698-90, п. 5.5, п. 5.12) · Описание систем классификации и кодирования (РД 50-34.698-90, п. 5.6) · Описание комплекса технических средств (ГОСТ 34.201, п. 2.5 ГОСТ 34.003-90, РД 50-34.698-90 п. 4.1, п. 4.2)
Рабочее проектирование	· Программа и методика испытаний (РД 50-34.698 п. 2.14) · Руководство пользователя (РД 50-34.698-90 п. 3.4) · Руководство по техническому обслуживанию (ГОСТ 34.201)
Ввод в действие	· Акт завершения работ (РД 50-34.698) · Протокол испытаний (РД 50-34.698-90, приложение 2) · Протокол согласования (РД 50-34.698) · Организационно-распорядительной документации (РД 50-34.698) · Акт внедрения (РД 50-34.698-90, приложение 2)

Вся документация должна быть подготовлена и передана как в печатном, так и в электронном виде (в формате Microsoft Word).

5. Источники разработки

1. РД 50-34.698-90 Автоматизированные системы. Требования к содержанию документов

2. ГОСТ 2.105-95 Общие требования к текстовым документам

3. ГОСТ 19.701-90 Схемы алгоритмов, программ, данных и систем. Обозначения условные и правила выполнения

4. ГОСТ 24.601-86 Автоматизированные системы. Стадии создания

5. ГОСТ 34.321-96 Информационные технологии. Система стандартов по базам данных. Эталонная модель управления данными

6. ГОСТ Р ИСО 6385-2007. Эргономика. Применение эргономических принципов при проектировании производственных систем.

7. ГОСТ Р ИСО 9241-161-2016. Эргономика взаимодействия человек-система. Часть 161. Элементы графического пользовательского интерфейса.

8. ГОСТ 28806-90 КАЧЕСТВО ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ. Термины и определения.

9. ГОСТ Р ИСО 7498 Информационная технология. Взаимосвязь открытых систем. Базовая эталонная модель.

3. ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ИНСТРМЕНТА

Необходимо внести изменения (ΔSu− инструмент структуризации веб-контента, базирующегося на повышении его ценности при восприятии с помощью подразделения семантически значимого контента на блоки, организованные по степени важности, и оценки структуризации контента с помощью точек фиксации пользователей) в существующей информационной системе, которые приводят к изменению качества всех подсистем (ΔQ) с помощью инновационных решений (Δinf= {∂_1 – технологии представления веб-контента, обеспечивающие круглосуточный доступ к информации об инновационных продуктах}).

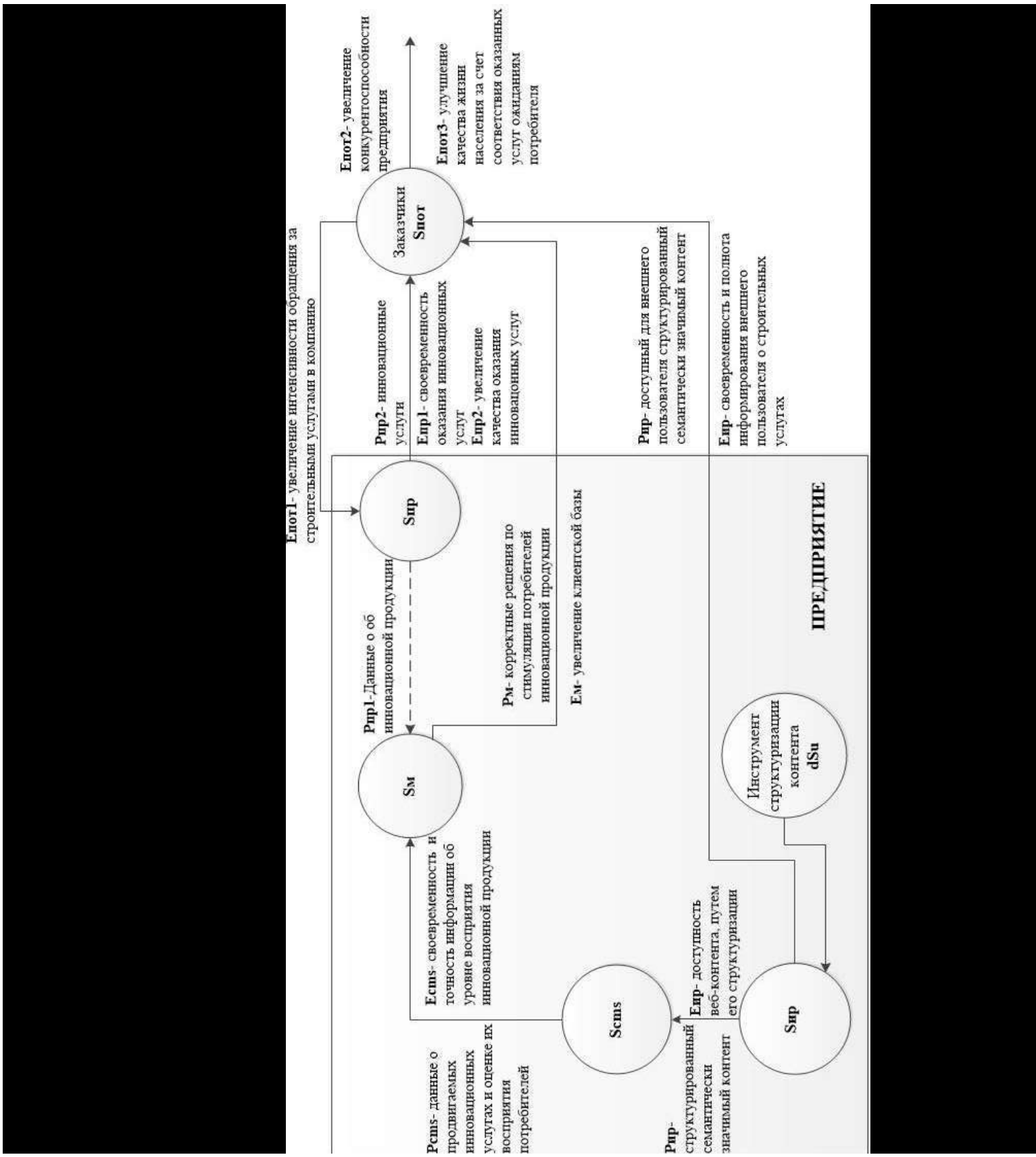


Рисунок 1. Схема обоснования совершенствования информационной системы

1.1. Определение показателей информационной системы и возникающих при этом эффектов на уровне INTO

При и после внедрения инструмента структуризации веб-контента ΔSu, приводящие к эффектам E_{into}, благодаря изменениям значений характеристик этой системы k_{into} (Рис. 2).



Рисунок 2. Уровень INTO

Таблица 7. Показатели уровня into

Показатель	**Шкала** / **Метод**	**$K_{до}$**	**$K_{после}$**
K_{into1} - Временной показатель, отражающий время организации веб-контента (значительная часть организации веб- контента становится автоматизированной, что ускоряет процесс более чем в 1,5 раза). В договоре у контент-менеджера под организацию веб-контента выделено до 30 минут = 0,5 ч времени.	Интервалов, Абсолютное измерение	Организация веб-контента контент-менеджером занимала 43 минут= 0,72ч,	Организация веб-контента контент-менеджером занимает 6 минут=0,1ч
K_{into2} - Показатель структурированности веб-контента, путем организации блоков текста по их значимости Оценка структурированности текста осуществляется с помощью степени упорядоченности информационных блоков по их значимости (весу) на основе карты контента (частота несоответствия значения блока	Абсолютная [0,1], Абсолютное измерение	Степень упорядоченности весовых значений информационных блоков текста до его структуризации равна 0,1	Степень упорядоченности весовых значений информационных блоков текста после его структуризации равна 0,9

Показатель	Шкала / Метод	$K_{до}$	$K_{после}$
последовательности).			

Таблица 8. Эффекты уровня into

Эффект	Значение эффекта
Einto1 - Своевременность информационного обеспечения пользователей системы	Расчет вероятности достижения цели **Einto1до**=0,3
	Einto1после= 0,9
	Δ**Einto1**=0,9-0,5= 0,4
Einto2 – Эргономичность представления информации (контента) об инновационных продуктах для принятия решений потребителями	**Einto2до**=0,1
	Einto2после=0,9
	Δ**Einto2**=0,9-0,1=**0,8**

1.2. Определение показателей информационной системы и возникающих при этом эффектов на уровне IN

Эффекты уровня into ведут к изменению организации на уровне in (Рис. 3).

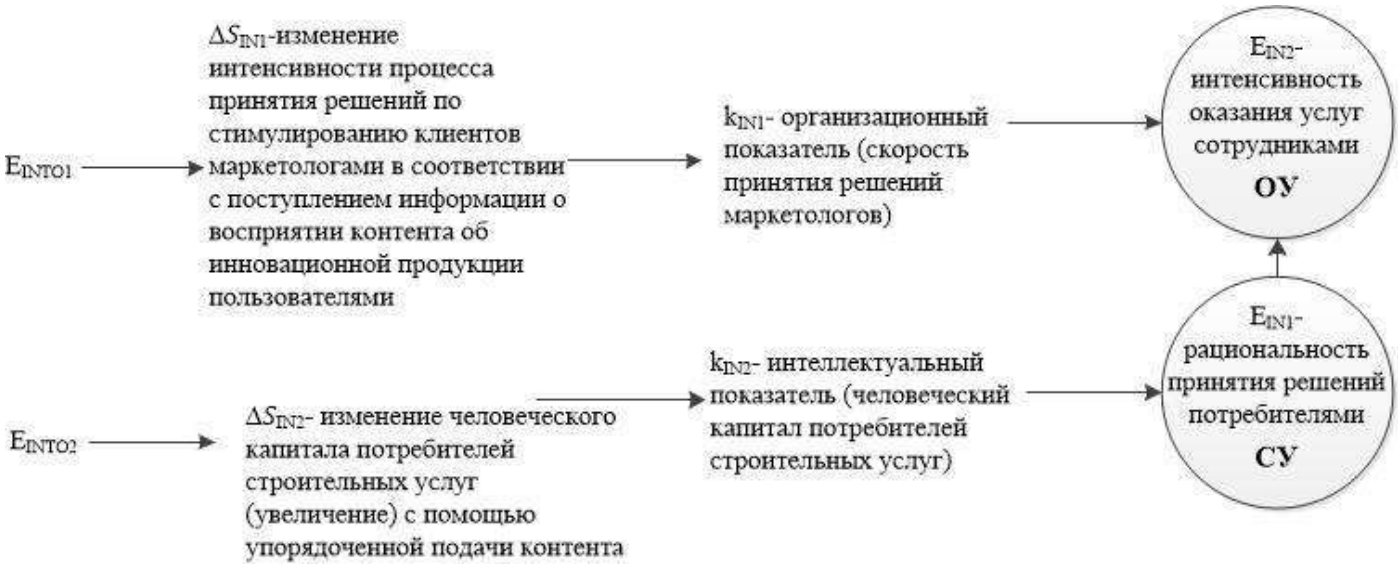


Рисунок 3. Уровень IN

Рациональность принятия решений от информационного воздействия потребителями (объект управления) за счет увеличения человеческого капитала приводит к увеличению интенсивности оказания услуг.

Таблица 9. Показатели уровня in

Показатель	**Шкала** **Метод**	**$K_{до}$**	**$K_{после}$**
K_{in1} - Организационный показатель. Скорость принятия решений производителей маркетинговых услуг увеличивается в соответствии с поступлением информации об оценке восприятия контента об инновационной продукции пользователями (время). Время на принятие корректного решения ЛПР составляет около 4 часов, включая сбор необходимой информации, при 8-ми часовом рабочем дне.	Абсолютная [0,1], Абсолютное измерение	Время на принятие корректного решения ЛПР составляет около 7 часов= 0,875 дня при 8ми часовом рабочем дне. Организационный показатель равен 0,125	Время на принятие корректного решения ЛПР составляет около 4 часов= 0,5 дня при 8ми часовом рабочем дне. Все данные, на основе которых ЛПР принимает решение, доступны сразу. Организационный показатель равен 0,5.
K_{in2} - Интеллектуальный показатель отражает степень человеческого капитала потребителей. Его увеличение происходит за счет приобретения знаний об инновационной продукции с помощью упорядоченной подачи контента.	Абсолютная [0..1], Экспертные измерения: (0-нет понимания; 0,3-низкий уровень; 0,5-удовлетворительный уровень; 0,8-достаточный уровень; 1-абсолютный уровень знаний)	При низком уровне понимания 0,3 о предстоящих приобретениях услуг вероятность покупки продукции будет стремиться к нулю	После воздействия на пользователей с помощью упорядоченного контента о продукте вероятность покупки товара будет стремиться к единице 0,8, необходимо учесть, что покупатель может понять, что услуга ему не нужна

Таблица 10. Эффекты уровня in

Эффект	**Значение эффекта**
Ein1 –	**Ein1до**=0,5

Эффект	Значение эффекта
Рациональность принятия решений потребителями	**Ein1после**=1
	∆**Ein1**=1-0,5=**0,5**
Einto2 – Интенсивность оказания услуг сорудниками	**Ein2до**=0,125
	Ein2после=0,5
	∆**Ein1**=0,5-0,125=**0,375**

1.3. Определение показателей информационной системы и возникающих при этом эффектов на уровне FOR

- Эффекты уровня in ведут к изменениям на уровне for (Рис. 4).
-



Рисунок 4. Уровень FOR

Таблица 11. Показатели уровня for

Показатель	Шкала / Метод	До	После
K_{for1} – показатель надежности, отражающий качество предоставляемых услуг (вероятность отказа) Определяется вероятностью отказа товара за год Q(t)= 1- P(t).	Отношений, Абсолютное измерение	Показатель вероятность отказа услуги по демонтажу за год времени равен 0,5	Показатель вероятность отказа услуги по демонтажу за год времени равен 1
K_{for2} - Показатель релевантности предоставляемых услуг (соответствие продукции требованиям потребителей)	Отношений, Абсолютное измерение (количество соответствий пунктов требований с результатом (продуктом))	Соответствие 13 из 21 (0,6) $K_{до}$=0,6	Соответствие 20 из 21 (0,95) $K_{после}$=0,95

Таблица 12. Эффекты уровня for

Эффект	Значение эффекта
Efor2 – Увеличение качества жизни населения за счет соответствия качественных оказываемых услуг ожиданиям потребителя	**Efor2до**=0,55
	Efor2после=0,975
	ΔEfor2=0,975-0,55=0,425
Efor1 – Увеличение конкурентоспособности предприятия	**Efor1до**=0,5
	Efor1после=0,9
	ΔEfor1=0,9-0,5=0,4

1.4.Расчет затрат

1.4.1. Уровень Into

При создании, внедрении и эксплуатации системы необходимо учитывать затраты $З_{ис}$ на трех уровнях $З_{into}$, $З_{in}$ и $З_{for}$. Для этого воспользуемся следующей формулой:

$$З_{ис} = З_{into} + З_{in} + З_{for} \quad (1)$$

$З_{into}$- затраты на разработку и ввод системы в организацию, а также на ее последующую эксплуатацию и обслуживание:

$$З_{into} = (З_{единовр}/t) + З_{тек} \quad (2)$$

– $З_{единовр}$ – затраты на оплату труда сотрудников, на техническое и программное обеспечения. t – целесообразное время использование системы (3 года).

$$З_{единовр} = З_{тех}+З_{прог}+З_{труд}+З_{док}+З_{ком} \quad (3)$$

При внедрении инструмента структуризации контента затраты на техническое и программное обеспечение ($З_{тех}$, $З_{прог}$) будут равны 0, так как будут использоваться уже существующие в организациях компьютеры и предустановленные на них операционные системы и веб-браузеры. Проектирование инструмента структуризации веб-контента является каноническим с использованием бесплатных типовых решений, разработанных по стандартам открытого программного обеспечения.

В затраты ($З_{док}$) на печать документов будет входить стоимость упаковки бумаги 430 руб. и стоимость картриджа 1 290 руб., принтер и сканер уже имеются в организации.

411

$З_{ком}$ на командировки к заказчикам составляют 1 320 руб. одна поездка по тарифу туда-обратно на ласточке, необходимо совершить 3 поездки. Также стоимость передвижения по городу 40 руб/поездка, за одну командировку будет совершено 4 поездки, потрачено 160 руб. Затраты на 3 поездки будут равны 4 440 руб.

Подсчитаем затраты на оплату труда ($З_{труд}$) (Табл.13) в соответствии с «ОСТ 4.071.030 СОЗДАНИЕ СИСТЕМЫ. НОРМАТИВЫ ТРУДОЁМКОСТИ» и открытым источником со средней заработной платой ИТ-специалистов по Москве «https://wadline.ru/salary/moscow». Будем считать, что в организации принят 8-часовой рабочий день. В организации уже имеется системный администратор контент-контент, следовательно, не требуется нанимать дополнительных сотрудников. Необходимо увеличить стоимость заработной платы, имеющихся сотрудников в текущих затратах.

Таблица 13. Затраты на оплату труда

Специалист	**Трудовые затраты, час**	**Средняя ЗП в месяц, рублей**	**Стоимость труда в час, рублей**	**Итоговая стоимость труда, рублей**
Веб-разработчик	164	96 000	600	98 400
Аналитик	180	105 000	656,25	118 125
Тестировщик	86	75 000	468,75	40 312
				256 837

При определении затрат на заработную плату необходимо учитывать те налоги, которые предприятие платит государству:

1. Пенсионный фонд - 22%;
2. Фонд обязательного медицинского страхования - 5,1%;
3. Фонд социального страхования - 2,9%;
4. Страховой взнос на обязательное социальное страхование от несчастных случаев – 2%.

Рассчитаем, какую сумму придется потратить на налоги, 256 837* 0.32 = 82 187,8 руб.

$З_{единовр}$ = 0 +0 +4 440 + (430 + 1 290) +(256 837+ 82 187,8) = 345 144,8 руб.

Произведем расчет текущих затрат ($З_{тек}$) (Таблица 14).

Таблица 14. Текущие затраты

Затраты	**Стоимость,**	**Итого**

	месяц	
Электричество	3 182,4+5 657,6	106 080
Интернет	5 000	60 000
Телефонная связь	3 940	47 280
Системный администратор	14 400+4 608(налоги)	224 640
Контент-менеджер	8 000+ 2 560(налоги)	124 800
		562 800

$З_{элект}$ для эксплуатации системы необходимо обеспечить электроэнергией серверное и коммуникационное оборудование. При потреблении электроэнергии блоком питания сервера 500 Ватт/час, а стоимость электроэнергии 4,42 рублей за 1 кВатт/час, $З_{элект1}$ на использование серверного оборудования составят 3 182,4 руб/мес. Для коммуникационного оборудования с потреблением блоком питания 400 Ватт/час, который будет функционировать 8-часовой рабочий день, $З_{элект2}$ составят 5 657, 6 руб/мес.

$З_{инт}$ на использование подключения к сети Интернет составляют 5 000 руб/мес.

$З_{тел}$ на использование корпоративной связи составляют 3 940 руб/мес (оператор-Билайн).

Подсчитаем затраты на дополнительную оплату труда ($З_{труд}$) в соответствии с «ОСТ 4.071.030 СОЗДАНИЕ СИСТЕМЫ. НОРМАТИВЫ ТРУДОЁМКОСТИ» и открытым источником со средней заработной платой ИТ-специалистов по Москве «https://wadline.ru/salary/moscow». Дополнительные обязанности системного администратора по обслуживанию проектируемой системы обойдутся в +90 руб/час при 8-ми часовом рабочем дне и составят 14 400 руб/месяц. Дополнительные обязанности контент-менеджера +50 руб/час и составят 8 000 руб/месяц. Плюс налог 6 720 руб/месяц.

− Подсчитаем затраты за год:

$З_{текущ}$= $З_{элект}$ + $З_{инт}$ +$З_{тел}$ + $З_{труд}$ = (3 182,4+ 5 657,6 + 5 000+ 3940+14 400+4 608+8 000+ 2 560) *12 = 568 176 рублей.

Затраты на разработку и ввод системы в организацию, а также на ее последующую эксплуатацию и обслуживание составляют:

$З_{into}$=($З_{единовр}$\t) +$З_{тек}$= 345 144,8\3 + 568 176 = 683 224,3 рублей.

Затраты на уровне into до внедрения инструмента.

При эксплуатации системы работники имеют неполную рабочую ставку, им достаточно часа в день для проверки работоспособности системы и актуализации контента. Таким образом, каждый месяц работники получают 0,2 от их месячной зарплаты. Затраты на электричество, интернет и связь были такими же.

Таблица 15. Затраты ДО

Затраты	**Стоимость, месяц**
Системный администратор	0,2*14 400+0,2*14 400*0,32(налоги)
Контент-менеджер	0,2*8 000+ 0,2*8 000*0,32(налоги)
Электричество	(3 182,4 +5 657, 6)=8 840
Интернет	5 000
Телефон	3 940

$З'_{into}$=(8 840+3 801,6+2112+5 000+3 940)*12 =284323,2 рублей

1.4.2. Уровень IN

В затратах на уровне IN ($З_{in}$) необходимо учитывать стоимость обучения сотрудников. Программа обучения одного системного администратора и двух контент-менеджеров составляет по 3 часов каждого. Затраты на 1 час обучения сотрудников составляют 290 рублей.

Итого:

$З_{in}$= (1*3+2*3) * 290= 2 610 рублей.

1.4.3. Уровень FOR

Затраты на уровне FOR ($З_{for}$) направлены на маркетинговые исследования, нацеленные на повышение качества предоставляемых услуг, и продвижение инновационных услуг.

$$З_{for} = З_{марк} + З_{инн} \quad (4)$$

Для расчета затрат на маркетинговые исследования необходимо учитывать заработную плату специалиста, расходы на интернет и связь, затраты на услуги сторонних организаций.

Заработная плата специалиста маркетингового отдела составляет 70 000 руб/мес в соответствии с открытым источником со средней заработной платой специалистов по Москве «https://wadline.ru/salary/moscow». Необходимо увеличить ставку на 5,5 процентов

при добавлении новых обязанностей специалисту. Расходы на интернет и связь учтены в затратах на уровне INTO, так как подключен единый для всей организации пакет интернет-услуг и услуг связи. Рассчитать затраты на затраты услуги сторонних организаций невозможно, обозначим их X (они могут и не потребоваться).

$З_{марк}$= 70 000*0,055+ X= 3 850+ X рублей.

Затраты на продвижение инновационных услуг ($З_{инн}$) равны затратам на уровне INTO, поскольку одной из основных задач инструмента структуризации веб-контента является продвижение, данные затраты уже учтены.

Итого: при создании, внедрении и эксплуатации системы были учтены затраты $З_{ис}$ на трех уровнях $З_{into}$, $З_{in}$ и $З_{for}$:

$З_{ис}= З_{into} + З_{in} + З_{for}$= 683 224,3+ 2 610 + 3 850+ X= 689 684,3 + X рублей.

$З_{for}$ =3 850+ X рублей.

Расчет эффективности

Условие обоснования совершенствования системы информационного воздействия имеет следующий вид:

$$\Delta Э_{into1} = Einto1после * Зinto1до - Einto1до * Зinto1после$$

$$= 0{,}9 * 284\,323{,}2 - 0{,}3 * 683\,224{,}3 \approx 50\,923{,}6 > 0,$$

$$\Delta Э_{into2} = 0{,}9 * 284\,323{,}2 - 0{,}1 * 683\,224{,}3 \approx 187\,568{,}5 > 0$$

$$\Delta Э_{in1} = Ein1после * Зin1до - Ein1до * Зin1после = 1 * У - 0{,}5 * (У + 2\,160)$$

$$\Delta Э_{in2} = 0{,}5 * У - 0{,}125 * (У + 2\,160)$$

Определить $З_{in}$ в числовом выражении не представляется возможным, но $\Delta E_{in1} > 0$ и $\Delta E_{in2} > 0$, поэтому $\Delta Э_{in1} > 0$ и $\Delta Э_{in2} > 0$.

Для оценки $\Delta Э_{for}$ необходимо провести экономико-социологические исследования.

Таким образом, $\Delta Э_{into} > 0$ и $\Delta Э_{in} > 0$ – это говорит о том, что совершенствование системы информационного воздействия имеет положительный эффект.

4. Техно-рабочее проектирование

4.1. Решения по функциональному обеспечению

В результате разработки требований к разрабатываемому инструменту, а также разработки концептуальной модели системы, была выделена одна подсистема: подсистема структуризации веб-контента (Рисунок 14).

Инструмент структуризации веб-контента на вход получает текст, созданный контент менеджером, семантическую важность слов, поступающую из системы редактирования контента на основе web-mining, координаты точек фиксации пользователей и параметры подачи динамического контента после размещения контента на веб-ресурс от системы мониторинга процесса восприятия. На выходе отправляет координаты и параметры информационных блоков и их содержимое в систему создания и адаптации веб-ресурса.

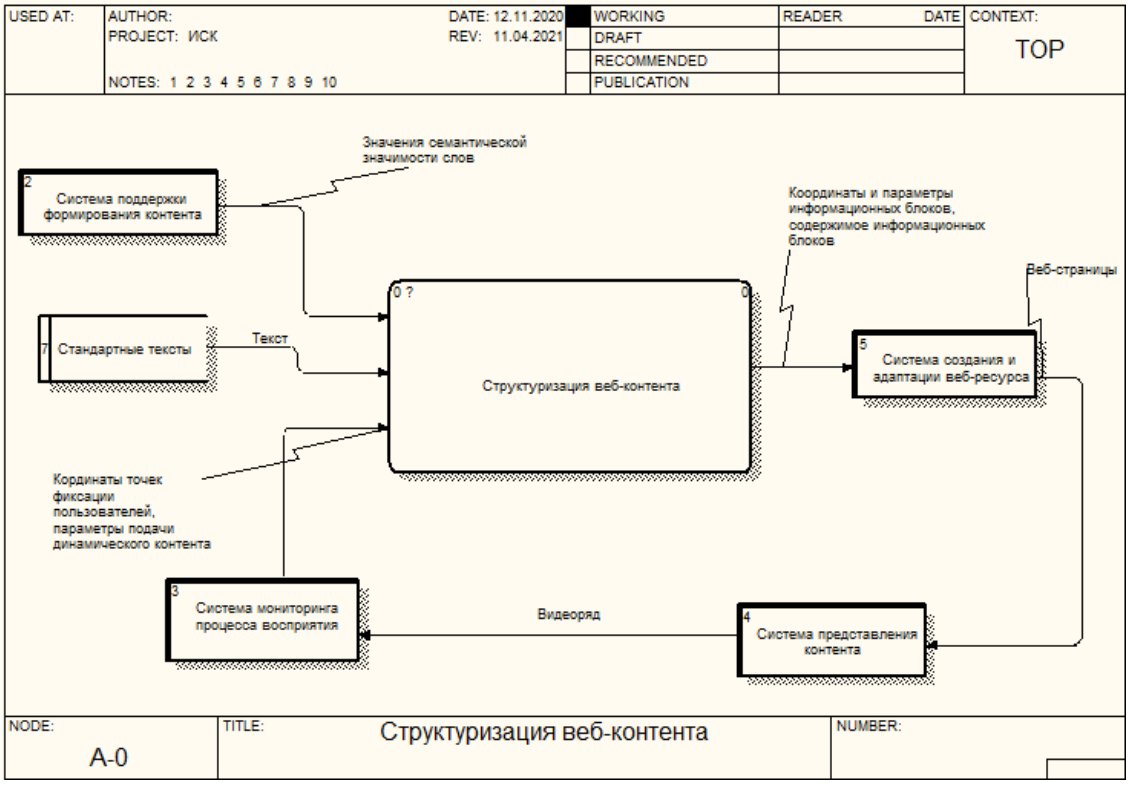


Рисунок 14. Диаграмма DFD: контекстная диаграмма информационного обеспечения подсистемы структуризации веб-контента

Данная подсистема решает следующие задачи (Рисунок 15):

F_1 – Формирование текстовых блоков;

F_2 – Определение параметров размещения информационных блоков;

F_3 – Анализ и контроль результатов структуризации.

В перспективах, после размещения контента на Интернет-ресурс, в процессе восприятия пользователем контента подстроиться под его понимание на основе параметров, определяемых системой мониторинга процесса восприятия, и на основе этих данных и значимости информационных блоков в процессе восприятия динамически их перемещать.

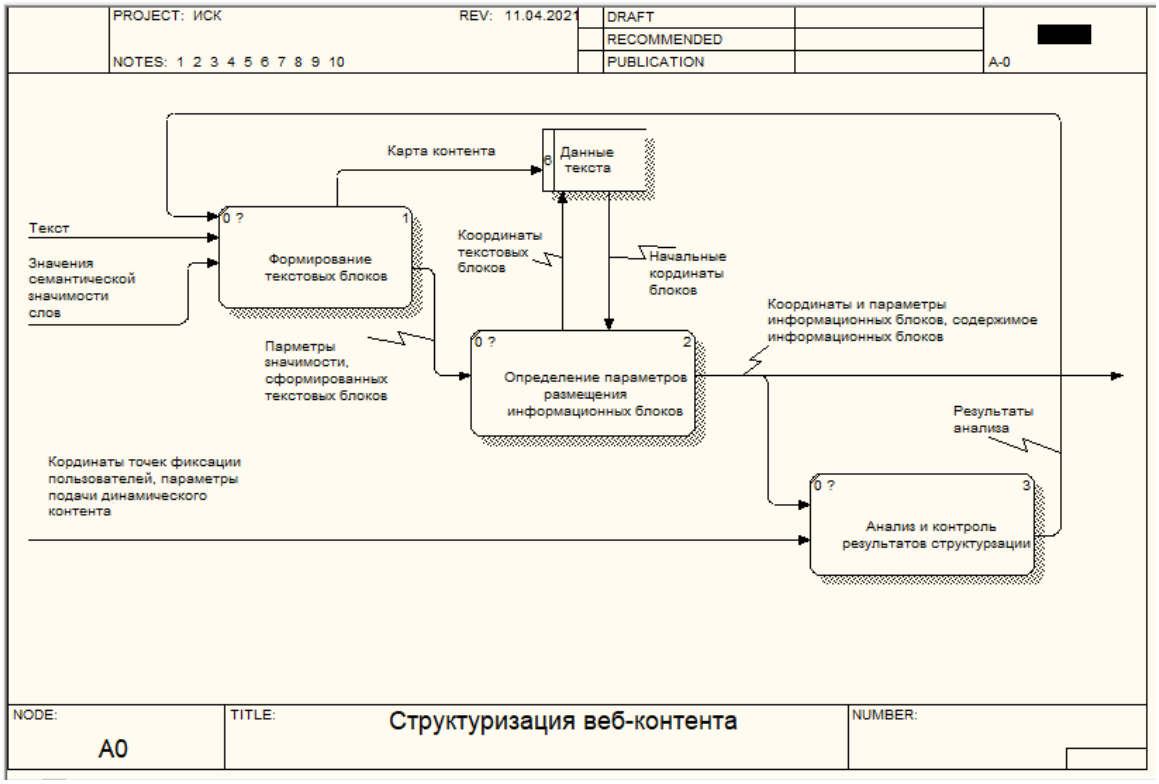


Рисунок 15. Диаграмма DFD: контекстная диаграмма декомпозиции информационного обеспечения подсистемы структуризации веб-контента

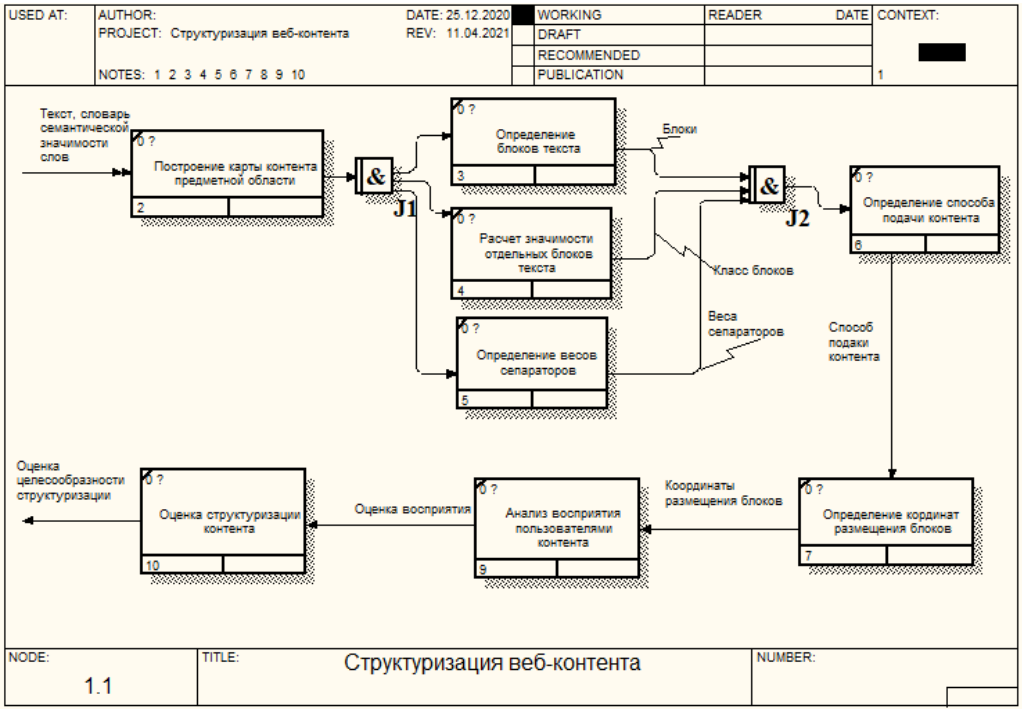


Рисунок 15. Сценарий работы подсистемы «Структуризации веб-контента»

4.2. Решения по математическому обеспечению

Задача «Формирование текстовых блоков» состоит из следующих подзадач:

$F_{1.1}$ – Построение онтологии предметной области;

$F_{1.2}$ – Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста;

$F_{1.3}$ – Определение весов сепараторов.

1) Подзадача $F_{1.1}$

На основе значений семантической значимости слов из подсистемы редактирования контента на основе web-mining строится карта контента на основе онтологии предметной области O= {C, R}, где O – онтология, C – совокупность концептов предметной области, R – совокупность отношений между ними. Онтология всего текста строится, чтобы впоследствии определить тип текста для передачи типа в систему мониторинга процесса восприятия контента для более точной оценки восприятия пользователями текста.

Постановка задачи «$F_{1.1}$ – Построение карты контента предметной области»

Данная задача направлена на построение онтологии предметной области на основе значений семантической значимости слов.

Формализовано это выглядит следующим образом:

Рассмотрим множество $Text_i = \{C_i, R_i\}$, где {C, R} = O, O – онтология, C – совокупности концептов текста, R – совокупности отношений между ними.

Отношения рассчитываются по формуле: $R_{(Cy,Cy+1)}=|[Z]_{Cy}-[Z]_{Cy+1}|$, где Z – значимость концепта предметной области, соответствующая значению семантической значимости слов в словаре, поступающего из системы редактирования контента на основе web-mining.

Метод: бинарная математическая операция – вычитание.

Вход: текстовый в формате json, слова и данные семантической значимости слов Z_i в формате json.

Выход: карта контента: C_i - концепты, $R_{i,j}$ – отношения между концептами.

Функция «Построение карты контента предметной области» выполняется автоматически, поэтому требует алгоритм выполнения. Необходимо в цикле обойти и сопоставить все слова со значимостью из системы редактирования контента на основе web-mining и существующие слова текста и совпадающие слова с их значимостью записать в класс концептов предметной области. Для определения отношения между концептами необходимо пройти по всем выделенных концептам предметной области и рассчитать отношение, как разность между значениями значимости концептов.

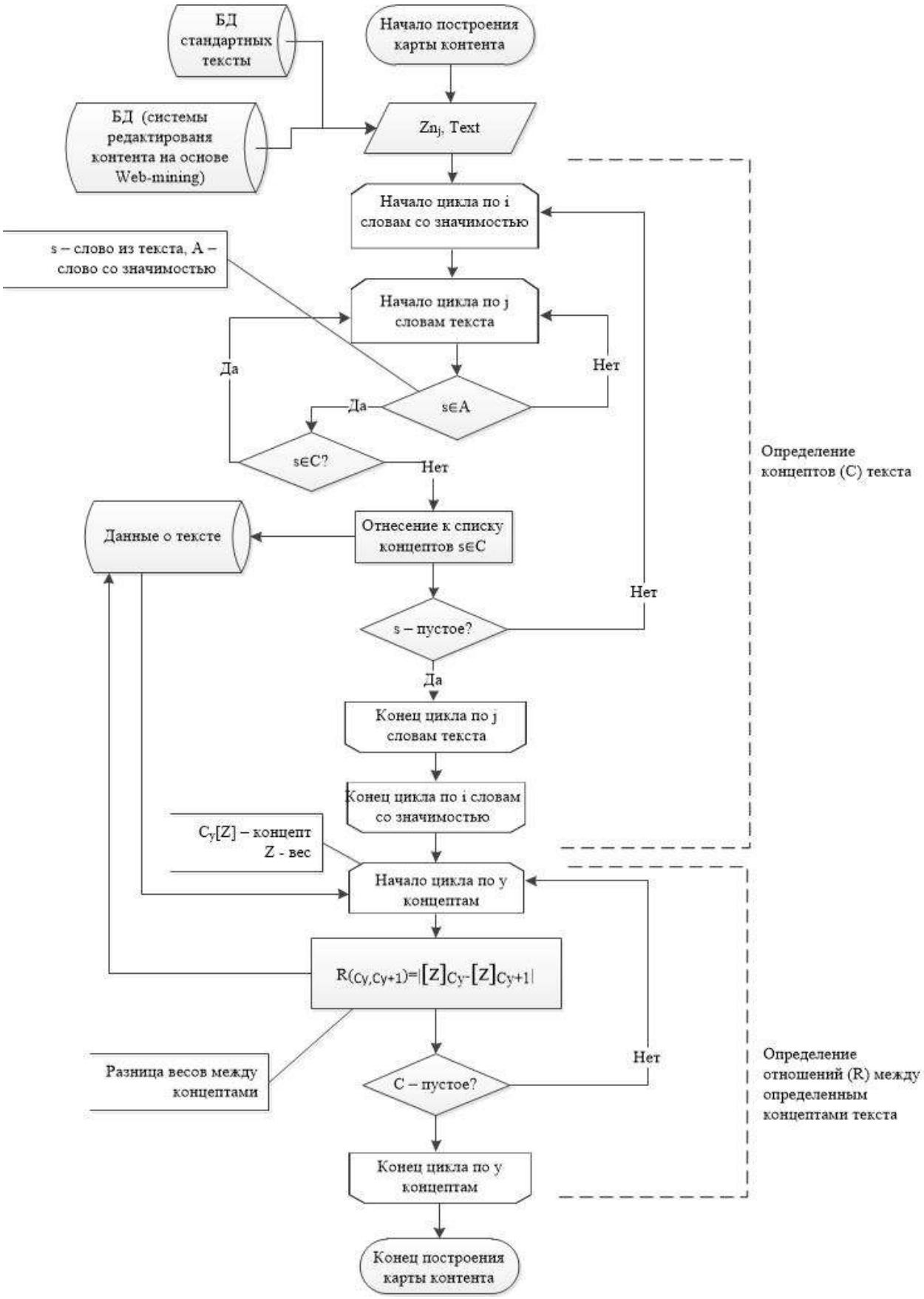


Рисунок 16. Алгоритм задачи «Построение карты контента предметной области»

2) Подзадача $F_{1.2}$

Выделенные контент-менеджером абзацы берутся за основу для определения первоначальных разделителей в тексте (сепараторов). По каждому выделенному блоку в тексте строится онтология, в первую очередь определяются концепты (C) и отношения между ними (R). В зависимости от количества концептов (C) и их уровня семантической значимости, а также отношений (R) между ними определяется значимость отдельных блоков текста.

Постановка задачи «$F_{1.2}$ – «Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста»

Данная задача направлена на определение отдельных блоков текста и определение их значимости с помощью определения онтологии каждого блока текста.

Формализовано это выглядит следующим образом:

Существует множество I= {I_1, I_2, I_n} информационных блоков, выделенных в тексте (Text) с помощью обнаружения абзацев, где I_i= {C, R}, где {C, R} = O, O – онтология, C – совокупность концептов, которая необходима для расчета c = ∑ Ci количества концептов в блоке и R – совокупность отношений между концептами, для расчета r = Rmax-Rmin где Rmax – максимальное значение отношения в блоке, Rmin – минимальное значение отношения в блоке.

Эти значения необходимы для расчета значимости информационного блока Zn, с помощью присвоения блоку класса **Ω**.

Существуют три класса блоков **Ω**= {Ω_1, Ω_2, Ω_3}, где Ω_1 – Блок «Самая главная информация»; Ω_2 – Блок «Важные детали»; Ω_3 – Блок «Информация второго плана».

Для отнесения блока к классу необходимо рассчитать евклидово расстояние $d_n = \sqrt{(Cj - Ci) + (Kj - Ki)}$, **где** Cj,Kj-значения из предыдущих успешных структуризацией текста, Ci,Ki - значения количества концептов и разность между набольшим и наименьшим отношением концептов в блоке.

На основе значений d рассчитывается количество голосов $v = \frac{1}{d1} + \frac{1}{d2}$ для отнесения к определенному классу **Ω** информационного блока с помощью их сравнения.

Метод: определение значимости информационных блоков методом к-ближайших соседей, математическая операция сложения и вычитание, и возведение в степень, операция сравнения.

Вход: Текстовый массив в формате json, слова и данные семантической значимости слов Zn_i в формате json, **Ω**i – значение классов информационных блоков.

Выход: Ii – информационные блоки и их класс **Ω**(Ii).

Функция «Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста» выполняется автоматически, поэтому требует алгоритм выполнения. Сначала необходимо в цикле обойти все символы текста и найти конец абзаца для определения конца информационного блока. Затем определить онтологии каждого выделенного информационного блока по представленному выше алгоритму.

После чего необходимо в цикле обойти все информационные блоки и рассчитать их значимость методом к-ближайших соседей, рассчитав евклидово расстояние, подсчитав голоса и определив значимость блока отнесением с помощью сравнения информационных блоков к одному из трех классов (для сравнения используются характеристики предыдущих значимостей информационных блоков). Значимость блока - это отнесение блока к одному из трех классов:

Ω_1 – Блок «Самая главная информация»;

Ω_2 – Блок «Важные детали»;

Ω_3 – Блок «Информация второго плана».

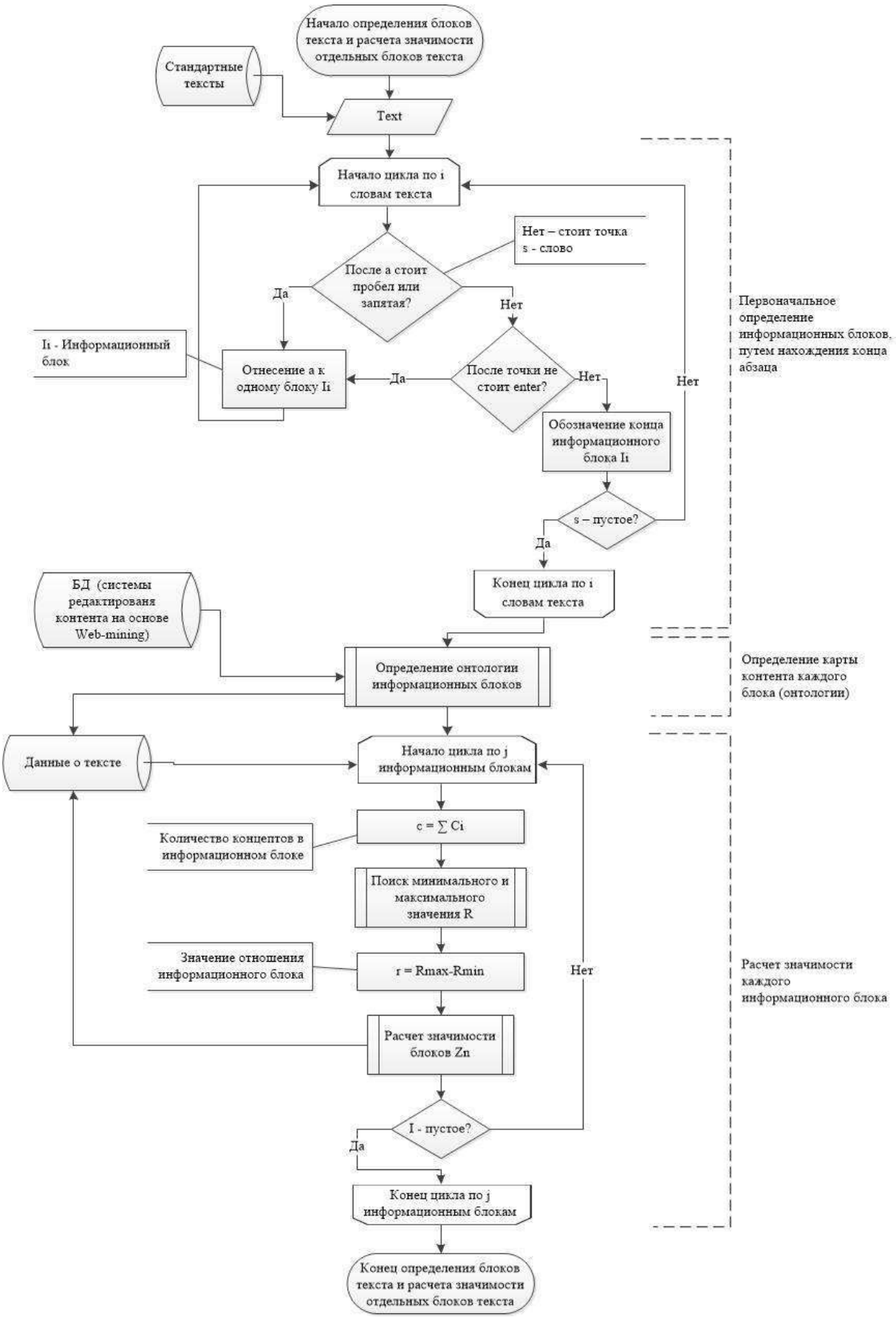


Рисунок 17. Алгоритм задачи «Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста»

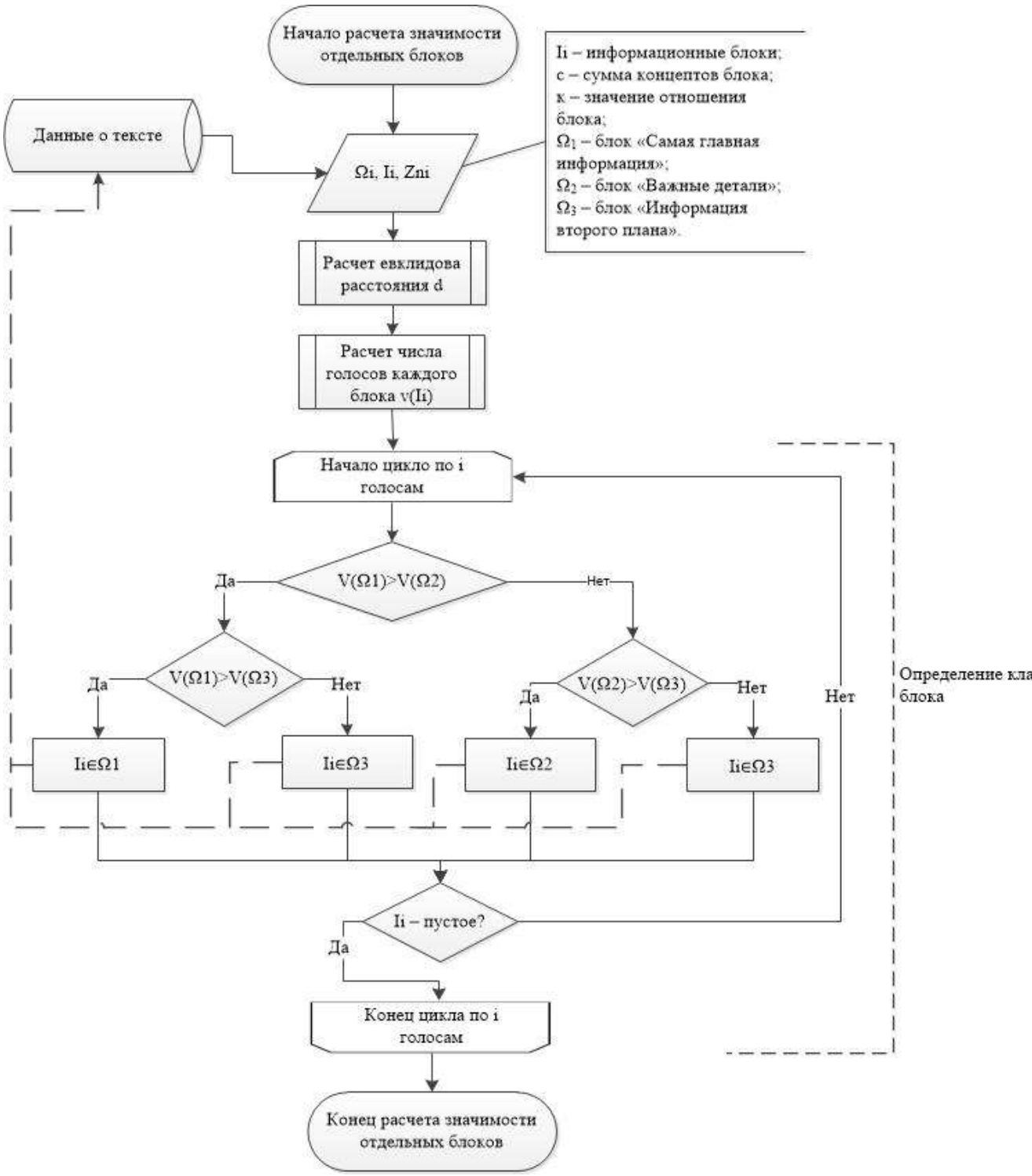


Рисунок 18. Алгоритм подзадачи «Расчет значимости отдельных блоков текста»

3) Подзадача $F_{1.3}$

Перед началом определения весов сепараторов необходимо передать текст контент-менеджеру при объеме информационных блоков более 300 слов (максимально допустимое число слов абзаца для его хорошего восприятия) [16] и повторить $F_{1.1}$ и $F_{1.2}$.

Затем происходит определение весов сепараторов на основе определенных ранее онтологий. Чем меньше количество общих концептов (<C), тем больший вес имеет сепаратор.

Постановка задачи «$F_{1.3}$ − Определение весов сепараторов»

Данная задача направлена на определение весов сепараторов (разделителей) на основе значений концептов между информационными блоками и их классов.

Формализовано это выглядит следующим образом:

Существует множество Ω= {Ω_1, Ω_2, Ω_3} классов, где Ωi ={I_1, I_2, I_n}.

Ii ={C, R, W(Ii, Ii+1) }– информационные блоки, включающие

C – совокупность концептов,

R – совокупность отношений между концептами,

W(Ii, Ii+1) – вес сепаратора (разделителя).

Для определения веса необходимо найти одинаковые значения концептов двух, рядом стоящих, $\Delta C\ (Ii, Ii + 1) = \sum C(Ii, Ii + 1)$ и присвоить сепаратору веса это значение ΔC= W(Ii, Ii+1).

Вход: Ij – информационные блоки, Ωi – класс информационного блока, Cn – концепты в информационных блоков

Выход: Вес сепараторов W(Ii, Ii+1).

Метод: математическая операция сложения.

Функция «Определение весов сепараторов» выполняется автоматически, поэтому требует алгоритм выполнения. Сначала необходимо в цикле обойти все информационные блоки каждого класса, найти одинаковые значения концептов и их сумму присвоить весу сепаратора (разделителю).

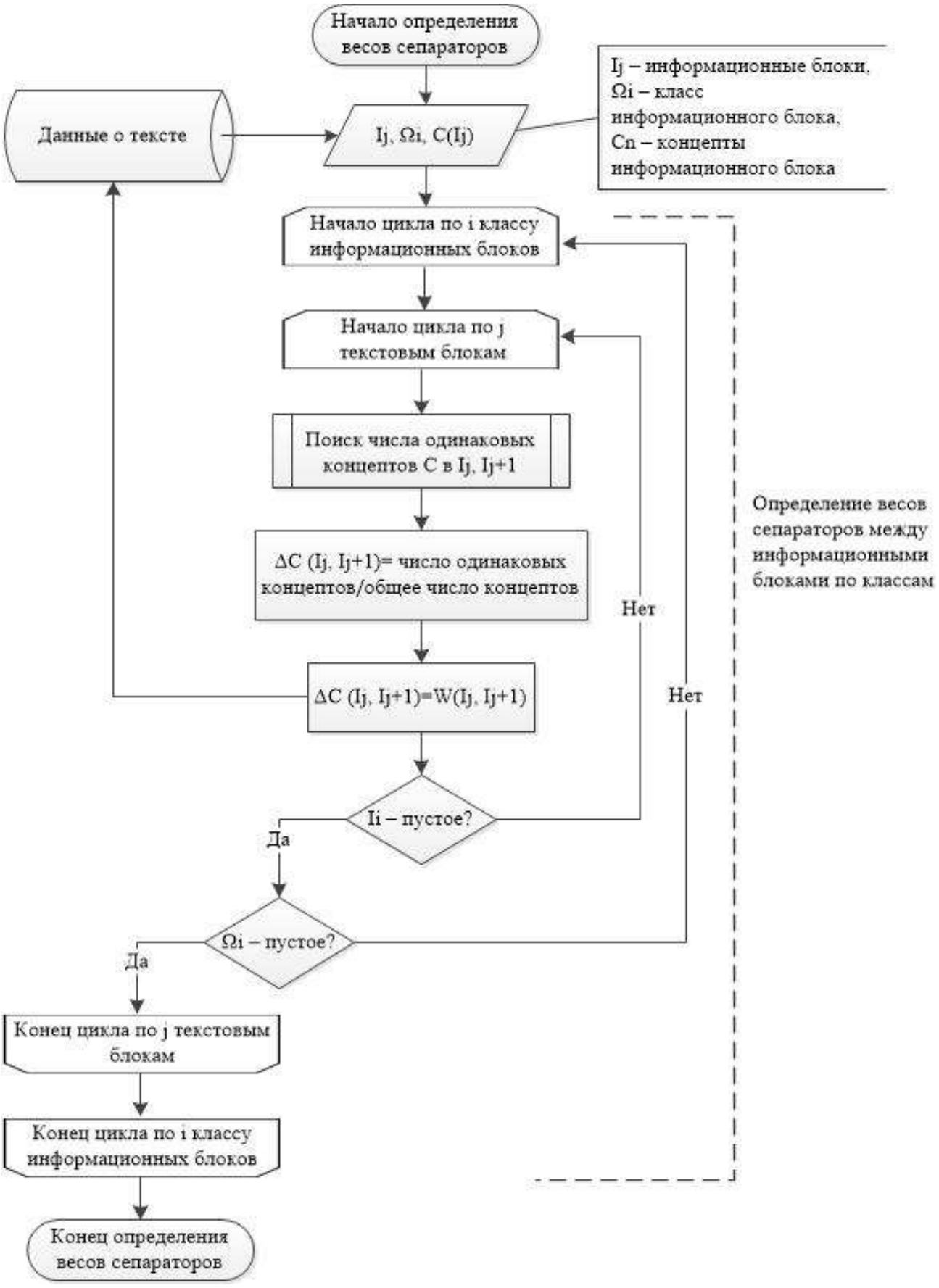


Рисунок 19. Алгоритм «Определение весов сепараторов»

Задача «Размещение блоков текста» состоит из следующих подзадач:

$F_{2.1}$ – Определение способа подачи контента;

$F_{2.2}$ – Определение координат информационных блоков.

1) Подзадача $F_{2.1}$

Также необходимо определить способ подачи контента (F или Z - шаблон) для передачи данных в систему мониторинга процесса восприятия для последующего совершенствования системы управления контентом. Способ подачи контента определяется при расчете количества медиаконтента (изображений и видео) и объема текста. При объеме более 300 слов (это примерно одна страница А4 12 шрифтом) и более двух изображений будет использован F-макет, и наоборот, Z – макет.

Постановка задачи «$F_{2.1}$ – Определение способа подачи контента»

Данная задача направлена на определение способа подачи контента (F-макет, Z – макет). в зависимости от объема текста k=k+1, где k – объем текста. K<300, тогда Text=S1, иначе S2, где S1 - Z – макет, S2 – F-макет.

Формализовано это выглядит следующим образом:

Существует множество Text= {$Text_1$, $Text_{2, ..., }$ $Text_n$} текстов, где Text ={s, к}, где s={s_1, s_2, si} слова текста, к – объем текста. В зависимости от объема текста k=k+1, где k – объем текста. K<300, тогда Text=S1, иначе S2, где S1 - Z – макет, S2 – F-макет.

Метод: бинарная математическая операция сложения.

Вход: текстовый массив в формате json.

Выход: S – способ подачи контента.

Функция «Определение способа подачи контента» выполняется автоматически, поэтому требует алгоритм выполнения. Сначала необходимо в цикле обойти все слова текста, подсчитывая их количество, затем определить способ подачи контента путем выполнения условия k больше ли меньше 300 слов.

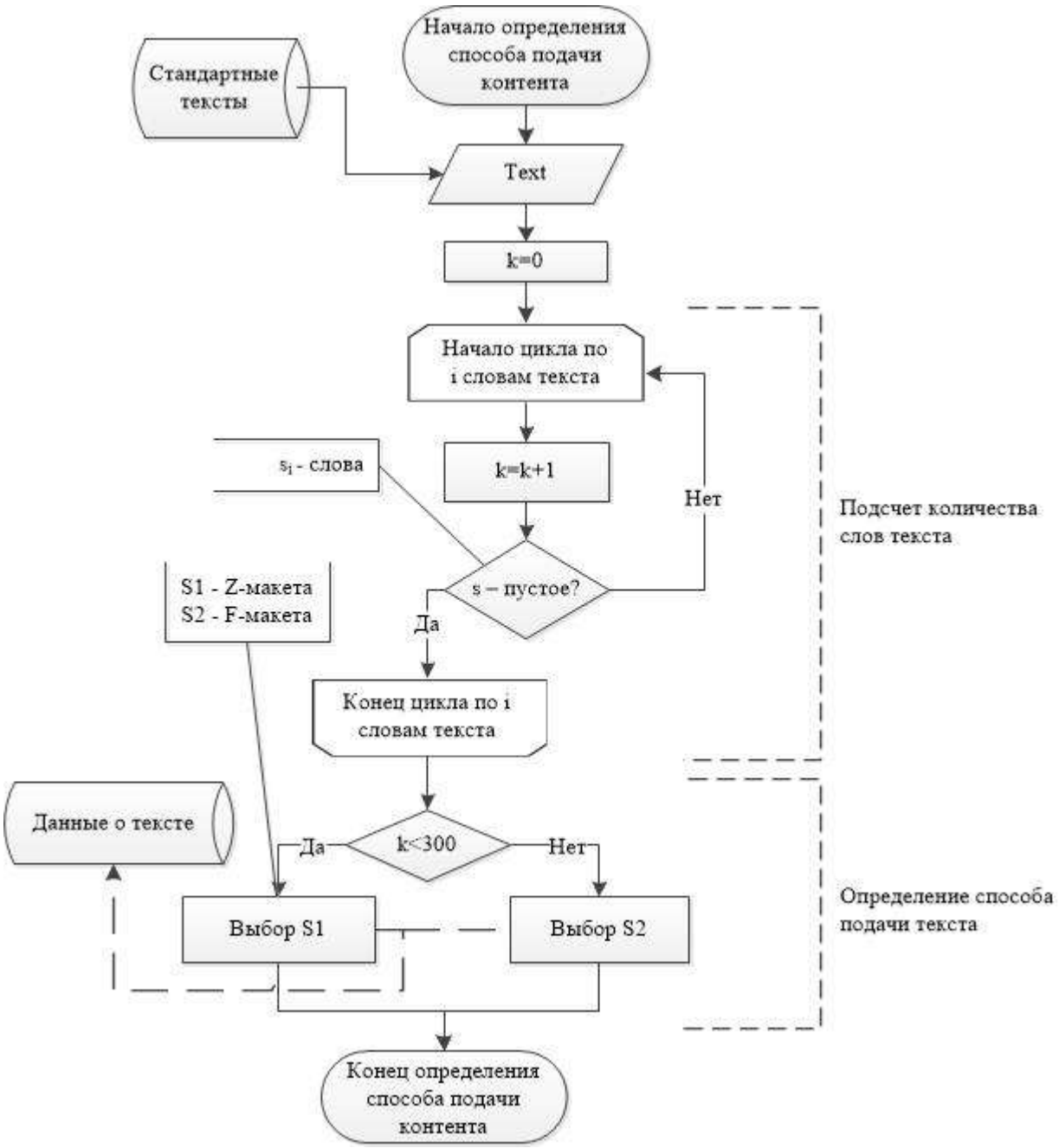


Рисунок 20. Алгоритм «Определение способа подачи контента»

2) Подзадача $F_{2.2}$

С помощью определенных начала координат, высоты и ширины блоков класса, у первого блока изменяется только высота в зависимости от количества подблоков (I_i) в классе (Ω_1). На основании высоты первого блока и веса сепаратора между блоками определяется начальная координата второго блока, также на основании объема подблоков изменяется его высота.

Постановка задачи «$F_{2.2}$ – Определение координат информационных блоков»

– Данная задача направлена на определение координат информационных блоков на веб-странице.

- **Формализовано это выглядит следующим образом:**
- Существует web-страница $\omega = (\Omega, \Phi)$, где где $\Omega i = \{I_1, I_2, I_n\}$ класс информационных блоков I_i, Φ – сепараторы между информационными блоками.
- Каждый класс $\Omega_i = \{(x_i, y_i), a_i, b_i\}$, где (x_i, y_i) начало координат, a_i ширина, b_i высота.

Координаты точки начала первого блока определены как $\Omega_1 = \{(103, 270), 633, 333\}$, ширина ($a_i$) остается неизменной всегда, высота (b_i) меняется в зависимости от объема текста (количества подблоков) $b_i = k_i * b$, где k_i – количество подблоков в классе. Начальные координаты блоков были выведены в научно-исследовательской работе.

Для определение начала координат следующего блока y_{i+1}, x_i - остается неизменной, необходимо $W(I_i, I_i+1) = (y_i - y_{i+1} - b_i)/5$, где $W(I_i, I_i+1)$ – вес сепаратора.

Метод: математическая операция сложения и вычитания, деления и умножения.

Вход: I_i – информационные блоки, классы информационных блоков Ω_n, веса сепараторов $W(I_j, I_{j+1})$, (x_1, y_1) - координаты начала блока, b_1– высота, c - ширина.

Выход: b_i – высота, y_i координаты.

Функция «Определение координат информационных блоков» выполняется автоматически, поэтому требует алгоритм выполнения. Сначала необходимо в цикле подсчитать количество информационных блоков каждого класса, затем в цикле увеличить высоту блоков в зависимости от количества информационных блоков в классе. И рассчитать координаты (y) начала каждого класса с помощью весов сепараторов, высоты и начала предыдущего блока.

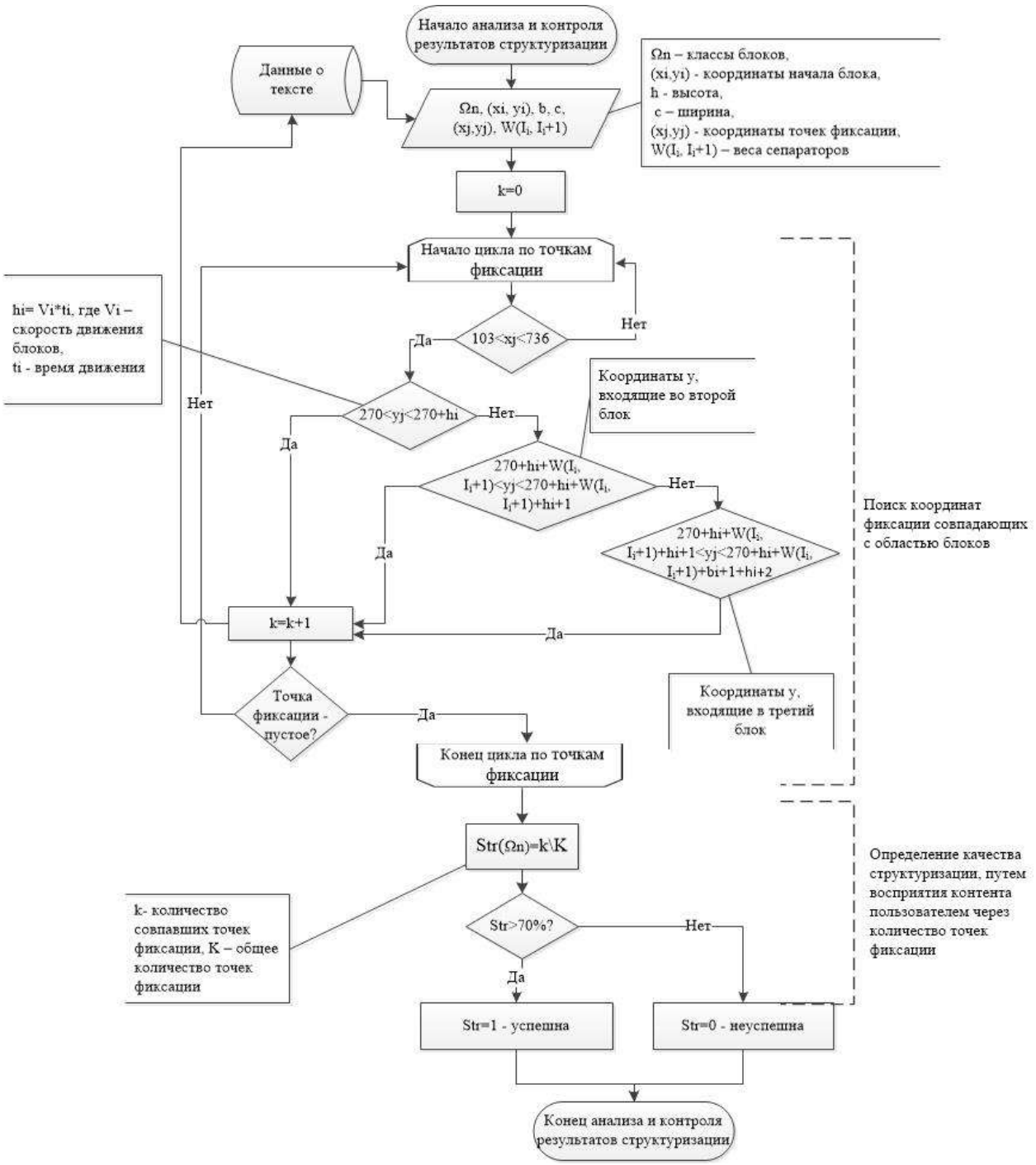


Рисунок 21. Алгоритм «Определение координат информационных блоков»

Задача «Анализ и контроль результатов структуризации» не подразделяется на подзадачи.

Задача F_3

После определения координат размещения контента параметры и содержимое информационных блоков отправляются в систему создания и адаптации веб-контента, которая передает содержимое веб-странице системе представления контента. После размещения контента на Интернет-ресурсе подсистема мониторинга процесса восприятия

передает подсистеме адаптации координаты фиксации пользователей для сопоставления их с координатами информационных блоков.

Координаты фиксации, определенные с помощью тепловой карты, помогают отслеживать реакцию пользователей на определенные изменения на веб-сайте, насколько правильно был определен способ подачи контента (F или Z - шаблон), организация блоков и насколько правильно сделан акцент на главных концептах текста. Оценка происходит с помощью сопоставления точек фиксации с координатами информационных блоков.

Постановка задачи «$F_{3.1}$ – Анализ и контроль результатов структуризации»

– Данная задача направлена на анализ процесса восприятия пользователями контента, путем сопоставления координат фиксации пользователя с областями информационных блоков с учетом динамического представления контента.

– **Формализовано это выглядит следующим образом:**

Существует множество T= {T_1, T_2, T_n} точек фиксаций пользователей, где T_i = {x_j,y_j}, x_j,y_j – координаты точки.

Необходимо определить входит ли точка фиксации (x_j,y_j) в область информационного блока с помощью определения входит ли координата xj в 103<xj<736 (ширина блока 633px, 103 px – начальная координата по x и координата y_j:

в первый блок 270<y_j<270+h_i , где

b_i – высота блока, 270 px – начальная координата по y;

или второй блок 270+h_i+W(I_i, I_{i+1})<y_j<270+h_i+W(I_i, I_i+1)+h_{i+1} , где

270 px – начальная координата по y, h_i – высота первого блока, W(I_i, I_{i+1})- вес сепаратора (высота сепаратора), b_{i+1}– высота второго блока;

или третий блок 270+hi+W(I_i, I_i+1)+b_{i+1}<yj<270+h_i+W(I_i, I_{i+1})+h_{i+1}+h_{i+2}, где

270 px – начальная координата по y, h_i – высота первого блока, W(I_i, I_{i+1})- вес сепаратора (высота сепаратора), b_{i+1}– высота второго блока; h_{i+2}– высота третьего блока.

hi = Vi*ti, Vi – скорость движения блоков, ti – время движения блоков.

Количество пересекающихся точек считаются k=k+1, k – пересекающаяся точка.

Оценка восприятия происходит путем условия выполнения неравенства k>70%.

Вход: Ωn – классы блоков, (xi,yi) - координаты начала блока, h - высота, c – ширина, (xj,yj) - координаты точек фиксации, W(I_i, I_i+1) – веса сепараторов, Vi – скорость движения блоков, ti – время движения блоков.

Выход: Str – оценка структуризации.

Метод: математическая операция сложения, произведения, операция сравнения.

Функция «Анализ восприятия пользователями контента» выполняется автоматически, поэтому требует алгоритм выполнения. Сначала необходимо в цикле

подсчитать количество точек фиксации входящих в информационные блоки каждого класса, затем определить статус структуризации контента.

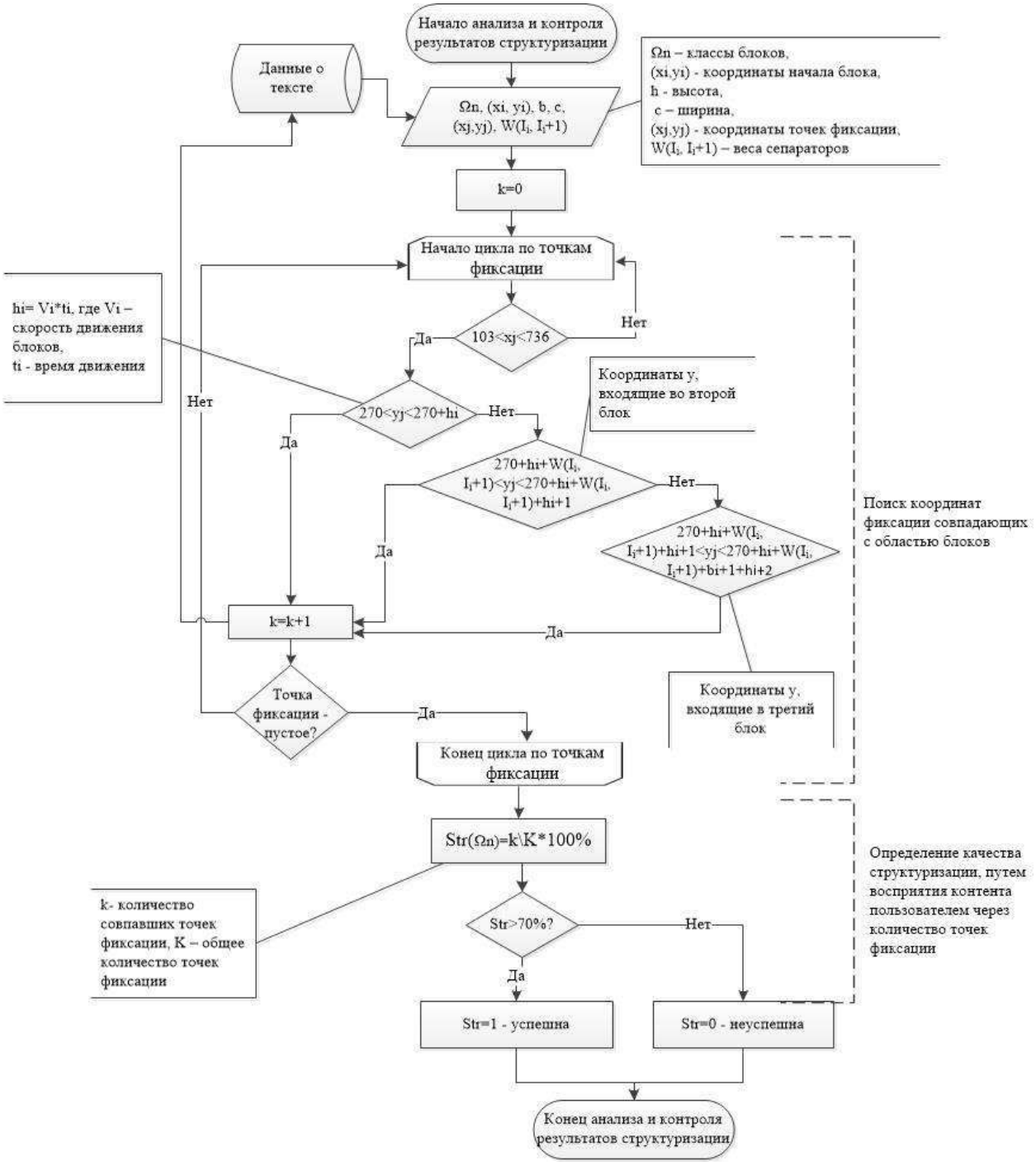


Рисунок 22. Алгоритм «Анализ восприятия пользователями контента»

4.3. Решения по информационному обеспечению

Информационная база будет представляться реляционной базой данных, по следующим обоснованиям:

1. Строки таблиц содержат данные об одном объекте (например, сведения о блоке), а столбцы этой таблицы описывают различные характеристики этого объекта.

2. Все строки таблицы будут иметь одинаковую структуру;

3. Наличие первичного ключа.

4. Primary key должен быть уникален и однозначно определять запись (Например, Блок_id). Собственно, благодаря этому можно найти нужный блок и извлечь из него нужные данные.

Данная база состоит должна состоять из 5 сущностей (Рисунок 23): Текст; Карта контента; Блок; Класс блока; Онтология.

Для сущности «Текст» выделяются следующие атрибуты:

1. Название;
2. Объем текста (количество слов в тексте - k);
3. Оценка структуризации (оценка структуризации контента с помощью соответствия точек фиксации пользователей с информационными блоками - Str);
4. Тип подачи (Z-паттерн – S_1, F-паттерн – S_2).

Для сущности «Карта контента» выделяются следующие атрибуты:

1. Блок_id (основная часть карты контента – информационные блоки);
2. Текст_id (карта контента строится по определенному тексту).

Для сущности «Блок» выделяются следующие атрибуты:

1. Класс блока_id (существуют три класса блоков: Ω_1 – Блок «Самая главная информация»; Ω_2 – Блок «Важные детали»; Ω_3 – Блок «Информация второго плана»);
2. Вес сепаратора (W – расстояние от текущего блока до следующего);
3. Онтология_id (онтология, включает концепты и отношения между концептами в каждом информационном блоке).

Для сущности «Класс блока» выделяются следующие атрибуты:

1. Начало координат (координата (x,y));
2. Ширина (c – ширина информационного блока (у всех стандартная));
3. Высота (h – высота информационного блока).

Для сущности «Онтология» выделяются следующие атрибуты:

1. Концепт (слово со значимостью из словаря семантической значимости);
2. Уровень (уровень на карте контента для расчета отношений между концептами).

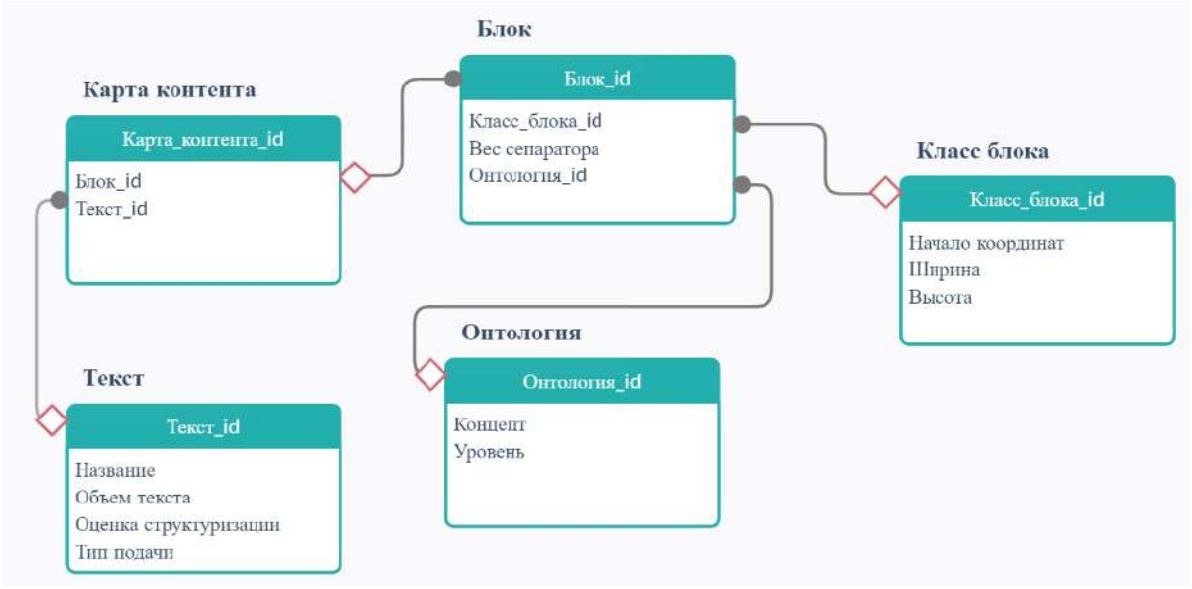


Рисунок 23. Логическая модель базы данных «Данные о тексте»

Тексты берутся из базы данных контент-менеджера «Стандартные тексты». Данные о точках фиксации пользователя берутся из БД системы мониторинга процесса восприятия «Тепловая карта» из сущности «Фиксации пользователя». Данные о концептах, о их семантической значимости слов берутся из БД системы редактирования контента на основе web-mining из сущности «Семантическая значимость».

4.4. Решения по программному обеспечению

3.4.1. Разработка структуры программного обеспечения

Модули системы:

Модуль 1: Формирование текстовых блоков

На основе значений семантической значимости слов из подсистемы редактирования контента на основе web-mining строится карта контента на основе онтологии предметной области. Онтология всего текста строится, чтобы впоследствии определить тип текста для передачи типа в систему мониторинга процесса восприятия контента для более точной оценки восприятия пользователями текста.

Модуль 2: Определение параметров размещения информационных блоков;

На основе определенных онтологий блоков и определенных значений: начало координат (103, 270) px (x_i, y_i) шириной 633 px (a_i), высотой 333 px (b_i), которая меняется в зависимости от объема текста (количества подблоков) определяется высота блока и координаты начала следующего блока: x_i-неизменна, $y_{i+1}=y_i+b_i+W(i, i+1)$, где W(i, i+1) – размер сепаратора. На основе определенных онтологий блоков и определенных значений: начало координат (103, 270) px (x_i, y_i) шириной 633 px (a_i), высотой 333 px (b_i), которая меняется в зависимости от объема текста (количества подблоков) определяется высота блока и координаты начала следующего блока: x_i-неизменна, $y_{i+1}=y_i+b_i+W(i, i+1)$, где W(i,

i+1) – размер сепаратора (разделителя между блоками).

Модуль 3: Анализ и контроль результатов структуризации.

Оценка результатов процесса восприятия структуры рассчитывается с помощью точек фиксации пользователей, путем сопоставления их с координатами информационных блоков, учитывая их динамическое представление.

Связность:

Модуль 1 – функциональная связность

Модуль 2 – функциональная связность

Модуль 3 – функциональная связность

Сцепление:

Модуль 1—Модуль 2 - сцепление по данным

Модуль 2—Модуль 3 - сцепление по данным

Модуль 1—Модуль 3 - сцепление по данным

3.4.2 Разработка функции частей программного обеспечения

Таблица 16. Функционал модулей программной системы структуризации веб-контента

Модуль	**Функционал**
Формирование текстовых блоков	F11 - Построение онтологии предметной области; F12 - Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста; F13 - Определение весов сепараторов; Запись результатов в базу данных; Формирование json-файла.
Определение параметров размещения информационных блоков	F21 - Определение способа подачи контента; F22 - Определение координат информационных блоков; Запись результатов в базу данных; Формирование json-файла.
Анализ и контроль результатов структуризации	F21 - Оценка структуризации веб-контента; Запись результатов в базу данных.

3.4.3. Выбор методов и средств разработки программного обеспечения

При установке средств разработки программной системы необходимо выбрать следующее:

Выбранный язык программирования и среды: язык Python. Выбор обоснован исходя наличия, необходимых библиотек, а также он содержит большой набор модулей для работы с операционной системой и позволяет писать кросс-платформенные приложения.

Выбор методов: Программный код будет реализован на уровне обычных процедур и функций без использования сложных конструкций. Данные методы позволяют данному ПО выполнять требуемый от него функционал. Будет использоваться метод структурного программирования, так как в нем есть не зависимые модули, это удобно при ошибках в коде их легко отследить и исправить.

Прикладные методы:

- таксономия понятий предметной области;
- методом к-ближайших соседей.

Выбор СУБД**:** СУБД MySQL, которая является высокопроизводительной и относительно простой в использовании СУБД.

PyODBC – это стандартный API для доступа к базам данных. Большая часть баз данных продукции включает драйвер ODBC, который вы можете установить для связи с базой данных. Один из самых популярных методов связи с Python через ODBC – это пакет pyodbc.

Средства моделирования:

- IDEF – ErwinProcessModeler7 (моделированной ИС)
- Блок-схемы и диаграммы – Visio 2010 (оформление моделей/алгоритмов в соответствии с ГОСТами)

Среда разработки:

- IDLE (для компиляции)

3.4.4. Разработка решений по общесистемному программному обеспечению

Для разрабатываемого прикладного ПО выбор по общесистемному ПО будет следующим:

- Платформа Windows (7,8,10). Так как на кафедре установлено Windows 7, то будем отталкиваться от данной платформы. Также PyQT 5- библиотека, может работать только с операционной системой Windows;
- Python 3 (pip, sys, ipdb для удобства пользования);
- IDLE;
- Библиотека PyQT 5 (для последующего создания интерфейса);
- OpenCV 3.4 +;
- NumPy 1.15.2 +;
- На стороне клиента должен быть браузер.

3.4.5. Структура программного обеспечения

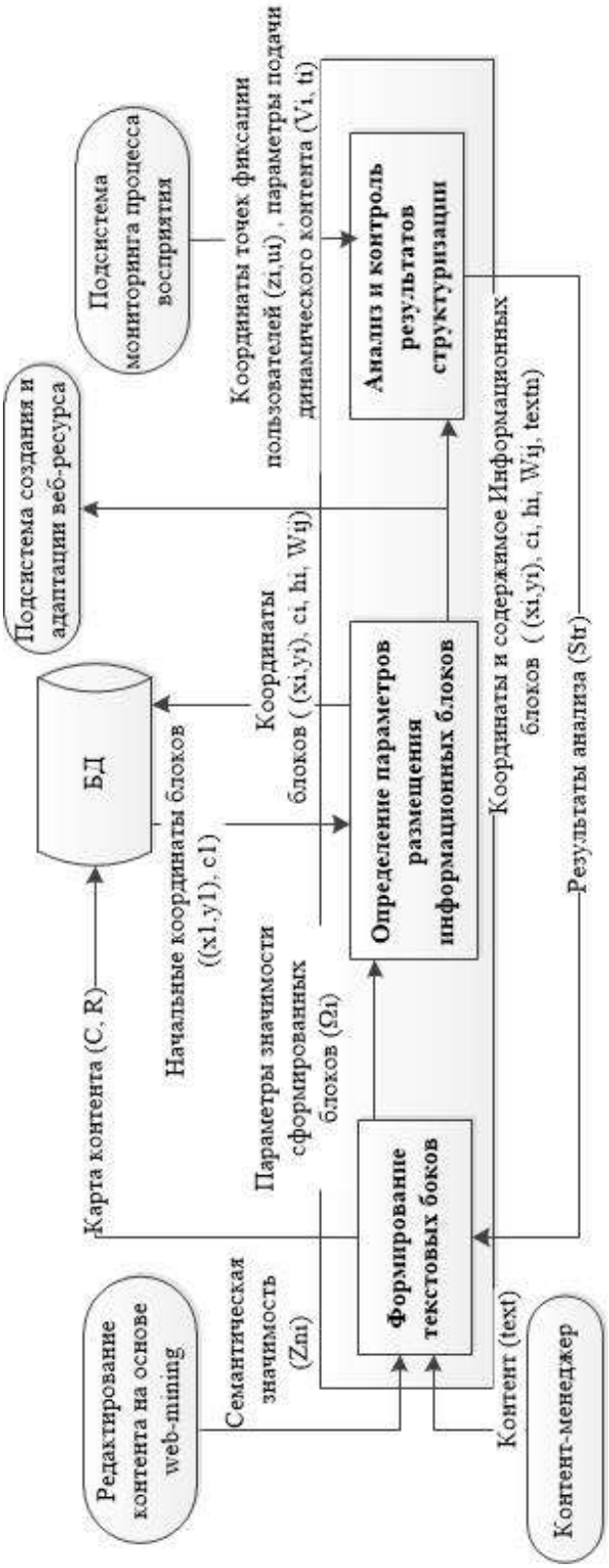


Рисунок 24. Структура ПО инструмента структуризации веб-контента

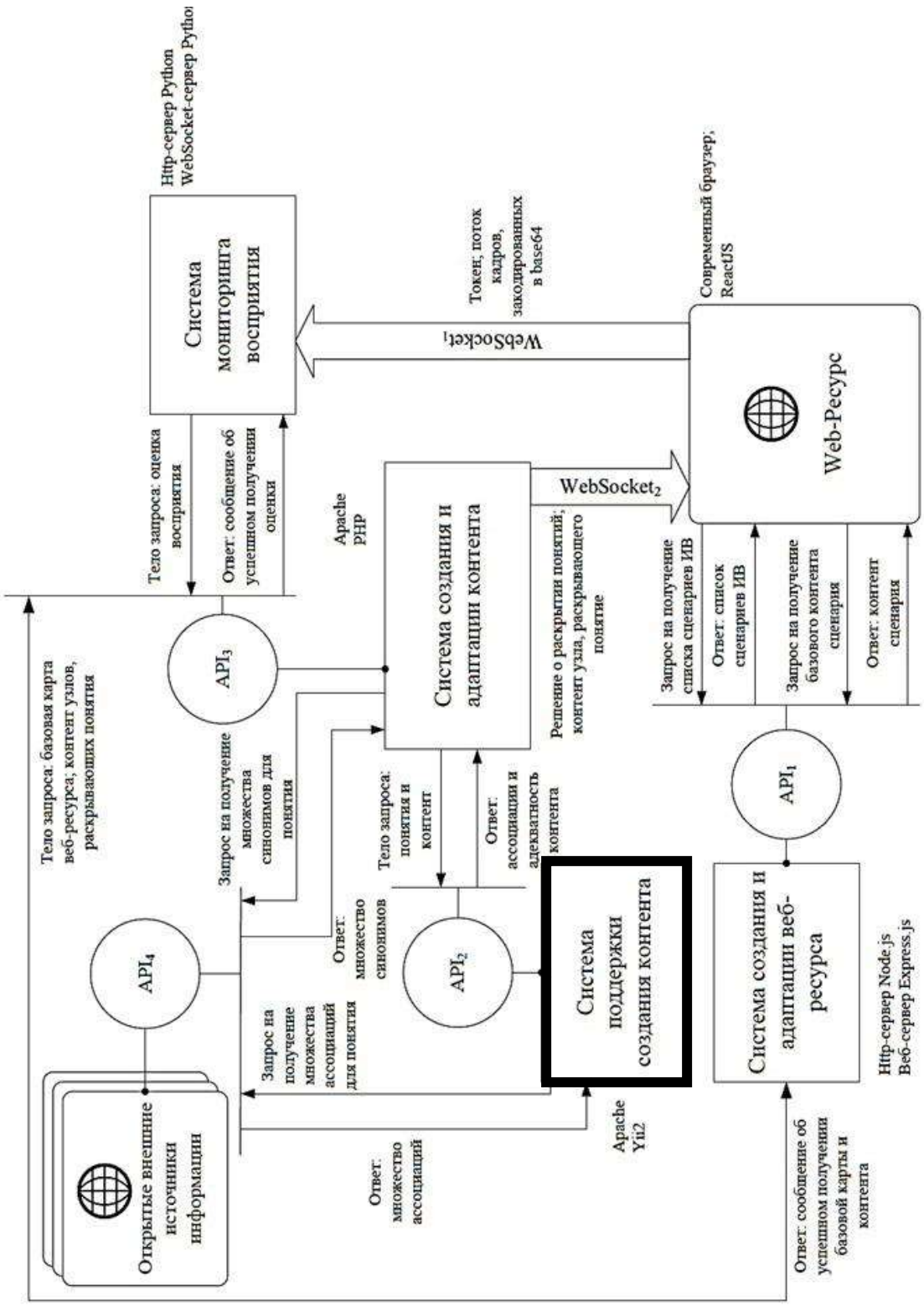


Рисунок 25. Программная схема взаимодействия с внешними подсистемами

4.5. Решения по организационному и техническому обеспечению

Для реализации функций инструмента структуризации веб-контента необходимо определить ответственных за их выполнение и степень их ответственности (Таблица 17). За модуль обслуживания системы ответственным будет системный администратор, за

сопровождение системы – аналитик, за разработку контента – контент-менеджер и за разработку мультимедийного контента – дизайнер.

Таблица 17. Распределение ответственности персонала системы

Ответственные	**Функции**	**Информация, за которую несет ответственность субъект**
Аналитик	Анализ процесса восприятия и потребностей делового окружения	Требования к сценариям воздействия, их содержанию и форме представлению
Дизайнер	Разработка графических материалов для создания мультимедийного контента	Графические материалы, их содержание
Контент менеджер	Разработка и совершенствование сценариев информационного воздействия с использованием информации не составляющей коммерческую тайну фирмы	Сценарии воздействия, их содержанию и форма представления
Системный администратор	Обслуживание технических средств, поддержание работоспособности системы, управление базой данных и учетными записями	Все, что хранится в базе данных

Для функционирования программной системы необходимо следующее техническое оборудование (Таблица 18).

Таблица 18. Техническое обеспечение программной системы

Класс устройства	**Выполняемые задачи**	**Требования к устройству**
Компьютер, выполняющий роль сервера	Исполнение программного обеспечения системы управления контентом. Управление запросами пользователей.	Вычислительной мощности должно быть достаточно для функционирования операционной среды и программной системы. Должен обеспечиваться круглосуточный доступ в Интернет.
Канал связи	Передача пакетов данных от одного узла к другому	Обеспечение передачи данных без помех.
Система коммутирующих устройств	Маршрутизация пакетов данных в среде передачи	
Персональный компьютер (любого класса, от настольного компьютера до смартфона).	Представление получаемых результатов с сервер Ввод данных Отправка запросов	Наличие устройств ввода, вывода, манипуляций. Наличие сетевого модуля.

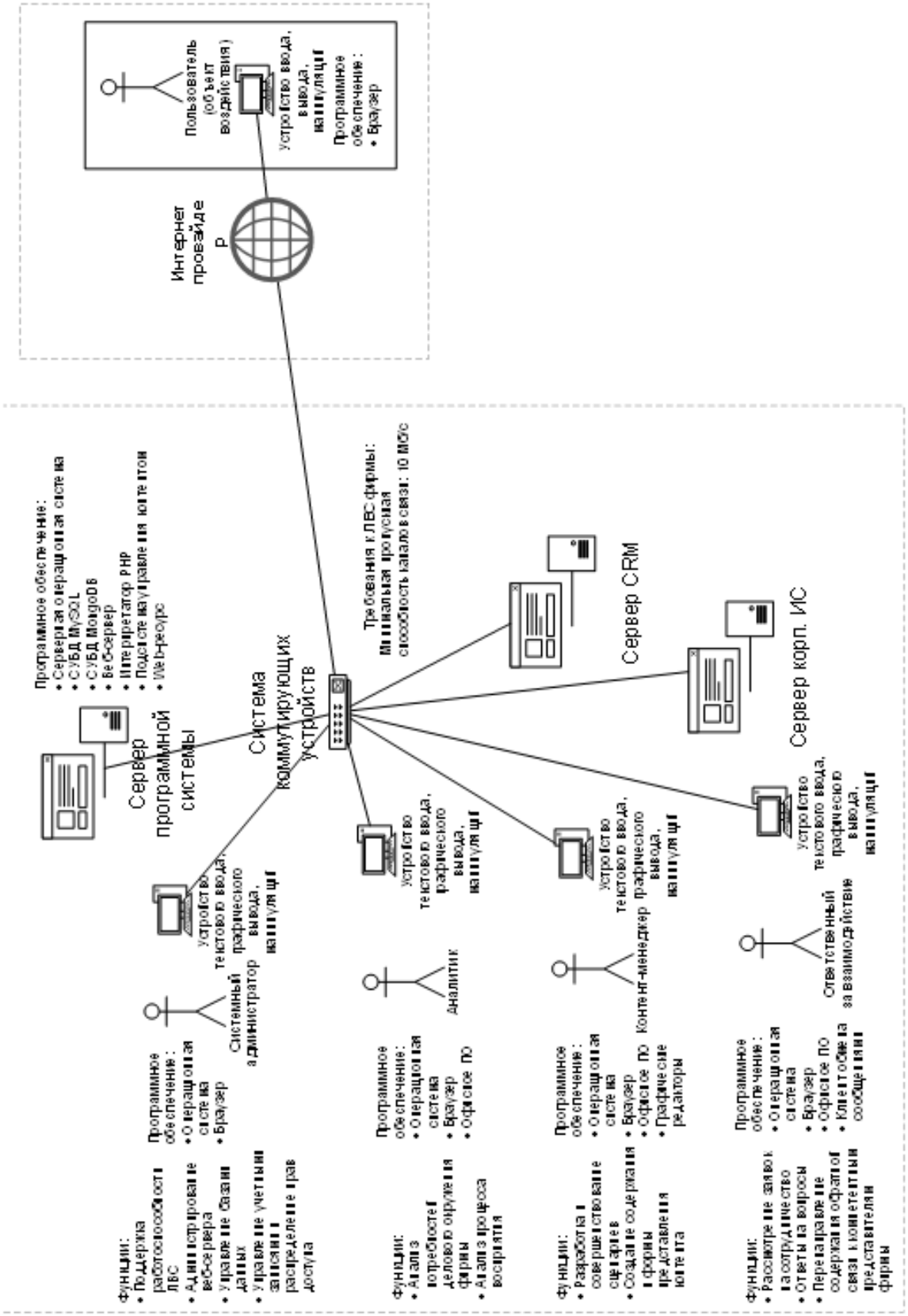


Рисунок 26. Схема организационно-технической структуры

4.6. Решения по информационной безопасности и защите информации

4.6.1. Аудит информационных объектов защиты

У инструмента структуризации веб-контента можно выделить 3 профиля информационных объектов: производственная, персональная. Профиль, описание, вид данных и место расположение указано в таблице 19.

Таблица 19. Описание информационных объектов

Объект	**Профиль**	**Вид данных**	**Средство хранения, обработки и передачи**	**Место**
1	Производственная информация	Программный код	Операционная система	Сервер
2		Координаты расположения контента	СУБД	БД
3		Медиа-файлы (изображения, видео, документы word, excel)	Операционная система	Сервер
4	Персональная информация	Учетные записи пользователей	СУБД	БД

4.6.2. Категорирование информационных объектов защиты

Необходимо предъявить требования конфиденциальности, целостности, доступности выделенным информационным объектам и определить возможный ущерб от нарушения требований в результате реализации угроз информационной безопасности.

Для каждого информационного объекта требуется оценить уровень возможного ущерба S_i от реализации воздействующих на него угроз. Такая оценка определяется путем суммирования требований к обеспечению свойств конфиденциальности K_i, доступности A_i, целостности C_i, умноженных на весовые коэффициенты:

$$S_i = K_i * w^K + A_i * w^A + C_i * w^C$$

Весовые коэффициенты для каждой категории установим экспертным путем.

Таблица 20. Категорирование информационных объектов

Объект (O_i)	**Конфиденциальность K_i**	**Целостность C_i**	**Доступность A_i**	**Итоговая категория**
Программный код (1)	1	2	0	3
Координаты расположения контента (2)	0	1	2	3
Медиа-файлы (3)	0	1	2	3
Учетные записи пользователей (4)	2	2	0	4

Таким образом, стоит обратить внимание на защиту объекта «Учетные записи пользователей».

4.6.3. Анализ рисков информационной безопасности

Риски R_i угроз Y_i нанесения ущерба информационным объектам O_i можно определить по формуле (2):

$$R_i = P_i * \sum_j P_{ij} * S_j$$

,

где P_i – вероятность реализации угрозы Y_i информационной безопасности;

P_{ij} – вероятность уязвимости объекта O_j угрозой Y_i;

S_j – ущерб объекта O_j от реализации угроз информационной безопасности.

Определим перечень информационных угроз, которые могут сформироваться и негативно воздействовать на информационные объекты информационной системы:

- Y_1 – утечка информации;
- Y_2 – искажение информации;
- Y_3 – потеря данных.

Для определения вероятностей P_i реализации угроз информационной безопасности воспользуемся отчетом с официального сайта компании «Infowatch» (http://www.infowatch.ru), специализирующейся на информационной безопасности, а также статистикой, которая формируется на изучаемом предприятии.

- Вероятность реализации угрозы $P_1 = 0{,}63$;
- Вероятность реализации угрозы $P_2 = 0{,}31$;
- Вероятность реализации угрозы $P_3 = 0{,}25$.

Для определения вероятностей P_{ij} уязвимости объектов O_j угрозами Y_i воспользуемся Приложением, в котором указаны возможности отражения атаки угроз различными группами методов (организационными, инженерно-техническими, техническими, программно-аппаратными).

- Представим данные по отражению возможных угроз Y_1, Y_2, Y_3 в Таблице 21, где:
  - 0 – невозможно ($P_{at} = 0$);
  - 1– только совокупностью методов ($P_{at} = 0{,}25$);
  - 2 – ограниченной совокупностью ($P_{at} = 0{,}5$);
  - 3 – практически возможно ($P_{at} = 0{,}75$);
  - 4 – полное парирование ($P_{at} = 1$).

Таблица 21. Возможности отражения атаки угроз

Угроза Y_i	**i**	**Возможность отражения атаки P_{at}**			**Вероятность уязвимости объекта**
		Организационные методы	**Инженерно-технические методы**	**Программно-аппаратные методы**	

Y_1 – утечка информации		2 (0.5)	0 (0)	0 (0)	1 – 0.5 = 0.5
		2 (0.5)	0 (0)	4 (1)	1 – 1 = 0
Y_2 – искажение информации		2 (0.5)	0 (0)	0 (0)	1 – 0.5 = 0.5
		2 (0.5)	0 (0)	4 (1)	1 – 1 = 0
Y_3 – потеря данных		0 (0)	0 (0)	1 (0.25)	1 – 0.25 = 0.75
		0 (0)	4 (1)	1 (0.25)	1 – 1 = 0
		2 (0.5)	4 (1)	1 (0.25)	1 – 1 = 0

Итоговые результаты анализа рисков приведём в таблице 22.

Таблица 22. Анализ рисков угроз

Угроза Y_i	**Вероятность угрозы** P_i	**Объект воздействия** O_i	**Вероятность уязвимости объекта** P_{ij}	**Уровень ущерба** S_j	**Оценка риска** R_i
Y_1 – утечка информации	0,63	O_1 – Программный код	0,5	4	1,26
		O_4 – Учетные записи пользователей	0	5	
Y_2 – искажение информации	0,31	O_2 – Координаты расположения контента	0,5	4	0,62
		O_3 – Медиа-файлы	0	5	
Y_3 – потеря данных	0,25	O_4 – Учетные записи пользователей	0,75	4	0,75
		O_2 – Координаты расположения контента	0	4	
		O_3 – Медиа-файлы	0	5	

$$R_1 = P_1 * (P_{11} * S_1 + P_{13} * S_3) = 0{,}63 * (0{,}5 * 4 + 0 * 5) = 1{,}26$$

$$R_2 = P_2 * (P_{22} * S_2 + P_{23} * S_3) = 0{,}31 * (0{,}5 * 4 + 0 * 5) = 0{,}62$$

$$R_3 = P_3 * (P_{31} * S_1 + P_{32} * S_2 + P_{33} * S_3) = 0{,}25 * (0{,}75 * 4 + 0 * 4 + 0 * 5) = 0{,}75$$

Таблица 23. Ранжирование угроз по степени риска

Наиболее опасные	**Средней опасности**	**Менее опасные**
Y_1 – утечка информации ($R_1 = 1{,}26$)	Y_3 – потеря данных ($R_3 = 0{,}75$) Y_2 – искажение информации ($R_2 = 0{,}62$)	-

4.6.4. Выбор и реализация средств защиты

4.6.4.1. Политика информационной безопасности системы структуризации веб-контента

Политика информационной безопасности представлена в **Приложение 2**.

4.6.4.2.Выбор и разработка аппаратно-программных средств защиты ИС

Средства защиты информационной безопасности могут быть направлены на отражение угроз, путем уменьшения степени уязвимости информационного объекта защиты и на снижение вероятности реализации самой угрозы.

В практике обеспечения информационной безопасности существует несколько эшелонов защиты информационных объектов, которые предусматривают следующие меры защиты: организационные (административные), правовые, аппаратно-программные; инженерно-технические.

В рамках исследуемого предприятия необходимо реализовать ряд мер безопасности и защиты информации по следующим направлениям.

1) Организационные (административные) - меры, которые установят правила работы с компьютерной техникой и конфиденциальной информацией.

- разработана должностная инструкция (согласно форме в **Приложение 1**) в соответствии с кадровым составом предприятия
- произведено обучение сотрудников правилам работы с конфиденциальной информацией (для этой цели требуется проводить регулярные собрания (1 раз в три месяца);
- осуществлена надежная охрана помещений, т.е. установка в каждом кабинете системы сигнализации, для того чтобы не допустить утечки информации
- создана штатная организационная структура по защите ценной информации (в лице, ответственного за безопасность);
- осуществлено разграничение доступа к информации как один из самых важных элементов в системе комплексной защиты информации (в основе построения данной системы лежит положение о том, что каждый из членов трудового коллектива должен обладать только теми сведениями, которые необходимы ему в силу выполняемых обязанностей) (Таблица 24).

Таблица 24. Матрица разграничения прав доступа («Ч» – чтение; «Р» – редактирование, запись, изменение, удаление)

Объект (O_i)	**Контент-менеджер**	**Дизайнер**	**Системный администратор**
Программный код (1)	-	-	Ч, Р
Координаты	Ч, Р	Ч	Ч

расположения контента (2)			
Медиа-файлы (3)	Ч	Ч, Р	Ч
Учетные записи пользователей (4)	-	-	Ч, Р

2) Правовые – комплекс гражданско-правовых, административно-правовых и уголовно-правовых норм, регулирующих общественные отношения в сфере использования компьютерной информации и устанавливающих ответственность за несанкционированное использование данных программных средств.

- каждый из сотрудников подписал соглашение о неразглашении персональных данных согласно закону «О персональных данных» от 27.07.2007 № 152-ФЗ;
- при приеме на работу и раз в год происходит извещение каждого сотрудника о распространении действия закона «Статьи 271-274 Уголовного кодекса Российской Федерации от 13.06.1996 N 63-ФЗ. Глава 28. ПРЕСТУПЛЕНИЯ В СФЕРЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ИНФОРМАЦИИ» в рамках данного предприятия;
- каждый сотрудник подписал документ, удостоверяющего его осведомленность о действии данного закона на территории организации и устанавливающего ответственность за совершение преступлений в сфере компьютерной информации.

- *Инженерно-технические* – совокупность специальных органов, технических средств и мероприятий для их использования в интересах защиты конфиденциальной информации, которые позволят предупредить разглашение, утечку, несанкционированный доступ и другие формы незаконного вмешательства в информационные ресурсы.
  - установлены средства охранно-пожарной сигнализации;
  - установлена система контроля доступа в рабочие и серверные помещения (надежные дверные замки).
- *Аппаратно-программные* – совокупность электронных устройств и специальных программ, позволяющих наладить идентификацию и аутентификацию, управление доступом, обеспечение целостности данных и сообщений, криптографическую защиту, защита от компьютерных вирусов и вредоносных программ и т.д.
  - установлены источники бесперебойного питания для каждого компьютера;
  - для каждого компьютера применено резервное копирование данных за счёт подключения внешнего жесткого диска или иного магнитного накопителя;

- реализовано удалённое хранение наиболее ценных и важных массивов данных с помощью облачного хранилища (например, GoogleDisk, Облако mail.ru);
- установлен антивирус на каждую рабочую станцию.

При принятии решения об использовании инструментальных средств реализации защиты ИС следует обосновать выбор конкретной альтернативы.

Обоснование выбора программных средств для подсистем отражено в Таблице 25. Где: Функциональные (1) - полнота выполнения заявленных функций, наличие импорта и экспорта данных и интеграции данных с подсистемами); Информационные (2) - использование русского языка, поддержание работы с документами MS Office, поддержка технологии клиент-сервер, централизованное управление пользователями и пр.; Программные (3) - свободный код, алгоритмический язык, лицензионная политика и пр; Стоимостные (4) - ограничение в бюджете.

Таблица 25. Обоснование выбора средств защиты подсистем ИС

Угроза Y_i	**Средство защиты**	**Группа критериев**			
		1	**2**	**3**	**4**
Y_1 – утечка информации	Антивирусное средство **Kaspersky Endpoint** Security	Решение нового поколения с единой консолью управления поможет надежно защитить от киберугроз все рабочие места организации.	Возможность установки на несколько ПК, централизованное управление. Использование русскоязычного интерфейса поддерживается.	Лицензионное ПО	Стоимость 1790 рублей/год за 5 устройств, что приемлемо для компании.
Y_2 – искажение информации					
Y_3 – потеря данных	Программа для восстановления потерянных данных R-Undelete	Программа позволяет восстанавливать утраченные данные в полном объёме. Кроме того, в пакет включены средства для бэкапов, копирования разделов и поиска битых блоков на дисках.	Поддерживается использование русскоязычного интерфейса.	Лицензионное ПО	Бесплатная версия восст-ет файлы размером до 256 КБ; полная версия обойдется в 80$, что также приемлемо для компании.

Таблица 26. Краткая характеристика выбранных средств защиты

Средство защиты	**Краткое описание**
Антивирусноесредство**Kaspersky Endpoint** Security	Решение нового поколения с единой консолью управления поможет надежно защитить от киберугроз все рабочие места организации.

	Защита от новейших угроз, в том числе от криптомайнеров. Усиленная защита всех узлов сети для снижения риска успешных атак. Повышение продуктивности сотрудников за счет гибких инструментов контроля. Защита серверов и рабочих станций без снижения их производительности. Защита различных платформ – Windows, Mac, Linux, iOS и Android. Простое управление всей системой безопасности из единой консоли.
Программа для восстановления потерянных данных **R-Undelete**	R-Undelete входит в состав R-Studio. Это целое семейство мощных программ для восстановления данных. Приложения R-Studio могут восстанавливать удалённые данные как на локальных дисках, так и по сети. Кроме восстановления данных, утилиты предоставляют средства для бэкапов, продвинутого копирования разделов и поиска битых блоков на дисках.

4.7. Контрольный пример

Инструмент структуризации веб-контента должен быть проверен на соответствие требованиям. Работоспособность разработанных решений должна быть проверена экспериментальным путем.

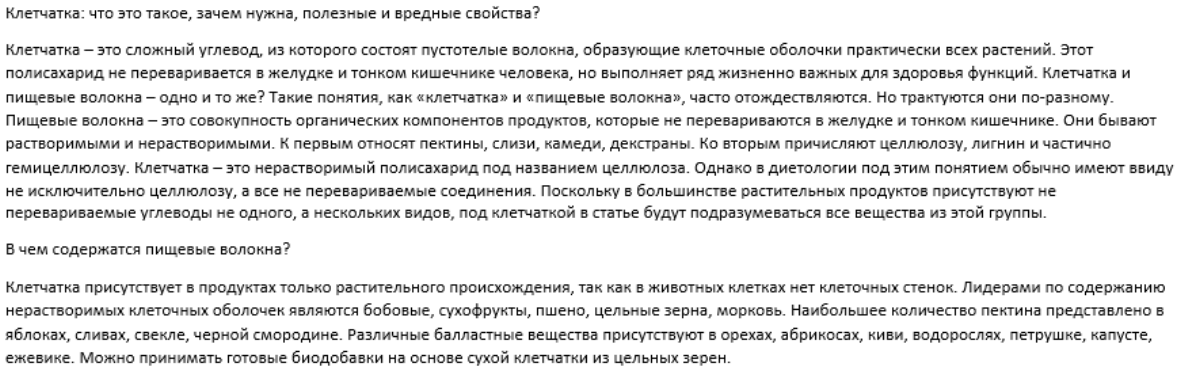
Цель эксперимента: исследовать степень структуризации контента на веб-ресурсе в соответствии с разработанной методикой.

Организация эксперимента: на кафедре ИТ ученикам разных курсов необходимо прочитать с экрана монитора три текста разной тематики с разной степенью структуризации контента: расположение контент на странице полностью не соответствует методике структуризации (Рисунок 27), расположение контент на странице не полностью соответствует методики структуризации (Рисунок 28), контент на веб-странице размещен в соответствии с методикой структуризации (Рисунок 29).

Для определения числа участников эксперимента будет использован метод приближенного моделирования - составление ограниченных выборок и обобщение выводов об этой выборке на более широкую популяцию. Исследование проводиться с участием, студентов 4 курса, с факультета ИВТ, примерно 50% девушек и 50% парней, не

имеющие информации об исследуемом инструменте. подобная группа студентов представляет собой достаточно однородную выборку, то ее объем может быть весьма небольшим, в пределах — 5 — 10 человек. Для исследования возьмем группу из 5 человек, каждый из которых прочтет три разно структурированных текста.

Угрозы валидности: знакомый для студента текст(тематика), плохие фоновые условия при эксперименте (шум, плохая освещенность), погрешность инструмента.



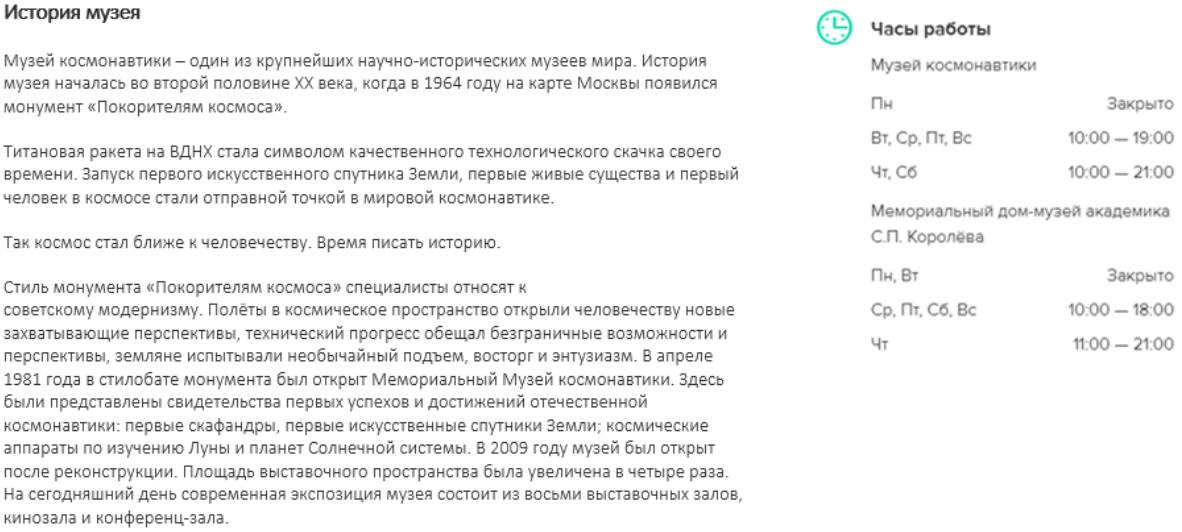
Клетчатка: что это такое, зачем нужна, полезные и вредные свойства?

Клетчатка – это сложный углевод, из которого состоят пустотелые волокна, образующие клеточные оболочки практически всех растений. Этот полисахарид не переваривается в желудке и тонком кишечнике человека, но выполняет ряд жизненно важных для здоровья функций. Клетчатка и пищевые волокна – одно и то же? Такие понятия, как «клетчатка» и «пищевые волокна», часто отождествляются. Но трактуются они по-разному. Пищевые волокна – это совокупность органических компонентов продуктов, которые не перевариваются в желудке и тонком кишечнике. Они бывают растворимыми и нерастворимыми. К первым относят пектины, слизи, камеди, декстраны. Ко вторым причисляют целлюлозу, лигнин и частично гемицеллюлозу. Клетчатка – это нерастворимый полисахарид под названием целлюлоза. Однако в диетологии под этим понятием обычно имеют ввиду не исключительно целлюлозу, а все не перевариваемые соединения. Поскольку в большинстве растительных продуктов присутствуют не перевариваемые углеводы не одного, а нескольких видов, под клетчаткой в статье будут подразумеваться все вещества из этой группы.

В чем содержатся пищевые волокна?

Клетчатка присутствует в продуктах только растительного происхождения, так как в животных клетках нет клеточных стенок. Лидерами по содержанию нерастворимых клеточных оболочек являются бобовые, сухофрукты, пшено, цельные зерна, морковь. Наибольшее количество пектина представлено в яблоках, сливах, свекле, черной смородине. Различные балластные вещества присутствуют в орехах, абрикосах, киви, водорослях, петрушке, капусте, ежевике. Можно принимать готовые биодобавки на основе сухой клетчатки из цельных зерен.

Рисунок 27. Неправильное расположение контента



История музея

Музей космонавтики – один из крупнейших научно-исторических музеев мира. История музея началась во второй половине XX века, когда в 1964 году на карте Москвы появился монумент «Покорителям космоса».

Титановая ракета на ВДНХ стала символом качественного технологического скачка своего времени. Запуск первого искусственного спутника Земли, первые живые существа и первый человек в космосе стали отправной точкой в мировой космонавтике.

Так космос стал ближе к человечеству. Время писать историю.

Стиль монумента «Покорителям космоса» специалисты относят к советскому модернизму. Полёты в космическое пространство открыли человечеству новые захватывающие перспективы, технический прогресс обещал безграничные возможности и перспективы, земляне испытывали необычайный подъем, восторг и энтузиазм. В апреле 1981 года в стилобате монумента был открыт Мемориальный Музей космонавтики. Здесь были представлены свидетельства первых успехов и достижений отечественной космонавтики: первые скафандры, первые искусственные спутники Земли; космические аппараты по изучению Луны и планет Солнечной системы. В 2009 году музей был открыт после реконструкции. Площадь выставочного пространства была увеличена в четыре раза. На сегодняшний день современная экспозиция музея состоит из восьми выставочных залов, кинозала и конференц-зала.

Часы работы

Музей космонавтики

Пн	Закрыто
Вт, Ср, Пт, Вс	10:00 — 19:00
Чт, Сб	10:00 — 21:00

Мемориальный дом-музей академика С.П. Королёва

Пн, Вт	Закрыто
Ср, Пт, Сб, Вс	10:00 — 18:00
Чт	11:00 — 21:00

Рисунок 28. Неполное соответствие расположения контента методике



Рисунок 29. Корректное расположение контента

Входные параметры: При неправильном расположении контента (Рисунок 27) не соблюдено правило золотого сечения (2/1) при разметке страницы, блоки текста распределены некорректно (нет распределения блоков, важные моменты распределены во всем тексте, а не выделены в первый блок с самой важной информацией), не выбран ни один из паттернов восприятия контента, не соблюдены правила подбора размера шрифта и не использовано правило зрительных центров, где должны располагаться главные концепты).

При не полном соответствии расположения контента методике (Рисунок 28) соблюдено правило золотого сечения (2/1), блоки сформированы более точно согласно методике (в первом абзаце содержится основная мысль текста), совершена попытка использования зрительных центров, на месте которых расположен режим работы музея в выходные дни). Но не соблюдены правила подбора размера шрифта, не выбран ни один из паттернов восприятия контента.

При полном соответствии расположения методике структуризации контента (Рисунок 29) соблюдено правило золотого сечения (2/1), сформированы и выделены три основных блока, использовано правило зрительных центров (первый дает ответ на главный вопрос (3 предложение) – «Как устроен мозг?», второй – реклама: указывает на самую популярную статью). Также соблюдены правила подбора шрифта и выбран F-паттерн (используется при большом количестве текста и малом количестве изображений).

Проведем эксперимент на пяти студентах 4 курса: Минаева А. 4-45, Слободина А. 4-41, Ужастин К. 4-42, Болонин Д. 4-48, Каверина Е. 4-42.

Таблица 27. Координаты блоков экспериментальных текстов

Блоки	Координаты текста 1	Координаты текста 2	Координаты текста 3
Блок 1 «Самая главная информация»	X – 103 px Y – 270 px h – 325 px c – 986 px	X – 103 px Y – 270 px h – 143 px c – 633 px	X – 103 px Y – 270 px h – 203 px c – 633 px
Блок 2 «Важные детали»	X – 103 px Y – 615 px h – 232 px c – 986 px	X – 103 px Y – 433 px h – 189 px c – 633 px	X – 103 px Y – 493 px h – 124 px c – 633 px
Блок 3 «Информация второго плана»	X – нет Y – нет h – нет c – нет	X – 103 px Y – 642 px h – 376 px c – 633 px	X – 103 px Y – 637 px h – 258 px c – 633 px

В соответствии с поступившими точками фиксации пользователей из подсистемы мониторинга процесса восприятия контента был определен процент общих точек фиксации на каждый блок текста: $Str(\Omega i) = \frac{k}{K} * 100\%$, k- количество совпавших точек фиксации, K – общее количество точек фиксации.

Таблица 28. Процент совпадения точек фиксации с координатами блоков текста

Участник	**Эксперимент 1 (Текст 1)**	**Эксперимент 2 (Текст 2)**	**Эксперимент 3 (Текст 3)**	**Результат (Str)**
Минаева А.	1 блок - 36%, 2 блок - 20%, 3 блок - 9%, другая - 35%.	1 блок - 41%, 2 блок - 19%, 3 блок - 19%, другая - 22%.	1 блок - 56%, 2 блок - 21%, 3 блок - 18%, другая - 5%.	Успешно 35% > 22% > 5% Δ30%
Слободина А.	1 блок - 32%, 2 блок - 23%, 3 блок - 3%, другая - 42%.	1 блок - 40%, 2 блок - 20%, 3 блок - 19%, другая - 21%.	1 блок - 51%, 2 блок - 21%, 3 блок - 22%, другая - 6%.	Успешно 42% > 21% > 6% Δ36%
Ужастин К.	1 блок - 43%, 2 блок - 26%, 3 блок - 12%, другая - 19%.	1 блок - 45%, 2 блок - 30%, 3 блок - 19%, другая - 6%.	1 блок - 51%, 2 блок - 21%, 3 блок - 20%, другая - 8%.	Не успешно 19% > 6% < 8% Δ11%
Болонин Д.	1 блок - 30%, 2 блок - 26%,	1 блок - 41%, 2 блок - 20%,	1 блок - 55%, 2 блок - 21%,	Успешно 35% > 21% > 4%

Участник	Эксперимент 1 (Текст 1)	Эксперимент 2 (Текст 2)	Эксперимент 3 (Текст 3)	Результат (Str)
	3 блок - 9%, другая - 35%.	3 блок - 18%, другая - 21%.	3 блок - 20%, другая - 4%.	Δ31%
Каверина Е.	1 блок - 29%, 2 блок - 26%, 3 блок - 15%, другая - 30%.	1 блок - 40%, 2 блок - 10%, 3 блок - 11%, другая - 39%.	1 блок - 50%, 2 блок - 11%, 3 блок - 13%, другая - 26%.	Не успешно 30% < 39% > 26% Δ4%

Вывод: на основе данных результатов можно сделать вывод о том, что более половины (3/5) экспериментов прошли успешно, процент совпадения точек фиксации значительно увеличивался в соответствии со степенью структуризации контента. Студент Ужастин К. получил процент точек фиксации на втором тексте больше, чем на тексте с полностью правильной структурой, тем самым процентная разница получилась незначительной. Студентка Каверина Е. получила процент точек фиксации на первом тексте больше, чем на втором, более структурированном, процентная разница получилась самой наименьшей. В проведение данного эксперимента существует еще много нюансов, которые необходимо учесть.

Заключение

В процессе работы над проектом был осуществлен анализ предметной области, формирование требований на разработку инструмента структуризации веб-контента, который выполняет функцию расчета значимости отдельных единиц текста на основе карты контента, функцию формирования блоков текста и их расположения на веб-странице и функцию анализа результатов структуризации веб-контента после размещения текста на веб-ресурсе с учетом динамического представления, на основе онтологического подхода. Также были разработаны общесистемные решения, решения по видам обеспечения информационной системы, их документирование и осуществлена апробация инструмента.

Необходимо продолжать совершенствование данного инструмента для организации более качественного воздействия при продвижении инноваций в открытом информационном пространстве.

Список литературы

1) Твишиани Д. М. Диалектико-материалистическое основание системных исследований // Диалектика и системный анализ М: Наука, 1986.

2) Проблемы продвижения инноваций в сфере высоких технологий [Электронный ресурс] –https://cyberleninka.ru/article/v/problemy-prodvizheniya-innovatsiy-v-sfere-vysokih-tehnologiy.

3) Понятие «Контент»: типология, виды и технология получения дидактического контента в образовательном процессе [Электронный ресурс] – https://cyberleninka.ru/ article/n/ponyatie-kontent-tipologiya-vidy-i-tehnologiya-polucheniya-didakticheskogo-kontenta-v-obrazovatelnom-protsesse

4) Carr N. Is Google making us stupid? What the Internet is doing to our brains // Atlantic Magazine. 2008. № 7 [Электронный ресурс] –http: // www. theatlantic. com / magazine / archive / 2008 / 07 / is-google-making-us-stupid / 6868.

5) СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ WEB-САЙТЫ. В ЧЁМ РАЗНИЦА. [Электронный ресурс] – http://moolkin.ru/joomla/cms/staticheskie-i-dinamicheskie-web-sayty-v-chyom-raznitsa/.

6) Extracting Content Structure for Web Pages based on Visual Representation [Электронный ресурс] – https://www.dbs.ifi.lmu.de/~spyu/paper/VIPS-APWeb.pdf.

7) Онтология управления контентом [Электронный ресурс] – https://cyberleninka.ru/article/n/ontologiya-dlya-upravleniya-kontentom/.

8) Золотое сечение в дизайне [Электронный ресурс] – https://lpgenerator.ru/blog/2016/ 03/12/zolotoe-sechenie-v-dizajne/.

9) Задачи и области контент инжиниринга [Электронный ресурс] – http://wdigest.ru/content-engineering/tasks_areas.htm.htm.

10) Что такое принцип «перевернутой пирамиды»? [Электронный ресурс] – https://writingfor.online/post/princip-perevernutoj-piramidy/.

11) Kara Pernice. F-Shaped Pattern of Reading on the Web: Misunderstood, But Still Relevant (Even on Mobile) [Электронный ресурс] – https://www.nngroup.com/articles/f-shaped-pattern-reading-web-content/.

12) Как пользователи просматривают контент: Z-паттерн [Электронный ресурс] – https://medium.com/советы-по-проектированию-интерфейсов/как-мы-читаем-веб-контент-z-паттерн-e95b3e127ac1.

13) Концептуально-гипертекстовая модель управления контентом [Электронный ресурс] – https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptualno-gipertekstovaya-model-upravleniya-kontentom-v-is-semograf/.

14) Гвоздева, Т.В. Стандартизация информационных технологий: учебное пособие/ Т.В. Гвоздева; ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2014. – 220 с

15) Маркетинговое противостояние AIDA vs ACCA [Электронный ресурс] – https://www.cossa.ru/155/53192/.

16) Какой должна быть идеальная длина контента в сети [Электронный ресурс] – https://vc.ru/flood/3673-ideal-length-of-everything-online.

17) Баллод Б.А. Информационная безопасность и защита информации: Курс лекций / ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина». – Иваново, 2010. – 304 с.

18) Глобальное исследование утечек конфиденциальной информации в первом полугодии 2019 года. – М.: Аналитический центр InfoWatch, 2019.

19) Политика информационной безопасности компании [Электронный ресурс] – SecurityPolicy.ru - Документы по информационной безопасности.

Приложение 1

Должностная инструкция системного администратора

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор
Фамилия И.О. _____
«_____»_____ ____ г.

1. Общие положения

1.1. Системный администратор относится к категории специалистов.
1.2. Системный администратор назначается на должность и освобождается от нее приказом генерального директора компании по представлению технического директора / руководителя структурного подразделения.
1.3. Системный администратор подчиняется непосредственно техническому директору / руководителю структурного подразделения.
1.4. На время отсутствия системного администратора его права и обязанности переходят к другому должностному лицу, о чем объявляется в приказе по организации.
1.5. На должность системного администратора назначается лицо, отвечающее следующим требованиям: высшее профессиональное (техническое, математическое, экономическое) образование и стаж аналогичной работы не менее полугода.
1.6. Системный администратор должен знать:
- технико-эксплуатационные характеристики, конструктивные особенности, назначение и режимы работы оборудования, правила его технической эксплуатации;
- аппаратное и программное обеспечение сетей;
- принципы простейшего ремонта аппаратного обеспечения;
- нормализованные языки программирования;
- действующие стандарты, системы счислений, шифров и кодов;
- методы программирования;
- системы организации комплексной защиты информации, способы предупреждения несанкционированного доступа к информации.
1.7. Системный администратор руководствуется в своей деятельности:
- законодательными актами РФ;
- Уставом компании, Правилами внутреннего трудового распорядка, другими нормативными актами компании;

- приказами и распоряжениями руководства;
- настоящей должностной инструкцией.

2. Должностные обязанности системного администратора

Системный администратор выполняет следующие должностные обязанности:
2.1.Устанавливает на серверы и рабочие станции сетевое программное обеспечение.
2.2. Конфигурирует систему на сервере.
2.3. Обеспечивает интегрирование программного обеспечения на файл-серверах, серверах систем управления базами данных и на рабочих станциях.
2.4. Поддерживает рабочее состояние программного обеспечения сервера и рабочих станций.
2.5. Регистрирует пользователей, назначает идентификаторы и пароли.
2.6. Обучает пользователей работе в сети, ведению архивов; отвечает на вопросы пользователей, связанные с работой в сети; составляет инструкции по работе с сетевым программным обеспечением и доводит их до сведения пользователей.
2.7. Контролирует использование сетевых ресурсов.
2.8. Организует доступ к локальной и глобальной сетям.
2.9. Устанавливает ограничения для пользователей по:
- использованию рабочей станции или сервера;
- времени;
- степени использования ресурсов.
2.10. Обеспечивает своевременное копирование и резервирование данных.
2.11. Участвует в восстановлении работоспособности системы при сбоях и выходе из строя сетевого оборудования.
2.12. Проводит мониторинг сети, разрабатывает предложения по развитию инфраструктуры сети.
2.13. Обеспечивает:
- сетевую безопасность (защиту от несанкционированного доступа к информации, просмотра или изменения системных файлов и данных);
- безопасность межсетевого взаимодействия.
2.14. Готовит предложения по модернизации и приобретению сетевого оборудования.
2.15. Осуществляет контроль за монтажом оборудования специалистами сторонних организаций.

2.16. Выполняет отдельные служебные поручения своего непосредственного руководителя.

3. Права системного администратора

Системный администратор имеет право:
3.1. Устанавливать и изменять правила пользования сетью.
3.2. Знакомиться с проектами решений руководства предприятия, касающимися его деятельности.
3.3. Представлять руководству предложения по совершенствованию своей работы и работы компании.
3.4. Сообщать своему непосредственному руководителю о всех выявленных в процессе своей деятельности недостатках и вносить предложения по их устранению.
3.5. Запрашивать лично или по поручению руководства предприятии от руководителей структурных подразделений и специалистов информацию и документы, необходимые для выполнения его должностных обязанностей.
3.6. Требовать от руководства создания нормальных условий для выполнения служебных обязанностей и сохранности всех документов, образующихся в результате деятельности компании.
3.7. Принимать решения в пределах своей компетенции.

4. Ответственность системного администратора

Системный администратор несет ответственность:
4.1. За невыполнение и/или несвоевременное, халатное выполнение своих должностных обязанностей.
4.2. За несоблюдение действующих инструкций, приказов и распоряжений по сохранению коммерческой тайны и конфиденциальной информации.
4.3. За нарушение правил внутреннего трудового распорядка, трудовой дисциплины, правил техники безопасности и противопожарной безопасности.

Приложение 2

ПОЛИТИКА ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ СИСТЕМЫ СТРУКТУРИЗАЦИИ ВЕБ-КОНТЕНТА

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

С целью автоматизации процессов, в АО «МОСИНЖПРОКТ» введена в действие система структуризации веб-контента

К работе с компонентами ИС допущены системные администраторы, администратор информационной безопасности (далее – Администратор), контент-менеджер и дизайнер (далее - Пользователь).

С целью защиты информации от несанкционированного нарушения ее конфиденциальности, целостности и доступности в ИС организационными и программно-аппаратными средствами, правовыми и инженерно-техническими средствами реализована система защиты информации.

Пользователи ИС при работе с техническими средствами и информационными технологиями, являющимися частью ИС должны соблюдать положения настоящей Политики.

Настоящая Политика разработана с учетом положений, следующих законодательных и нормативно-правовых актов:

- Федеральный закон № 149-ФЗ от 27 июля 2006 года «Об информации, информатизации и защите информации»;
- Федеральный закон № 152-ФЗ от 27 июля 2006 года «О персональных данных»;
- «Требования к защите персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных», утвержденные Постановлением Правительства РФ № 1119 от 1 ноября 2012 года;
- «Требования о защите информации, не составляющей государственную тайну, содержащейся в государственных информационных системах», утвержденные приказом ФСТЭК России № 17 от 11 февраля 2013 года;
- «Состав и содержание организационных и технических мер по обеспечению безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных», утвержденный приказом ФСТЭК России № 21 от 18 февраля 2013 года;
- «Положение о разработке, производстве, реализации и эксплуатации шифровальных (криптографических) средств защиты информации», утвержденное приказом ФСБ от 9 февраля 2005 №66.

− ОБЩИЕ ОБЯЗАННОСТИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ПО ЗАЩИТЕ ИНФОРМАЦИИ В ИС

Пользователь в ИС выполняет только те действия, которые необходимы для выполнения его служебных обязанностей. Любые посторонние действия в ИС запрещены.

Пользователь подписывает соглашение о неразглашении конфиденциальной информации перед началом выполнения служебных обязанностей, связанных с доступом к такой информации.

Пользователь незамедлительно оповещает Администратора о любой подозрительной активности в ИС.

Пользователю запрещено использовать личные технические средства (ноутбуки, смартфоны, планшеты, фотокамеры, флеш-носители, съемные жесткие диски и пр.) для несанкционированного копирования, фотографирования, распространения и передачи защищаемой информации.

Пользователь принимает участие в инструктажах по информационной безопасности, проводимым Администратором и Ответственным. При получении дополнительных материалов от Администратора и Ответственного во время инструктажей, Пользователь самостоятельно изучает их с целью повышения своей осведомленности в вопросах информационной безопасности и защиты персональных данных.

В случае объективной необходимости, Пользователь участвует в составе группы реагирования на инциденты информационной безопасности в расследованиях причин инцидентов безопасности.

В целях блокирования возможности несанкционированного ознакомления с защищаемой информацией на экране монитора, Пользователь должен блокировать сеанс работы в ИС при покидании рабочего места более чем на 2 минуты. Блокировка сеанса работы в ИС производится нажатием клавиш Win+L.

Пользователю запрещены любые действия в ИС до прохождения процедуры идентификации и аутентификации в системе (до ввода логина и пароля).

Пользователю запрещено изменение источника загрузки своего автоматизированного рабочего места (далее - АРМ) и загрузка АРМ с внешних носителей.

Антивирусная защита в ИС реализована прозрачно для пользователя, установка антивирусных программ, обновление антивирусных баз, запуск антивирусных проверок, сбор информации о найденных вирусах производится Администратором централизованно. Пользователю запрещено изменять настройки антивирусного программного обеспечения или отключать его (даже на короткое время). Пользователь должен оповещать

Администратора о локальных сообщениях антивирусного программного обеспечения на его АРМ. Пользователь должен оповещать Администратора о любых аномалиях в работе АРМ.

Пользователю запрещается самостоятельная установка любого программного обеспечения, даже необходимого для выполнения своих служебных обязанностей. Установка разрешенного в ИС программного обеспечения осуществляется Администратором и системными администраторами ИС. Также к установке и настройке программного обеспечения в ИС, при условии соблюдения мер по защите информации, допускаются сотрудники сторонних организаций.

Пользователь должен пресекать попытки посторонних лиц (или лиц, не имеющих соответствующих полномочий) тем или иным образом получить доступ к его учетным данным, конфиденциальной информации в ИС, ключевой информации криптосредства и к любой другой защищаемой информации. Пользователь незамедлительно сообщает Администратору о подобных попытках (как удачных, так и неудачных).

Администратор отключает возможность использования на АРМ технологий мобильного кода. Пользователю запрещено использовать технологии мобильного кода в обход принятых в АО «МОСИНЖПРОЕКТ» политик информационной безопасности.

Пользователь в меру своих сил и возможностей содействует проведению служебных расследований, инициированных в связи с инцидентами информационной безопасности.

АО «МОСИНЖПРОЕКТ» действует политика управления информационными потоками и фильтрации сетевого трафика. Пользователь работает только с теми сетевыми ресурсами (сетевые папки, веб-сайты и пр.), которые разрешены и, работа с которыми необходима Пользователю для выполнения своих служебных обязанностей. Белый список внешних сетевых ресурсов приведен в приложении к Политике информационной безопасности. Пользователь имеет право сделать запрос Администратору на разрешение работы с заблокированными сетевыми ресурсами, обосновав необходимость внесения нового ресурса в белый список. Пользователю запрещено получать доступ к запрещенным внешним ресурсам в обход политик безопасности.

Пользователь осуществляет обработку защищаемой информации в ИС в соответствии с технологическими процессами обработки информации.

Пользователь принимает меры по противодействию несанкционированному просмотру защищаемой информации с экрана монитора посторонними лицами. К таким мерам относятся:

- сворачивание окна, в котором отображена защищаемая информация или блокирование сеанса Пользователя при нахождении посторонних лиц вблизи рабочего места Пользователя с фронтальной стороны монитора;
- ориентация монитора задней частью к дверным проемам и окнам;
- в случае вынужденной ориентации монитора фронтальной частью к окну, Пользователь во время работы с защищаемой информацией закрывает шторы, жалюзи.

Пользователь должен знать и соблюдать положения настоящей Политики, а также других внутренних нормативных документов АО «МОСИНЖПРОЕКТ». При возникновении у Пользователя вопросов по защите информации и защите персональных данных в АО «МОСИНЖПРОЕКТ», он обращается к Администратору и Ответственному. Новые Пользователи перед началом выполнения своих служебных обязанностей изучают положения настоящей Политики.

При работе с криптографическими средствами защиты информации (СКЗИ) Пользователь выполняет предписание Политики по обеспечению безопасности эксплуатации СКЗИ.

ПРАВИЛА УПРАВЛЕНИЯ ИДЕНТИФИКАТОРАМИ, УЧЕТНЫМИ ЗАПИСЯМИ И ПАРОЛЯМИ

В АО «МОСИНЖПРОЕКТ» с целью обеспечения информационной безопасности внедрены политики управления идентификаторами, учетными записями и паролями.

Пользователь перед началом работы в ИС получает учетные данные (персональный идентификатор, логин, временный пароль) у Администратора. Администратор выдает учетные данные Пользователю на основании заявки, заполненной по форме.

При первом входе в систему Пользователь изменяет первичный временный пароль, назначенный ему Администратором. Временной промежуток между выдачей временного пароля и первым входом Пользователя в информационную систему не должен составлять более одного часа. Пароли должны соответствовать следующим требованиям:

- минимальная длина пароля составляет 8 символов, пароль должен содержать буквы английского алфавита верхнего и нижнего регистров, как минимум одну цифру и один спецсимвол;
- новый пароль должен отличаться минимум на два символа от предыдущего;
- запрещается использование пользователями пяти последних использованных паролей при создании новых паролей.

Максимальное время действия пароля - 90 дней. По истечении срока действия пароля, Пользователь должен придумать новый пароль, удовлетворяющий требованиям к паролям.

Пользователю запрещено записывать и хранить пароли в местах, доступных для просмотра посторонним лицам (на отдельных листах бумаги, в не запираемой тумбе, под клавиатурой, на мониторе и т. п.).

Пользователь должен удостовериться, что при вводе пароля никто не наблюдает за процессом ввода пароля.

Пользователю запрещено разглашать другим пользователям свой пароль, в том числе Администратору.

Пользователю запрещено вводить свои учетные данные для предоставления возможности временной работы в ИС другим Пользователями или посторонним лицам, поскольку все выполненные этими лицами действия в ИС будут считаться действиями, выполненными Пользователем. Ответственность за неправомерные действия таких посторонних лиц несет Пользователь.

Пользователю запрещено оставлять без присмотра персональный идентификатор (электронный ключ).

При подозрении на компрометацию пароля или иной идентификационной информации, Пользователь должен незамедлительно сообщить об этом Администратору.

ПРОТИВОДЕЙСТВИЕ МЕТОДАМ СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И ПРАВИЛА РАБОТЫ С ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТОЙ

Применение злоумышленником методов социальной инженерии является самым эффективным и разрушительным способом нарушения информационной безопасности на любом предприятии в обход всех технических мер по защите информации. Методы социальной инженерии направлены на использование человеческого фактора (человеческих слабостей и недостатков) с целью получения от Пользователя защищаемой информации или его учетных данных в ИС (логин и пароль). Злоумышленники - социальные инженеры для достижения своих целей могут эксплуатировать следующие особенности того или иного Пользователя: лень, спешка (паника), безразличие, профессиональный интерес, желание, жадность, сострадание, доверчивость, страх.

Основным способом реализации методов социальной инженерии является обман Пользователя. Поскольку социальная инженерия нацелена на слабости человека, а не на технические недоработки или уязвимости информационной системы, наиболее эффективным методом противодействия социальной инженерии является повышение осведомленности Пользователей о методах социальной инженерии.

Взаимодействие социального инженера с Пользователем бывает трех типов: контактное (личное), телефонное и взаимодействие через электронные каналы связи. Наиболее распространено взаимодействие через электронные каналы связи, в особенности по электронной почте.

При личном и телефонном общении Пользователь должен убедиться, что разговаривает именно с тем человеком, за которого себя выдает собеседник. При личном или телефонном взаимодействии социальный инженер обычно использует следующие тактики:

- представившись сотрудником технической поддержки какого-либо сервиса или службы, социальный инженер сообщает Пользователю о какой-либо поломке или нарушении в функционировании того или иного необходимого в работе сервиса, вызывая тем самым панику и заставляя Пользователя сообщить свои учетные данные;
- представившись руководителем высокого ранга, социальный инженер изображает гнев и недовольство действием или бездействием Пользователя, вынуждая сообщить учетные данные или иную конфиденциальную информацию;
- представившись сотрудником организации, деятельность которой так или иначе может быть интересна Пользователю вынуждает сообщить учетную или иную конфиденциальную информацию;
- иные подобные тактики.

При взаимодействии через электронную почту, социальный инженер преследует одну из двух основных целей:

1) заражение АРМ Пользователя вредоносным программным обеспечением через запуск приложенного к письму файла или переходом по вредоносной ссылке;
2) переход Пользователя по поддельной ссылке, по которой находится точная копия формы авторизации легального сервиса и ввод в эту форму идентификационной информации (как правило, при первом вводе логина и пароля поддельная форма сообщает о неправильном вводе пароля и перенаправляет на настоящую форму авторизации сервиса).

Наиболее распространенные примеры применения методов социальной инженерии с использованием каналов электронной почты:

- письмо от налоговой инспекции с предложением установить из вложенного файла новые формы для сдачи налоговых деклараций;

- письмо из банка о просроченном платеже по кредиту, подробности во вложенном файле;
- письмо из суда о возбуждении административного/уголовного дела, подробности во вложении;
- письмо от провайдера об одностороннем изменении тарифного плана, подробности во вложении;
- письмо от банка (или любого другого учреждения) о блокировке учетной записи на сайте или личного кабинета, необходимо пройти по ссылке, ввести учетные данные и вручную разблокировать личный кабинет или учетную запись;
- письмо от сервиса электронной почты (gmail.com, mail.ru, yandex.ru и т. п.) о грядущей блокировке почтового ящика, об исчерпании свободного места и т. д., необходимо пройти по ссылке, ввести учетные данные и выполнить некоторые действия.

При работе с электронной почтой в контексте противодействия методам социальной инженерии Пользователь руководствуется следующей информацией:

- совпадение адреса отправителя электронного письма с доверенным адресом не является гарантией подлинности самого письма, поскольку поле «от кого» может быть подделано злоумышленником;
- любые письма с вложениями являются подозрительными;
- любые письма, в которых отсутствует альтернативная контактная информация отправителя (ФИО, должность, мобильный, рабочий телефон, почтовый адрес) являются подозрительными;
- при получении неожидаемого электронного письма с вложением или ссылкой от якобы доверенного отправителя, необходимо по альтернативным каналам связи (лично, по телефону, через мессенджер) уточнить факт отправки такого письма;
- государственные и иные организации (банки, операторы связи и т. д.) не уведомляют своих клиентов о каких-либо проблемах, исках, блокировках по электронной почте, это делается официальным письмом на бумажном носителе, через СМС (например, в случае подключенного онлайн банкинга) или по телефону;
- необходимо тщательно проверять корректность ссылок, по которым просят пройти в письме, чаще всего злоумышленники используют похожие, но другие доменные имена, чтобы ввести Пользователя в заблуждение, например, заменяя букву “b” на букву “d” или цифру “1” на букву “l” и наоборот.

Атаки социальных инженеров могут быть веерными (нацеленными на как можно большее число жертв), так и целенаправленными (нацеленными на конкретную организацию или на конкретного человека). В случае целенаправленных атак, социальный инженер изучает информацию о потенциальной жертве и об организации из открытых источников (сайт компании, сайты партнеров и контрагентов, электронные биржи труда, социальные сети, новостные ленты и прочие ресурсы). В случае, если о Пользователе публикуется информация в открытых источниках или он сам публикует информацию о своем месте работы, роде деятельности, должностных обязанностях, Пользователь должен быть готов к применению этой информации социальным инженером против него.

В случае подозрения Пользователя на применение против него методов социальной инженерии, Пользователь незамедлительно сообщает о данном факте Администратору.

РАБОТА СО СЪЕМНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ ИНФОРМАЦИИ

Пользователю разрешается использовать только учтенные съемные носители информации в ИС (флешки, съемные жесткие диски, карты памяти и пр.).

При необходимости использования для исполнения служебных обязанностей съемных носителей информации Пользователь в письменной форме делает запрос Администратору на выдачу учтенного съемного носителя информации. Пользователь расписывается за получение и сдачу учтенного съемного носителя информации в Журнале учета носителей информации.

При необходимости выноса съемного носителя из помещения, Пользователь обеспечивает защиту съемного носителя от утери, кражи или компрометации защищаемой информации на этом носителе.

В случае утери, кражи или компрометации учтенного носителя, Пользователь оперативно сообщает об этом Администратору.

Пользователь несет ответственность за сохранность выданных ему съемных носителей информации и за конфиденциальность защищаемой информации, записанной на него.

Приложение 3

РЕГЛАМЕНТ ПРОЦЕССА «СТРУКТУРИЗАЦИИ ВЕБ-КОНТЕНТА»

1. Общие положения

Настоящий документ является регламентом выполнения процесса «Структуризации веб-контента» и разработан в целях:

- Упорядочивания текста по информационным блокам и его организации в местоположении удобном для восприятия пользователями;
- Создания динамически формируемого контента с помощью техники чтения пользователей;
- Оценки структуризации контента с помощью точек фиксации пользователей, основанных на тепловой карте контента.

2. Содержание деятельности

Содержанием деятельности по процессу является организация формирования контента за счет своевременного и полного информационного обеспечения. Направлена на осуществление информационного воздействия на пользователей, сбора данных о восприятии контента пользователями и динамического структурирования контента на основе этих данных, путем разбиения текста на информационные блоки по семантической значимости слов, определения расстояния между ними, и путем оценки целесообразности структуризации контента на основе тепловой карты.

3. Ответственный за процесс

Ответственным за процесс является контент-менеджер.

4. Исполнители процесса

Исполнителями процесса являются:

- Контент-менеджер;
- Подсистема «Мониторинга процесса восприятия»;
- Подсистема «Создания и адаптации контента»;
- Подсистема «Редактирования контента на основе web-mining».

5. Входы процесса

Таблица 29.Входы процесса

Вход функции	**Поставщик**	**Время поступления**
Параметры семантической значимости слов	Подсистема «Редактирования контента на основе web-mining»	К началу процесса
Контент	Контент-менеджер	К началу процесса

6. Выходы процесса

Таблица 30.Выходы процесса

Выход процесса	**Получатель**	**Время выхода**
Параметры информационных блоков	Подсистема «Создания и адаптации контента»	К началу процесса
Параметры способа подачи контента	Подсистема «Мониторинга процесса восприятия»	При необходимости в любое время
Оценка структуризации контента	Контент-менеджер	При необходимости в любое время

7. Декомпозиция процесса

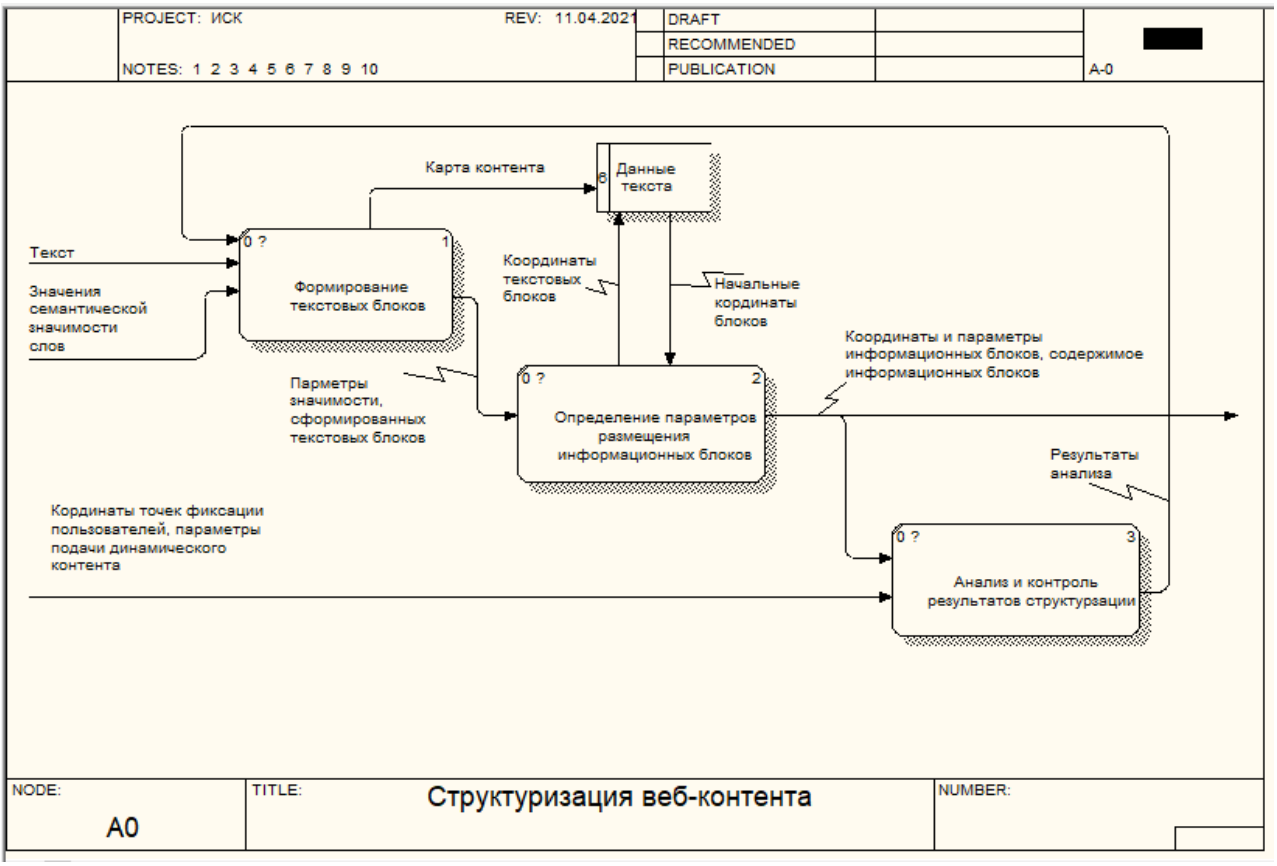


Рисунок 5. Диаграмма DFD: контекстная диаграмма декомпозиции информационного обеспечения подсистемы структуризации веб-контента

F_1- Формирование текстовых блоков;

F_{11}— Построение онтологии предметной области;

F_{12}- Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста;

F_{13}-Определение весов сепараторов;

F_2- Определение параметров размещения информационных блоков;

F_{21}- Определение способа подачи контента;

F_{22}- Определение координат информационных;

F_3- Контроль и анализ результатов структуризации.

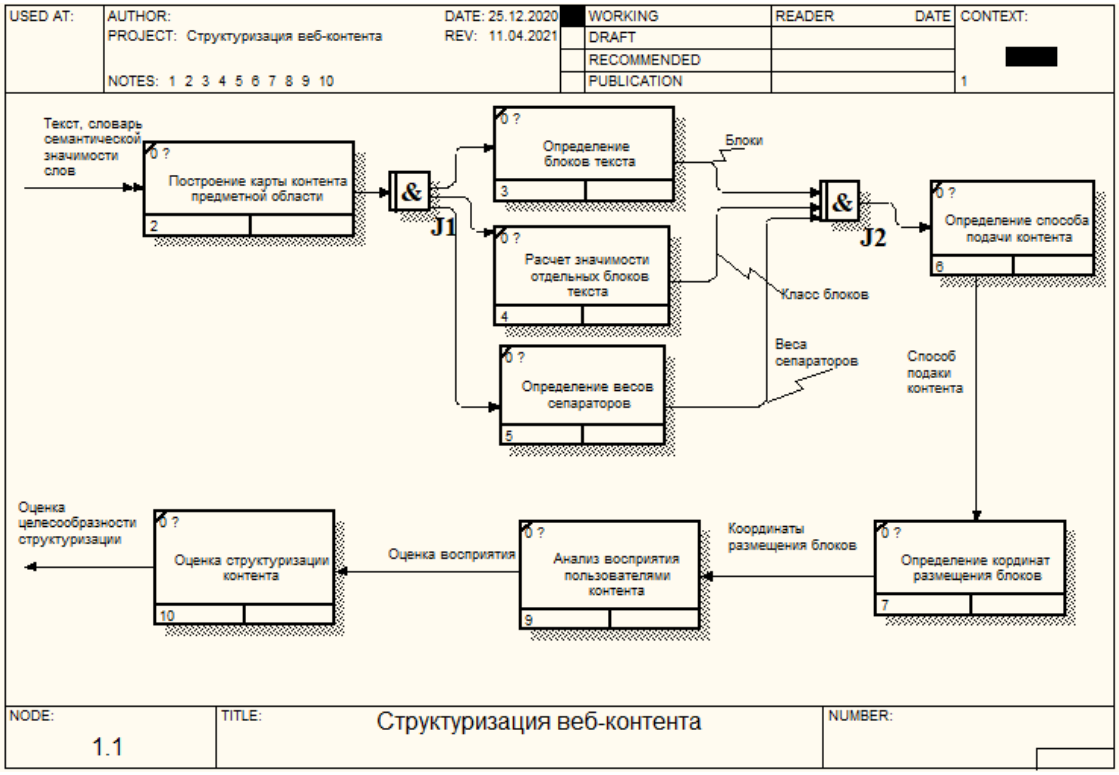


Рисунок 6. Сценарий работы подсистемы «Структуризации веб-контента»

8. Матрица ответственности процесс

Таблица 31.Матрица ответственности процесса

Подпроцессы	**Должности**
	Контент-менеджер
Формирование текстовых блоков	ИН
Контроль и анализ результатов структуризации	ИН

Расшифровка сокращений:

ОТ –ответственный за выполнение подпроцесса.

УЧ –участвует в выполнение подпроцесса.

ИН –получает информацию о ходе и результатах процесса (в виде организационно-распорядительных документах или отчетных).

9.Описание схемы подпроцессов

9.1. Подпроцесс «Формирование текстовых блоков»

Ответственым за выполнение данного процесса является сотрудник на должности «Контент-менеджер».

Данный подпроцесс выполняется при каждом процессе «Структуризации веб-контента» при поступлении текста.

Таблица 32. Входы функции

Вход функции	**Поставщик**	**Время поступления**	**Форма представления**
Контент	Контент-менеджер	К началу процесса	В электронном виде в формате txt
Параметры семантической значимости слов	Подсистема «Редактирования контента на основе web-mining»	К началу процесса	В электронном виде в формате json

Таблица 33.Выходы процесса

Выход процесса	Получатель	Время выхода
Карта контента (R, C, W-вес сепаратора)	-	После каждого окончания подпроцесса

Требования к качеству:

Результатом выполнения процесса должны стать сохраненные в БД параметры карты контента.

9.2. Подпроцесс «Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста»

Ответственым за выполнение данного процесса является сотрудник на должности «Контент-менеджер».

Данный подпроцесс выполняется в каждом процессе структуризации веб-контента.

Таблица 34. Входы функции

Вход функции	Поставщик	Время поступления	Форма представления
Карта контента	_____	После каждого составления карты контента	В электронном виде в формате json
Начальные параметры блоков	_____	В начале подпроцесса	В электронном виде в формате json

Таблица 235.Выходы процесса

Выход процесса	Получатель	Время выхода
Вид подачи контента	Подсистема «Мониторинга процесса восприятия контента»	После каждого окончания подпроцесса
Координаты начала блока (x,y), ширины (c) и высоты (h)	Подсистема «Создания и адаптации веб-контента»	После каждого окончания подпроцесса

Требования к качеству:

Результатом выполнения процесса должны стать сохраненные в базе данные координаты блоков. По этим данным будет происходить размещение контента на веб-ресурсе.

9.3. Подпроцесс «Контроль и анализ результатов структуризации»

Ответственым за выполнение данного процесса является сотрудник на должности «Контент-менеджер».

Данный подпроцесс выполняется после размещения контента на веб-ресурсе.

Таблица 36. Входы функции

Вход функции	Поставщик	Время поступления	Форма представления
Координаты точек фиксации пользователей	Подсистема «Мониторинг процесса восприятия контента»	В начале подпроцесса	В электронном виде в формате json
Параметры размещения текстовых блоков	_____	В начале подпроцесса	В электронном виде в формате json

Таблица 37.Выходы процесса

Выход процесса	Получатель	Время выхода

Оценка структуризации веб-контента	Контент-менеджер	После каждого окончания подпроцесса

Требования к качеству:

Результатом выполнения процесса должны стать сохраненные в базе данные результаты структуризации веб-контента. По этим данным контент-менеджер будет принимать решения по ручному изменению формы подачи контента.

Приложение 4

РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

4.1.ВВЕДЕНИЕ

4.1.1. Область применения

Осуществление информационного воздействия в Интернет-пространстве.

4.1.2. Краткое описание возможностей

Инструмент структуризации веб-контента предназначен для автоматизированной поддержки процесса формирования инновационного контента посредством создания его структуры и в заданной форме представления его пользователю, основанном на онтологическом подходе с помощью семантической значимости слов и тепловой карты контента, с целью обеспечения информационного воздействия на пользователей.

4.1.3. Уровень подготовки пользователя

Пользователь инструмента структуризации веб-контента должен быть инструктирован к правилам проведения эксперимента, должен обладать уверенными знаниями о предметной области предприятия, а также обладать опытом работы с ПК и современными версиями таких браузеров, как GoogleChrome или MozillaFirefox.

4.2. НАЗНАЧЕНИЕ И УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ

4.2.1. Виды деятельности, функции, для которых предназначено данное средство

Инструмент структуризации веб-контента предназначена для информационного обеспечения подсистем «Мониторинг процесса восприятия контента на веб-ресурсе» параметрами информационных блоков и «Адаптации и создания контента» координатами и параметрами информационных блоков для последующего размещения контента на веб-ресурсе.

4.2.2. Условия, при соблюдении которых обеспечивается применение средства в соответствии с назначением

Так как инструмент располагается на сервере предприятия, то работа с системой возможна в случае, если запущена серверная часть CMS.

Для корректного отображения пользовательского интерфейса CMS рекомендуется использование современных версий браузеров GoogleChrome или MozillaFirefox.

4.3.ПОДГОТОВКА К РАБОТЕ

4.3.1. Состав и содержание дистрибутивного носителя данных

Дистрибутив программного обеспечения предоставляется в виде архивированного файла «ISK.zip», внутри которого содержатся следующие файлы и папки:

1. Папка «server» – серверная часть инструмента;
2. Файл «package.json» – хранит список всех дополнительных библиотек, необходимых для работы инструмента.

4.3.2. Порядок загрузки данных и программ

Установка инструмента структуризации веб-контента осуществляется в следующем порядке:

1. Распаковать архив «ISK.zip» в любую директорию на компьютере;
2. Произвести установку дополнительных библиотек, описанных в папке «package»
3. После окончания установки библиотек, перезагрузить компьютер

3.4. ОПИСАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

3.4.1. Описание всех выполняемых задач, функций

Таблица 38. Описание всех выполняемых задач, функций

Задача	**Операция**
F_1 – Формирование текстовых блоков	F_{1-1} – Построение онтологии предметной области
	F_{1-2} – Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста
	F_{1-3} – Определение весов сепараторов
F2 - Определение параметров размещения информационных блоков	F_{2-1} – Определение способа подачи контента F_{2-2} – Определение координат информационных блоков
F3 - Анализ и контроль результатов структуризации	F_{3-1} – Оценка структуризации контента

3.4.2. Описание операций технологического процесса обработки данных, необходимых для выполнения задач

Операции $F_{1-1} - F_{3-1}$ выполняются в автоматизированном режиме.



Рисунок 7. структура передаваемого Json-файла

Где «x» – координата информационного блока по оси x; «y» – координата информационного блока по оси y; «h» – высота информационного блока; «c» – ширина информационного блока.

Приложение 5

ПРОГРАММА И МЕТОДИКА ПРИЕМОЧНЫХ ИСПЫТАНИЙ

5.1. Объект испытаний

5.1.1. Полное наименование системы, обозначение

Полное наименование системы: Инструмент структуризации веб-контента.

5.1.2. Комплектность испытательной системы

В состав программного комплекса входят следующие компоненты: см. Руководство пользователя – Состав и содержание дистрибутивного носителя данных.

5.2. Цель испытаний

Целью проведения испытаний является:

1. Оценка соответствия системы требованиям технического задания (верификация);
2. Оценка работоспособности системы (валидация).

5.3. Общие положения

5.3.1. Место и продолжительность испытаний

Место испытаний: Россия, Московская область, г. Москва, Ходынское поле 8.
Продолжительность испытаний: 3 часа.

5.3.2. Участники испытаний

1. Заказчик – АО «МОСИНЖПРОЕКТ» г. Москва:
    - Руководитель группы тестировани Белослудцев А.А. г. Москва,
    - Руководитель отдела внедрения ИС Муромцев В.А. г. Москва.
2. Разработчик – студентка Гущенкова А.И.

5.3.3. Документы, предъявляемые на испытания

1. Техническое задание на программную систему;
2. Руководство пользователя системы;
3. Общее описание системы.

5.3.4. Документы, оформляемые в процессе испытаний и по их завершении

1. Протокол испытаний. Подготавливается Разработчиком, заполняется и утверждается Заказчиком.
2. Акт внедрения. Подготавливается Разработчиком, утверждается Разработчиком и Заказчиком.

5.3.5. Материально-техническое обеспечение испытаний

Испытания проводятся на рабочей станции Разработчика:
1. ПК с установленной операционной системой Windows 10;
2. 8 Гб оперативной памяти, 120 Гб на жестком диске;

3. Наличие предустановленных Node.js и MongoDB.

5.4. Условия и порядок проведения испытаний

5.4.1. Подготовительный этап испытаний

Данный этап предполагает следующее:

1. Проверка комплектности системы, комплектности документации.
   - Осуществляется сопоставление состава предоставленной документации требованиям. Выполняется Заказчиком. Запись о результатах проверки вносится в протокол испытаний.
2. Подготовка программной системы к испытаниям.
   - Данный этап включает в себя установку программной системы, настройку прав доступа пользователей, конфигурирование системы. Выполняется Разработчиком.
3. Подготовка пользователей для выполнения испытаний.
   - На данном этапе должен быть проведен инструктаж Заказчика по порядку использования программной системы. Выполняется Разработчиком.

5.4.2. Проведение испытаний программной системы

Испытания программной системы управления контентом выполняются в следующем порядке:

1. Проверка корректности установки программной системы.
   - На данном этапе осуществляется запуск программной системы и проверяется доступность подсистем мониторинга процесса восприятия контента, редактирования контента на основе web-mining и создания и адаптации веб-ресурса. Соответствующая запись вносится в протокол испытаний.
2. Проверка функциональных возможностей системы:
   Задача 1: Формирование текстовых блоков;
   - Построение онтологии предметной области;
   - Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста;
   - Определение весов сепараторов;

   Задача 2: Определение параметров размещения информационных блоков;
   - Определение способа подачи контента;
   - Определение координат информационных блоков;

   Задача 3: Оценка результатов структуризации.

5.5. Испытание функций

Таблица 39. Программа испытаний

Задача	Последовательность действий	Входные данные	Выходные данные
Построение онтологии предметной области	1. Запуск программы	Контент {text1}, {text2}, {text3} словарь семантической значимости - slv	Клетчатка, углевод, пустотелые, волокна, клеточные оболочки, растений, полисахарид не переваривается, желудке, тонком кишечнике, человека, функций, пищевые

			волокна, отождествляются, совокупность компонентов, продуктов, не перевариваются, желудке, тонком кишечнике, нерастворимыми, пектины, слизи, камеди, декстраны, гемицеллюлозу, полисахарид, целлюлоза, соединения, видов, группы. 1, 4, 5, 6, 4, 3, 2, 5, 7, 8, 3, 4, 1, 5, 6, 6, 4, 3
Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста	-		Клетчатка, углевод, пустотелые, волокна, клеточные оболочки, растений, полисахарид не переваривается, желудке, тонком кишечнике, человека, функций, пищевые волокна, отождествляются, совокупность компонентов, продуктов, не перевариваются, желудке, тонком кишечнике, нерастворимыми, пектины, слизи, камеди, декстраны, гемицеллюлозу, полисахарид, целлюлоза, соединения, видов, группы. 1, 4, 5, 6, 4, 3, 2, 5, 7, 8, 3, 4, 1, 5, 6, 6, 4, 3
Определение весов сепараторов	-	-	W-вес сепаратора = 1,5; 2; 2
Определение способа подачи	-	S_1- F-паттерн, S_2 – Z-паттерн	S_1

контента			
Определение координат информационных блоков	-	X – 103 px Y – 270 px	Блока 1 X – 103 px Y – 270 px h – 325 px c – 986 px Блок 2 X – 103 px Y – 270 px h – 143 px c – 633 px Блок 3 X – 103 px Y – 270 px h – 203 px c – 633 px
Оценка результатов структуризации	1. Нажатие на кнопку «Оценка»	(105;340), (130;504), (302,593), (590;302) (105;340), (130;504), (302,593), (590;302), (105;340), (130;504), (323,493), (590;332), (105;340), (130;304), (302,593), (590;307)	Str=0

Разработчик А.И. Гущенкова

Приложение 6

ПРОТОКОЛ ИСПЫТАНИЙ

1. Наименование объекта испытаний и список должностных лиц, проводивших испытания

1.1. Полное наименование системы и её условное обозначение

Полное наименование системы: Инструмент структуризации веб-контента.

1.2. Участники испытаний

Заказчик – АО «МОСИНЖПРОЕКТ» г. Москва:
- Руководитель группы тестировани Белослудцев А.А. г. Москва,
- Руководитель отдела внедрения ИС Муромцев В.А. г. Москва.

Разработчик – студентка Гущенкова А.И.

1.3. Цель испытаний

Целью проведения испытаний является:
1. Оценка соответствия системы требованиям технического задания (верификация);
2. Оценка работоспособности системы (валидация).

2. Результаты наблюдений за испытаниями

Таблица 40. Результаты испытаний

Пункт программы испытаний	Отметка о выполнении (наличие особых условий при испытании)	Сведения об отказах и отклонениях, выявленных при испытаниях
Проверка корректности установки программной системы	Система управления медийным контентом успешно запущена	Отказы отсутствуют
Построение онтологии предметной области	Задача выполнена успешно	Отказы отсутствуют
Определение блоков текста и расчет значимости отдельных блоков текста	Задача выполнена успешно	Отказы отсутствуют
Определение весов сепараторов	Задача выполнена успешно	Отказы отсутствуют
Определение способа подачи контента	Задача выполнена частично	Отказы отсутствуют. Недостаточно проработан вопрос медиафайлов.
Определение координат информационных блоков	Задача выполнена успешно	Отказы отсутствуют

Оценка результатов структуризации	Задача выполнена частично	Отказы отсутствуют. Недостаточно оценки только со стороны восприятия пользователей.

3. Заключение на результаты испытаний

Инструмент структуризации веб-контента соответствует требованиям, большинство задач выполнено успешно, обнаружены отклонения в задачах, связанных с выбором способа подачи контента и с оценкой результатов структуризации контента. Отклонения не критически влияют на работоспособность системы.

Разработчик _____ А.И. Гущенкова

Дата проведения испытаний: 20.05.2021

Приложение 7

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

«УТВЕРЖДАЮ»
Заведующий кафедрой
_____ Гвоздевой Т.В.

Дата: 20.05.2021

АКТ

о внедрении результатов
выпускной квалификационной работы

Исполнитель проекта: Гущенкова Александра Игоревна
Фамилия, имя отчество

Руководитель проекта: Гвоздева Татьяна Вадимовна
Фамилия, имя отчество

Комиссия в составе: председатель
Члены комиссии_____

составила настоящий акт о том, что результаты выпускной квалификационной работы «Разработка инструмента структуризации веб-контента на основе онтологического подхода» внедрены в процесс продвижения инноваций на предприятие АО «МОСИНЖПРОЕКТ» г. Москва с целью организации воздействия на деловое окружение в открытом информационном пространстве.

Внедрение инструмента структуризации веб-контента позволяет:

1. Формировать текстовые блоков;
2. Определять параметры размещения информационных блоков;
3. Осуществлять оценку результатов структуризации.

Задачи инструмента структуризации веб-контента является актуальной и востребованной как в научной, так и в коммерческой сферах. Для дальнейшего развития инструмента структуризации контента необходимо расширить функционал с помощью построения динамического сценария подачи контента под индивидуальные особенности пользователей. Для этого необходимо получать множество параметров о пользователе и на их основе организовывать индивидуальную подачу контента.

Вся документация по проекту: техническое задание на разработку ИС, технический проект с решениями по информационному, организационному, техническому и программному обеспечению, чертежи, программа и методика испытаний, протокол испытания, акт о внедрении, руководство пользователей, внедрена в соответствии
с областью ее распространения.

Председатель комиссии _____
Подпись

Член комиссии _____
Подпись

Член комиссии _____
Подпись

Разработчик Гущенкова А.И., студентка _____
Подпись

Приложение 1

Должностная инструкция системного администратора

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор
Фамилия И.О. _____
«_____»_____ ____ г.

1. Общие положения

1.1. Системный администратор относится к категории специалистов.
1.2. Системный администратор назначается на должность и освобождается от нее приказом генерального директора компании по представлению технического директора / руководителя структурного подразделения.
1.3. Системный администратор подчиняется непосредственно техническому директору / руководителю структурного подразделения.
1.4. На время отсутствия системного администратора его права и обязанности переходят к другому должностному лицу, о чем объявляется в приказе по организации.
1.5. На должность системного администратора назначается лицо, отвечающее следующим требованиям: высшее профессиональное (техническое, математическое, экономическое) образование и стаж аналогичной работы не менее полугода.
1.6. Системный администратор должен знать:
- технико-эксплуатационные характеристики, конструктивные особенности, назначение и режимы работы оборудования, правила его технической эксплуатации;
- аппаратное и программное обеспечение сетей;
- принципы простейшего ремонта аппаратного обеспечения;
- нормализованные языки программирования;
- действующие стандарты, системы счислений, шифров и кодов;
- методы программирования;
- системы организации комплексной защиты информации, способы предупреждения несанкционированного доступа к информации.
1.7. Системный администратор руководствуется в своей деятельности:
- законодательными актами РФ;
- Уставом компании, Правилами внутреннего трудового распорядка, другими нормативными актами компании;
- приказами и распоряжениями руководства;
- настоящей должностной инструкцией.

2. Должностные обязанности системного администратора

Системный администратор выполняет следующие должностные обязанности:
2.1.Устанавливает на серверы и рабочие станции сетевое программное обеспечение.
2.2. Конфигурирует систему на сервере.
2.3. Обеспечивает интегрирование программного обеспечения на файл-серверах, серверах систем управления базами данных и на рабочих станциях.
2.4. Поддерживает рабочее состояние программного обеспечения сервера и рабочих станций.
2.5. Регистрирует пользователей, назначает идентификаторы и пароли.
2.6. Обучает пользователей работе в сети, ведению архивов; отвечает на вопросы пользователей, связанные с работой в сети; составляет инструкции по работе с сетевым программным обеспечением и доводит их до сведения пользователей.

2.7. Контролирует использование сетевых ресурсов.
2.8. Организует доступ к локальной и глобальной сетям.
2.9. Устанавливает ограничения для пользователей по:
- использованию рабочей станции или сервера;
- времени;
- степени использования ресурсов.
2.10. Обеспечивает своевременное копирование и резервирование данных.
2.11. Участвует в восстановлении работоспособности системы при сбоях и выходе из строя сетевого оборудования.
2.12. Проводит мониторинг сети, разрабатывает предложения по развитию инфраструктуры сети.
2.13. Обеспечивает:
- сетевую безопасность (защиту от несанкционированного доступа к информации, просмотра или изменения системных файлов и данных);
- безопасность межсетевого взаимодействия.
2.14. Готовит предложения по модернизации и приобретению сетевого оборудования.
2.15. Осуществляет контроль за монтажом оборудования специалистами сторонних организаций.
2.16. Выполняет отдельные служебные поручения своего непосредственного руководителя.

3. Права системного администратора

Системный администратор имеет право:
3.1. Устанавливать и изменять правила пользования сетью.
3.2. Знакомиться с проектами решений руководства предприятия, касающимися его деятельности.
3.3. Представлять руководству предложения по совершенствованию своей работы и работы компании.
3.4. Сообщать своему непосредственному руководителю о всех выявленных в процессе своей деятельности недостатках и вносить предложения по их устранению.
3.5. Запрашивать лично или по поручению руководства предприятии от руководителей структурных подразделений и специалистов информацию и документы, необходимые для выполнения его должностных обязанностей.
3.6. Требовать от руководства создания нормальных условий для выполнения служебных обязанностей и сохранности всех документов, образующихся в результате деятельности компании.
3.7. Принимать решения в пределах своей компетенции.

4. Ответственность системного администратора

Системный администратор несет ответственность:
4.1. За невыполнение и/или несвоевременное, халатное выполнение своих должностных обязанностей.
4.2. За несоблюдение действующих инструкций, приказов и распоряжений по сохранению коммерческой тайны и конфиденциальной информации.
4.3. За нарушение правил внутреннего трудового распорядка, трудовой дисциплины, правил техники безопасности и противопожарной безопасности.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Кобзева Алексея Николаевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Эргодические свойства перекладывааний отрезков и некоторых их обобщений» являются: Раздел 3. Построение примера, 4.1 Лемма, 4.2 Лемма, 4.3 Лемма, 4.4 Теорема.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: Изучение имеющихся статей, посвященных перекладыванию отрезков с двумя эргодическими мерами. Консультация с преподавателями факультета Математики НИУ ВШЭ и научным руководителем. Проведено выступление на научном семинаре «Динамические системы» от НИУ ВШЭ.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится/состоялась 15.06.2021. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.



Кобзев Алексей Николаевич

06.06.2021 г. Москва, Россия

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Кобзев Алексей Николаевич

Эргодические свойства перекладываний отрезков и некоторых их обобщений

Дипломная работа студента 4 курса
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
Кандидат физико-математических
наук, доцент
Скрипченко Александра Сергеевна

Москва 2021

Содержание

1. Введение **3**

2. Предварительные сведения **4**
2.1. Определение: . . . 5
2.2. Лемма (I.D.O. condition): . . . 5
2.3. Лемма: . . . 6
2.4. Теорема Кина: . . . 6
2.5. Определение: . . . 6
2.6. Теорема Мазура - Вича: . . . 6
2.7. Теорема Катка: . . . 7
2.8. Определение: . . . 7
2.9. Пример: . . . 7
2.10. Пример: . . . 9
2.11. Теорема: . . . 10
2.12. Теорема Athreya-Chaika [18]: . . . 11
2.13. Теорема Chaika-Masur [19]: . . . 11

3. Построение примера **11**
3.1. Теорема: . . . 14

4. Нахождение оценок для $\hat{A}_{n,m}$: **14**
4.1. Лемма: . . . 14
4.2. Лемма: . . . 14
4.3. Лемма: . . . 15
4.4. Теорема: . . . 15

5. Эргодические свойства ITM **16**
5.1. Определение: . . . 16
5.2. Определение: . . . 17
5.3. Теорема: . . . 17
5.4. Теорема: . . . 19

6. Эргодические свойства систем изометрий **19**
6.1. Определение: . . . 19
6.2. Определение: . . . 20
6.3. Определение: . . . 21
6.4. Пример: . . . 21
6.5. Теорема Мартина: . . . 22
6.6. Теорема (Дынников-Хьюберт-Скрипченко): . . . 22

Аннотация
В этой работе мы рассмотрим примеры перекладываний отрезков и их обобщений, допускающих две и более эргодические меры. Некоторые из описанных в работе примеров были известны, а другие впервые построены автором.

1. Введение

Для $\alpha \in (0,1)$, отображением поворота называется отображение

$$T : x \mapsto x + \alpha \ (mod\ 1),$$

определенное на единичном интервале.

Эргодические свойства поворота окружности уже давно изучены, начиная с теоремы Якоби о классификации его орбит. Одним из возможных обобщений поворота является перекладывание отрезков. Пусть отрезок I разбит на n подинтервалов и пусть τ перестановка n элементов. Тогда перекладыванием отрезков называется биекция $T : I \to I$, которая по ограничении на каждый из подинтервалов является сдвигом, а подинтервалы переставляются между собой в соответствии с τ.

Перекладывания отрезков возникают как отображения первого возвращения на трансверсаль в случае ориентируемого измеримого слоения на ориентируемой поверхности или, например, как отображение первого возвращения на трансверсаль для бильярдного потока в рациональном многоугольнике.

Впервые перекладывания отрезков были упомянуты В. Арнольдом в 1963 году, он рассмотрел перекладывания на трех отрезках. Общий случай перекладывания отрезков был описан В. Оселедцем в 1968 году.

Отображение называется минимальным, если орбита каждой точки всюду плотна. В работе [1] 1975 года, М. Кин сформулировал достаточное условие для минимальности: перекладывание отрезков будет удовлетворять условию Кина, если никогда не произойдет так, что при применении отображения перекладывания к одной из граничных точек, мы попадем в другую граничную точку. В той же работе М. Кин доказал, что почти все перекладывания отрезков являются минимальными и сформулировал гипотезу, которая в дальнейшем была независимо доказана Х. Мазуром и В. Вичем в работах [3] и [4] соответственно: почти все перекладывания отрезков являются строго эргодичными.

Примеры минимальных перекладываний отрезков допускающих две и более меры, впервые были построены в работах Кейнса - Ньютоном [2] и М. Кина [16].

В дальнейшем были получены:

Оценка на число инвариантных эргодическим мер А. Катком в работе [15]: перекладывание отрезков не может иметь более чем m инвариантных эргодических мер, где m - род поверхности, построенной по перекладыванию.

Первое доказательство эффективности этой оценки было получено Е. Сатаевым [28]. Также этот результат был получен Д. Фикеншером [20].

Оценка на Хаусдорфову размерность множества минимальных перекладыванний отрезков с флипами была сделана А. Скрипченко и С. Трубецким в работе [27в].

Перекладывания отрезков допускают несколько обобщений, эргодические свойства которых представляют самостоятельный интерес. Одно из них - отображение сдвигов отрезков (ITM). ITM, представленное М. Бошерницаном и И. Корнфелдом в работе [6] 1995 года, разделяется на два типа: конечный и бесконечный. ITM конечного типа по сути эквивалентно перекладываниям, в то время как ITM бесконечного типа представляют собой другие динамические системы. В той же работе, М. Бошерницаном и И. Корнфелдом сформулировано несколько интересных проблем, в том числе вопрос о количестве инвариантных мер для отображения сдвигов отрезков. Некоторые из этих проблем были решены для особого класса отображения сдвигов - двойных вращений. В том числе было показано, что почти все двойные вращения строго эргодичны.

Известно, что возможное число эргодических инвариантных мер для таких отображений не больше двух, однако этот вопрос по-прежнему мало изучен. Имеющиеся результаты изложены в (2) разделе работы.

Системы изометрий - еще одно обобщений перекладываний отрезков. С каждой системой изометрий ассоциируется двумерный комплекс со слоением на нем. Системы изометрий также классифицируются на четыре типа: поверхностный, симплициальный, торический, тонкий. Системы изометрий тонкого типа являются аналогом ITM бесконечного типа.

Известные результаты о числе инвариантных эргодических мер для слоений, ассоциированных с системами изометрий тонкого типа, изложены в разделе (5) работы.

В работе содержится краткий обзор имеющихся результатов, а также построен новый пример перекладывания отрезков с двумя мерами.

2. Предварительные сведения

В этом разделе мы приведем краткий обзор на известные результаты касательно перекладываний отрезков.

2.1. Определение:

Пусть $X = [0, 1)$ и X разбит на $X_1, ..., X_n$, n - целое число большее двух. Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ - вероятностный вектор и τ - перестановка чисел $\{1, ..., n\}$.

Тогда полагаем $\beta_0 = 0$ и $\beta_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j$. Теперь положим $X_i = [\beta_{i-1}, \beta_i)$.

Тогда определим α^τ и соответствующие β_i^τ и X_i^τ:

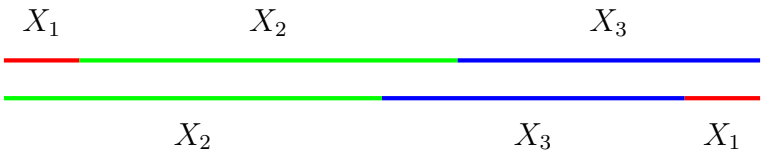
$$\alpha^\tau = (\alpha_{\tau^{-1}(1)}, ..., \alpha_{\tau^{-1}(1)}),\ \beta_i^\tau = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j^\tau,\ X_i^\tau = [\beta_{i-1}^\tau, \beta_i^\tau).$$

Теперь зададим отображение $T : X \to X$ следующим образом:

$$T(x) = x - \beta_{i-1} + \beta_{\tau(i)-1}^\tau, \forall x \in X_i, 1 \le i \le n.$$

T отображает биективно интервал X_i в интервал $X_{\tau(i)}^\tau$.

Отображением T называется перекладыванием отрезков и определяется парой (α, τ).



Перекладывание отрезков на трех подинтервалах

Некоторые свойства перекладываний:

1) Перекладывание T - обратимо и обратимое отображение является (α^τ, τ^{-1}) перекладыванием отрезков.

2) Пусть k - целое положительное число , тогда T^k тоже перекладывание отрезков.

3) Отображение T - кусочно непрерывное отображение.

2.2. Лемма (I.D.O. condition):

Если орбиты точек множества $D = \{\beta_1, ..., \beta_{n-1}\}$ бесконечны и различны, тогда перекладывание удовлетворяет условию минимальности.

Используя эту лемму, можно сформулировать достаточное условие "иррациональности"для минимальности. Будем называть перекладывание T иррациональным, если τ неприводимая перестановка (такую перестановку нельзя разбить на независимые части) и между длинами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ нет рационального соотношение не кратного $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$.

2.3. Лемма:

Если перекладывание отрезков T иррациональное, тогда T удовлетворяет условию минимальности.

Пусть $n \in \mathbf{Z}, n \geq 2$ и A_n - положительный конус в $\mathbf{R^n}$, то есть A_n - это множество таких $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R^n}$, где $a_i > 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Тогда мы можем рассматривать A_n как пространство параметров длин перекладывания отрезков.

2.4. Теорема Кина:

Почти все перекладывания отрезков, задаваемые перестановкой π, которую нельзя разбить на независимые части, минимальны.

В теореме Кина и в дальнейшем "почти все" значит относительно меры Лебега в пространстве параметров A_n.

2.5. Определение:

Непрерывное отображение $T : X \to X$ метризуемого компактного пространства X называется строго эргодичным, если для него существует только одна инвариантная борелевская вероятностная мера.

Если же существует больше инвариантных мер, то такое отображение называется нестрого эргодичным.

2.6. Теорема Мазура - Вича:

Почти все перекладывания отрезков являются строго эргодичными.

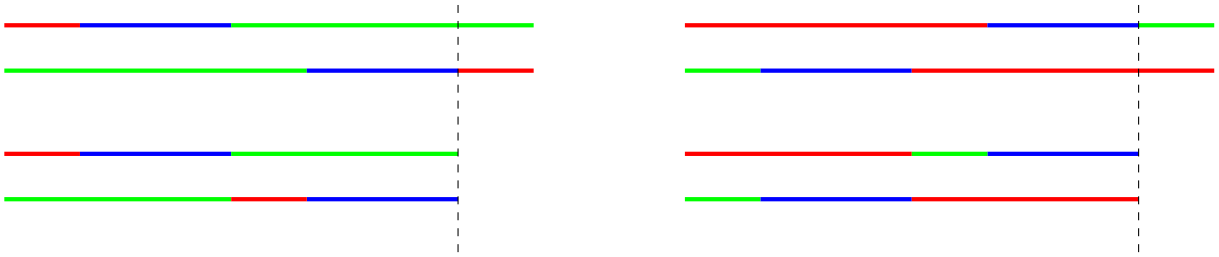
2.7. Теорема Катка:

Перекладывания отрезков не могут иметь более чем ровно n инвариантных мер, где n - род соответствующей поверхности, строящейся по перекладыванию.

2.8. Определение:

Основным интсрументом изучения эргодических свойств перекладывания отрезков является ренормализация. Индукция Рози - это основная процедура ренормализации, которая нам позволяет по исходному перекладыванию построить новое с точно таким же устройством орбит, но при этом с меньшим отрезком носителем. Впервые индукция Рози была представлена Жерардом Рози для перекладываний в работе [7] 1979 года.
Если индукция Рози для перекладывания не обрывается, то такое перекладывание будет минимальным.

Правая индукцией Рози: Рассмотрим перекладывание отрезков $T : I \to I$ на n подинтервалах интервала $I = [0, 1)$, тогда возьмем самые правые подинтервалы в образе и прообразе перекладывания. Затем индуцируем T на $[0, 1 - \lambda)$, где λ - это длина самого маленьково по длине правого подинтервала интервала I.
Левая индукция Рози определяется по аналогии.



Два случая правой индукции Рози для перекладывания отрезков

2.9. Пример:

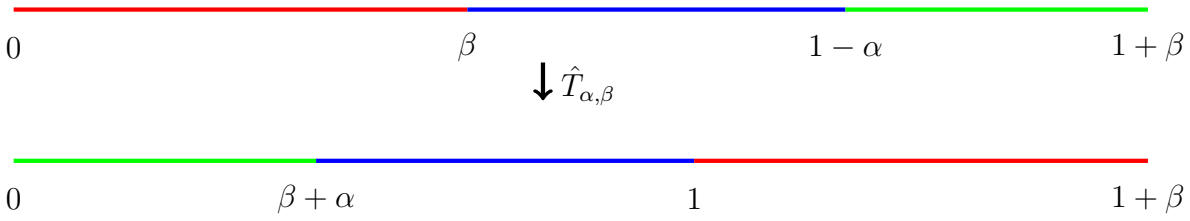
Рассмотрим первый пример не строго эргодичного перекладывания отрезков, представили Б. Кейнсом и Д. Ньютоном в работе [2]. Они построили

перекладывание отрезков, которое обладает в точности двумя эргодическими инвариантыми мерами, используя тот факт, что мера Лебега является инвариантной вероятностной мерой для любого перекладывания.

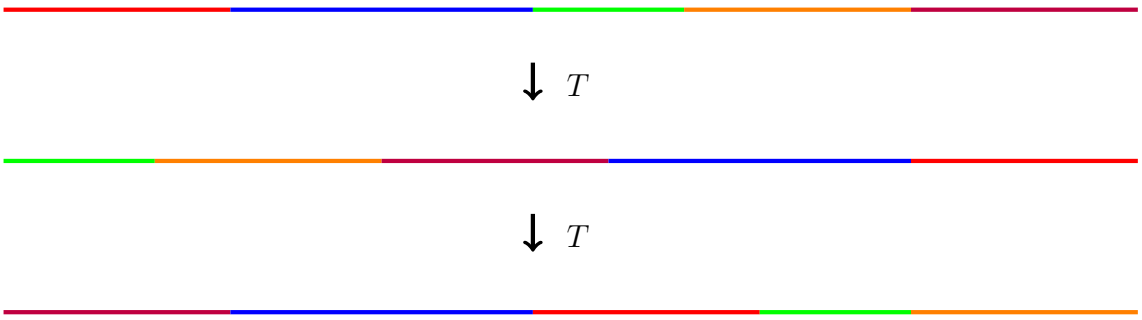
Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $T_\alpha(x) = x + \alpha \ (mod\ 1)$ - поворот. Возьмем произвольный β и определим

$$\hat{T}_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x+1 & , x \in [0,\beta) \\ x+\alpha \bmod 1 & , x \in [\beta, 1+\beta) \end{cases}$$

Видно, что мы получаем перекладывание трех подотрезков отрезка длины $1+\beta$.



Для удобства растянем и сожмем наш отрезок $T(x) = \frac{1}{1+\beta}\hat{T}_{\alpha,\beta}(x(1+\beta))$, чтобы далее рассматривать его как отрезок единичной длины. Тогда соответствующее перекладывание T будет задано (a,τ), где $a = (\frac{\beta}{1+\beta}, \frac{1-\alpha-\beta}{1+\beta}, \frac{\beta+\alpha}{1+\beta})$, а $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Рассмотрим перекладывание T^2, понятно, что такое отображение задает перекладывания на пяти отрезках:



Тогда перекладывание T^2 будет задано (a, τ), где $a = (\frac{\beta}{1+\beta}, \frac{1-\alpha-\beta}{1+\beta}, \frac{\beta}{1+\beta}, \frac{1-\alpha-\beta}{1+\beta}, \frac{1+\beta-2(1-\alpha)}{1+\beta})$, а $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Легко убедится в том, что для каждый элемент орбиты $x \in X$ под действием отображения T будет иметь вид $x + \frac{n_1+n_2\alpha}{1+\beta}$, где n_1 и n_2 - некоторые целые числа, которые выбираются таким образом, чтобы точка принадлежала X.

Тогда, выбираем β таким образом, чтобы оно не принадлежало множеству $\{n\alpha \ mod 1 : n \in \mathbf{Z}\}$. В таком случае, легко вычислить, что перекладывание T удовлетворяет условию I.D.O., поскольку в противном случае $\beta = (2 + n_1 - n_2) + \alpha(n_3 - n_4 - 1)$ для некоторых целых n_1, n_2, n_3, n_4, что мы исключаем.

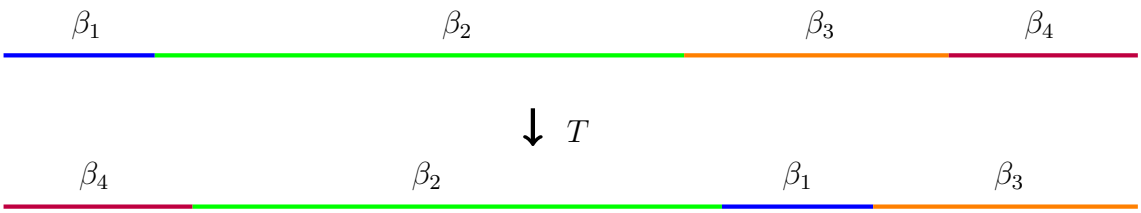
Далее вводим следующую функцию $f(x) = \chi_{[0,\beta)}(x) - \chi_{[\beta,1)}(x)$ и пусть найдется такая функция g, что $g(T_\alpha(x)) = f(x)g(x)$. Тогда определим функцию g' через следующую систему:

$$g'(x) = \begin{cases} g(x) & , x \in [0, \beta) \\ -g(x) & , x \in [\beta, 1) \\ -g(x-1) \bmod 1 & , x \in [1, 1+\beta) \end{cases}$$

Получается, что $g'(\hat{T}_{\alpha,\beta}(x)) = -g'(x)$, тогда, сделав замену $\bar{g}(x) = g'(x(1+\beta))$, $x \in [0, 1)$ получаем, что $\bar{g}(T(x)) = -\bar{g}(x)$, тогда $\bar{g}(T^2(x)) = \bar{g}(x)$ и следовательно функция будет являться инвариантной и не будет константой в силу условий построения, а значит мера Лебега не будет строго эргодична по отношению к T^2. Тогда рассмотрим меру μ, пусть она строго эргодична для T^2, тогда $\mu(T(B)) = \mu(T^{-1}(B))$, тогда $\frac{1}{2}(\mu + \mu \circ T)(B) = \frac{1}{2}(\mu + \mu \circ T)(T^{-1}(B))$, значит $(\mu + \mu \circ T)$ эквивалентно мере Лебега. Тогда мы можем взять $\nu = \mu \circ T$ и мы получим новую меру, которая также будет эквивалентна мере Лебега $\Rightarrow$ две эргодические меры.

2.10. Пример:

Рассмотрим пример, построенный М. Кином в работе [16]. Он построил перекладывание, обладающее двумя эргодическими инвариантными мерами. Идея построения примера заключается в конструкции T_{ind}, для которого доказываются дальнейшие утверждения про нестрогую эргодичность.



С помощью необходимого количества итераций отображения T, строится отображение $T_{ind} : \beta_4 \to \beta_4$. Нужно применять некоторое количество итераций T к подинтервалам интервала β_4 по отдельности, чтобы каждый из них снова вернулся в исходный интервал β_4. Вместе с этим накладываются условия, которые необходимы для корректного построения примера: чтобы отображение T_{ind} действительно было перекладыванием отрезков, а также, чтобы параметры, задающие исходное перекладывание отрезков, выражались линейно через параметры нового "индуцированного" перекладывания.

Тогда пусть перекладывание T будет задано (β, τ), где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, а $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Дальше формулируется теорема, которая будет представлена позже. Смысл теоремы заключается в том, что индуцированные перекладывания задаются парой $(\beta^{(k)}, \tau)$, из чего следует, что τ остается неизменным и $\beta^{(k)}$ - новый вектор длин, параметры которого линейно выражаются через параметры $\beta^{(k-1)}$. Понятно, что $\beta^{(1)} = \beta$. (Можно строить индуцированное перекладывание для подинтеравала нового интервала и т.д.)

$$A_{m_k,n_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ m_k - 1 & m_k & 0 & 0 \\ n_k & n_k & n_k - 1 & n_k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A_{m_k,n_k} - матрица перехода от $\beta^{(k)}$ к $\beta^{(k+1)}$.

Тогда при некоторых оценках параметров m_k, n_k будет верна теорема:

2.11. Теорема:

Пусть $(n_k, m_k)_{k=1}^{\infty}$ - последовательность параметров удовлетворяющая условиям:
1) $3(n_k + 2) \le m_k \le \frac{1}{2}(n_{k+1} + 1)$.
2) $n_1 \ge 9$.
Тогда для любого β, лежащего в пересечении положительного конуса P в

$\mathbf{R}^4$ и $\cap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,m_1} A_{n_2,m_2} ... A_{n_k,m_k}(P)$, индуцированное перекладывание отрезков нестрого эргодично.

Далее доказывается что такое β существует и индуцированное перекладывание с таким β будет обладать в точности двумя эргодическими вероятностными мерами.

Также важными результатами касательно эргодических свойств , описанных в работе объектов, являются следующие результаты.

2.12. Теорема Athreya-Chaika [18]:

Хаусдорфова размерность пространства параметров не строго эргодичных перекладываний на 4 отрезках с перестановкой $\tau = (4321)$ равна $\frac{5}{2}$, другими словами

$$\text{Hdim}(\{\alpha \in A_4 : (\alpha, \tau) - \text{IET не строго эргодично}\}) = \frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2}$$

Пусть $A \subset \mathbf{R^d}$ - стандартный симплекс размерности d - 1. Пусть π_s - гиперэллиптическая перестановка на $d \geq 4$ и пусть R_d - класс Рози перестановки π_s.

2.13. Теорема Chaika-Masur [19]:

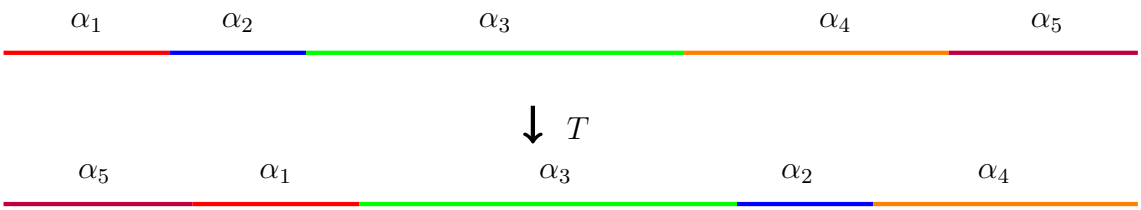
Для $\pi \in R_d$, Хаусдорфова размерность множества $\alpha \in A$ такого, что (α, π)-IET не строго эргодично равно $d - \frac{3}{2}$.

По сути это обобщение одной из предыдущих теорем, сформулированной для $d = 4$.

3. Построение примера

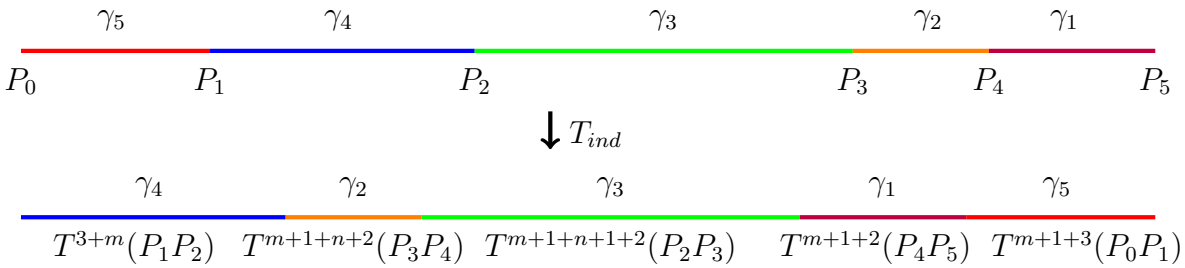
В этом разделе изложены основные самостоятельные результаты работы. Построим новый пример не строго эргодичного перекладывания отрезков на пяти подинтервалах, используя идеи из работы М. Кина [16].

Пусть перестановка τ определена на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ следующим образом: $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Положим числа n и m целые большие единицы. Рассмотрим следующее перекладывание отрезков, заданное следующим отображением T:



Также $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1$ и пусть все длины α_i выбраны так, что выполняются следующие условия:
1) Интервал α_5 больше чем интервал α_1, но меньше чем интервал $\alpha_1 + \alpha_2$. При отображении T он разделяется на две части так, что $T(P_0P_4) \subset \alpha_1$, а $T(P_4P_5) \subset \alpha_2$ (в левой части отрезка). Получается, что отрезок P_0P_4 равен отрезку α_1 по длине.
2) Применяя еще раз T к отрезку P_0P_4 он разделяется на две части так, что $T^2(P_0P_2) \subset \alpha_2$ (справа, сразу после $T(P_4P_5)$), а $T^2(P_2P_4) \subset \alpha_3$ (в левой части отрезка). Получается, что длина отрезков P_4P_5 и P_0P_2 составляет длину отрезка α_2.
3) Рассмотрим отрезок $T^2(P_2P_4) \subset \alpha_3$, применяя к нему некоторое количество итераций отображения T (обозначим количество таких итераций за n), отрезок будет сдвигаться вправо до тех пор пока не будет разделен на две части такие, что $T^{2+n}(P_3P_4) \subset \alpha_4$ (в левой части), а $T^{2+n}(P_2P_3) \subset \alpha_3$ (в правой части). При этом для любого целого $0 < k < n$: $T^{2+k}(P_2P_4) \subset \alpha_3$. Отрезок P_2P_4 имеет длину $\alpha_5 - \alpha_2$.
4) Можно заметить, что начальная (левая) часть интервала α_4 образована последовательными интервалами $T^{2+n}(P_3P_4)$, $T^{2+n+1}(P_2P_3)$, $T^2(P_4P_5)$ и $T^3(P_0P_2)$. Будем называть объединение этих интервалов интервалом I. Длина интервала I равна длине интервала α_5. При последовательных применениях отображения T к I, интервал I отображается в последовательные интервалы той же длины, содержащиеся в α_4 до тех пор, пока не наступит момент (количество итераций в этот момент будем обозначать за m), когда интервал I будет разделен на две части такие, что $T^{3+m}(P_1P_2) \subset \alpha_5$ (в левой части), а другая часть интервала I содержится в α_4 (в правой части). При этом для любого целого $0 < k < m$: $T^k(I) \subset \alpha_4$. Применяя к части I все еще содержащейся в α_4 отображение T, она отображается в интервал α_5 и идет сразу после $T^{3+m}(P_1P_2)$.
При данных условиях мы можем задать индуцированное перекладывание отрезков на интервале α_5, который будет разделен на пять частей. Пусть за $\gamma_5,\ \gamma_4,\ \gamma_3,\ \gamma_2,\ \gamma_1$ будем обозначать соответствующие длины подинтервалов

$P_0P_1,\ P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_3P_4,\ P_4P_5$ интервала α_5. Тогда индуцированное перекладывание будет иметь следующий вид:



Получаем, что перекладывание T_{ind} имеет ту же перестановку τ, что и перекладывание T.
Предполагая, что можно найти такие числа m и n, для которых будут выполняться вышесказанные свойства, тогда мы можем выразить длины α_i через длины γ_i следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & n-1 & n & 0 & 0\\ m & m & m & m-1 & m\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ \gamma_4\\ \gamma_5\end{pmatrix}$$

Можно заметить, что интервал P_3P_4 длины γ_2 будет содержаться в α_3 на протяжении $n-1$ итераций отображения T, а в α_4 на протяжении m соответственно и так далее. Будет обозначать за $A_{n,m}$ матрицу перехода от длин γ_i к длинам α_i. Пусть P - открытый, положительно определенный конус в $\mathbf{R}^5$, тогда $A_{n,m}$ отображает P в P и можно заметить, что $\det(A_{n,m}) \neq 0$, следовательно для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in A_{n,m}(P)$ существует единственное решение $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) \in P$. Легко проверить, что условия (1),(2),(3) и (4) выполняются для α с заданными значениями n и m.
Положим теперь, что у нас есть некоторая последовательность пар целых чисел больших единицы $(n_k, m_k)_{k=1}^{\infty}$. Тогда определим $\Omega_k = A_{n_1,m_1}A_{n_2,m_2}...A_{n_k,m_k}(P)$ и $\Omega = \cap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$ (Ω не пусто). Также введем еще несколько обозначений, с которыми будем работать в дальнейшем:
$\hat{P} = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i > 0, 1 \leq i \leq 5, \sum_{i=1}^{5} x_i = 1\}$,
$\hat{A}_{n,m}(x) = \frac{1}{|A_{n,m}(x)|}A_{n,m}(x)$, где $|a| = \sum_{i=1}^{5} a_i$.
Заметим, что $\hat{A}_{n,m}(x)$ вводится для того, чтобы на каждом шаге у нас суммарно была единичная длина, тогда можно ввести следующее:
$\alpha^{(k)} = \hat{A}^{-1}_{n_{k-1},m_{k-1}}...\hat{A}^{-1}_{n_1,m_1}\alpha^{(1)}$, где $\alpha^{(1)} = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \Omega$ и $k > 1$, пусть $T = T_1$ определяет перекладывание отрезков на $(\alpha^{(1)}, \tau)$, а T_k на $(\alpha^{(k)}, \tau)$.

Сформулируем теорему по аналогии с теоремой сформулированной в статье М.Кином:

3.1. Теорема:

Пусть $(n_k, m_k)_{k=1}^{\infty}$ - последовательность пар целых чисел больших единицы. Тогда существует $\alpha \in \hat{P}$ и возрастающая последовательность $I_2,\ I_3, ...$ подинтервалов единичного интервала такого, что, если T - перекладывание отрезков (α, τ), тогда перекладывание $T_k = T_{I_k}$ индуцированное на I_k отображение T, задается парой $(\alpha^{(k)}, \tau)$, для любого $k > 1$.

4. Нахождение оценок для $\hat{A}_{n,m}$:

Будем считать $\hat{A}_k = \hat{A}_{n_k,m_k}$ для $k > 0$, $\hat{B}_k = \hat{A}_1\hat{A}_2...\hat{A}_k$.

4.1. Лемма:

Для любого $x \in \bar{\hat{P}}$, $(\hat{A}_k x)_i \leq \frac{1}{m_k+2}$ для $i = 1$, $i = 2$ и $i = 5$.

Доказательство:

Если $i = 1$, $i = 2$ или $i = 5$, тогда $(A_k x)_i \leq 1$ и $|A_k x| = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_1 + x_4 + x_5 + (n_k - 1)x_2 + n_k x_3 + m_k - x_4 + 1 = 2 + m_k + x_5 + (n_k - 1)x_2 + n_k x_3 \geq m_k + 2$ $\Rightarrow \hat{A}_k x \leq \frac{1}{m_k+2}$. Что и требовалось доказать.

4.2. Лемма:

Пусть для любого $k \geq 1$ будет выполнено соотношение $\frac{n_j}{m_{j+1}+2} \leq \frac{1}{2}$. Пусть $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$. Тогда для любого $k \geq 1$ будет верно

$$(\hat{B}_k e_4)_4 \geq 1 - \frac{4}{m_1 + 2}.$$

Доказательство:

Зафиксируем $k \geq 1$ и положим $x^{(k)} = \hat{A}_k e_4$, $x^{(k-1)} = \hat{A}_{k-1}x^{(k)}, ..., x^{(j)} = \hat{A}_j x^{(j+1)}, ..., x^{(1)} = \hat{A}_1 x^{(2)}$, тогда $x^{(1)} = \hat{B}_k e_4$. Докажем требуемое неравенство индукцией по j. Будет достаточно показать, что для любого j верно $x_3^{(j)} \leq \frac{1}{m_j+2}$. База: $x^{(k+1)} = e_4$, тогда $x_3^{(k+1)} = 0 \Rightarrow x_3^{(k+1)} \leq \frac{1}{m_{k+1}+2}$. Пусть верно для

$x_3^{(j+1)} \leq \frac{1}{m_{j+1}+2}$, тогда

$$x_3^{(j)} = \frac{(n_j-1)x_2^{(j+1)} + n_j x_3^{(j+1)}}{2 + m_j + x_5^{(j+1)} + (n_j-1)x_2^{(j+1)} + n_j x_3^{(j+1)}} \leq$$

$$\leq \frac{2n_j}{(2 + m_j + x_5^{(j+1)} + (n_j-1)x_2^{(j+1)} + n_j x_3^{(j+1)})(m_{j+1}+2)} \leq \frac{2n_j}{(2+m_j)(m_{j+1}+2)} \leq \frac{1}{2+m_j}.$$

Получаем, что в силу равенства $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$ и следующих неравенств будет верно следствие:

$$x_1^{(1)} \leq \frac{1}{m_1+2},\ x_2^{(1)} \leq \frac{1}{m_1+2},\ x_5^{(1)} \leq \frac{1}{m_1+2},\ x_3^{(1)} \leq \frac{1}{m_1+2} \Rightarrow x_4^{(1)} \geq 1 - \frac{4}{m_1+2}.$$

Что и требовалось доказать.

4.3. Лемма:

Пусть для любого $k \geq 1$ будет выполнено соотношение $\frac{m_j+2}{n_j} \leq \frac{1}{3}$. Пусть $e_3 = (0,0,1,0,0)$. Тогда для любого $k \geq 1$ будет верно

$$(\hat{B}_k e_3)_3 \geq \frac{1}{3}.$$

Доказательство:

Будем доказывать аналогично предыдущей лемме, где $x^{(k)}$ будет определяться аналогичным образом, тогда база: $x^{(k+1)} = e_3 \Rightarrow x_3^{(k+1)} = 1 \Rightarrow x^{(k+1)} \geq \frac{1}{3}$. Пусть верно для $x_3^{(j+1)} \geq \frac{1}{3}$ тогда получаем, что

$$x_3^{(j)} \geq \frac{n_j x_3^{(j+1)}}{2 + m_j + 2n_j x_3^{(j+1)}} \geq \frac{1}{\frac{2+m_j}{n_j x_3^{(j+1)}} + 2} \geq \frac{1}{\frac{1}{3\frac{1}{3}} + 2} = \frac{1}{3}.$$

Что и требовалось доказать.

Теперь сформулируем теорему об эргодическом свойстве перекладывания из представленного примера.

4.4. Теорема:

Пусть $(n_k, m_k)_{k=1}^{\infty}$ - последовательность удовлетворяющая условиям:
1) $3(m_k+2) \leq n_k \leq \frac{1}{2}(m_{k+1}+2)$.
2) $m_1 \geq 11$.

Тогда для любого $\alpha \in \Omega \cap \hat{P}$ перекладывание отрезков, описанное в первой теореме нестрого эргодично.

Доказательство:

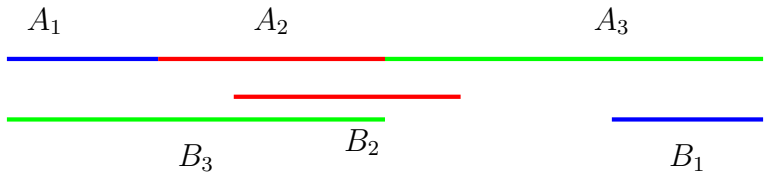
Рассмотрим последовательность вложенных подинтервалов $\{I_k\}_{k=2}^{\infty}$, которые мы описали в предыдущей теореме. Тогда за I_k^j будем обозначать j-ый подинтервал интервала I_k, на котором будет действовать T_k, и за $\hat{B}e_j$ будем обозначать вектор, который можно рассматривать как относительную частоту посещения любой точки $x \in I_k^j$ исходного разбиения в соответствии с вектором длин $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_5)$ до момента первого возвращения точки x в подинтервал I_k. В таком случае при заданных ограничениях на m_k и n_k, пользуясь доказанными леммами, получаем, что относительная частота посещения подинтервала α_4 не менее $1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$, а относительная частота посещения подинтервала α_3 не менее $\frac{1}{3}$. Тогда,выбирая последовательность $x_k \in I_k^4$, $k \to \infty$ и используя известные техники, мы можем получить инвариантную вероятностную меру μ на исходном интервале, такую, что $\mu(\alpha_4) \geq \frac{9}{13}$. Аналогично получаем меру ν, удовлетворяющую условию $\nu(\alpha_3) \geq \frac{1}{3}$. Поскольку $\frac{1}{3} + \frac{9}{13} > 1$, то меры μ и ν не совпадают, отсюда следует, что T нестрого эргодичное перекладывание.

5. Эргодические свойства ITM

Дадим общее определение ITM и определение отображения, которое состоит из двух вращений окружности. Семейство двойных вращений, рассмотренное в работе [14], является примером ITM.

5.1. Определение:

Отображение сдвигов отрезков (ITM) - это кусочно непрерывное отображение сдвигов $T : I \to I$, где I - интервал, разбитый на конечное число подинтервалов $A_i, i \in \{1, ..., n\}$ и T действует на каждый подинтервал A_i, при этом образы подинтервалов могут пересекаться.



Отображение сдвигов отрезков на трех подинтервалах

Пусть $T : I \to I$ - отображение сдвигов и пусть $\Omega_0 = \Omega_0(T) = I$ и для любого $n \geq 1$: $\Omega_n = \Omega_n(T) = \Omega_0(T^n) = I \cap TI \cap ... \cap T^n I$.

Можно заметить, что $\Omega_0 \supseteq \Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq ...$. Тогда пусть $\Omega(T) = \cap_{n=0}^{\infty} \Omega_n(T)$.

Отображения сдвигов (ITM) классифицируются на два типа:

-конечный тип: $\Omega_n = \Omega_{n+1}$ для некоторого n. В этом случае $\Omega = \Omega_n$ (ITM такого типа можно свести к перекладыванию отрезков);

-бесконечный тип: все включения $\Omega_n \supseteq \Omega_{n+1}$ являются строгими. (рассматривая итерации ITM, с каждой новой итерацией исходный отрезок-носитель покрывается все меньше отрезками в образе).

М. Бошерницан и И. Корнфелд сформулировали следующую гипотезу:

Гипотеза:

Почти все ITM - конечного типа.

На данный момент гипотеза доказана только для особого случая ITM - двойных вращений (Х. Брюином и Г. Клаком в работе [17]) и ITM на трех отрезках (Д. Волком в работе [24]).

5.2. Определение:

Пусть I - единичный полуинтервал. Двойным вращением называется отображение $T : I \to I$, заданное следующим образом:

$$T(x) = \begin{cases} \{x + \alpha\} & \text{если } x \in [0, c) \\ \{x + \beta\} & \text{если } x \in [c, 1) \end{cases}$$

Пространство параметров для такого отображения сдвигов отрезков, представляет собой следующее трехмерное пространство:

$$Q = \{q = (\alpha, \beta, c) : \alpha, \beta, c \in [0, 1)\} = [0, 1) \times [0, 1) \times [0, 1)$$

Сформулируем результат для двойных вращений, описанный Артиджани-Фужероном-Хьюбертом-Скрипченко в работе [5]:

5.3. Теорема:

Почти все двойные вращения бесконечного типа по отношении к мере μ - строго эргодичны. Где μ - мера с носителем в Q, задающих двойные вращения

бесконечного типа.

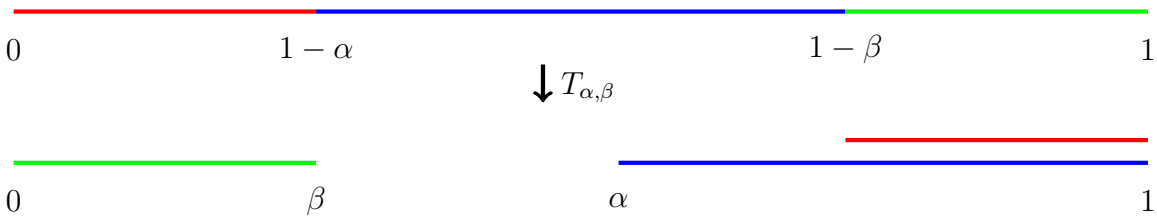
В работе [5] явно построена мера с носителем на множестве параметров, задающих двойное вращение бесконечного типа, которые инвариантны относительно описанного в работе процесса ренормализации.

Аналогичный результат был получен Брюином-Клаком в работе [17]. Они показали, что для любой меры ,инвариантной относительно ренормализации Сузуки-Ито [25], мера на множестве параметров, таких, что отображение двойного вращения не строго эргодично, равно нулю.

В работе [14] Х. Брюин и С. Трубецкой описали класс ITM, который является нестрого эргодичным.
Пусть ITM $T_{\alpha,\beta}$ с отрезком носителем $I = [0, 1)$ определен следующим образом:

$$T_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{если } x \in [0, 1 - \alpha) \\ x + \beta & \text{если } x \in [1 - \alpha, 1 - \beta) \\ x + \beta - 1 & \text{если } x \in [1 - \beta, 1) \end{cases}$$

Понятно, что это ITM на трех отрезках, который можно представить следующим образом:



Пусть $U = \{(\alpha, \beta) : 0 \le \beta \le \alpha \le 1\}$, $L = \{(\alpha, \beta) : 0 \le \alpha \le \beta + 1 \le 1\}$ и $D = U \cup L$. Тогда определим отображение $G : U^\circ \to D$ следующим образом:

$$G(\alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta - 1}{\alpha} + \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \right)$$

Отображение G называется Гауссовым. Пусть $A = \cap_{n \ge 0} G^{-n}(U^\circ)$. Теперь сформулируем теорему из [14] об эргодических свойствах $T_{\alpha,\beta}$.

5.4. Теорема:

Пусть $\lambda > 1$. Множество A является бессчетным и индексируется множеством $K = \{k = k_0k_1k_3... : k_i \in \{1, 2, 3, ...\}, k_i \geq \lambda k_{i-1}$ для достаточно больших i; четные и нечетные номера k_i не равны 1 бесконечное число раз$\}$. Если $(\alpha, \beta) \in A$, тогда $T_{\alpha,\beta}$ с последовательностью (k_i) не строго эргодично.

В идеи доказательство лежит критерий строгой эргодичности для $T_{\alpha,\beta}$ бесконечного типа. В силу критерия достаточно показать, что итерации, описанного в работе процесса ренормализации, который определен на треугольнике $S = \{x = (x_1, x_2) : 1 \geq x_i > 0, 1 \leq i \leq 3, x_1 + x_2 \geq 1\}$, не сжимают треугольник S в одну точку. Тогда условие критерия нарушается и отображение сдвигов $T_{\alpha,\beta}$ будет не строго эргодично.

Интересно узнать, существует ли такой пример для двойных вращений общего вида. В недавней работе С. Крыжевича и соавторов утверждается, что такого примера нет.

6. Эргодические свойства систем изометрий

Системы изометрий являются более общим объектов чем IET и ITM. Для изометрий также берется отрезок I и рассматриваются его подинтервалы, образ каждого из подинтервалов является результатом сдвига. Можно сказать, что система изометрий - это некий набор отображений определенных на I.
Системы изометрий были изобретены и введены Д. Габорьё, Г. Левиттом и Ф. Поланом в работе [10] 1994 года, они занимались проблемами геометрической теории групп: доказательством теоремы Рипса о действии свободной группы на R-деревьях.
Системы изометрий описаны И. Дынниковым в работе [29].

6.1. Определение:

Системой изометрий - это пара $(I, \{\phi_i\}_{i=1}^k)$, где I называется отрезком-носителем, а $\phi_i : A_i \to B_i$ - изометрия между подинтервалами отрезка-носителя.

Система изометрий называется сбалансированной, если концы отрезка-носителя I содержатся в подотрезках и сумма длин всех подотрезков равна длине I.

Системы изометрий могут быть классифицированы и принадлежат к одному из четырех типов:
-торический тип;

-поверхностный тип (между задающими систему параметрами есть рациональные соотношения, система изометрий на самом деле является перекладыванием);

-симплициальный тип (система обладает конечными орбитами);

-тонкий тип (орбиты системы изометрий являются бесконечными деревьями).

Тонкий случай системы изометрий - это аналог ITM бесконечного типа, строгое определение приведено ниже.

Мотивация для изучения данного объекта связана не только с геометрической теорией групп (теорией Рипса), но и с задачей Новикова.

С помощью сбалансированных систем изометрий тонкого типа можно строить примеры хаотических сечений для задачи Новикова [23].

Описанная классификация получается с помощью так называемого алгоритма машины Рипса.

6.2. Определение:

Машиной Рипса называется алгоритм, состоящий из шести основных действий, которые позволяют преобразовать один ленточный комплекс в другой ленточный комплекс с меньшим носителем, эквивалентный исходному с точки зрения поведения орбит.

Машина Рипса была введена Рипсом в качестве геометрической версии движений Маканина-Разборова на основе работ [21], [22] и использована для доказательства теоремы Рипса о действии группы на R-дереве.

Для систем изометрий тонкого типа можно бесконечно применять два основных действия машины Рипса. (collapse of the free subarc, удаление части отрезка-носителя).

Гипотеза:

Почти все системы изометрий тонкого типа - строго эргодичны.

Пример систем изометрий тонкого типа очень мало и не понятно какие можно назвать почти всеми, поэтому гипотеза является нестрогой.

Дынников и Скрипченко доказали, что самоподобные системы изометрий тонкого типа всегда являются строго эргодичными.

Под самоподобием мы понимаем следующее свойство: после некоторого количества применений шагов ренормализации (например, шагов машины Рипса) получается сжатая версия исходной системы или системы полученой на некотором предыдущем шаге ренормализации.

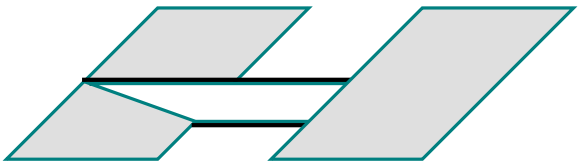
Используя этот результат, автор в курсовой работе 3 курс построил новые примеры строго эргодичных систем изометрий тонкого типа.

Речь идет о мерах на слоениях на ленточном комплексе, а не на самом отрезке носителе.

6.3. Определение:

Ленточный комплекс K - это CW - комплекс, полученный с помощью ленточного объединения Y с присоединенными 0-, 1-, 2-клетками и удовлетворяющий следующим условиям:
1) 1-клетки K пересекают пространство Y в подмножествах G.
2) Каждая компонента пересечения 2-клетки с G является точкой.
3) Каждая компонента пересечения 2-клетки с лентой является подмножеством множества вида $\{x\} \times I$, где $x \in l$.

6.4. Пример:



Ленточный комплекс с двумя лентами (серыми), двумя 1-клетками (жирные полосы) и одной 2-клеткой (белая).

В работе Рейнера Мартина [11] 1997 года был построен первый пример нестрого эргодичной системы изометрий тонкого типа. Пример строится в пространстве параметров $\mathbf{R}^{18}$ с десятью изометриями.

Две системы изометрий $(I, \{\phi_i\}_{i=1}^k)$ и $(I', \{\phi_i'\}_{i=1}^k{}')$ называются гомеоморфными (как системы изометрий), если они имеют одинаковое число изометрий и, если существует гомеоморфизм $f : I \to I'$, который удовлетворяет всем изометриям.

В работе Мартина система изометрий $(I, \{\phi_i\}_{i=1}^k)$ называется строго эргодичной, если любая система $(I', \{\phi_i'\}_{i=1}^k{}')$, которая гомеоморфна $(I, \{\phi_i\}_{i=1}^k)$ уже гомеоморфна $(I, \{\phi_i\}_{i=1}^k)$ в силу локальной изометрии с точностью до масштаба.

6.5. Теорема Мартина:

Существует минимальная система изометрий тонкого типа, которая является нестрого эргодичной.

В основе доказательства лежит конструкция множества $\mathbf{P}\Delta$ равного пересечению убывающей последовательности k непустых компактов. Элементы множества $\mathbf{P}\Delta$ описывают системы изометрий тонкого типа. Далее для этого множества доказываются утверждения о том, что можно выбрать последовательность таким образом, что множество будет состоять из более чем одного элемента, каждый из которых дает нестрого эргодичную систему изометрий тонкого типа и такая последовательность существует.

В дальнейшем такие примеры для систем изометрий на меньшем числе отрезков строились Дынниковым и Скрипченко. В последней общей работе Дынникова, Хьюберта и Скрипченко [26] обсуждается вопрос о числе инвариантных мер для самих систем изометрий, а не слоений.

6.6. Теорема (Дынников-Хьюберт-Скрипченко):

Для $\lambda \in \Delta$, пусть S_λ является следующая система изометрий:

$$S_\lambda = ([0,1], \{\{[0,\lambda_1],[1-\lambda_1,1]\},\{[0,\lambda_2],[1-\lambda_2,1]\},\{[0,\lambda_3],[1-\lambda_3,1]\}\}).$$

Тогда верно следующее:

1) Если $\lambda \notin \mathbf{R}$ или $\lambda \in \mathbf{Q^3} \cap \Delta$, тогда S_λ имеет конечные орбиты и следовательно не минимально.
2) Если $\lambda \in \mathbf{R_{irr}}$, тогда S_λ тонкого типа и строго эргодична.
3) Если $\lambda \in \mathbf{R} \setminus (\mathbf{R_{irr}} \cap \mathbf{Q^3})$, тогда S_λ поверхностного типа и строго эргодична.

Здесь много открытых вопросов таких как: примеры слоений с тремя и более мерами, обобщений теоремы (Дынников-Хьюберт-Скрипченко) и другие.

References:

1. M. Keane, "Interval exchange transformations Math. Z. 141 (1975).
2. H.B.Keynes, D.Newton "A minimal, non-uniquely ergodic interval exchange transformation"(1976).
3. W. Veech, "Interval exchange transformations"J. Analyse Math. 33 (1978).
4. H. Masur, "Interval exchange transformations and measured foliations"Ann. of

Math. (2) 115 (1982).
5. M. Artigiani, C. Fougeron, P. Hubert and A. Skripchenko, "A note on double rotations of infinite type (2021).
6. M. Boshernitzan and I. Kornfeld, “Interval translation mappings”. Ergodic Theory Dynam. Systems 15.5 (1995).
7. G. Rauzy, "Echanges d'intervalles et transformations induites"Acta Arith., (1979).
8. J.S.Athreya, J.Chaika, "The distribution of gaps for saddle connection directions". (2012).
9. H. Masur, "Interval exchange transformations and measured foliations (1982).
10. D.Gaboriau, G.Levitt, F. Paulin "Pseudogroups of isometries of R and Rips' theorem on free actions on R-trees"(1994)
11. Reiner Martin "Non-uniquely ergodic foliations of thin typ"(1997)
12. I.Dynnikov, A.Skripchenko "On typical leaves of a measured foliated 2-complex of thin type” (2013)
13. Henry Wilton "Rips Theory"(2003)
14. H. Bruin and S. Troubetzkoy. "The Gauss map on a class of interval translation mappings". (2003)
15. A. B. Katok, "Invariant measures of flows on orientable surfaces". (1973)
16. M. Keane, "Non-ergodic interval exchange transformations". (1977)
17. H. Bruin and G. Clack, "Inducing and unique ergodicity of double rotations (2012)
18. J. Athreya, ,J. Chaika, "The Hausdorff dimension of non-uniquely ergodic directions in H(2) is almost everywhere". (2015)
19. J. Chaika, H. Masur, "The set of non-uniquely ergodic d-IETs has Hausdorff codimension 1/2". (2020)
20. J. Fickenscher, "Self-inverses, Lagrangian permutations and minimal interval exchange transformations with many ergodic measures". (2014)
21. G.S.Makanin "Equations in a free group". (1987)
22. A.A.Razborov "On systems of equations in a free group". (1985)
23. S.P.Novikov "The Hamiltonian Formalism and Many-Valued Analogue of Morse Theory". (1982)
24. D. Volk, "Almost every interval translation map of three intervals is finite type". (2014)
25. H. Suzuki, S. Ito and K. Aihara, "Double rotations". (2005)
26. I.Dynnikov, P.Hubert, A.Skripchenko, "Dynamical systems around the Rauzy gasket and their ergodic properties". (2020)
27. A. Skripchenko, S. Troubetzkoy, "On the Hausdorff dimension of minimal interval exchange transformations with flips". (2018)
28. E. Sataev, "On the number of invariant measures for flows on orientable surfaces". (1975)
29. I. Dynnikov, "Interval identification systems and plane sections of 3-periodic

surfaces". (2008)

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Коноваловой Анны Геннадьевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Математическое моделирование экономики КНР» являются: нахождение аппроксимирующих функций для статистических данных, идентификация параметров, построение математической модели КНР, Параграф 3.3.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 10 сентября 2020 года по 20 мая 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar по следующим ключевым словам: математическое моделирование, экономика Китая, математическая модель экономики, в выдаче поисковиков было исследовано 24 источника (список см. в Списке используемой литературы к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Оленевым Николаем Николаевичем, к.ф.-м.н., доцентом Математического института им. С. М. Никольского Российского университета дружбы народов.
- Написана и опубликована статья для научной международной конференции «Цифровая экономика: проблемы развития и механизмы» по теме выпускной квалификационной работы.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистом следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоится 14.06.2021. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись Коновалова Анна Геннадьевна



29 мая 2021 г.
Москва, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

Факультет физико-математических и естественных наук
Математический институт им. С. М. Никольского

«Допустить к защите»
Директор Математического института им. С. М. Никольского
А. Л. Скубачевский
_____
«____»_____2021 г.

Выпускная квалификационная работа бакалавра
Направление: 01.03.01 «Математика»,

ТЕМА: **«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ КНР»**

Выполнила студентка Коновалова Анна Геннадьевна

Группа НМТбд–01–17
Студенческий билет № 1032172747

Руководитель выпускной квалификационной работы
к.ф.-м.н., доцент Математического института им. С. М. Никольского
Н. Н. Оленев
_____
(подпись)

Автор_____
(подпись)

г. Москва
2021

АННОТАЦИЯ

Объём выпускной квалификационной работы 46 листов машинописного текста. При написании диплома использовалось 25 источников.

Ключевые слова: экономика Китая, модель Китая, математическая модель экономики, макроэкономика, простейшая динамическая модель экономики, модель Рамсея, аппроксимирующие функции.

Дипломная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы, и 6 приложений.

Во введении раскрывается актуальность выбранной темы, описываются цель, задачи, методы и инструменты исследования, практическая значимость выпускной работы.

В первой главе рассказывается история экономики КНР, приводятся экономические кризисы, повлиявшие на развитие экономики.

Во второй главе определяются основные термины, описываются классификации математических моделей, этапы построения математических моделей, показывается применение математических моделей в экономике.

В третьей главе ставится задача идентификации параметров, рассчитываются основные макроэкономические показатели, проводится анализ, вычисления и построение математической модели экономики Китая, составляется прогноз на 10 лет, используя полученный результат.

В заключении обобщается проделанная работа и формулируются выводы по полученным результатам.

509

Оглавление

Введение 4
ГЛАВА 1. Развитие Китая 6
1.1. История экономики КНР 6
1.2. Экономические кризисы 8
ГЛАВА 2. Математическое моделирование 11
2.1. Основные понятия 11
2.2. Классификация математических моделей 11
2.3. Этапы построения математической модели 13
2.4. Математические модели в экономике 14
ГЛАВА 3. Математическая модель КНР 17
3.1. Задача идентификации параметров 17
3.2. Реализация модели 19
3.3. Прогноз на 10 лет 29
Заключение 33
Список используемой литературы 34
Приложение 1 37
Приложение 2 39
Приложение 3 41
Приложение 4 43
Приложение 5 45
Приложение 6 46

510

Введение

Темой моей выпускной квалификационной работы является построение и исследование математической модели экономики КНР.

Актуальность исследования обосновывается тем, что экономика Китая постоянно привлекала к себе множество взглядов со всего мира. Внимание к этой стране не случайно. Китай начинает свое развитие еще с древнейших времен. Это государство не только добилось высоких результатов, но и продолжает достигать неимоверных высот в экономике.

Цель исследования является построение и изучение динамической модели экономики данной страны. Модель опирается не на рейтинги и достижения, а на статистику - валовый внутренний продукт, потребление, инвестиции, экспорт, импорт и т. д.

Объектом исследования является математическая модель экономики.

Предметом исследования выступает математическое моделирование экономики Китая.

Гипотеза исследования заключается в том, что быстро растущую экономику Китая можно описать простейшей динамической моделью экономики.

Задачи исследования:

1. Изучить статистические данные прошлых годов;

2. Проанализировать полученные данные, выявить закономерности;

3. Подобрать аппроксимирующие функции, получив расчетные данные;

4. Оценить параметры модели (осуществить идентификацию построенной математической модели) за счет сравнения близости расчётных и статистических временных рядов макропоказателей за счет поиска экстремального значения свертки критериев Тейла этих макропоказателей.

5. Сделать прогноз на несколько лет вперед, что дает возможность для предположений о дальнейшем развитии экономики в целом и отдельных макроэкономических показателей.

511

В соответствие с намеченной целью и поставленными задачами написание дипломной работы включает в себя следующие **методы исследования**: теоретические (анализ, прогнозирование, формализация) и эмпирическое (математическое моделирование). **Инструментами**, которые используются в работе, являются формулы, аппроксимирующие функции, статистические данные.

Практическая значимость исследования заключается в том, что полученную в результате исследования математическую модель можно использовать для дальнейшего прогнозирования экономики страны.

По данной работе написана и опубликована статья для международной научно-практической конференции. [8]

ГЛАВА 1. Развитие Китая

1.1. История экономики КНР

Китайская народная республика (КНР) – это страна, которая уступает только России и Канаде по площади территории. На протяжении нескольких десятилетий реформы преобразовали Китай. Страна стала занимать второе место в экономике мира по номинальному валовому внутреннему продукту (ВВП), а по ВВП по паритету покупательной способности (ППС) - первое. Это государство, на долю которого приходится одна треть глобального роста. [7]

Впервые развитие Китая было зафиксировано ещё до нашей эры, и это научным способом доказали учёные. Китайская цивилизация ещё тогда показывала свои прогрессивные задатки в науке, неимоверное трудолюбие и стремление к новым знаниям. И таким образом, они построили крепкое, нерушимое и все узнаваемое китайское государство.

Китайская народная республика в течение нескольких тысяч лет не только развивала свои знания в разных областях науки, но и училась у других наций многим другим аспектам, которые помогли ей достичь той ступени, на которой она сейчас находится. [11]

Более двух тысяч лет КНР являлся лидером в области экономики и технологий. Экономика Китая была величайшей экономикой в мире до самой середины 19 века. Особенно ощутимые результаты были достигнуты Китайским государством в период 16–19 вв.

Если сравнить экономику Европы и Китая в период с 11 по 18 вв., то мы можем заметить, что Китай являлся состоятельной, промышленно-развитой страной, в то время как другие многие страны были с сельскохозяйственной и бедной экономикой. Более того, в то время экономика Китая составляла около трети от мировой экономики, что является показателем уровня социально-экономического развития страны.

Основой взлёт произошёл в средине 17 века. Китайская цивилизация поднялась в лидеры и стала занимать первое место по размерам экономики в мире. Эта страна удерживала свою позицию почти 200 лет. Так, в 1820 году на долю Китая приходилась треть мирового ВВП.

Китайская цивилизация также стала основным лидером в мировой технологической сфере. Она пребывала в данном статусе в течение многих столетий. Наиболее благополучным было научно-технологическое формирование с 7 по 12 века. За данный промежуток времени Китай приобрёл наработку, с помощью которой он предоставил себе возможность оставаться первым в научно-технологической области по конец 17 века. КНР подарила миру обои, банкноты и туалетную бумагу. Также особое значение в социальной истории имеют открытие пороха, печатных станков, печатных машин и магнитных компасов. Также можно упомянуть, что такие игры, как гольф и футбол, были изобретены в этой стране.

Китай внёс значительный вклад в формирование современных глобальных научно-технических достижений. Так, если обратиться к статистике, можно точно сказать, что на долю Китайской цивилизации доводилось более 55% всех улучшений и успеха во всём мире. Первое место в технологической сфере несомненно принадлежало Китайской народной республике. [18]

Помимо всего вышесказанного, страна создала Энциклопедию китайской науки, состоящая более чем из 11 тысяч томов, которая оставалась наиболее известной во всём мире до тех пор, пока не создали Википедию в 2007 году.

Благодаря таким великим достижениям, экономика Китая все время остается самой мощной страной, интерес к которой не угасает до сих пор. Все известные путешественники, учёные и экономисты высоко оценивали результаты КНР. Например, шотландский экономист и философ-этик Адам Смит при описании Китая использовал четыре прилагательных, образованных от таких слов как богатство, трудолюбие, плодородие и культивация [24].

Ещё одним свидетельством лидерства Китая можно назвать общепризнанную высокую позицию в области международной политики и экономики. Китайское государство считалось самой величественной и могущественной нацией в мире во времена правления династии Цин.

Но прежде всего главным подтверждением подъема и открытий было отношение китайцев. Это можно проследить и отметить в памятниках искусства и литературы, дошедших до нашего времени, что отражает высочайший уровень душевного и физического комфорта китайцев в далекие времена.

1.2. Экономические кризисы

К сожалению, не всегда этот путь был гладким. Перед Китаем вставали сложные и труднопреодолимые препятствия, но он смог побороть их, чтобы в будущем стать лучшим в мировой экономике и установить еще более тесные связи со всем миром.

И таким камнем преткновения стал экономический кризис, произошедший в 2008 году.

По причине снижения скорости экономического подъёма в Китайской народной республике потребовалось изменение экономической стратегии. Главный удар, который принёс кризис, пришёлся на основной сектор экономики. Тем не менее он обошёл стороной такие сферы экономики как финансовая, банковская, так и фондовые рынки. Они оставались неизменными. [6]

После кризиса, чтобы восстановиться, Китай начал участвовать и сам создавать новые механизмы, которые необходимы для упорядочивания экономики. Это помогло содействовать реформированию интернациональной экономической системы, принимать участие в работе по координированию

макроэкономических политик разных стран, а также в разработке планов аккумуляции капиталов в международной торговле и в интернациональном финансовом взаимодействии; он устремлял крупномасштабные группы для закупок за рубежом, протягивая руку помощи переживающим проблемы государствам и странам.

Из-за такого молниеносного развития КНР стал лидером в мировой экономики, в большей степени, в областях торговли и инвестиций. С конца 20-го по начало 21-го века экономическое развитие составило 9,7%, что превосходит показатели других стран за такой же отрезок времени. [1]

Следующие немаловажные проблемы начались летом 2015 года. Китаю пришлось произвести денежную реформу, уменьшив курс национальной валюты по отношению к курсу иностранных валют из-за проблем, связанных с экспортом. Вывоз капитала на конец 2015 года поднялся в 7 раз и составлял сумму в один триллион долларов США. Этот результат до нашего времени является самым большим с 2006 года. [2]

В следующем году Китай также пытался справиться со своими проблемами. Но долг все еще продолжал расти. Так, на начало 2016 года он составлял рекордные 240% от ВВП, а к концу этого года – превзошел 260% ВВП. Мы можем заметить, что долг продолжает расти и до сих пор, но Китай принимает все усилия по борьбе с этой проблемой.

Для решения данной проблемы Китайская народная республика начала активное сокращение национальных запасов иностранной валюты. Постепенно запасы уменьшались с лета 2016 года. В итоге, на начало 2017 года показатели резервов приняли минимальное значение с 2011 года.

По причине этого, в 2018 году показатель ВВП Китая стал самым низким за последние три десятка лет. [21]

После всех упадков и кризисов КНР показывает стремительные признаки возрождения. Основные показатели в этой сфере указывают на начало формирования нового экономического цикла.

С тех пор, как появилось такое государство как Китай, в особенности после возникновения и реализации политики реформ и открытости, осуществляющиеся в течение трёх десятков лет, о которых говорят историки и учёные, страна играет важную роль среди всего мира.

Китай – это самая первая страна в мире, и пока что единственная, преодолевшая досрочные сокращения бедного населения в 2 раза. Более того это государство помогает другим странам в их развитии и преодолении таких же трудных ситуаций, которые вставали на пути формирования.

ГЛАВА 2. Математическое моделирование

2.1. Основные понятия

Перед тем, как перейти к понятию математическое моделирование, необходимо понять и разобраться с другим немаловажным понятием - математическая модель.

Любое исследование, ищущее связь между измеримыми (количественными) параметрами чего-либо, порождает математическую модель.

Математическая модель – это всегда некоторое упрощение, некоторая концептуализация, отсекающая какие-то свойства реальности.

Математическая модель – это элементарное представление реальности с помощью математических понятий. Математическая модель представляют собой систему, при исследовании которой можно приобрести другие сведения о иной системе. Математическая модель нужна с целью моделирования действия настоящего предмета, однако постоянно пред полагает собою уровень его идеализации.

Математическое моделирование – это метод всех количественных исследований в любых науках. Оно объединяет в себе деятельность и совокупность используемых приёмов и техник построения и изучения математических моделей.

2.2. Классификация математических моделей

Все существующие науки, как естественные, так и общественные, которые используют математический аппарат, фактически занимаются математическим моделированием. Они заменяют предмет исследования

математической моделью и изучают последнюю. Связь между математическими моделями и реальностью осуществляется посредством набора эмпирических законов, гипотез, идеализаций и упрощений. В основном математические методы используются для описания идеального объекта или процесса, построенного на этапе содержательного моделирования. [10]

В науке имеется огромное число видов математических моделей, которые в последние годы называют информационными моделями. Различные модели схожи между собой по определённым признакам (свойствам), таким образом, сформировалась целая классификация математических моделей. Одну из основных классификаций математических моделей можно увидеть на Рисунке 2.2.1.



Рисунок 2.2.1. Классификация математических моделей

Для более точно классификации можно выделить главные признаки, по которым можно разделить на группы:

- Цель использования;
- Учёт временного фактора;

519

- По наличию воздействий на систему;
- Исходя от природы появления;
- По способу представления.

Этот список можно продолжать и дальше, находя различные общие признаки в моделях.

В зависимости от влияния времени на модель, выделяют статистические модели, свойства которых не изменяются во времени и динамические, которые напрямую зависят от изменения времени. [16]

В зависимости от природы появления модели, выделяют детерминированные и неопределенные, чаще всего стохастические. В детерминированных моделях все элементы, факторы, используемые в модели, известны и определены однозначно, в отличии от стохастических, где есть случайные величины, которые определяются определенными вероятностными характеристиками.

2.3. Этапы построения математической модели

Для построения математической модели можно выделить несколько этапов:

- Выбор объекта моделирования;
- Сбор сведений об объекте исследования;
- Постановка задачи и определение целей;
- Идентификация основных параметров объекта;
- Построение математической модели;
- Вычисления;
- Анализ результатов моделирования.

В процессе работы над моделью удается несколько уточнить логическую структуру связей, описывающих исследуемый экономический процесс.

Моделирование экономических явлений — теоретическая основа применения математики в экономике.

2.4. Математические модели в экономике

Одним из примеров использования математических моделей служит применение их в экономике. Такие модели позволяют описать конкретные связи между экономическими процессами и явлениями, более того они служат для предоставления прогнозов различных экономических показателей, а также для развития различных алгоритмов по управлению экономикой.

Математические модели дают описание экономики как единое целое с помощью различных макроэкономических показателей, таких как ВВП, экспорт, инвестиции, импорт и т. д. [3]

Модели, используемые в микроэкономике, показывают взаимосвязь между отдельными элементами экономики или их уровнем в данной единой рыночной среде. [5]

Для создания таких моделей используются различные производственные функции. Основными и наиболее популярными являются функция Кобба-Дугласа [19], функция издержек, функция спроса, потребления и предложения.

Производственная функция – это функция, характеризующаяся зависимостью между физическим объёмом факторов производства (используемых ресурсов) и максимально возможным объёмом выпуска, который может быть достигнут при условии, что все имеющиеся ресурсы используются наиболее разумным образом.

Производственную функцию также называют функцией полезности, с помощью которой можно отобразить предпочтения потребителя на множестве всех наборов благ, которые доступны потребителю. [20]

Основным свойством, которым может обладать производственная функция, является постоянная эластичность замещения. Это означает, что гибкость отношения аргумента функции к соотношению граничного продукта равна значению аргумента. Функции с постоянной эластичностью замещения иногда называют функциями CES или CES-функциями по английской аббревиатуре данного термина.

Кроме того, многие другие производственные функции являются частными случаями данной функции. К примеру, производственная функция Леонтьева [9] является функцией с нулевой эластичностью замещения, а функция Кобба-Дугласа – с единичной эластичностью замещения. [17]

Развитие науки и экономики не стоит на месте, каждый год новые учёные, экономисты и математики открывают и доказывают различные функции и математические модели. Так, в середине 20 века, появилась модель Харрода-Домара [22]. Благодаря критики и замечания возникла новая модель – модель Солоу [25], основанная на неоклассической производственной функции.

Следует отметить, что одной из известных неоклассических моделей экономического роста является модель Рамсея — Касса — Купманса (модель Рамсея). В этой модели линии потребления и сбережения высчитываются на базе решения задачи оптимизации домашних хозяйств и фирм в условиях совершенной конкуренции.

Фрэнк Плампton Рамсей, который жил в 1903–1930 гг., являлся выдающимся ученым в области математики, экономики и других различных наук. Он разработал простейшую замкнутую модель экономического роста [23]. В данной модели используется лишь один продукт ВВП, используемый в инвестициях и потреблении.

Также данная модель раннее использовалась Н. Н. Оленевым для описания и идентификации параметров экономики России [13] и многими другими учёными и математиками для других стран.

Для моделирования экономики Китайской народной республики возьмем простейшую динамическую модель экономики, но немного внесем в нее изменения. Нужно взять во внимание, что с течением времени происходят некоторые перемены не только во внешней торговле Китая, но и в ценах, которые влияют на каждый элемент основного макроэкономического баланса. Для идентификации параметров модели экономики КНР используются аппроксимирующие функции.

ГЛАВА 3. Математическая модель КНР

3.1. Задача идентификации параметров

Для реализации и описания модели экономики КНР необходимо решить задачу идентификацию её параметров. Для этого возьмём временные ряды данных за 1970-2018 гг. для макроэкономических показателей страны (X = Y, I, C, J, E) в национальной валюте (т.к. модели рассматривают закрытую экономику) в текущих ценах (т.е. цены на какую-то определённую дату или средние за год) и в постоянных ценах 2015 года (т.е. цены какого-то периода, принятого в качестве базисного, у нас этот период – 2015 год), а также численность населения N с сайта ООН [15]. Переведём все данные в нормальные единицы для более привычного подсчета: макроэкономические показатели в трлн юаней, население в млн человек.

Для удобства введем обозначения:

C = Расходы конечного потребления (Final consumption expenditure);

J = Валовое накопление капитала (Gross capital formation);

E = Экспорт товаров и услуг (Exports of goods and services);

I = Импорт товаров и услуг (Imports of goods and services);

Y = Валовый внутренний продукт (ВВП) (Gross Domestic Product (GDP));

N = Население (Population);

L = Число занятых в экономике (Number of employees in the economy).

Обозначим макроэкономические показатели в постоянных ценах C, J, E, I, Y, а в текущих ценах Cp, Jp, Ep, Ip, Yp.

Описание модели экономики страны основано на описание простейшей динамической модели Рамсея [4]. Будем считать, что Y(t) высчитывается по формуле CES

$$Y(t) = Y_0 * \left[\alpha * \left(\frac{L}{L_0}\right)^{-\beta} + (1-\alpha) * \left(\frac{K}{K_0}\right)^{-\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}}, \qquad (3.1.1)$$

где Y(t) – валовый внутренний продукт (ВВП), L – число занятых в экономике, K – количество капитала в экономике, $\alpha \in (0,1), \beta > -1$, t – время (год). При этом L в общем виде можно задать формулой

$$\frac{dL}{dt} = \gamma * L(t), \qquad L(0) = L_0, \tag{3.1.2}$$

где $\gamma > 0$ – параметр, L_0 – начальное число занятых в экономике (при $t = t_0$). Для более точных расчётных данных необходимо найти аппроксимирующую функцию.

Капитал изменяется по формуле

$$\frac{dK}{dt} = J(t-1) - \mu * K(t), \qquad K(0) = K_0, \tag{3.1.3}$$

где J – валовое накопление основного капитала (инвестиции), $\mu > 0$ – параметр, K_0 – начальный капитал (при $t = t_0$).

В любой момент времени t выполняется следующее равенство для макроэкономических показателей

$$pY(t) * Y(t) + pI(t) * I(t) = pC(t) * C(t) + pJ(t) * J(t) + pE(t) * E(t), \tag{3.1.4}$$

где pY – дефлятор ВВП, pI – индекс цен на импорт, pC – индекс цен на конечное потребление, pJ – индекс цен на инвестиции, pE – индекс цен на экспорт.

Разделим обе части уравнения на дефлятор ВВП pY, получим

$$Y(t) + pi_I(t) * I(t) = Q(t) + pi_J(t) * J(t) + pi_E(t) * E(t), \tag{3.1.5}$$

где $pi_X(t)$ – относительные индексы цен, X = J, E, I, Q(t) – конечное потребление домашних хозяйств, правительства и общественных организаций в ценах ВВП, высчитываемые по формулам

$$pi_X(t) = \frac{pX(t)}{pY(t)}, \tag{3.1.6}$$

$$Q(t) = \frac{pC(t) * C(t)}{pY(t)}. \tag{3.1.7}$$

Отсюда получаем уравнение

$$Y(t) = Q(t) + pi_J(t) * J(t) + pi_E(t) * E(t) - pi_I(t) * I(t). \tag{3.1.8}$$

Для того, чтобы решить уравнения и замкнуть модель необходимо найти объёмы продукции импорта, экспорта, и инвестиции в неизменяемых ценах 2005 г., предполагая, что составной определяющей являются параметры σ, δ, ρ. Данные параметры можно подобрать из статистических данных по формулам

$$\sigma = \frac{pi_J(t) * J(t)}{Y(t) + pi_I(t) * I(t)}, \tag{3.1.9}$$

$$\delta = \frac{pi_E(t) * E(t)}{Y(t)}, \tag{3.1.10}$$

$$\rho = \frac{pi_I(t)}{Y(t) - pi_E(t) * E(t)}. \tag{3.1.11}$$

Для сравнения статистических и расчётных данных используется свёртка критериев Тейла [14], определяемая формулой

$$S = (1 - T_Y) * (1 - T_I) * \left(1 - T_J\right) * (1 - T_E) * \left(1 - T_Q\right), \tag{3.1.12}$$

где T_X (X = Y, I, J, E, Q) – критерии Тейла, которые высчитываются следующим образом

$$T_X = \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{n}\left(X(t) - X_{stat}(t)\right)^2}{\sum_{t=0}^{n}(X(t)^2 + X_{stat}(t)^2)}}. \tag{3.1.13}$$

Далее максимизируем свёртку критериев Тейла, т. е.

$$S \to max_{\vec{a}^- \le \vec{a} \le \vec{a}^+}, \tag{3.1.14}$$

что является нашей основной задачей для подбора параметров и приближения расчётных данных к статистическим.

3.2. Реализация модели

Шаг 1. Для начала работы необходимо ознакомиться и получить статистические данные за прошлые года по таким макропоказателям, как:

- Валовый внутренний продукт (ВВП);

- Валовое накопление капитала;
- Расходы конечного потребления;
- Экспорт товаров и услуг;
- Импорт товаров и услуг;
- Население;
- Число занятых в экономике.

Как было сказано ранее, все эти данные можно найти на официальном сайте ООН [15]. Кроме того, мы будем использовать те же обозначения, которые были введены раньше в работе.

Статистические данные в текущих и постоянных ценах представлены в Приложении 1.

Шаг 2. Считаем индексы цен p_X(t) по формуле

$$p_X(t) = \frac{X_{current}(t)}{X_{constant}(t)} = \frac{Xp(t)}{X(t)}, \qquad (3.2.1)$$

где X(t) = C(t), J(t), E(t), I(t), Y(t); Xp(t) = Cp(t), Jp(t), Ep(t), Ip(t), Yp(t). Изменение индекса цен pX(t) = pC(t), pJ(t), pE(t), pI(t), pY(t) показано на Рисунке 3.2.1 для временного интервала с 1970 по 2018 гг.

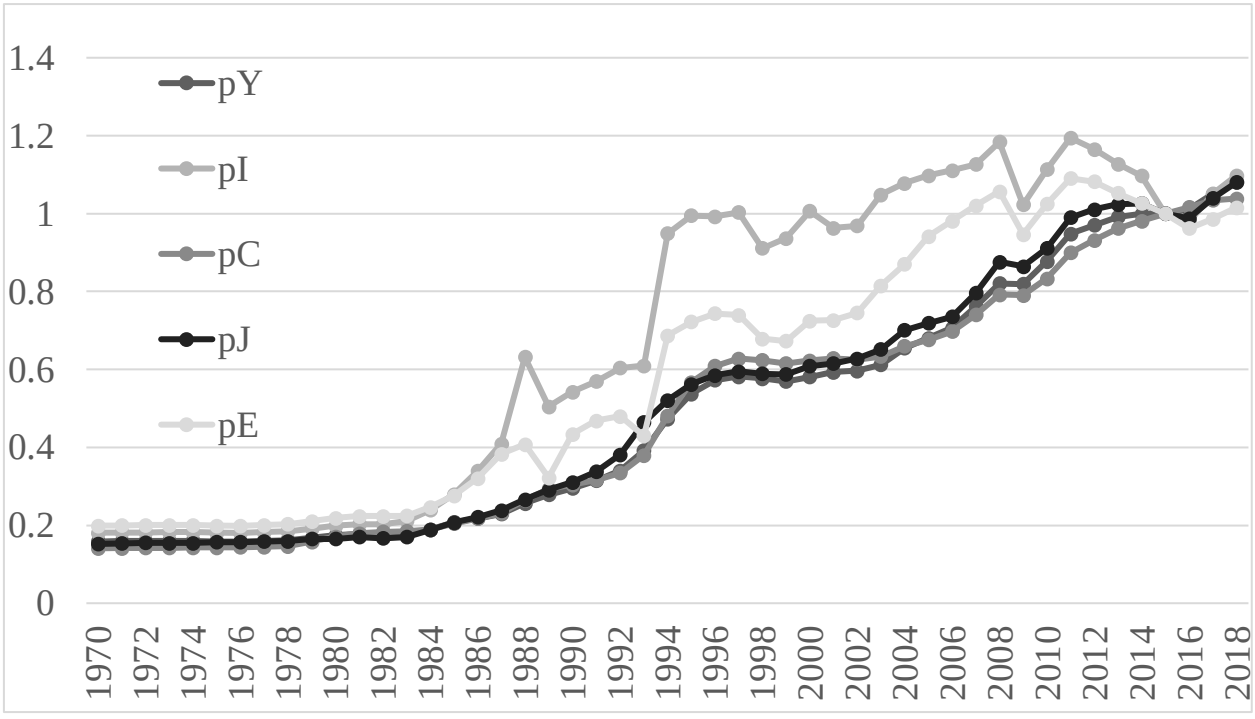


Рисунок 3.2.1. Индексы цен

Более подробно, в виде таблицы, данные показаны в Приложении 2.

Шаг 3. Рассчитаем удельные показатели x(t) по формуле

$$x(t) = \frac{X(t)}{N(t)}, \tag{3.2.2}$$

где X(t) = C(t), J(t), E(t), I(t), Y(t); N(t) – население. Изменение удельных показателей показано на Рисунке 3.2.2 для временного интервала t = (1970, 2018). Также эти показатели ещё называют показатели ВВП на душу населения.

Таблица со всеми данными находится в Приложении 3.

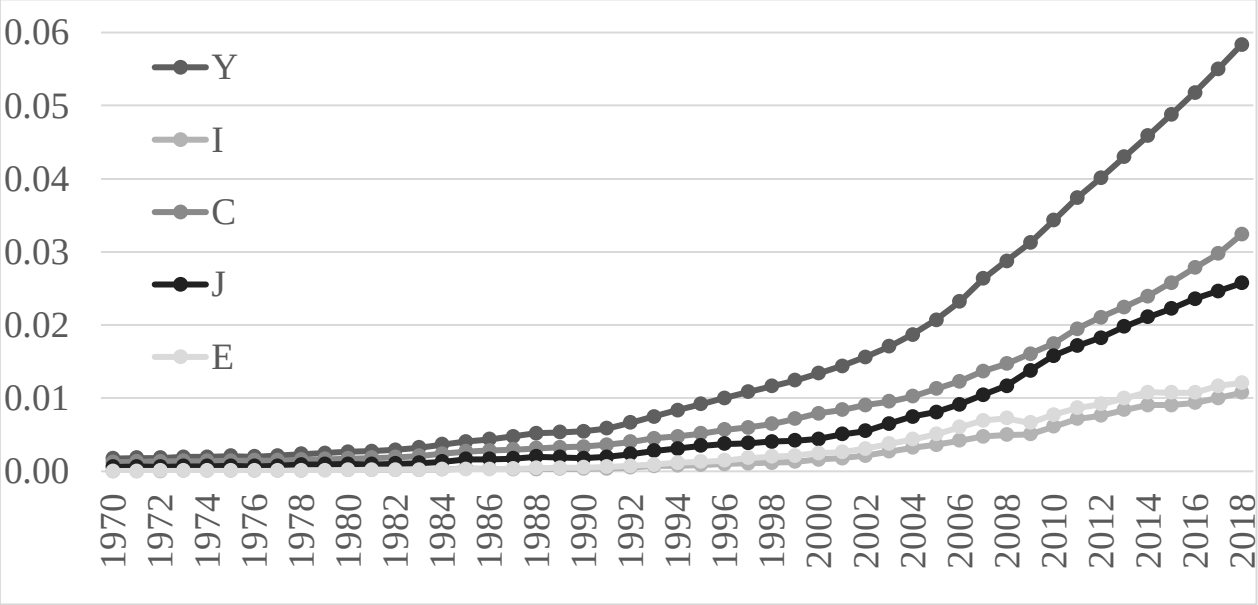


Рисунок 3.2.2. Удельные показатели

Шаг 4. Для расчёта числа занятого населения L(t) в млн человек возьмем данные доли занятого населения (%) для временного интервала с 1970 по 2018 гг. [12] и умножим на численность населения N. Если в какой-то год доля занятого населения неизвестна, то нужно вычислить с помощью линейной интерполяции по известным данным L(t) и L(t+D):

$$\frac{L(t+1)}{N(t+1)} = \frac{L(t)}{N(t)} + \delta, \tag{3.2.3}$$

$$\delta = \frac{\frac{L(t+D)}{N(t+D)} - \frac{L(t)}{N(t)}}{D}, \tag{3.2.4}$$

где D – некоторое число, через сколько лет известны данные.

Таким образом, получаем статистические данные $L_{stat}(t)$.

Все полученные данные занятого населения содержатся в Приложение 4.

Далее подбираем максимально близкую к этим значениям функцию – аппроксимирующую функцию.

Для Китай наиболее подходящая функция представлена ниже

$$L(t) = 720{,}85 + 30 * LN\big(1 + 0{,}3 * (t - 2000)\big), L(0) = L_{stat}(0). \quad (3.2.5)$$

Начальный год, для более точных расчётов, возьмём при t = 2000.

На Рисунке 3.2.3 изображено изменение числа занятого населения по статистическим и расчётным данным.

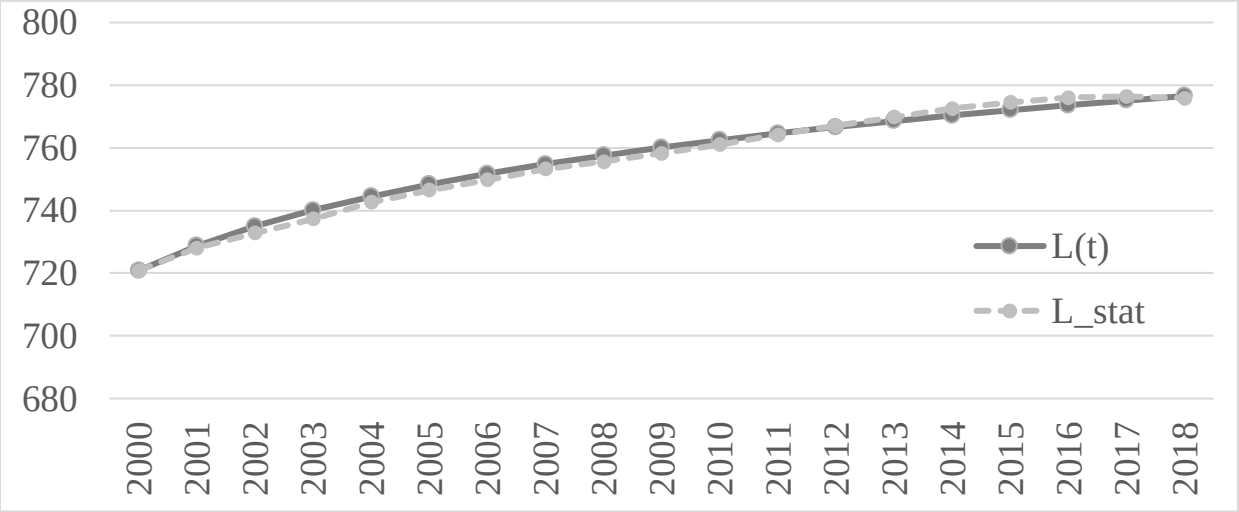


Рисунок 3.2.3. Численность занятого населения

Шаг 5. На данном этапе необходимо сосчитать капитал и оценить его начальное значение по формуле

$$K(t + 1) = K(t) * (1 - \mu) + J(t - 1), \quad (3.2.6)$$

$$K_0 = \sum_{t=1970}^{t=1999} J(t) * e^{-\mu * t}, \quad (3.2.7)$$

где μ > 0 – параметр темпа выбывания капитала (амортизация).

Данные, полученные при подсчёте капитала изображены на Рисунке 3.2.4.

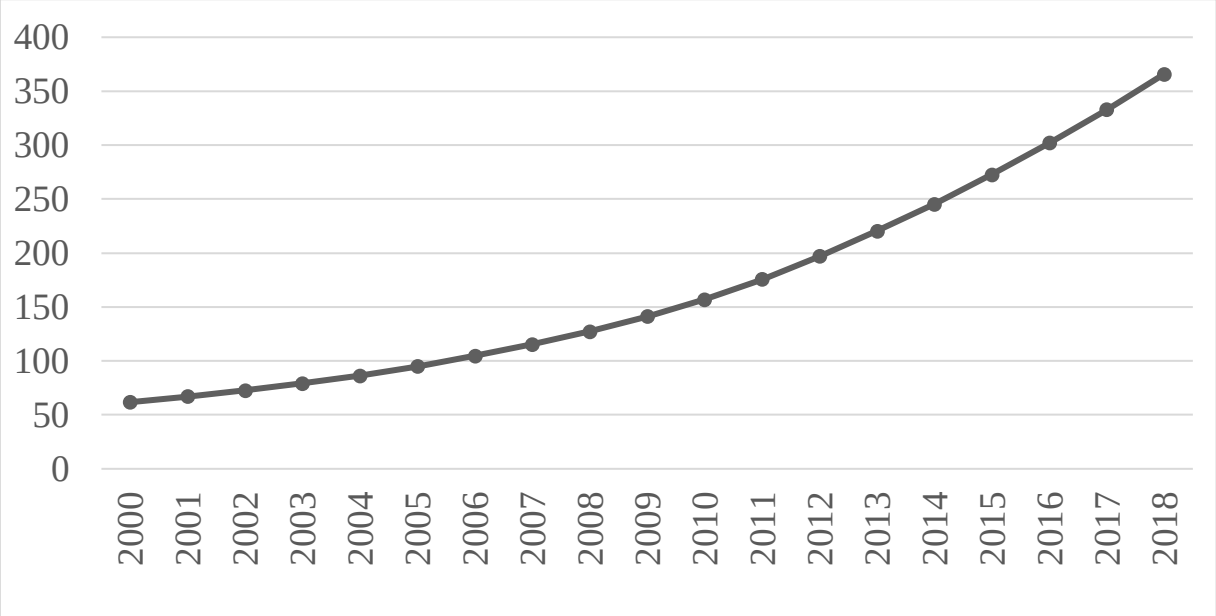


Рисунок 3.2.4. Капитал

Шаг 6. Высчитываем относительные индексы цен pi_X(t) и Q(t) по формулам (3.1.6) и (3.1.7). Данные можно отследить на Рисунке 3.2.5, представленном ниже.

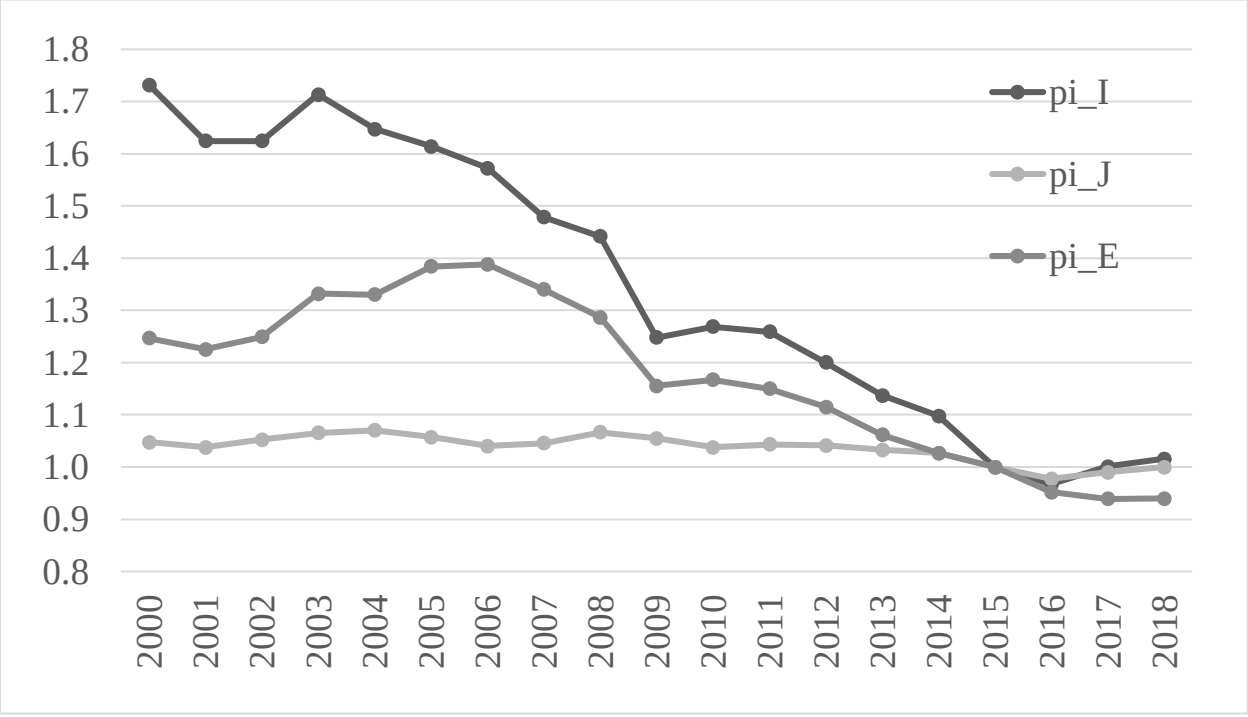


Рисунок 3.2.5. Относительные индексы цен

Шаг 7. Теперь необходимо проверить являются ли параметры σ, δ, ρ постоянными для Китая по формулам (3.1.9)-(3.1.11). К сожалению, для

530

Китайской народной республики это не является константами. Полученные данные можно увидеть на Рисунке 3.2.6.

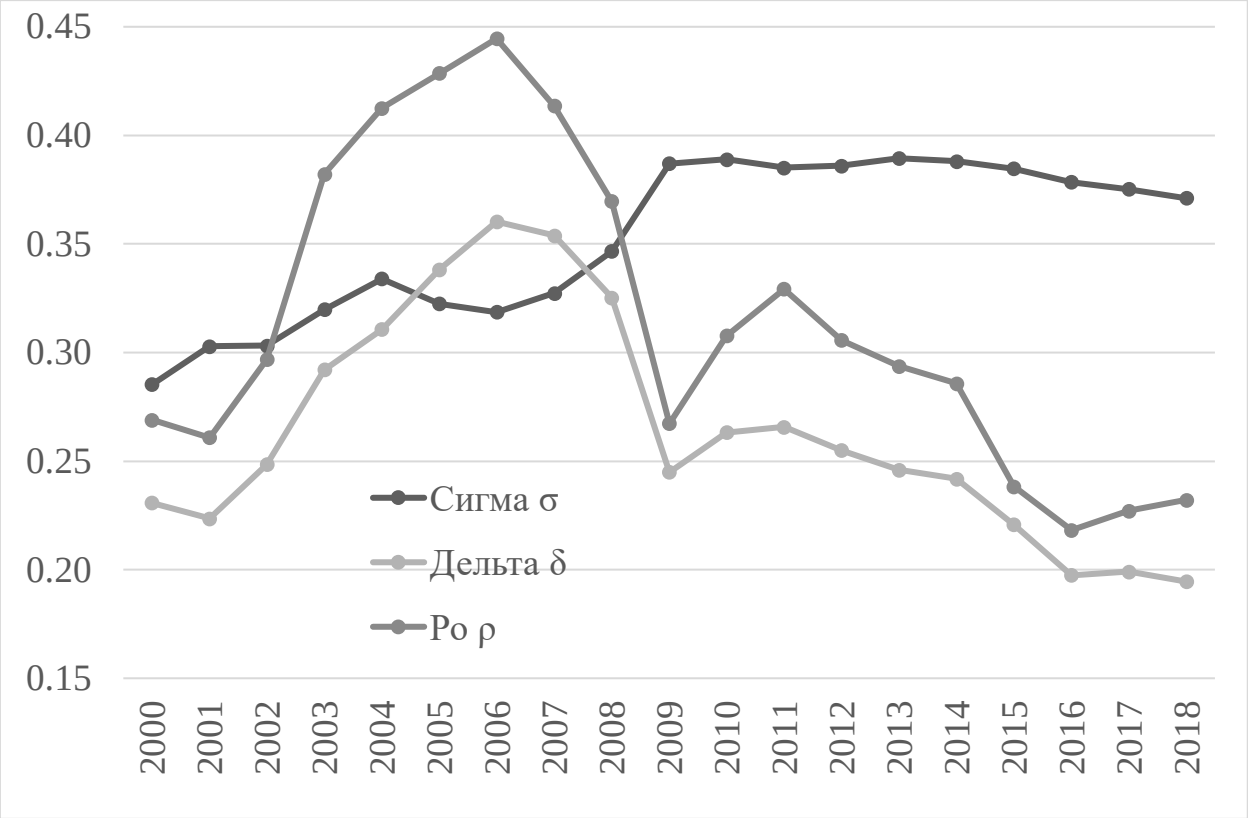


Рисунок 3.2.6. Параметры

Так как нам не подходят данные формулы для определения σ, δ, ρ, следовательно, нам нужно подобрать такие формулы, которые наиболее близко подходят к статистическим данным, то есть подобрать аппроксимирующие функции. Для более точных расчётов начальный год – был взят 2009 год, так как именно с него экономика Китая пошла более-менее стабильно (в 2008 году был мировой кризис). Эти функции представимы в виде

$$fi_\sigma = 0{,}382 + 0{,}008 * SIN((t - 2009) * 0{,}5), \quad (3.2.8)$$

$$fi_\delta = 0{,}235 + 0{,}036 * SIN((t - 2009) * 0{,}59), \quad (3.2.9)$$

$$fi_\rho = 0{,}27 + 0{,}05 * SIN((t - 2009) * 0{,}6), \quad (3.2.10)$$

где t = (2009, 2018).

Все статистические и расчётные данные отображены в Таблице 3.2.1 и на Рисунках 3.2.7–3.2.9 (fi – это подобранные аппроксимирующие функции).

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
σ	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,38	0,38	0,38	0,37
fi_σ	0,38	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,38	0,38	0,38	0,37
δ	0,24	0,26	0,27	0,25	0,25	0,24	0,22	0,20	0,20	0,19
fi_δ	0,24	0,26	0,27	0,27	0,26	0,24	0,22	0,20	0,20	0,21
ρ	0,27	0,31	0,33	0,31	0,29	0,29	0,24	0,22	0,23	0,23
fi_ρ	0,27	0,30	0,32	0,32	0,30	0,28	0,25	0,23	0,22	0,23

Таблица 3.2.1. Статистические и расчётные данные σ, δ, ρ

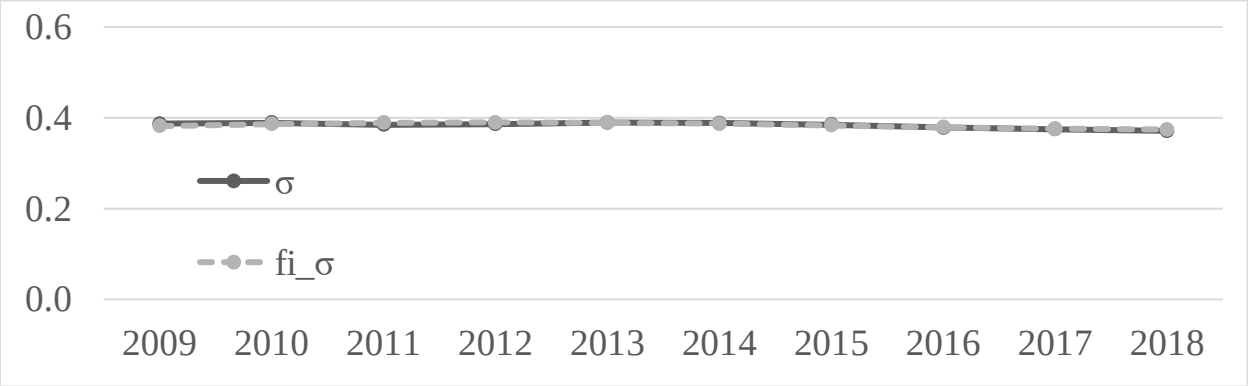


Рисунок 3.2.7. Сравнение σ и fi_σ

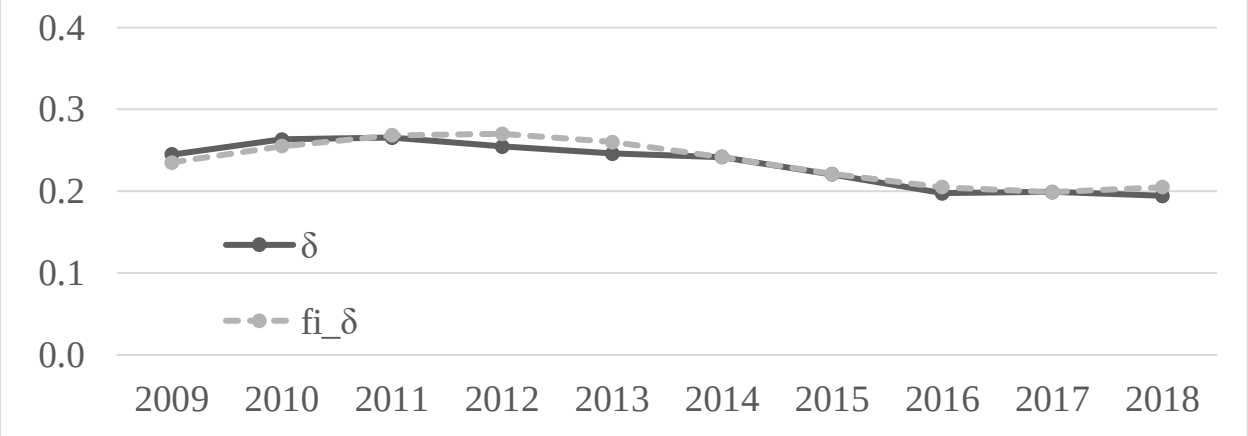


Рисунок 3.2.8. Сравнение δ и fi_δ

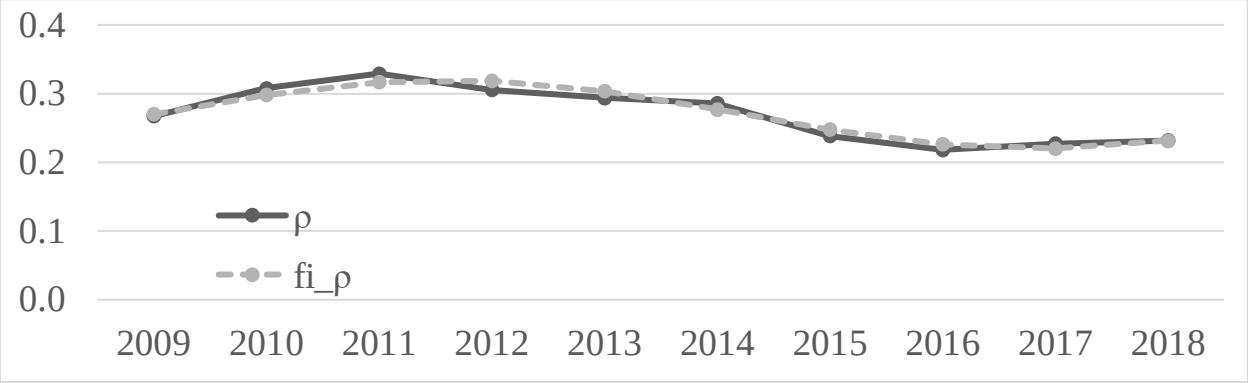


Рисунок 3.2.9. Сравнение ρ и fi_ρ

Шаг 8. Следующим необходимым шагом является нахождение аппроксимирующих функция для относительных цен на импорт, экспорт и инвестиции, то есть для pi_I(t), pi_J(t), pi_E(t).

$$fi(pi_I) = 1{,}12 + 0{,}15 * SIN((t - 2009) * 0{,}5 + 0{,}9), \quad (3.2.11)$$

$$fi(pi_J) = 1{,}01 + 0{,}04 * SIN((t - 2009) * 0{,}4 + 0{,}9), \quad (3.2.12)$$

$$fi(pi_E) = 1{,}055 + 0{,}11 * SIN((t - 2009) * 0{,}4 + 1{,}35), \quad (3.2.13)$$

Все статистические и расчётные данные отображены в Таблице 3.2.2 и на Рисунках 3.2.10-3.2.12 (fi – это подобранные аппроксимирующие функции)

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
pi_I	1,25	1,27	1,26	1,20	1,14	1,10	1,00	0,97	1,00	1,02
fi	1,24	1,27	1,26	1,22	1,16	1,08	1,02	0,98	0,97	1,00
pi_J	1,05	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,00	0,98	0,99	1,00
fi	1,04	1,05	1,05	1,04	1,03	1,02	1,00	0,99	0,98	0,97
pi_E	1,16	1,17	1,15	1,12	1,06	1,03	1,00	0,95	0,94	0,94
fi	1,16	1,16	1,15	1,12	1,08	1,03	0,99	0,96	0,95	0,95

Таблица 3.2.2. Статистические и расчётные данные относительных цен

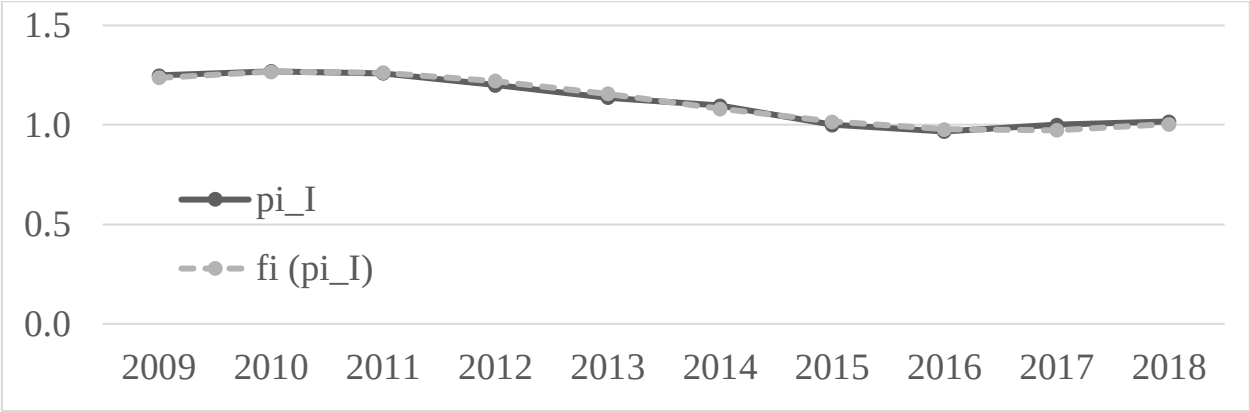


Рисунок 3.2.10. Сравнение pi_I и fi (pi_I)

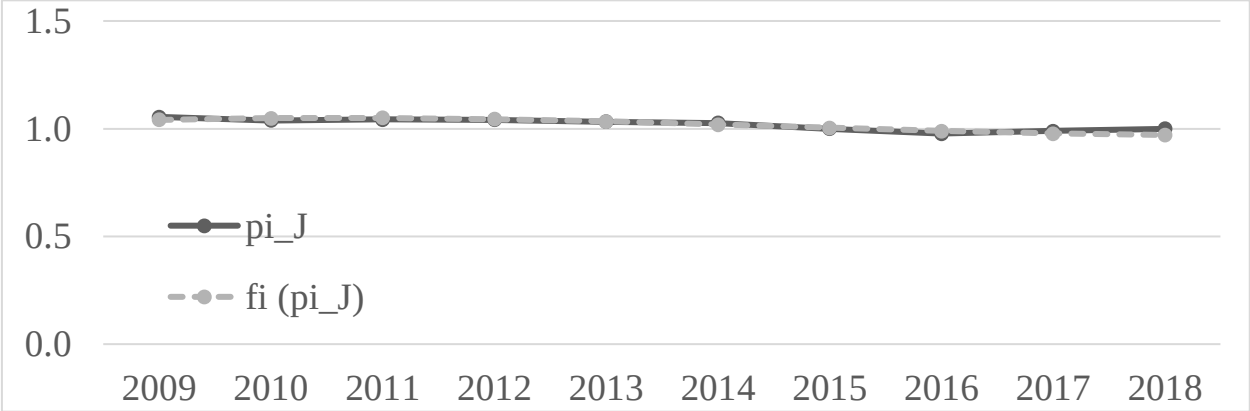


Рисунок 3.2.11. Сравнение pi_J и fi (pi_J)

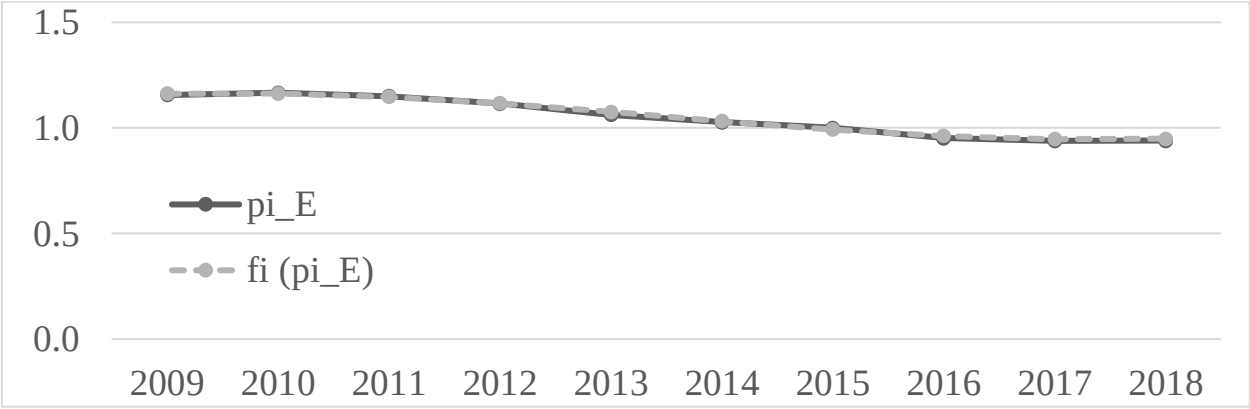


Рисунок 3.2.12. Сравнение pi_E и fi (pi_E)

Шаг 9. Высчитываем и собираем все расчётные данные для всех макроэкономических показателей: pi_I, pi_J, pi_E, σ, δ, ρ, K, L, Y, E, I, J, Q. Каждое значение можно найти из соответствующей формулы, представленной ранее. Все данные расписаны в Приложении 5.

Шаг 10. Рассчитывается простейшая динамическая модель при текущих параметрах, имеющих нижнюю и верхнюю границы: $\alpha \in (0,1), \beta > -1, \mu > 0$. Изменяем параметры до тех пор, пока не получим максимально близкую

функцию, т. е. аппроксимирующую функцию для Y_{stat}. В этом нам помогает свёртка критериев Тейла, высчитываемые по формуле (3.1.13). Свёртку необходимо максимизировать, т. е. использовать формулу (3.1.14), для определения всех параметров. Полученные результаты представлены в Приложении 6. В итоге определяются конечные параметры, представленные в Таблице 3.2.3.

	Нижняя граница	Верхняя граница	Используемое значение
μ	0,000001	0,1	0,001
α	0,1	0,99	0,207
β	0,1	100	1,291

Таблица 3.2.3. Основные параметры

На Рисунках 3.2.13–3.2.17 представлены графики сравнения статистических и расчётных данных. При данном приближении и используемых параметрах свёртка критериев Тейла получается S = 0,93. Это довольно-таки хороший результат, так как в идеале свёртка должна быть как можно ближе к единице.

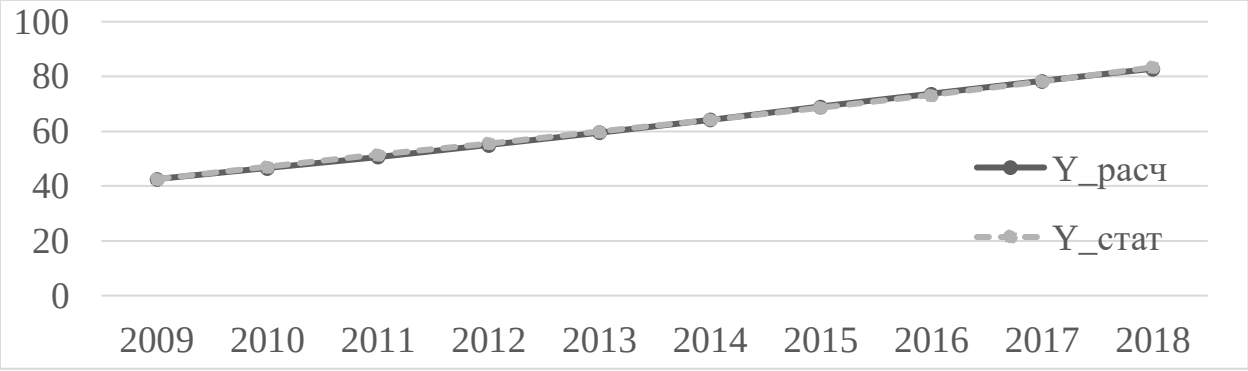


Рисунок 3.2.13. Сравнение $Y_{\text{стат}}$ и $Y_{\text{расч}}$

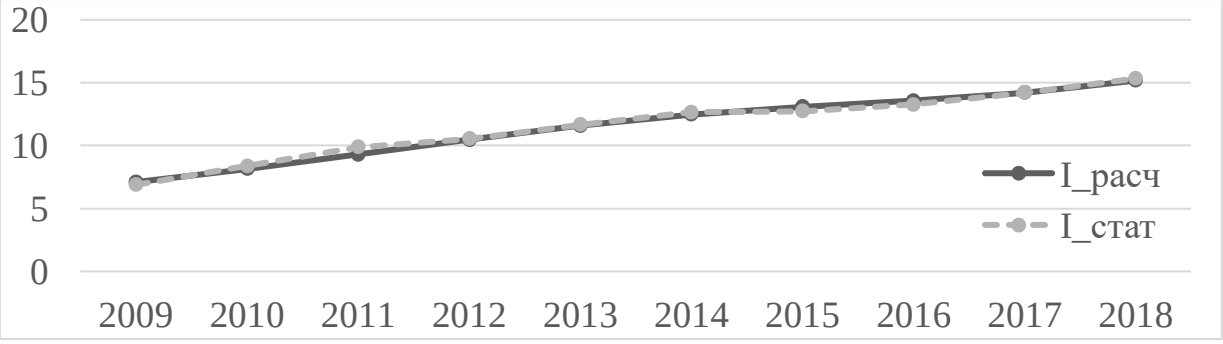


Рисунок 3.2.14. Сравнение $I_{\text{стат}}$ и $I_{\text{расч}}$

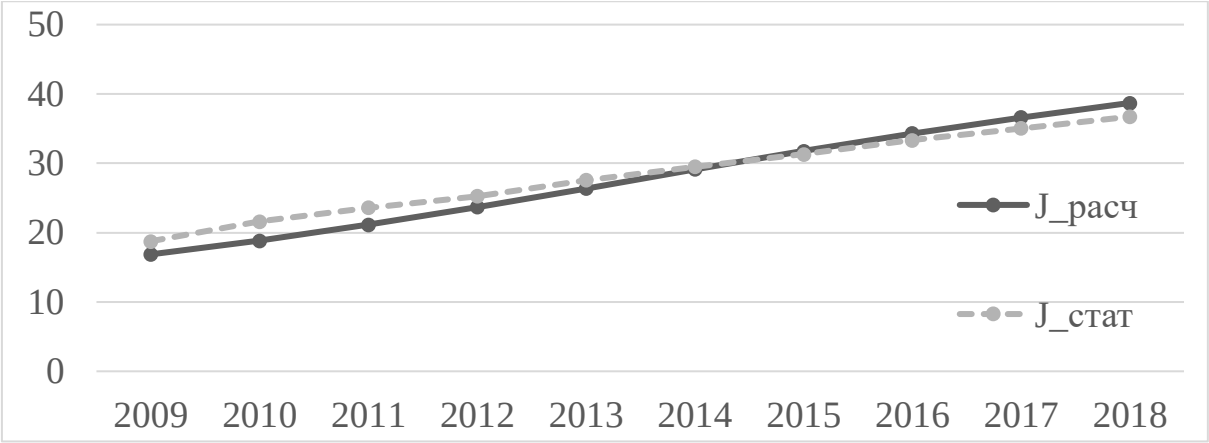


Рисунок 3.2.15. Сравнение $J_{\text{стат}}$ и $J_{\text{расч}}$

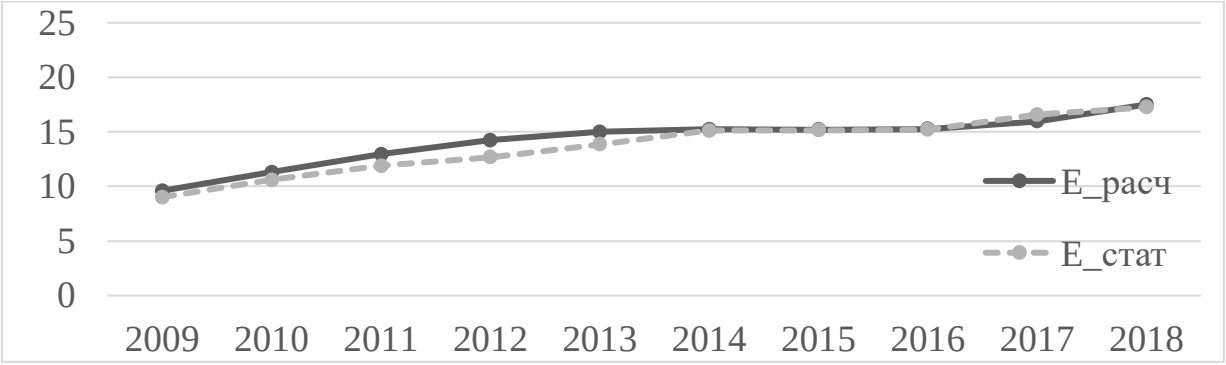


Рисунок 3.2.16. Сравнение $E_{\text{стат}}$ и $E_{\text{расч}}$

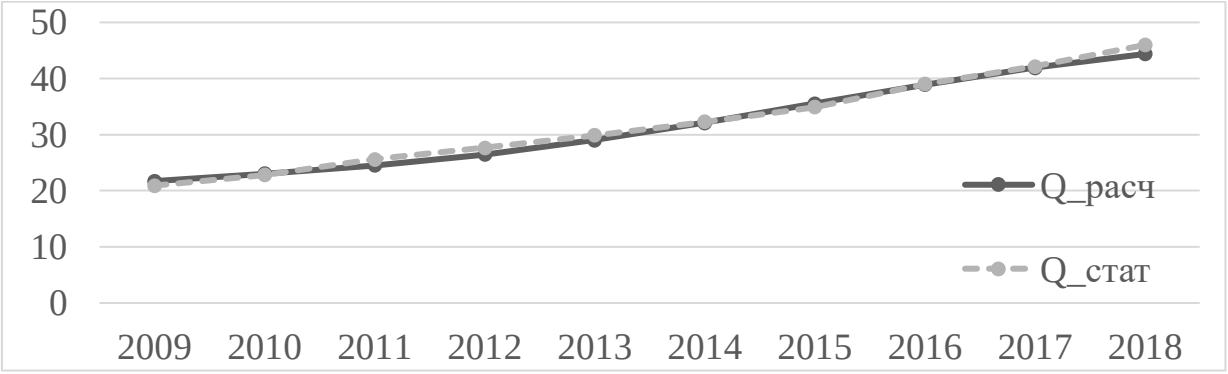


Рисунок 3.2.17. Сравнение $Q_{\text{стат}}$ и $Q_{\text{расч}}$

3.3. Прогноз на 10 лет

Благодаря проделанной работе и полученным результатам и формулам мы можем предположить развитие экономики Китая на несколько лет вперёд.

Так как сейчас экономика очень быстро развивается и меняется, то было сделан прогноз на 10 лет, то есть с 2019 по 2028 года.

Все полученные данные отображены в Таблице 3.3.1 и на Рисунках 3.3.1–3.3.2

	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028
pi_I	1,06	1,14	1,21	1,25	1,27	1,25	1,20	1,12	1,05	1,00
pi_J	0,97	0,98	0,99	1,00	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,04
pi_E	0,97	1,00	1,04	1,08	1,12	1,15	1,16	1,16	1,14	1,11
σ	0,37	0,38	0,38	0,38	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,38
δ	0,22	0,24	0,26	0,27	0,27	0,25	0,23	0,21	0,20	0,20
ρ	0,26	0,29	0,31	0,32	0,31	0,29	0,26	0,24	0,22	0,22
K	421,9	461,8	504,3	549,4	596,6	645,5	695,4	745,9	797,0	848,9
L	777,9	779,2	780,5	781,7	782,9	783,9	785,1	786,1	787,1	788,1
Y	87,01	91,6	96,1	100,7	105,2	109,6	113,7	117,7	121,6	125,2
E	19,94	22,22	24,10	25,12	25,11	24,22	22,90	21,77	21,50	22,64
I	16,28	17,54	18,57	19,26	19,61	19,68	19,64	19,84	20,81	22,87
J	40,23	42,98	45,58	47,79	49,46	50,56	51,24	51,82	52,69	54,18
Q	46,09	46,90	47,34	47,88	48,97	50,87	53,63	57,06	60,85	64,54

Таблица 3.3.1. Расчётные данные макроэкономических показателей

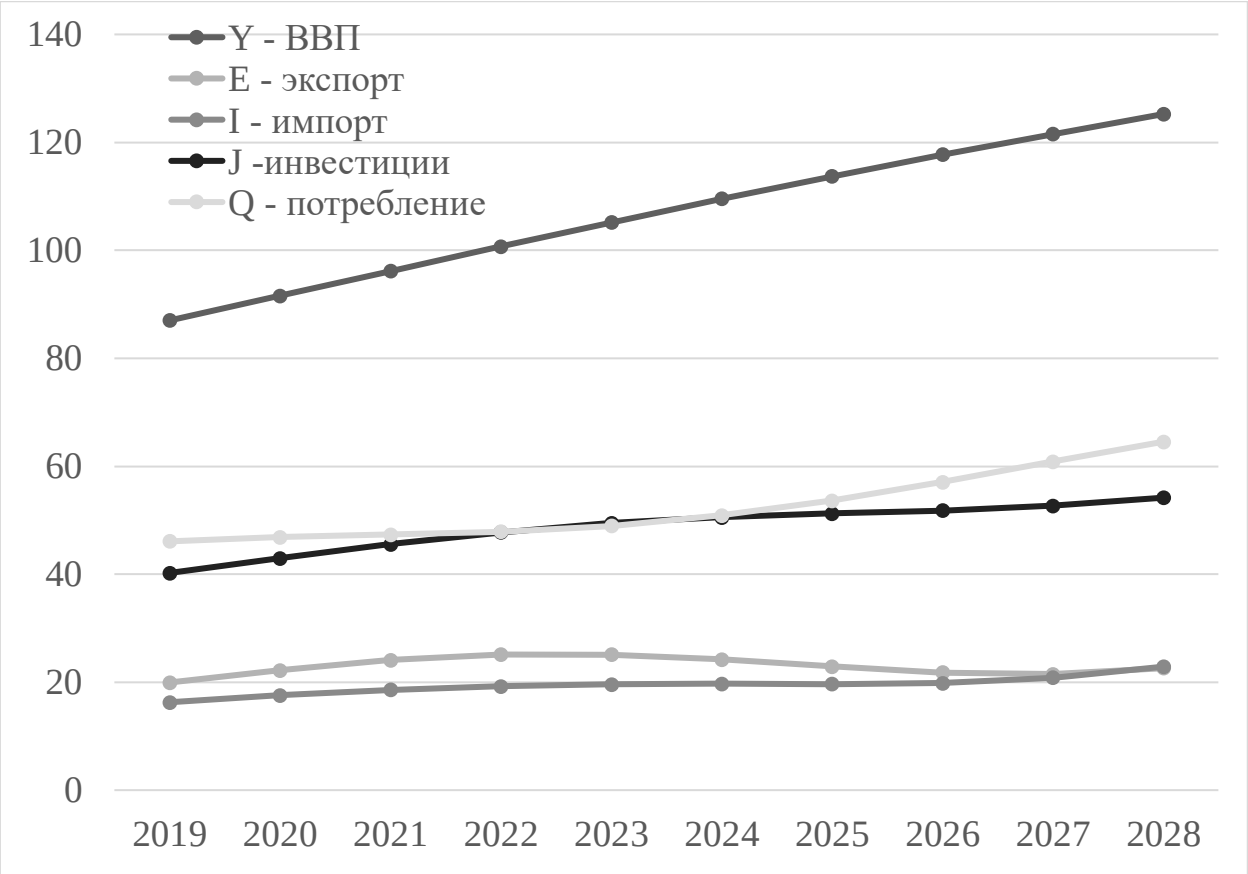


Рисунок 3.3.1. Макроэкономические показатели на 2019–2028 года

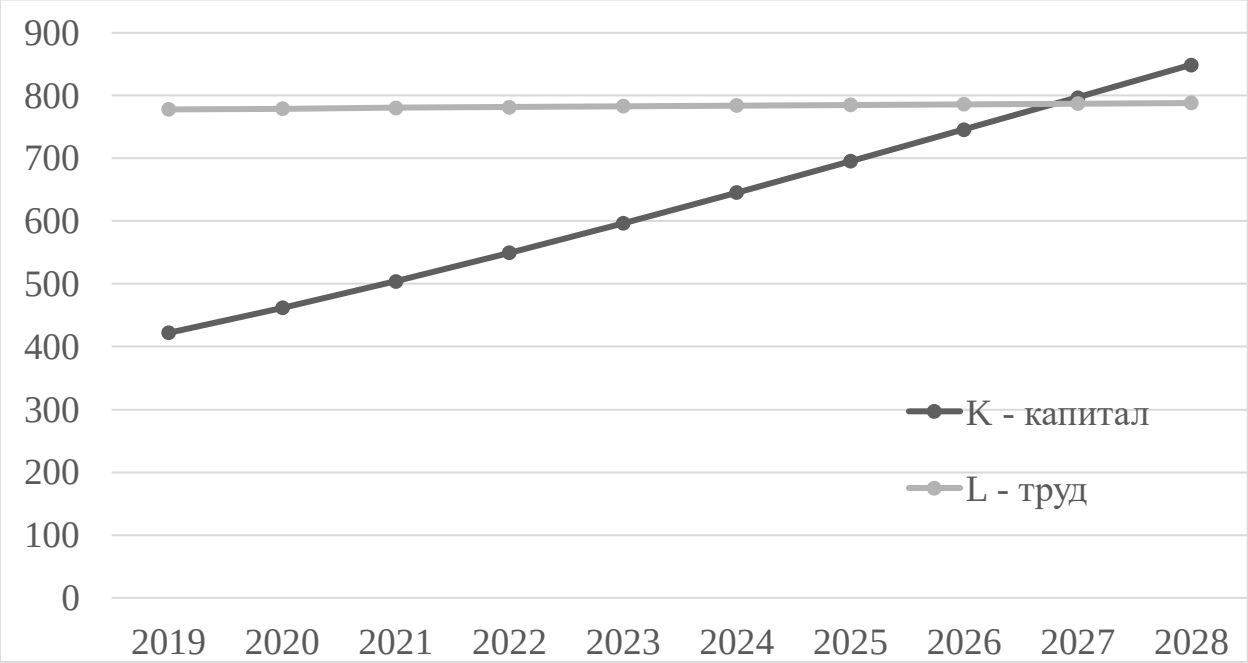


Рисунок 3.3.2. Показатели капитала и труда на 2019–2028 года

По причине пандемии во всём мире в 2019 году, данные прогнозы являются немного неточными в настоящее время из-за отсутствия официальных статистических данных после 2018 года, которые

использовались во время написания выпускной работы. Более того, по неофициальным динамическим данным разница в статистических и расчётных значениях совсем незначительная. Несмотря на то, что рост ВВП Китая в 2020 году стал минимальным за последние несколько лет, можно твёрдо сказать, что КНР благополучно преодолела данный этап в экономике. Потери в финансовой составляющей в сравнении с предыдущими годами сыграли огромную роль в статистике и росте китайской экономики, однако данные потери в экономических показателях, как мы можем видеть, удаётся восстановить с помощью финансовой политики страны. По итогам прошлого года китайская экономика единственная среди крупных показала высокие темпы роста экономика независимо от ситуации с коронавирусом. Предполагается, что в дальнейшем будет продолжаться ускорение роста и развития экономики Китая.

Заключение

На основании всего вышесказанного мы можем констатировать, что все поставленные задачи в начале исследования выполнены успешно. В ходе написания выпускной работы были изучены:

1. История экономического развития КНР: подъёмы и спады;
2. Понятие математической модели;
3. Классификация математических моделей, применение их в экономике;
4. Этапы построения математических моделей;

Кроме того, построена простейшая динамическая модель экономического роста Китая с помощью идентификации параметров по макроэкономическим показателям страны и дан прогноз развития экономики КНР на несколько лет вперед.

В начале работы была изучена история экономики КНР, приводятся экономические кризисы, повлиявшие на развитие экономики.

Далее было рассмотрено основное понятие математической модели, описаны классификации и этапы построения математических моделей, показаны применение их в экономике.

После этого была поставлена задача идентификации параметров, рассчитаны основные макроэкономические показатели, проводился анализ, вычисления и построение математической модели экономики Китая, дан прогноз на 10 лет, используя полученный результат.

Список используемой литературы

1. Влазнева С.А., Мишина Н. А., Крапчина Л.Н., Котова Л. Г. Современное состояние и перспективы развития экономики Китая // Российское предпринимательство. – 2018. – Том 19. – № 10. – С. 3253–3268.
2. Галаган А. Б., Савинов Ю. А. Эволюция модели экономического развития Китая // Российский внешнеэкономический вестник. – 2016. – №6. – С. 40–52.
3. Замков, О.О.; Толстопятенко, А.В.; Черемных, Ю.Н. Математические методы в экономике. – 2 изд. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, Дело и Сервис, 1999. – 368 с.
4. Каменев Г. К., Оленев Н. Н. Исследование устойчивости идентификации и прогнозирования российской экономики на модели Рамсея // Математическое моделирование – М. – 2014. – Том 26. – № 9. — С. 3-17.
5. Каменева С. А., Борискина И. П. Математическое моделирование в экономике // Вестник Волжского университета им. В. Н. Татищева. – 2016. – №2. – Том 2. – С. 25–29.
6. Карелина Е. А., Чанин Е.В. Особенности развития экономики Китая в начале XXI века // Казанская наука. – 2014. – №3. – С. 98–103.
7. Китай // Википедия URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Китай (дата обращения: 22.10.2020).
8. Коновалова А. Г. Математическое моделирование экономики КНР // Цифровая экономика: проблемы развития и механизмы, Общество с ограниченной ответственностью "Агентство международных исследований". – 2021. – С. 24-28.
9. Леонтьев В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика // Essays in Economics (1966, 1977, 1985) // Пер. с англ. — М.: Политиздат – 1990. — 415 с.

10. Математическая модель // Википедия URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/wiki/Математическая_модель (дата обращения: 15.12.2020).
11. Мирное развитие Китая // URL: http://by.china-embassy.org/rus/zt/zfbps/t868717.htm (дата обращения: 06.12.2020)
12. Мировой атлас данных // URL: https://knoema.ru/atlas/Китай (дата обращения: 11.12.2020).
13. Оленев Н. Н. Идентификация параметров в модели экономики России с двумя видами капитала // Информатика, управление и системный анализ. Труды IV Всероссийской конференции молодых ученых с международным участием. Том II. Тверь: Тверской государственный технический университет – 2016. – С.148-155.
14. Оленёв Н.Н., Печенкин Р. В., Чернецов А.М. Параллельное программирование в MATLAB и его приложения. – М.: ВЦ РАН. – 2007. – 120 с.
15. Официальный сайт Статистического отдела ООН // URL: https://unstats.un.org/unsd/snaama/Index (дата обращения: 02.10.2020).
16. Печерских И. А., Семенов А. Г. Математические модели в экономике. // Кемерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности – 2011. – 193 с.
17. Постоянная эластичность замещения // Википедия URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Постоянная_эластичность_замещения (дата обращения: 27.02.2021).
18. Фокин Н. И., Кучук О.В. Экономическая история Китая: технологический аспект // Инновации и инвестиции. – 2019. – №9. – С. 121–128.
19. Функция Кобба — Дугласа // Википедия URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Кобба_—_Дугласа (дата обращения: 26.02.2021).

20. Функция полезности // Википедия URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_полезности (дата обращения: 26.02.2021).
21. Экономика КНР // Википедия URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Экономика_КНР (дата обращения: 05.12.2020).
22. Harrod R. F. An Essay in Dynamic Theory. // The Economic Journal. – 1939. – Март (т. 49, № 193). – С. 14–33.
23. Ramsey F. P. A mathematical theory of saving // The Economic Journal. – 1928. – №152. – С. 543–559.
24. Smith A. An inquiry into the nature and causes of the wealth of nations // The modern library edition, New York. – 1937. – 976 с.
25. Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. // The Quarterly Journal of Economics. – 1956. – Февраль (vol. 70, № 1). – С. 65–94.

Приложение 1

Статистические данные макроэкономических показателей в постоянных и текущих ценах

Год	Постоянные цены, трлн юаней					Текущие цены, трлн юаней				
	Y	I	C	J	E	Yp	Ip	Cp	Jp	Ep
1970	1,44	0,04	1,03	0,50	0,03	0,23	0,01	0,15	0,08	0,01
1971	1,54	0,04	1,10	0,55	0,04	0,25	0,01	0,16	0,08	0,01
1972	1,60	0,04	1,15	0,52	0,05	0,26	0,01	0,16	0,08	0,01
1973	1,73	0,07	1,23	0,60	0,07	0,28	0,01	0,17	0,09	0,01
1974	1,77	0,09	1,26	0,62	0,08	0,28	0,02	0,18	0,10	0,02
1975	1,92	0,09	1,31	0,69	0,08	0,30	0,02	0,19	0,11	0,02
1976	1,89	0,08	1,37	0,65	0,08	0,30	0,01	0,20	0,10	0,02
1977	2,03	0,08	1,42	0,71	0,08	0,33	0,02	0,21	0,11	0,02
1978	2,27	0,11	1,53	0,89	0,10	0,37	0,02	0,22	0,14	0,02
1979	2,44	0,14	1,63	0,92	0,12	0,41	0,03	0,26	0,15	0,02
1980	2,63	0,17	1,74	0,98	0,15	0,46	0,03	0,30	0,16	0,03
1981	2,77	0,20	1,83	0,98	0,19	0,49	0,04	0,33	0,17	0,04
1982	3,02	0,19	1,95	1,05	0,22	0,54	0,04	0,36	0,18	0,05
1983	3,34	0,21	2,19	1,16	0,22	0,60	0,04	0,41	0,20	0,05
1984	3,85	0,27	2,54	1,36	0,26	0,73	0,06	0,48	0,26	0,06
1985	4,37	0,44	2,90	1,75	0,31	0,91	0,12	0,59	0,36	0,09
1986	4,76	0,37	3,08	1,81	0,32	1,04	0,13	0,67	0,40	0,10
1987	5,32	0,35	3,31	1,95	0,37	1,22	0,14	0,76	0,46	0,14
1988	5,91	0,32	3,56	2,28	0,46	1,52	0,20	0,94	0,61	0,19
1989	6,16	0,38	3,76	2,24	0,54	1,72	0,19	1,10	0,65	0,17
1990	6,40	0,39	3,95	2,11	0,61	1,89	0,21	1,20	0,66	0,26
1991	6,99	0,48	4,30	2,33	0,71	2,20	0,27	1,36	0,79	0,33
1992	7,99	0,64	4,85	2,84	0,86	2,72	0,39	1,62	1,08	0,41

1993	9,10	0,88	5,48	3,40	1,10	3,57	0,54	2,08	1,58	0,47
1994	10,28	0,96	5,88	3,82	1,43	4,86	0,92	2,83	1,99	0,98
1995	11,41	1,08	6,39	4,33	1,63	6,13	1,07	3,62	2,43	1,17
1996	12,54	1,23	7,08	4,71	1,84	7,18	1,22	4,31	2,76	1,37
1997	13,70	1,36	7,57	4,87	2,32	7,97	1,36	4,75	2,90	1,72
1998	14,78	1,49	8,25	5,16	2,53	8,52	1,35	5,15	3,04	1,72
1999	15,91	1,68	9,20	5,39	2,72	9,06	1,58	5,66	3,17	1,83
2000	17,26	2,06	10,22	5,67	3,19	10,03	2,08	6,37	3,45	2,31
2001	18,70	2,33	10,90	6,56	3,41	11,09	2,25	6,85	4,04	2,48
2002	20,41	2,80	11,85	7,19	4,06	12,17	2,71	7,41	4,51	3,02
2003	22,45	3,55	12,56	8,56	4,93	13,74	3,72	7,95	5,58	4,01
2004	24,72	4,27	13,51	9,91	5,77	16,18	4,60	8,91	6,94	5,03
2005	27,54	4,84	15,00	10,78	6,73	18,73	5,31	10,14	7,75	6,33
2006	31,05	5,62	16,44	12,22	8,06	21,94	6,24	11,47	8,98	7,91
2007	35,46	6,41	18,40	14,07	9,37	27,01	7,22	13,62	11,20	9,56
2008	38,89	6,73	19,89	15,79	9,83	31,92	7,96	15,75	13,82	10,39
2009	42,54	6,88	21,86	18,76	9,02	34,85	7,03	17,27	16,21	8,54
2010	46,96	8,39	23,88	21,59	10,59	41,21	9,34	19,90	19,67	10,85
2011	51,45	9,88	26,79	23,57	11,89	48,79	11,79	24,10	23,33	12,96
2012	55,49	10,53	29,11	25,25	12,68	53,86	12,27	27,11	25,52	13,73
2013	59,80	11,65	31,21	27,54	13,86	59,30	13,13	30,03	28,21	14,59
2014	64,17	12,66	33,46	29,50	15,11	64,13	13,89	32,83	30,27	15,51
2015	68,60	12,74	36,23	31,28	15,14	68,60	12,74	36,23	31,28	15,14
2016	73,22	13,26	39,36	33,31	15,19	74,01	12,96	39,99	32,91	14,62
2017	78,17	14,20	42,26	35,02	16,58	82,08	14,93	43,72	36,40	16,34
2018	83,30	15,33	46,25	36,71	17,24	90,03	16,83	48,03	39,66	17,51

545

Приложение 2

Индексы цен

Год	pY	pI	pC	pJ	pE
1970	0,1582	0,1804	0,141	0,1521	0,1986
1971	0,1594	0,1817	0,1415	0,1537	0,2
1972	0,1595	0,1819	0,142	0,1552	0,2002
1973	0,1596	0,182	0,1424	0,1543	0,2003
1974	0,1601	0,1826	0,1431	0,1548	0,2009
1975	0,1583	0,1805	0,1432	0,1567	0,1987
1976	0,1582	0,1804	0,1436	0,1571	0,1985
1977	0,1599	0,1823	0,1449	0,159	0,2006
1978	0,162	0,1847	0,1464	0,1594	0,2033
1979	0,1678	0,1914	0,158	0,1652	0,2106
1980	0,1741	0,1986	0,171	0,1649	0,2185
1981	0,1782	0,2033	0,1789	0,1701	0,2237
1982	0,178	0,203	0,183	0,1669	0,2234
1983	0,1801	0,2112	0,1853	0,17	0,2246
1984	0,189	0,2391	0,1886	0,1885	0,2463
1985	0,2083	0,279	0,2043	0,2069	0,2761
1986	0,218	0,3397	0,2181	0,2213	0,3207
1987	0,2291	0,4096	0,2311	0,238	0,3827
1988	0,2568	0,6316	0,2647	0,2662	0,4075
1989	0,2789	0,5049	0,2934	0,2912	0,3222
1990	0,2948	0,5425	0,3041	0,3106	0,4334
1991	0,3146	0,5693	0,3164	0,3381	0,4685
1992	0,3404	0,6036	0,3348	0,3811	0,4801
1993	0,3921	0,6095	0,3797	0,4641	0,4295
1994	0,4729	0,9493	0,4812	0,5207	0,6866

1995	0,5376	0,9952	0,5668	0,5617	0,7225
1996	0,5726	0,9929	0,6089	0,585	0,7439
1997	0,5818	1,0031	0,6279	0,5949	0,7396
1998	0,5766	0,911	0,624	0,5889	0,6789
1999	0,5693	0,9368	0,6157	0,5873	0,6731
2000	0,581	1,0063	0,6228	0,6088	0,7245
2001	0,5929	0,9632	0,6289	0,6152	0,7264
2002	0,5965	0,969	0,6251	0,6278	0,7451
2003	0,612	1,0486	0,6331	0,652	0,8151
2004	0,6546	1,0783	0,6596	0,7006	0,8705
2005	0,6801	1,0977	0,6763	0,719	0,9414
2006	0,7068	1,1113	0,6978	0,7353	0,9812
2007	0,7616	1,1262	0,7403	0,7966	1,0204
2008	0,821	1,1838	0,7917	0,8756	1,0565
2009	0,8193	1,0225	0,7901	0,8642	0,9468
2010	0,8776	1,1137	0,8333	0,9108	1,0243
2011	0,9484	1,1942	0,8997	0,9898	1,0904
2012	0,9705	1,1651	0,9314	1,0107	1,0824
2013	0,9915	1,1272	0,9625	1,0241	1,0527
2014	0,9994	1,097	0,9811	1,0263	1,0261
2015	1	1	1	1	1
2016	1,0107	0,9776	1,0161	0,988	0,962
2017	1,05	1,0511	1,0344	1,0394	0,9857
2018	1,0808	1,0981	1,0386	1,0804	1,0157

547

Приложение 3

Удельные показатели

Год	Y	I	C	J	E
1970	0,00174	0,00004	0,00125	0,00061	0,00004
1971	0,00182	0,00004	0,00129	0,00065	0,00005
1972	0,00184	0,00005	0,00133	0,00060	0,00006
1973	0,00194	0,00008	0,00138	0,00068	0,00008
1974	0,00194	0,00010	0,00139	0,00068	0,00009
1975	0,00207	0,00010	0,00142	0,00075	0,00009
1976	0,00200	0,00009	0,00145	0,00069	0,00008
1977	0,00212	0,00009	0,00148	0,00074	0,00009
1978	0,00234	0,00012	0,00157	0,00091	0,00010
1979	0,00248	0,00014	0,00165	0,00093	0,00012
1980	0,00263	0,00017	0,00174	0,00098	0,00015
1981	0,00273	0,00020	0,00181	0,00096	0,00019
1982	0,00294	0,00019	0,00190	0,00103	0,00021
1983	0,00321	0,00020	0,00210	0,00111	0,00021
1984	0,00364	0,00026	0,00240	0,00128	0,00025
1985	0,00406	0,00041	0,00269	0,00163	0,00029
1986	0,00435	0,00034	0,00282	0,00165	0,00029
1987	0,00476	0,00031	0,00296	0,00175	0,00033
1988	0,00520	0,00028	0,00313	0,00200	0,00041
1989	0,00532	0,00033	0,00325	0,00193	0,00047
1990	0,00544	0,00033	0,00335	0,00179	0,00052
1991	0,00586	0,00040	0,00361	0,00196	0,00060
1992	0,00662	0,00053	0,00402	0,00236	0,00072
1993	0,00746	0,00073	0,00449	0,00279	0,00090
1994	0,00836	0,00078	0,00478	0,00311	0,00116

1995	0,00920	0,00087	0,00515	0,00349	0,00131
1996	0,01002	0,00098	0,00565	0,00376	0,00147
1997	0,01086	0,00108	0,00600	0,00386	0,00184
1998	0,01162	0,00117	0,00648	0,00406	0,00199
1999	0,01241	0,00131	0,00718	0,00421	0,00212
2000	0,01337	0,00160	0,00792	0,00439	0,00247
2001	0,01439	0,00179	0,00839	0,00505	0,00263
2002	0,01561	0,00214	0,00906	0,00550	0,00310
2003	0,01707	0,00270	0,00955	0,00651	0,00374
2004	0,01869	0,00323	0,01021	0,00749	0,00436
2005	0,02070	0,00364	0,01127	0,00810	0,00506
2006	0,02320	0,00420	0,01228	0,00913	0,00602
2007	0,02635	0,00476	0,01367	0,01045	0,00696
2008	0,02873	0,00497	0,01469	0,01166	0,00726
2009	0,03125	0,00505	0,01606	0,01378	0,00662
2010	0,03431	0,00613	0,01745	0,01577	0,00774
2011	0,03738	0,00718	0,01946	0,01713	0,00864
2012	0,04009	0,00761	0,02103	0,01824	0,00916
2013	0,04296	0,00837	0,02242	0,01979	0,00996
2014	0,04585	0,00905	0,02391	0,02108	0,01080
2015	0,04876	0,00906	0,02575	0,02224	0,01076
2016	0,05178	0,00937	0,02783	0,02356	0,01075
2017	0,05501	0,00999	0,02974	0,02464	0,01167
2018	0,05835	0,01074	0,03239	0,02572	0,01208

549

Приложение 4

Занятое население Китая

Год	Число занятых, L(t), млн	Число занятых, %	Доля занятого населения
1970	344,32	41,60	0,42
1971	352,45	41,53	0,42
1972	360,36	41,45	0,41
1973	367,95	41,37	0,41
1974	375,08	41,29	0,41
1975	381,68	41,21	0,41
1976	388,75	41,24	0,41
1977	396,75	41,42	0,41
1978	401,52	41,30	0,41
1979	410,24	41,60	0,42
1980	423,61	42,36	0,42
1981	437,25	43,12	0,43
1982	452,95	44,06	0,44
1983	464,36	44,55	0,45
1984	481,97	45,55	0,46
1985	498,73	46,37	0,46
1986	512,82	46,83	0,47
1987	527,83	47,29	0,47
1988	543,34	47,76	0,48
1989	553,29	47,77	0,48
1990	647,49	55,02	0,55
1991	654,91	54,90	0,55
1992	661,52	54,82	0,55
1993	668,08	54,81	0,55

550

1994	674,55	54,84	0,55
1995	680,65	54,85	0,55
1996	689,50	55,09	0,55
1997	698,20	55,33	0,55
1998	706,37	55,53	0,56
1999	713,94	55,71	0,56
2000	720,85	55,86	0,56
2001	727,97	56,04	0,56
2002	732,80	56,05	0,56
2003	737,36	56,06	0,56
2004	742,64	56,13	0,56
2005	746,47	56,09	0,56
2006	749,78	56,02	0,56
2007	753,21	55,96	0,56
2008	755,64	55,83	0,56
2009	758,28	55,71	0,56
2010	761,05	55,60	0,56
2011	764,20	55,52	0,56
2012	767,04	55,41	0,55
2013	769,77	55,30	0,55
2014	772,53	55,20	0,55
2015	774,51	55,05	0,55
2016	776,03	54,88	0,55
2017	776,40	54,64	0,55
2018	775,86	54,35	0,54

551

Приложение 5

Расчётные данные

	pi_I	pi_J	pi_E	σ	δ	ρ
2009	1,237499	1,041333	1,1623296	0,382	0,235	0,27
2010	1,267817	1,048542	1,1632385	0,385835	0,255029	0,298232
2011	1,261945	1,049667	1,1470589	0,388732	0,268286	0,316602
2012	1,221319	1,044528	1,1163452	0,38998	0,270288	0,318692
2013	1,155887	1,033939	1,0759465	0,389274	0,260359	0,303773
2014	1,081669	1,01957	1,0322408	0,386788	0,241855	0,277056
2015	1,016835	1,00369	0,9921283	0,383129	0,221034	0,247874
2016	0,97726	0,988807	0,9619418	0,379194	0,204935	0,226421
2017	0,972632	0,977269	0,9464472	0,375946	0,199001	0,220192
2018	1,004085	0,970899	0,9480907	0,37418	0,205239	0,231362

	K	L	Y	E	I	J	Q
2009	141,319	758,280	42,541	8,601	7,327	18,932	20,647
2010	160,109	762,439	46,573	10,211	8,437	21,073	22,049
2011	181,023	764,608	50,776	11,876	9,611	23,296	23,717
2012	204,138	766,632	55,151	13,353	10,752	25,493	25,875
2013	229,427	768,527	59,650	14,434	11,754	27,574	28,645
2014	256,771	770,310	64,220	15,047	12,520	29,500	31,970
2015	286,015	771,992	68,809	15,330	13,023	31,321	35,591
2016	317,049	773,586	73,383	15,634	13,420	33,171	39,131
2017	349,903	775,099	77,931	16,386	14,017	35,224	42,214
2018	384,777	776,539	82,468	17,852	15,008	37,590	44,566

552

Приложение 6

Критерии Тейла

	T_Y		T_E		T_I	
2009	0,004394265		0,021002582		0,014627862	
2010	0	3619,427	0,172926	155,2769	0,201965	101,0003
2011	0,151235	4374,391	0,1457256	216,4542	0,002235	141,5685
2012	0,449479	5224,995	0,0001711	282,3931	0,070546	189,9366
2013	0,116538	6121,03	0,4464858	339,2112	0,049958	226,4388
2014	0,022947	7134,453	0,3339248	400,3494	0,011084	273,8633
2015	0,0027	8241,759	0,0042598	454,7828	0,020519	317,0922
2016	0,043939	9440,528	0,035745	464,2424	0,07999	331,9016
2017	0,026732	10746,02	0,1925706	475,2907	0,027088	355,8232
2018	0,055338	12183,24	0,0368849	543,3254	0,033647	398,1509

	T_J		T_Q	
2009	0,008727105		0,023262572	
2010	0,02987	710,3219	0,0728391	863,8115
2011	0,267069	910,2325	0,6201548	1007,697
2012	0,077286	1098,464	3,5941543	1218,541
2013	0,057817	1287,633	3,2791679	1436,016
2014	0,000879	1518,964	1,5405688	1713,758
2015	1,32E-05	1740,304	0,0850256	2062,846
2016	0,001363	1959,639	0,4565299	2485,752
2017	0,020189	2210,036	0,0135592	3053,347
2018	0,042909	2466,925	0,0032966	3559,154

Свёртка S критериев Тейла	0,929908623

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Коровкиной Елизаветы Валерьевны

Заявление о новизне

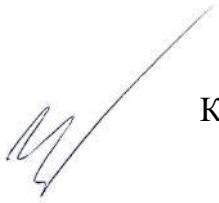
Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Разработка автоматизированной системы поиска актуальных знаний» являются: п. 3.1.3. Методика выделения терминов, описывающих содержание предметной области, п. 3.1.4. Методика поиска актуальных формализованных знаний.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 10 сентября по 20 апреля 2020 года мною было произведено исследование подходов К. Поппера к определению третьего мира, мира формализованных знаний. Также был проведен анализ поисковых систем, системы документально-информационных потоков. Главные выводы по проведенной работе: существующие поисковые системы не поддерживают проблемно-ориентированного подхода к поиску знаний, они ограничиваются поиском внутри конкретной тематики, что не является корректным с точки зрения инновационного развития; в работах [3-11] в списке приведенных источников достаточно подробно представлены параметры системы ДИП на отдельных иерархических уровнях системы: закономерности Ципфа-Мандельброта, Брэдфорда-Викери, Горьковой, однако существенным недостатком является отсутствие синтеза приведенных закономерностей, что является ключевым фактором в поиске и представлении актуальных и значимых знаний. Новизна моей работы заключается в синтезе всех закономерностей, использовании математических методов анализа данных для конкретной прикладной области поиска формализованных знаний.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Александром Аркадьевичем Беловым, профессором кафедры информационных технологий факультета Информатики и вычислительной техники Ивановского энергетического университета.
- На основе приведенных выше методик был разработан инструментарий, который был проверен патентной службой. На программу было получено авторское свидетельство №2020663441, 27.10.2020, заявка № 2020662576 от 20.10.2020: Белов А.А., Коровкина Е.В., Система поиска актуальных формализованных знаний «KNOW.PRO».
- После выполнения научной работы, была произведена проверка на заимствования через сервис Антиплагиат: оригинальность текста составила 92,97%, заимствования – 7, 03%.
- Проведено выступление на Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых в апреле 2020 года, работа получила положительные отзывы членов экспертной комиссии.
- Результаты научно-исследовательской работы в ВКР и новые наработки за 2021 год были представлены на конференции "Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения" в г. Тольятти.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоялась 25.06.2020. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  Коровкина Елизавета Валерьевна

29.05.2021
Иваново, Россия

РЕЦЕНЗИЯ
на выпускную квалификационную работу

на тему	Автоматизированная система поиска актуальных знаний
студента (студентки)	4 курса, 45 группы Коровкиной Елизаветы Валерьевны
обучающегося по направлению	09.03.03 «Прикладная информатика»
Профиль	«Прикладная информатика в информационной сфере»

В выпускной квалификационной работе Коровкиной Е.В. предлагается решение актуальной проблемы, возникающей в процессе создания инноваций, а именно проблемы информационной поддержки принятия инновационных решений посредством предоставления актуальных формализованных знаний. Для предприятий эффектами от производства инновационных продуктов служат расширение целевого рынка, внутренняя и внешняя конкуренция с другими организациями, увеличение доходов, активизация экономики, что говорит о актуальности и перспективности данной работы.

Проблемно-ориентированный подход к решению проблем инновационного характера и исследование системы документально-информационного потока в совокупности позволили автору разработать принципиально новый алгоритм поиска актуальных, научно-значимых формализованных знаний. На основе проведенного исследования была предложена методика выбора ключевых слов из семантического ядра, описывающего содержание предметной области, и периферии, отражающей актуальное и инновационное направление, с ориентацией на проблему. Также была разработана методика поиска актуальных формализованных знаний с учетом закономерностей построения иерархии системы ДИП.

В результате работы был разработан универсальный программный инструментарий, основанный на представленных методиках. Программная система «KNOW.PRO» была успешно внедрена на кафедре ИТ, а также был подготовлен соответствующий комплект документов.

В работе Коровкиной Е.В. материал изложен грамотно и аргументировано, продемонстрировано умение студентки формировать модель исследуемой предметной области, а также осуществлять ее анализ и делать последующие выводы, на основании которых были приняты конкретные проектные и научно-исследовательские решения.

При общей положительной оценке работы было выявлено следующее замечание: поиск происходит в рамках одной информационной базы – elibrary.ru, что говорит об ограниченности предоставляемых инноватору знаний. Также большое количество времени занимает ранжирование терминов, рекомендуется сделать данную функцию более автоматизированной.

Выпускная квалификационная работа выполнена в полном объеме и соответствует требованиям стандартов, а ее автор достоин присвоения квалификации бакалавр по профилю «Прикладная информатика в информационной сфере» и заслуживает оценки «отлично».

Рецензент:
Заместитель декана ИФТВ, к.т.н., доцент _____ Кокин В.М.

«___» июня 2020 г.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет Информатики и вычислительной техники
(полное наименование факультета)

Кафедра Информационных технологий
(полное наименование выпускающей кафедры)

Направление подготовки (специальность) 09.03.03. Прикладная информатика
(код, наименование направления подготовки / специальности))

Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная информатика в информационной сфере»
(наименование направленности (профиля) образовательной программы / специализации)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_____ _____
(подпись) *(Ф.И.О.)*

«____»_____20___ г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к выпускной квалификационной работе

на тему **«Разработка автоматизированной системы поиска актуальных знаний»**

Обучающийся: _____ Коровкина Е.В.
(подпись) *(Ф.И.О.)*

Руководитель: к.т.н., доцент _____ Белов. А.А.
(уч. степень, уч. звание) *(подпись)* *(Ф.И.О.)*

Иваново 2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет Информатики и вычислительной техники
(полное наименование факультета)

Кафедра Информационных технологий
(полное наименование выпускающей кафедры)

Направление подготовки (специальность) 09.03.03. Прикладная информатика
(код, наименование направления подготовки / специальности)

Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная информатика в информационной сфере»
(наименование направленности (профиля) образовательной программы / специализации)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ Гвоздева Т.В.
(подпись) *(Ф.И.О.)*
«____»_____20___ г.

З А Д А Н И Е
на выполнение выпускной квалификационной работы

обучающемуся **Коровкиной Елизавете Валерьевне**

1. Тема работы: Разработка автоматизированной системы поиска актуальных знаний, утвержденная приказом ректора от *№293-З от 27 апреля 2020 года.*

2. Исходные данные к работе: результаты производственной практики (научно-исследовательской работы), производственной практики (практики по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности) и производственной практики (преддипломной практики).

3. Содержание работы (перечень вопросов, подлежащих разработке):
- 3.1. Исследование системы документально-информационного потока
  - 3.1.1. Проблемно-ориентированный подход к анализу формализованных знаний
  - 3.1.2. Представление иерархии модели системы ДИП
    - 3.1.2.1.Выделение компонент системы ДИП и установление их взаимосвязей
    - 3.1.2.2.Закономерности ранжирования каждого компонента системы ДИП
  - 3.1.3. Методика выделения терминов, описывающих содержание предметной области
  - 3.1.4. Методика поиска актуальных формализованных знаний
  - 3.1.5. Сценарий поиска актуальных знаний на примере elibrary.ru
    - 3.1.5.1.Ключевые параметры поиска
- 3.2.Представление функциональной структуры системы поиска актуальных знаний

3.3.Выбор типовых проектных решений
3.4. Технико-экономическое обоснование на разработку ИС на примере внедрения в образовательную деятельность
3.5. Техническое задание на разработку ИС поиска актуальных знаний «KNOW.PRO»
3.6. Техно-рабочее проектирование ИС поиска актуальных знаний «KNOW.PRO» на примере внедрения на кафедре ИТ ИГЭУ
3.6.1. Общесистемные решения
3.6.2. Решения по математическому обеспечению
3.6.3. Решения по информационному обеспечению
3.6.4. Решения по программному обеспечению
3.6.5. Решения по организационному обеспечению
3.6.6. Решения по техническому обеспечению
3.6.7. Решения по информационной безопасности
3.6.8. Разработка руководства пользователя
3.6.9. Разработка программы внедрения системы «KNOW.PRO» на кафедре ИТ ИГЭУ

4. Графический материал: схема функциональной структуры, схемы алгоритмов, схема организационно-технической структуры, презентация выпускной квалификационной работы.

Руководитель _____ Белов А.А.
(подпись)

Обучающийся _____ Коровкина Е.В.
(подпись)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет Информатики и вычислительной техники
(полное наименование факультета)

Кафедра Информационных технологий
(полное наименование выпускающей кафедры)

Направление подготовки (специальность) 09.03.03. Прикладная информатика
(код, наименование направления подготовки / специальности))

Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная информатика в информационной сфере»
(наименование направленности (профиля) образовательной программы / специализации)

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН
подготовки выпускной квалификационной работы (ВКР)

№ п/п	Наименование этапов работ	Срок выполнения	
		начало	окончание
1	Выполнение технико-экономического обоснования целесообразности разработки программной системы	18.05.2020	24.05.2020
2	Подготовка решений по информационной безопасности	24.05.2020	26.05.2020
3	Разработка и внедрение программной системы	26.05.2020	28.05.2020
4	Оформление отчета по практике и подготовка к защите	28.05.2020	31.05.2020
5	Анализ и корректировка проектных решений в соответствии с заданием на ВКР с учетом результатов производственной практики	01.06.2020	07.06.2020
6	Оформление ВКР и графического материала, подготовка к процедуре защиты	08.06.2020	20.06.2020
7	Процедура защиты	26.06.2020	26.06.2020
8	Завершение процедуры ГИА: информационная и техническая подготовка результатов ВКР, а том числе к размещению в ЭИОС и библиотеке ИГЭУ	27.06.2020	14.07.2020

Руководитель _____ Белов А.А.
(подпись)

Обучающийся _____ Коровкина Е.В.
(подпись)

РЕФЕРАТ

Объем 92 с., 14 кн., 25 рис., 21 табл., 34 источн., 7 прил.

СИСТЕМА ДОКУМЕНТАЛЬНО-ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ, ИЕРАРХИЯ СИСТЕМЫ ДИП, СИСТЕМА ПОИСКА АКТУАЛЬНЫХ ЗНАНИЙ, СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ЗНАНИЯМИ, ИННОВАЦИОННАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ, ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД, ТЕХНОЛОГИЯ DOM API, НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, ПОИСКОВЫЙ ОБРАЗ ДОКУМЕНТА, ПОИСКОВЫЙ ОБРАЗ ЗАПРОСА

Объектами работы являются система документально-информационного потока и система управления знаниями, на основе которых происходит поддержка принятия инновационных решений за счет предоставления актуальных формализованных знаний по проблеме.

Цели работы – разработка методики, алгоритма и инструментария автоматизированной системы поиска актуальных знаний «KNOW.PRO», в контексте «Информационная поддержка инновационной деятельности».

Методы, используемые в работе: метод системного анализа предметной области, проблемно-ориентированный подход, технологии канонического и типового проектирования, методы функциональной декомпозиции, методика выбора ключевых слов и поиска формализованных знаний, DOM-методы парсинга веб-страниц.

Результаты работы: разработанный программный инструментарий - система поиска актуальных формализованных знаний «KNOW.PRO», в основе которой лежит методика поиска формализованных знаний с учетом проблемной-ориентации и методика выбора ключевых слов.

Область применения результатов: «KNOW.PRO» предназначена для обеспечения научно-информационной поддержки процесса генерации инновационных решений, обеспечения доступа к множеству научно-значимых, актуальных публикаций в приоритетных изданиях и информационных банках и может осуществляет поддержку процесса создания инноваций в любой сфере деятельности.

ABSTRACT

Volume 92 p., 14 b., 25 fig., 21 tabl., 34 sourc., 7 append.

DOCUMENTARY-INFORMATION FLOW SYSTEM, HIERARCHY OF SYSTEM DDF, ACTUAL KNOWLEDGE SEARCH SYSTEM, KNOWLEDGE MANAGEMENT SYSTEM, INNOVATION ACTIVITIES, TERMINOLOGICAL ANALYSES, PROBLEM-ORIENTED APPROACH, TECHNOLOGY DOM API, SCIENTIFIC AND INFORMATION SUPPORT, DOCUMENT SEARCH IMAGE, SEARCH FOR THE QUERY

The objects of the work are the document-information flow system and the knowledge management system, which support the innovation activities.

The aim of the work is a method, algorithm and tools for an automated system for searching actual knowledge "KNOW.PRO", in the context of "Scientific information support for innovation activities".

Methods: system analysis of the subject field, problem-oriented approach, technologies of canonical and typical system designing, functional decomposition, selecting keywords and searching for formalized knowledge, DOM-methods of parsing web-pages.

Results: actual knowledge search system "KNOW.PRO".

Application field: "KNOW.PRO" it is designed to provide scientific and information support for the process of generating innovative solutions, providing access to a variety of scientific and relevant publications in priority publications and information banks, and can support the process of creating innovations in any field of activity.

Перечень сокращений и условных обозначений

ИС – информационная система,
KNOW.PRO – автоматизированная система поиска актуальных знаний,
БД – база данных,
ХД – хранилище данных,
СУБД – система управления базой данных,
ФЗ – формализованные знания,
ИКТ – информационно-коммуникационные технологии,
ДИП – документально-информационный поток,
КИТ – кафедра информационных технологий,
ИТ – информационные технологии,
ГРНТИ - государственный рубрикатор научно-технической информации,
ПС – поисковая система,
ИПС – информационно-поисковая система, иерархическая понятийная структура,
ПОД – поисковый образ документа,
ПОЗ – поисковые образ запроса,
IF – импакт-фактор,
h-индекс – индекс Хирша,
НЭБ – национальная электронная библиотека,
РИНЦ – Российский индекс научного цитирования,
ИБ – информационная база,
API - Application Programming Interface,
DOM – Document Object Model,
URL – Uniform Resource Locator,
PDCA – Plan-Do-Check-Act, цикл Деминга,
ЭБС – электронно-библиотечная система,
ТПР – типовое проектное решение,
НПК – научно-педагогический кадр,
ЛВС – локально-вычислительная сеть,
HTTP - HyperText Transfer Protocol,
ГОСТ – межгосударственный стандарт,
ВКР – выпускная квалификационная работа,
UI – пользовательский интерфейс.

Оглавление

Введение 8
1. Исследование системы документально-информационного потока 10
1.1 Проблемно-ориентированный подход к анализу формализованных знаний 10
1.2 Представление иерархии модели системы ДИП 14
1.2.1 Выделение компонент системы ДИП и установление их взаимосвязей 14
1.2.2 Закономерности ранжирования каждого компонента системы ДИП 16
1.3 Методика выделения терминов, описывающих содержание предметной области и периферии 21
1.4 Методика поиска актуальных формализованных знаний 23
1.5 Сценарий поиска актуальных знаний на примере eLIBRARY.RU 24
1.5.1. Ключевые параметры поиска 28
2. Представление функциональной структуры системы поиска актуальных знаний 29
3. Выбор типовых проектных решений 31
4. Технико-экономическое обоснование целесообразности разработки автоматизированной системы поиска актуальных знаний 33
5. Техническое задание на разработку ИС «KNOW.PRO» 41
6. Техно-рабочее проектирование ИС поиска актуальных знаний «KNOW.PRO» 52
6.1. Общесистемные решения 52
6.2. Решения по информационному обеспечению 58
6.3. Решения по программному обеспечению 61
6.4. Решения по организационному обеспечению 64
6.5. Решения по техническому обеспечению 66
6.6. Информационная безопасность 69
6.7. Руководство пользователя 76
6.8. Разработка программы использования системы «KNOW.PRO» на кафедре ИТ в качестве инструментария для выполнения лабораторных работ 81
Заключение 84
Список используемых источников 85
Приложение 1. Алгоритм поиска формализованных знаний 86
Приложение 2. Алгоритм выбора ключевых слов 87
Приложение 3. Схема организационно-технической структуры 88
Приложение 4. Функциональная структура системы поиска актуальных знаний 89
Приложение 5. Протокол испытаний 90
Приложение 6. Акт внедрения 91
Приложение 7. Отчет о проверке на плагиат 92

Введение

Актуальность проблемы информационной поддержки инновационной деятельности можно определить следующими факторами:

1. Статистические данные

В рейтинге самых инновационных стран мира агентства Bloomberg — Bloomberg Innovation Index 2019[1] — Россия занимает 27 место из 60. По одному из ключевых его показателей — интенсивности исследований и разработок — наша страна на 33 месте, по концентрации исследователей — на 24, по патентной активности — на 30.

В Глобальном инновационном индексе 2019 года (Global Innovation Index, ГИИ)[2], выпускаемом совместно Корнельским университетом (США), бизнес-школой INSEAD и Всемирной организацией интеллектуальной собственности, Россия на 46 месте. Страна улучшила свои позиции по сравнению с 2018 годом по субиндексу ресурсов инноваций (институты, человеческий капитал и наука, инфраструктура, развитие внутреннего рынка и бизнеса) с 43 строчки до 41, но по субиндексу результатов инноваций (прогресс технологий и экономики знаний, развитие креативной деятельности) произошло снижение с 56 места до 59. По числу патентных заявок на изобретения Россия на 20 месте (в 2018-м она занимала 16), по экспорту в сфере ИКТ к общему объему торговли у России 71-е место.

В статистическом сборнике «Наука. Технологии. Инновации: 2019»[3] исследователи НИУ ВШЭ поставили Россию на 9-е место в мире по величине затрат на научные исследования и разработки в расчете по паритету покупательной способности национальных валют. В пятерку лидеров по этому показателю вошли США, Китай, Япония, Германия и Республика Корея.

2. Законодательная основа

В настоящее время в основе развития мировой, а, следовательно, и отечественной экономики лежит инновационная деятельность. В указе Президента РФ от 1 декабря 2016[4] говорится о необходимости заниматься научно-техническим развитием Российской Федерации: «В ближайшие 10-15 лет приоритетами научно-технологического развития Российской Федерации следует считать те направления, которые позволят получить научные и научно-технические результаты и создать технологии, являющиеся основой инновационного развития внутреннего рынка продуктов и услуг, устойчивого положения России на внешнем рынке...».

3. Экономические показатели

Ключевую роль в производстве качественного и конкурентоспособного продукта играют инновации. В условиях несовершенного рынка главными конкурентами становятся предприятия, способные постоянно улучшать качество своих товаров и тем самым изменять структуру потребительского спроса в свою пользу. Тот, кто способен предложить потребителям лучшее и\или более дешевое изделие, получает преимущество на рынке. Но эта прибыль не устойчива во времени из-за изменений предпочтений потребителей и конкуренции других производителей и продавцов, что говорит о необходимости постоянного совершенствования технологий и\или продуктов предприятия за счет инноваций. Для этого предприятия, в первую очередь, должны развивать свой интеллектуальный капитал. Знания и информация являются важным фактором развития интеллектуального капитала, который в свою очередь влияет на все производственные процессы, в частном случае – на инновационную деятельность.

[1] https://www.bloomberg.com/news/articles/2020-01-18/germany-breaks-korea-s-six-year-streak-as-most-innovative-nation

[2] https://www.wipo.int/publications/en/details.jsp?id=4434

[3] https://www.hse.ru/primarydata/niio2019

[4] Указ Президента Российской Федерации от 01.12.2016 г. № 642

Инновационная деятельность — это деятельность, направленная на поиск и реализацию инноваций в целях расширения ассортимента и повышения качества продукции, совершенствования технологии и организации производства. Поддержка инновационной деятельности посредством предоставления научно-значимых, достоверных формализованных знаний является актуальной проблемой, которую необходимо решить.

Совокупность этих факторов, говорит о том, что в настоящий момент Россия значительно отстает от инновационных лидеров, в том числе за счет неэффективных или некачественных инновационных решений, принимаемым на предприятиях разного характера, образующих экономическую систему страны. Для повышения качества инновационных решений необходимо обеспечивать лиц, принимающих решения, актуальными формализованными знаниями. Формализация знаний может быть выражена на различном уровне – от речевой, текстовой формы до представленного продукта деятельности. В научных коммуникациях доминирующую позицию занимает текстовая форма знаний, в основе которой лежат слова, словоформы, термины, обозначающие те или иные понятия. Формализованные в текстовой форме научные знания, авторизированные и представленные в виде научных публикаций, образуют в своей совокупности некое пространство, названное К. Поппером «третьим миром». Этот мир в своем содержании постоянно изменяется, совершенствуется, стремясь к истине и образуя своего рода поток знаний, который в информатике принято называть документальным информационным потоком (ДИП). В свою очередь ДИП определяется как организованная динамическая система взаимосвязанных информационных документов, содержащих формализованную информацию (знания), предназначенную для передачи в пространстве и во времени. Таким образом в работе произведено исследование и построение структуры системы ДИП с целью установления взаимосвязей каждого компонента системы. На основе этого была построена функциональная структура системы поиска актуальных формализованных знаний.

Целью разработанной информационно-поисковой системы является научно-информационная поддержка процесса генерации инновационных решений. Инновационные решения возможны в любой сфере деятельности, они могут воплощаться во многих формах: это могут быть новые продукты, услуги, бизнес–модели, процессы или методы управления. Принятие решений, обладающих новизной, предполагает проведения глубоких стратегических исследований рынка, потребителей, конкурентов. Они во многом основаны на опыте и результатах предшествующей работы – одной из форм формализации опыта, результатов работы является их текстовая фиксация. В условиях несовершенного рынка предприятия стимулируют друг друга развиваться за счет внедрения инноваций, при этом роль формализованных знания в процессе создания инноваций постоянно возрастает. Разрабатываемая система является универсальной, т.е. подойдет для поддержки инновационных решений любого характера и на любом предприятии.

В рамках выпускной работы, все решения (по техническому обеспечению, программному обеспечению, технико-экономическое обоснование и т.д.) принимались на основе имеющихся на кафедре Информационных технологий (КИТ) средств и возможностей. Инновационный путь развития (определенный в указе Президента), предполагает в том числе инновационный подход в российском образовании, и, главным образом, в высшем образовании, что должно перевести подготовку специалистов на более высокий уровень. Инновационный подход заключается, во-первых, в инновационных решениях, которые разрабатывают обучающиеся вузов и научные сотрудники и которые направлены на решение актуальных производственных проблем в социальной среде, и, во-вторых, в получении из среды актуальных формализованных знаний, посредством которых нужно обучать будущих специалистов, чтобы они стали квалифицированы для решения актуальных проблем.

Продукт инновационной деятельности КИТ – выпускники, обладающие способностью принимать инновационные решения в конкретной сфере на основе актуальных знаний и навыков, полученных от инновационной деятельности в научной и образовательной деятельностях. Для достижения этих качеств необходимо актуализировать учебный материал, привлекать обучающихся к выполнению научно-исследовательских работ с выходом на инновационный продукт и знакомить с инструментариями, поддерживающими процесс создания инноваций. В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были разработаны методика и инструментарий, позволяющие поддерживать инновационную деятельность посредством автоматизированного поиска актуальных формализованных знаний по проблеме.

1. Исследование системы документально-информационного потока

1.1 Проблемно-ориентированный подход к анализу формализованных знаний

Проблемно-ориентированный подход к решению задач предполагает, что информационная система функционирует для решения возникающих в процессе функционирования организации информационных проблем. Информационные проблемы могут быть разного характера в зависимости от объекта и субъекта управления. Так для развития инновационной деятельности предприятия, а следовательно, и человеческого интеллектуального капитала у принимающих решения лиц (или инноваторов) могут возникнуть проблемы, заключающиеся в нехватке знаний по проблеме. Знания – продукт функции познания среды: информация, обособленная по причине наличия связей с проблемной областью, касающейся субъекта познания. Знания в процессе коммуникации и общественной деятельности могут отчуждаться от человека и принимать ту или иную форму. В научных коммуникациях доминирующую позицию занимает текстовая форма знаний.

Формализованные в текстовой форме научные знания, авторизированные и представленные в виде научных публикаций, образуют в своей совокупности некое пространство, названное Карлом Поппером «третьим миром». В своих трудах[1] автор представил единство трех миров – вещей, мыслей и знаний; он рассматривал их как три взаимодействующие друг с другом системы. Первая характеризует «мир физических состояний», вторая – «мир ментальный или мир состояний духа», обитателями третьего мира являются теоретические системы, проблемы, проблемные ситуации, критические рассуждения и объективное знание в целом. Влияние сознания на физический мир происходит через осуществление какой-то деятельности, влияние на третий мир достигается, когда новые знания создаются рациональными методами. Знания оказывают влияние на интеллект человека в процессе обучения чему-либо, а опытной постижение окружающей среды позволяет характеристикам этой среды закрепиться в ментальном мире в виде образа. Таким образом, источником внешних потребностей и ресурсов для каждого из выделенных миров будут две другие системы. Первый и третий миры связаны между собой за счёт свойств материальных носителей. Знания позволяют создавать новые инструменты хранения или новаторски использовать уже существующие, объекты материального мира диктуют нам максимально эффективную знаковую систему для хранения, передачи и представления знаний. Человек обладает возможностью усвоить существующие в «третьем мире» знания при условии, что он понимает синтаксис источника. Формализованные знания превращаются в объекты «второго мира», возникающие в голове у субъекта, изучающего источник. Мир

субъективных знаний становится связующим между «физическим миром» и «третьим миром». Генерация образа объекта исследования идёт по двум направлениям:

1) человек воспринимает объекты окружающего мира, концентрируя своё внимание на каких-то особенностях, делая для себя мысленные выводы, после чего формализует умозаключение,

2) человек познаёт образ на чужом формализованном опыте, воссоздавая его инструментом воображения, меняет и снова фиксирует, придавая ему вид формализованных знаний.

Чтобы образы исследуемых объектов у человека оставались актуальными, необходимо обеспечивать поступление актуальных данных и источников знаний. Следовательно, нужно наладить систему для сбора данных и систему для поступления знаний из большого внешнего хранилища, где можно будет найти формализованный опыт, применимый к существующей задаче или исследуемой предметной области.

Концепция «трёх миров» К. Поппера раскрывает цикл генерации научных открытий (инноваций) - рассматривается проблема, по ней строится теория, в теории находятся ошибки, эти ошибки берутся в качестве новой проблемы, что приводит к построению следующей теории. Это бесконечный цикл генерации знаний образует своего рода поток знаний, которые в информатике принято называть документально-информационным потоком (ДИП).

В настоящее время в мире создано множество хранилищ формализованных знаний (или информационных баз) и для систематизации информации, поиска нужных сведений по конкретной теме, группировки новых статей, публикаций, книг по тематическим разделам принято использовать универсальные классификаторы. В 1873 году Мелвил Дьюи ввёл в оборот универсальную десятичную классификацию, совместив её с алфавитно-предметным указателем. Науки можно было разбивать на дисциплины – каждая получала свой уникальный индекс. Можно сказать, что УДК сформировала структуру всего «третьего мира», поскольку любое формализованное знание относится к какой-либо существующей прикладной научной дисциплине. В настоящее время самими распространенными классификаторами в России являются – УДК', ББК (ГОСТ Р 7.0.4– 2006) и ГРНТИ. Существующие информационно-поисковые системы не способны работать без классификации поступивших и поступающих данных. Любой запрос на выдачу содержимого без структуризации потребует обработки всех данных базы, как следствие, перестанет удовлетворять ожиданиям пользователя (не будет актуальным и быстрым в реализации). Обозначим недостатки данного подхода к хранению и поиску формализованных знаний:

1) классификаторы не предусматривают проблемно-ориентированного подхода к систематизации и поиску формализованных знаний;
2) низкая скорость актуализации классификатора и, как следствие, невозможность изменения текущего индекса у опережающих классификатор публикаций, изданий.

Существующие информационно-поисковые системы в качестве решения первой проблемы предлагают использовать ключевые слова в составлении поискового образа запроса. Однако в зависимости от поисковой системы могут возникнуть следующие проблемы: тематики включают в себя множество ключевых слов, т.е. происходит своеобразное перенаправление от поиска по ключевым словам к поиску внутри тематики; ключевые слова, выделенные самим пользователем, могут не описывать возникшую инновационную проблему и содержать в себе лишь описание предметной области, тогда полезность найденных и усвоенных пользователем формализованных знаний будет достаточно низкой. Поиск формализованных знаний можно определить как осуществление коммуникации между автором публикации и потребителем информации. В теоретических основах информационных систем[2], а точнее в семиотической теории коммуникации принято выделять три ситуации, которые могут возникнуть при обмене

сообщениями двух и более людей, использующих одинаковую знаковую систему, но обладающих разным контекстом:

1) если потребитель информации (субъект Y) не воспринимает символы (данные), заложенные в сообщении об объекте исследования X, то он не уменьшает свою неопределённость об этом объекте и количество принимаемой информации Y равно нулю:

$$\forall x_i \in X, \forall y_k \in Y \quad \{x_i\} \cap \{y_k\} = \varnothing \Rightarrow I(X,Y) = 0,$$

2) если субъект однозначно, правильно воспринимает все символы, (данные), заложенные в сообщении об объекте, то он не уменьшает свою неопределённость об этом объекте и количество принимаемой информации равно нулю:

$$\forall x_i \in X,\ \forall y_k \in Y\ \{x_i \overset{\Delta}{=} y_k\} \Rightarrow I(X,Y) = 0$$

3) $Y' \equiv I(X,Y)$, т.е. количество информации $I(X,Y) = e \neq 0$, приводящее к снятию неопределённости Y относительно X, будет тогда и только тогда, когда при $x_i \in X$ и $y_k \in Y$ существует хотя бы одна пара символов (данных) (x_i, y_k), которая при отсутствии смыслового равенства коррелируется синергетическим отношением предиката P (x, y), образуя новый образ:

$$\forall x_i \in X,\ \exists y_i \in Y,\ x_i \overset{\Delta}{\neq} y_k \quad [I(X,Y) = e = Y' \neq 0] \Leftrightarrow D(x,y)\ P(x,y),$$

Любая информационно-поисковая система должна стремиться предоставить пользователю пертинентные поисковому образу документа формализованные знания, которые «учтут» латентные потребности инноватора и в последствие окажутся полезными. Учитывая вышеизложенные факторы, важным вопросом в поиске формализованных знаний является определение множества терминов, описывающих проблему, и построение иерархии системы ДИП, учитывая закономерности которой можно смоделировать алгоритм поиска, результатами которого будут актуальные, научно-значимые формализованные знания по исследуемой проблеме.

Рассмотрим, как происходит управление процессом поддержки принятия инновационных решений:

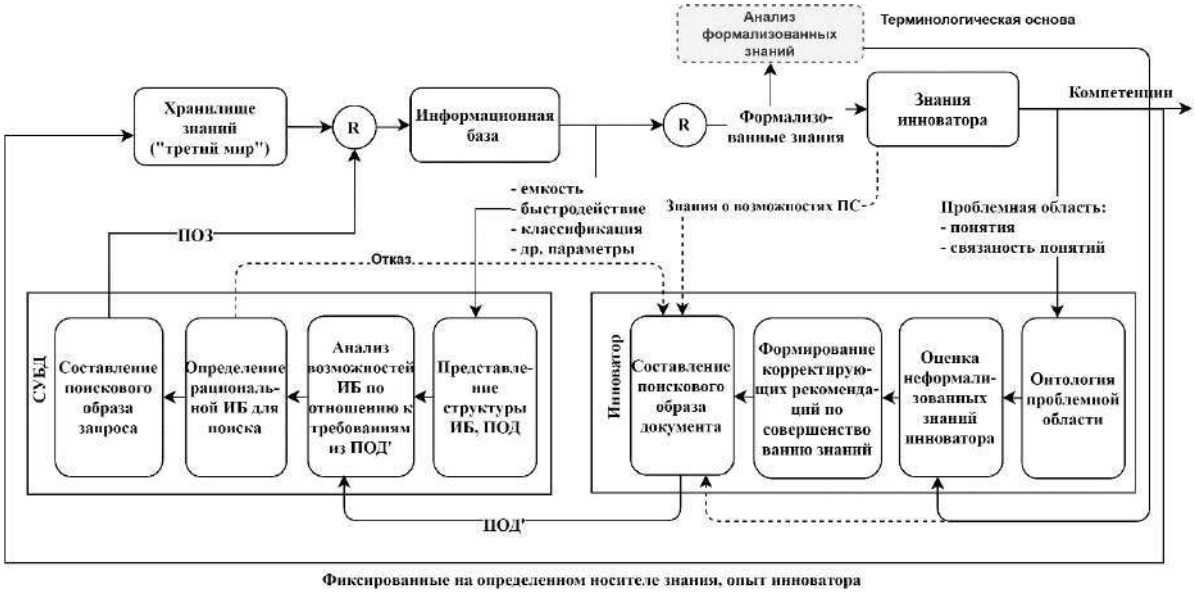


Рисунок 1.1.1 – Схема управления знаниями в контексте поиска

Основным объектом управления являются знания человека (человеческий интеллектуальный капитал), субъектом управления – сам инноватор. Многие знания человек получает в ходе изучения тех или иных формализованных источников знаний, которые хранятся в различного рода хранилищах данных. Знания инноватора можно представить в виде семантической сети, где определены понятия, описывающие какой-

либо объект, и связи между ними. Для того, чтобы определить дефицит знаний в исследовании определенного объекта, необходимо провести их анализ – сравнить результат самооценки (рефлексии) по исследуемой проблеме с актуальными формализованными знаниями, а точнее с иерархической понятийной структурой (ИПС), построенной на основе этих формализованных знаний. На данный момент для этих целей на КИТ разработаны методики терминологического анализа формализованных знаний и формирования ИПС, соответствующие им инструментарии TERM.PRO и INTELLECT.PRO соответственно. На основе результатов оценки знаний инноватор может определить проблемные моменты, знания по которым необходимо восполнить. Имея терминологическую основу для составления ПОЗ и базовые знания пользования поисковыми системами (ПС), пользователь может составить поисковый образ документа (ПОД'), который потенциально может восполнить дефицит. ПОД' обрабатывается автоматизированными системами управления ХД, БД (СУБД). Информационные базы имеют показатели, по которым можно отслеживать и отображать их состояние – емкость, быстродействие, обязательные параметры элементов хранения (научных изданий и публикаций) (принадлежность к определенному коду классификатора, название журнала, имя автора, год публикации и т.д.), по которым можно производить поиск. Получив все данных, можно представить структуру ХД и возможные параметры ПОД. На основе анализа требований ПОД' к возможным параметрам ПОД и их диапазонам конкретной информационной базы, СУБД автоматически может определить сможет ли она сформировать поисковый образ запроса на основе полученных требований. В случае неудачи выдает ошибку, тогда нужно рассмотреть другую ИБ для поиска или изменить параметры ПОД', в случае успеха, СУБД формирует поисковый образ запрос (ПОЗ). Информационная база содержит в себе знания «третьего мира» по К. Попперу. Человек способен генерировать новые теории, создавать инструменты хранения знаний, формализовать результаты своего исследования и на основе чужого опыта обучаться - так образуется определенный цикл обучения или управления знаниями. На данный момент автоматизированы задачи хранения, анализа формализованных знаний, оценки неформализованных знаний, необходимо усовершенствовать и автоматизировать процесс поиска формализованных знаний, а точнее процесс формирования управленческого воздействия на СУБД с учетом закономерностей построения системы ДИП и переходом от релевантного поиска к пертинентному.

Обозначим выводы и особенности проблемно-ориентированного подхода:

- Существующие информационно-поисковые системы направлены на хранение и поиск формализованных знаний по тематикам. Такой подход является некорректным для инновационного развития и не соответствует концепции «трех миров» Карла Поппера.
- Проблемная ориентация в поиске формализованных знаний может быть достигнута за счет алгоритма поиска по ключевым словам с учетом закономерностей построения системы ДИП. Для ключевых слов важно разделять в понимании термины, которые описываются содержание предметной области (семантическое ядро), и термины, которые находятся в «периферии» - устанавливают актуальность проблематики и «отвечают» за полезность предоставленных формализованных знаний.
- Так как перед разрабатываемой системой стоит цель научно-информационной поддержки принятия инновационных решений за счет предоставления актуальных, научно-значимых формализованных знаний, важным аспектом в моделировании алгоритма является установление взаимосвязей всех уровней иерархии системы ДИП. Отсюда следующее исследование, которое необходимо провести – исследование системы документально-информационного потока.
- Проблемная ориентация определяет и обосновывает автоматизацию процесса поиска формализованных знаний – некоторые функции (например, как

ранжирование терминов) должен выполнять человек исходя из особенностей своей проблематики.

- Функции, которые выполняет человек (ранжирование терминов, изначальный выбор тематики поиска), задают определенные требования к квалификации, знаниям пользователя, так как на данный момент система не предусматривает исправление следующих ошибок: некорректно выбранный раздел тематики, некорректно проранжированные термины для поиска.
- Управление знаниями имеет циклический характер: исходя из оценки неформализованных знаний человека формируется управленческое воздействие на систему управления хранилищем знаний, составляя поисковый образ документа, и получает актуальные формализованные знания по проблемной области. На основе этого он обучается, создает инновационные решения и фиксирует их на физических носителях, тем самым эти формализованные знания становятся ресурсом для информационных баз.
- Инновационный процесс - непрерывный, цикличный, что вызывает цикличность представления актуальных знаний.

1.2 Представление иерархии модели системы ДИП

1.2.1 Выделение компонент системы ДИП и установление их взаимосвязей

Из года в год растет объем создаваемой обществом научной, технической, производственной, социальной и других видов информации. На рисунке 1.2.1.1. показана динамика роста публикаций только на одном информационном ресурсе – elibrary.ru. Вместе с увеличением числа первичных и вторичных информационных источников, растет число и объемы автоматизированных баз данных, хранилищ знаний. Одновременно усложняется структура информационных потребностей, организация поиска и хранения информации, необходимой для принятия решений.



Рисунок 1.2.1.1. - Динамика роста числа публикаций на elibrary.ru

В настоящий момент созданы и создаются все более совершенные и разнообразные по функциям автоматизированные информационные системы, в частности – информационно-поисковые системы. Однако актуальной остается проблема отбора и организации оперативного поиска информационных ресурсов, которые могут удовлетворить потребность пользователя. Значительную долю информационных ресурсов составляют текстовые документы, которые также занимают доминирующую позицию в научных коммуникациях. Многие настоящие алгоритмы ИПС ориентированы на релевантный поиск, когда поисковый образ запроса должен совпадать с поисковым образом документа, хотя приоритетным направлением при проблемно-ориентированном подходе должен являться пертинентный поиск, когда поисковый образ запроса

соответствует поисковому образу документа с учетом латентных потребностей пользователя.

Формализованные в текстовой форме научные знания, авторизованных и представленные в виде научных публикаций, образуют в своей совокупности «третий мир» по К. Попперу. Этот мир в своем содержании постоянно изменяется, совершенствуется, стремясь к истине и образуя своего рода поток знаний, которые в информатике принято называть документально информационным потоком. ДИП можно определить как организованную динамическую систему взаимосвязанных информационных документов, содержащих формализованную информацию (знания), предназначенную для передачи в пространстве и во времени. Следовательно, ДИП обладает общесистемными свойствами, такими как структурированность, целенаправленность, иерархичность и т.д.

Системная интерпретация ДИП достаточно полно изложена в работе А. Айламазяна и Е. Стась «Информатика и теория развития». В этой работе система ДИП по научно-технической проблеме (проблемно-ориентированный подход) представляется как совокупность взаимосвязанных компонент различных уровней. На первом уровне декомпозиция предлагается в качестве компонентов рассматривать наименования тематических разделов информационной базы (системы ДИП); на втором уровне – наименование периодических изданий. Компонентами третьего уровня декомпозиции системы ДИП являются совокупности документов, связанных между собой принадлежностью:

- к данному тематическому разделу;
- к выделенной совокупности периодических журналов;
- к данному коллективу авторов (организации, научному центру).

Компоненты четвертого уровня – это совокупности элементов-признаков текстов документов – терминов и терминологических оборотов, отражающих основное содержание выделенной совокупности информационных документов.

Представленная иерархия модели системы ДИП способствует организации процесса исследования системы формализованных знаний. Однако, в контексте информационной поддержки принятия инновационных решений в указанное иерархическое построение ДИП можно внести корректировки, касающиеся компонентов обозначенных уровней. Альтернативная иерархия выглядит следующим образом:

- первый уровень – информационная база (ресурс);
- второй уровень – издания;
- третий уровень – публикации;
- четвертый уровень – понятия (термины, словоформы).

На первом уровне рассматриваются научные поисковые системы и базы данных (Google Scholar, Scholar.ru, ScienceDirect, Scirus, SciNet, Scopus, Web of Science и др.), библиотеки (НЭБ, ЭБС «Лань», elibrary.ru, РГБ, КиберЛенинка, ГПНТБР и др.). В условиях рыночной конкуренции эти информационные базы вовлекают в свой ресурс публикации различных издательств (по возможности, авторитетных). В настоящее время приоритет среди научных изданий имеют Scopus и Web of Science. В то же время, например, ЭБС «Лань» специализируется на учебной литературе.

В состав компонента второго уровня входят периодические и непериодические издания, со специализированной и различной тематикой и пр. Наибольший интерес в контексте предоставления инноватору актуальных формализованных знаний представляют научные периодические и продолжающиеся издания. К ним относятся специализированная газета, научный журнал (научно-теоретический, -практический, -методический), производственно-практический журнал, реферативный журнал, статистический бюллетень, научно-практический периодический сборник и сборник

научных трудов[5]. Выбор обуславливается тем, что данные издания обновляются и содержат более актуальную информацию. Также стоит рассмотреть вариант, когда научные формализованные знания становятся фундаментальными (классическими, базовыми) для какой-либо предметной области. Здесь важным моментом является оценка неформализованных знаний человека: при низком уровне базовых знаний инноватора необходимо обеспечить учебными источниками знаний (учебниками, учебными пособиями), при высоком уровне – актуальными источниками (журналами), проблемно-ориентированными, сопряженными с уже имеющимися знаниями, благодаря которым будет происходить генерация новой информации.

К компонентам третьего уровня можно отнести как научные (монографии, статьи, тезисы докладов, патенты, авторские свидетельства и т.п.), так и учебные (учебники, учебные и методические пособия и т.п.) публикации.

Введение понятий в качестве «компонент» на четвертом уровне иерархии вызвано следующими обстоятельствами. В соответствии с энциклопедическим определением понятие – это отображенное в мышлении единство существенных свойств, связей и отношений предметов или явлений; это мысль или система мыслей, выделяющая и обобщающая предметы некоторого класса по общим и в своей совокупности специфическим для них признакам. Далее в мыслительном процессе понятия непосредственно закрепляются и выражаются в речевой (языковой) форме в виде слов, словоформ или, иначе, терминов, как знаков понятий. В образовании понятий участвуют три составляющих: слово или словоформа (знак или термин), объекты, которые им обозначаются (значение), и идея или отличительный признак, связывающий данное слово с подпадающими под него объектами (смысл), являясь тем самым ключом понятия. В связи с этим в речевой формализации знаний возникает такой вид неопределенности, как омонимия, в результате которой с одним и тем же словом (термином) могут связываться разные понятия в зависимости от того, что берется в качестве отличительного признака (или смысла). Указанные обстоятельства необходимо учитывать в зависимости от того, каким образом осуществляется анализ формализованных знаний: то ли человеком (экспертом, инноватором), то ли с помощью компьютерных средств. В первом случае человек, воспринимая термины (слова, словоформы), связывает их с соответствующими его интеллектуальным способностям понятиями и манипулирует в процессе анализа именно понятиями и даже системой понятий. Здесь результат анализа во многом зависит от интеллектуальных способностей исследователя. Во втором случае осуществляется первоначально голая констатация наличия терминов (знаков) без какого-либо понимания смысла. Такой анализ можно назвать терминологическим.

Независимо от средств реализации анализ формализованных (текстовых, речевых) знаний необходимо осуществлять в контексте, определяемой проблемой или целью исследования. Это положение касается всех взаимосвязанных иерархических уровней системы ДИП, этим обозначается проблемно-ориентированный подход к анализу формализованных знаний.

1.2.2 Закономерности ранжирования каждого компонента системы ДИП

Для характеристики количественных и качественных методов исследования научно-технической информации, изучения закономерностей организации документально-информационных потоков в науке было введено понятие «информетрия». В.И. Горкова в своей работе[3] раскрывает понятие «информетрия» следующим образом: объектом информетрии являются научная информация и научные коммуникации; предметом – их объективные количественные закономерности,

[5] ГОСТ 7.60-2003 СИБИД. Издания. Основные виды. Термины и определения.

используемые для совершенствования информационной деятельности. Однако, здесь стоит дополнить, что предметом информетрии являются не только количественные характеристики, но и качественные. Существенное значение в развитии информетрии приобрела закономерность концентрации-рассеивания, установленная В.И. Горьковой, показавшей, что количественные закономерности системы ДИП качественно присущи всем ее иерархическим уровням. Определим закономерности ранжирования для каждого компонента системы ДИП:

– Для терминов (понятий, словоформ):

Одной из основополагающей закономерности информетрии является закономерность Дж. Ципфа: пусть имеется тест длинной N слов и словарь объемом l слов с указанием частоты проявления слова в тексте. Слова в словаре расположены в порядке их убывания по частоте и проранжированны от 1 до l. Ранг равный 1 присваивается слову, частоты появления которого наибольшая, ранг равный l – наименее употребляемому слову. Тогда

$$Pr_i = \frac{fr_i}{N},$$

где Pr_i – относительная частота появления i-ого слова в тексте; fr_i – абсолютная частота появления i-ого слова ранга r_i в тексте; N – число слов в тексте; r_i – ранг i-ого слова, упорядоченный величиной его Pr_i, где $1 \le i < l$; l – число одинаковых слов в тексте или число словаря текста. При умножении правой и левой частей выражения (5.1) на r_i получается:

$$Pr_i \cdot r_i = \frac{r_i}{N} \cdot fr_i = k,$$

где k – константа (k = 0,1 – для английского языка; k = 0,06-0,07 – для русского языка).

Преобразование формулы (5.2) позволяет получить гиперболическую зависимость:

$$Pr_i = {}^{0,065}/_{r_i}$$

Позднее (1954 г.) Б. Мандельброт дал теоретическое обоснование экспериментально полученной зависимости (5.3.) с небольшой поправкой:

$$Pr_i = 0{,}065\, r_i^{-\gamma},$$

где γ – величина, близкая к единице, но изменяющаяся в зависимости от степени формализованности языка: с увеличением степени формализованности языка γ увеличивается.

Для терминологического анализа рассмотрим графическую интерпретацию закона Ципфа-Мандельброта (рис. 1.2.2.1.). На графике, представляющим гиперболическую зависимость, выделено три зоны:

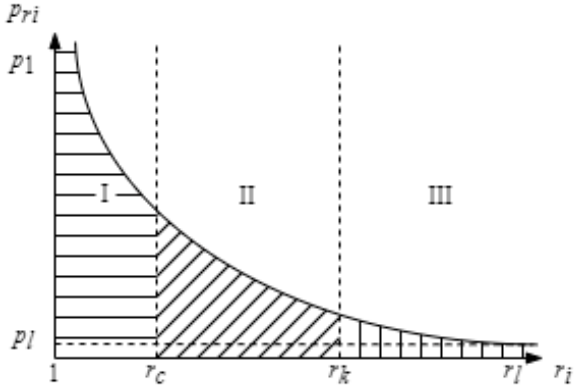


Рисунок - 1.2.2.1. Графическое представление закона Ципфа-Мандельброта

I зона – зона стоп-слов, т.е. незначимых или малозначимых слов, таких как предлоги, союзы, местоимения, часто употребляемые обороты и другие, не несущие смысловой нагрузки;

II зона – зона значимых слов (ядро), отражающих основное содержание (семантику) текста;

III зона – зона слов, не имеющих решающее смысловое значение (периферия).

Выделенные зоны формируют соответствующие подмножества Мс, Мя, Мп понятий (терминов) $m_i \in \text{М} = \text{Мс} \cup \text{Мя} \cup \text{Мп}$ при $i = \overline{1, l}$.Однако здесь возникает проблема в определении границ подмножеств Мс[1-r_c], Мя(r_c-r_k], Мп(r_k-r_l].

При анализе текстов кроме r_i и Pr_i используется такой количественный показатель как водность (водянистость), равный отношению количества малозначимых слов к общему количеству слов в тексте (в %). Малозначимые слова можно определить как «стоп-слова», все они попадают в I зону. Современные текстовые анализаторы позволяют определить границы I зоны, однако для определения II и III зоны существуют следующие проблемы:

– невозможностью строгого определения положения r_k на оси r_i;

– отсутствие проблемной ориентации в определении Мя (II зоны) ввиду лишь знаковой, но не смысловой, являющейся ключевой, идентификации понятий $m_i \in$ Мя.

Таким образом, определение Мя не имеет объективного решения и носит субъективный лингвистический характер. В свою очередь лингвистическая неопределенность выражается через нечеткость. Согласно теории нечетких множеств такая неопределенность оценивается функцией принадлежности $\mu_в(m_i)$, где В – контекст исследуемой предметной области, определяемый проблемой или целью анализа формализованных знаний.

На рис. 1.2.2.2. представлена гипотетическая характеристика функции принадлежности $\mu_в(m_i)$ на фоне зависимости Ципфа-Мандельброта (рис. 1.2.2.1), где обозначены α-срезы этой функции, включающие множества понятий (терминов) М_α^j. Множество α-срезов образует семейство $\text{А}(m_i) = \{\text{М}_\alpha^j | \alpha^j \in [0;1]\}$, представляющее монотонную последовательность, удовлетворяющую условию

$$1 > \alpha_g > \cdots > \alpha_j > \cdots > \alpha_1 > 0 \rightarrow \text{М}_\alpha^A \subseteq \text{М}_\alpha^g \subseteq \cdots \subseteq \text{М}_\alpha^j \subseteq \cdots \subseteq \text{М}_\alpha^1 \subseteq \text{М}_\alpha^0,$$

где А-ый α-срез соответствует α = 1.

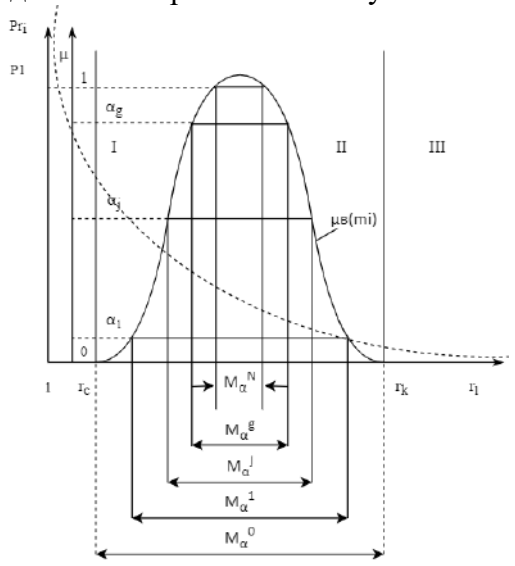


Рисунок 1.2.2.2. - Сопоставление зависимости Ципфа-Мандельброта и функции принадлежности $\mu_в(m_i)$

При условии $\text{Мя} \subseteq \text{М}_\alpha^0$ в зависимости от конкретных требований мощность множества понятий, представительно описывающих содержание предметной области Sпо, может быть сокращена путем увеличения значения α. Например, при определении Мкс (множества ключевых слов) для поиска формализованных знаний $card\,\text{М}_\alpha^0 > card\,\text{Мкс}$ и $0 < \alpha_{\text{кс}}$, для поиска возьмем $\alpha_{\text{кс}} = 0{,}9$. Сопоставление $\mu_в(m_i)$ с характеристикой зависимости Ципфа-Мандельброта носит условный характер, поскольку первая выражается через субъективную вероятность, а вторая сопряжена с частотной вероятностью. В связи с этим при множестве методов определения функции принадлежности целесообразно использовать метод уровневых множеств, использующий как субъективные, так и частотные вероятности. При исследовании связи между частотными вероятностями появления m_i в Мя, полученными с использованием методов Ципфа-Мандельброта и уровневых множеств установлен низкий коэффициент корреляции, что свидетельствует о существенной водности частотного метода и необходимости

экспертной корректировки. Причиной этого является не только семантическая «слабость» компьютерных текстовых анализаторов, использующих частотный метод анализа формализованных знаний, но и такой фактор как низкая пертинентность используемых источников (документов, публикаций), подвергаемых этому анализу, выбор которых зачастую осуществляется не по проблемному (контекстному, целевому), иначе прагматическому, а по тематическому принципу.

– Для публикаций и изданий:

При информационной поддержки инноватора возникает проблема выбора конкретной публикации и издания. Чтобы определить семантическое ядро Мя, которое послужит первым шагом в поиске актуальных формализованных знаний, необходимо сначала определить публикации (и издания), которые имеют высокий приоритет в той или иной предметной области, из которых можно извлекать Мя.

Для установления системных связей указанных уровней иерархии системы ДИП рассмотрим закон Брэдфорда, который раскрывает основной принцип распределения публикаций по изданиям:

Первым шагом установления этих связей с позиции информетрии можно обозначить закон Брэдфорда, представленный этим английским химиком и библиографом в 1948г. и раскрываемый основной принцип распределения публикаций по изданиям:

$$\frac{И_3}{И_2} = \frac{И_2}{И_1} = d, a\ \frac{И_3}{И_1} = d^2,$$

где $И_1$, $И_2$, $И_3$ – число журналов (изданий) в 1-ой, 2-ой, 3-ей зонах соответственно.

Если научные журналы расположить в порядке убывания числа статей по конкретной проблематике, то журналы можно разбить на три зоны таким образом, чтобы количество статей в каждой зоне по заданной теме было одинаковым. При этом в первую зону, названной Брэдфордом зоной ядра, входят профильные журналы, непосредственно посвященные рассматриваемой тематике. Вторую зону образуют журналы, частично посвященные заданной области, причем их число существенно возрастает по сравнению с числом журналов в ядре. Третья зона — самая большая по количеству изданий — объединяет журналы, тематика которых далека от рассматриваемой предметной области. Б. Викери уточнил модель С. Брэдфорда. Он выяснил, что журналы, проранжированные в порядке уменьшения числа статей в них по конкретному вопросу, можно разбить не на три зоны, а на любое число зон:

$$T_x : T_{2x} : T_{3x} : T_{4x} : \ldots = 1 : d : d^2 : d^3 : \ldots,$$

где x – количество публикаций (статей) в 1-ой зоне ядра; T_x – количество изданий (журналов) в ядре; T_{2x}, T_{3x}, T_{4x}, … - количество изданий (журналов) во второй, третьей, четвертой и т.д. зонах, содержащих 2x, 3x, 4x, … изданий (журналов).

Существенное значение в развитии информетрии приобрела закономерность концентрации – рассеивания, установленная В.И. Горьковой, показавшей, что количественные закономерности системы ДИП качественно присущи всем иерархическим уровням. Эта закономерность выражена как посредством количественных параметров ранговых (частотных) распределений понятий (закон Ципфа-Мандельброта), так и посредством параметров упорядоченных потоков публикаций (закон Брэдфорда-Викери). Отсюда вытекает следующий вывод: издания, наиболее продуктивные по числу публикаций для соответствующего тематического раздела, сосредоточены в зоне рангового распределения, где частоты появления элементов публикаций (терминов) наибольшие. Таким образом тематическое содержание профильных публикаций (журналов) ядра рангового распределения T_x определяет $М_я^0$ данного упорядоченного потока. При этом явление образования $М_я^0$ рассматривается как организация высокого уровня, тогда между понятиями подмножества $m_i \in М_я^0$ существуют взаимосвязи, играющие более важную роль, чем связи между понятиями других подмножеств. Поэтому для формирования $М_я^0$ в качестве одного из

параметров взаимосвязанности В.И. Горьковой предложена мера совстречаемости понятий, которая может быть определена в результате анализа сетевой модели знаний предметной области.

С образованием ядра T_x рангового распределения, учитывающего связь изданий и публикаций в упорядоченном семантической идентичностью (тематикой) потоке ДИП наблюдается рассеяние элементов ДИП; образуется зона рассеяния (T_{2x}, T_{3x}, …). Так, подмножество ядра рангового распределения, состоящего из профильных научных журналов, включает в себя ~10% от всех наименований журналов, содержащих публикации по данному тематическому разделу; при этом в этих журналах помещено 50-60% всех публикаций по этой тематике. В зоне рассеяния, включающей в себя ~90% наименований журналов, содержится всего 40-50% упорядоченного потока документов (публикаций).

В информационно-аналитических системах для ранжирования элементов системы ДИП, в основном на втором и третьем уровне иерархии, используют количественные, числовые показатели, учитывающие количество публикаций и количество их цитирований. Самые распространенные показатели: импакт-фактор (IF) для изданий и индекс Хирша (h-индекс) для публикаций. Этими показателями определяется полезность публикаций и изданий, выражаемая числом цитирования элементов этих компонентов в других публикация и изданиях.

Импакт-фактор (IF) – численный наукометрический показатель цитируемости публикаций конкретного издания, определяемый по формуле:

$$IF_y = \frac{N_y}{\sum_{i=1}^{n} X_{y-i}},$$

где при оценке издания (например, научного журнала) в у-ом году N_y – число цитирований в течение у-ого года во всех изданиях, отслеживаемых той или иной информетрической базой, публикаций (статей), опубликованных в данном издании во всех предыдущих, т.е. $y - i$ при $i = \overline{1,n}$ годах; X_{y-i} – число публикаций в данном издании в обозначенные предыдущие годы. Обычно число n = 2, а для новых изданий n = 1.

Индекс Хирша является количественной характеристикой продуктивности учёного за весь период научной деятельности. Определение h-индекса производится по следующему алгоритму:

1) устанавливаются все публикации субъекта (физического или юридического лица), содержащиеся в информационной базе, и число их цитирований;
2) осуществляется ранжирование публикаций P_j по числу цитирований N_j:

$$P_1(N_1), P_2(N_2), P_3(N_3), \ldots, P_j(N_j), \ldots, P_y(N_y)$$

при условии:

$$N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq \ldots \geq N_j \geq \ldots \geq N_y$$

3) определение индекса Хирша:

$$(j = N_j) \rightarrow \text{h-index} = j$$

– Для информационных баз:

На первом уровне иерархии ДИП существует множество информационных баз: и глобальных, и более частных, специализированных, способствующих генерации новаций. В настоящее время не существует закономерно установленных и научно обоснованных критериев или просто требований, которые бы однозначно установили порядок ранжирования элементов данного уровня. Однако на практике в своей популярности и значимости на первый план выходят информационные базы (электронные библиотеки), разработчики и владельцы которых ориентировали свою информационную деятельность на глобальность охвата формализованных научных знаний, их качество и высокие наукометрические показатели.

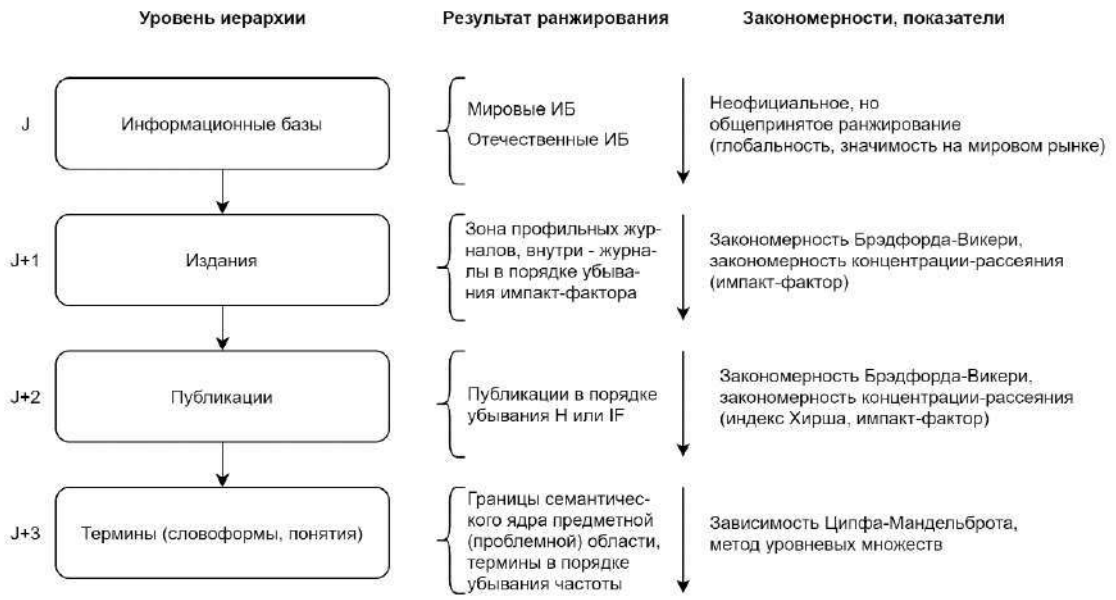


Рисунок 1.2.2.3 - Иерархическое представление системы ДИП

Подводя вывод, схематично иерархию системы ДИП со всеми закономерностями можно представить как на рис. 1.2.2.3.

Логическая зависимость между компонентами:

$$IF_{\text{ИБ}} \underset{\text{I}}{\overset{\text{IV}}{\leftrightarrows}} IF_{\text{изд}} \underset{\text{II}}{\overset{\text{III}}{\leftrightarrows}} IF_{\text{пуб}} \rightarrow \text{М}^{\text{т}}_{\text{кс}}$$

Владельцы информационных баз ИБ стремятся повысить свой рейтинг и включают в базы издания с высоким $IF_{изд}(I)$, при этом они пытаются развиваться не только внутри одной страны, но и выходить на глобальный рынок, чтобы войти в зону сосредоточения. T_x. Стремясь достичь высокого $IF_{изд}$ принимает к изданию публикации с высококвалифицированным рецензированием (II). В свою очередь, авторы публикаций нацелены на повышение научной значимости результатов своих исследований, чтобы за счет высокого $IF_{изд}$ добиться повышения своего рейтинга ($IF_{публ}$ или $H_{публ}$) путем публикации в престижном издании (III). Добиваясь высокого качества публикаций и повышая свой $IF_{изд}$, издание стремится попасть в ИБ с высоким $IF_{ИБ}$ (IV). Публикации в изданиях, находящихся в 1-ой зоне (по Викери), определяют базовую актуальную семантику конкретной тематики, отраженную $\text{М}^{\text{т}}_{\text{кс}} \subset \text{М}^{\text{т}}_{\text{я}} = \{m_i\}^{\text{т}}_{\text{я}}$, где $\text{М}^{\text{т}}_{\text{кс}}$ – ключевые слова по определенной тематике, $\text{М}^{\text{т}}_{\text{я}}$ – ядро распределения терминов (понятий), отображающая суть тематики. $\text{М}^{\text{т}}_{\text{кс}}$ используется для поиска базовых источников формализованных знаний.

1.3 Методика выделения терминов, описывающих содержание предметной области и периферии

Для осуществления поиска формализованных знаний первым шагом является выделение ключевых понятий для поиска. Для осуществления терминологического анализа есть множество готовых типовых решений (advego.ru, miratext, Text Analizer и т.д.). Однако все они являются закрытыми, не позволяющими вносить доработки, направленные на их совершенствование. Основной целью этих текстовых анализаторов является оценка представленного текста по следующим параметрам: водность, тошнота (отношение повторяющихся слов к объему текста). На основе данных показателей и частотного анализа (по з. Ципфа-Мандельброта) дополнительно могут выдаваться рекомендации по корректировке содержания. В основном, данные инструменты используются SEO-специалистами для оптимизации того или иного сайта. Перед нами

стоит совершенно другая задача – определение терминов, отражающих суть тематики $М^{т}_{я}$, и терминов, определяющих проблемный контекст $М^{w}_{пер}$, для осуществления поиска.

Чтобы осуществить терминологический анализ для начала следует разделить термины (понятия, словоформы) на следующие группы, согласно рис. 1.2.2.1:

- Стоп-слова $М^{т}_{стоп}$,
- Семантическое ядро $М^{т}_{я}$,
- Периферия $М^{т}_{пер}$,

$$\left.\begin{array}{l} М^{т}_{стоп} = \{m_1, m_2, \dots, m_{r_c}\}, \\ М^{т}_{я} = \{m_{r_c+1}, m_{r_c+1}, \dots, m_{r_k}\}, \\ М^{т}_{пер} = \{m_{r_k+1}, m_{r_k+1}, \dots, m_{r_l}\} \end{array}\right\} \; М = М^{т}_{стоп} \cup М^{т}_{я} \cup М^{т}_{пер} \qquad (1)$$

В SEO-копирайтинге[6] стоп-словами $М^{т}_{стоп}$ считаются:

– Местоимения (я, мы, вы, ты, он, она, который, и т. д.) и местоименные наречия (где, куда, откуда и др.)
– Союзы (и, или, а и пр.)
– Междометия (ой! ай-яй-яй! ух ты! и т. д.)
– Предлоги (на, в, под и т.п.)
– Частицы (ведь, же, разве, только и пр.)
– Сокращения (все использованные выше и др.)
– Обращения (уважаемые читатели, дорогие покупатели…)
– Вводные слова (как правило, нельзя не отметить, кажется, наверное, может быть…)

В контексте поиска актуальных формализованных знаний при терминологическом анализе в I зону, кроме вышеперечисленных стоп-слов, можно также добавить глаголы и числительные, оставив тем самым для II и III зон ($М^{т}_{я} \cup М^{т}_{пер}$) существительные и прилагательные, с помощью которых в большей степени можно получать словосочетания. Таким образом, можно сократить множество М для дальнейшей работы.

Определим основные функции, необходимые для выделения ключевых слов:

F_1 – Ввод текстового представления формализованных знаний в формате *.txt.

Большинство ИБ содержат в себе научные публикации в формате *.pdf. Поэтому здесь можно дополнительно выделить F_{11} – преобразование файлов из формата *.pdf в формат *.txt.

F_2 – Терминологический анализ текста:

F_{21} – Получение неупорядоченного массива словоформ N,

F_{22} – Выделение существительных и прилагательных массив N'[наименование словоформы, часть речи, род, падеж, число],

F_{23} – Лемматизация (приведение слов в нормальную форму),

F_{24} – Проверка N': если в массиве N' встречается комбинация $[\dots, N_i[\text{прилагательное}], N_{i+1}[\text{существительное}], \dots]$ то объединять их в словосочетания $N_{сл}[N_i\, N_{i+1}]$. При этом: F_{241} – преобразование N_i в род, число N_{i+1} и именительный падеж,

F_{25} – Объединение массивов N' $\cup$ $N_{сл}$ = M',

F_{26} – Упорядочивание M' по частоте элементов массива,

F_3 – Определения $М^{w}_{я}$:

F_{31} – установление числа уровневых множеств Mv множества $М^{w}_{я}$. Рекомендуемым и достаточным числом в контексте установления множества ключевых слов для поиска является число 10,

[6] https://contentmonster.ru/ur-6-vodnost-teksta

F_{32} – определение состава уровневых множеств через определение степени принадлежности m_i к обозначенному контекстом смыслу анализируемого текста - $\mu_в(m_i)$,

F_{33} – формирование семейства α-срезов $A(m_i) = \{M_\alpha^j | \alpha^j \in [0;1]\}$

F_{34} – проверка выполнения условия:

$1 > \alpha_g > \cdots > \alpha_j > \cdots > \alpha_1 > 0 \rightarrow M_\alpha^A \subseteq M_\alpha^g \subseteq \cdots \subseteq M_\alpha^j \subseteq \cdots \subseteq M_\alpha^1 \subseteq M_\alpha^0$, где А-ый α-срез соответствует α = 1.

F_{35} – представление $M_я^w$ по значению α = 0,9.

F_4 – выполнение операции $M_{пер}^т = M' \setminus M_я^w$,

F_4 – упорядочивание элементов массива $M_{пер}^т$ по убыванию частоты.

Здесь может возникнуть вопрос с определением $M_я^w$, при изначальном условии (1), подробное объяснение данной модификации приведено в п.1.4.

1.4 Методика поиска актуальных формализованных знаний

Автоматизированная система поиска формализованных знаний (ФЗ) должна учитывать взаимосвязи всех компонент системы документально-информационного потока. Для практического применения выявленных в п. 1.2.2. взаимосвязей необходимо сначала определить информационную базу, внутри которой будет производиться поиск. Т.к. на настоящий момент не существует закономерно установленных и научно обоснованных критериев или просто требований, которые бы однозначно установили порядок ранжирования информационных баз, то выделим 2 класса: мировые информационные базы (приоритет которым отдают инноваторы за счет глобальности охвата научных знаний и высоким требованиям к ним) и национальные базы.

В Российской Федерации по заказу Минобрнауки РФ при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований была создана «Научная электронная библиотека» (НЭБ). В 2005 г. НЭБ приступила к созданию национального, российского индекса научного цитирования (РИНЦ). Главной причиной разработки этого проекта послужил тот факт, что лишь одна десятая от всех публикаций российских ученых попадала в международные базы данных научного цитирования, такие как Scopus и Web of Science, а многие направления российской науки, в том числе технические, там практически не были представлены. В 2015 г. НЭБ eLIBRARY.RU заключили договор с larivate Analytics о размещении 1000 лучших российских научных журналов из РИНЦ на платформе Web of Science в виде отдельной базы данных Russian Citation Index. Это позволило не только улучшить видимость и цитируемость российских публикаций в международном информационном пространстве, но и повысить их качество за счет приведения к международным стандартам. Таким образом, отбирая научные журналы в национальной базе eLIBRARY.RU из ядра РИНЦ, можно утверждать, что они обладают определенным приоритетом как на национальном уровне, так и на мировом, т.к. включены в мировые ИБ Web of Science и Scopus. Такие издания (журналы) составляют основу для ядра T_x и обладают языковым преимуществом.

Определим основные функции, необходимые для реализации поиска ФЗ:

F_1 – Выбор информационной базы;

Здесь стоит отметить, что поиск по мировым информационным базам является перспективой развития разрабатываемой системы.

F_2 – выбор тематического раздела (по ГРНТИ[7]) для первоначального поиска и параметра поиска (цитируемость или актуальность);

F_3 – Определение приоритетных изданий из ядра сосредоточения T_x;

F_4 – Упорядочивание издания по убыванию IF;

[7] http://grnti.ru/

F_5 – Выбор из 1ого издания (журнала) 3х научных публикаций с заданными параметрами поиска (цитируемость или актуальность, ключевые слова);
$F_{6.1}$ – Для 1ого цикла: преобразование формата научных публикаций из *.pdf в *.txt;
$F_{6.2}$ – Для последнего цикла: предоставление результатов поиска;

$F_{6.1.1}$ – Для каждой публикации $M_\nu = \{m_i\}_\nu$, где ν = {1, 2, 3}, ν – индекс публикаций выполнить F_2 из п. 1.3;

$F_{6.1.2}$ – Пересечение терминологических множеств:

$$\mathrm{M}_{\text{я}}^{w} = \bigcap_{\nu=1}^{3} M_\nu ;$$

$F_{6.1.3}$ – Выделение терминов множества $\mathrm{M}_{\text{я}}^{w}$ по принадлежности $\mu_{\mathrm{A}}(m_i)^{\mathrm{T}}$к тематике:

$$\mathrm{M}_{\text{я}}^{w} = \begin{cases} 1, \text{ если } count(M_\nu) = 3, \\ 0 \text{ в любом другом случае;} \end{cases}$$

$F_{6.1.4}$ – Выполнение $F_{3\text{-}4}$ из п. 1.3;

$F_{6.1.5}$ – Выбор 3-5 словоформ из $\mathrm{M}_{\text{пер}}^{\mathrm{T}}$, относящихся к проблеме W;

$F_{6.1.6}$ – Выполнение F_5 с результатами выполнения $F_{6.1.5}$ и $F_{3.5}$ в п. 1.3.

Данный алгоритм является циклическим, здесь важную роль играет взаимодействие человека с разрабатываемой системой в следующих моментах:

- Выбор тематики первоначального поиска;
- Выбор параметра поиска – цитируемость или актуальность;
- Ранжирование компонент 4ого уровня на принадлежность к проблеме $\mathrm{M}_{\text{я}}^{w}$;
- Выбор терминов $\mathrm{M}_{\text{пер}}^{\mathrm{T}}$, относящихся к проблеме;
- Определение момента завершения цикла поиска формализованных знаний.

На основе этого можно сделать вывод, что проблемно-ориентированный подход задает определенные рамки к автоматизации функции поиска актуальных, научно-значимых формализованных знаний и требования к квалификации потенциального пользователя системы: его знаниям о принадлежности проблемы к определенной тематики и глубоким знаниям об объекте исследования.

1.5 Сценарий поиска актуальных знаний на примере eLIBRARY.RU

В рамках работы поиск актуальных формализованных знаний будет происходить на основе национальной информационной базы elibrary.ru Взаимодействие с данной базой данных может осуществляться двумя способами:

- С помощью API-интерфейса взаимодействия, предоставляемого ИБ;
- С помощью парсинга – синтаксического анализа веб-страниц.

Application Programming Interface (API) eLIBRARY.RU - интерфейс программирования приложений, предназначенный для осуществления автоматических запросов и извлечения информации из базы данных РИНЦ. Основная задача API eLIBRARY.RU - предоставить научным организациям и авторским коллективам возможность выгрузки научной и библиометрической информации из базы данных РИНЦ для проведения научных и статистических исследований. Передача данных через API будет интересна университетам, крупным издательствам, экспертным организациям, ЭБС, производителям баз данных, содержащих научную информацию и т.д.

Основные сервисы API: получение библиометрических показателей авторов, получение библиометрических показателей журналов, получение библиографической записи публикации в РИНЦ. Доступ к одному или нескольким сервисам API осуществляется путем приобретения организацией лицензии сроком на один год. Стоимость подписки на API рассчитывается из учета количества выгружаемых

библиографических записей и необходимых полей метаданных. Минимальная стоимость лицензии 25 000 рублей.[8]

eLIBRARY.RU предоставляет также тестовый доступ к массиву всех данных для студенческих проектов со следующими требованиями: статистический IP-адрес, может использоваться ограниченный массив данных.

Ввиду отсутствия средств на покупку подписки на API и возможностей смены домашнего динамического IP-адреса на статический, было принято решение взаимодействовать с БД через парсинг веб-страниц. Данное решение имеет следующие положительные стороны: парсинг будет происходить по актуальным формализованным знаниям, не ограниченным в объеме; разработанный инструментарий не требует вклада денежных средств и не будет ограничен по времени использования. Недостатки парсинга: высокие требования к защите от DDos-атак ИС, т.к. с помощью системы можно будет посылать множество запросов на elibrary.ru и их защитные технологии могут оценить слишком часто обращение к электронной библиотеке как DDos-атаку от нашей системы.

Веб-страница – это документ, который может быть представлен как в окне браузера, так и в самом HTML-коде. Основой HTML-документа являются теги. В соответствии с объектной моделью документа («Document Object Model», коротко DOM), каждый HTML-тег является объектом. Вложенные теги являются «детьми» родительского элемента. Представление DOM состоит из структурированной группы узлов и объектов, которые имеют свойства и методы. Стандарты W3C DOM и WHATWG DOM формируют основы DOM, реализованные в большинстве современных браузеров.

Для осуществления парсинга научных публикаций, необходимо для каждого запроса методом GET рассмотреть структуру выдаваемой по определенному url-адресу страницы или, другими словами, объектную модель документа. Рассмотрим последовательность парсинга url-адресов и соответствующих DOM, на которых можно получать (извлекать) данные (ключевые параметры поиска) для составления конечного запроса на выдачу требуемых формализованных знаний.

1. Парсинг журнала из ядра РИНЦ

Отправив запрос с помощью URL-адреса 1 из п. 1.5.1 получим следующие результаты – рисунок 1.5.1. UI выбора журнала

Сайт elibrary.ru написан с использованием множества вложенных друг в друга таблиц. Структура DOM веб-страницы с выбором журнала будет выглядеть следующим образом – рисунок 1.5.2.

Чтобы получить ID журнала необходимо найти выделенную область с объектом (тегом) <a>. Для получения всей структуры страницы можно воспользоваться функцией loadHTML, для получения нужной таблицы - методом getElementById(‘result’), для нахождения ссылки во 2ом элементе таблицы – методом getElementsByTagName(‘a’), для получения значения ссылки во 2ом элементе таблицы – методом getAttribute('href').

[8] https://elibrary.ru/projects/api/api_info.asp

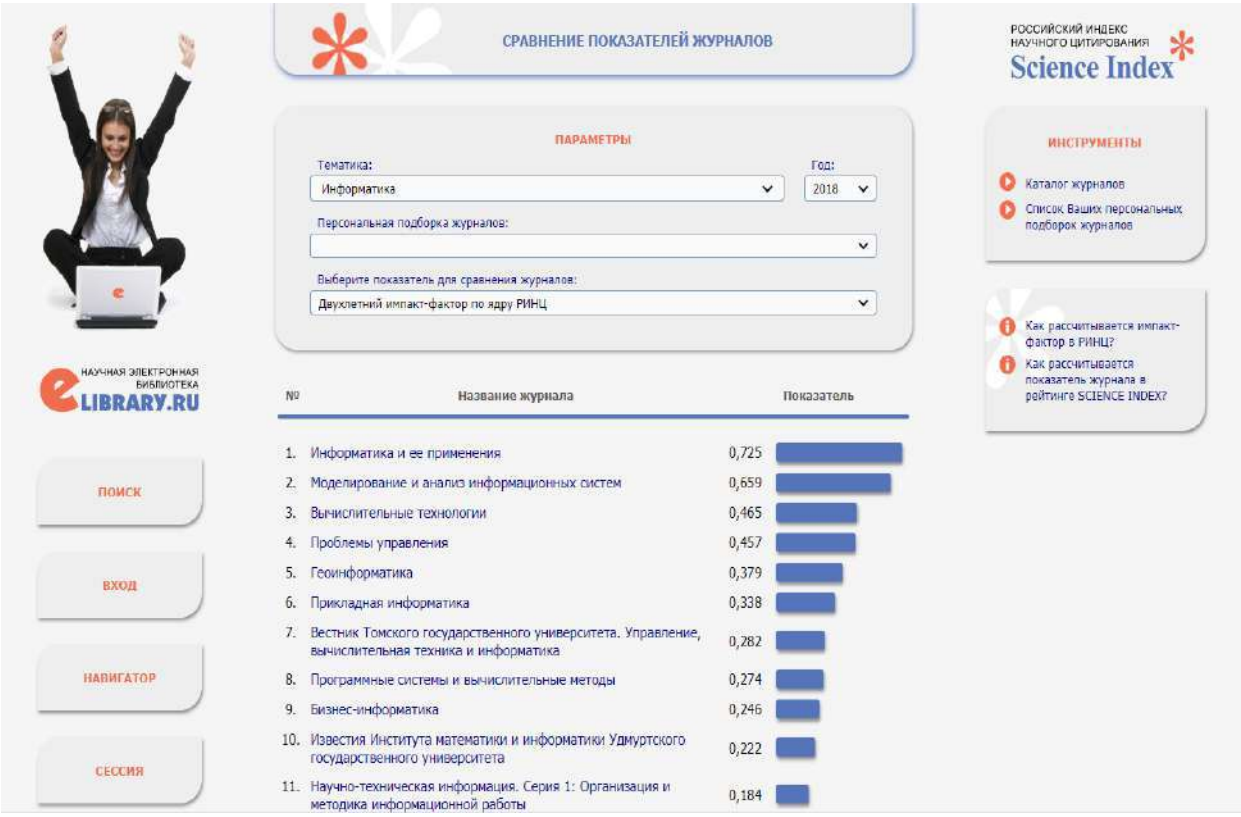


Рисунок 1.5.1. – Интерфейс(UI) выбора журнала

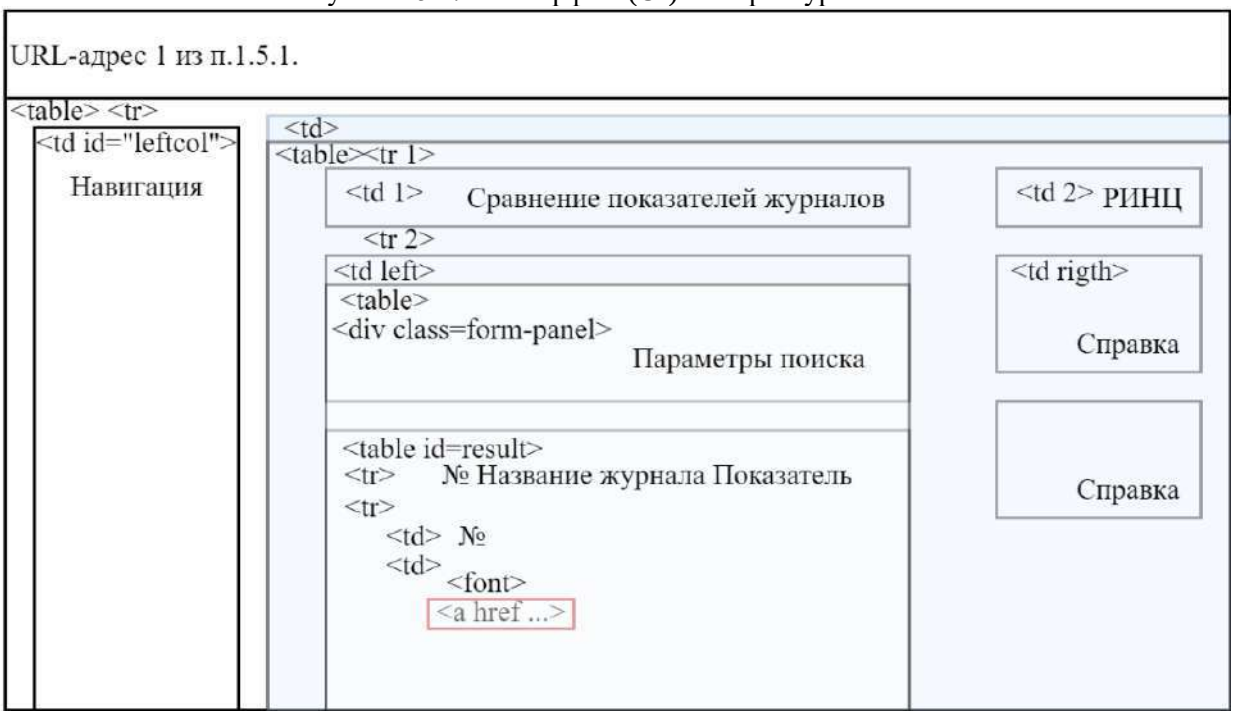


Рисунок 1.5.2. - DOM веб-страницы с выбором журнала

2. Парсинг публикаций из журнала

Отправив запрос с помощью URL-адреса 2 из п. 1.5.1 получим следующие результаты – рисунок 1.5.3.

По аналогии представим DOM веб-страницы с выбором публикаций – рисунок 1.5.4.

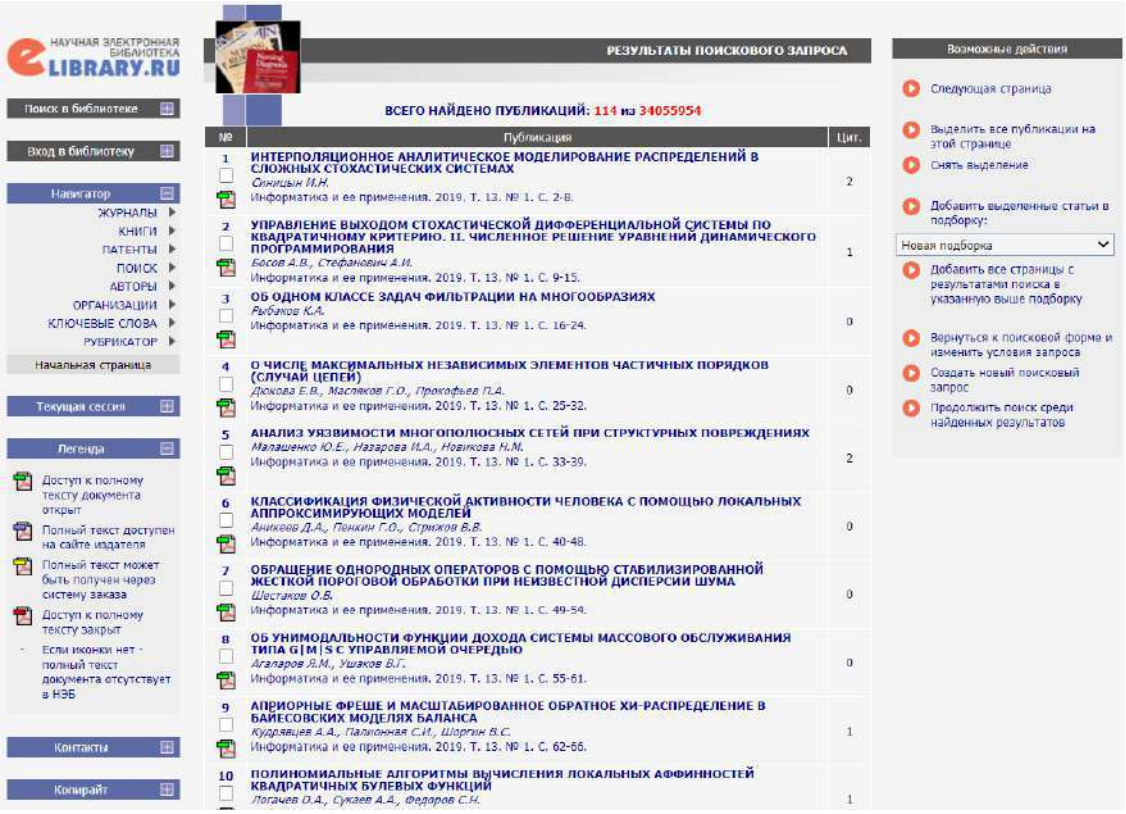


Рисунок 1.5.3. – Интерфейс выбора публикаций

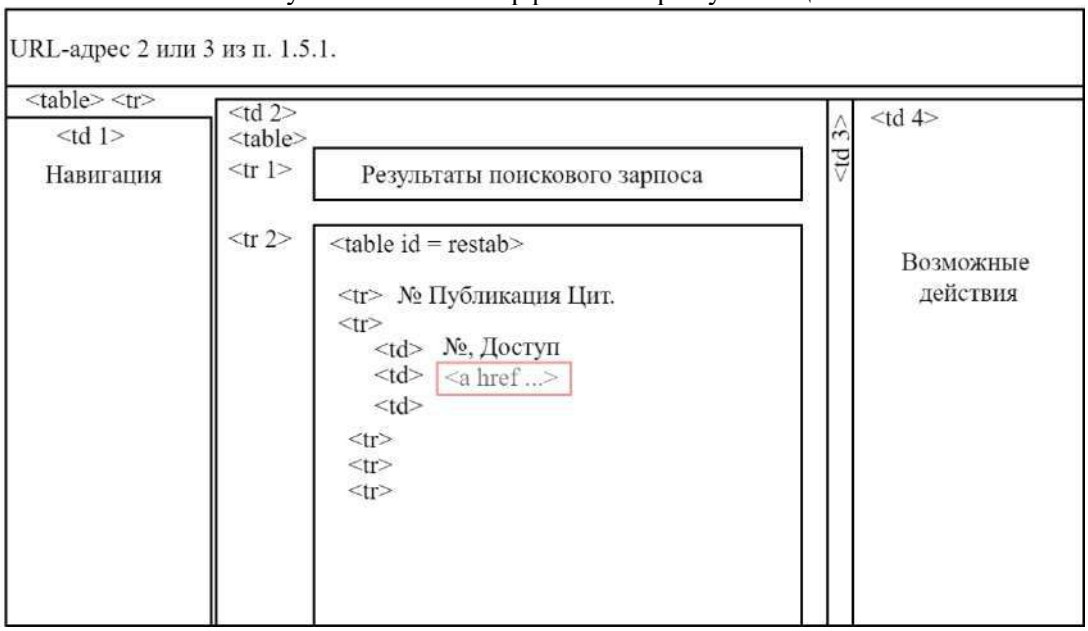


Рисунок 1.5.4. - DOM веб-страницы с выбором публикаций

По аналогии с выводом про парсинг журнала из ядра РИНЦ, составим путь получения ID публикации: для получения всей структуры страницы используем функцию loadHTML, для получения таблицы с публикациями – метод getElementById('restab'), для получения ID публикаций - getElementsByTagName('tr'). Т.к. важной задачей является предоставить пользователю 3 публикации, то парсинг будет происходить по последнему методу до тех пор, пока мы не сможем по 3 URL-запросу раскодировать формат *.pdf в формат *.txt. Подробнее этот момент описан в техно-рабочем проекте. Однако, при наличии параметра «ftext» (4 URL-адрес) в массив будут сохраняться первые 3 ссылки для предоставления пользователю.

1.5.1. Ключевые параметры поиска

В квадратных скобках указаны вводимые параметры. По умолчанию, используется встроенная сортировка по убыванию.

1. Для выбора журнала из ядра РИНЦ
   Входные данные:

– Тематика rubric_code: вводится пользователем, классификатор ГРНТИ (см. п. …);
– Дата YEAR: текущий год – 2;
– Двухлетний импакт-фактор по ядру РИНЦ IF: код 25.

URL-адрес запроса:
https://www.elibrary.ru/titles_compare.asp?titleid=&pagenum=1&order=0&rubriccode=' . [rubric_code] . '&ratingyear=' . [YEAR] . '&titleboxid=&sortorder=[25]

2. Для выбора научных публикаций
   Входные данные:

– Ссылка, полученная из запроса 1: href="title_profile.asp?id=[26694]". Здесь необходимо по разделителю «=» разбить строку на 3 элемента и взять последний. Таким образом, мы получим magazine_id – номер журнала, внутри которого будем искать публикации;
– Параметр поиска order_by: задается пользователем (date – ранжирование по дате, cited – ранжирование по числу цитирования);
– Тематика rubric_code.

URL-адрес запроса:
https://www.elibrary.ru/query_results.asp?querybox_name=&authors_all=&titles_all=' . [magazine_id] . '%7C&rubrics_all=' .[rubric_code] . '%7C&changed=1&queryid=&ftext=&where_name=on&where_abstract=on&where_keywords=on&type_article=on&type_disser=on&type_book=on&type_report=on&type_conf=on&type_patent=on&type_preprint=on&search_itemboxid=&search_morph=on&search_fulltext=on&begin_year=0&end_year=0&issues=m6&orderby=' . [order_by] . '&order=rev&queryboxid=0&save_queryboxid=0

3. Для получения текста публикации
   Входные данные:

– ID-журнала data_query: ссылка, полученная из запроса href="/item.asp?id=[37170976]" делится разделителем «=» на 3 части и берется последняя.
– Логин и пароль от elibrary.ru
   URL-адрес:
https://www.elibrary.ru/start_session.asp?rpage= start_session.asp?rpage= full_text.asp?id=’.[data_query].’ '&login=' . [login] . '&password=' . [password]

4. Для выбора научных публикаций с ключевыми словами
   Входные данные ftext: отобранные ключевые слова.
   URL-адрес запроса:
   https://www.elibrary.ru/query_results.asp?querybox_name=&authors_all=&titles_all=' . [magazine_id] . '%7C&rubrics_all=' . [rubric_code] . '%7C&changed=1&queryid=&' . [ftext] . '&where_name=on&where_affiliation=on&where_references=on&where_abstract=on&where_keywords=on&where_fulltext=on&type_article=on&type_disser=on&type_book=on&type_report=on&type_conf=on&type_patent=on&type_preprint=on&search_itemboxid=&search_morph=on&search_fulltext=on&search_open=on&begin_year=0&end_year=0&issues=m6&orderby=' . [order_by] . '&order=rev&queryboxid=0&save_queryboxid=0

2. Представление функциональной структуры системы поиска актуальных знаний

Согласно представленной иерархии модели системы ДИП (п.1.2), представим функциональную структуру автоматизированной системы поиска актуальных формализованных знаний, способствующих инновационному решению возникшей проблемы W_{or}.

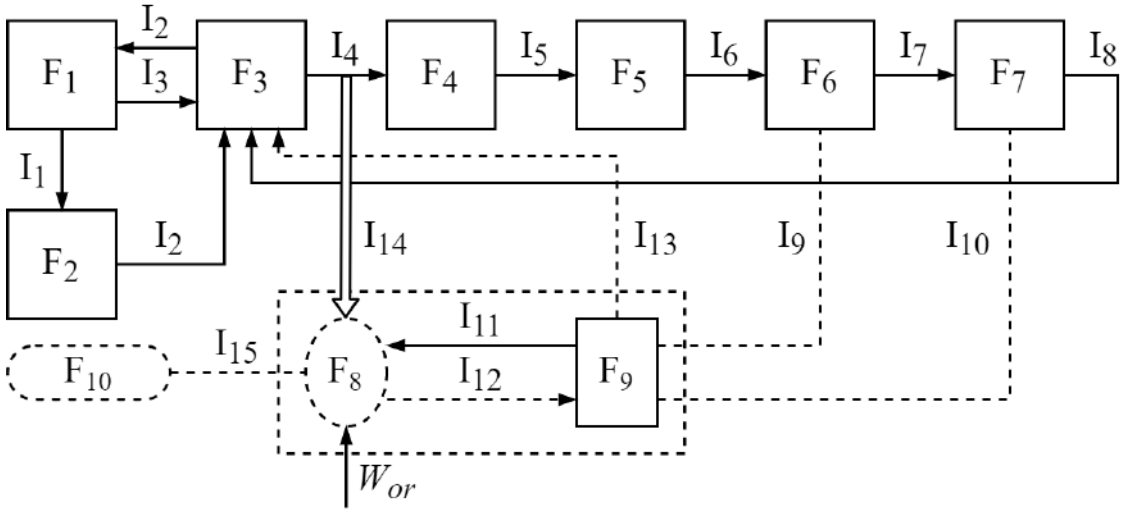


Рисунок 2.1 - Функциональная структура системы обеспечения инноватора формализованными знаниями

На данной схеме:

F_1 – определение наиболее рациональной базы (ИБ), основанное на таких критериальных показателях, как IF-изданий, включенных в данную базу ($\overline{IF_\nu}$), глобальностью охвата формализованных научных знаний (с учетом их научной ценности), а также язык представленных публикаций и возможность использования различных ПОЗ;

F_2 – определение ПОЗ по основной, базовой тематике по классификатору ГРНТИ;

F_3 – поиск по установленному $ПОЗ_{баз}$ в выбранной ИБ актуальных (по году издания) и наиболее представительных (по IF) трех публикаций по базовой тематике;

F_4 – осуществление анализа текстов отобранных публикаций с целью определения частотного распределения терминов (словоформ, понятий) согласно п. 1., в результате анализа получаются три распределенных множества $M\nu = \{m_i\}_\nu$, где ν = {1, 2, 3}, ν – индекс публикаций;

F_5 – выполнение операции пересечения множеств Mν:

$$M_я^w = \bigcap_{\nu=1}^{3} M_\nu ;$$

F_6 – упорядочивание множества $M_я^w$ путем построения функции принадлежности $\mu_в(m_i)^w$ с выделением α-срезов, т.е. M_α^j, в частности $M_{кс}^w$ и $M_{пер}^w$ (см. п. 1.3, 1.4);

F_7 – определение смежных тематик, способствующих инновационному решению проблемы W, для чего выполняется операция $M_{кс}^W \cup M_{пер}^w$; в результате выполнения этой операции базовая (тематическая) направленность информационного обеспечения меняется на проблемную

I_1 – сведения о существующих в ИБ поисковых образах документов (ПОД), позволяющих осуществлять поиск необходимых публикаций;

I_2 – поисковый образ запроса (ПОЗ) на необходимые публикации;

I_3 – научные или учебно-методические публикации, релевантные ПО;

I_4 – научные или учебно-методические публикации, релевантные ПОЗ и выбранные по установленным приоритетам;

I_5 – ранжированное представление понятий (терминов, словоформ), отражающих содержание выбранных публикаций;

I_6 – передача сообщения о множестве М для дальнейшего упорядочивания;

I_7 – упорядоченное функцией принадлежности $\mu_в(m_i)^w$ множество M^w;

I_8 – представление ПОЗ в виде $M^w_{кс}$, которое становится базовым на очередном цикле, образованном этой обратной связью в функциональной структуре; обозначенный цикл представляет собой аналогию с циклом PDCA.

Эффективность обеспечения инноватора формализованными знаниями зависит не только от их содержания, но и от состояния неформализованных знаний самого инноватора. В связи с этим приведенная на рис. 2.1 схема функциональной структуры может быть дополнена образовательным контуром (представлено пунктиром). В этом контуре представлены функции:

F_8 – когнитивная и креативная функция инноватора;

F_9 – контроль по представленным по каналам I_9 и I_{10}, соответственно, $М_{ИПС}$ и $M^W_{ИПС}$ и оценка неформализованных знаний инноватора с представлением корректирующих рекомендаций по совершенствованию этих знаний, включая формирование запроса ($M^T_{кс}$, $M^W_{кс}$) на учебно-методическую литературу, передаваемого по каналу I_{13} функции F_3;

I_{11} – информационный канал для представления инноватору контрольных множеств понятий $M^T_{ИПС}$ и $M^W_{ИПС}$, результатов контроля и оценки его знаний с конкретными рекомендациями;

I_{12} – информационный канал для передачи результатов самооценки (рефлексии);

I_{14} – основной информационный канал представления формализованных знаний («третий мир» по К. Попперу) с целью обогащения неформализованных знаний инноватора («второй мир» по К. Попперу), т.е. канал интернализации знаний, необходимых для инновационного решения возникшей проблемы W_{or};

I_{15} – когнитивный поток, направленный на процесс формирования модели новации (F_{10}).

Функционально представленная система обеспечения формализованными знаниями наряду с образовательной системой представляет собой частный вариант более широкого класса систем – систем управления знаниями. Здесь имеется цель управления – новация, проблема W_{or}, которую надо решать, ресурс, в частности Интернет-ресурс, который необходимо целенаправленно использовать, совокупность функций управляющего органа (F_1, F_7 и F_9) и объект управления – инноватор с функцией F_8. Наличие обратной связи I_8 образует цикл развития, подобный циклу PDCA, что говорит о том, что это не только система управления знаниями, но и в определенной степени система управления инновационным развитием.

3. Выбор типовых проектных решений

После построения функциональной структуры можно определить перечень функций, реализацию которых можно осуществить на основе имеющихся на рынке типовых проектных решений (ТПР).

1. Функция преобразования файлов из формата *.pdf в формат *.txt.

Элементное ТПР выбирается исходя из следующих требований: реализация на php, свободное распространение, открытый исходный код, по возможности поддерживание кодировки символов ASNII, Windows1252 (1251), Unicode (UTF-16, UTF-8), ISO-8859-1. В контексте задачи выделения ключевых слов необходимо раскодировать только словоформы; раскодировка таблиц, формул и изображений не требуется. Оценка ТПР дается по интервальной шкале [0;1], где 0 – полностью не удовлетворяет требование, 1 – полностью удовлетворяет.

Таблица 3.1. Сравнение ТПР преобразования файлов в формат *.txt

ТПР	**Свободное распространение**	**Открытый исходный код**	**Поддерживание кодировок**	**Результат тестирования**	**Итоговая оценка**
Вес критерия W	0,7	0,5	0,6	1	$\sum_{i=1}^{4} w_i * 0_i$
pdftotext[9]	1	1	ASNII, Windows1252 (1251), Unicode (UTF-16, UTF-8), 0,83	При парсинге научных публикаций раскодирование 3 из 5 0,6	2,298
PDFParser [10]	1	1	ASCII, UTF-8, Windows-1252, ISO-8859-1 0,66	При парсинге научных публикаций раскодирование 2 из 5 0,4	1,996
ConvertAPI [11]	0	0	ASNII, Windows1252 (1251), Unicode (UTF-16, UTF-8), ISO-8859-1 1	1	1,6

Таким образом, выбранное элементное ТПР для этой функции – pdftotext со следующими настройками:

- Загрузка библиотеки:

Сайт с открытым доступом для скачивания: https://github.com/spatie/pdf-to-text

Скачанный архив рекомендуется распаковывать в директории недоступной web-серверу. Например, C:\Program Files\xpdf

- Для преобразования нужно использовать следующие регулярные выражения:

[9] https://github.com/spatie/pdf-to-text
[10] https://github.com/smalot/pdfparser
[11] https://www.convertapi.com/

$text = preg_replace("/[^а-яА-Я]/u", " ", $text);
$text = preg_replace("/\s+/", " ", $text).

2. Задача лемматизации словоформ из текста

Элементное ТПР выбирается исходя из следующих требований: реализация на php, свободное распространение, открытый доступ, поддерживаемый русский язык, поддерживаемая Unicode кодировка, функции: лемматизация (получение нормальной формы слова), представление грамматической информации для слова (часть речи, падеж, род и т.д.), изменение формы слова в соответствии с заданными грамматическими характеристиками.

Ввиду отсутствия разнообразия ТПР на указанном языке программирования, предлагается использовать открытую библиотеку phpMorfy с последующей модификацией. phpMorphy использует для работы словарь, который проводит сравнение каждой словоформы из текста с словоформой из словаря. Однако, в ходе тестирования была замечена следующая проблема: при условии, что необходимо выделить все существительные из текста, и при вводе предложения «вижу три села», библиотека не выдает результата. Если ставить условие вывода всех словоформ, не только существительных, то результат будет «видеть, тереть, сесть». Отсюда можно сделать следующие выводы:

– Библиотека работает в большинстве случаев корректно, однако могут возникнуть проблемы с преобразованием отглагольных существительных и существительных, выделив основу которых можно получить глагол в мужском роде.
– Качество и количество выдаваемых результатов высоко зависят от открытых словарей, с которыми работает библиотека. Существует вероятность, что при нахождении в тексте «новых» словоформ, библиотека может не распознать их. Так что заменой этого ТПР потенциально может являться морфологический анализ текста, однако готовых и открытых решений в этом случае нет.

Установка типового решения:

- Сайт с открытым доступом для скачивания: http://phpmorphy.sourceforge.net/
- Скачанный архив с библиотекой рекомендуется разместить в директории недоступной web-сервису. Например, C:\Program Files\phpmorphy
- Скачанный архив со словарями необходимо распаковать в дистрибутив phpmorpfy\dicts. Там должны находиться файлы типа common_aut.*.bin, predict_aut.*.bin и т.п.

3. СУБД и БД – elibrary.ru

Модификация библиотеки будет происходить в техно-рабочем проектировании.

Дальнейшая разработка информационной системы будет происходить с использованием технологии канонического проектирования, методологии структурного анализа и проектирования и с использованием каскадной модели жизненного цикла и CASE-средств.

4. Технико-экономическое обоснование целесообразности разработки автоматизированной системы поиска актуальных знаний

Автоматизированная система поиска актуальных формализованных знаний должна осуществлять информационную поддержку принятия инновационных решений в любой сфере деятельности. Актуальность и приоритетность инновационного направления для предприятий и страны в целом определены во введение.

Разрабатываемая система «KNOW.PRO» является универсальной, т.е. подойдет для обеспечения инноваторов актуальными знаниями по решению любых информационных проблем на различных предприятиях. Каждое предприятие имеет свою бизнес-модель и выпускает свой продукт, соответственно, схема обоснования в каждом случае будет специфичной, индивидуальной. Поэтому в рамках работы схема обоснования целесообразности разработки будет рассматриваться на примере внедрения ИС в образовательную деятельность, а именно в качестве инструментария для подготовки специалистов, способных принимать инновационные решения в будущей профессиональной деятельности. Для этого рассмотрим концептуальную схему взаимодействия:

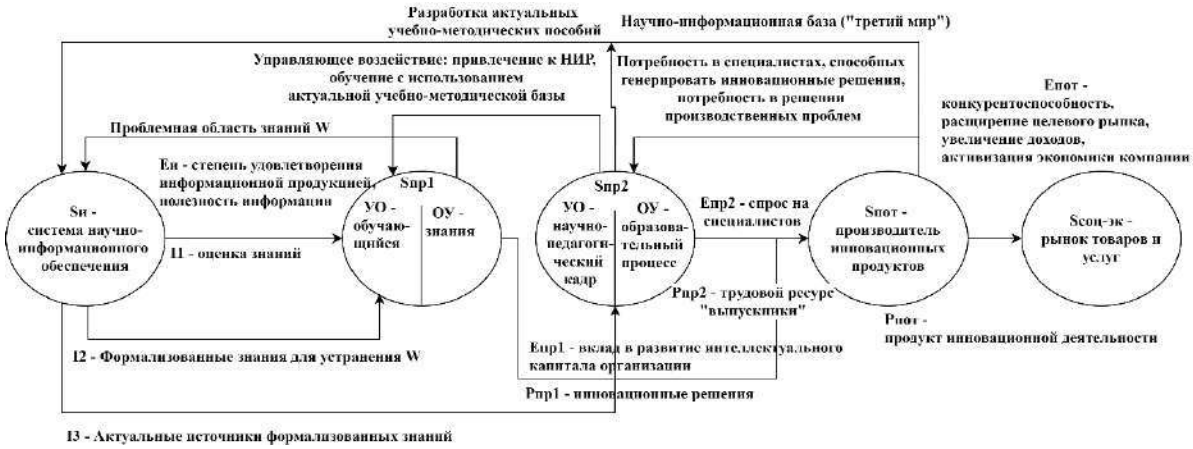


Рисунок 4.1. - Схема обоснования совершенствования системы

Экономика ориентирована на создание инновационных продуктов или услуг, т.к. только при таком подходе можно стать конкурентоспособными в социально-экономической среде Sсоц-эк. Потенциальными эффектами от производства инновационных продуктов являются расширение целевого рынка, внутренняя и внешняя конкуренция с другими организациями, увеличение доходов, активизация экономики. Для создания этих продуктов, услуг, производители в любой сфере деятельности Sпот потребляют трудовой ресурс из образовательной деятельности Sпр2. Отсюда происходит увеличение вкладываемых средств в образовательную деятельность для развития будущих специалистов, способных осуществлять инновационные разработки. Вкладываемые средства могут быть выражены как в денежном эквиваленте, так и в научно-информационном. Последний характеризуется формализацией актуальных знаний ведущих специалистов, созданием своего научного вклада в «третий мир» относительно какой-либо актуальной проблемы. На основе потребностей Sпот Министерство науки и высшего образования формирует перечень компетенций, которыми должен обладать выпускник Sпр2 после прохождения определенной образовательной программы. Благодаря потоку актуальных знаний из среды Sпот научно-педагогический состав образовательной деятельности Sпр2 может формировать актуальное учебно-методическое обеспечение для обучения будущих специалистов и формирования в них требуемых компетенций. Для развития способности принимать инновационные решения научно-педагогические кадры привлекают обучающихся Sпр1 выполнять научно-исследовательские работы, для этого вводятся специальные курсы. В

ходе выполнения НИР обучающийся не только должен быть обеспечен актуальными формализованными знаниями со стороны образовательного процесса, но и должен знать, как пользоваться инструментариями, способными помогать ему в принятии инновационных решений. В силу своих когнитивных и креативных способностей обучающийся Sпр1 УО способен развивать свой интеллектуальный капитал ОУ, расширять свои знания. Любая информационная система функционирует для решения возникающих в процессе функционирования в производственной системе информационных проблем. Информационную проблему Sпр1 можно представить как проблемную область знаний W. Система научно-информационного обеспечения включает в себя оценку знаний обучающегося I1 и предоставление актуальных формализованных знаний I2, взятых из определенных информационных банков посредством обращения к СУБД. Таким образом, специалист может быть подготовлен к принятию инновационных решений относительно Sпот, продукт его деятельности Рпр1 – инновационные решения, один из эффектов, который он может получить – вклад в его дальнейшее развитие человеческого интеллектуального капитала. Эффект для предприятия, на которой выпускник будет работать – повышение конкурентоспособности. Так образуется цикл процесса подготовки специалистов к принятию инновационных решений в конкретной сфере деятельности.

В ходе предпроектных исследований были определены следующие проблемы в действующей информационной системе Sи:

- Существующие информационно-поисковые системы (ИПС) направлены на хранение и поиск формализованных знаний по тематикам, а не по проблемам W,
- Существующие ИПС по умолчанию используют алгоритмы релевантного поиска, не распознающего латентные потребности пользователя,
- При решении инновационных задач недостаточно иметь (или получать) базовые знания по профильной тематике. Генерация новой ценной информации происходит не только за счет изучения формализованных знаний, обладающих дидактичным приоритетом, но и за счет актуальных формализованных знаний.
- Инновационный процесс - непрерывный, что вызывает цикличность представления актуальных знаний и цикличность обращения к информационной системе Sи.

Ценность разрабатываемой системы научно-информационного обеспечения определяется полезностью той информации, которую она предоставляет пользователю. Поэтому для решения обозначенных проблем предлагается внести следующие изменения $\{\delta_i\}$, используя определенные средства $\{Si\}$:

δ_1 – организация процесса перехода от поиска по тематикам к поиску по проблеме за счет предоставления пользователю терминологических множеств, описывающих семантическое ядро предметной области и периферии, описывающей актуальные направления исследования.

ΔS_1 – разработка модуля терминологического анализа формализованных знаний, включающего в себя автоматический частотный анализ источника формализованных знаний, автоматизированное ранжирование терминов по принадлежности к предметной области и проблеме.

δ_2 – организация процесса взаимодействия ИПС с внешними приоритетными информационными базами, процесса поиска приоритетных изданий и публикаций внутри них по проблеме, выявленной при обработке результатов ранжирования в модуле S_1 через установление определенного значения α-среза.

ΔS_2 – разработка модуля поиска формализованных знаний, включающего в себя автоматизированное установление связи с СУБД информационных баз и отправку поисковых образов документов в эти базы.

δ_3 – предоставление пользователю актуальных научно-значимых формализованных знаний по проблеме с целью устранения дефицита знаний. Если цель будет не достигнута (оценка знаний I1 окажется неудовлетворительной), то необходимо произвести повторный поиск, используя при этом терминологическую основу, выделенную из уже найденных публикаций. Однако здесь стоит отметить, что важно различать какую роль играют формализованные знания в развитие пользователя – обучающую или инновационную. В первом случае, НПК через управляющее воздействие стоит предоставить обучающемуся дидактический материал, направленный на закрепление фундаментальных знаний.

ΔS_3 – реализация веб-приложения взаимодействия пользователя с разработанными модулями информационной системы Su с возможностью осуществлять циклический поиск ФЗ и получать координаты (ссылки на сами работы или место, где можно их приобрести) необходимых источников знаний.

Таким образом, изменения в информационной системе $\Delta S_{\text{и}}$ приведут к изменению ее качеств $Q_{\text{и}}$ и, следовательно, к изменению качества ее продукта Ри – источников формализованных знаний, что повлияет на все взаимодействующие системы (рис.4.1).

Эффекты на уровне Еи представлены в таблице 4.1. Расчет критериев $\Delta Q_{\text{и}}$ и $\Delta Q_{\text{Ри}}$[12] и эффекта Еи.

За счет изменения качеств поступаемых формализованных знаний $\Delta Q_{\text{Ри}}$, обучающийся $S_{\text{пр1}}$ увеличивает свой человеческий интеллектуальный капитал $\Delta Q_{\text{пр1}}$, т.е. устанавливает большее количество нейронных связей в мозгу K_1. В журнале Nature Neuroscience (IF = 21.126) группа исследователей «Human Connectome Project» во главе со Стивеном Смитом опубликовала статью, доказывающую: люди, обладающие хорошим образованием, физической выносливостью, хорошими показателями в тестах на интеллект и подобными "положительными" признаками, обладают большим количеством связей в мозгу. Авторы также ссылаются на статьи журнала Current Biology (IF = 9.193), в которых описываются исследования вмешательства в функционирование головного мозга с последующим изменением поведения человека или улучшения каких-то определенных показателей его работы. Например, ученым при помощи микрополяризации (метода, позволяющего изменять состояние различных звеньев центральной нервной системы действием постоянного тока) удалось улучшить математические способности испытуемых. Однако здесь можно сказать, что повышение капитала также может произойти из-за взаимодействия с коллегами, работающими над такой же или схожей проблемой – одним из атрибутов библиографического описания документа является ФИО автора, с которым можно установить связь. Тогда изменением критерия ΔK_2 будет разница в количестве коммуникативных связей с членами научного общества, работающих над схожей проблемой, до и после внедрения системы. Допустим, до внедрения обучающийся контактирует с преподавателями, которые обладают знаниями по решению определенной проблемы (≈3), после – с преподавателями и другими научными работниками (через формализованные знания) (≈6): $\Delta K_2 \approx 3$ связи.

Таким образом, можно сделать вывод, что благодаря изменениям качеств формализованных знаний, человек будет обучаться, получать новую, полезную информацию, сопряженную с уже существующими знаниями. Тогда в этом случае произойдет образование новых нейронных связей, человек повысит «качество» своего интеллектуального капитала. Изменение интеллектуального капитала приведет к изменению продукта деятельности обучающегося (инноватора) - инновационных решений $\Delta Q_{\text{Рпр1}}$, которые принимаются в контексте проблем в конкретной сфере деятельности. Количественно оценить критерии, описывающие $\Delta Q_{\text{Рпр1,}}$ невозможно

[12] Статистические данные взяты с сайтов: https://www.searchengines.ru/kak_uvelichit_trafik.html, https://myacademy.ru/baza-znanii/glossarii/glubina-prosmotra

ввиду высокой неопределенности относительно объекта, по которому будут приниматься инновационные решения, и влияния, которое оказывают эти решения на всю профессиональную сферу. Например, специалистов КИТ по профилю «Прикладная информатика в информационной сфере» готовят к решению информационных проблем, которые могут возникнуть в любой сфере деятельности, в любой социально-экономической системе без привязки к определенной производственной деятельности.

Возможные эффекты:

Епр1.1 – степень соответствия инновационного решения актуальным проблемам определенной сферы деятельности. Это экспертная оценка, дающаяся руководством предприятия.

На уровне $S_{пр2}$ можно отметить, что благодаря совершенствованию системы научно-информационно обеспечения учебно-методическое обеспечение образовательной деятельности будет обладать не только свойством дидактичности, но и актуальности $\Delta Q_{пр2,}$. За счет этого будут происходить непрерывные изменения в управляющем воздействии на обучающихся.

ΔK_1 – повышение актуальности источников ФЗ: $\frac{\sum_1^N ФЗ_{АктW}[год]}{N} - \frac{\sum_1^N ФЗ_{уч-мет}[год]}{N}$

$\Delta K_1 = 2019 - 2012 = 7$ лет

В результате актуализация учебно-методического обеспечения приведет к изменению $\Delta Q_{Рпр1,}$ продукта образовательной системы – выпускника. Поэтому системы $S_{пр1}$ и $S_{пр2}$ нельзя рассматривать отдельно друг от друга: $P_{пр1} \equiv P_{пр2}$, $\Delta Q_{Рпр1} \equiv \Delta Q_{Рпр2.}$

Однако эффектом для $S_{пр2}$ будет степень удовлетворения работодателей выпускниками. Количественно это можно выразить разностью отношений количества выпускников устроившихся на работу после выпуска к общему количеству выпускников после и до внедрения системы:

$\Delta E_{пр2} = \frac{15}{19} - \frac{10}{19} = 0{,}26$ (работающие\безработные выпускники).

Нет возможности определить четкие значение эффекта $E_{пот}$ из-за разнообразия и специфики всех производственных систем, поэтому для расчета возьмем средние значения самых конкурентоспособных компаний.

По оценкам Г. Беккера[4], эффективность инвестиций в человеческий капитал составляет 12–14 % годовой прибыли. Средняя прибыль компаний из рейтинга RAEX-600: 2.400.000.000. Таким образом, Епот = 312.000.000 руб.

Для определения эффективности ΔSи, кроме эффекта Еи, необходимо определить затраты Зи. Единовременные затраты: затраты на разработку и внедрение информационной системы; текущие затраты: оплата услуг Интернет-провайдера по предоставлению доступа к глобальной сети (доступ к некоторым из модулей осуществляется посредством сети Интернет), оплата электроэнергии.

Т.к. разрабатываться система будет на уже имеющихся на кафедре средствах, то затрат на приобретение дополнительных материально-технических, аппаратно-коммуникационных средств не будет.

Расчет заработных плат (з\п, зп) проводился с учетом налогов (30%):

- Пенсионный фонд – 22%,
- Социальное страхование – 2,9%,
- Медицинское страхование – 5,1%.

Все расчеты представлены в таблице 4.2. Расчет затрат

Таблица 4.1. Расчет критериев $\Delta Q_{и}$ и $\Delta Q_{Ри}$[13] и эффекта Еи

$\Delta Q_{и1}$	$\Delta Q_{и2}$	$\Delta Q_{и3}$	$\Delta Q_{Ри}$
ΔK_1 – увеличение времени на составление ключевых слов для ПОД: $\overline{t_{печати}} * N_{слов} - t_{оценки} * K_{слов}$ $\Delta K_1 = 1,7*5 – 0,4*50 = - 11,5$ с ΔK_2– сокращение времени терминологического анализа формализованных знаний: $t_{алгоритма\ анализа} - \frac{\sum_1^N t_{изучения\ материала}}{N}$ $\Delta K_2 = 0,046 – 900 = - 899,954$ с	ΔK_1 – сокращение времени на поиск ФЗ: $t_{алгоритма} - \overline{t_{печати}} * N_{слов}$ $\Delta K_1 = 0,2 – 8,5 = -8,3$ с K_2 – пертинентный алгоритм $K_2 = 1$ (абсолютная шкала [0;1]) ΔK_3 – сокращение глубины просмотра ИБ: $0 - \frac{\sum_{1\ сайт}^N Просмотр/Визит}{N}$ $\Delta K_3 = -1,4$ глубина	ΔK_1 – сокращение времени на поиск и обработку ФЗ: $t_{выполнения\ алгоритма} - t_{ручного\ поиска}$ $\Delta K_1 = 2 – 900 = - 898$ с ΔK_2 – сокращение времени пребывания на сторонних ресурсах: 0 - 1,34*$N_{сайтов}$, для примера N=1 $\Delta K_2 = -1,34$ с	ΔK_1 – повышение достоверности и значимости источников ФЗ: $\frac{\sum_1^N h индекс_{АктW}}{N} - h индекс_{вуза}$ $\Delta K_1 = 214, 4 – 32 = 182,4$ h ΔK_2 – повышение актуальности источников ФЗ: $\frac{\sum_1^N ФЗ_{АктW}[год]}{N} - \frac{\sum_1^N ФЗ_{уч-мет}[год]}{N}$ $\Delta K_2 = 2019 – 2012 = 7$ лет
$E_{и1.1}$ – полнота предоставленной информации	Разность неопределенности до и после изучения источников формализованных знаний (оценка методов ИПС при 1 цикле)		$\Delta E_{и1.1}$, = 0,763 – 0,214 = 0,55
$E_{и1.2}$ – доступность к различным источникам	Нормированное отношение количества приоритетных информационных баз для поиска до и после внедрения		$E_{и1.2} = 1 – 1/3 = 0,67$
$E_{и2}$ – своевременность научно-информационного обеспечения	Субъективная оценка своевременности предоставления формализованных знаний после и до внедрения системы		$\Delta E_{и2} = 0,9 - 0,4 = 0,5$

[13] Статистические данные взяты с сайтов: https://www.searchengines.ru/kak_uvelichit_trafik.html, https://myacademy.ru/baza-znanii/glossarii/glubina-prosmotra

Таблица 4.2. Расчет затрат

Уровень	Затраты до внедрения системы	Затраты после внедрения системы
Зи	Расходы на интернет: $З_1$ = 500 руб/мес = 6000 руб/год. Расходы на электроэнергию: серверный компьютер при работе 24/7 в среднем потребляет около 0,4 кВт*ч, а тариф на электроэнергию составляет 4,35 руб/кВт*ч. $З_2$ = 0,4*24*30*12*4,35 = 15 033,6 (руб/год) З\п системного администратора в среднем, согласно данным hh.ru: $З_3$ = 20000 руб/мес = 240000 (руб/год)	Разработка основных требований к создаваемой системе, составление и согласование ТЗ в соответствии с таблицей ОСТ 4.071.030 составляет: 3677 + 588 + 278 = 4543 (ч) Разработка ТЗ к нашей системе выполняется в течение 1 года - (4543 часа)/(5л) = 908,6 (ч) Средняя зп технического писателя 34т.р. в мес, при работе 8ч\5д в нед – 160ч в мес, 1ч = 212,5 (руб/ч) Зтз = 212,5*908,6*1,3 = 251000,75 (руб) Затраты на разработку ТП: Разработка и обоснование проектных решений по функциональной части системы – 4425ч Постановка задачи и разработка алгоритма решения 1 группа сложности – 1404ч Разработка и обоснование проектных решений по математическому обеспечению системы – 869 Разработка и обоснование проектных решений по информационному обеспечению системы – 2596 Разработка и обоснование проектных решений по техническому обеспечению системы – 1081 Разработка программ и программной документации по группам сложности на языках программирования - 2552 Средняя зп разработчика – 65тр. = 160ч работы = 406,25 (руб\ч) Зразртп = 406,25*(10375/5)*1,3 = 1095859,375 (руб) Средняя зп программиста – 30т.р. = 160 ч = 187,5 (руб\ч) Зпртп =187,5* (2553/5)*1,3 = 124458,75 (руб) Затраты на внедрение: Подготовка условий для обеспечения эксплуатации системы – 1223 Комплексная проверка готовности задач, подсистем и системы к

		сдаче в промышленную эксплуатацию – 1223 Сдача задачи заказчику на контрольных примерах – 82 Приёмо-сдаточные испытания – 1155 Звн = 406,25*(3683/5)*1,3 = 299 243,75 (руб)
	Зи’ = 261034 руб\год	Зи’’ = 261034 +1860335,75 = 2121369,75 руб\год
Зпр1	Затраты на обучение: согласно данным с сайта ispu.ru - 109 718 на факультет ИВТФ.	Затраты на обучение: согласно данным с сайта ispu.ru - 109 718 на факультет ИВТФ.
Зпр2	Курсы повышения квалификации системного администратора. В среднем, стоимость одного курса составляет 40000 руб. С учетом периодичности прохождения курсов (1 раза в 3 года), можно вычислить общую стоимость. Зпр’ = 40000/3 = 13333,33 (руб\год)	С учетом средней зарплаты ИТ-специалиста и времени, затраченного им на прочтение руководства пользователя программной системы и ее полное освоение (5ч), можно вычислить затраты на обучение. Зпр’’ = 406,25*5*1,3 = 2640,625 (руб)
	Зпр2’=13333,33 руб\год	Зпр2’’ = 13333,33 + 2640,625 = 15973,95833 руб\год
	Инновации, которые будут разрабатываться в вузе, могут иметь различный характер. Доходы от выполнения научных исследований - 20% [В.В. ГАМУКИН, канд. экон. наук, проректор по экономике Тюменский государственный университет - Доходы вуза: диверсификация бюджетных рисков]. Студенты и научные работники выполняют исследования в основном в личных целях – получить диплом, научное звание, степень, т.к. все права на разработки принадлежат вузу, следствием выполнения НИР может являться какой-либо процент от денежной суммы, которую получает вуз при использовании внешними потребителями конкретной работы, конкретного патента. Т.е. в любом случае вуз не будет препятствовать разработке инноваций и не будет себя лишать дополнительного дохода. Вузы также придерживаются принципа инновационного развития. Единственными затратами могут быть ЗП научных работников, которые равны «до» и «после».	
Зпот	Среднее значение вклада в каждого сотрудника у крупных компаний (конкурентоспособных), согласно рейтингу RAEX-600[14], в 2018 году было 185,38 тыс. рублей\чел.	

[14] https://raex-rr.com/country/RAEX-600/social_responsibility#table

С помощью определенных эффектов и вычисленных затрат найдем показатели экономической эффективности на разных уровнях.

На уровне $S_и$:

$$\Delta Э_и = Е_и'' * З_и' - Е_и' * З_и''$$

$\Delta Э_{и1.1}$ - эффективность относительно $Е_{1.1}$ (полноты предоставляемой информации). С учетом того, что разработка ИС входит в зону ответственности обучающегося, затрат на ее разработку и внедрение как таковых не будет:

$\Delta Э_{и1.1} = 0{,}763*261034 - 0{,}214*261034 = 143307{,}666 > 0$

$\Delta Э_{и1.2}$ – эффективность относительно $Е_{1.2}$ (доступности различных источников):

$\Delta Э_{и1.2} = 1*261034 - 0{,}33*261034 = 174892{,}78 > 0$

$\Delta Э_{и2}$ – эффективность относительно $Е_2$ (своевременность предоставления формализованных знаний):

$\Delta Э_{и2} = 0{,}9*261034 - 0{,}4*261034 = 130517 > 0$

На уровне $S_{пр1}$ обоснование целесообразности проведем через условие, определяемое двумя неравенствами:

$$\Delta Э_и > 0 \text{ и } Е_{пр1}'' > Е_{пр1}'$$

При описании изменений в системе $S_{пр1}$ были приведены аргументы, доказывающие, что уровень интеллектуального капитала влияет на результативность принимаемых инновационных решений, поэтому $Е_{пр1}'' > Е_{пр1}'$. Как было выявлено ранее, $\Delta Э_и$ во всех случаях больше 0. Отсюда можно сделать вывод, что $\Delta Э_{пр1} > 0$.

На уровне $S_{пр2}$:

$$\Delta Э_{пр2} = Е_{пр2}'' * (З_и' + З_{пр2}') - Е_{пр2}' * (З_и'' + З_{пр2}'')$$

$\Delta Э_{пр2} = 0{,}79*(261034 + 13333{,}33) - 0{,}52*(261034 + 15973{,}95833) = 72706{,}05237 > 0$

На уровне Sпот:

$$Э_{пот} = \frac{Э}{З}$$

$Э_{пот} = 312000000 / (185380 * 140\ 231)$ [15]$= 0{,}012$

По результатам вычислений можно утверждать, что разработка и внедрение информационной системы $S_и$ KNOW.PRO является целесообразной. На уровне производства инновационной продукции Sпот разработка системы поиска актуальных формализованных знаний повысит эффективность работы предприятия на 1,2%, что в социально-экономическом масштабе является достаточно большим показателем.

[15] Среднее количество работников в крупных компаниях, согласно рейтингу REAX-600

5. Техническое задание на разработку ИС «KNOW.PRO»

1. Общие сведения

1.1 Полное наименование системы и ее условное обозначение

Полное наименование системы: Автоматизированная система поиска актуальных формализованных знаний «KNOW.PRO»

Краткое наименование системы: ИС

1.2 Наименования организации-заказчика и организаций-участников работ

Заказчиком системы является: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

Адрес заказчика: 153003, Ивановская область, город Иваново, улица Рабфаковская, дом 34.

Разработчиком системы является: Коровкина Елизавета Валерьевна

Адрес разработчика: 150040, Ивановская область, город Тейково, поселок Фрунзе, дом 23.

1.3 Перечень документов, на основании которых создается система

Система создается на основании результатов научно-исследовательской работы (НИР) и задания на выпускную квалификационную работу (ВКР).

1.4 Плановые сроки начала и окончания работы по созданию системы

Начало работ: 07.06.2019

Окончание работ: 25.06.2020

2. Назначения и цели создания системы

2.1 Назначение системы

KNOW.PRO предназначена для научно-информационного обеспечения процесса инновационной деятельности, а именно:

- для предоставления множества актуальных формализованных знаний в виде публикаций в приоритетных научных журналах и информационных базах;
- для увеличения человеческого интеллектуального капитала;
- для поиска контактов для научного общения между инноваторами со схожими информационными проблемами.

2.2 Цели создания системы

Целью создания ИС является разработка методики, алгоритма и инструментария информационно-поисковой системы «KNOW.PRO». В процессе исследования системы ДИП были обнаружены следующие проблемы: существующие ИПС направлены на хранение и поиск формализованных знаний по тематикам, а не по проблемам W; также, по умолчанию, ИПС используют алгоритмы релевантного поиска, не распознающего латентные потребности пользователя; при решении инновационных задач недостаточно иметь (или получать) базовые знания по профильной тематике, генерация новой ценной информации происходит не только за счет изучения формализованных знаний, обладающих дидактичным приоритетом, но и за счет актуальных формализованных знаний; инновационный процесс - непрерывный, что вызывает цикличность представления актуальных знаний и цикличность обращения к информационной системе.

Выполнение цели выражается в следующих критериях:

- Сокращение времени на поиск ФЗ за счет автоматизации процесса знаниевого обеспечения,
- Сокращение времени на терминологический анализ ФЗ, определяющий проблемную ориентацию поиска,
- Сокращение времени нахождения на сторонних ресурсах и сокращение глубины их просмотра,

– Повышение достоверности и значимости предоставляемых ФЗ за счет поиска, учитывающего закономерности построения системы ДИП,
– Повышение актуальности источников ФЗ,
– Установление коммуникативных связей между инноватором и другими исследователями, работающими над схожей проблемой.

3. Характеристики объекта информатизации

Характеристика объекта информатизации приведена в предпроектных исследованиях.

4. Требования к системе

4.1. Требования к системе в целом

4.1.1 Требования к структуре и функционированию системы

4.1.1.1 Перечень подсистем, их назначение и основные характеристики

В ИС KNOW.PRO заложена идея перехода от поиска по тематикам (ГРНТИ) к поиску по проблемам инноватора. Для осуществления этой идеи и в соответствии с назначением системы, необходимо сначала найти научные публикации. Далее должен производиться терминологический анализ найденных научных публикаций. Уже после должна производиться обработка терминов и выделение из них ключевых слов для составления поискового образа запроса и дальнейшего поиска по нему. Таким образом, можно выделить следующие подсистемы:

Подсистема поиска научных публикаций – по заданным параметрам производит выбор информационного банка, поиск научного журнала и публикаций в нем. Параметрами должны служить: год издания, импакт-фактор по ядру РИНЦ, доступность публикаций в журнале, язык журнала, ключевые слова, описывающие содержание публикации. Результатом функционирования системы является множество научных публикаций.

Подсистема выбора ключевых слов – предназначена для определения приоритетных терминов для поиска посредством моделирования знаний человека об объекте изучения и оценки этой модели. Результатом функционирования системы является множество ключевых слов для поиска.

4.1.1.2. Требования к способам и средствам связи для информационного обмена между компонентами системы

Информационный обмен между подсистемами должен происходить по следующему сценарию: от подсистемы поиска научных публикаций должны поступать 3 научные публикации в подсистему выбора ключевых слов, от подсистемы выбора ключевых слов должно поступать множество ключевых слов в подсистему поиска научных публикаций. Формат передачи ключевых слов – массив [Ключевое понятие$_i$]. Взаимодействие необходимо реализовать на основе протокола TCP/IP с использованием прикладного протокола HTTP.

4.1.1.3. Требования к характеристикам взаимосвязей создаваемой системы с информационной базой и смежной системой

Информационной базой является система elibrary.ru – информационный обмен необходимо реализовать на основе протокола TCP/IP, в частности – с использованием прикладного протокола HTTP методами GET, POST запросов. KNOWPRO должна обращаться на определенные URL-адрес для запроса. Системе elibrary.ru должны передаваться следующие данные: код рубрикатора (ГРНТИ), параметры поиска (описаны в решениях по математическому обеспечению). Смежной системой для информационной базы и, следовательно, и для «KNOW.PRO» является система РИНЦ. Взаимодействие происходит через GET-запросы.

Результатом взаимодействия служат 3 публикации, преобразованные с помощью php-класса pdftotext в формат txt.

Система должна соответствовать следующим нормативным документам:

– ГОСТ Р ИСО 7498-99 «Информационная технология. Взаимосвязь открытых систем»
– ГОСТ Р ИСО/МЭК 16680-2015 «Информационные технологии. Модель завершенности интеграции сервисов консорциума Open Group (OSIMM)»

4.1.1.4. Требования к режимам функционирования системы

Система должна поддерживать следующие режимы функционирования:

- *Основной режим*, в котором KNOWPRO выполняет все свои основные функции.

Здесь в части надежности система функционирует в режиме непрерывного длительного применения (п. 3.3.3 ГОСТ 27.003-90). Также система должна обеспечивать свое бесперебойное функционирование в режиме 365/7/24. Что касается части ресурсов - штатный режим - степень загруженности составляет 20-40 % от полной производительности сервера. Выполняемые функции: обработка данных, составление запроса на сторонние сервисы (elibrary.ru), загрузка данных.

Для обеспечения основного режима функционирования системы необходимо выполнять требования и выдерживать условия эксплуатации программного обеспечения и комплекса технических средств системы, указанные в соответствующих технических документах (техническая документация, инструкции по эксплуатации и т.д.).

- *Техническое обслуживание*, в этом режиме происходит модернизация аппаратно-программного комплекса, устранение аварийных ситуаций.

Техническое обслуживание должно проводиться один раз в шесть месяцев. Поводами для технического обслуживания служат: модернизация смежной ИС и изменение правил доступа к хранилищу знаний elibrary.ru. В случае перехода системы в режим технического обслуживания необходимо перед этим произвести резервное копирование действующей версии системы на съемный носитель, выключить сервер, на котором располагается ИС. Под аварийными ситуациями подразумевается отказ одного или нескольких компонентов программного и(или) технического обеспечения. Для устранения аварийных ситуаций необходимо выполнить комплекс мероприятий по устранению причин их возникновения (все мероприятия по уходу за программно-техническим обеспечением прописаны в должностных инструкциях у системного администратора).

4.1.2. Требования к численности и квалификации персонала системы

4.1.2.1. Требования к численности персонала

Количество пользователей неограниченно. На этапе тестирования система будет применена к 120 пользователям, которые являются студентами кафедры ИТ.

Администрировать систему должен системный администратор предприятия, на котором будет развернута система.

4.1.2.2. Требования к квалификации персонала, порядку его подготовки и контроля знаний и навыков

Пользователи KNOWPRO должны иметь пользовательский уровень владения ПК. Дополнительная подготовка и контроль знаний и навыков не требуется. Перед работой с системой им необходимо ознакомиться с руководством пользователя.

Системный администратор должен обладать знаниями и навыками, указанными в его должностной инструкции, и действовать в соответствии с ней. Подтверждать свою квалификацию администратору необходимо раз в два года. Независимая оценка квалификации должна проводиться в форме профессионального экзамена центром оценки квалификаций согласно ФЗ «О независимой оценке квалификации».

4.1.3. Требования к безопасности

Используя руководящий документ ФСТЭК РОССИИ. «Автоматизированные системы. Защита от несанкционированного доступа к информации", а также исходя из требований к разрабатываемой системы ее класс – 1Д. Требования к классу защищенности:

- Подсистема управления доступом: должна осуществляться идентификация и проверка подлинности субъектов доступа при входе в систему по паролю условно-постоянного действия длиной не менее шести буквенно-цифровых символов.
- Подсистема регистрации и учета: должна осуществляться регистрация входа (выхода) субъектов доступа в систему (из системы), либо регистрация загрузки и инициализации операционной системы и ее программного останова. Регистрация выхода из системы или останова не проводится в моменты аппаратурного отключения АС. В параметрах регистрации указываются: - дата и время входа (выхода) субъекта доступа в систему (из системы) или загрузки (останова) системы; - результат попытки входа: успешная или неуспешная - несанкционированная; - идентификатор (код или фамилия) субъекта, предъявленный при попытке доступа; - должен проводиться учет всех защищаемых носителей информации с помощью их маркировки и с занесением учетных данных журнала (учетную карточку); - учет защищаемых носителей должен проводиться в журнале (картотеке) с регистрацией их выдачи (приема).
- Подсистема обеспечения целостности: должна быть обеспечена целостность программных средств СЗИ НСД, обрабатываемой информации, а также неизменность программной среды. 15 При этом: - целостность СЗИ НСД проверяется при загрузке системы по контрольным суммам компонент СЗИ; - целостность программной среды обеспечивается использованием трансляторов с языков высокого уровня и отсутствием средств модификации объектного кода программ в процессе обработки и (или) хранения защищаемой информации; - должна осуществляться физическая охрана СВТ (устройств и носителей информации), предусматривающая контроль доступа в помещения АС посторонних лиц, наличие надежных препятствий для несанкционированного проникновения в помещения АС и хранилище носителей информации, особенно в нерабочее время; - должно проводиться периодическое тестирование функций СЗИ НСД при изменении программной среды и персонала АС с помощью тест - программ, имитирующих попытки НСД; - должны быть в наличии средства восстановления СЗИ НСД, предусматривающие ведение двух копий программных средств СЗИ НСД и их периодическое обновление и контроль работоспособности.

4.1.4. Требования к эргономике и технической эстетике

Система должна иметь человеко-машинный интерфейс, удовлетворяющий следующим требованиям:

1. Взаимодействие системы и пользователя должно осуществляться на русском языке, за исключением системных сообщений, не подлежащих русификации;

2. При работе с интерфейсом пользователь должен быть ориентирован на работу с клавиатурой и координатным устройством для управления курсором и отдачи различных команд компьютеру;

3. Должно быть реализовано отображение на экране только тех возможностей, которые доступны конкретному пользователю в соответствии с его функциональной ролью в системе;

4. Представление управляющих элементов, экранных форм и их информационных элементов (окон, панелей и т.п.) должно быть унифицировано.

Эргономичность пользовательского интерфейса должна соответствовать следующим стандартам в полном объеме:

1. ГОСТ Р ИСО/МЭК 12119-2000 - требование к практичности, понятность, обозримость, удобство использования;

2. ГОСТ Р ИСО/МЭК 9126-93 - практичность, понятность, обучаемость, простота использования.

4.1.5. Требования к защите информации от несанкционированного доступа

Для обеспечения защиты информации система должна соответствовать техническим требованиям согласно ГОСТ Р 50739-95 - "Средства вычислительной техники. Защита от несанкционированного доступа к информации. Общие технические требования".

4.1.6. Требования по сохранности информации при авариях

Под аварийными ситуациями подразумевается отказ одного или нескольких компонентов программного и(или) технического обеспечения. Для устранения аварийных ситуаций необходимо выполнить комплекс мероприятий по устранению причин их возникновения (все мероприятия по уходу за программно-техническим обеспечением КИТ прописаны в должностных инструкциях у системного администратора). В случае аварии необходимо перед этим произвести резервное копирование действующей версии системы на съемный носитель, выключить сервер, на котором располагается ИС.

4.1.7. Требования к защите от влияния внешних воздействий

Помещение, в котором будет установлено техническое обеспечение для системы, должно соответствовать требованиям по пожарной безопасности, изложенным в ГОСТ 12.1.004-91 - "Система стандартов безопасности труда. Пожарная безопасность. Общие требования"

4.1.8. Требования к патентной частоте

Все программные и технические обеспечения должны быть патентными чистыми, лицензионным по отношению к территории Российской Федерации.

Разработчиком системы является Коровкина Елизавета, правообладателем и собственником – Заказчик.

Разработка должна пройти сертификацию в России.

4.1.9. Требования по стандартизации и унификации

Разработка системы должна осуществляться с использованием нотаций функционального моделирования: IDEF0, DFD в рамках рекомендаций по стандартизации Р50.1.028-2001 «Информационные технологии поддержки жизненного цикла продукции. Методология функционального моделирования». Моделирование должно выполняться в рамках стандартов, поддерживаемых программными средствами моделирования ERWin 4.x и BPWin 4.x. В системе должен использоваться государственный рубрикатор научно-технической информации (ГРНТИ) и единые классификаторы и словари для различных видов алфавитно-цифровой и текстовой информации.

4.2. Требования к задачам

Подсистема поиска научных публикаций – по заданным параметрам производит выбор информационного банка, поиск научного журнала и публикаций в нем. Параметрами должны служить: год издания, импакт-фактор по ядру РИНЦ, доступность публикаций в журнале, язык журнала, ключевые слова, описывающие содержание публикации. Результатом функционирования системы является множество научных публикаций.

Подсистема выбора ключевых слов – предназначена для определения приоритетных терминов для поиска. Результатом функционирования системы является множество ключевых слов для поиска.

4.3. Требования к видам обеспечения

4.3.1. Требования к математическому обеспечению системы

Математические методы и алгоритмы, используемые для шифрования/дешифрования данных, а также программное обеспечение, реализующее их, должны быть сертифицированы уполномоченными организациями для использования на территории Российской Федерации. Все типовые решения, используемые в ИС, должны иметь открытый исходный код. Методики выделения ключевых слов и поиска ФЗ описаны в соответствующих пунктах.

4.3.2. Требования информационному обеспечению системы

4.3.2.1. Требования к составу, структуре и способам организации данных

Структура данных должна состоять из следующих основных областей: область временного хранения данных, область постоянного хранения данных.

В первую область относятся: научные публикации (их библиографическое описание по ГОСТ Р 7.0.100–2018 + ссылка на источник), ключевые слова и их оценки, во вторую – рубрикатор. Способ организации данных – массивы.

4.3.2.2. Требования к информационному обмену между компонентами системы.

Подсистема выбора ключевых слов должна передавать ключевые слова подсистеме поиска научных публикаций в следующей структуре: массив [Ключевое понятие$_i$].

4.3.2.3. Требования к информационной совместимости со смежными компонентами

Кодировка рубрик в KNOW.PRO должна соответствовать кодировке elibrary.ru. Информационный обмен необходимо реализовать на основе протокола TCP/IP, в частности – с использованием прикладного протокола HTTP методами GET, POST запросов. KNOW.PRO должна обращаться на определенные в п. 1.5. URL-адрес для запроса.

4.3.2.4. Требования по применению систем управления базами данных

Разработка хранилища данных не требуется.

4.3.2.5. Требования к структуре процесса сбора, обработки, передачи данных в системе и представлению данных

Представление данных должно соответствовать требованию, указанному в требованиях к задаче. Остальные требования должны будут быть уточнены на этапе техно-рабочего проектирования.

4.3.2.6. Требования к контролю, хранению, обновлению и восстановлению данных

Требования к хранению и контролю не предъявляются.

В случае добавления в ГРНТИ новых рубрик требуется обновить соответствующие данные в системе. Производить обновление может только системный администратор согласно руководству администратора системы.

В случае аварийных ситуаций (п. «Требования по сохранности информации при авариях») и после их устранения требуется со съемного носителя осуществить перенос и настройку последней сохранённой копии системы.

4.3.3. Требования к лингвистическому обеспечению системы

Для реализации KNOWPRO должен использоваться высокоуровневый язык программирования PHP7.1 и языки разметки HTML5, CSS3, для реализации интерфейсной части взаимодействия с системой elibrary.ru – программный интерфейс DOM. Взаимодействие с пользователем должно происходить на русском языке.

4.3.4. Требования к программному обеспечению системы

Перечень готовых типовых решений: php-класс для перевода текста из формата pdf в формат txt; библиотека для лемматизации терминов, хранилище знаний (информационная база) электронной библиотеки elibrary.ru.

В качестве методологии проектирования используется методология структурного анализа и проектирования SADT. В рамках данных методологий основными инструментальными средствами являются AllFusion Process Modeler (Bpwin), AllFusion Data Modeler (ERwin) (IDEF1X), а также Case-средство MS Visio.

С учетом требований к лингвистическому обеспечению перечень браузеров, на которых могут работать пользователи с их минимальными версиями: Google Chrome 16.0, Mozilla Firefox 9.0, Opera 11.60, Microsoft IE 9.

Для защиты необходимо пользоваться уже установленной на сервер программой-антивируса – Kaspersky Security Center 10. Для администрирования системы на сервере должен быть Notepad++ 7.5.6.

Таблица 5.4.5.1. Программное обеспечение сервера кафедры ИТ

Наименование ПО и версия	Назначение ПО	Тип лицензии	Разработчик ПО
Windows Server 2008 R2 Standart SP1 x64	Операционная система		Microsoft

7-Zip 18.05	Архиватор	Бесплатная	https://www.7-zip.org
Microsoft SQL Server 200810.51.2500.0 (2008, 2008R2)	Система управления реляционными базами данных		Microsoft
OpenServer	Портативная серверная платформа и программная среда для веб-разработки	Бесплатная	Фирма «Open Server»
Агент администрирования KasperskySecurityCenter 10	Антивирусная программа	Коммерческая	АО «Лаборатория Касперского»
WinPower	Программный пакет для управления работой источника бесперебойного питания.	Бесплатная	Фирма «IPPON»
Google Chrome 72.0.3626.121	Программа-браузер	Бесплатная	Google Inc.
Notepad++ 7.5.6.	Свободный текстовый редактор с открытым исходным кодом	Бесплатная	Notepad++ Contributions
VLC media player2.1.5	Свободный кроссплатформ.медиапроигрывательтель.	Бесплатная	VideoLAN
WinDjView 2.1	Программа для просмотра файлов в формате DJV и DjVu.	Бесплатная	https://windjview.sourceforge.io
1С:Предприятие 8.1.11 (Сервер)	ПО для автоматизации деятельности на предприятии.	Коммерческая	Фирма «1С»
Team Viewer 14.2.2558	Пакет программного обеспечения для удалённого контроля компьютеров, обмена файлами, видеосвязи и веб-конференций.	Бесплатная	TeamViewer GmbH
The Bat! 8.6.0	Программа для работы с электронной почтой.	Коммерческая	Фирма «Ritlabs»
HASP License Manager	Утилита для управления аппаратными лицензиями «1С».		Фирма «Aladdin»
Microsoft Visual Studio 2010	Среда разработкиотMicrosoft для программирования на разных языках.	Бесплатная	Microsoft

Все требования не противоречат требованиям к техническому обеспечению.

4.3.5. Требования к техническому обеспечению

Техническое обеспечение системы должно максимально и наиболее эффективным образом использовать существующие технические средства на кафедре ИТ.

В ЛВС кафедры используется сервер «Kitserver». Установленная операционная система: Windows Server 2008 R2 Standart. IP-адрес сервера: 10.2.9.56. К электрической сети сервер подключён через источник бесперебойного питания.

Основные функции сервера Kitserver: DNS-сервер, доменные службы Active Directory, веб-сервер, файловый сервер. DNS-сервер является службой доменных имён, доменные службы Active Directory хранят данные о пользователях и устройствах сети, веб-сервер на платформе OpenServerPanel использует компоненты Apache, PHP, MySQL, файловый сервер хранит файлы студентов и сотрудников кафедры, а также все информационные ресурсы кафедры. Под резервное копирование отведён внешний жёсткий диск ёмкостью 2 ТБ.

Таблица 5.4.3.6.1. Характеристики сервера:

Состав	Характеристики	Описание
Системный блок	Тип ЦП	Intel Core i7 3770, 3700 MHz
	Системная плата	Asus P8Z77-V LX
	Чипсет	Intel Panther Point Z77, Intel Ivy Bridge
	Разъёмы платы	2 x PCI Express 2.0 x16, 2 x PCI Express x1, 3 x PCI, 4 x DDR3 DIMM
	Основная память	8192 МБ DDR3-1600 SDRAM
	Видеоадаптер	Intel(R) HD Graphics 4000 (Интегрированный)
	Звуковой адаптер	Realtek ALC887, 8-канальный
	Контроллер SATA	AHCI 1.0 Serial ATA
	Жёсткие диски	ST3320418AS ATA Device (320 ГБ, 7200 RPM, SATA-II) ST3808110AS ATA Device (80 ГБ, 7200 RPM, SATA-II)
	Оптический накопитель	Asus DRW-24B5ST ATA Device
	Сетевой адаптер	Realtek PCIe GBE Family Controller
Периферия	Монитор	BenQ G900 1280x1024 19’ LCD
	Клавиатура	Есть. PS/2
	Мышь	Есть. USB-2.0
	Внешние интерфейсы системного блока	1 x HDMI, 1 x DVI-D, 2 x PS/2, 1 x LAN (RJ45), 2 x USB 3.0, 4 x USB 2.0, 3 x аудиопорта

Все требования не противоречат требованиям к программному обеспечению.

4.3.6. Требования к организационному обеспечению

4.3.6.1. Требования к структуре, функциям подразделений, участвующих в функционировании системы или обеспечивающих эксплуатацию.

Пользователи могут только получать результат функционирования ИС. Системному администратору КИТ или исполняющему обязанности администратора добавляется функция администрирования системы KNOW.PRO (обеспечение функционирования системы, резервное копирование действующей версии системы, техническое обслуживание.

4.3.6.2. Требования к организации функционирования системы и порядку взаимодействия персонала ИС и персонала объекта информатизации.

Одновременно взаимодействовать с ИС может неограниченное количество пользователей. На этапе тестирования система будет применена к 2 студентам и 2 преподавателям кафедры ИТ.

Все пользователи перед взаимодействием с системой должны быть ознакомлены с руководством пользователя. Системный администратор должен действовать в соответствии со своими должностными инструкциями.

5. Состав и содержание работ по созданию (развитию) системы

По требованию заказчика разработка выполняется с применением каскадной модели жизненного цикла с технологией канонического проектирования.

Проведение работ по созданию системы должно осуществляться в соответствии с ГОСТ 34.601-90.

Работы выполняются в 3 стадии:

- Технический проект;
- Рабочая документация;
- Ввод в действие.

5.1. Перечень документов по ГОСТ 34.201-89, предъявляемых по окончании соответствующих стадий работ:

Стадия 1. Технический проект. На стадии «Технический проект» должна быть осуществлена разработка общих проектных решений по Системе и ее частям, включая следующие этапы по ГОСТ 34.601-90:

- Разработка проектных решений по системе и ее частям
- Разработка документации на ИС и ее части
- Разработка и оформление документации на поставку изделий для комплектования ИС и (или) технических требований (технических заданий) на их разработку
- Разработка заданий на проектирование в смежных частях проекта объекта автоматизации

Должны быть разработаны следующие документы по ГОСТ 34.201-89

- Пояснительная записка к техническому проекту
- Схема функциональной структуры
- Описание автоматизируемых функций
- Описание постановки задач (комплекса задач)
- Описание информационного обеспечения системы
- Описание организации информационной базы
- Схема алгоритмов (адаптировано по требованию заказчика, использовать ГОСТ 19.701-90)
- Описание программного обеспечения
- Схема организационно-технической структуры с описанием (адаптировано по требованию заказчика)

Стадия 2. Рабочая документация

На стадии «Рабочая документация» должна быть осуществлена разработка Системы согласно техническому проекту, разработанному на Стадии 1. Это включает разработку рабочей документации на систему и ее части и разработка и/или адаптация программ. Должны быть предоставлены следующие документы:

- Руководство пользователя – должно быть написано в соответствие со стандартом РД 50-34.698-90
- Программа и методика испытаний (компонентов, комплексов средств автоматизации, подсистем, систем)

Также на этой стадии в соответствии с требованиями технического проекта, выполненного Разработчиком на Стадии 1, Заказчик должен произвести заказ технических средств и системного программного обеспечения (в течении одной недели с момента начала этапа).

Стадия 3. Ввод в действие

На стадии «Ввод в действие» должны быть проведены работы по подготовке объекта информатизации к вводу Системы в действие, подготовке персонала, комплектации Системы поставляемыми изделиями (в том числе программными и техническими средствами), пусконаладочные работы, предварительные испытаний – происходит силами Заказчика.

Оформление чертежных документов на каждой стадии выполняется по ГОСТ 2.109-73.

6. Порядок контроля и приемки системы

6.1. Виды, состав и методы испытаний системы и ее составных частей

Перед испытаниями, Разработчик должен предоставить заказчику Руководство по эксплуатации в соответствии с ГОСТ 2.610-2006.

Испытания системы должны проводиться в соответствии с ГОСТ 34.603-92.

Испытания системы должны быть проведены на стадии «Ввод в действие» на основании соответствующих программ и методик испытаний, подготовленных Разработчиком и утверждаемых заказчиком на этапе рабочего проектирования.

Этап «Проведение предварительных испытаний» заканчивается оформлением акта о приемке системы в опытную эксплуатацию с приложением к нему протоколов испытаний.

Результаты работ по этапу «Опытная эксплуатация» принимаются с оформлением Акта о завершении опытной эксплуатации.

Все погрешности в программном обеспечении и эксплуатационной документации, обнаруженные при сдаче системы в опытную эксплуатацию или в процессе опытной эксплуатации, должны быть устранены разработчиком.

6.2. Общие требования к приемке работ

Сдача-приемка этапов выполненных работ на стадиях «Технический проект» и «Рабочая документация» осуществляется по предъявлении Разработчиком комплектов соответствующих документов и завершается оформлением акта сдачи-приемки научно-технической продукции, подписанного Разработчиком, и утвержденного Заказчиком.

В процессе приемки технического проекта должна быть осуществлена проверка его соответствия требованиям настоящего Технического задания.

7. Требования к составу и содержанию работ по подготовке объекта информатизации к вводу системы в действие

7.1. Приведение поступающей в систему информации к виду, пригодному для обработки

Вся информация должна быть приведена к установленному в требованиях к информационным и лингвистическим обеспечениям до начала техно-рабочего проектирования силами Заказчика.

7.2. Изменения, которые нужно осуществить в объекте информатизации

Изменения будут определены на этапе техно-рабочего проектирования.

7.3. Условия функционирования объекта информатизации

Для создания условий функционирования объекта информатизации, при которых гарантируется соответствие создаваемой Системы требованиям, содержащимся в настоящем Техническом задании, и возможность эффективного использования Системы, в организации Заказчика на этапе работ «Подготовка объекта информатизации к вводу Системы в действие» должны быть проведены следующие мероприятия: установка необходимых ПО, определенных в п. 4.3.4. и выполнение требований п.5.3.1.

По завершении этапа работ «Разработка рабочей документации» Разработчик должен предоставить Заказчику перечень документов, установленных ранее.

7.4. Создание необходимых для функционирования системы подразделений и служб

Требования не предъявляются.

8. Требования к документации

Оформление вышеперечисленного перечня документов должно быть выполнено с использованием следующих нормативных документов:

- РД 50-34.698.90
- ГОСТ 2.105-95

9. Источники разработки

1. Задание на Научно-исследовательскую работу
2. Материалы научно-исследовательской работы
3. Нотации IDEF0, DFD, IDEF3
4. ГОСТ Р ИСО/МЭК 12119-2000 «Информационная технология. Пакеты программ. Требования к качеству и тестирование»
5. ГОСТ Р ИСО/МЭК 9126-93 «Информационная технология. Оценка программной продукции. Характеристики качества и руководства по их применению»
6. ГОСТ 34.601-90 «Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Автоматизированные системы. Стадии создания»
7. ГОСТ 34.201-89 «Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Виды, комплектность и обозначение документов при создании автоматизированных систем»
8. ГОСТ 34.603-92 «Информационная технология. Виды испытаний автоматизированных систем»
9. ГОСТ 2.610-2006 «Единая система конструкторской документации. Правила выполнения эксплуатационных документов»
10. РД 50-34.698-90 «Методические указания. Информационная технология. Комплекс стандартов и руководящих документов на автоматизированные системы. Автоматизированные системы. Требования к содержанию документов»
11. ГОСТ 2.109-73 «Единая система конструкторской документации. Основные требования к чертежам»
12. ГОСТ 2.105-95 «Единая система конструкторской документации. Общие требования к текстовым документам»
13. ГОСТ 19.701-90 «Единая система программной документации (ЕСПД). Схемы алгоритмов и программ. Правила выполнения.»
14. ГОСТ Р 50739-95 - "Средства вычислительной техники. Защита от несанкционированного доступа к информации. Общие технические требования".
15. ГОСТ 12.1.004-91 - "Система стандартов безопасности труда. Пожарная безопасность. Общие требования"

6. Техно-рабочее проектирование ИС поиска актуальных знаний «KNOW.PRO»

6.1. Общесистемные решения

Разработка выполняется с применением каскадной модели жизненного цикла с технологией канонического проектирования согласно требованиям.

Система включает в себя 2 модуля:

Подсистема поиска научных публикаций – по заданным параметрам производит выбор информационного банка, поиск научного журнала и публикаций в нем. Параметрами должны служить: год издания, импакт-фактор по ядру РИНЦ, доступность публикаций в журнале, язык журнала, ключевые слова, описывающие содержание публикации. Результатом функционирования системы является множество научных публикаций.

Подсистема выбора ключевых слов – предназначена для определения приоритетных терминов для поиска. Результатом функционирования системы является множество ключевых слов для поиска.

Очередность создания системы: 1->2. Выбор обусловлен тем, что подсистемы связаны между собой передачей данных, без реализации 1 не сможет функционировать 2.

6.1.1. Основные технические решения

6.1.1.1. Решение по структуре системы, подсистем, средствам и способом связи для информационного обмена между компонентами системы, подсистем

Система включает в себя 2 подсистемы, описанные выше.

Информационный обмен между подсистемами должен происходить по следующему сценарию: от подсистемы поиска научных публикаций должны поступать 3 научные публикации в подсистему выбора ключевых слов, от подсистемы выбора ключевых слов должно поступать множество ключевых слов в подсистему поиска научных публикаций. Формат передачи ключевых слов – массив [Ключевое понятие$_i$].

Взаимодействие необходимо реализовать на основе протокола TCP/IP с использованием прикладного протокола HTTP.

Передача научных публикаций производится с помощью создания глобальной переменной, включающей в себя массив: [Название файла, Текст]

Передача ключевых слов производится с помощью создания временной переменной, включающей в себя массив: [Словоформа]

6.1.1.2. Решения по взаимосвязи ИС с ИБ и смежной системой, обеспечение ее совместимости

Информационной базой разрабатываемой ИС является система elibrary.ru – информационный обмен реализуется на основе протокола TCP/IP, в частности – с использованием прикладного протокола HTTP методом GET запросов. KNOW.PRO должна обращаться на определенные URL-адрес для запроса: querybox_name, с указанием постоянных параметров поиска: Код рубрикатора, Тип сортировки – определяет пользователь; непостоянных параметров: Номер журнала, [Ключевое слово], в зависимости от типа сортировки. Смежной системой для информационной базы и, следовательно, и для «KNOW.PRO» является система РИНЦ. Взаимодействие происходит через GET-запросы.

6.1.2. Решения по режимам функционирования, диагностированию работы системы

Определены в ТЗ:

Система должна поддерживать следующие режимы функционирования:

- Основной режим, в котором KNOWPRO выполняет все свои основные функции.

Здесь в части надежности система функционирует в режиме непрерывного длительного применения (п. 3.3.3 ГОСТ 27.003-90). Также система должна обеспечивать свое бесперебойное функционирование в режиме 365/7/24. Что касается части ресурсов - штатный режим - степень загруженности составляет 20-40 % от полной

производительности сервера. Выполняемые функции: обработка данных, составление запроса на сторонние сервисы (elibrary.ru), загрузка данных.

Для обеспечения основного режима функционирования системы необходимо выполнять требования и выдерживать условия эксплуатации программного обеспечения и комплекса технических средств системы, указанные в соответствующих технических документах (техническая документация, инструкции по эксплуатации и т.д.).

- Техническое обслуживание, в этом режиме происходит модернизация аппаратно-программного комплекса, устранение аварийных ситуаций.

Техническое обслуживание должно проводиться один раз в шесть месяцев. Поводами для технического обслуживания служат: модернизация смежной ИС и изменение правил доступа к хранилищу знаний elibrary.ru. В случае перехода системы в режим технического обслуживания необходимо перед этим произвести резервное копирование действующей версии системы на съемный носитель, выключить сервер, на котором располагается ИС. Под аварийными ситуациями подразумевается отказ одного или нескольких компонентов программного и(или) технического обеспечения. Для устранения аварийных ситуаций необходимо выполнить комплекс мероприятий по устранению причин их возникновения (все мероприятия по уходу за программно-техническим обеспечением прописаны в должностных инструкциях у системного администратора).

Дополнительно: в случае изменений прав доступа для используемой для парсинга учетной записи, требуется создать новый аккаунт и внести новые данные в ИС.

6.1.3. Состав функций, комплексов задач, реализуемых системой

Список задач и их функций:

Задача поиска научных публикаций:

F_1 – Формирование поискового запроса (через URL-адреса) и вывод результатов;

F_2 – Преобразование pdf-формата публикации в формат txt (используется типовое решение xpdf).

Задача выбора ключевых слов:

F_1 – Отбор множества словоформ (словосочетаний) из текста;

F_2 – Лемматизация;

F_2 – Выбор ключевых слов, описывающих проблему пользователя.

6.2. Описание постановки задачи поиска научных публикаций

6.2.1. Характеристика задачи

6.2.1.1. Назначение комплекса задач

По заданным параметрам производит выбор информационного банка, поиск научного журнала и публикаций в нем. Параметрами должны служить: год издания, импакт-фактор по ядру РИНЦ, доступность публикаций в журнале, язык журнала, ключевые слова.

6.2.1.2. Выходная информация

Результатом функционирования системы является множество научных публикаций.

В формате txt, если потребуется дальнейшее уточнение поискового образа документа, в формате pdf, если результаты удовлетворят пользователя.

6.2.1.3. Перечень объектов, при управлении которыми решают комплекс задач

См. п. 1.1. рис. 1.1.1.

6.2.1.4. Периодичность и продолжительность решения

Задача должна выполняться каждый раз при запросе пользователя. Поиск научных публикаций имеет циклический характер и его продолжительность определяется пользователем, когда тот достаточно уточнит свой запрос и после, за счет изучения публикаций, устранит свой дефицит знаний.

6.2.1.5. Условия, при которых прекращается решение комплекса задач автоматизированным способом

Решение задачи автоматизированным способом прекращается, если количество терминов для поиска превышает допустимый диапазон ~158 символов.

6.2.1.6. Связи данного комплекса задач с другими задачами ИС

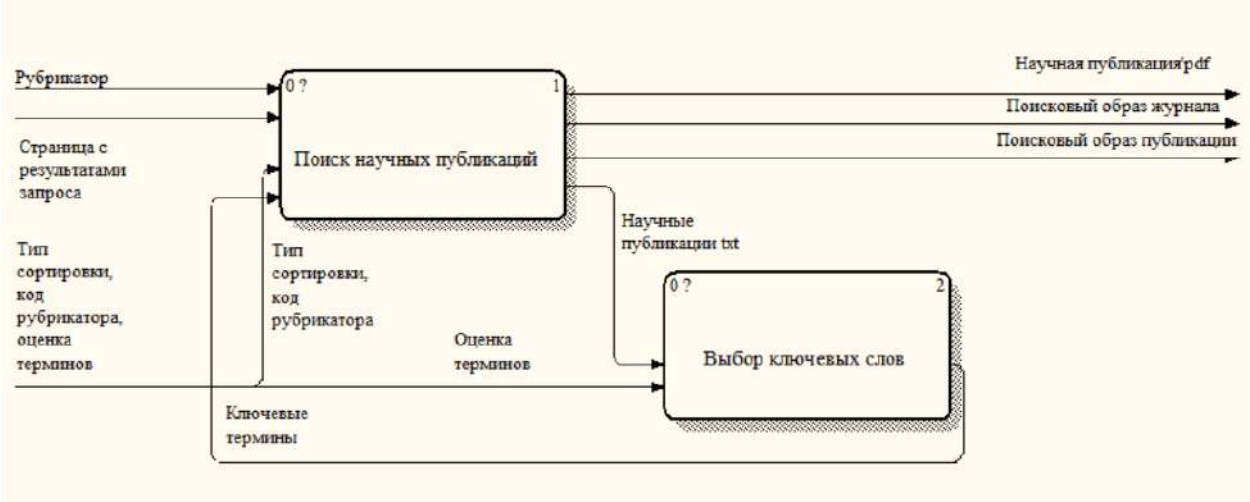


Рисунок 6.1.1.1 - Связь задачи поиска научных публикаций с задачей выбора ключевых слов

Задача поиска научных публикаций и задача выбора ключевых слов связаны между собой передачей данных: от первой ко второй – передача текста публикаций, от второй к первой – передача ключевых слов.

6.2.2. Разработка функциональной структуры задачи поиска научных публикаций

6.2.2.1. Выделение функций

Функция формирования поискового запроса, включающая в себя следующие операции: получение данных о коде рубрикатора и типу сортировки (актуальность, цитируемость), авторизация в информационном банке, отправка запроса на получение страницы с журналами, находящимися в открытом доступе с сортировкой по уменьшению импакт-фактора, парсинг ссылки на 1 журнал, отправка запроса на получение страницы с публикациями в этом журнале, согласно типу сортировки, парсинг первых 3 публикаций, преобразование их из формата pdf в формат txt.

6.2.2.1.1. Описание функции формирования поискового запроса и вывода результатов

6.2.2.1.1.1. Формализованное описание функции

6.2.2.1.1.1.1. Математическая формулировка

Пусть имеется множество информационных банков {ИБ}, которые содержат в себе множество научных изданий {И}, в которые входит множество публикаций {П}. Каждое издание имеет свой импакт-фактор I по ядру РИНЦ за последние 2 года Y-2, а каждая публикация – дату выпуска Д и значение цитируемости Ц. Пользователь выбирает данные: код рубрикатора из его множества {К}, тип сортировки С{актуальность, цитируемость}. Пока количество П не достигнет 3, необходимо посылать запросы на ИБ[i], в случае неудачи – переход на следующий ИБ[i+1]. Формирование запроса происходит следующим образом: в url-ссылке1 вставляются следующие данные: K, Y-2 – происходит получение {И} с сортировкой по убыванию I; в стандартной url-ссылке2 происходит вставка следующих данных: K, C, И[1], Y (при уточнении запроса во 2 задаче добавляется множество ключевых слов{Кл}) – происходит парсинг П[1-3] с сортировкой по убыванию Д (если выбрано С[актуальность]) или с сортировкой по убыванию Ц (С[цитируемость]) в диапазоне [Y:Y-2]. После url-запроса 3, как только количество П достигнет 3, выполнение алгоритма прекращается и все публикации преобразуются с помощью ТПР «xpdf» из формата pdf в формат txt. Если это повторный поиск, то преобрзаование не выполнять и вывести сразу 3 публикации в формате pdf.

6.2.2.1.1.1.2. Описание входных, выходных, нормативно-справочных данных

Выходные данные: Публикация[1-3], формат txt или pdf

Нормативно-справочные данные: {Ссылки на ИБ}, {url-запросы}, ГРНТИ[рубрикатор, код]

Входные данные: Код рубрикатора, тип сортировки, ключевые слова

6.2.2.1.1.1.3. Список обозначений элементов предметной области с указанием их наименований, единиц измерения, диапазона значений

ИБ – информационный банк, номинальная шкала - ссылка http

Ж – журнал, интервальная шкала – количество, диапазон [0-1]

П – публикация, интервальная шкала - количество, диапазон [0-3]

К – код рубрикатора, интервальная шкала – индекс, диапазон определяется по ГРНТИ

С – тип сортировки, номинальная шкала – значение поля, диапазон [date, cited]

$M^{w}_{кл}$ – ключевые слова, шкала наименований

6.2.2.1.1.1.4. Ограничения, определяющие допустимые варианты реализации процедуры

Количество символов {Кл} должно быть больше или равно 158, при начале реализации функции должны быть точно определены параметры К и С.

6.2.2.1.1.1.5. Критерии оптимальности для процедуры оптимизации

Алгоритм можно оптимизировать за счет хранение нормативно-справочных данных в коде системы.

6.2.2.1.1.2. Метод выполнения

Метод POST (HTTP) – используется для загрузки и представления заполненной веб-формы выбора Кода рубрикатора и Типа сортировки

Метод GET (HTTP) - набор URL-адреса в адресную строку браузера с параметрами, определяющими содержимое запроса: постоянные параметры поиска – Ссылка ИБ, Код рубрикатора, Тип сортировки – следует из метода POST; непостоянны параметры - Номер журнала, [Ключевое слово], в зависимости от типа сортировки - Год выпуска и Год расчета импакт-фактора.

URL-адреса: см. п. 1.5.

6.2.2.1.1.3. Описание алгоритма

6.2.2.1.1.3.1. Математическое описание

См. п. 1.3 и 1.4.

6.2.2.1.1.3.2. Алгоритм решения

См. Приложение 1. Алгоритм поиска формализованных знаний

6.2.2.1.1.3.3. Используемая информация

rubric_code – целочисленный тип

order_by – текстовый тип

magazine_id – целочисленный тип

data_query[id] – целочисленный тип

data_query = [Наименование, ссылка], текстовый тип, ссылочный

URL-адреса: ссылочный тип данных

6.3. Описание постановки задачи выбора ключевых слов

6.3.1. Характеристика задачи

6.3.1.1. Назначение комплекса задачи

Подсистема выбора ключевых слов – предназначена для конкретизации поискового образа документа посредством определения приоритетных терминов для поиска. Вынесение задачи отдельно обусловлено возможностью интеграции с системами TERM.PRO[1,2] после реализации системы коммуникации ADIS.

6.3.1.2. Выходная информация

Результатом функционирования системы является множество ключевых словоформ для поиска, имеющих высокую степень принадлежности к проблеме (a=>0,9): {Ключевое понятие}.

6.3.1.3. Перечень объектов, при управлении которыми решают комплекс задач

См. п. 1.1. рис. 1.1.1.

6.3.1.4. Периодичность и продолжительность решения

Задача должна выполняться каждый раз при запросе пользователя. Поиск научных публикаций, а следовательно, и задача выбора ключевых терминов, имеет циклический характер и его продолжительность определяется пользователем, когда тот достаточно уточнит свой запрос и после, за счет изучения публикаций, устранит свой дефицит знаний.

6.3.1.5. Условия, при которых прекращается решение комплекса задач автоматизированным способом

Решение задачи прекращается, если степень принадлежности к проблеме у всего множества терминов a<0,9.

6.3.1.6. Связи данного комплекса задач с другими задачами ИС

См. рисунок рис. 6.1.1.1.

6.3.2. Разработка функциональной структуры задачи выбора ключевых слов

6.3.2.1. Выделение функций

Основными функциями являются: разбиение теста на множество терминов M, осуществление лемматизации каждого элемента множества M (используется ТПР), выбор терминов типа «прилагательное + существительное» и «существительное», операция пересечения полученных множеств у каждой публикации, осуществление ранжирования терминов на принадлежность к проблеме (предоставление интерфейса для осуществления этой операции человеком), a-срез множества.

6.3.2.1.1. Описание функций терминологического анализа

6.3.2.1.1.1. Формализованное описание

6.3.2.1.1.1.1. Математическая формулировка

Пусть имеются три публикации Mv. Необходимо осуществить их терминологический анализ, т.е. разбить текст каждой публикации на множество терминов $Mv = \{m_i\}_v$. Каждый элемент множества Mv необходимо привести к нормальной форме (н.ф.), т.е. у каждого элемента должны быть определены следующие атрибуты: н.ф., часть речи, род, число, падеж. Далее необходимо рассмотреть пары терминов и найти такие пары, в которых i-ый элемент – прилагательное, i+1-ый – существительное. После нахождения таких пар, необходимо поставить прилагательное в род и число существительного и в именительный падеж. Таким образом, для каждой публикации должно получиться множество Mv с существительными и словосочетаниями. Далее необходимо найти семантическое ядро предметной области с помощью операции пересечения полученных множеств для каждой публикации. Пользователю необходимо предоставить семантическое ядро и всю периферию, упорядоченную по частоте. После того, как пользователь проранжирует понятия по уровням, необходимо сделать a-срез (a=0,9) и передать результат подсистеме поиска формализованных знаний.

6.3.2.1.1.1.2. Описание входных, выходных, нормативно-справочных данных

Выходные данные:	Ключевые слова
Нормативно-справочные данные:	Словари (ТПР, п. 3)
Входные данные:	Публикация[1-3], формат txt или pdf

6.3.2.1.1.1.3. Список обозначений элементов предметной области с указанием их наименований, единиц измерения, диапазона значений

Nv[i] – массив терминов для каждой публикации, номинальная шкала, [0-255]

N[i] – массив словосочетаний, номинальная шкала, [0-255]

N'[i] – массив существительных, номинальная шкала, [0-255]

Mv[i] – общий массив терминов из ядра и периферии для i-ой публикации, номинальная шкала, [0-255]

$M_я^w$- массив терминов из зоны ядра, номинальная шкала, [0-255]

$M_{кл}^w$- массив ключевых слов, номинальная шкала, [0-255]

6.3.2.1.1.1.4. Ограничения, определяющие допустимые варианты реализации процедуры

Функция прекращает выполняться, если у всего множества семантического ядра степени принадлежности к проблеме строго меньше 0,9.

6.3.2.1.1.2. Описание алгоритма

6.3.2.1.1.2.1. Математическое описание

См. п. 1.3 и 1.4.

6.3.2.1.1.2.2. Алгоритм решения

См. Приложение 2. Алгоритм терминологического анализа

6.3.2.1.1.2.3. Используемая информация

Все текстовый тип данных.

6.4. Разработка функциональной структуры (DFD)

В ходе разработки общесистемных и математических решений в каждой задаче было выделено множество функций. Некоторые из них (преобразование в формат *.txt и лемматизация) осуществлены с использованием типовых проектных решений (п.3.), остальные разработаны с использованием метода декомпозиции, парадигмы структурного программирования и с использованием технологии парсинга веб-страниц.

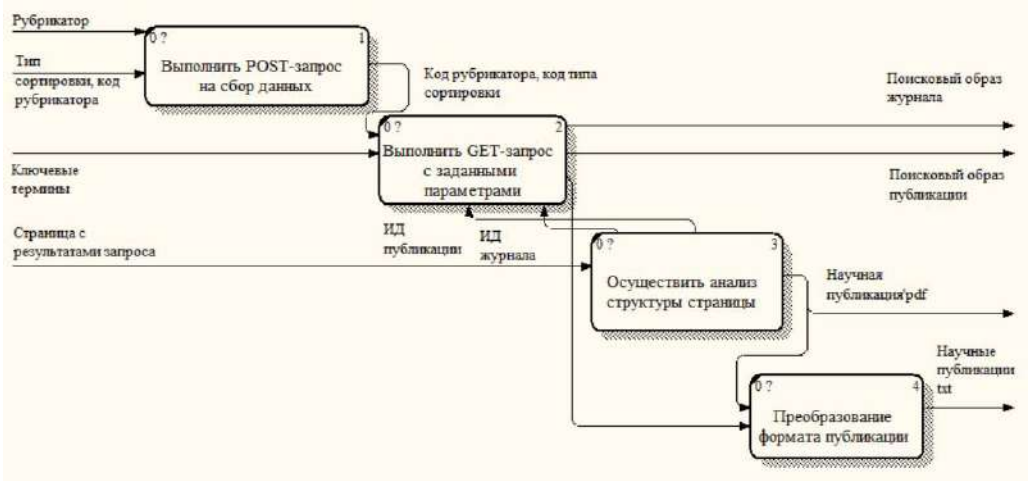


Рисунок 6.1.1.4.1 - Функциональная структура задачи поиска формализованных знаний



Рисунок 6.1.1.4.2 - Функциональная структура задачи выбора ключевых слов

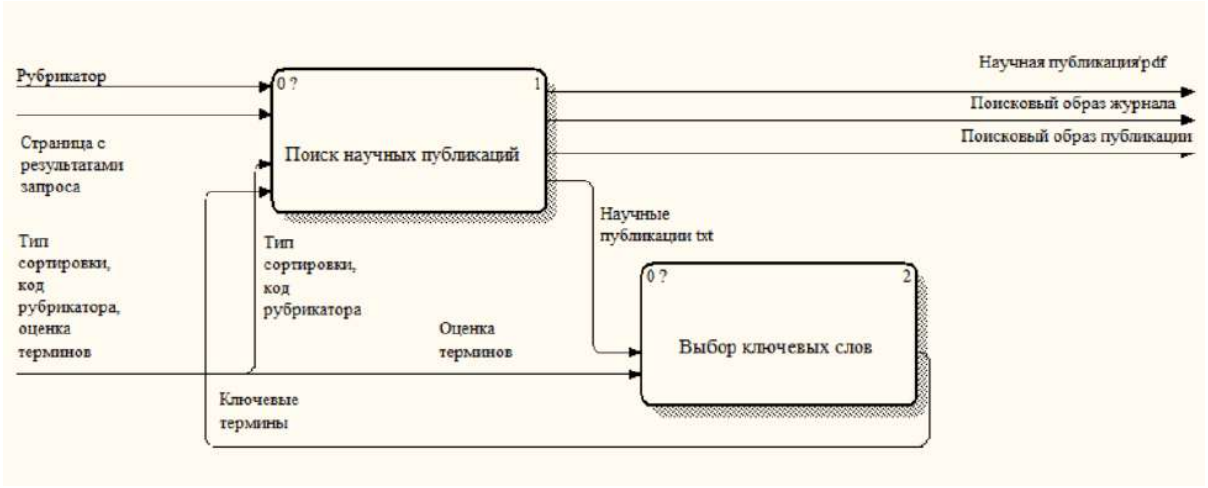


Рисунок 6.1.1.4.3 - Функциональная взаимосвязь задач

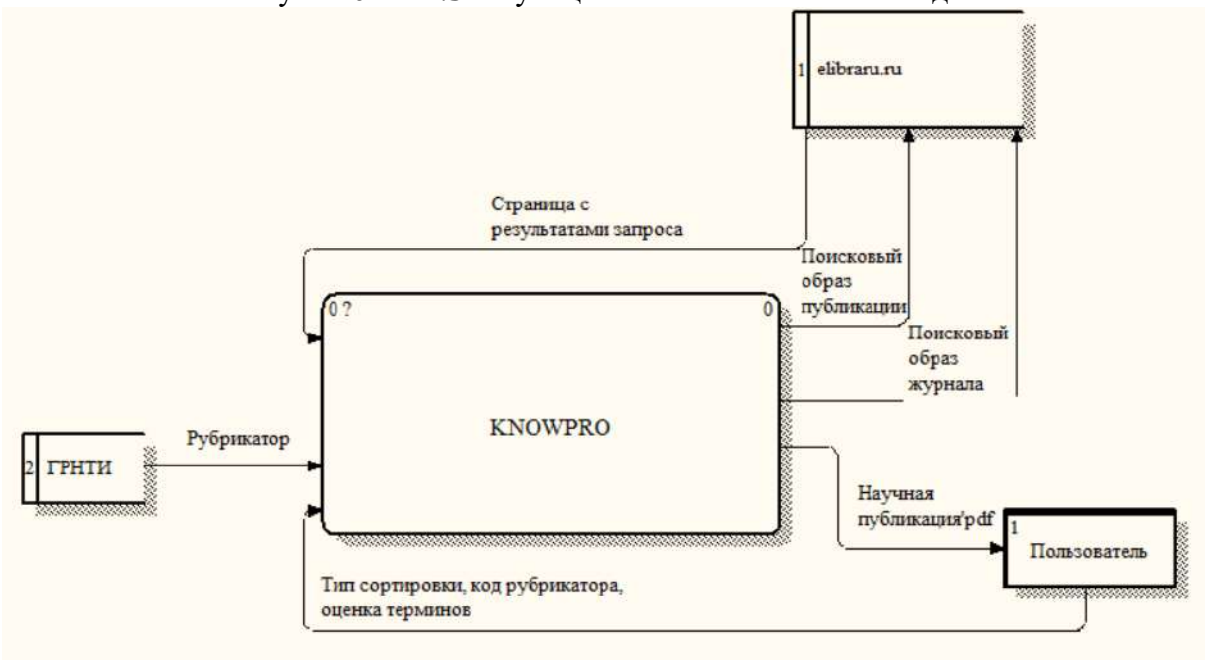


Рисунок 6.1.1.4.4 – Взаимосвязь системы с внешними

6.2. Решения по информационному обеспечению

6.2.1. Перечень входных документов и данных

Перечень входных данных, согласно моделям DFD, следующий:

Таблица 6.2.1.1. Перечень входных данных

Входные данные	**Функция**	**Тип данных**	**Источник данных**
Подсистема поиска научных публикаций			
IB (Информационный банк)	F1 – Формирование поискового запроса и вывод результатов	Ссылочный тип	Исходный код
rubric_code (Рубрикатор)		Целочисленный тип	ГРНТИ (норм-справ.), Пользователь (конкретный id)
order_by (Тип сортировки)		Текстовый тип	Elibrary.ru (норм-справ.), Пользователь (конкретный id)
magazine_id (ID журнала)		Целочисленный тип	Elibrary.ru

Keywords (Ключевые слова)		Текстовый тип	Результат подсистемы выбора ключевых слов
data_query[id] (ID публикации)	F2 – Преобразование pdf-формата публикации в формат txt (используется типовое решение xpdf), F1 – Формирование поискового запроса и вывод результатов	Целочисленный тип	Elibrary.ru
URL-адрес	F1 – Формирование поискового запроса F2 – Преобразование pdf-формата публикации в формат txt (используется типовое решение xpdf)	Ссылочный тип данных	Исходный код
Подсистема выбора ключевых слов			
data_query = [ID, текст] (Перечень публикаций)	F1 – Отбор множества словоформ из текста	Целочисленный тип, текстовый тип	Результат F2 подсистемы поиска научных публикаций
Combinations (Словоформы или словосочетания)	F2 - Выбор ключевых слов, описывающих проблему пользователя	Целочисленный тип	Результат F1
Value (степень значимости)	F2 - Выбор ключевых слов, описывающих проблему пользователя	Числовой тип	Пользователь

На данном этапе мы определили перечень источников данных для выполнения каждой функции и их тип. Чтобы избежать ошибки при взаимодействии с ИБ, предлагается сразу использовать схожие названия переменных.

6.2.2. Перечень выходных документов и данных

6.2.2.1. Форма представления сообщения и требования к ней

Таблица 6.2.2.1.1. Выходные данные

Выходная информация	Требования к представлению	Форма представления входной информации
Combinations (Словоформы или словосочетания)	Все данные должны быть на русском языке. Пользователя необходимо ознакомить с правилами заполнения всех полей. Напротив словосочетаний пользователю необходимо проставлять степень принадлежности словоформы к проблеме. После заполнения всех данных должна происходить обработка проверка этих данных на вхождение в диапазон [0;1]	Ознакомление с правилами – в текстовом блоке. Словоформы и поле для ввода степени принадлежности – таблица после текстового блока, где 1 столбец – словоформы, 2 – поле для ввода.

publications_result = [Наименование, ссылка] (Конечный перечень публикаций)	Необходимо при предоставлении сохранять информацию об авторских правах издателя и ссылаться на источник, откуда бралось произведение	Результат предоставляется в виде маркированного списка со ссылкой на источник.

Таким образом, мы определили требования к представлению информации и выбрали типовые UI-элементы, достаточные для выполнения поставленных задач.

6.2.2.2. Периодичность выдачи

Словоформы выдаются каждый раз при обращении пользователя к системе -> после 1 шага цикла работы ИС (точнее после 2 запроса). Повторно они также могут выдаваться при продолжении работы пользователя в системе – 2 шага цикла. Возьмем тестовое значение: 1 раз за 1 шаг цикла программы.

Конечный перечень публикация, как и словоформы, выдается каждый раз при обращении пользователя к системе -> после 2 шага цикла работ (точнее 2 запроса) – тестовое значение: 1 раз после 2 шага цикла.

6.2.2.3. Сроки выдачи и допустимое время задержки решения

Т.к. сервер хранилища расположен на стороне системы elibrary.ru, то повлиять на время выполнения запросов нельзя. Время задержки решения от 30 до 300с.

6.2.3. Получатели и назначение выходной информации

Получателями выходной информации являются обучающиеся, инноваторы. Выходная информация обеспечит инноваторов или обучающихся в какой-либо предметной области актуальными научно-значимыми формализованными знаниями и повысит эффективности инновационной деятельности.

6.2.4. Описание информационного обеспечения системы

6.2.4.1. Организация сбора и передачи информации

6.2.4.1.1. Построение системы классификации и кодирования

Таблица 6.2.4.1. Кодирование и классификации рубрикатора (от elibrary.ru)

500000 Автоматика. Вычислительная техника	130000 Культура. Культурология	150000 Психология
410000 Астрономия	640000 Легкая промышленность	210000 Религия. Атеизм
340000 Биология	660000 Лесная и деревообрабатывающая промышленность	690000 Рыбное хозяйство. Аквакультура
620000 Биотехнология	170000 Литература. Литературоведение. Устное народное творчество	490000 Связь
720000 Внешняя торговля	190000 Массовая коммуникация. Журналистика. Средства массовой информации	680000 Сельское и лесное хозяйство
710000 Внутренняя торговля. Туристско-экскурсионное обслуживание	270000 Математика	040000 Социология
700000 Водное хозяйство	550000 Машиностроение	840000 Стандартизация
780000 Военное дело	760000 Медицина и здравоохранение	830000 Статистика
390000 География	530000 Металлургия	670000 Строительство. Архитектура

360000 Геодезия. Картография	900000 Метрология	730000 Транспорт
380000 Геология	300000 Механика	290000 Физика
370000 Геофизика	140000 Народное образование. Педагогика	770000 Физическая культура и спорт
520000 Горное дело	120000 Науковедение	020000 Философия
100000 Государство и право. Юридические науки	000000 Общественные науки в целом	610000 Химическая технология. Химическая промышленность
050000 Демография	430000 Общие и комплексные проблемы естественных и точных наук	310000 Химия
750000 Жилищно-коммунальное хозяйство. Домоводство. Бытовое обслуживание	810000 Общие и комплексные проблемы технических и прикладных наук и отраслей народного хозяйства	060000 Экономика. Экономические науки
200000 Информатика	820000 Организация и управление	470000 Электроника. Радиотехника
180000 Искусство. Искусствоведение	870000 Охрана окружающей среды. Экология человека	450000 Электротехника
030000 История. Исторические науки	860000 Охрана труда	440000 Энергетика
280000 Кибернетика	850000 Патентное дело. Изобретательство. Рационализаторство	580000 Ядерная техника
230000 Комплексное изучение отдельных стран и регионов	650000 Пищевая промышленность	160000 Языкознание
260000 Комплексные проблемы общественных наук	600000 Полиграфия. Репрография. Фотокинотехника	590000 Приборостроение
890000 Космические исследования	110000 Политика. Политические науки	800000 Прочие отрасли экономики

Кодирование Типа сортировки:

date – Осуществить поиск по актуальности

cited – Осуществить поиск по показателю цитируемости

6.2.4.2. Организация внутримашинной информационной базы

По требованию заказчика хранилище данных не требуется (этим занимается смежная разрабатываемая система). Разработчик смежной системы требований к структуре данных не предъявлял.

6.2.4.3. Организация внемашинной информационной базы

Не предусмотрено.

6.3. Решения по программному обеспечению

Разработка структуры программного обеспечения

Модули разрабатываемой системы:

(1) Подсистема поиска научных публикаций

(2) Подсистема выбора ключевых слов

Связанность модулей:

Связность - внутренняя характеристика модуля. Чем выше связность модуля, тем лучше результат проектирования, т.е. тем «чернее» его ящик (капсула, защитная оболочка модуля), тем меньше «ручек управления» на нем находится и тем проще эти «ручки».

(1) Имеет последовательную связанность (СС = 9).

(2) Имеет последовательную связанность (СС = 9).

Модули выполняют независимые функции, но совместно реализует единственную функцию.

Сцепление модулей:

Сцепление - внешняя характеристика модуля, которую желательно уменьшать.

(1) И (2) - сцепление по данным (СЦ=1).

Таким образом, при разработке модулей информационной системы достигаются максимально лучшие показатели сцепления и связанности, какие возможны для функционирования всей ИС.

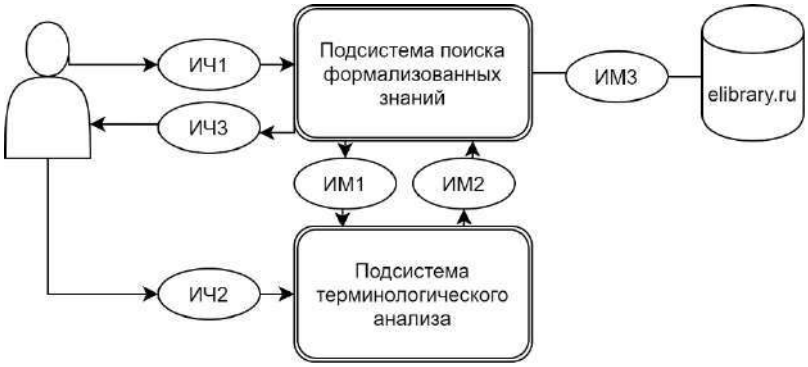


Рисунок 6.1.3.1 - Программная структура

Вся система построена на процедурно-ориентированном типе интерфейсов (главный акцент на задачи). На множестве выделенных функциональных подсистем необходимо определить передающиеся данные и интерфейсы:

- ИЧ1 – интерфейс типа UI (User Interface), выбор параметров поиска: чекбокс для выбора типа сортировки, выпадающий список для выбора рубрикатора.
- ИЧ2 – интерфейс типа UI, для оценки терминов из ядра – таблица, для выбора терминов из периферии – чекбокс.
- ИЧ3 – интерфейс типа UI, маркированный список со ссылками на публикации.
- ИМ1 – интерфейс типа API, передача массива публикаций.
- ИМ2 – интерфейс типа API, передача ключевых терминов.
- ИМ3 – т.к. нет возможности пользоваться API elibrary.ru взаимодействие с системой происходит следующим образом: elibrary.ru имеет клиент-серверную архитектуру, разрабатываемая ИС является «клиентом» для электронной библиотеки, только свои запросы ИС посылает не через UI (как обычный пользователь), а через запросы, образованные методом GET посредством url-библиотеки взаимодействия с протоколами HTTPS, т.е. ИС изменяет параметры URL-адресов, получает структуру страницы (DOM) (т.к. elibrary.ru не позволяет делать запросы методом POST) и выбирает нужные данные.

6.3.1. Разработка функций частей программного обеспечения

Для реализации KNOWPRO должен использоваться высокоуровневый язык программирования PHP7.1 и языки разметки HTML5, CSS3, для реализации интерфейсной части взаимодействия с системой elibrary.ru – программный интерфейс DOM. Следовательно, будет разрабатываться веб-приложение.

Функции, необходимые для реализации математических решений:

1. Функция (parser), в которой происходит формирование массива data_query = [ID, текст] (Перечень публикаций) или publications_result = [Наименование, ссылка]

Включает в себя:

- установка сеанса с elibrary.ru через curl_setopt;

- загрузка HTML-разметки страниц elibrary.ru: для этого в php (7.1+) есть функция loadHTML, функция вызывается статически для загрузки и создания объекта класса DOMDocument, методами getElementsByTagName, getAttribute получение данных с разметки;

- Проверка условия (if-else) Типа сортировки и исходя из этого отправка запроса через curl_setopt;

- Цикл парсинга научных публикаций (while i<3): парсинг html-разметки, преобразование pdf в txt вызовом библиотеки pdfotext.

2. Функция (termpro), в которой происходит выбор ключевых понятий, формируется массив Combinations (словоформы)

Включает в себя:

- Цикл работы с текстом (while i<3): подключение Php-класса, лемматизация с помощью функции phpMorphy всех слов;

- Цикл для каждых слов: проверка слова через mb_strlen >= 3

- Отбор словоформ: проверка условия (if-else): существительное стоит рядом с прилагательным -> функцией strpos получаем род существительного и с помощью метода getAllFormsWithGramInfo ставим прилагательное в такой же род именительного падежа.

- Функцией array_merge_recursiv объединяем элементы массива.

6.3.2. Выбор методов и средств разработки программного обеспечения

Используется метод систематического программирования, а именно метод структурного программирования, «сверху вниз».

Структурное программирование основано на модульной структуре программного продукта и типовых управляющих структурах алгоритмов обработки данных различных программных модулей.

В качестве методологии проектирования используется методология структурного анализа и проектирования SADT. В рамках данных методологий основными инструментальными средствами являются AllFusion Process Modeler (Bpwin), AllFusion Data Modeler (ERwin) (IDEF1X), а также Case-средство MS Visio или draw.io.

Средства реализации программного кода (общедоступные): отладка ПС – OpenServer, написание кода - Visual Studio Code

6.3.3. Разработка решения по общесистемному программному обеспечению

По требованию из ТЗ: с учетом требований к лингвистическому обеспечению перечень браузеров, на которых могут работать пользователи с их минимальными версиями: Google Chrome 16.0, Mozilla Firefox 9.0, Opera 11.60, Microsoft IE 9.

Таблица 6.3.3.1 Обеспечение рабочих станций кафедры ИТ

Наименование ПО и версия	Назначение ПО	Тип лицензии
Windows 7 Professional x64	Операционная система	Коммерческая
Kaspersky Endpoint Security 11.0.0.6499 AES56	Программа-антивирус.	Коммерческая
Adobe Reader X 10.1.0	Пакет программ для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.	Бесплатная
Google Chrome 49.0.2623.87	Браузер.	Бесплатная
Notepad++6.7	Свободный текстовый редактор с открытым исходным кодом	Бесплатная

Таблица 6.3.3.2. Прикладное ПО для разработки ИС

Наименование ПО и версия	Назначение ПО	Тип лицензии
Erwin Data Modeler r9.5	Средство моделирования и проектирования	Условно-бесплатная свободного использования
Microsoft Visual Studio 2010	Среда разработки от Microsoft для программирования на разных языках.	Бесплатная

См. табл.6.3.3.3. Системной ПО KITSERVER

6.4. Решения по организационному обеспечению

6.3.1. Разработка решений по совершенствованию орг. Структуры

6.3.1.1. Проектные решения по изменению организационной структуры управления объектов и их обоснование

Количество пользователей неограниченно. ИС предназначена для использования инноваторами. Пользователи KNOW.PRO должны иметь пользовательский уровень владения ПК. Дополнительная подготовка и контроль знаний и навыков не требуется. Перед работой с системой им необходимо ознакомиться с руководством пользователя.

Системный администратор должен обладать знаниями и навыками, указанными в его должностной инструкции, и действовать в соответствии с ней. Подтверждать свою квалификацию администратору необходимо раз в два года. Независимая оценка квалификации должна проводиться в форме профессионального экзамена центром оценки квалификаций согласно ФЗ «О независимой оценке квалификации».

Соответственно, на предприятии должен иметься системный администратор, который бы следил за работоспособностью ИС.

В рамках вуза будем рассматривать инноваторов в роли обучающихся и преподавателей. Предположим, что внедрение ИС будет происходить на кафедре ИТ, тогда администрировать систему должен системный администратор кафедры ИТ.

На КИТ имеется заведующий лабораторией (Николай Владимирович Рудаков), инженер (Антон Локов), несколько стажеров (1 курс специальности «Прикладная информатика»). Таким образом, согласно профстандартам их должностей, они полным образом обеспечивают работоспособность ЛВС. Администрирование системы KNOWPRO не отразится на их рабочем времени и ставках.

Одними из функций ППС являются обучение, консультирование студентов и оценка их интеллектуального капитала, написание научных и учебных работ, на что преподаватели тратят большую часть своего рабочего времени. Норма учебной (преподавательской) работы 720 часов в год за ставку заработной платы установлена преподавателям организаций, осуществляющих деятельность по образовательным программам среднего профессионального образования и основным программам профессионального обучения.

После разработки системы произойдет замещение функции консультирования студентов по пробелам в знаниях в определенной предметной области, замещение функции поиска (подсистема поиска) и проверки работ из внешней среды, на которые ссылаются методические пособия, на научную-значимость и актуальность (подсистема Анализ результатов поиска). Также возможно сокращение временных затрат на написание методических пособий посредством поиска пособий, соответствующих потребностям студентов.

Таблица 6.3.3.3. Системное ПО KITSERVER

Название ПО и версия	Назначение ПО	Тип лицензии	Источник лицензии	Владелец лицензии	Срок действия лицензии
Windows Server 2008 R2 Standart SP1 x64	Операционная система.	Коммерческая	Microsoft	ИГЭУ	
Open Server	Портативная серверная платформа и программная среда.	Бесплатная			
7-Zip 18.05	Файловый архиватор с высокой степенью сжатия данных.	Свободная			Не ограничен
Microsoft SQL Server 200810.51.2500.0 (2008, 2008R2, 2012)	Система управления реляционными базами данных				
Агент администрирования Kaspersky Security Center 10	Агент программы-антивируса	Коммерческая	АО «Лаборатория Касперского»	ИГЭУ	
WinPower	Программный пакет для управления работой источника бесперебойного питания.	Свободная			Не ограничен
Google Chrome 72.0.3626.121	Программа-браузер.	Бесплатная	Google Inc.		Не ограничен
Notepad++ 7.5.6	Свободный текстовый редактор с открытым исходным кодом.	Свободная	Notepad++ Contributors		Не ограничен

Таким образом, разрабатываемая система позволит преподавателям сократиться свои временные затраты на консультирование студентов и написание методических пособий, что может вывести их на новый организационный уровень.

6.3.1.2. Описание изменений во взаимосвязях между подразделениями

Возможны следующие изменения во взаимосвязях (не только между подразделениями): продукт функционирования системы KNOWPRO – научная публикация, которая имеет библиографического описание (по ГОСТ Р 7.0.100 – 2018). После того, как пользователь системы изучит содержание публикации, он может установить научную связь с ее автором. Это может привести к созданию научного сообщества, решающего определенную инновационную проблему.

6.3.2. Построение организационной структуры

6.3.2.1. Описание организационной структуры и функций подразделений, создаваемых с целью обеспечения функционирования ИС

Для обеспечения функционирования ИС необходимо только поддержание работоспособности ЛВС с доступом в интернет и организация инновационной деятельности. Создавать отдельные подразделения с целью обеспечения функционирования ИС не требуется.

6.4. Решения по техническому обеспечению

6.4.1. Разработка организационно-технической структуры

6.4.1.1. Упрощенное изображение объекта или его части, для которой составлена схема

Для реализации системы будет использована трех уровневая архитектура «Клиент-сервер». Выбор обусловлен тем, что количество пользователей в системе не ограничено и доступ к функционалу системы должен быть с любого компьютера в любое время. Разновидность архитектуры – тонкий клиент, где большая часть задач по обработке информации перенесена на сервер.

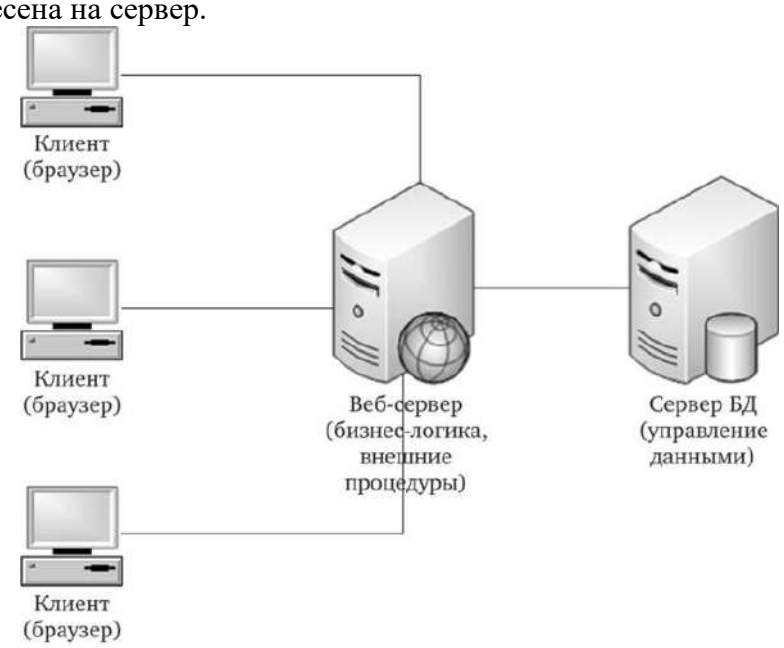


Рисунок 6.5.1.1. - Архитектура ИС

Технические средства обработки данных, программное обеспечение и организация БД в совокупности определяют информационно-технологическую архитектуру ИС (ИТА). В каждой аудитории имеются ПК, которые посылают запросы на централизованный сервер КИТ – сервер приложений. Клиенты «общаются» с сервером через веб-интерфейс взаимодействия. Сервер обрабатывает запросы пользователей и посылает запросы на

доступ к серверу БД. В данной задаче сервером БД выступает сервер системы elibrary.ru, где обрабатываются соответствующие запросы на получение данных к БД.

6.4.1.2. Средства технического обеспечения, участвующие в процессе, отображенном на схеме

Клиент — это интерфейсный компонент комплекса, предоставляемый конечному пользователю. На этот уровень выносится только простейшая бизнес-логика: проверка вводимых значений на допустимость и соответствие формату, несложные операции с данными (сортировка, группировка, подсчёт значений). Клиентами являются типовые ПК кафедры ИТ (1).

Сервер приложений располагается на втором уровне, на нём сосредоточена большая часть бизнес-логики. Вне его остаются только фрагменты, экспортируемые на клиента (терминалы), а также элементы логики, погруженные в базу данных (хранимые процедуры и триггеры). Все функции будут выполняться на сервере приложений. Здесь сервером приложений является сервер КИТ – KITSERVER (2).

Сервер баз данных (слой данных) обеспечивает хранение данных и выносится на отдельный уровень, реализуется, как правило, средствами систем управления базами данных, подключение к этому компоненту обеспечивается только с уровня сервера приложений. В рамках рассматриваемой задачи построение БД не требуется, т.к. все данные хранятся на серверах смежных систем. Нам необходимо только изъятие этих данных посредством запросов. Все данные хранятся на сервере БД системы elibrary.ru (3).

Клиенты посылают запросы на централизованный сервер через кабель (4), распределение запросов происходит на коммутаторах и маршрутизаторах (5). Если на этапе тестирования возможно еще развернуть ИС на локальной сети кафедры, то для взаимодействия с сервером БД необходимо иметь маршрутизатор, который обеспечивает доступ к Интернету (6).

6.4.1.3. Функциональные связи между средствами технического обеспечения

(1) – получение данных от пользователя, отправка запроса к серверу приложений, вывод результатов запроса;
(2) – обработка запросов клиентов, формирование запросов к серверу БД, получение данных от сервера БД, отправка данных клиенту;
(3) – обработка данных запроса и вывод данных из БД;
(4) – обеспечение передачи данных;
(5) – организация ЛВС КИТ, распределение потоков данных.
(6) – обеспечение доступа в Интернет (к серверу БД)

6.4.1.4. Внешние функциональные связи средств технического обеспечения с другими техническими средствами

6.4.1.5. Основание выбора структуры КТС

Техническое обеспечение системы максимально и наиболее эффективным образом использовать существующие технические средства на кафедре ИТ – по требованию из ТЗ. Топология локальной вычислительной сети – звезда с древовидными элементами.

6.4.2. Описание КТС

6.4.2.1. Средства вычислительной техники

Для ПК, на которых работают пользователи системы и на сервере кафедры, необходимы сетевые адаптеры, с помощью которых будет осуществляться доступ в Интернет.

Для работы с системой пользователю необходима следующая периферия: монитор, клавиатура, мышь.

Таблица 6.5.2.1.1. Характеристики типовых ПС:

Состав	Характеристики	Описание
Системный блок	Тип ЦП	DualCore AMD Athlon II X2 240, 2800 MHz
	Системная плата	Gigabyte GA-MA78LMT-US2H

	Чипсет	AMD 760G, AMD K10
	Разъёмы платы	PCIx1
	Основная память	160 ГБ (DDR3-1333 DDR3 SDRAM)
	Видеоадаптер	ATI Radeon 3000 Graphics (256 МБ)
	Звуковой адаптер	ATI Radeon IGP HDMI @ AMD RS780/RS880 Chipset - High Definition Audio Controller, Realtek ALC892 @ ATI SB700 - High Definition Audio Controller PCI
	Контроллер IDE	Стандартный двухканальный контроллер
	Жёсткий диск	SAMSUNG HD160JJ ATA Device (160 ГБ, 7200 RPM, SATA-II)
	Оптический накопитель	ASUS DRW-24B3ST ATA Device
	Сетевой адаптер	Realtek RTL8168D/8111D Family PCI-E Gigabit Ethernet NIC
Периферия	Монитор	Samsung SyncMaster E2220NW 1680x1050 22" LCD
	Клавиатура	Есть. USB-2.0 либо PS/2
	Мышь	Есть. USB-2.0 либо PS/2

Таблица 6.5.2.1.2. Характеристики сервера KITSERVER:

Состав	Характеристики	Описание
Системный блок	Тип компьютера	ACPI x64-based PC
	ОС	Microsoft WinServer 2008 R2 Standart
	Тип ЦП	QuadCore Intel Core i7-3770, 3700 MHz
	Системная плата	Asus P8277-VLX
	Системная память (ОЗУ, ПЗУ)	8ГБ, 380ГБ.
	Чипсет системной платы	Intel Panther Point Z77, Intel Ivy Bridge
	Видеоадаптер	VGA (262080 КБ)
	Сетевой адаптер	Realtek PCLe GBE Family Controller

Характеристики технических средств удовлетворяют требования для решения задачи.

6.4.3. Аппаратура передачи данных

Необходимо обеспечить быструю и надежную организацию сети, потоковую передачу данных, скорость передачи данных должна быть до 200 Мбит\с в режиме полного дуплекса, высокую плотность портов и SFP-порты, большое количество портов Fast Ethernet.

Решение от заказчика: D-Link DES моделей 1005d и 1228ME, 3420.

6.4.4. Схема организационно-технической структуры

См. Приложение 3. Схема организационно-технической структуры

Пользователи взаимодействуют с системой через ПС в аудитории Б319, Б501. IP-адреса указаны на схеме, ПО и ТО указаны в соответствующих пунктах.

Коммутаторы и маршрутизаторы:

D-Link 1288ME - Управляемый коммутатор 2 уровня с 24 портами 10/100Base-TX, 2 портами 100/1000Base-X SFP и 2 комбо-портами 100/1000Base-T/SFP

D-Link DES-1016D - Коммутатор с 16 портами 10/100Base-TX

D-link 1024D - Коммутатор с 24 портами 10/100Base-TX

D-Link DES-1005D - Коммутатор с 5 портами 10/100Base-TX

6.5. Информационная безопасность

Все информационные объекты $\{O_i\}$, используемые и защищаемые в информационной системе, необходимо классифицировать по профилю использования.

В рассматриваемой ИС «KNOW.PRO» можно выделить 2 профиля информационных объектов: производственный и управленческий. Для каждого профиля укажем перечень принадлежащих ему объектов, средства и место их хранения, обработки и передачи.

Таблица 6.6.1 – Аудит информационных объектов

Объект	**Профиль**	**Вид данных**	**Средство хранения, обработки и передачи**	**Место**
1	Производственная информация	Программный код	Файл в папке «KNOWPRO»	Сервер
2		Терминологическое множество	JSON	Сервер
3		Сайт	Папка «KNOWPRO»	Сервер
4		Формализованные знания	JSON	Веб-сервер
5	Управленческая информация	Рубрикатор	Файл в папке «KNOWPRO»	Сервер
6		Ключевые слова	JSON	Сервер

Необходимо предъявить требования конфиденциальности, целостности, доступности выделенным информационным объектам и определить возможный ущерб от нарушения требований в результате реализации угроз информационной безопасности.

Для каждого информационного объекта O_i требуется оценить уровень возможного ущерба S_i от реализации воздействующих на него угроз. Такая оценка определяется путем суммирования требований к обеспечению свойств конфиденциальности K_i, доступности A_i, целостности C_i, умноженных на весовые коэффициенты:

$$S_i = K_i * w^K + A_i * w^A + C_i * w^C$$

Оценка требуемых категорий свойств K_i, A_i, C_i определяется с использованием ранговой шкалы:

Для категории «Конфиденциальность»

2 – «Высокая»: к данной категории относится информация, являющаяся конфиденциальной в соответствии с требованиями действующего законодательства РФ, или информация, ограничение на распространение которой вводятся решением руководства предприятия в соответствии с принятой политикой информационной безопасности;

1 – «Средняя»: к данной категории относится информация, не отнесенная к категории «Высокая», но ознакомление с которой посторонних лиц может нанести определенный ущерб (информация для служебного пользования);

0 – «Низкая/нет требований» - к данной категории относится информация, обеспечение конфиденциальности (введение ограничений на распространение) которой не требуется.

Для категории «Целостность»:

2 – «Высокая»: к данной категории относится информация, несанкционированная модификация (искажение, уничтожение) или фальсификация которой может привести к нанесению значительного прямого ущерба, целостность и аутентичность (подтверждение подлинности источника) которой должна обеспечиваться гарантированными методами (например, средствами электронной цифровой подписи) в соответствии с обязательными требованиями действующего законодательства;

1 – «Средняя»: к данной категории относится информация, несанкционированная модификация, удаление или фальсификация которой может привести к нанесению незначительного ущерба, целостность (а при необходимости и аутентичность) которой должна обеспечиваться в соответствии с решением руководства;

0 – «Низкая/нет требований»: к данной категории относится информация, к обеспечению целостности (и аутентичности) которой требований не предъявляется.

Для категории «Доступность»:

2 – «Высокая»: доступ к информации должен осуществляться без существенных временных задержек в режиме online;

1 – «Средняя»: доступ к информации может обеспечиваться с существенными временными задержками, не препятствующими её использованию;

0 – «Низкая»: временные задержки при доступе к информации практически не лимитированы (доступ осуществляется редко с периодом в несколько недель или месяцев).

Весовые коэффициенты для каждой категории установим экспертным путем.

Таблица 6.6.2 – Категорирование информационных объектов

Объект	**Конфиденциальность**	**Целостность**	**Доступность**	**Итоговая категория**
Вес	2	2	1,5	
1	1	2	0	6
2	0	1	2	5
3	0	2	1	5,5
4	0	1	1	3,5
5	0	2	1	5,5
6	0	2	1	5,5

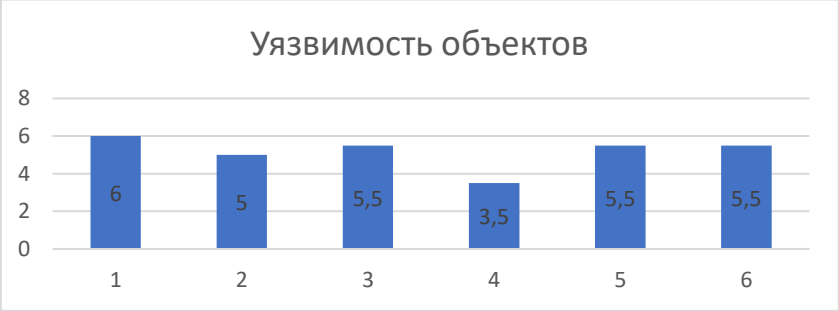


Диаграмма 6.6.1 - Итоговая категория

Таким образом, самым уязвимым является объект O_1 – программный код.

Произведем анализ рисков. Риски R_i угроз Y_i нанесения ущерба информационным объектам O_i можно определить по формуле:

$$R_i = P_i \cdot \sum_j P_{ij} \cdot S_j,$$

где P_i – вероятность реализации угрозы Y_i информационной безопасности (на основе отчетов компании InfoWatch), P_{ij} – вероятность уязвимости объекта O_j угрозой Y_i, S_j – ущерб объекта O_j от реализации угроз информационной безопасности

Определим перечень информационных угроз, которые могут сформироваться и негативно воздействовать на информационные объекты: Y_1 – Угрозы от внутренних нарушителей, действующих в нарушение своих полномочий, Y_2 – Сбой работы каналов связи, Y_3 – Сбой работы сервера, Y_4 – Нарушение авторских, изобретательских прав (относительно защиты интеллектуальной собственности разработчика ИС и защиты интеллектуальной собственности авторов формализованных знаний).

Таблица 6.6.3 – Анализ рисков угроз до

Угроза	Вероятность угрозы, P_i	Объект воздействия, O_i	Вероятность уязвимости объекта, P_{ij}	Уровень ущерба, S_j	Оценка риска, R_i
Y_1	0,3	O_1	1	6	5,1
		O_3	1	5,5	
		O_5	1	5,5	
Y_2	0,4	O_1	1	6	5,5
		O_2	1	5	
		O_3	0,5	5,5	
Y_3	0,5	O_1	1	6	13,75
		O_2	1	5	
		O_3	1	5,5	
		O_5	1	5,5	
		O_6	1	5,5	
Y_4	0,3	O_1	0,8	6	3,6
		O_3	0,8	5,5	
		O_4	0,8	3,5	

Ранжируем угрозы по степени риска R_i: Y_3, Y_2, Y_1, Y_4. Особое внимание требуется уделить защите сервера. Суммарный риск: $R_{ДО} = 27{,}95$

Для снижения рисков необходимо выбрать определенные методы и средства защиты. Перечень методов защиты[16]:

- Препятствие – создание на пути угрозы преграды, преодоление которой сопряжено с возникновением сложностей для злоумышленника или дестабилизирующего фактора.
- Управление – оказание управляющих воздействий на элементы защищаемой системы.
- Маскировка – действия над защищаемой системой или информацией, приводящие к такому их преобразованию, которое делает их недоступными для злоумышленника.
- Регламентация – разработка и реализация комплекса мероприятий, создающих такие условия обработки информации, которые существенно затрудняют реализацию атак злоумышленника или воздействия других дестабилизирующих факторов.
- Принуждение – метод заключается в создании условий, при которых пользователи и персонал вынуждены соблюдать условия обработки информации под угрозой ответственности (материальной, уголовной, административной)
- Побуждение – метод заключается в создании условий, при которых пользователи и персонал соблюдают условия обработки информации по морально-этическим и психологическим соображениям.

Таблица 6.6.4 – Выбранные методы, средства защиты и их реализация

Метод	Средство	Реализация
Препятствие	Аппаратно-программные	Межсайтовая проверка запроса Антивирусное ПО Google ReCAPTCHA
	Инженерно-технические	Система сигнализации Пожарно-охранная система Физическое ограничение доступа к серверу Источник бесперебойного питания для сервера
Управление	Организационные	Система контроля доступа в помещение

[16] https://searchinform.ru/informatsionnaya-bezopasnost/zaschita-informatsii/sposoby-zaschity-informatsii/

		Разрешение и создание условий работы в пределах установленного регламента
	Законодательные	Регистрация обращений к защищаемому ресурсу elibrary.ru
	Аппаратно-программные	Разграничение прав доступа пользователей в локальной сети
Регламентация	Программные	Резервное копирование системы Межсетевое экранирование
	Организационные	Контроль соблюдения должностной инструкции системным администратором Создание регламента работы с приложением Создание руководства пользователя
	Законодательные	Соблюдение законов РФ в области информационной защиты и защиты интеллектуальной собственности
Принуждение	Законодательные	Соблюдение патентной чистоты

Для совокупности угроз и каждой угрозы по отдельности выделим и раскроем реализацию средств, направленных на предотвращение.

Для $\{Y_i\}$ – всех угроз:

1. Соблюдение законов РФ в области информационной защиты

Правовую основу информационной безопасности обеспечивают: Конституция Российской Федерации, Гражданский и Уголовный Кодекс, Федеральные законы "О безопасности" (№ 15-ФЗ от 07.03.2005), "О Государственной тайне" (№ 122-ФЗ от 22.08.2004), "Об информации, информатизации и защите информации" (№ 149-ФЗ от 27.07.2006), "Об участии в международном информационном обмене" (№ 85-ФЗ от 04.07.1996), "О техническом регулировании" (№ 45-ФЗ от 09.05.2005), Доктрина информационной безопасности, Указы Президента и другие нормативные правовые акты Российской Федерации.

2. Система сигнализации – уже реализовано на КИТ.

3. Пожарно-охранная система - уже реализовано на КИТ. Установлены точечные и объёмные датчики охранной сигнализации, реагирующих на возникновение дыма и затуманенности за счёт включения предупреждающей сирены

4. Контроль соблюдения должностной инструкции системным администратором

При вступлении на должность системного администратора (или заведующего лабораторией) сотрудника необходимо ознакомить с должностной инструкцией и с регламентом работы на кафедре. Контроль за сотрудником осуществляется зав. кафедрой на основе наблюдений и ознакомления с отчетами о деятельности системного администратора за 1 семестр.

5. Физическое ограничение доступа к серверу

Сервер КИТ расположен в отдельной аудитории (Б-503), помещение с ним защищено сигнализацией и дверью с ключом, доступ к которому только у сотрудников кафедры.

6. Система контроля доступа

Согласно положению о совершенствовании пропускного режима и введению в действие карт-идентификаторов личности для реализации системы контроля и управления доступом (СКУД) на объектах ИГЭУ, с 01.02.2015 доступ в ИГЭУ осуществляется при предъявлении электронного пропуска или студенческого билета.

7. Создание регламента работы с приложением

Для Y_1 – угрозы от внутренних нарушителей, действующих в нарушение своих полномочий:

1. Разрешение и создание условий работы в пределах установленного регламента

Министерство науки и высшего образования формирует образовательные стандарты, на основе которых составляются учебные планы с расписанием занятий студентов – потенциальных инноваторов. Также к вузу предъявляются определенные требования, касательно организации учебного процесса, технического обеспечения вуза. Таким образом, создаются условия работы.

2. Создание руководства пользователя и администратора

См. п. 6.7 «Руководство пользователя»

Для Y_2 – Сбой работы каналов связи:

1. Межсайтовая проверка запроса

CSRF (англ. Cross Site Request Forgery — «межсайтовая подделка запроса») – вид атак, использующий недостатки протокола HTTP.

Типичный способ защиты сайтов – это «секретный ключ», специальное значение, которое генерируется случайным образом и сохраняется в сессии посетителя. Его знает только сервер. Затем на основе ключа генерируется «токен». Токен генерируется так, чтобы с одной стороны он был отличен от ключа, в частности, может быть много токенов для одного ключа, с другой – чтобы было легко проверить по токену, сгенерирован ли он на основе данного ключа или нет. Для каждого токена нужно дополнительное случайное значение, которое называют «соль». Токен формируется по открытому стандарту «JSON Web Token» (JWT), основанный на формате JSON. Токены создаются сервером, подписываются секретным ключом и передаются клиенту, который в дальнейшем использует данный токен для подтверждения своей личности. Токен JWT состоит из трех частей: заголовок (header), полезная нагрузка (payload) и подпись или данные шифрования. Первые два элемента — это JSON объекты определенной структуры. Третий элемент вычисляется на основании первых и зависит от выбранного алгоритма (в случае использования не подписанного JWT может быть опущен). Токены могут быть перекодированы в компактное представление – к заголовку и полезной нагрузке применяется алгоритм кодирования Base64-URL, после чего добавляется подпись и все три элемента разделяются точками.

2. Google ReCAPTCHA

Для предотвращения DDOS-атак для проверки пользователей на ботов необходимо использовать интернет-технологию Google ReCAPTCHA— автоматизированный публичный тест Тьюринга, который появляется при каждом новом обращении к веб-приложению. Для начала работы с reCAPTCHA API необходимо получить ключ от Google и создать приложение для работы. Ссылка для создания ключа - https://www.google.com/recaptcha/admin/create.

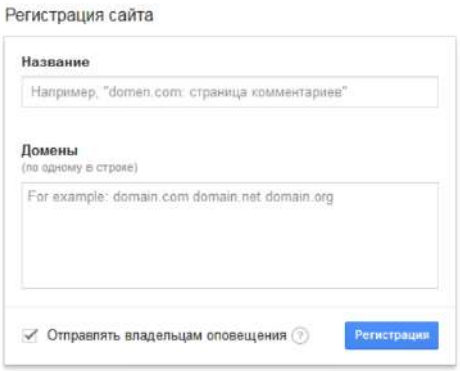


Рисунок 6.6.2. - Регистрация веб-приложения для работы

После добавления сайта выдается два ключа: публичный ключ – нужен для отображения блока reCAPTCHA на странице с формой, секретный – для соединения с серверами Google и проверке правильности отправки reCAPTCHA. Секретный ключ должен хранится только на сервере и не должен быть доступен пользователям.

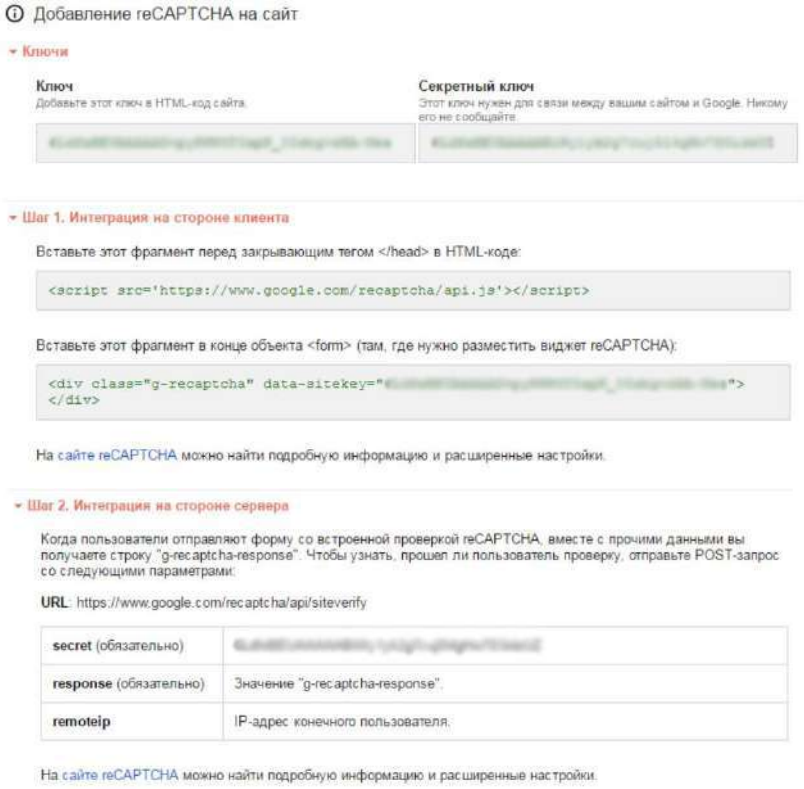


Рисунок 6.6.3. - Настройка reCAPTCHA

Для Y_3 – Сбой работы сервера:

1. Межсетевое экранирование

Функции экранирования выполняет межсетевой экран или брандмауэр (firewall), под которым понимают программную или программно-аппаратную систему, которая выполняет контроль информационных потоков, поступающих в информационную систему и/или выходящих из нее, и обеспечивает защиту информационной системы посредством фильтрации информации. Фильтрация информации состоит в анализе информации по совокупности критериев и принятии решения о ее приеме и/или передаче. На КИТ на сервере KITSERVER Windows Server 2008 R2 Standart SP1 x64 по умолчанию установлен брандмауэр Microsoft Defender.

2. Антивирусное ПО

Т.к. по требованию из ТЗ разработка системы должна осуществляться на уже имеющихся на кафедре ПО и ТО, используемый антивирус «Kaspersky Small Office Security 10».

3. Разграничение прав доступа пользователей в локальной сети

Логика проверки паролей проводится только на сервере, не авторизованным пользователям доступ к управлению системой запрещен. На Windows Server установлен компонент Active Directory, в котором определены пользователи, группы пользователей и на папки в сети установлены права доступа в соответствии с этими группами. ПС располагается на сервере, пользователь могут обращаться к ПС через браузер, доступ к которому есть у каждой группы пользователя.

Таблица 6.6.5. Разграничение прав доступа

Пользователи	**Информационные ресурсы**					
	Папка Bufer		Папка Users		Папка Кафедра	Папка SysAdmins
	Папка Teacher	Папка Student	Личные папки преподавателей и сотрудников	Папки групп		
Администраторы сети	Ч, З	Ч, З	Ч, З	Ч, З	Ч, З	Ч, З
Преподаватели и сотрудники кафедры)	Ч, З	Ч, З	Ч, З	Ч, З	Ч, З	Нет доступа
Группы студентов (gr145, gr148, … , gr145m, gr245m)	Нет доступа	Ч, З	Нет доступа	Ч, З	Нет доступа	Нет доступа

4. Резервное копирование

Целью резервного копирования является предотвращение потери информации при сбоях оборудования, программного обеспечения и других аварийных ситуациях. Резервное копирование всего сервера производится ежедневно в 00:00 на внешний жёсткий диск ёмкостью 2 ТБ.

5. Использование источника бесперебойного питания

Модель источника - Ippon SmartPowerPro 2000. Используемый программный пакет для управления работой источника бесперебойного питания WinPower. В случае возникновения помех сервер остается включенным в течение 3 минут, затем, если электропитание не возобновляется, происходит плавное выключение.

Для Y_4 – Нарушение авторских, изобретательских прав:

1. Законы РФ в области защиты интеллектуальной собственности

Основным законом, регулирующем правоотношения в области интеллектуальной собственности, является Гражданский кодекс Российской Федерации часть четвертая "Интеллектуальные права и средства индивидуализации". Этот закон регулирует одновременно институт авторских прав смежных прав, систему коллективного управления авторскими и смежными правами, патентное право, обозначения, другие виды интеллектуальных прав, устанавливает условия регистрации интеллектуальной собственности, а также средства защиты прав.

2. Соблюдение патентной чистоты

Необходимо защитить интеллектуальную собственность разработчиков, оформив патент на разработанную программу ЭВМ. В ходе подачи заявки выяснилось, что в настоящий момент в вузе имеются финансовые ограничения, регистрация патента переносится на сентябрь.

3. Регистрация обращений к защищаемому ресурсу elibrary.ru

Хранилище данных имеет свои правила пользования ресурсом: электронные версии книг и журналов, программы и базы данных, а также средства индивидуализации, в том числе коммерческие обозначения, фирменные наименования, торговые марки, товарные знаки и знаки обслуживания, размещенные на сетевом ресурсе НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА, являются Интеллектуальной Собственностью, которая признается и охраняется законодательством Российской Федерации и международными договорами. Право осуществлять и разрешать использование Интеллектуальной Собственности принадлежит владельцам исключительных прав на эти объекты.

Материалы, размещенные на сетевом ресурсе НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА, допускается использовать, копировать, цитировать исключительно в информационных, научных, учебных или культурных целях с соблюдением

соответствующих положений действующего законодательства с обязательным указанием имени автора и/или правообладателя, а также источника заимствования. На копиях материалов, заимствованных на сетевом ресурсе НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА, должен быть сохранен знак авторского права ©, зарегистрированных товарных знаков ®, которые запрещается удалять.

Ввиду этого при выдаче конечного результата – формализованных знаний – необходимо оставлять ссылку на определенную статью на информационном ресурсе elibrary.ru.

Таблица 6.6.6 – Анализ рисков угроз после

Угроза	**Вероятность угрозы, P_i**	**Объект воздействия, O_i**	**Вероятность уязвимости объекта, P_{ij}**	**Уровень ущерба, S_j**	**Оценка риска, R_i**
Y_1	0,3	O_1	0,2	6	1,02
		O_3	0,2	5,5	
		O_5	0,2	5,5	
Y_2	0,4	O_1	0,2	6	1,12
		O_2	0,1	5	
		O_3	0,2	5,5	
Y_3	0,5	O_1	0,4	6	5,5
		O_2	0,4	5	
		O_3	0,4	5,5	
		O_5	0,4	5,5	
		O_6	0,4	5,5	
Y_4	0,3	O_1	0,1	6	0,555
		O_3	0,1	5,5	
		O_4	0,2	3,5	

Суммарный риск: $R_{\text{после}} = 8{,}195$

Разработанный комплекс мер способствует защите информации. Только в совокупности разработанные меры способны в полной мере осуществить защиту информации, снизить риск возникновения угроз с 27,95 до 8,195.

6.6. Руководство пользователя

1. Введение

1.1 Область применения

Научно-информационная поддержка принятия инновационных решений.

1.2 Краткое описание возможностей

Программный инструментарий системы поиска актуальных формализованных знаний «KNOW.PRO» предназначен для обеспечения научно-информационной поддержки процесса генерации инновационных решений, обеспечения доступа к множеству научно-значимых, актуальных публикаций в приоритетных изданиях и информационных банках; осуществляет поддержку процесса создания инноваций в любой сфере деятельности за счет проблемно-ориентированного подхода к поиску формализованных знаний.

Программа может выполнять следующие функции:

- Парсинг актуальных, научных публикаций из приоритетных изданий и информационных баз по заданной тематике или проблеме,
- Терминологический анализ публикаций с выделением терминов, входящих в семантическое ядро, которое описывает содержание предметной области, и периферии, которая определяет проблемную ориентацию поиска,
- Обработка результатов ранжирования терминов из семантического ядра и выбора терминов из периферии инноватором,

- Предоставление инноватору актуальных научных публикаций по проблеме.

1.3 Уровень подготовки пользователя

Для успешного освоения системы KNOW.PRO необходимо:

– Иметь навыки работы с персональным компьютером или портативным устройством, на котором осуществляется работа с системой.
– Уметь пользоваться современными версиями браузеров Google Chrome или Mozilla Firefox и иметь навыки работы с веб-приложениями.
– Иметь обширные знания о предметной области, в которой осуществляется деятельность

2. Назначение и условия применения

2.1 Виды деятельности, функции, для автоматизации которых предназначено данное средство информатизации

Система KNOW.PRO предназначена для информационного обеспечения процесса инновационной деятельности, а именно:

• для предоставления множества актуальных формализованных знаний в виде публикаций по исследуемой проблеме в приоритетных научных журналах, информационных базах,

• для поиска контактов для научного общения между инноваторами со схожими информационными проблемами.

Система является универсальной и применима в любой сфере деятельности.

2.2 Условия, при соблюдении которых обеспечивается применение средства информатизации в соответствии с назначением

Работа с системой возможна в случае, если она развернута на веб-сервере локальной или глобальной сети, к которым подключен пользователь, и имеется веб-браузер на рабочей станции с открытым доступом в Интернет.

Корректное отображение пользовательского интерфейса системы гарантируется только на свежих версиях браузерах Google Chrome 16.0, Mozilla Firefox 9.0, Opera 11.60, Microsoft IE 9.

3. Подготовка к работе

3.1 Состав и содержание дистрибутивного носителя данных

Дистрибутив программного обеспечения предоставляется в виде архивированного файла «KNOWPRO.zip», внутри которого содержатся следующие папки:

«knowpro» - содержит файлы программной системы

«pdftotext» - типовое решение для преобразования форматов файлов

«phpmorphy» - типовое решения для лемматизации

3.2 Порядок загрузки данных и программ

Установка осуществляется в следующей последовательности:

1) Установить на серверную станцию Open Server с официального сайта («https://ospanel.io/»)
2) Разархивировать программные компоненты в следующие дистрибутивы:
   – «knowpro» - на виртуальном диске в папку domains\localhost\
   – «xpdf» - C:\Program Files\
   – «phpmorphy» - C:\Program Files\
3) Осуществить настройку домена по инструкции с официального сайта («https://ospanel.io/docs/#domeny-i-aliasy»)

   Версия PHP – 7.1!
4) Перезапустить OpenServer

3.3 Порядок проверки работоспособности

Осуществить подключение к системе одним из следующих вариантов:

1) Щелкнуть ПКМ по иконке Open Server в панели задач
2) Выбрать «Мои сайты → index.php»

2) Открыть веб-браузер и вручную ввести в адресную строку «http://localhost/knowpro/index.php» (без кавычек)

После этого в окне браузера появится окно для авторизации в системе.

4. Описание операций

4.1 Описание всех выполняемых функций, задач, комплексов задач, процедур

Таблица 6.3.4.1. Описание всех выполняемых задач, функций

Задача	Функция	Операция
Поиск научных публикаций	F_1 – выбор изначальных параметров поиска	F_{11} – Выбор тематики F_{12} – Выбор приоритета поиска (цитируемость или актуальность) F_{13} – Нажать на кнопку «Начать поиск»
	F_2 – осуществление повторного поиска	F_{21} – Получение результатов поиска F_{22} – Выбор продолжения поиска или завершения работы
Выделение ключевых слов	F_3 – определение ключевых слов, описывающих проблемную ситуацию	F_{31} – Ранжирование понятий, входящих в семантическое ядро предметной области по принадлежности к проблеме F_{32} – Выбор относящихся к проблеме терминов из периферии F_{33} – Нажать на копку «Продолжить поиск»

4.2 Описание операций технологического процесса обработки данных, необходимых для выполнения функций, комплексов задач (задач), процедур

Последовательность действий:

1. F_1 - выбор изначальных параметров поиска:

1) Раскрыть выпадающий список, нажав на область (1)
2) Выбрать тематику
3) Выбрать приоритет поиска из области (2)
4) Нажать на кнопку «Начать поиск»

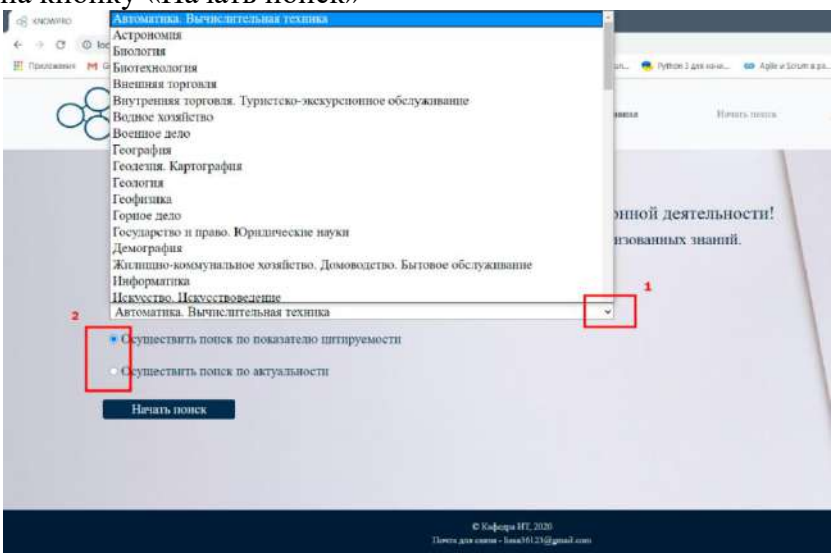


Рисунок 6.3.4.1 - Выбор первоначальных параметров поиска

2. F_3 - определение ключевых слов, описывающих проблемную ситуацию:

1) В поле слева приведен перечень терминов, описывающих предметную область. Необходимо напротив каждого слова поставить степень принадлежности термина к проблеме в диапазоне [0,1], где 0 – термин не принадлежит к проблеме, 1 – принадлежит. См. рис. 6.3.4.2.
2) В поле справа необходимо выбрать первую комбинацию терминов (3-5), описывающих проблему. См. рис. 6.3.4.3.
3) Нажать на кнопку «Продолжить поиск» в конце страницы. См. рис. 6.3.4.4.

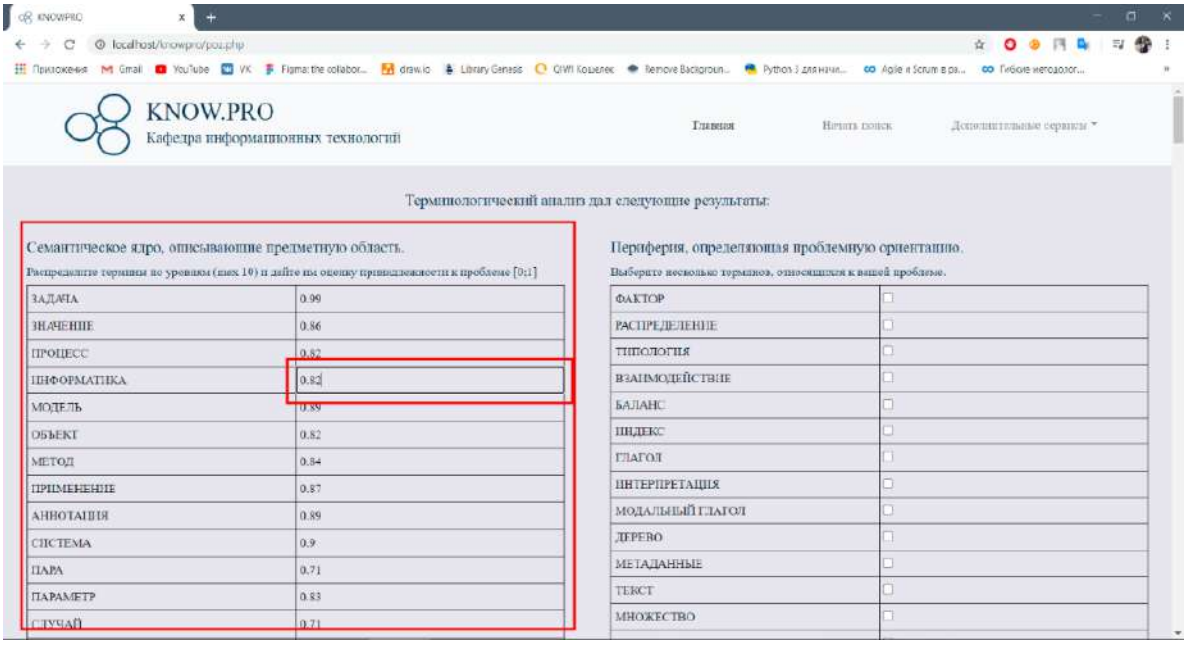


Рисунок 6.3.4.2 - Определение ключевых слов из ядра



Рисунок 6.3.4.3 - Выбор ключевых слов их периферии

3. F_2 – Осуществление повторного поиска

Перечень первых 3х публикаций выводится на экран пользователя. Голубым цветом подсвечены ссылки на источники, нажав по которым произойдет перенаправление на страницу с публикацией в информационном банке.

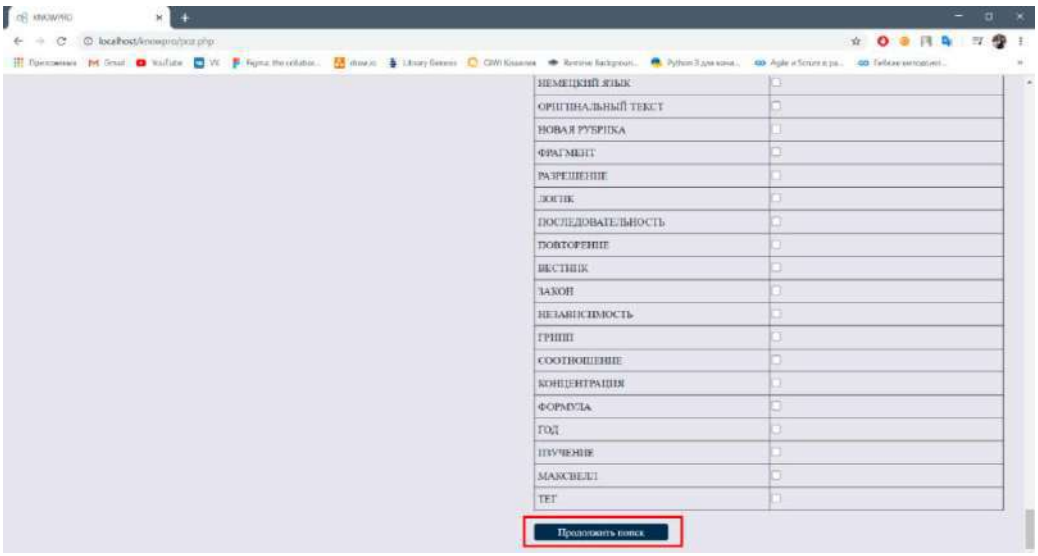


Рисунок 6.3.4.4 - Продолжение поиска

При нажатии на кнопку (1) происходит перенаправление на начальную страницу (рис. 1), при нажатии на кнопку (2) происходит анализ выведенных публикаций с последующим перенаправлением на окно выбора ключевых слов (рис. 2-4)

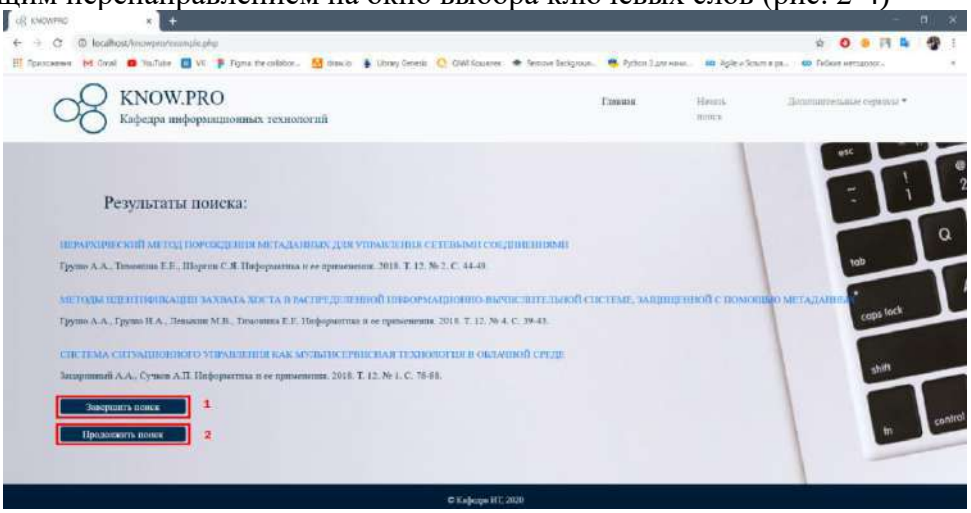


Рисунок 6.3.4.5 - Вывод результатов поиска

5. Аварийные ситуации

5.1 Действия в случае несоблюдения условий выполнения технологического процесса, в том числе при длительных отказах технических средств

В данном случае необходимо начать выполнение алгоритма еще раз и убедиться, что на всех этапах данные, введенные пользователем, были корректны. Если же во время выполнения алгоритма пользователю не предлагалось вывести результаты выполнения какой-либо функции, необходимо удостовериться в наличии стабильного Интернет-соединения. В случае, если при большом количестве попыток обращения к программе так и не удалось получить результат ее функционирования, требуется обратиться к системному администратору для корректировки в файле elibrary_parser.php данных login и password для обеспечения доступа к БД elibrary.ru.

5.2 Действия по восстановлению программ и/или данных при отказе магнитных носителей или обнаружении ошибок в данных

Резервное копирование сервера, на котором располагается система, должно производится ежедневно. В случае возникновения необходимости восстановить программу следует обратиться к системному администратору. Также можно связаться с разработчиком системы по почте lissa36123@gmail.com.

6.7. Разработка программы использования системы «KNOW.PRO» на кафедре ИТ в качестве инструментария для выполнения лабораторных работ

1. Объект испытаний

1.1. Полное наименование системы, обозначение

Полное наименование системы: Автоматизированная система поиска актуальных формализованных знаний «KNOW.PRO». Условное обозначение: KNOW.PRO.

1.2. Комплектность испытательной системы

См. Руководство пользователя – Состав и содержание дистрибутивного носителя данных.

2. Цель испытаний

Оценка соответствия системы требованиям технического задания (верификация);

Оценка работоспособности системы (валидация).

3. Общие положения

3.1. Перечень руководящих документов

- ГОСТ 34.603-92 Виды испытаний автоматизированных систем,
- РД 50-34.698-90 Автоматизированные системы требования к содержанию документов,
- ГОСТ 19.301-79 Программа и методика испытаний. Требования к содержанию и оформлению,
- РД 50-34.698-90 Методические указания информационная технология комплекс стандартов и руководящих документов на автоматизированные системы автоматизированные системы требования к содержанию документов,
- Техническое задание.

3.2. Место и продолжительность испытаний

Место: ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», корпус Б, аудит. 319. Продолжительность: 1 день.

3.3. Участники испытаний

Заказчик – ФГБОУ ВПО «ИГЭУ», разработчик – студентка 4-45 Коровкина Е.В.

3.4. Перечень ранее проведенных испытаний

Не проводились.

3.5. Перечень предъявляемых на испытания документов

Техническое задание, Руководство пользователя, Пояснительная записка.

4. Условие и порядок проведения испытаний

4.1. Подготовительный этап

Данный этап предполагает следующее:

1) Проверка комплектности системы, комплектности документации.

Осуществляется сопоставление состава предоставленной документации требованиям. Выполняется Заказчиком. Запись о результатах проверки вносится в протокол испытаний.

2) Подготовка программной системы к испытаниям.

Данный этап включает в себя установку программной системы, настройку прав доступа пользователей, конфигурирование системы. Выполняется Разработчиком.

3) Подготовка пользователей для выполнения испытаний.

На данном этапе должен быть проведен инструктаж Заказчика по порядку использования программной системы. Выполняется Разработчиком.

4.2. Проведение испытаний программной системы

Внедрение будет происходить в образовательную деятельность, а конкретно в процесс подготовки магистров к принятию инновационных решений относительно производственных проблем. Первым шагом внедрения будет выполнение магистрами лабораторных работ с помощью разработанного инструментария. Содержание лабораторной работы №3 Автоматизированная система поиска актуальных знаний «KNOW.PRO».

Основной целью работы является освоение современных инструментальных средств прикладной информатики для информатизации инновационных процессов, в частности компьютерно-коммуникационных средств получения актуальных, представительных и синтетических формализованных знаний, необходимых для решения инновационных задач. В современном Интернет-пространстве создано и действует множество ИБ, предоставляющих свои услуги по обеспечению научно-информационной продукцией или, иначе, формализованными научными и учебно-методическими ресурсами. Основное назначение автоматизированной системы KNOW.PRO можно назвать оперативную помощь инноватору, не обладающему библиографическими навыками, найти необходимую для его креативной деятельности научную основу.

Автоматизированная система поиска и анализа формализованных знаний с учетом взаимосвязей четырех компонентов системы ДИП и описанной в главе 5 методологии анализа формализованных знаний, осуществляет выполнение следующих функций:

F_1 – автоматический выбор информационной базы для поиска;

F_2 – выбор тематического раздела для первоначального поиска и параметра поиска (по цитируемости или актуальности);

F_3 – автоматическое определение приоритетных изданий из ядра сосредоточения;

F_4 – автоматический выбор из определенного издания в отсортированном в порядке убывания параметра множестве публикаций первых 3х научных публикаций;

F_5 – автоматическое преобразование публикаций из формата *.pdf в формат *.txt;

F_6 – автоматическая обработка (терминологический анализ) представленного текста;

F_{61} – для каждой публикации $Mv = \{m_i\}_v$, где ν = {1, 2, 3}, ν – индекс публикаций, автоматическое разбиение загруженного текста источника знаний на словоформы, получение предварительного словаря текста $M\nu = \{m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_r\}\nu$;

F_{62} – «чистка» или сокращение мощности множества M_i;

F_{621} – автоматическое удаление стоп-слов (множества Мс); уменьшение водности посредством операции:

$$M' = {}^{Mv}/_{Mc};$$

F_{622} – автоматическое приведение всех словоформ к основной форме;

F_{623} – подсчет количества повторов уникальных словоформ и удаление повторяющихся словоформ (дубликатов) Мд:

$$M'' = {}^{M'}/_{M_Д};$$

F_{63} – формирование множества словосочетаний Мсс вида «прилагательное + существительное», согласованных по роду, числу и падежу с использованием множества дубликатов:

$$M''' = {}^{Mcc}/_{Mcc_Д};$$

F_{64} – выполнение операции пересечения множеств:

$$M^T = \bigcap_{v=1}^{3} M_v;$$

F_{65} – выделение терминов множества $M_я^T$ по принадлежности $\mu_A(m_i)^T$к тематике:

$$M_я^T = \begin{cases} 1, \text{ если } count(M^t) = 3, \\ 0 \text{ в любом другом случае;} \end{cases}$$

F_7 – упорядочивание множества $М_я^w$ путем построения функции принадлежности по проблеме $\mu_в(m_i)^T$ с выделением α-срезов = 0.9;
F_8 – из множества терминов $М_п^w$, относящихся к периферии по мнению инноватора выбирается ряд комбинаций множеств $\{m_i\}_п^w$
F_9 – автоматическое выделение ключевых слов $М_к^w$, позволяющих осуществить поиск необходимых для решения проблемы W публикаций:

$$М_к^w = \{m_i\}_п^w \quad \cup \{m_i\}_я^w,$$

F_{10} – по каждому варианту $М_к^w$ в избранной информационной базе находятся публикации, обладающие наиболее высоким параметром поиска.
Порядок выполнения работы:

a. Произвести поиск формализованных знаний по тематике, исследуемой в НИР, и задать параметр поиска;
b. Определить степени принадлежности понятий в выбранном контексте $\mu_в(m_i)$ на откорректированном базовом множестве $М_я^T$;
c. Определить набор терминов, входящих в периферию;
d. Ознакомиться с результатами поиска по полученной проблеме $М_к^w$;
e. По окончанию работы оформить отчет с указанием цели, полученных результатов и выводов, включающих в себя:
f. персональную оценку освоенного инструментария:
    - корректность руководства пользователя, необходимость и конкретные меры по его совершенствованию;
    - предложения по совершенствованию освоенного инструментария;
    - персональную оценку найденных источников знаний.

5. Документы, оформляемые в процессе испытаний и по их завершению

−Протокол испытаний. Подготавливается Разработчиком, заполняется и утверждается Заказчиком – приложение 5.

−Акт внедрения. Подготавливается Разработчиком, утверждается Разработчиком и Заказчиком – приложение 6.

6. Материально-техническое обеспечение испытаний

− Испытания проводятся на рабочей станции Разработчика:
− Минимальные версии браузеров: Google Chrome 16.0, Mozilla Firefox 9.0, Opera 11.60, Microsoft IE 9.

Разработчик _____ Коровкина Е.В.

Заключение

В ходе работы было проведено исследование существующих возможностей поисковых систем научной информации, в результате которого был выявлен их главный недостаток – отсутствие проблемно-ориентированного подхода к поиску формализованных знаний. В инновационной деятельности такой подход является приоритетным, так как он описывает цикл создания инноваций и способность предприятий становиться более конкурентоспособными за счет повышения человеческого (как следствие, организационного, клиентского) интеллектуального капитала. Таким образом, внедрение разработанной научно-поисковой системы способствует развитию бизнеса в любой сфере деятельности.

Важной частью работы было исследование системы документально-информационного потока. Установленная иерархия системы ДИП и взаимосвязи каждого уровня иерархии позвонили перейти от алгоритмов релевантного поиска, используемого в обычных поисковых системах, к алгоритму пертинентного поиска, результаты которого могут удовлетворить латентные потребности инноваторов.

Разработанная система обеспечения формализованными знаниями наряду с образовательной системой представляет собой частный вариант более широкого класса систем – систем управления знаниями. Здесь имеется цель управления – новация, проблема, которую надо решать, ресурс, в частности Интернет-ресурс, который необходимо целенаправленно использовать, совокупность функций управляющего органа и объект управления – инноватор с креативными и когнитивными функциями. Циклический характер поиска формализованных знаний образует цикл развития, подобный циклу PDCA, что говорит о том, что это не только система управления знаниями, но и в определенной степени система управления инновационным развитием.

Информационная система была разработана с использованием методологии структурного анализа и проектирования. Для осуществления взаимодействия с elibrary.ru была применена технология парсинга веб-сайтов и изучены методы отправки запросов на сторонние ресурсы и методы «чтения» веб-страниц через объектные модели документов. На данном этапе результаты разработки внедрены на кафедре ИТ, где будут использоваться для информационного обеспечения образовательной деятельности, в том числе для проведения лабораторных работ магистров.

Материалы, входящие в данную работу, были представлены на VII Международной конференции "Энергия - 2020" – статья «Автоматизированная система поиска актуальных знаний KNOW.PRO». Также была подана заявка на получение авторского свидетельства, однако в силу некоторых обстоятельств оно будет получено позже.

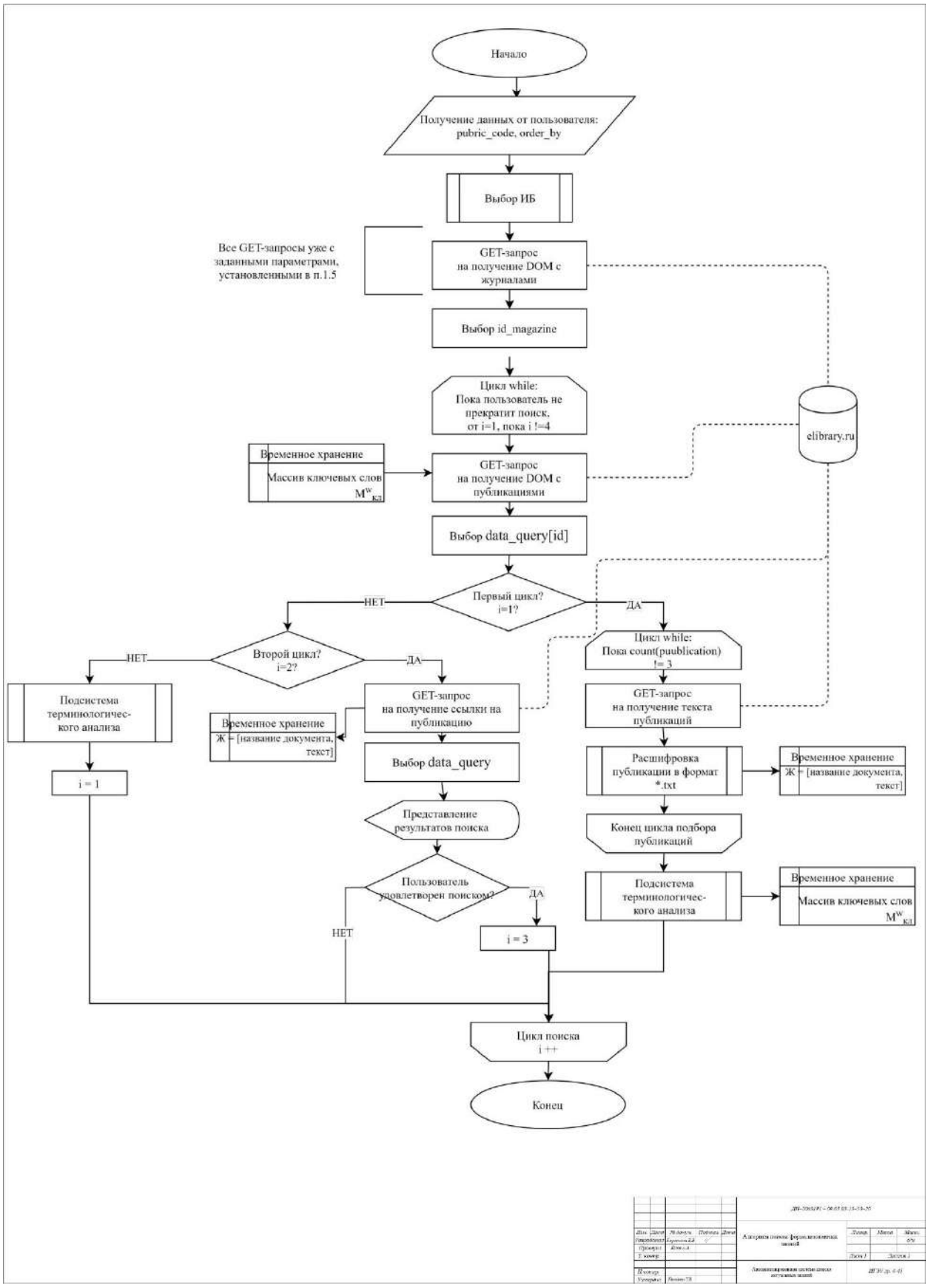
В перспективах развития системы можно выделить следующее:

- реализация взаимосвязи со смежными системами, такими как ADIS, TERM.PRO, INTELLECT.PRO;
- применение алгоритма поиска для международных информационных баз;
- разработка проблемно-ориентированной базы данных внутри предприятия;
- оптимизация процесса ранжирования терминов;
- разработка алгоритма поиска патентов.

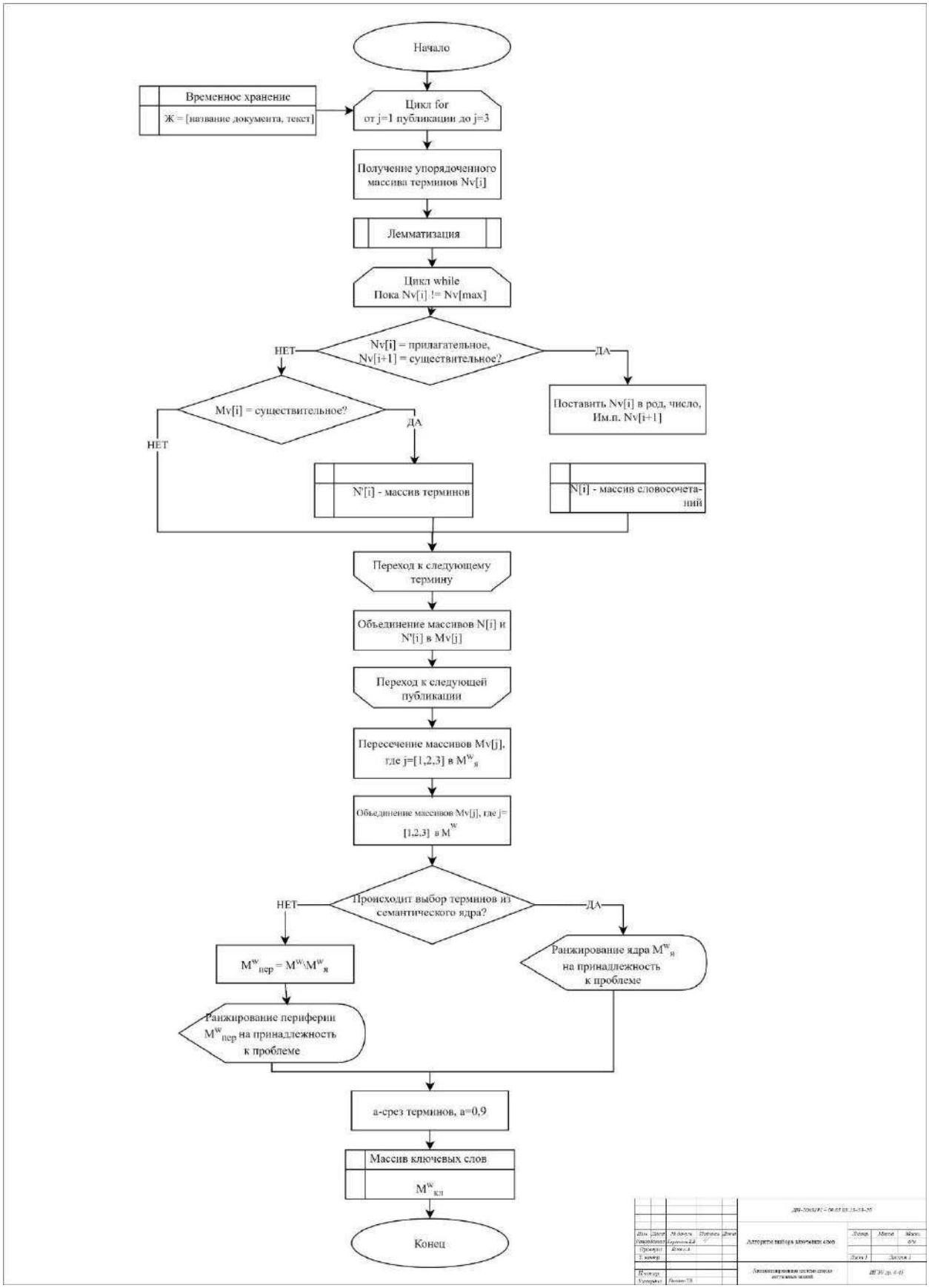
Список используемых источников

1. Поппер Карл Р. Объективное знание. Эволюционный подход. Пер. с англ. Д. Г. Лахути. Отв. ред. В. Н. Садовский. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.
2. Белов А.А. Теоретические основы информационных систем : учебное пособие / А. А. Белов. - Иваново : ИГЭУ, 2019. - 91 с. : ил. ; 21 см. - Библиогр.: с. 88-91 (63 назв.). - 100 экз. - ISBN 978-5-00062-335-0
3. Горькова В.И. Информетрия: количественные методы в научно-технической информации // Итоги науки и техники. Сер. Информатика. Т. 10. М.: ВИНИТИ, 1988.
4. Беккер, Г. Человеческий капитал (главы из книги). Воздействие на заработки инвестиций в человеческий капитал [Текст] / Г. Беккер // США: экономика, политика, идеология. – № 11. – Ноябрь 1993 г. – С. 19–145
5. Волкова В. Информетрия и закономерности строения документальных информационных потоков // Прикладная информатика
6. Zipf G.K. Selected studies of the principle of relative frequency in language. Cambridge (Mass.): Harvard University Press, 1932
7. Zipf G.K. Human behavior and principle of least effort. Cambridge (Mass.): Addison — Wesley1949. V. XI.
8. Мандельброт Б. Теория информации и психолингвистика: теория частот слов. В Математические методы в социальных науках. М.: Прогресс, 1973
9. Bradford S.C. Documentation. London: Crosby Lockwood, 1948
10. Brookes B.C. Bradford’s law and the bibliography of science // Nature. 1969. V. 224. № 5223.
11. Vickery B.C. Bradford’s law of scattering // Journal of Documentation. 1948. V. 4.
12. Белов А.А. Экономические аспекты информатизации, ГОУВПО "Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина". — Иваново, 2006.—96 с
13. Белов А. А. Теория систем и системный анализ: учебное пособие, ГОУВПО "Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина". Иваново, 2015.—136 с: ил.
14. Рудаков Н.В. Системы управления знаниями: методические указания / Н.В. Рудаков. — Иваново: ФГБОУВО "Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина", 2017.
15. Баллод Б.А. Информационная безопасность и защита информации: Курс лекций/ ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет им.В.И. Ленина».- Иваново, 20010. 304 с
16. Гвоздева Т. В. Проектирование информационных систем: учебное пособие для вузов /Т. В. Гвоздева, Б. А. Баллод; ГОУВПО "Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина. — Иваново, 2006.—352 с.
17. Объектная Модель Документа [электронный ресурс]. Режим доступа: https://developer.mozilla.org/ru/docs/DOM/DOM_Reference/%D0%92%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5
18. Введение в PHP libcurl [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://www.php.net/manual/ru/intro.curl.php

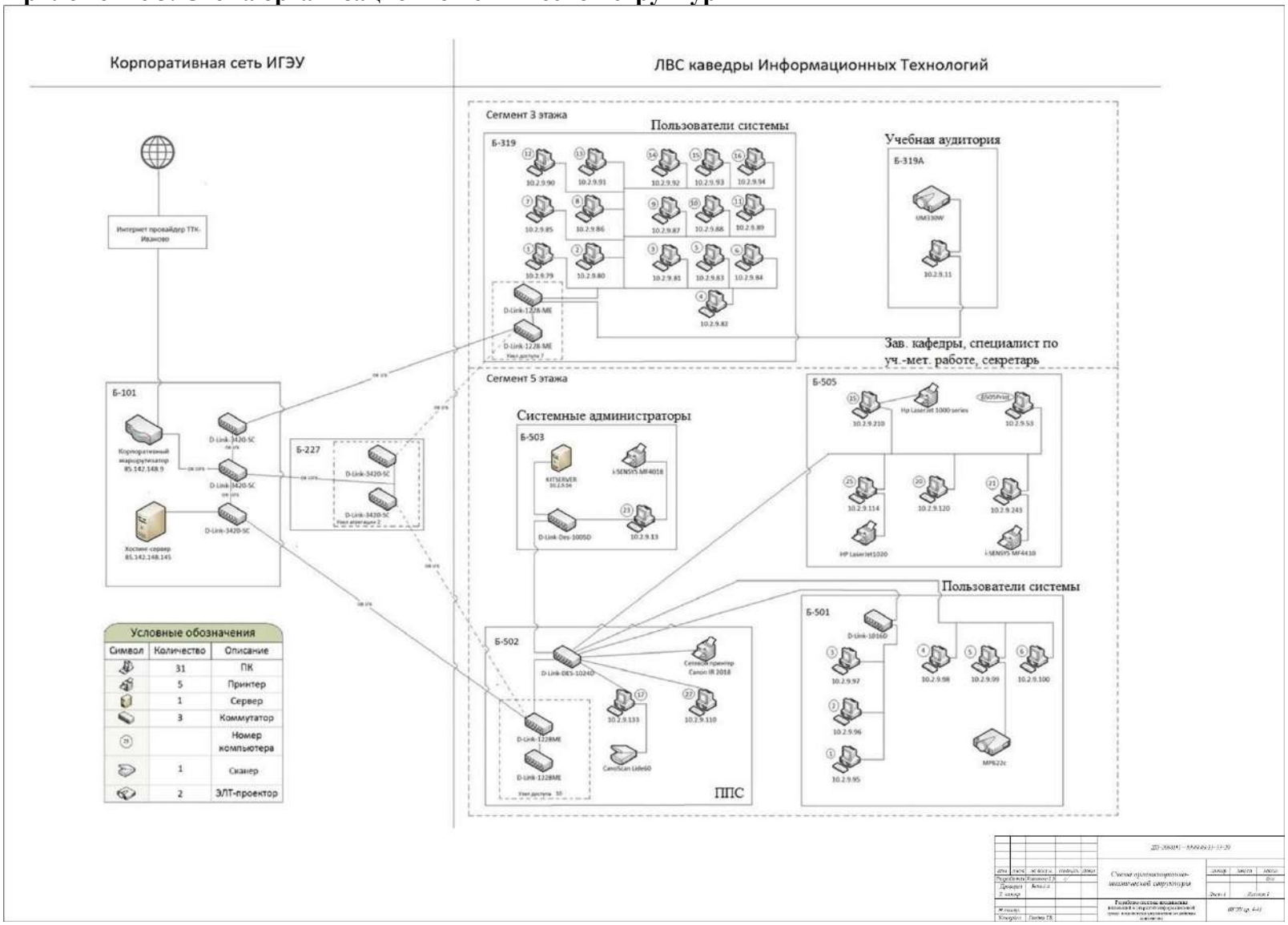
Приложение 1. Алгоритм поиска формализованных знаний



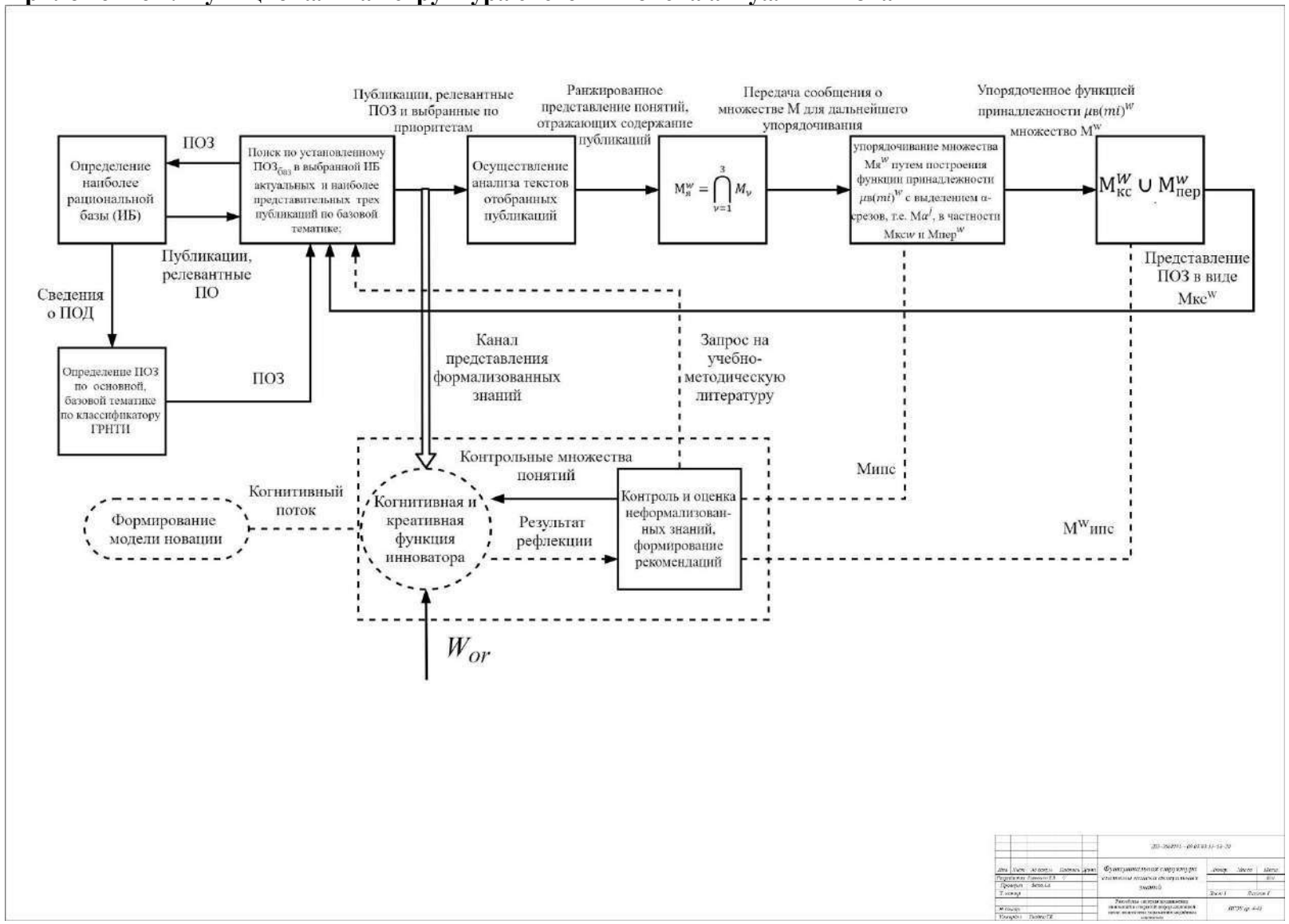
Приложение 2. Алгоритм выбора ключевых слов



Приложение 3. Схема организационно-технической структуры



Приложение 4. Функциональная структура системы поиска актуальных знаний



Приложение 5. Протокол испытаний

1. Полное наименование системы, обозначение

Полное наименование системы: Автоматизированная система поиска актуальных формализованных знаний «KNOWPRO».

Условное обозначение: KNOW.PRO.

2. Участники испытаний

Заказчик – ФГБОУ ВПО «ИГЭУ» в лице магистров (1-45м) кафедры ИТ, разработчик – студентка 4-45 Коровкина Е.В.

3. Цель испытаний

Оценка соответствия системы требованиям технического задания (верификация);

Оценка работоспособности системы (валидация).

4. Результаты наблюдений за испытаниями

Таблица п4.1 – Результаты испытаний

Пункт программы испытаний	Отметка о выполнении (наличие особых условий при испытании)	Сведения об отказах и отклонениях, выявленных при испытаниях
Корректность установления системы	Система поиска формализованных знаний успешно запущена.	Отказы отсутствуют
F_1	Задача выполнена успешно.	Отказы отсутствуют
F_2	Задача выполнена успешно.	Отказы отсутствуют
F_3	Задача выполнена успешно.	Отказы отсутствуют
F_4	Задача выполнена успешно.	Отказы отсутствуют
F_5	Задача выполнена успешно.	Отказы отсутствуют
F_6	Задача выполнена успешно, но ввиду особенности задачи не точно.	Отказы отсутствуют
F_7	Задача выполнена успешно.	Отказы отсутствуют
F_8	Задача выполнена успешно.	Отказы отсутствуют
F_9	Задача выполнена успешно.	Отказы отсутствуют
F_{10}	Задача выполнена успешно, существуют ограничения на поиск со стороны ИБ.	Отказы могут быть, если в ИБ не находятся источники, удовлетворяющие ПОД.

5. Заключение на результаты испытаний

Система поиска формализованных знаний соответствует требования, все задачи выполнены успешно, отказов не обнаружено.

Заведующий лабораторией _____ Рудаков. Н.В.

Разработчик _____ Коровкина Е.В.

Дата проведения испытаний: «__» _____ 20___г.

Приложение 6. Акт внедрения

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ Гвоздева Т.В.
«___» _____ 20___ г.

АКТ

о внедрении результатов
выпускной квалификационной работы

Исполнитель проекта: Коровкина Елизавета Валерьевна
Фамилия, имя отчество

Руководитель проекта: Белов Александр Аркадьевич
Фамилия, имя отчество

Комиссия в составе:

- председатель: Рудаков Николай Владимирович, заведующий лабораторией,
- члены комиссии: Елизарова Надежда Николаевна, к.т.н., доцент, Локов Антон Андреевич, инженер, студент 1-45м

составила настоящий акт о том, что результаты выпускной квалификационной работы «Автоматизированная система поиска актуальных знаний» внедрены в ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина» с целью оказания научно-информационной поддержки принятия инновационных решений.

Внедрение системы поиска актуальных формализованных знаний позволяет:

1. развивать способности обучающихся к принятию инновационных решений,
2. получать множество актуальных формализованных знаний в виде публикаций по исследуемой проблеме в приоритетных научных журналах, информационных базах,
3. устанавливать контакты для научного общения между инноваторами со схожими информационными проблемами.

Вся документация по проекту внедрена в соответствии с областью ее применения. Также на основе инструментария была подготовлена Лабораторная работа №3 Автоматизированная система поиска актуальных знаний «KNOW.PRO».

Председатель комиссии	Рудаков Николай Владимирович, заведующий лабораторией	_____ *Подпись*
Член комиссии	Елизарова Надежда Николаевна, к.т.н., доцент	_____ *Подпись*
Член комиссии	Локов Антон Андреевич, инженер, студент 1-45м	_____ *Подпись*
Разработчик	Коровкина Е.В., студентка	_____ *Подпись*

Приложение 7. Отчет о проверке на плагиат

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Коровкина Елизавета Валерьевна
Проверяющий: (lissa36123@gmail.com / ID: 8085406)

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 3
Начало загрузки: 11.06.2020 17:18:13
Длительность загрузки: 00:00:06
Имя исходного файла: ВКР2.0.pdf
Название документа: ВКР – Автоматизированная система поиска актуальных знаний
Размер текста: 1 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 213933
Слов в тексте: 25046
Число предложений: 1336

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 11.06.2020 17:18:20
Длительность проверки: 00:00:04
Корректировка от 11.06.2020 17:26:40
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Интернет



ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
7,03%	0%	0%	92,97%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.
Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.
Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска
[01]	0,63%	Условие (2/2)	http://reshaem.net	12 Фев 2018	Модуль поиска Интернет
[02]	1,2%	http://aisup.economy.gov.ru/pubportal/downloadfile?uuid=pprtdco2k03380...	http://aisup.economy.gov.ru	14 Мая 2020	Модуль поиска Интернет
[03]	0,45%	Типовое техническое задание на на создание Комплекса средств автом...	http://mchs.gov.ru	31 Мар 2018	Модуль поиска Интернет

Еще источников: 17
Еще заимствований: 4,76%

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Лукашова Олега Александровича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Степень отображения гладких орбифолдов» являются: Определение 5.1, Определение 5.2, Теорема 12.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 марта 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, arxiv.org по следующим ключевым словам: mapping degree for orbifolds, degree theory for orbifolds, degree of the mapping of smooth orbifolds. По результатам поиска мною изучалась статья F. Pasquotto, T. O. Rot «Degree theory for orbifolds» ([4]), опубликованная в 2020 г. В статье [4] введено понятие степени отображения гладких орбифолдов. Однако авторы столкнулись с проблемой, заключающейся в том, что, в отличие от многообразий, мощность прообраза гладкого отображения орбифолдов не является локально постоянной функцией. Для преодоления этой трудности они ввели понятие взвешенной мощности. В выпускной работе приведено новое понятие степени отображения гладких орбифолдов, преимуществом которого является тот факт, что оно дает значительно более простой способ вычисления степени отображения, поскольку не требует обращения к группам орбифолдности. В дополнение, приведен подробный процесс построения новых примеров.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Жуковой Ниной Ивановной, доктором физико-математических наук, профессором кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.
- Проведены выступления на научном студенческом семинаре, организуемом Н. И. Жуковой.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с научным руководителем, следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоится 16.06.2021. На Смотр представлен проект текста работы.



Лукашов Олег Александрович
31 мая 2021 г. Нижний Новгород, Россия

Отзыв

на выпускную квалификационную работу

Студента группы 17ФМ Лукашова Олега Александровича
Тема работы: Степень отображения гладких орбифолдов

№ п/п	Критерии оценки	Оценка (по 10-балльной шкале)
1	Соответствие содержания работы утвержденной теме	9
2	Уровень владения материалом, обоснование актуальности исследований	8
3	Новизна, оригинальность, обоснованность полученных результатов	7
4	Доля самостоятельного вклада студента	8
5	Эффективность взаимодействия студента с научным руководителем	8
6	Оформление работы	10

Комментарии к оценкам:
Содержание работы полностью соответствует поставленной теме. Работа носит реферативно-исследовательский характер. Исчерпывающим образом приведена теория степени отображений для многообразий и ее применение. Понятие степени для орбифолдов введено Паскуотто и Ротом в только что опубликованной статье 2020 года. На основании подробного анализа этой работы введено новое понятие степени отображения для орбифолдов, доказана его эквивалентность с понятием степени в смысле указанной выше статьи. Преимущество нового определения состоит в том, что оно дает значительно более простой способ для вычисления степени отображения, поскольку не требует обращения к группам орбифолдности. К достоинствам работы следует отнести примеры, построенные О.А. Лукашовым, а также сделанные им рисунки.

Рекомендации о допуске ВКР к защите и оценка за работу
Работа рекомендована к защите с оценкой "отлично" (8 баллов)

Научный руководитель:
Жукова Нина Ивановна, д.ф.-м.н., проф.

Подпись  Дата 24.05.2021

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

**Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика**

Лукашов Олег Александрович

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Степень отображения гладких орбифолдов

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент
ФГБОУ ВО НГТУ
А. В. Багаев

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф.
Н. И. Жукова

Нижний Новгород, 2021

Содержание

1 Введение **3**

2 Степень отображения многообразий **4**
2.1 Определение степени 4
2.2 Обобщение понятия степени на многообразия с краем 5
2.3 Свойства степени 6
2.4 Примеры 6

3 Приложения степени отображения многообразий **8**
3.1 Основная теорема алгебры о корнях многочлена 8
3.2 Степень и интеграл 9

4 Степень отображения гладких орбифолдов **10**
4.1 Орбифолды и орбифолдные отображения 10
4.2 Степень орбифолдного отображения 14

5 Новое определение степени отображения орбифолдов **20**

6 Примеры **21**

7 Заключение **24**

Список литературы **25**

652

1 Введение

Понятие степени отображения многообразий введено Л. Брауэром [7]. Им доказано, что степень отображения гладких многообразий является гомотопическим инвариантом. В современной математике данный термин – устоявшееся понятие, играющее немаловажную роль в топологии и геометрии.

Степень отображения гладких многообразий применяется для доказательства основной теоремы алгебры о количестве корней многочлена n-ой степени. Степень гладкого отображения $f : N \to M$ многообразий M и N связывает объемы этих многообразий [1]. Кроме того, недавно с помощью степени отображения сделана попытка доказательства гипотезы Черна о том, что эйлерова характеристика любого аффинного замкнутого многообразия равна нулю [15].

Понятие орбифолдов произвольной размерности введено И. Сатаки[9] под названием V-многообразий. Такие двумерные объекты естественным образом возникли в работах У. Терстона[8] при классификации трехмерных замкнутых многообразий. Термин "орбифолд" предложен У. Терстоном. Орбифолды – топологические пространства, локально образованные факторизацией пространства $\mathbb{R}^n$ по конечной группе диффеоморфизмов. Орбифолды встречаются в различных областях математики и физики, например, в алгебраической и дифференциальной геометрии, а также в теории струн. Существует несколько подходов к определению и изучению орбифолдов, в том числе с помощью локальных координат и атласов.

Начиная с 1985 года, в связи с работами Диксона, Харвея и Уиттена по теории конформных полей, интерес к орбифолдам стал резко возрастать. Орбифолды исследовались в работах Н.И. Жуковой и А.В. Багаева [11],[12],[13], а также ряда других авторов[10] , [14].

Понятие степени отображения между гладкими орбифолдами введено в статье Ф. Паскуотто и Т. О. Рота (F. Pasquotto, T. O. Rot), опубликованной в 2020 году [4]. В отличие от многообразий, мощность прообраза гладкого отображения орбифолдов не является, вообще говоря, локально постоянной функцией. Для преодоления этой трудности, авторы статьи [4] ввели понятие взвешенной мощности. Основным результатом работы Ф. Паскуотто и Т. О. Рота является доказательство гомотопической инвариантности введенной ими степени отображения для орбифолдов.

Таким образом, тема выпускной квалификационной работы является актуальной, а исследование приложений – перспективным направлением для изучения.

Цель данной работы – исследование степени отображения орбифолдов. Первая часть работы посвящена степени отображения гладких многообразий и ее приложениям. Во второй части вводятся основные понятия и утверждения для степени гладких орбифолдных отображений.

Более того, нами введено новое определение степени отображения между гладкими орбифолдами, эквивалентное определению из [4]. Преимуществом нашего определения является тот факт, что оно дает более простой способ вычисления степени отображения, поскольку не требует обращения к группам орбифолдности. Кроме того, построены новые примеры вычисления степени отображения между гладкими орбифолдами.

2 Степень отображения многообразий

2.1 Определение степени

Приведем основные понятия и утверждения, известные, например, из [1] и [6].

Пусть M и N – связные, ориентированные, замкнутые многообразия одинаковой размерности: $dim\, M = dim\, N = n$.

Определение 2.1. *Точка $x \in N$ – регулярная для гладкого отображения $f : N \to M$ n-мерных многообразий, если ранг дифференциала $f_x^* : T_xN \to T_{f(x)}M$ этого отображения в точке x равен n. Точка $y \in M$ называется правильной (регулярной) для данного гладкого отображения, если все ее прообразы являются регулярными точками в N. Причем, если $f^{-1}(y) = \varnothing$, то y – также правильное значение по определению.*

Замечание 2.1. *Под классом гладкости понимается класс гладкости C^r, где $r \geq 1$.*

Определение 2.2. *Если $y \in M$ – правильная точка гладкого отображения $f : N \to M$, то само отображение f называется правильным по отношению к точке y.*

Для точки $x \in f^{-1}(y)$ положим $\epsilon(x) = +1$, если якобиан отображения f в точке x положителен, и $\epsilon(x) = -1$, если знак детерминанта этой же матрицы Якоби отрицателен.

Определение 2.3. *Степенью гладкого отображения $f : N \to M$ многообразий N и M одинаковой размерности относительно регулярной точки $y \in M$ называется число*

$$deg_y f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \epsilon(x). \tag{1}$$

Для доказательства следующего важного факта нам необходима известная Теорема Сарда.

Теорема 1. *Пусть $f : N \to M$ – гладкое отображение компактных многообразий одинаковой размерности, тогда множество регулярных точек $x \in M$ отображения f является открытым всюду плотным подмножеством в M.*

Определение 2.4. *Степенью гладкого отображения $f : N \to M$ многообразий N и M одинаковой размерности называется число $deg f = deg_y f$, где $y \in M$ – регулярная точка отображения f.*

Корректность этого определения вытекает из пункта a) следующей основной теоремы, для которой приведем подробное доказательство.

Теорема 2. *Пусть $f : N \to M$ – гладкое отображение компактных многообразий одинаковой размерности. Тогда:*

а) определение степени $deg\, f$ корректно, т.е. не зависит от выбора регулярной точки;

б) степень отображения многообразий – гомотопический инвариант.

Доказательство. Докажем сначала второй пункт Теоремы 2. Пусть задана гладкая гомотопия $F : N \times I \to M$, где $I = [0; 1]$, $f(x) = F(x, 0), g(x) = F(x, 1)$ $\forall x \in N$.

654

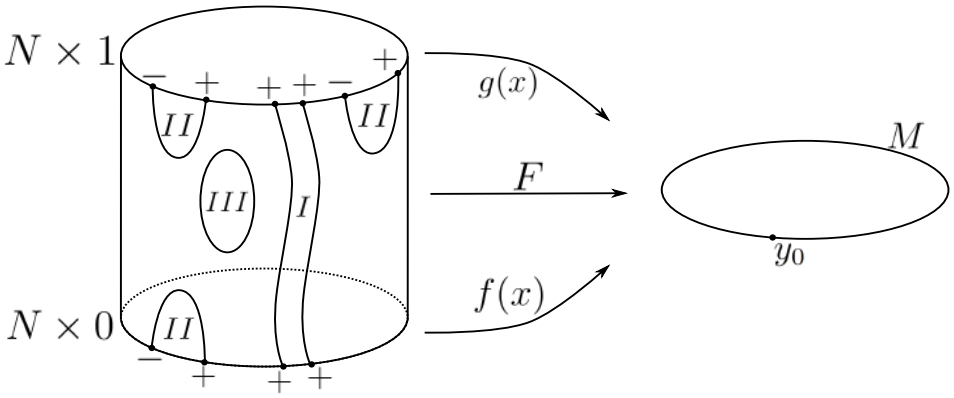


Рис. 1

Для кривых типа I, изображенных на Рис. 1, ориентация базиса при скольжении вдоль этой кривой не меняется. Для кривых типа II ориентации касательных базисов меняются на противоположные. Кривые типа III не выходят за край цилиндра и не участвуют в формировании степени.

Таким образом, крайние точки кривых типа II аннигилируются ввиду противоположности знаков. Все кривые типа I задают взаимно-однозначное соответствие между точками прообраза с сохранением знаков. Итак, суммы степеней вверху и внизу совпадают.

Докажем теперь утверждение а) Теоремы 2. Пусть y, y' – регулярные точки. Покажем, что $deg_y f = deg_{y'} f$.

Соединим две этих точки гладким отрезком $\gamma(t)$ и рассмотрим трубчатую окрестность $U(\gamma)$.

Пусть $\phi_t : M \to M$ – гладкая гомотопия: $\phi_t \equiv id$ вне $U(\gamma)$

"Вдавим" диск, проходящий через точку y слева направо так, что остальные диски аналогично будут вдавливаться, и тем минорнее, чем ближе к правой стенке цилиндра. В результате получим: $\phi_t : U(\gamma) \to U(\gamma),\ 0 \le t \le 1$ и $y' = \phi_t y$.

Рассмотрим отображение $g_t = \phi_t f$, где $g_0 = \phi_0 f = f$ и $g_1 = \phi_1 f$.

По доказанному утверждению б) Теоремы 2 и в силу того, что диффеоморфизм не меняет степени, получим:

$$deg_y f = deg_{\phi_1(y)} \phi_1(f) = deg_{y'} g_1 = deg_{y'} f. \square$$

Замечание 2.2. *Таким образом, степень отображения для многообразий является гомотопическим инвариантом.*

2.2 Обобщение понятия степени на многообразия с краем

Пусть задано отображение компактных многообразий M и N с краем, имеющих одинаковую размерность n, т.е. $f : (N, \partial N) \to (M, \partial M)$.

Так как край переходит в край, то полный прообраз внутреннего правильного значения $y \in M$ лежит целиком во внутренней части N, то же верно для ее прообраза при гомотопиях.

655

Следовательно, определена степень отображения $deg\, f$, не зависящая от выбора правильного значения y_0 внутри M и не меняющаяся при гомотопиях в этом классе отображений.

Замечание 2.3. *Края $\partial N = \Gamma$ и $\partial M = \Delta$ – замкнутые ориентированные многообразия размерности $n-1$. Причем отображение f на краях имеет степень $deg\, f|_{\partial N}$.*

Теорема 3. *([1]) Степень отображения многообразия N совпадает со степенью отображения края ∂N, т.е. $deg\, f = deg\, f|_{\partial N}$.*

В том случае, когда многообразие M – n-мерная сфера S^n, степень отображения является полным гомотопическим инвариантом.

Теорема 4. *([1]) Два гладких отображения $f, g : N \to S^n$ замкнутого n-мерного ориентированного многообразия в n-мерную сферу гомотопны в том и только том случае, если их степени совпадают.*

2.3 Свойства степени

Пусть M и N, K и L – связные, ориентированные, замкнутые многообразия одинаковой размерности и пусть $f : N \to M$, $g : K \to L$ – гладкие отображения. Тогда имеют место следующие свойства:

1) для тождественного отображения $f = id : M \to M$ степень $deg\, f = 1$;
2) если отображение f не сюръективно, то $deg\, f = 0$;
3) если f и g гомотопны, т.е. $f \simeq g$, то $deg\, f = deg\, g$;
4) для композиции f и g справедливо равенство $deg\,(f \circ g) = (deg\, f) \cdot (deg\, g)$.

Замечание 2.4. *Степень отображения многообразия может быть определена и в неориентируемом случае, однако знаки якобианов здесь не имеют инвариантного смысла. Поэтому степень в таком случае определяется как вычет по модулю два $(mod\, 2)$.*

2.4 Примеры

Пример 1. Пусть задано гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ замкнутого многообразия M размерности n в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Такое отображение является правильным по отношению к некоторой точке, как и любое отображение замкнутого многообразия в любое другое. Ввиду компактности многообразия M, в $\mathbb{R}^n$ найдутся точки y_0, полный прообраз которых $f^{-1}(y_0)$ – пустое множество. Следовательно, отображение не является сюръективным ввиду некомпактности $\mathbb{R}^n$. Поэтому степень отображения определена и равна нулю.

Пример 2. Пусть $f : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ – отображение ориентированных многообразий одинаковой размерности с краем, сужение которого на край является диффеоморфизмом: $\partial M \approx \partial N$. Пусть данный диффеоморфизм сохраняет ориентацию, тогда из Теоремы 3 следует, что $deg\, f = 1$.

Пример 3. Любой многочлен $f(x)$ степени n с вещественными коэффициентами задает такое правильное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $x \mapsto f(x)$, так как уравнение $f(x) = const$ имеет не более n корней.

Степень отображения $deg\, f$ равна единице, если $n = 2k+1$ и нулю, если $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, так как в таком случае отображение не является сюръективным (Рис. 2).

Все точки отображения являются правильными, за исключением тех точек, в которых $f'(x) = 0$. Таким образом, игнорируются точки локальных экстремумов.

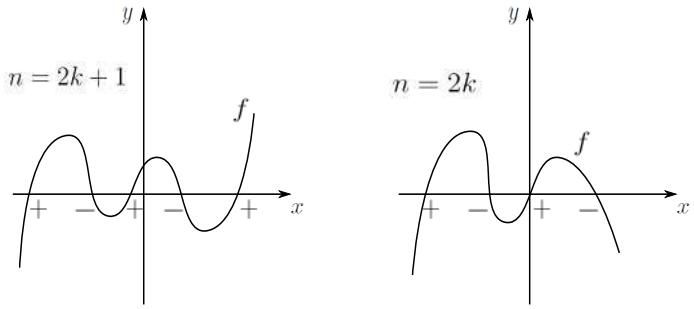


Рис. 2

Пример 4. Пусть $f : S^1 \to S^1$ – отображение окружности в окружность. Представим окружность как прямую, у которой склеены точки вида $x + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Аналогичным образом отождествляются точки $y + 2\pi n$ при отображении f. Функция $y = f(x)$ задает отображение окружности в окружность, если для всех x выполняется равенство $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

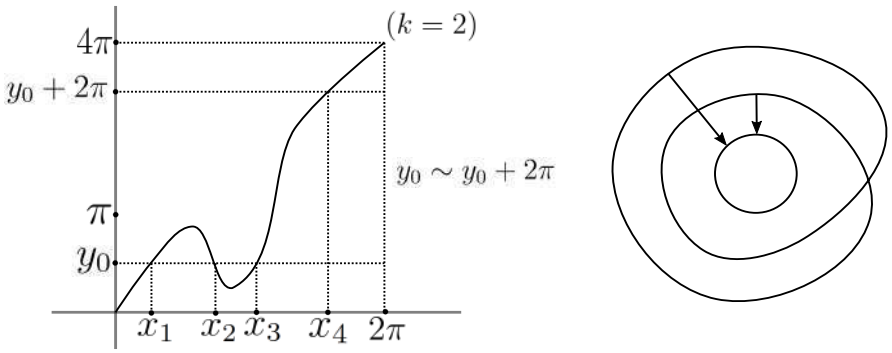


Рис. 3

Так, из рисунка видно, что $sgn(x_1) = +1$, $sgn(x_2) = -1$, $sgn(x_3) = +1$, $sgn(x_4) = +1$. По формуле определения степени получим $deg\, f = 2$. Аналогичным образом строится такое отображение f, что $deg\, f = k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Пример 5. Пусть S^{2n-1} – единичная сфера в пространстве $\mathbb{C}^n$ с координатами $(r_1 e^{i\phi_1}, \ldots, r_n e^{i\phi_n})$. Вычислим степень отображения $f : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, которое задано формулой

$$(r_1 e^{i\phi_1}, \ldots, r_n e^{i\phi_n}) \mapsto (r_1 e^{ik_1\phi_1}, \ldots, r_n e^{ik_n\phi_n}),$$

где $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Покажем, что $deg\, f = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$. Это выполняется, если хотя бы одно из чисел $k_1, \ldots, k_n$ равно нулю. Далее будем полагать, что произведение

$k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$ отлично от нуля, т.е. $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n \neq 0$. Прообраз точки $(r_1 e^{i\psi_1}, \ldots, r_n e^{i\psi_n})$ состоит из $|k_1 \cdot \ldots \cdot k_n|$ точек вида

$$(r_1 e^{i(\psi_1 + 2\pi l_1)/k_1}, \ldots, r_n e^{i(\psi_n + 2\pi l_n)/k_n}),$$

где $0 \leqslant l_i \leqslant |k_1| - 1$. Прообраз любой регулярной точки y состоит из $|k_1 \cdot \ldots \cdot k_n|$ прообразов. Заметим, что знак каждого якобиана в определении степени отображения f совпадает со знаком произведения $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$.

Таким образом, $deg\, f = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$.

3 Приложения степени отображения многообразий

3.1 Основная теорема алгебры о корнях многочлена

Рассмотрим отображение $f : N \to M$ замкнутых комплексных многообразий одинаковой размерности n. Пусть $y \in M$ – произвольная регулярная точка.

Овеществим многообразия M и N, а также отображение $f : N \to M$, т.е. зададим такое дифференцируемое отображение $f^{\mathbb{R}}$, что $f^{\mathbb{R}} : (N)^{\mathbb{R}} \to (M)^{\mathbb{R}}$. Таким образом, если на многообразии N в пространстве $\mathbb{C}^n$ точка имеет координаты $(z_1, \ldots, z_n)$, то после процесса овеществления эта точка будет иметь координаты $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, где $z_i = x_i + iy_i \, \forall i \in \overline{1, n}$.

Так как дифференцируемое отображение $f^{\mathbb{R}} : (N)^{\mathbb{R}} \to (M)^{\mathbb{R}}$ сохраняет ориентацию, то выполняется следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Степень $deg\, f^{\mathbb{R}}$ равна числу прообразов любой регулярной точки.*

Приведем подробное доказательство нижеследующей известной теоремы [1].

Пусть $f = f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ – это произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Отождествим сферу S^2 с $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, где $\{\infty\}$ – бесконечно удаленная точка. Тогда $f : S^2 \to S^2$ – дифференцируемое отображение компактных ориентируемых многообразий.

Будем использовать обозначения $S^2(z)$ – это сфера S^2, в которой переменные обозначены через z, а сфера $S^2(w)$ – это сфера, где переменные обозначены через w

Теорема 5. ***(Основная теорема алгебры).*** *Пусть задано отображение $f : S^2(z) \to S^2(w)$, $f(z) = P_n(z)$. Тогда:*

a) многочлен $P_n(z) = w_0$ имеет хотя бы один корень $\forall\, w_0 \in S^2(w)$;

b) для почти всех w_0 число корней в точности равно n.

Доказательство. Докажем утверждение а).

Сфера $S^2(z)$ – гладкое, компактное, ориентируемое многообразие. Рассмотрим полином:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где положим $a_n = 1$.

Зададим гомотопию $F(z, t) = z^n + (1 - t)(a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Причем $F(z, 0) = f(z)$, $F(z, 1) = z^n$.

Итак, $f \sim z^n$. В силу гомотопической инвариантности степени (Теорема 2) при гомотопии отображений, $deg\, f = deg\, (z \to z^n)$. Вычислим степень отображения, стоящего в правой части. Пусть $w_0 \neq 0$ – регулярная точка. Множество прообразов точки w_0 совпадает с множеством корней n-ой степени из w_0.

Любое гладкое комплексное отображение сохраняет ориентацию, поэтому каждый якобиан в определении степени отображения равен единице. Поскольку различных корней n-ой из любого комплексного числа w_0 ровно n, то, согласно Лемме 3.1, $deg\, f = n > 0$.

Возвращаясь к исходному равенству $P_n(z) = w_0$, докажем, что $f^{-1}(w_0) \neq \varnothing \forall w_0$. Предположим противное. Тогда найдется такое $w_0' \in S^2(w)$, что $f^{-1}(w_0') = \varnothing$, т.е. полином $P_n(z) = w_0'$ не имеет решений. Но, по определению степени, точка w_0' с пустым прообразом – регулярная и, кроме того, степень в w_0' равна нулю. Противоречит тому, что степень (равная n) положительна.

Теперь докажем утверждение б). По Теореме Сарда, множество регулярных значений всюду плотно и открыто в образе. По Теореме 2, степень не зависит от выбора регулярной точки w_0. Поэтому, с учетом Леммы 3.1 и пункта а) данной теоремы, для почти всех w_0 число корней равно n. □

3.2 Степень и интеграл

Пусть задано гладкое отображение $f : N \to M$, степень которого равна $q = deg\, f$, и дифференциальная форма Ω ранга $n = dim\, M = dim\, N$ на многообразии M, имеющая в локальной системе координат (y_i^α) на M с номером i вид $\phi_i(y)dy_i^1 \wedge \ldots \wedge dy_i^n$.

Кроме того, определены интегралы $\int\limits_M \Omega$ по многообразию M от формы Ω и $\int\limits_N f^*\Omega$ по многообразию N от формы $f^*\Omega$, локально имеющей следующий вид в области на N с координатами (x_j^α) (а именно, в той ее части, которая попадает при отображении f в область с координатами (y_i^α)):

$$f^*\Omega = \phi_i(f(x))dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^n det(\frac{\partial y_i^\alpha}{\partial x_i^\beta}).$$

Теорема 6. *Имеет место равенство:* $\int\limits_N f^*\Omega = (deg\, f) \int\limits_M \Omega$.

Доказательство. Пусть $y_0 \in M$ – правильное значение. Рассмотрим область $V \subset M$, состоящую целиком из правильных значений отображения f и лежащую в достаточно малой окрестности y_0. Полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит из конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$, а полный прообраз $f^{-1}(V)$ окрестности V точки y_0 является объединением непересекающихся множеств V_j с координатами (x_j^α), т.е. $f^{-1}(V) = V_1 \cup \ldots \cup V_m$, где $j = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, n$.

Координаты в V будем обозначать через (y_0^α). Все точки областей V_j регулярны, т.к. V состоит из правильных значений отображения j. В каждой точке области V_j отображение f взаимно однозначно: $y_0^\alpha = f_{(j)}^\alpha(x_j^1, \ldots, x_j^n)$.

По формуле замены переменных получим:

$$\int\limits_{V_j} \phi(y(x))dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^n = sgn\, det(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_j^\beta}) \int\limits_V \phi(y)dy_0^1 \wedge \ldots \wedge dy_0^n.$$

Суммируя по всем V_j, будем иметь:

$$\int\limits_{f^{-1}(V)} f^*\Omega = (\sum_j sgn\, det(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_j^\beta})) \int\limits_V \Omega = (deg\, f) \int\limits_V \Omega.$$

В случае, если на некотором множестве $U \subset N$ якобиан отображения f равен нулю, то на этом множестве форма $f^*\Omega$ также равна нулю. Из леммы Сарда следует, что множество правильных точек в M – открытая всюду плотная область.

Из полученной выше формулы следует утверждение теоремы, поскольку интеграл – аддитивная функция области. □

Замечание 3.1. *Теорема верна и для отображений многообразий с краем.*

Замечание 3.2. *Если имеется замена переменных, являющаяся взаимно однозначной на гладкой границе компактной области в $\mathbb{R}^n$, тогда $|deg\, f| = 1$ и интегралы от форм Ω и $f^*\Omega$ совпадают по модулю (тем не менее, замена во внутренних точках может и не быть взаимно однозначной).*

4 Степень отображения гладких орбифолдов

4.1 Орбифолды и орбифолдные отображения

Приведем основные понятия из теории орбифолдов [5].

Пусть N – связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Определение 4.1. *Орбифолдной картой в точке $x \in N$ называется тройка $(\tilde{U}_x, \Gamma_x, \phi_x)$, где $\tilde{U}_x$ – связное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, Γ_x – конечная орбифолдная группа, фиксирующая точку $0 \in \mathbb{R}^n$, а ϕ_x – такой гомеоморфизм из $\tilde{U}_x/\Gamma_x$ в открытую окрестность U_x точки x, что $\phi_x(0) = x$.*

Определение 4.2. *Орбифолд $\mathcal{N}$ – это топологическое пространство N, снабженное атласом орбифолдных карт в окрестности каждой точки этого пространства. Топологическое пространство N называется подстилающим пространством орбифолда $\mathcal{N}$.*

Две непересекающиеся карты $\tilde{U}_x$ и $\tilde{U}_y$ должны удовлетворять условию согласованности в атласе, то есть предполагается существование орбифолдной карты $\tilde{U}_z$, инъективного гомоморфизма групп $p_{zx} : \Gamma_z \to \Gamma_x$ и $p_{zy} : \Gamma_z \to \Gamma_y$, а также вложений $i_{zx} : \tilde{U}_z \to \tilde{U}_x$ и $i_{zy} : \tilde{U}_z \to \tilde{U}_y$ таких, что $\forall \gamma \in \Gamma_z$ и $\forall \tilde{\omega} \in \tilde{U}_z$ выполняются равенства: $i_{zx}(\gamma\tilde{\omega}) = p_{zx}(\gamma)(i_{zx}(\tilde{\omega}))$ и $i_{zy}(\gamma\tilde{\omega}) = p_{zy}(\gamma)(i_{zy}(\tilde{\omega}))$.

Замечание 4.1. *Аналогично многообразиям, каждый орбифолдный атлас содержится в единственном максимальном атласе. Далее будем полагать, что орбифолды снабжены структурой максимального атласа.*

Нижеследующий пример из работы [17] показывает, что в отличие от многообразий и 2-орбифолдов, при $n \geq 3$, топологические пространства n-мерных орбифолдов в общем случае не являются локально евклидовыми.

Пример. Пусть образующая $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ группы $\Gamma =< \gamma \,|\, \gamma^2 > \simeq \mathbb{Z}_2$ определена равенством $\gamma(x) = -x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Пусть $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ – фактор-отображение, тогда фактор-пространство $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n/\Gamma$ – гладкий n-мерный орбифолд с одной орбифолдной точкой $a_1 = \phi(0)$, где 0 – начало координат. Заметим, что топологическое пространство орбифолда $\mathcal{N}$ стягиваемо.

Далее покажем, что точка a_1 не имеет окрестности, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_+$. Доказательство приведем для $\mathbb{R}^n$, поскольку для $\mathbb{R}^n_+$ оно аналогично.

Предположим обратное: пусть существует окрестность U точки a_1 и гомеоморфизм $\psi : \mathbb{R}^n \to U$. Не нарушая общности, можно считать, что $\psi(0) = a_1$. В таком случае сужение $\psi|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to U\setminus\{a_1\}$ также гомеоморфизм. Следовательно, топологические пространства $U\setminus\{a_1\}$ и $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ имеют изоморфные фундаментальные

группы. Так как разность $U\backslash\{a_1\}$ гомеоморфна прямому произведению прямой $\mathbb{R}^1$ и $(n-1)$-мерного проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$, то $\pi_1(U\backslash\{a_1\}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^1) \times \pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}_2$, так как группа $\pi_1(\mathbb{R}^1)$ тривиальна, а $\pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}_2$, поскольку $(n-1) \geq 2$. Однако, с другой стороны, $\pi_1(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \simeq 0$ при $n \geq 3$. Итак, получили равенство $\mathbb{Z}_2 = 0$, что неверно.

Противоречие демонстрирует тот факт, что топологическое пространство орбифолда $\mathcal{N}$ не является локально евклидовым. □

Определение 4.3. *Сингулярное множество Σ орбифолда $\mathcal{N}$ состоит из точек с нетривиальной орбифолдной группой.*

Предложение 4.1. *([16]) Пусть $x \in \Sigma$, а $\tilde{x}$ – лифт точки x на карту $\tilde{U}_x$ в окрестности точки x. Тогда Γ_x действует на касательном пространстве $T_{\tilde{x}}\tilde{U}_x$ и фиксирует подпространство $T_{\tilde{x}}\tilde{U}_x^{\Gamma_x}$.*

Определение 4.4. *Сингулярная размерность $sdim(x)$ определяется как размерность касательного пространства $T_{\tilde{x}}\tilde{U}_x^{\Gamma_x}$ в точке x.*

Предложение 4.2. *([10]) Сингулярная размерность $sdim(x)$ не зависит от выбора точки x.*

Определение 4.5. *Сингулярная страта Σ_i – это такое множество точек, что $\Sigma_i = \{x \in \Sigma \,|\, sdim(x) = i\}$.*

Определение 4.6. *Сингулярное множество – это объединение сингулярных страт Σ_i, т.е. $\Sigma = \cup_{i=0}^{n-1}\Sigma_i$.*

Определение 4.7. *Точки из $\Sigma_{\dim\mathcal{N}}$ будем называть регулярными, а точки из Σ_i, где $i < dim\mathcal{N}$, – сингулярными.*

Дадим эквивалентное определение регулярной точки орбифолда $\mathcal{N}$.

Определение 4.8. *Точка z орбифолда $\mathcal{N}$ – регулярная, если существует такая орбифолдная карта $(\tilde{U}_z, \Gamma_z, \phi_z)$, что $\Gamma_z = \{id_{\tilde{U}_z}\}$. Точка, не являющаяся регулярной, называется орбифолдной.*

Определение 4.9. *Орбифолд локально ориентируем, если все преобразования из группы Γ_x действуют на $\tilde{U}_x$ как сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы.*

Определение 4.10. *Орбифолд ориентируем, если, кроме того, вложение $i_{xy} : \tilde{U}_x \to \tilde{U}_y$ сохраняет ориентацию для его каждой карты.*

Таким образом, ориентация орбифолда задается последовательной ориентацией его карт.

Имеет место следующее известное утверждение.

Предложение 4.3. *Пусть $\mathcal{N}$ – орбифолд. Тогда $\Sigma_{dim\mathcal{N}}$ – открытое и плотное подмножество в $\mathcal{N}$, являющееся многообразием. Объединение $\Sigma_{dim\mathcal{N}} \cup \Sigma_{dim\mathcal{N}-1} \subset N$ – многообразие с краем $\partial(\Sigma_{dim\mathcal{N}} \cup \Sigma_{dim\mathcal{N}-1}) = \Sigma_{dim\mathcal{N}-1}$. Если орбифолд $\mathcal{N}$ связен, тогда $\Sigma_{dim\mathcal{N}}$ связно. Если $\mathcal{N}$ ориентируем, то $\Sigma_{dim\mathcal{N}-1} = \varnothing$*

Определение 4.11. *Полный подорбифолд $\mathcal{S}$ орбифолда $\mathcal{N}$ состоит из:*

1) *подпространства $S \subset N$, где S и N – подстилающие пространства орбифолдов $\mathcal{S}$ и $\mathcal{N}$, соответственно;*

661

2) *атласа, образованного линейными орбифолдными картами* $(\tilde{U}_x, \Gamma_x, \phi_x)$ *для каждой точки* $x \in S$ *и окрестности* W *этой точки в* N, $U_x \subset W$, *а также такого* Γ_x*-инвариантного линейного подпространства* $\tilde{V}_x \subset \tilde{U}_x$, *что* $(\tilde{V}_x, \Gamma_x/\Omega_x, \phi_x \mid_{\tilde{V}_x})$ – *орбифолдная карта для* $\mathcal{S}$, *где* $\Omega_x = \{\gamma : \gamma \mid_{\tilde{V}_x} = id\}$, $V_x := \phi_x(\tilde{V}_x/\Gamma_x) = U_x \cap S$.

Замечание 4.2. *Все карты в Определении 4.11 предполагаются гладкими.*

Определение 4.12. *Для двух орбифолдов* $\mathcal{N}$ *и* $\mathcal{P}$ *гладким орбифолдным отображением между* $\mathcal{N}$ *и* $\mathcal{P}$ *называется такая тройка* $\mathcal{F} = (f, \{\tilde{f}_x\}, \{\Theta_x\})$, *что:*

1) $f : N \to P$ – *непрерывное отображение между подстилающими топологическими пространствами орбифолдов* $\mathcal{N}$ *и* $\mathcal{P}$, *соответственно;*

2) *для каждой точки* $x \in N$ *определен гомоморфизм групп* $\Theta_x : \Gamma_x \to \Gamma_{f(x)}$;

3) *для каждой точки* $x \in N$ *заданы две карты* $(\tilde{U}_x, \Gamma_x)$ *и* $(\tilde{U}_{f(x)}, \Gamma_{f(x)})$ *в окрестностях точек* x *и* $f(x)$, *соответственно;*

4) *отображение* $\tilde{f}_x : \tilde{U}_x \to \tilde{U}_{f(x)}$ – *гладкий лифт, являющееся* Θ_x*-эквивариантным, т.е.* $\tilde{f}_x(\gamma y) = \Theta_x(\gamma)\tilde{f}_x(y)$ $\forall \gamma \in \Gamma_x$, $\forall y \in \tilde{U}_x$.

Замечание 4.3. *Из определения гладкого орбифолдного отображения вытекает, что регулярные точки могут отображаться как в регулярные, так и в сингулярные, а прообразом регулярной точки являются только регулярные точки.*

Определение 4.13. *Пусть* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{G}$ – *орбифолдные отображения* $\mathcal{N}$ *в* $\mathcal{P}$. *Такие два отображения* $\mathcal{F} = (f, \{\tilde{f}_x\}, \{\Theta_x^f\})$ *и* $\mathcal{G} = (g, \{\tilde{g}_x\}, \{\Theta_x^g\})$ *называются эквивалентными, если для любого* $x \in \mathcal{N}$ *существует такая орбифолдная карта* $(\tilde{U}_x, \Gamma_x)$, *что* $\tilde{f}_x \mid_{\tilde{U}_x} = \tilde{g}_x \mid_{\tilde{U}_x}$ *и* $\Theta_x^f = \Theta_x^g$.

Определение 4.14. *Гладкое орбифолдное отображение* $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ *называется обифолдным диффеоморфизмом, если существует такое орбифолдное отображение* $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$, *что* $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id_{\mathcal{N}}$ *и* $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = id_{\mathcal{P}}$, *где* id – *гладкое орбифолдное отображение, определенное тройкой, где все задействованные отображения являются тождественными.*

Определение 4.15. *Гладкое орбифолдное отображение* $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ *называется правильным (собственным), если отображение подстилающих пространств* $f : N \to P$ – *правильное, т.е. прообразы компактных множеств компактны.*

Предложение 4.4. *Если* $\mathcal{N}$ – *компактный орбифолд, то любое гладкое орбифолдное отображение* $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ *является правильным.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – орбифолдное отображение, где $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$ – орбифолды одинаковой размерности. Причем $f : N \to P$ – отображение подстилающих пространств орбифолдов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$, соответственно.

Пусть K – любое компактное подмножество в $\mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P}$ хаусдорфово по определению орбифолда, то K замкнуто как компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства P, а в силу непрерывности отображения f, прообраз любого замкнутого топологического пространства замкнут, поэтому $\mathcal{F}^{-1}(K)$ замкнуто в топологическом пространстве $\mathcal{N}$, которое по условию компактно. Следовательно, $\mathcal{F}^{-1}(K)$ – компактно как замкнутое подмножество компактного орбифолда $\mathcal{N}$.

Таким образом, отображение $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ правильное. □

662

Определение 4.16. *Если $\mathcal{N}$ – орбифолд, то произведение $\mathcal{N} \times [0,1]$ наделяется структурой орбифолда и состоит из точек вида $(x,t), x \in \Sigma$, $t \in [0,1]$, для которых орбифолдная группа $\Gamma_{(x,t)}$ изоморфна Γ_x.*

Включение $i_t : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \times [0,1]$ – гладкое орбифолдное отображение, где все определяемые данные являются включениями.

Определение 4.17. *Два гладких орбифолдных отображения $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ гладко гомотопны, если существует такое гладкое орбифолдное отображение $\mathfrak{F} : \mathcal{N} \times [0,1] \to \mathcal{P}$, что $\mathfrak{F} i_0 = \mathcal{F}$ и $\mathfrak{F} i_1 = \mathcal{G}$, где $\mathfrak{F} i_t = \mathfrak{F} \mid_{\mathcal{N} \times t}$ $\forall t \in [0,1]$.*

Замечание 4.4. *Гомотопия называется правильной, если отображение подстилающих пространств $F : N \times [0,1] \to P$ правильное (это утверждение сильнее, чем утверждение о правильности $\mathfrak{F} i_t$ $\forall t$).*

Определение 4.18. *Для заданного гладкого орбифолдного отображения $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ точка $x \in N$ называется регулярной, если $T_{\tilde{x}} \tilde{f}_x : T_{\tilde{x}} \tilde{U}_x \to T_{\tilde{f}(\tilde{x})} \tilde{U}_y$ – сюръективное линейное отображение, где $\tilde{x}$ – лифт x на $\tilde{U}_x$.*

Определение 4.19. *Точка $y \in P$ называется регулярным значением, если все точки $x \in f^{-1}(y)$ являются регулярными.*

Утверждение ниже является орбифолдным аналогом и обобщением теоремы Сарда [10].

Теорема 7. *([10]) Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – орбифолное отображение, тогда множество регулярных значений плотно в $\mathcal{P}$.*

Замечание 4.5. *Так как правильное отображение и множество критических точек замкнуты, то множество регулярных значений правильного отображения открыто и плотно.*

Теорема 8. [10] *Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$ – орбифолды и $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое орбифолдное отображение, а $y \in \mathcal{P}$ – регулярное значение. Тогда $\mathcal{F}^{-1}(y)$ имеет структуру полного подорбифолда размерности $dim\mathcal{N} - dim\mathcal{P}$. Если $\mathcal{N}$ имеет край и значение y также регулярно для $\mathcal{F} \mid_{\partial \mathcal{N}}$, тогда $\mathcal{F}^{-1}(y)$ – полный подорбифолд с краем, содержащимся в $\partial \mathcal{N}$.*

Замечание 4.6. *Имеются некоторые теоретические ограничения для условия регулярности точки при гладком орбифолдном отображении $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$, поэтому имеет место нижеследующая версия данной теоремы.*

Предложение 4.5. *Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое орбифолдное отображение и пусть $y \in \mathcal{P}$ – регулярное значение отображения $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}^{-1}(y)$ – полный подорбифолд и каждая точка $x \in \mathcal{F}^{-1}(y)$ имеет сингулярную размерность $sdim_{\mathcal{N}}(x) \geq dim\mathcal{P}$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{U}_x$ – карта в точке x, а $\tilde{x}$ – лифт для точки x. Тогда группа Γ_x действует на $T_{\tilde{x}} U_x$. Чтобы избежать громоздких обозначений, определим действие этой группы как умножение слева, т.е. $\gamma \cdot \tilde{v} = T\gamma_{\tilde{x}} \tilde{v}$. Обозначим $K_x = ker T_{\tilde{x}} \tilde{f}_x$ и $N_x = ker \Theta_x$. Теперь определим линейный оператор A_x как

$$A_x \tilde{v} = \tilde{v} - \frac{1}{|N_x|} \sum_{\gamma \in N_x} \gamma \cdot \tilde{v}.$$

Здесь $|N_x|$ определяет порядок N_x. Данный оператор имеет следующие соотношения. Если $\tilde{v} \in T_{\tilde{x}} \tilde{U}_x$, тогда $T_{\tilde{x}} \tilde{f}_x(\gamma \cdot \tilde{v}) = T_{\tilde{x}} \tilde{f}_x(\tilde{v})$ $\forall \gamma \in N_x$, следовательно, $T_{\tilde{x}} \tilde{f}_x(A_x \tilde{v}) = 0$,

663

т.е. $imA_x \subset K_x$. Кроме того, оператор A_x можно заменить действием оператора A_x^2, т.е. $A_x^2 = A_x$. Таким образом, $A_x : T_{\tilde{x}}\tilde{U}_x \to K_x$ – линейная инвариантная проекция N_x (которая может не быть сюрьективной).

Если $\tilde{v} \in kerA_x$, тогда $\tilde{v} = \frac{1}{|N_x|} \sum\limits_{\gamma \in N_x} \gamma \cdot \tilde{v}$, значит,

$$\delta\tilde{v} = \frac{1}{|N_x|} \sum_{\gamma} \delta \cdot (\gamma \cdot v) = \frac{1}{|N_x|} \sum_{\gamma} (\delta\gamma) \cdot v = \frac{1}{|N_x|} \sum_{\gamma' \in N_x} \gamma' \cdot v = \tilde{v} \ \ \forall \delta \in N_x.$$

Пока мы еще не использовали условия, что y – точка, в которой отображение является гладким. При рассмотрении этого случая N_x должна быть орбифолдной группой, т.е. $N_x = \Gamma_x^{\mathcal{N}}$. Из этого следует, что $sdim_{\mathcal{N}}(x) \geq dim\, ker A_x$ и, поэтому, $sdim_{\mathcal{N}}(x) \geq dim\, ker A_x = dim\mathcal{N} - dim\, im A_x \geq dim\mathcal{N} - dim K_x$ исходя из теоремы о деффекте ранга. Так как y – регулярное значение, то $dim K_x = dim\mathcal{N} - dim\mathcal{P}$, откуда следует, что $sdim_{\mathcal{N}}(x) \geq dim\mathcal{P}$. $\square$

Гладкий n-мерный орбифолд $\mathcal{N}$ разбивается на гладкие многообразия. Отметим, что многообразия орбифолдных точек различных типов могут иметь одинаковую размерность. Обозначим через Δ_k объединение k-мерных многообразий орбифолдных точек, а через Δ_n – многообразие регулярных точек орифолда $\mathcal{N}$.

Отсюда следует определение 4.20.

Определение 4.20. *Стратификацией орбифолда $\mathcal{N}$ называется семейство $\Delta(\mathcal{N}) = \{\Delta_k\}$, где $k \in i = \overline{1,n}$, а Δ_k – стратами.*

4.2 Степень орбифолдного отображения

В случае гладких отображений между многообразиями одинаковой размерности, если y – регулярное значение правильного отображения, тогда мощность $\#\mathcal{F}^{-1}(y)$ – локально постоянная функция. Однако для орбифолдных отображений это неверно, если только мы не введем веса для точек прообраза.

Пример 1. Пусть $\Gamma =< \gamma >$ – группа поворотов плоскости $\mathbb{R}^2$ с образующей γ, где $\gamma \simeq \mathbb{Z}_m$, $m \geq 2$, – поворот $\mathbb{R}^2$ вокруг точки 0 на угол $2\pi/m$. Порядок группы $|\Gamma| = m$.

Обозначим через $\mathbb{R}^2/\Gamma$ пространство орбит, тогда $\mathcal{N} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ – орбифолд.

Пусть $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{N} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ – фактор-отображение (проекция на пространство орбит). Точка $Q = \mathcal{F}(0) \in \mathcal{N}$ – единственная орбифолдная точка орбифолда $\mathcal{N}$. Для всех остальных точек вида $z = r\, e^{i\phi}$, $\phi \in [0; 2\pi]$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ отображение $\mathcal{F}$ определяется равенством $\mathcal{F}(z) = r\, e^{i\frac{\phi}{m}}$.

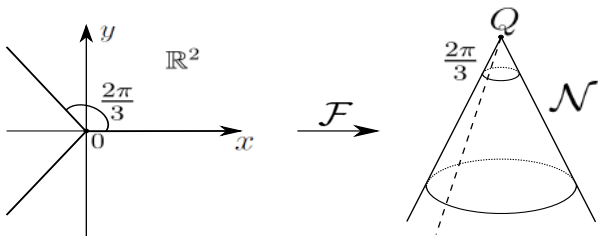


Рис. 4

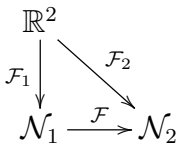
Прообраз $\mathcal{F}^{-1}(l)$ любого замкнутого луча $l \in \mathcal{N}$ с вершиной в точке Q равен объединению m различных лучей l_i, $i = 1, \ldots, m$, на плоскости $\mathbb{R}^2$ с вершиной в точке 0.

На Рис. 4 выше изображено данное отображение $\mathcal{F}$ для значения $m = 3$.

Пример 2. Пусть $\Gamma_1 =< \gamma_1 >$ – группа поворотов плоскости $\mathbb{R}^2$ с образующей γ_1, где $\gamma_1 \simeq \mathbb{Z}_2$ – поворот $\mathbb{R}^2$ вокруг точки 0 на угол $2\pi/2 = \pi$. Через $\mathbb{R}^2/\Gamma_1$ обозначим пространство орбит, а $\mathcal{N}_1 = \mathbb{R}^2/\Gamma_1$ – орбифолд. Пусть $\mathcal{F}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{N}_1 = \mathbb{R}^2/\Gamma_1$ – проекция на пространство орбит. Точка $Q_1 = \mathcal{F}_1(0)$ – единственная орбифолдная точка.

Аналогичным образом вводится орбифолд $\mathcal{N}_2 = \mathbb{R}^2/\Gamma_2$, где группа Γ_2 имеет образующую $\gamma_2 \simeq \mathbb{Z}_{2m}, m \geq 2$, – поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол $2\pi/2m = \pi/m$. Отображение $\mathcal{F}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{N}_2 = \mathbb{R}^2/\Gamma_2$ – проекция на пространство орбит $\mathbb{R}^2/\Gamma_2$. Точка $Q_2 = \mathcal{F}_2(0)$ – единственная орбифолдная точка.

При этом для отображения $\mathcal{F} : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ следующая диаграмма является коммутативной:



На Рис. 5 ниже изображено данное отображение $\mathcal{F}$ для $m = 3$.

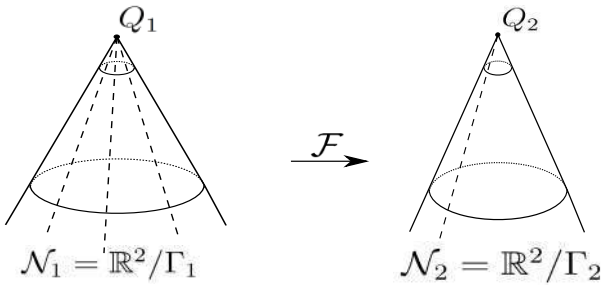


Рис. 5

Для одной линии-образующей орбифолда $\mathcal{N}_2$, не содержащей точку Q_2 будет m прообразов. Прообразом точки Q_2 является одна точка (орбифолдная точка переходит в орбифолдную). □

Таким образом, в данных примерах мощность прообраза $\mathcal{F}^{-1}(y)$ не является постоянной функцией, когда y принадлежит произвольной окрестности точки $Q_2 \in \mathcal{N}_2$, поэтому авторы статьи [4] Ф. Паскуотто и Т.О. Рот (F. Pasquotto, T. O. Rot) ввели понятие взвешенной мощности.

Определение 4.21. *Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$ – два орбифолда одинаковой размерности. Взвешенной мощностью прообраза регулярной точки $y \in \mathcal{P}$ гладкого правильного орбифолдного отображения $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ называется число*

$$\#\mathcal{F}^{-1}(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|} \tag{2}$$

Замечание 4.7. *Так как $|\Gamma_y|$ и $|\Gamma_x|$ – целые числа, то каждое слагаемое в формуле (2) представляет собой дробь.*

665

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – правильное и гладкое орбифолдное отображение между орбифолдами одинаковой размерности. Пусть x – регулярная точка орбифолда $\mathcal{N}$ и $y = f(x) \in \mathcal{P}$. Тогда число $\frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|}$ – целое.*

Доказательство. Для избежания возможного недоразумения, в доказательстве данной леммы мы будем обозначать орбифолдную группу, указывая орбифолд, которому она соответствует. Из Определения 4.12 следует, что отображение $\Theta_x : \Gamma_x^{\mathcal{N}} \to \Gamma_y^{\mathcal{P}}$ является гомоморфизмом групп.

Ядро $N_x = ker\,\Theta_x$ – нормальная подгруппа группы $\Gamma_x^{\mathcal{S}}$, где $\mathcal{S} = \mathcal{F}^{-1}(y)$

По условию, x – регулярная точка, значит, группа $\Gamma_x^{\mathcal{N}}$ тривиальна и поэтому ядро также тривиально. Следовательно, отображение Θ_x инъективно. Таким образом, $|\Gamma_x| = 1$ и в таком случае $\frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|} = |\Gamma_y|$, а $|\Gamma_y|$ – целое.□

Лемма 4.2. *Предположим, что $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое правильное орбифолдное отображение между орбифолдами одинаковой размерности, а y – регулярное значение $\mathcal{F}$. Тогда число $\#_\omega \mathcal{F}^{-1}(y)$ локально постоянное, где ω – прообраз другого регулярного значения z отображения $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Выберем орбифолдные карты U_y и U_x в окрестности y и $f^{-1}(y)$, соответственно, где $f : N \to P$ – отображение между подстилающими пространствами орбифолдов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$. После сужения U_y и U_x мы можем предположить следующее: U_y содержит только регулярные значения, $f^{-1}(U_y) \subset \cup_{x \in f^{-1}(y)} U_x$, а также существует лифт $\tilde{f}_x : \tilde{U}_x \to \tilde{U}_y$.

Если z – другое регулярное значение f, содержащееся в U_y, тогда z имеет лифты $|\Gamma_y|/|\Gamma_z|$ на $\tilde{U}_y$. Учитывая, что мощность $\#\tilde{f}_x^{-1}(y)$ является локальным инвариантом, мы можем предположить, проведя сужение карты орбифолда в окрестности точки y, что каждый из этих лифтов имеет ровно один прообраз в $\tilde{U}_x$.

При проектировании $\tilde{U}_x$ на U_x, некоторые из этих прообразов могут быть определены действием орбифолдной группы Γ_x, поэтому число точек, которые остались в U_x, есть

$$\frac{|\Gamma_y|/|\Gamma_z|}{|\Gamma_x|/|\Gamma_\omega|} = \frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|} \cdot \frac{|\Gamma_\omega|}{|\Gamma_z|},$$

где ω – общий прообраз z в U_x. Из эквивариантности следует, что все группы Γ_ω изоморфны. Таким образом, мы можем вычислить взвешенную мощность в точке z по формуле выше:

$$\#\mathcal{F}^{-1}(z) = \sum_{\omega \in f^{-1}(z)} \frac{|\Gamma_z|}{|\Gamma_\omega|} = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \sum_{\omega \in U_x \cap f^{-1}(z)} \frac{|\Gamma_z|}{|\Gamma_\omega|} = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|} \cdot \frac{|\Gamma_\omega|}{|\Gamma_z|} \cdot \frac{|\Gamma_z|}{|\Gamma_\omega|} =$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|} = \#_\omega \mathcal{F}^{-1}(y). \ \square$$

Определение 4.22. *Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – правильное и гладкое отображение между орбифолдами одинаковой размерности и пусть $y \in \mathcal{P}$ – регулярное значение для $\mathcal{F}$. Тогда степень по модулю два для отображения $\mathcal{F}$ в точке y определена так:*

$$deg_2(\mathcal{F}; y) = \#_\omega f^{-1}(y) \ mod\, 2.$$

Предложение 4.6. *Степень по модулю два локально постоянная.*

666

Лемма 4.3. *Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкие и правильные орбифолдные отображения между орбифолами одинаковой размерности. Пусть $\mathfrak{F} : \mathcal{N} \times [0;1] \to \mathcal{P}$ – правильная гомотопия между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Пусть $y \in P$ – точка, в которой отображение $f : N \to P$ является гладким. Предположим, что значение y регулярно для $\mathfrak{F}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ одновременно и что $\Sigma^{\mathcal{N}}_{dim\,\mathcal{N}-1} = \varnothing$. Тогда $deg_2(\mathcal{F}; y) = deg_2(\mathcal{G}; y)$.*

Доказательство. Итак, y – одновременно регулярная точка отображений $\mathfrak{F}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. По Теореме 8, $\mathfrak{F}^{-1}(y)$ – одномерный орбифолд с краем. Предложение 4.5 подразумевает, что для всех точек из $f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)$ реализуемое отображение является гладким, поэтому формула для степени будет считать количество точек в прообразе с учетом ориентации.

Для $(x,t) \in N \times [0;1]$ мы видим, что $sdim_{\mathcal{N}}(x) + 1 = sdim_{\mathcal{N}\times[0;1]}(x,t) \geq dim\,\mathcal{P} = dim\,\mathcal{N}$, причем неравенство следует из Предложения 4.5. Значит, мы можем предположить, что $\Sigma^{\mathcal{N}}_{dim\,\mathcal{N}-1} = \varnothing$, следовательно, $\Sigma^{\mathcal{N}\times[0;1]}_{dim(\mathcal{N}\times[0;1])-1} = \varnothing$ и для каждого элемента $(x,t) \in F^{-1}(y)$ заданное отображение является гладким, где $F : N \times [0;1] \to P$.

Таким образом, $F^{-1}(y)$ – компактное многообразие с краем $(f^{-1}(y) \times \{0\}) \cup (g^{-1}(y) \times \{1\})$. Количество компонент края компактного одномерного многообразия с краем четно, что провоцирует выполнение равенства $deg_2(\mathcal{F}; y) = deg_2(\mathcal{G}; y)$. □

Лемма 4.4. *Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое и правильное орбифолдное отображение между орбифолдами одинаковой размерности. Предположим, что орбифолд $\mathcal{P}$ связен и что $\Sigma^{\mathcal{N}}_{dim\,\mathcal{N}-1} = \varnothing$. Пусть $y, z \in \mathcal{P}$ – регулярные значения, в которых отображение является гладким. Тогда $deg_2(\mathcal{F}; y) = deg_2(\mathcal{F}; z)$.*

Доказательство. Напомним, что связное многообразие M однородно, если для любых $y, z \in M$ существует такая компактно опорная изотопия $h : M \times [0;1] \to M$, что $h_0 = id_M$ и $h_1(z) = y$.

Для каждого $t \in [0;1]$ отображение $h_t : M \to M$ – диффеоморфизм, поэтому все значения регулярны для h. По Предложению 4.3 гладкая часть $M = \Sigma^{\mathcal{P}}_{dim\,\mathcal{P}}$ – связное многообразие. Следовательно, для произвольных $y, z \in M$ существует компактно опорная изотопия $\mathcal{H} : M \times [0;1] \to M$, как указано выше. Так как изотопия компактно опорная в $M \times [0;1]$, она расширяется на орбифолдную изотопию $\mathcal{H} : \mathcal{P} \times [0;1] \to \mathcal{P}$, которая совпадает с $id_{\mathcal{P}\times[0;1]}$ вне компактного подмножества $M \times [0;1]$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{H}$. Орбифолдное отображение $\mathfrak{F}$ – гомотопия между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G} = \mathcal{F} \circ \mathcal{H}_1$. Тогда y – регулярное значение для $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathfrak{F}$ одновременно и, согласно Лемме 4.3, получаем, что $deg_2(\mathcal{F}; z) = deg_2(\mathcal{G}; y) = deg_2(\mathcal{F}; y)$. □

На следующем этапе мы объединим инвариантность в гладких, регулярных точках с локальной инвариантностью степени по модулю два, чтобы доказать инвариантность во всех регулярных значениях.

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое и правильное орбифолдное отображение между орбифолдами одинаковой размерности. Предположим, что орбифолд $\mathcal{P}$ связен и что $\Sigma^{\mathcal{N}}_{dim\,\mathcal{N}-1} = \varnothing$. Пусть $y, z \in \mathcal{P}$ – регулярные значения $\mathcal{F}$. Тогда $deg_2(\mathcal{F}; y) = deg_2(\mathcal{F}; z)$.*

Доказательство. Ввиду Леммы 4.4 осталось доказать, что степень инвариантна для правильных точек, в которых отображение не обязательно является гладким. Это следует из локальной инвариантности: предположим, что y, z – регулярные точки, но в них отображение не является гладким. Поскольку гладкая страта

667

$\Sigma^{\mathcal{P}}_{dim\,\mathcal{P}}$ – открытое и плотное подмножество в $\mathcal{P}$ и регулярные значения отображения $\mathcal{F}$ – также открытые и плотные, то существуют такие регулярные значения y' и z', достаточно близкие к y и z, соответственно, что $deg_2(\mathcal{F}; y) = deg_2(\mathcal{F}; y')$ и $deg_2(\mathcal{F}; z) = deg_2(\mathcal{F}; z')$.

Если мы сгруппируем это с выводом Леммы 4.4, то убедимся, что $deg_2(\mathcal{F}; y) = deg_2(\mathcal{F}; y') = deg_2(\mathcal{F}; z') = deg_2(\mathcal{F}; z)$. □

Предложение 4.7. *Для каждой точки $x \in f^{-1}(y)$ выберем карты U_x и U_y в точках x и y, соответственно, причем $f : N \to P$ – отображение между подстилающими пространствами орбифолдов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$. Пусть $\tilde{f}_x$ – лифт для f в этих картах и пусть $\tilde{x}$ – лифт x. Знак $sgn\,(T_{\tilde{x}}\tilde{f}_x)$, который указывает на сохранение отображением ориентации, не зависит от выбора лифта $\tilde{x}$.*

Напомним, что отображение $\mathcal{F}$ называется правильным, если прообраз любого компактного подмножества в $\mathcal{P}$ компактен в топологическом пространстве $\mathcal{N}$.

Определение 4.23. *Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – правильное и гладкое отображение между ориентируемыми орбифолдами одинаковой размерности и $y \in \mathcal{P}$ – регулярное значение для $\mathcal{F}$. Определим степень (целочисленную или ориентируемую) для $\mathcal{F}$ в точке y следующим образом:*

$$deg(\mathcal{F}; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn\,(T_{\tilde{x}}\tilde{f}_x) \cdot \frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|} \tag{3}$$

Замечание 4.8. *Для целочисленной степени характерны инвариантные соотношения, присущие степени по модулю два.*

Теорема 10. *Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – правильное и гладкое отображения между орбифолдами одинаковой размерности. Предположим, что орбифолд $\mathcal{P}$ – связен и $y \in \mathcal{P}$ – регулярное значение для $\mathcal{F}$. Тогда:*

1) степень $deg\mathcal{F}$ определена корректно, т.е. не зависит от выбора регулярного значения y;

2) степень отображения орбифолдов – гомотопический инвариант.

Доказательство. В Лемме 4.2 доказано, что если знак $sgn\,(T_{\tilde{x}}\tilde{f}_x)$ локально постоянен, то степень $deg(\mathcal{F}; y)$ также локально постоянна в каждой карте U_x.

Предположим, что $\Sigma^{\mathcal{N}}_{dim\,\mathcal{N}-1} = \varnothing$, то прообраз прообраз регулярной точки гладкой гомотопии – компактное одномерное многообразие с краем, т.е. ориентированный отрезок. В этом случае утверждение 2) также выполняется.

Следовательно, доказательства Леммы 4.4 и Теоремы 9 дословно переносятся на случай ориентированной степени. □

Итак, из Теорем 9 и 10 следует, что степень не зависит от выбора регулярного значения y, поэтому имеют место равенства: $deg_2(\mathcal{F}) = deg_2(\mathcal{F}; y)$ и $deg\,(\mathcal{F}) = deg\,(\mathcal{F}; y)$, где $y \in \mathcal{P}$ – любое регулярное значение $\mathcal{F}$.

Следствие 4.1. *Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$ – связные, ориентируемые орбифолды и $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое и правильное орбифолдное отображение. Предположим, что $\Sigma^{\mathcal{N}}_{dim\,\mathcal{N}-1} = \varnothing$. Тогда, если выполняется одно из неравенств $deg_2(\mathcal{F}) \neq 0$ или $deg\,(\mathcal{F}) \neq 0$, то отображение $\mathcal{F}$ сюръективно.*

668

Еще одним следствием независимости орбифолдного отображения от выбора регулярного значения является следующее Предложение 4.8, отражающее мультипликативность степени по отношению к композиции.

Предложение 4.8. *Пусть $\mathcal{F}:\mathcal{N}\to\mathcal{P}$ и $\mathcal{G}:\mathcal{P}\to\mathcal{S}$ – два гладких и правильных орбифолдных отображения между ориентированными орбифолдами одинаковой размерности. Предположим, что орбифолды $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ – связные и $\Sigma^{\mathcal{N}}_{dim\,\mathcal{N}-1}=\Sigma^{\mathcal{P}}_{dim\,\mathcal{P}-1}=\varnothing$. Тогда для любого регулярного значения y композиции отображений $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}:\mathcal{N}\to\mathcal{S}$ справедливы равенства:*

$$deg_2(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})=deg_2(\mathcal{G})\,deg_2(\mathcal{F})\ \text{и}\ deg\,(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})=deg\,(\mathcal{G})\,deg\,(\mathcal{F}),$$

если все указанные степени определены.

Доказательство. Докажем это предложение для случая целочисленной степени, для степени по модулю два доказательство аналогично.

Пусть z – регулярное значение для композиции $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$. Тогда z обязано быть регулярным значением для $\mathcal{G}$, в частности, и все $y\in\mathcal{G}^{-1}(z)$ должны быть регулярными значениями для $\mathcal{F}$. Получим следующую цепочку соотношений:

$$deg\,(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})=\sum_{x\in(g\circ f)^{-1}(z)} sgn\,(T_{\tilde{x}}\widetilde{(g\circ f)}_x)\cdot\frac{|\Gamma_z|}{|\Gamma_x|}=$$

$$=\sum_{y\in g^{-1}(z)}\ \sum_{x\in f^{-1}(y)} sgn\,(T_{\tilde{y}}\tilde{g}_y\,T_{\tilde{x}}\tilde{f}_x)\cdot\frac{|\Gamma_z|}{|\Gamma_y|}\cdot\frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|}=$$

$$=\sum_{y\in g^{-1}(z)} sgn\,(T_{\tilde{y}}\tilde{g}_y)\cdot\frac{|\Gamma_z|}{|\Gamma_y|}\sum_{x\in f^{-1}(y)} sgn\,(T_{\tilde{x}}\tilde{f}_x)\cdot\frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_x|}=$$

$$=\sum_{y\in g^{-1}(z)} sgn\,(T_{\tilde{y}}\tilde{g}_y)\cdot\frac{|\Gamma_z|}{|\Gamma_y|}\cdot deg\,(\mathcal{F};y)=deg\,(\mathcal{G})\,deg(\mathcal{F}).$$

Подчеркнем, что мы существенно использовали тот факт, что степень отображения $\mathcal{F}$ не зависит от выбора регулярного значения $y\in\mathcal{S}$. □

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{F},\mathcal{G}:\mathcal{N}\to\mathcal{P}$ – два правильных орбифолдных отображения между ориентированными орбифолдами одинаковой размерности, причем для них отображения подстилающих пространств $f,g:N\to P$ одинаковы. Пусть также орбифолд $\mathcal{P}$ связен и $\Sigma^{\mathcal{N}}_{dim\,\mathcal{N}-1}=\varnothing$. Тогда справедливы равенства:*

$$deg_2(\mathcal{F})=deg_2(\mathcal{G})\ \text{и}\ deg\,(\mathcal{F})=deg\,(\mathcal{G})$$

Доказательство. Так как множество регулярных значения для отображений $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – открытые и плотные подмножества в $\mathcal{P}$, то для $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ существует общее регулярное значение в $y\in\mathcal{P}$.

При подсчете степени отображения по модулю два в точке $y\in\mathcal{P}$, видно, что степень отображения формируется за счет количества прообразов регулярной точки y, а также порядка орбифолдной группы этих прообразов. Согласно Теореме 10, отображения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не зависят от выбора регулярного значения y, а также от класса гомотопии этих отображений.

В случае ориентированной степени, появляющееся дополнительное слагаемое и его знак также определяются отображением подстилающих топологических пространств.

Следовательно, указанные в утверждении теоремы равенства выполняются. □

669

5 Новое определение степени отображения орбифолдов

Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$ – связные, компактные, гладкие, ориентированнные n-мерные орбифолды. Пусть $\mathcal{F}: \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое отображение между $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$.

Будем обозначать через $\Delta_n^{\mathcal{N}}$ и $\Delta_n^{\mathcal{P}}$ – n-мерные страты орбифолдов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$, соответственно. Из теории орбифолдов известно что, $\Delta_n^{\mathcal{N}}$ и $\Delta_n^{\mathcal{P}}$ – это связные, гладкие, n-мерные подмногообразия в $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$, соответственно.

Пусть $y \in \Delta_n^{\mathcal{P}}$ – регулярная точка отображения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathcal{N}$, тогда из определения гладкого орбифолдного отображения $\mathcal{F}$ вытекает, что $\mathcal{F}^{-1}(y) \subset \Delta_n^{\mathcal{N}}$.

Будем обозначать множество регулярных точек орбифолда $\mathcal{P}$ при отображении $\mathcal{F}: \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ как $\mathcal{P}_{reg}$.

Для точки $x \in \mathcal{N}$ обозначим $\epsilon(x)$ знак якобиана отображения $\mathcal{F}$ в точке x. Положим $\epsilon(x) = +1$, если якобиан отображения $\mathcal{F}$ в точке x положителен и $\epsilon(x) = -1$, если знак детерминанта этой же матрицы Якоби в точке x отрицателен. В силу ориентируемости $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$, число $\epsilon(x)$ не зависит от выбора карт орбифолдных атласов.

Определение 5.1. *Пусть $\mathcal{F}: \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое отображение компактных орбифолдов размерности n. Степенью отображения $\mathcal{F}$ в регулярной точке $y \in \Delta_n^{\mathcal{P}}$ будем называть число*

$$Deg(\mathcal{F}, y) := \sum_{x \in \mathcal{F}^{-1}(y)} \epsilon(x). \tag{4}$$

Определение 5.2. *Пусть $\mathcal{F}: \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое отображение орбифолдов одинаковой размерности n. Степенью отображения $\mathcal{F}$ будем называть число*

$$Deg\mathcal{F} := Deg(\mathcal{F}, y), \tag{5}$$

где y – произвольная точка из пересечения $\mathcal{P}_{reg} \cap \Delta_n^{\mathcal{P}}$.

Для доказательства следующей Теоремы 12, приведем известную из топологии Лемму 5.1.

Лемма 5.1. *Подмножество S топологического пространства X всюду плотно в X тогда и только тогда, когда для любого открытого подмножества U в X пересечение $U \cap S \neq \varnothing$.*

Теорема 12. *Пусть $\mathcal{F}: \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ – гладкое отображение орбифолдов одинаковой размерности n. Тогда:*

1) *определение степени $Deg\mathcal{F}$ корректно, причем $Deg\mathcal{F} \in \mathbb{Z}$;*
2) *степени $Deg\mathcal{F}$ и $\deg f$ совпадают, т.е. $Deg\mathcal{F} = \deg f$;*
3) *степень $Deg\mathcal{F}$ является гомотопическим инвариантом.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Так как множество регулярных точек гладкого отображения $\mathcal{F}$ орбифолдов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{P}$ всюду плотно в $\mathcal{P}$ по обобщенной Теореме Сарда для орбифолдов, и $\Delta_n^{\mathcal{P}}$ – открытое всюду плотное подмножество в $\mathcal{P}$, то, согласно Лемме 5.1, $\mathcal{P}_{reg} \cap \Delta_n^{\mathcal{P}} \neq \varnothing$. Следовательно, существует такая регулярная точка y, что $y \in \mathcal{P}_{reg} \cap \Delta_n^{\mathcal{P}}$.

Возможны два случая.

670

Случай 1. $y \notin \mathcal{F}(\mathcal{N})$, тогда $\mathcal{F}^{-1}(y) = \varnothing$. Следовательно, $Deg(\mathcal{F}, y) = 0$.

Случай 2. $y \in \Delta_n^{\mathcal{P}} \cap \mathcal{F}(\mathcal{N})$, поэтому $\mathcal{F}^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset \Delta_n^{\mathcal{N}}$, так как в несингулярную точку $y \in \Delta_n^{\mathcal{P}}$ отображаются только несингулярные точки орбифолда $\mathcal{N}$. Следовательно, прообраз $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}_{reg} \cap \Delta_n^{\mathcal{P}}) \subset \Delta_n^{\mathcal{N}}$. Т.е. все x_i, $i = \overline{1,k}$ несингулярные. Тогда отображение $\mathcal{F}$ локально постоянно в окрестности любой точки x_i, $i = \overline{1,k}$, а поэтому определены числа $\epsilon(x_i) = \pm 1 \ \forall i = \overline{1,k}$.

Таким образом, корректно определено целое число $Deg(\mathcal{F}, y) = \sum\limits_{i=1}^{k} \epsilon(x_i)$ и утверждение 1) доказано.

Докажем пункт 2). Новая формула (5) для вычисления степени отображения орбифолдов совпадает с ранее введенной формулой (3), поэтому имеет место утверждение 2).

Докажем утверждение 3). Согласно 2), $Deg\mathcal{F} = deg\, f$, поэтому $Deg\mathcal{F}$ также является гомотопическим инвариантом. □

Итак, преимущество нового Определения 5.2 степени $Deg\mathcal{F}$ гладкого отображения орбифолдов $\mathcal{F} : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ заключается в более простом способе вычисления степени отображения гладких орбифолдов, поскольку нет необходимости обращения к группам орбифолдности.

6 Примеры

Пример 1. Во-первых, опишем процесс построения компактного орбифолда $\mathcal{N}$, подстилающим пространством которого является конус.

Пусть $OXYZ$ – прямоугольная система координат в пространстве $\mathbb{R}^3$, где будем рассматривать единичную сферу $\mathbb{S}^2$ как множество точек

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Пусть задана группа Γ с двумя образующими γ_1 и γ_2, т.е. $\Gamma =< \gamma_1, \gamma_2 >$, где γ_1 – поворот сферы $\mathbb{S}^2$ на угол $2\pi/m$ относительно точек северного и южного полюса, а γ_2 – отражение относительно плоскости XOY.

Обозначим через $\mathbb{S}^2/\Gamma$ пространство орбит, тогда $\mathcal{N} = \mathbb{S}^2/\Gamma$ – орбифолд.

Процесс построения данного орбифолда показан ниже на Рис. 6.

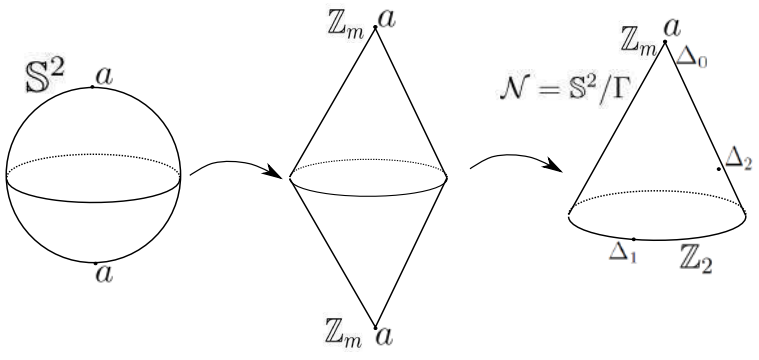


Рис. 6

671

Таким образом, мы получили компактный орбифолд $\mathcal{N} = \mathbb{S}^2/\Gamma$, который является конусом и имеет стратификацию $\Delta(\mathcal{N}) = \{\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2\}$.

Теперь рассмотрим орбифолдное отображение $\mathcal{F} : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ между двумя орбифолдами $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, построенными по указанному выше алгоритму.

Конкретно: орбифолд $\mathcal{N}_1$ получен факторизацией единичной сферы $\mathbb{S}^2$ по группе Γ_1 с двумя образующими γ_1' и γ_2', т.е. $\Gamma_1 =< \gamma_1', \gamma_2' >$, где $\gamma_1' \simeq \mathbb{Z}_m$ – поворот на угол $2\pi/m$ относительно точки Q_1; γ_2' – отражение относительно плоскости XOY.

Орбифолд $\mathcal{N}_2$ также получен факторизацией единичной сферы $\mathbb{S}^2$ по группе Γ_2 с двумя образующими $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, т.е. $\Gamma_2 =< \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 >$, где $\tilde{\gamma}_1 \simeq \mathbb{Z}_{4m}$ – поворот на угол $2\pi/4m = \pi/2m$, а $\tilde{\gamma}_2$ – отражение относительно плоскости XOY.

Найдем образ точки сферы $\mathbb{S}^2$ с координатам $(x_1, y_1, z_1), z_1 \geq 0$, при факторотображении $\mathcal{F}_1 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/\Gamma_1$. Для этого перейдем к сферическим координатам, где положим $r = 1$, так как сфера $\mathbb{S}^2$ – единичная. Получим

$$(x_1, y_1, z_1) = (sin\,\theta_1\, cos\,\phi_1, sin\,\theta_1\, sin\,\phi_1, cos\,\theta_1),$$

где $\theta_1 \in [0; \pi]$, $\phi_1 \in [0; 2\pi]$.

В результате действия образующей γ_1' заданная точка перейдет в точку с координатами $(sin\,\theta_1\, cos\,\frac{\phi_1}{m}, sin\,\theta_1\, sin\,\frac{\phi_1}{m}, cos\,\theta_1)$, действие образующей γ_2 не изменит координаты этой точки, поскольку она выбрана так, что ее аппликата $z_1 \geq 0$.

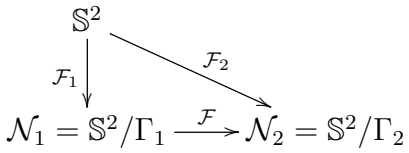
Выберем точку $(x_2, y_2, z_2), z_2 < 0$, тогда в результате действия композиции $\gamma_2' \circ \gamma_1'$ она перейдет в точку с координатами

$$(sin\,\theta_2\, cos\,\frac{\phi_2}{m}, sin\,\theta_2\, sin\,\frac{\phi_2}{m}, -cos\,\theta_2),$$

где $\theta_2 \in [0; \pi]$, $\phi_2 \in [0; 2\pi]$.

Таким образом, определено отображение $\mathcal{F}_1 : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{N}_1 = \mathbb{S}^2/\Gamma_1$. Аналогичным образом определяется отображение для орбифолда $\mathcal{N}_2$, т.е. $\mathcal{F}_2 : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{N}_2 = \mathbb{S}^2/\Gamma_2$.

При этом, для отображения $\mathcal{F} : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ следующая диаграмма коммутативна:



На Рис. 7 изображено отображение $\mathcal{F} : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$.

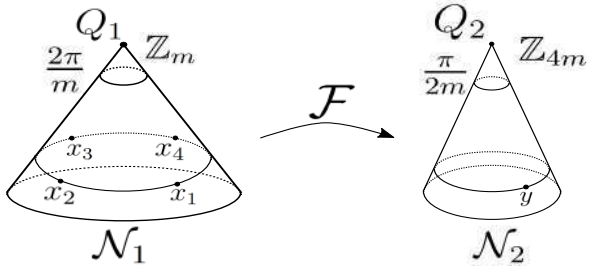


Рис. 7

Для произвольной регулярной точки y орбифолда $\mathcal{N}_2$ множество прообразов состоит из четырех точек $x_i, i = 1, \ldots, 4$. Кроме того, дифференциал отображения $\mathcal{F}$ сохраняет ориентацию. Поскольку точки $y, x_i, i = 1, \ldots, 4$, – регулярные, то дроби $\frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_{x_i}|}$ в формуле (3) под знаком суммы равны 1.

Вычислим степень орбифолдного отображения $\mathcal{F}$ по формуле (3):

$$deg(\mathcal{F}, y) = \sum_{i=1}^{4} \frac{|\Gamma_y|}{|\Gamma_{x_i}|} = \sum_{i=1}^{4} 1 = 4.$$

Применяя новую формулу (5) для вычисления степени отображения между орбифолдами $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, получим: $Deg\mathcal{F} = Deg(\mathcal{F}, z) = \sum\limits_{j=1}^{4} 1 = 4$, поскольку множество прообразов несингулярной точки $z \in \Delta_2^{\mathcal{N}_2}$ равно четырем.

Пример 2. Рассмотрим плохой орбифолд $\mathcal{N}_3$, подстилающая поверхность которого – сфера $\mathbb{S}^2$. Такой орбифолд называется "Каплей".

Введем две орбифолдные карты, целиком покрывающие в пространстве $\mathbb{R}^3$ сферу $\mathbb{S}^2$, заданную множеством точек (x, y, z), которые удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Для этого воспользуемся Определением 4.1 и зададим две карты: $(\mathbb{S}^2\backslash\{b_1\}, \mathbb{Z}_m, \phi_1)$ и $(\mathbb{S}^2\backslash\{a_1\}, id, \phi_2)$, где точки a_1 и b_1 – северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^2$, соответственно, а группа $\mathbb{Z}_m$ – группа вращений единичной сферы $\mathbb{S}^2$ без точки южного полюса b_1 на угол $2\pi/m$, $m \geq 2$, относительно точки a_1. Отображения ϕ_1 и ϕ_2 определены следующим образом:

$$\phi_1 : \mathbb{S}^2\backslash\{b_1\} \to (\mathbb{S}^2\backslash\{b_1\})/\mathbb{Z}_m;\ \phi_2 : \mathbb{S}^2\backslash\{a_1\} \to \mathbb{S}^2\backslash\{a_1\}.$$

Таким образом, эти две карты задают орбифолдный атлас, а он, в свою очередь, задает орбифолд $\mathcal{N}_3$ с одной орбифолдной точкой a_1.

В таком случае, переходя к сферическим координатам, будем иметь следующее: точки на единичной сфере вида $(x_3, y_3, z_3) = (sin\,\theta_3\, cos\,\phi_3, sin\,\theta_3\, sin\,\phi_3, cos\,\theta_3)$ перейдут в точки $(x_3', y_3', z_3') = (sin\,\theta_3\, cos\,\frac{\phi_3}{m}, sin\,\theta_3\, sin\,\frac{\phi_3}{m}, cos\,\theta_3)$, где $\theta_3 \in [0; \pi]$, $\phi_3 \in [0; \pi]$.
Таким образом определено гладкое отображение $\mathcal{F}_3 : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{N}_3$.

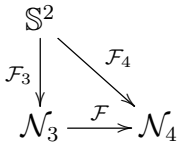
Аналогично определим орбифолд $\mathcal{N}_4$, для которого атлас состоит из двух таких карт $(\mathbb{S}^2\backslash\{b_2\}, \mathbb{Z}_{8m}, \phi_3)$ и $(\mathbb{S}^2\backslash\{a_2\}, id, \phi_4)$, что точки a_2 и b_2 – северный и южный полюс единичной сферы $\mathbb{S}^2$, соответственно, а группа $\mathbb{Z}_{8m}$ – группа вращений сферы $\mathbb{S}^2$ без точки южного полюса b_2 на угол $2\pi/8m = \pi/4m$ относительно точки a_2. Отображения ϕ_3 и ϕ_4 определены следующим образом:

$$\phi_3 : \mathbb{S}^2\backslash\{b_2\} \to (\mathbb{S}^2\backslash\{b_2\})/\mathbb{Z}_{8m};\ \phi_4 : \mathbb{S}^2\backslash\{a_2\} \to \mathbb{S}^2\backslash\{a_2\}.$$

Итак, эти две карты задают орбифолдный атлас, а он, в свою очередь, задает орбифолд $\mathcal{N}_4$ с одной орбифолдной точкой a_2.

В таком случае, переходя к сферическим координатам, будем иметь следующее: точки на единичной сфере вида $(x_4, y_4, z_4) = (sin\,\theta_4\, cos\,\phi_4, sin\,\theta_4\, sin\,\phi_4, cos\,\theta_4)$ будут переходить в точки $(x_4', y_4', z_4') = (sin\,\theta_4\, cos\,\frac{\phi_4}{8m}, sin\,\theta_4\, sin\,\frac{\phi_4}{8m}, cos\,\theta_4)$, где
$\theta_4 \in [0; \pi]$, $\phi_4 \in [0; \pi]$.
Итак, определено гладкое отображение $\mathcal{F}_4 : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{N}_4$.

Существует гладкое отображение $\mathcal{F} : \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_4$, удовлетворяющее коммутативной диаграмме:



Отображение $\mathcal{F}$ переводит орбифолдные точки в орбифолдные. Несингулярная точка южного полюса b_1 орбифолда $\mathcal{N}_3$ при таком отображении перейдет в сингулярную точку b_2 орбифолда $\mathcal{N}_4$, т.е. $\mathcal{F}(b_1) = b_2$.

Отображение орбифолдов $\mathcal{F} : \mathcal{N}_3 \to \mathcal{N}_4$ изображено на Рис. 8.

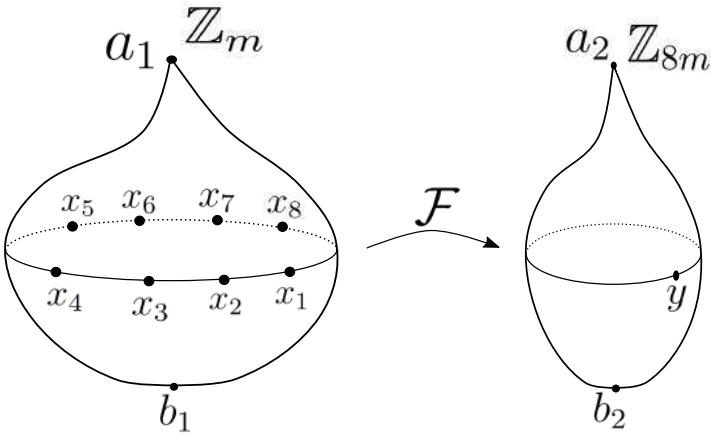


Рис. 8

Аналогично предыдущему примеру, прообразом регулярной точки $y \in \Delta_2^{\mathcal{N}_4}$ является множество из восьми точек x_i, $i = 1, \ldots, 8$. Считаем сферу $\mathbb{S}^2$ ориентируемой, тогда группы Γ_1 и Γ_2 сохраняют ориентацию $\mathbb{S}^2$. Заметим, что отображения $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_4$ сохраняют ориентацию, поэтому орбифолды $\mathcal{N}_3$ и $\mathcal{N}_4$ ориентируемые, а из коммутативности диаграммы следует, что отображение $\mathcal{F}$ сохраняет ориентацию.

Применяя новую формулу (5) для вычисления степени отображения между орбифолдами $\mathcal{N}_3$ и $\mathcal{N}_4$, получим: $Deg\mathcal{F} = Deg(\mathcal{F}, y) = \sum\limits_{j=1}^{8} 1 = 8$, поскольку множество прообразов регулярной точки $y \in \Delta_2^{\mathcal{N}_4}$ равно восьми. $\square$

7 Заключение

Резюмируя осуществленные изыскания, можно сказать, что материал данной работы может найти свое применение в теории орбифолдов и их приложений. Материал дипломной работы проиллюстрирован примерами, позволяющими более глубоко изучить аспекты темы, которой посвящена работа.

Таким образом, поставленные в выпускной квалификационной работе задачи решены.

674

Список литературы

[1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – 2-е изд., перераб. – Москва: Наука, 1986.

[2] Хатчер А. Алгебраическая топология / Пер. с англ. В. В. Прасолова под ред. Т. Е. Панова. – Москва: МЦНМО, 2011.

[3] Прасолов В. В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии – Москва: МЦНМО, 2004.

[4] Pasquotto, F., Rot T. O. Degree theory for orbifolds. Elsevier: Topology and its Applications (v. 282, 107326), 2020.

[5] Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии – Москва: Наука, 1981.

[6] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[7] Brouwer, L. E. J. "Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten". Mathematische Annalen. 71 (1): 97–115. 1911.

[8] William P. Thurston. The Geometry and Topology of Three-Manifolds –Electronic version 1.1 – March 2002.

[9] I. Satake. On a generalization of the notion of manifold – USA, 1956.

[10] Borzellino, J. E., Brunsden, V. Elementary orbifold differential topology. Topology and its Applications, 159(17): 3583 - 3589. 2012.

[11] Zhukova N. I. Automorphism groups of elliptic G-structures on orbifolds – Journal of Geometry and Physics 132, 2018.

[12] Bagaev A. V., Zhukova N.I. An analog of Chern's conjecture for the Euler–Satake characteristic of affine orbifolds – Journal of Geometry and Physics 142, 2019.

[13] Жукова Н. И. Геометрия слоений со связностями – Нижний Новгород, 2014.

[14] Nima Rasekh. A Short Introduction to Orbifolds, 2014.

[15] Jianquan Ge. Proof of Chern's conjecture on Affine Manifolds. Beijing Normal University, Beijing 100875, P.R. China, 2020.

[16] G. Dragomir, The stratification of singular locus and closed geodesics on orbifolds, 2015.

[17] Багаев А. В., Жукова Н. И. Группы изометрий римановых орбифолдов. Сиб. мат. журнал, 2007. Том 48, № 4.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Миллера Алексея Юрьевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием “Графы преобразований узлов” являются: Определение 17, Теорема 2, Теорема 3, Теорема 4, Теорема 5, Определение торических вложенных перестроек и описание графа вложенных перестроек вдоль торических лент из параграфа 4, в том числе Теорема 6, Теорема 7, Лемма 13, Лемма 14, Лемма 15, Лемма 16, Теорема 8, Определение 26, Определение 27, Определение 28, Определение 29, Теорема 9.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 января 2019 г. по 10 июня 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: Gordian graph, Gordian distance, local move, band surgery, H(n)-move, #-move, Farey graph, в выдаче поисковиков было исследовано 44 статьи (список см. в Списке литературы выпускной квалификационной работы) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем доктором ф.-м. наук, профессором СПбГУ, ведущим научным сотрудником ПОМИ РАН Андреем Валерьевичем Малютиным.
- Проведено выступление на Петербургском топологическом семинаре имени Рохлина (руководитель семинара профессор, доктор ф.-м. наук Нежинский Владимир Михайлович).
- Проведена консультация с рецензентом работы доктором ф.-м. наук профессором РАН, ведущим сотрудником МИАН Дынниковым Иваном Алексеевичем.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других

участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоялась 25 июня 2020. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись:  Миллер Алексей Юрьевич
31 мая 2021 г. Санкт-Петербург, Россия

ОТЗЫВ научного руководителя
на выпускную квалификационную работу
Миллера Алексея Юрьевича
по теме «Графы преобразований узлов»

Представленная Алексеем квалификационная работа относится к теории узлов и зацеплений. В работе развивается направление, изучающее преобразования узлов и зацеплений с точки зрения графов этих преобразований. Графом преобразования называется простой граф, вершины которого – в типичном случае – суть рассматриваемые с точностью до объемлемой изотопии ручные неориентированные зацепления (в трехмерном пространстве или трехмерной сфере), и две вершины соединены ребром, если и только если одно из этих зацеплений получается из другого с помощью данного преобразования. Подход с концентрацией на графах преобразований позволяет, с одной стороны, по новому взглянуть на некоторые известные задачи теории узлов, а с другой – открывает самостоятельное интересное направление, а также дает нетривиальные примеры сложных графов и метрических пространств. Мотивировка работы возникла из ряда вопросов о гиперболических и так называемых лернейских узлах, допускающих переформулировку в терминах локальных свойств графа вложенных перестроек, при этом в качестве задач ставились изучение связанных с лернейскими узлами локальных свойств графа вложенных перестроек и общее освоение и развитие теории графов преобразований зацеплений.

Алексею удалось и найти ответы на часть из комплекса вопросов, возникающих из теории лернейских узлов (теоремы 3 и 4 работы о локальных свойствах графа вложенных перестроек), и достаточно далеко продвинуться в освоении и систематизации известных результатов о преобразованиях и в дальнейшем развитии изучаемого направления (в работе доказывается ряд новых локальных и глобальных свойств графов известных преобразований, вводятся и изучаются новые классы преобразований).

Построение работы в значительной степени носит синтетический характер, а представленные в работе результаты имеют разный уровень сложности, что присуще работам, направленным на общее развитие теории; часть результатов были получены совместно, часть результатов Алексей получил самостоятельно. Результаты работы, касающиеся графа вложенных перестроек, вошли в состав статьи «Лернейские узлы и вложенные перестройки» (Ю. С. Белоусов, М. В. Карев, А. В. Малютин, А. Ю. Миллер, Е. А. Фоминых). Работа имеет солидный объем – более сорока страниц. Отмечу, что текст работы неоднороден по уровню проработанности. Это объясняется тем, что на финальном этапе подготовки работы при выборе между оптимизацией текста и включением в работу свежих результатов выбор сознательно был сделан в пользу включения свежеполученных результатов. При этом те части текста, работу над которыми Алексей успел завершить, написаны превосходно. К дополнительным достоинствам работы стоит отнести большое количество качественных рисунков, наличие которых в работах по теории узлов играет немаловажную роль, а также подробный, тщательно подобранный и систематизированный список литературы.

Склоняюсь к тому, что работа заслуживает оценки «отлично», рассматривая в качестве решающего фактора наличие среди многочисленных представленных в работе результатов достаточного количества новых, актуальных и при этом полученных Алексеем самостоятельно теорем.

«13» июня 2020 г. Малютин А.В.

Санкт-Петербургский государственный университет

МИЛЛЕР Алексей Юрьевич

Выпускная квалификационная работа

Графы преобразований узлов

Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
профессор СПбГУ,
доктор ф.-м. наук,
Малютин Андрей Валерьевич

Рецензент:
ведущий научный сотрудник,
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН,
доктор ф.-м. наук,
Дынников Иван Алексеевич

Санкт-Петербург
2020 г.

679

Содержание

§1. Введение 1
§2. Определения и обозначения 3
2.1. Основные определения 3
2.2. Локальные преобразования зацеплений 4
2.3. Примеры локальных преобразований 6
2.4. Ориентированные локальные преобразования зацеплений 8
2.5. Вспомогательные определения и обозначения 9
§3. Вложенные перестройки 11
3.1. Предварительные сведения 11
3.2. Основные результаты о вложенных перестройках 12
§4. Торические вложенные перестройки 18
4.1. Торические вложенные перестройки и тэта-кривые на торе 19
4.2. Флип-пребразования и триангуляция Фарея 21
4.3. Граф вложенных перестроек вдоль торических лент 24
§5. (#)-преобразования 29
5.1. Предварительные сведения 29
5.2. Теорема о (#)-преобразованиях 30
§6. $\mathcal{O}(n)$-преобразования 33
Список литературы 38

Аннотация

Работа относится к теории узлов. Изучаются преобразования узлов и зацеплений. Основными объектами исследования являются Гордиевы графы преобразований. Доказывается ряд утверждений, описывающих локальные и глобальные свойства $H(2)$-Гордиевого графа и $(\#)$-Гордиевого графа. Получено описание Гордиева графа торических вложенных перестроек. Вводятся и исследуются новые локальные преобразования узлов. Вводится новый тип преобразований узлов, исследуется граф одного из преобразований этого типа.

Ключевые слова: Узел, локальные преобразования узлов, Гордиев граф, Гордиево расстояние, $H(2)$-преобразование, $(\#)$-преобразование.

§1. Введение

Основной целью данной работы является исследование преобразований классических зацеплений с помощью анализа так называемых Гордиевых графов[1] этих преобразований. Гордиевым графом преобразования δ на множестве зацеплений M называется граф, вершинами которого являются зацепления из множества M и две вершины соединены ребром, если одно из соответствующих этим вершинам зацеплений получается из другого с помощью δ. Этот метод даёт новый взгляд на свойства и структуру преобразования, позволяя формулировать задачи о преобразованиях в альтернативных, нередко более удобных для исследования терминах. Так, например, задачи, связанные с лернейскими узлами [27], формулируются в терминах Гордиева графа вложенных перестроек. Гордиевы графы и сопутствующие им конструкции представляют интерес не только в качестве инструмента переформулировки задач теории узлов. В последнее время активно развиваются методы исследования кратчайших в Гордиевых графах [13, 15, 20, 30, 42], изучаются Гордиевы комплексы (стандартное пополнение Гордиева графа до симплициального комплекса) [8, 35, 36, 44, 43], в недавней работе [12] исследуется гиперболичность Гордиевых графов некоторых локальных преобразований.

В настоящей работе изучаются локальные и глобальные свойства Гордиевых графов различных преобразований: получены результаты о связности некоторых подграфов $H(2)$-Гордиева графа на множестве всех узлов

[1]По легенде царь Фригии Гордий завязал на ярме своей повозки невероятно сложный узел. Сумевшему его распутать пророчилась власть над всей Азией, и предсказание сбылось после того, как Гордиев узел был разрублен Александром Македонским.

и устройстве множества смежных вершин произвольной вершины $H(2)$-Гордиева графа на множестве всех зацеплений, описана асимптотическая структура на бесконечности для $H(2)$-Гордиева графа на множестве всех узлов и для $(\#)$-Гордиева графа на множестве всех ориентированных узлов, получено описание Гордиева графа торических вложенных перестроек на множестве торических узлов, введён новый класс локальных преобразований, названных $\mathcal{O}(n)$-преобразованиями, и исследованы его свойства, введён новый тип преобразований и определено $\mathcal{O}(\infty)$-преобразование, являющееся естественным обобщением $\mathcal{O}(n)$-преобразований, доказано, что диаметр $\mathcal{O}(\infty)$-Гордиева графа равен единице.

Перейдём к более подробному описанию содержания и результатов работы по параграфам.

В параграфе 2 приведены используемые определения и обозначения. В первом разделе этого параграфа даны определения некоторых стандартных объектов теории узлов. Второй, третий и четвёртый разделы параграфа 2 посвящены конструкциям, относящимся к локальным и ориентированным локальным преобразованиям. Основные преобразования, изучаемые в настоящей работе, определены в терминах тэнглов. Во втором разделе параграфа 2 подробно обсуждается понятие Гордиева графа преобразования и сопутствующие конструкции. Пятый раздел параграфа 2 содержит различные вспомогательные определения и обозначения.

Параграф 3 посвящён $H(2)$-преобразованиям, также называемым вложенными перестройками. Одними из основополагающих работ в теории вложенных перестроек считаются, в первую очередь, работы [24] и [9] (в [9] вложенная перестройка рассматривается как частный случай $H(n)$-преобразования при $n = 2$). Различные свойства вложенных перестроек и сопутствующие конструкции активно изучаются в последнее десятилетие. Так, в работах [14, 16, 17, 19] изучается связь вложенных перестроек с полиномиальными инвариантами, в [5, 13, 15, 20, 41] изучается метрика вложенных перестроек, в [1, 2, 3, 4, 18, 29] — инвариант расстояния (в метрике вложенных перестроек) до тривиального узла, в [25, 31] — связь вложенных перестроек с линзовыми пространствами, вложенные перестройки расслоенных узлов изучаются в [6], косметические перестройки — в [10], графы и комплексы, ассоциированные с вложенными перестройками — в [12, 43, 44], а приложения в биологии — в [11] и [32]. В параграфе 3 получены следующие результаты: связность и бесконечный диаметр графа Γ_k — Гордиева графа вложенных перестроек на множестве всех узлов, а также связность различного рода подграфов этого графа (теоремы 1 и 5), существование бруннова зацепления в множестве смежных вершин произвольной вершины Гордиева графа вложенных перестроек на множестве

всех зацеплений и существование бесконечного набора обмоток заданного узла в множестве смежных вершин для этого узла в том же графе (теоремы 3 и 4). Также описана асимптотическая структура графа Γ_k на бесконечности, а именно, доказано, что среди компонент связности дополнения шара в графе Γ_k только одна имеет бесконечный диаметр (теорема 2). Результаты теорем 4 и 5 были включены в работу «Лернейские узлы и вложенные перестройки» (Ю. С. Белоусов, М. В. Карев, А. В. Малютин, А. Ю. Миллер, Е. А. Фоминых).

В параграфе 4 изучается граф Γ_{Tor} — Гордиев граф торических вложенных перестроек на множестве торических узлов (вложенная перестройка торического узла, расположенного на крае незаузленного полнотория, называется торической, если лента, вдоль которой производится перестройка, лежит на том же торе, что и сам узел). Получено описание этого графа, опирающееся на подробно изложенную в [7, 28] связь флип-преобразований тэта-кривых на торе и триангуляции Фарея гиперболической плоскости.

Параграф 5 посвящён исследованию Гордиева графа (#)-преобразований на множестве всех ориентированных узлов, а именно — его асимптотической структуры на бесконечности. Доказано, что среди компонент связности дополнения шара в этом графе существует не более двух компонент с бесконечным диаметром (теорема 7). (#)-Преобразования исследовались в работах [33, 34].

Параграф 6 состоит из двух частей. В первой части приведены некоторые свойства введённых в настоящей работе $\mathcal{O}(n)$-преобразований, а во второй — описан новый тип преобразований узлов — тор-преобразования. Идея тор-преобразования является обобщением идеи локального преобразования и заключается в замене одного тор-тэнгла, образованного узлом, на другой (тор-тэнглом, по аналогии с тэнглом, называется незаузленный полноторий, содержащий дуги, концы которых лежат на крае этого полнотория). Определено тор-преобразование, являющееся естественным обобщением $\mathcal{O}(n)$-преобразований — $\mathcal{O}(\infty)$-преобразование. Описан Гордиев граф, соответствующий $\mathcal{O}(\infty)$-преобразованиям на множестве всех узлов, а именно доказано, что его диаметр равен единице.

§2. Определения и обозначения

2.1. Основные определения. Для начала определим некоторые базовые объекты и конструкции теории узлов, которые необходимы для дальнейшей работы.

Определение 1. *Зацеплением* называется кусочно гладкое вложение несвязного объединения конечного числа окружностей в ориентированную

трехмерную сферу S^3 и образ этого вложения, рассматриваемый с точностью до объемлемой изотопии.

Замечание 1. Все зацепления предполагаются неориентированными, если оговорено обратное.

Определение 2. *Узлом* называется однокомпонентное зацепление.

Определение 3. Зацепление $L \subset S^3$ называется *тривиальным*, если оно лежит на некоторой вложенной двумерной сфере $S^2 \subset S^3$.

Определение 4. Нетривиальное зацепление L называется *брунновым*, если результат удаления любой его компоненты является тривиальным зацеплением.

Определение 5. *Диаграммой* зацепления называют набор замкнутых кривых общего положения, являющийся проекцией зацепления на плоскость или на двумерную сферу и снабженный дополнительной информацией о *проходах* и *переходах* в двойных точках (их называют *перекрестками* диаграммы).

2.2. Локальные преобразования зацеплений. Далее нам потребуется понятие локального преобразования зацеплений и некоторые сопутствующие конструкции. Различные локальные преобразования изучались в работах [9, 39, 40, 43].

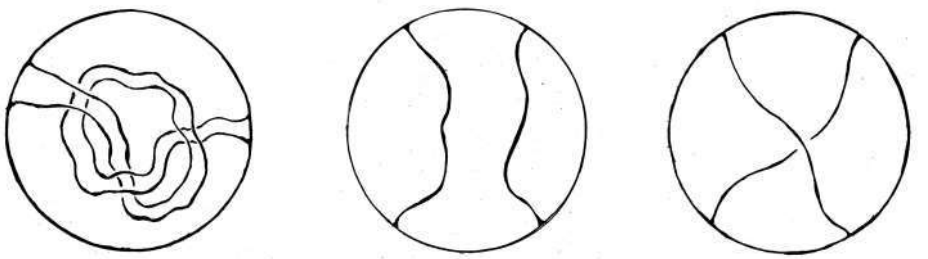
Определение 6. *Тэнглом на n нитях* или *n-ниточным тэнглом* называется пара $B_A = (B, A)$, где B — ориентированный трехмерный шар, а A — множество из n дизъюнктных вложенных в B дуг, таких что граничная сфера ∂B шара B пересекается с каждой дугой в концевых точках этой дуги и только в них. Компоненты связности множества A будем называть *нитями* тэнгла B_A.

Аналогично случаю зацеплений определяются *диаграммы* тэнглов. На рис. 1 приведены примеры диаграмм некоторых тэнглов.

Определение 7. Пусть S^3 — ориентированная сфера, а B — шар в S^3. Тогда пару n-ниточных тэнглов (B_A, B_C), будем называть *шаблоном локального преобразования*, если множество концов нитей первого тэнгла совпадает с множеством концов нитей второго тэнгла.

Определение 8. Пусть L_1 и L_2 — два зацепления в S^3, B — шар в S^3, а $\delta = (B_A, B_C)$ — некоторый шаблон локального преобразования. Будем говорить, что зацепление L_2 получается из зацепления L_1 с помощью *локального δ-преобразования*, если существуют такие зацепления L_1' и L_2' в S^3, что зацепление L_1' объемлемо изотопно зацеплению L_1, зацепление L_2'

объемлемо изотопно зацеплению L_2, зацепления L'_1 и L'_2 совпадают вне внутренности шара B и пара $((B, B \cap L'_1), (B, B \cap L'_2))$ совпадает с шаблоном δ.



а) б) в)

Рис. 1. Примеры диаграмм тэнглов.

Определение 9. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, а M — произвольное множество зацеплений. Будем обозначать через $G(\delta, M)$ граф, вершинами которого являются зацепления из множества M, а пара вершин соединена ребром, если зацепление в одной вершине — результат локального δ-преобразования зацепления в другой. Такой граф называется (δ, M)-*Гордиевым графом.*

Определение 10. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, а M — произвольное множество зацеплений. Шаблон δ будем называть *развязывающим* шаблоном для множества M (или относительно множества M), если для любого зацепления $L \in M$ в графе $G(\delta, M)$ существует конечный путь, соединяющий вершину[2] L, и вершину, соответствующую тривиальному узлу.

Определение 11. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, M — произвольное множество зацеплений, а K и Z — произвольные зацепления из множества M. Тогда (δ, M)-*Гордиевым расстоянием между зацеплениями* K *и* Z называется длина кратчайшего пути в графе $G(\delta, M)$ между вершинами K и Z. Будем обозначать это число через $d_{(\delta,M)}(K, Z)$ (если вершины K и Z лежат в разных компонентах линейной связности графа $G(\delta, M)$, то положим по определению $d_{(\delta,M)}(K, Z) = \infty$).

[2]Здесь и далее зацепление и соответствующая ей вершина Гордиева графа будут обозначаться одинаково.

Определение 12. Пусть M — произвольное множество зацеплений, δ — произвольный развязывающий шаблон для множества M, а L — произвольное зацепление из множества M. Тогда число $d_{(\delta,M)}(L,U)$, где U — тривиальный узел, называется *δ-Гордиевой длиной зацепления K*. Будем обозначать это число через $u_{(\delta,M)}(L)$.

Определение 13. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, M — произвольное множество зацеплений. Подмножество $W \subset M$ будем называть *связным относительно шаблона δ и множества M*, если индуцированный подграф[3] в графе $G(\delta, M)$, соответствующий множеству W, связен.

2.3. Примеры локальных преобразований.

Определение 14. На рис. 2 приведен некоторый шаблон локального преобразования, содержащий два 2-ниточных тэнгла. Будем обозначать этот шаблон через X. Локальное преобразование с этим шаблоном называется *X-преобразование.*

Замечание 2. Хорошо известно, что шаблон X-преобразования является развязывающим шаблоном относительно множества всех узлов (см. [21]).

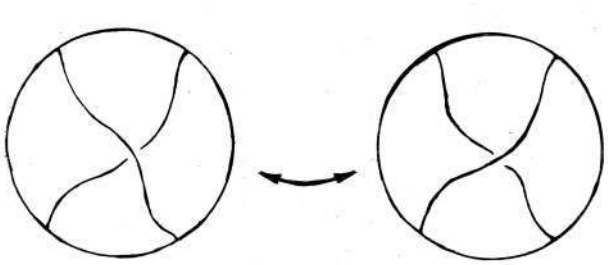


Рис. 2. X-преобразование.

Определение 15. Пусть L — зацепление в S^3, I — отрезок $[0,1]$, а отображение $b\colon I \times I \to S^3$ — вложение, такое что $b(I \times I) \cap L = b(I \times \partial I)$. Зацепление

$$M = (L \setminus b(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I)$$

называется результатом *вложенной перестройки* зацепления L вдоль *ленты* $b(I \times I)$ (см. рис. 3).

[3]Подграф Γ' графа Γ называется *индуцированным*, если Γ' образован некоторым подмножеством вершин графа Γ и всеми теми ребрами графа Γ, которые соединяют вершины из этого подмножества.

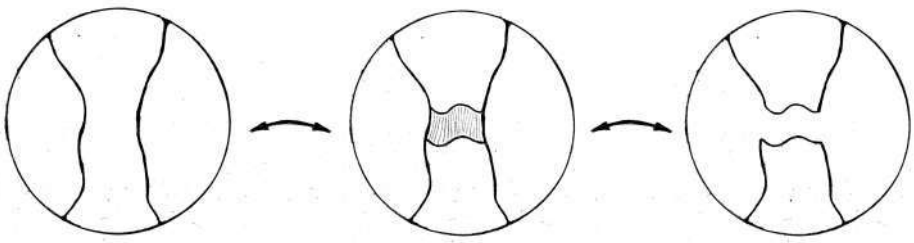


Рис. 3. Вложенная перестройка.

Определение 16. На рис. 4 приведен шаблон локального преобразования, содержащий два n-ниточных тэнгла. Локальное преобразование с этим шаблоном называется $H(n)$-*преобразованием*.

Замечание 3. Несложно заметить, что вложенная перестройка является локальным преобразованием, а именно — частным случаем $H(n)$-преобразования для $n = 2$. Следуя обозначениям из [9], будем обозначать шаблон вложенной перестройки через $H(2)$.

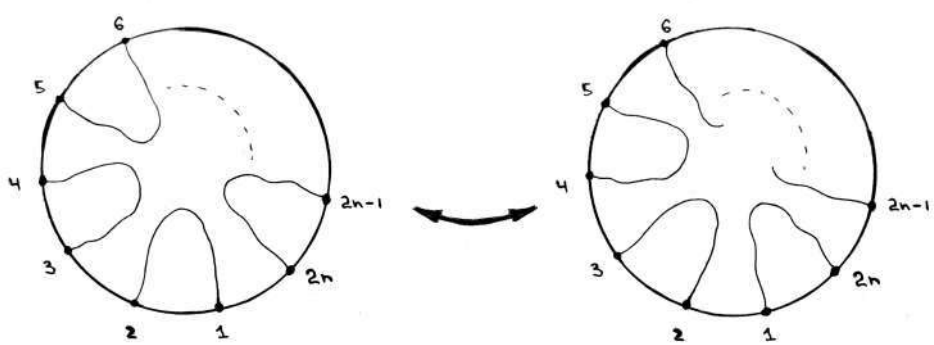


Рис. 4. $H(n)$-преобразование.

Определение 17. На рис. 5 приведен шаблон локального преобразования, содержащий два $(n + 2)$-ниточных тэнгла. Будем обозначать этот шаблон через $\mathcal{O}(n)$. Локальное преобразование с шаблоном $\mathcal{O}(n)$ будем называть $\mathcal{O}(n)$-*преобразованием*.

Замечание 4. Заметим, что $\mathcal{O}(0)$-преобразование это вложенная перестройка. В целом идея введения $\mathcal{O}(n)$-преобразования заключается в своего рода

обобщении вложенной перестройки — $\mathcal{O}(n)$-преобразование удобно воспринимать как вложенную перестройку по ленте с n проколами, причём через каждый прокол ленты проходит ровно одна дуга зацепления.

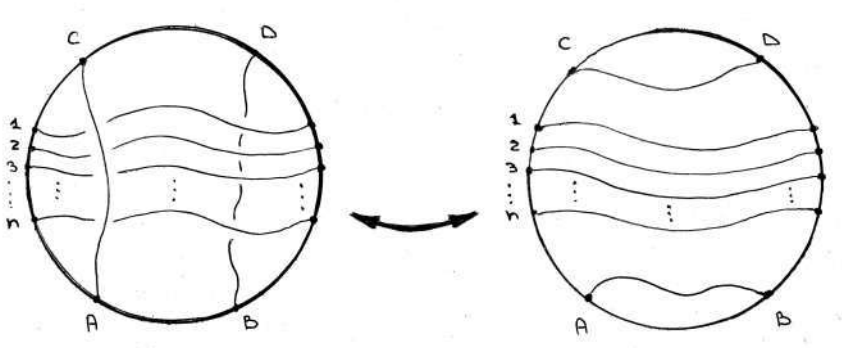


Рис. 5. $\mathcal{O}(n)$-преобразование.

2.4. Ориентированные локальные преобразования зацеплений.

Определение 18. *Ориентированным тэнглом на n нитях* будем называть n-ниточный тэнгл, все нити которого ориентированы. Если γ — ориентированная нить ориентированного тэнгла, то будем обозначать через $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ начальную и концевую точки этой нити соответственно.

Определение 19. Пусть S^3 — ориентированная сфера, а B — шар в S^3. Тогда пару ориентированных n-ниточных тэнглов (B_A, B_C), будем называть *ориентированным шаблоном локального преобразования*, если множество начальных точек нитей первого тэнгла совпадает с множеством начальных точек нитей второго тэнгла и множество концевых точек нитей первого тэнгла совпадает с множеством концевых точек нитей второго тэнгла.

Определение 20. Пусть L_1 и L_2 — два ориентированных зацепления в S^3, B — шар в S^3, а $\delta = (B_A, B_C)$ — некоторый ориентированный шаблон локального преобразования. Будем говорить, что зацепление L_2 получается из зацепления L_1 с помощью *ориентированного локального δ-преобразования*, если существуют такие ориентированные зацепления L_1' и L_2' в S^3, что зацепление L_1' объемлемо изотопно зацеплению L_1, зацепление L_2' объемлемо изотопно зацеплению L_2, зацепления L_1' и L_2' совпадают вне внутренности шара B и пара $((B, B \cap L_1'), (B, B \cap L_2'))$ совпадает с шаблоном δ.

Замечание 5. Для ориентированного шаблона δ и множества ориентированных зацеплений M конструкции ориентированного (δ, M)-Гордиевого графа, ориентированного (δ, M)-Гордиевого расстояния, развязывающего ориентированного шаблона и ориентированной (δ, M)-Гордиевой длины определяются по аналогии с неориентированным случаем.

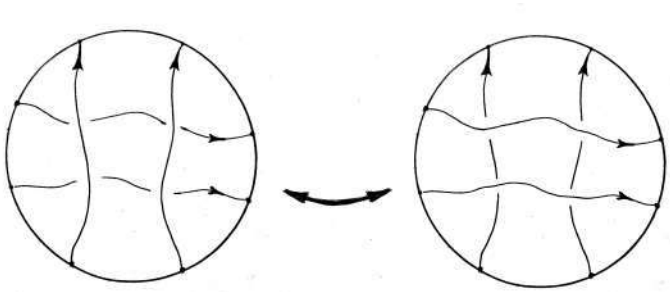


Рис. 6. (#)-преобразование.

Определение 21. На рис. 6 приведён некоторый ориентированный шаблон локального преобразования, содержащий два 4-ниточных ориентированных тэнгла. Будем обозначать этот ориентированный шаблон через (#). Ориентированное локальное преобразование с этим шаблоном называется (#)-преобразованием.

2.5. Вспомогательные определения и обозначения.

Определение 22. Нетривиальный узел Z называют *обмоткой* узла K, если узел Z объемлемо изотопен узлу на крае трубчатой окрестности узла K, но не объемлемо изотопен узлу K.

Определение 23. На краевом торе ∂V любого вложенного в S^3 полнотория V имеется два выделенных изотопических класса простых нестягиваемых (на ∂V) замкнутых кривых — класс меридианов и класс параллелей. Фиксируем какие-нибудь меридиан m и параллель ℓ и ориентируем их произвольным образом. Тогда любой простой нестягиваемой (на ∂V) замкнутой ориентированной кривой γ на ∂V можно сопоставить так называемый *наклон* — элемент p/q множества $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, где целые p и q таковы, что для гомологических классов $[\gamma]$, $[m]$ и $[\ell]$ кривой γ, меридиана m и параллели ℓ, соответственно, выполнено равенство

$$[\gamma] = p[\ell] + q[m].$$

Заметим, что ориентация кривой на ее наклон не влияет, а при замене ориентации на параллели или меридиане наклон меняет знак, сохраняя абсолютное значение. Это означает, что абсолютное значение наклона определено и для неориентированных кривых на ∂V.

Определение 24. Будем говорить, что узел W в S^3 является *связной суммой узлов* K и Z в S^3, если в S^3 существуют такие узлы K', Z', W' и шар B, что узлы K, Z и W объемлемо изотопны узлам K', Z' и W' соответственно, узел K' лежит в шаре B, узел Z' лежит в дополнении $S^3 \setminus \mathrm{Int}(B)$, пересечением узлов K' и Z' является дуга γ, лежащая на крае ∂B и $W' = (K' \cup Z') \setminus \mathrm{Int}(\gamma)$.

Определение 25. Будем говорить, что ориентированный узел W в S^3 является *связной суммой ориентированных узлов* K и Z в S^3, если в S^3 существуют такие ориентированные узлы K', Z', W' и шар B, что узлы K, Z и W объемлемо изотопны узлам K', Z' и W' соответственно, узел K' лежит в шаре B, узел Z' лежит в дополнении $S^3 \setminus \mathrm{Int}(B)$, пересечением ориентированных узлов K' и Z' является дуга γ, лежащая на крае ∂B и $W' = (K' \cup Z') \setminus \mathrm{Int}(\gamma)$, причём ориентации дуг $K' \setminus \mathrm{Int}(\gamma)$ и $Z' \setminus \mathrm{Int}(\gamma)$ совпадают с ориентацией на W'.

Замечание 6. Заметим, что в общем случае связная сумма неориентированных узлов K и Z определена неоднозначно.

Замечание 7. В дальнейшем будут использоваться общеизвестные понятия, такие как коса, замыкание Александера косы и унарная коса (определения можно найти в работе [26]).

Обозначение 1. Будем обозначать через $\mathscr{K}$ множество всех узлов, через $\mathscr{K}^\circ$ — множество всех ориентированных узлов, а через $\mathscr{L}$ — множество всех зацеплений. Будем обозначать через U тривиальный узел (если не оговорено иное).

Обозначение 2. Пусть K — произвольный узел в S^3. Тогда p-листное накрытие S^3, разветвленное над K будем обозначать $\Sigma_p(K)$ (определение можно найти в работе [37]).

Обозначение 3. Пусть K — произвольный узел в S^3. Тогда минимальное число образующих группы первых гомологий пространства $\Sigma_p(K)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ будем обозначать $mg(K, p)$.

Обозначение 4. Пусть K — произвольный узел в S^3. Тогда сигнатуру узла K будем обозначать через $\sigma(K)$ (определение можно найти в работе [37]).

Обозначение 5. Пусть δ — некоторый шаблон локального преобразования, M — произвольное множество зацеплений, n — натуральное число, а K — произвольное зацепление из множества M. Множество всех таких зацеплений $Z \in M$, для которых выполнено равенство $d_{(\delta,M)}(K,Z) = n$, то есть сферу радиуса n с центром в K в графе $G(\delta, M)$, будем обозначать через $S_{(n,\delta,M)}(K)$. Множество всех таких зацеплений $Y \in M$, для которых выполнено неравенство $d_{(\delta,M)}(K,Y) \leqslant n$, то есть шар радиуса n с центром в K в графе $G(\delta, M)$, будем обозначать через $B_{(n,\delta,M)}(K)$. Если из контекста ясно, о каком именно Гордиевом графе идет речь, то допускаются более удобные обозначения $S_n(K)$ и $B_n(K)$. Аналогичные обозначения будут использоваться и в ориентированном случае.

Обозначение 6. Граф $G(H(2), \mathscr{K})$ будем обозначать через Γ_k, а граф $G(H(2), \mathscr{L})$ — через Γ_ℓ. $H(2)$-Гордиеву длину узла K в графе Γ_k будем обозначать через $u_2(K)$. $H(2)$-Гордиево расстояние между узлами K и Z в графе Γ_k будем обозначать через $d_2(K,Z)$.

§3. Вложенные перестройки

3.1. Предварительные сведения. Прежде чем перейти к доказательствам основных результатов, приведём некоторые технические леммы. В работе [9] (теорема 4 при $p = 2$ и $n = 2$) доказана основная нижняя оценка на $H(2)$-Гордиеву длину для узлов в графе Γ_k:

Лемма 1. *Для произвольного узла K верна оценка*

$$u_2(K) \geqslant mg(K,2).$$

Лемма 2. *Если узел W является связной суммой узлов K и Z, то верно равенство*

$$mg(W,2) = mg(K,2) + mg(Z,2).$$

Доказательство. Из конструкции двулистного накрытия следует, что $\Sigma_2(W)$ является связной суммой двулистных накрытий $\Sigma_2(K)$ и $\Sigma_2(Z)$. Таким образом выполнено равенство

$$H_1(\Sigma_2(W),\mathbb{Z}) \,=\, H_1(\Sigma_2(K),\mathbb{Z}) \oplus H_1(\Sigma_2(Z),\mathbb{Z}),$$

а минимальное число образующих[4] прямой суммы групп это сумма минимальных чисел образующих в слагаемых (будем считать, что у тривиальной группы 0 образующих), откуда следует требуемое. □

[4]Следуя изложению работы [9], будем использовать термин минимальное число образующих.

Лемма 3. *Пусть Q — это трилистник, то есть узел 3_1 в обозначениях Рольфсена. Тогда*

$$u_2(Q) = mg(Q, 2) = 1.$$

Доказательство. Заметим, что разрешение перекрёстка в диаграмме узла может быть реализовано с помощью одной вложенной перестройки (см. рис. 7). Хорошо известно, что существует такая диаграмма D узла Q и такой перекрёсток в ней, что разрешение этого перекрёстка превращает диаграмму D в диаграмму тривиального узла. Это означает, что $H(2)$-Гордиева длина узла Q равна 1,

В работе [37] (глава 10.D) вычисляются группы $H_1(\Sigma_k(Q), \mathbb{Z})$. В том числе показано, что группа $H_1(\Sigma_2(Q), \mathbb{Z})$ изоморфна группе Z_3. Отсюда следует, что $mg(Q, 2) = 1$, что и требовалось. □

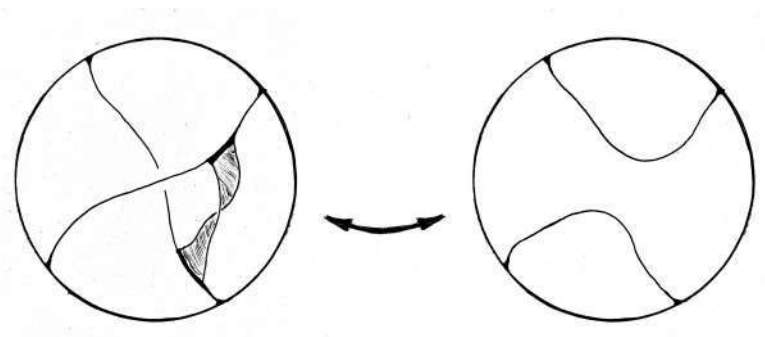


Рис. 7. Реализация разрешения перекрёстка диаграммы с помощью вложенной перестройки.

3.2. Основные результаты о вложенных перестройках.

Теорема 1. *Граф Γ_k связен и имеет бесконечный диаметр.*

Доказательство теоремы 1. Пусть Q — это трилистник. Из лемм 2 и 3 следует, что $H(2)$-Гордиева длина узла, являющегося связной суммой n трилистников, равна n, откуда следует бесконечность диаметра.

На рис. 8 представлена реализация X-преобразования с помощью двух вложенных перестроек. Из возможности такой реализации и того факта, что шаблон X-преобразования является развязывающим для множества $\mathscr{K}$, следует связность графа Γ_k. □

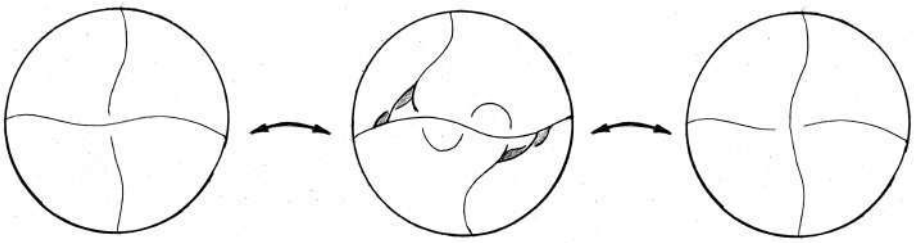


Рис. 8. Реализация X-преобразования с помощью двух вложенных перестроек.

Следующая теорема описывает асимптотическую структуру Гордиева графа Γ_k на бесконечности, а именно утверждает, что среди компонент связности дополнения шара в этом графе только одна имеет бесконечный диаметр.

Теорема 2. *Пусть r — произвольное натуральное число, а K и Z — два произвольных узла, для которых $u_2(K) \geqslant 2r$ и $u_2(Z) \geqslant 2r$. Тогда в графе Γ_k существует путь, соединяющий вершины K и Z и не пересекающий шара $B_{r-1}(U)$.*

Доказательство теоремы 2. Пусть K и Z — такие узлы в S^3, что выполнено условие $u_2(K) \geqslant 2r$, $u_2(Z) \geqslant 2r$, где $r \in \mathbb{N}$. Пусть Q — это трилистник в S^3, а Q^n — это узел в S^3, являющийся связной суммой n копий трилистника. Из лемм 2 и 3 следует, что $u_2(Q^n) = n$.

Лемма 4. *Пусть K_1 и K_2 — смежные вершины графа Γ_k, а W — произвольный узел в S^3. Тогда существуют такие смежные вершины W_1 и W_2 графа Γ_k, что узел W_1 является связной суммой узлов W и K_1, а узел W_2 является связной суммой узлов W и K_2.*

Доказательство. Пусть W_1 — произвольная связная сумма узлов W и K_1. Тогда найдётся такой замкнутый шар $B \subset S^3$, что пара $(B, B \cap W_1)$ образует однониточный тэнгл, заузленный в узел W. При факторизации по шару B узел W_1 переходит в узел K_1. Вершины K_1 и K_2 смежны в графе Γ_k, поэтому для узла K_1 найдётся лента, перестройка по которой переводит его в узел K_2. При этом можно подобрать ленту таким образом, чтобы она не содержала точку, отвечающую шару B. Отсюда следует, что для узла W_1 найдется лента, не пересекающая B, перестройка по которой переведёт его в некоторый узел W_2, являющийся связной суммой узлов W и K_2. □

Замечание 8. Пусть W — произвольный узел, γ — некоторый путь в графе Γ_k, $\{V_0, V_1, \ldots, V_n\}$ — множество вершин пути γ и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — множество ребер пути γ, причем ребро e_i инцидентно вершинам V_i и V_{i-1}, где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Последовательное применение леммы 4 к каждому ребру пути γ позволяет получить новый путь $\gamma(W)$ с множеством вершин $\{W_0, W_2, \ldots, W_n\}$ и множеством ребер $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, где вершина W_i соответствует связной сумме узлов W и V_i для $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, а ребро f_j инцидентно вершинам W_j и W_{j-1} для $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть τ — путь в графе Γ_k, соединяющий тривиальный узел и узел K (такой путь существует в силу связности графа Γ_k). Из замечания выше следует, что существует путь $\tau(Q^{2r})$, соединяющий узел Q^{2r} и узел K_Q, который является связной суммой узлов K и Q^{2r}. При этом из построения вытекает, что любой узел S, отвечающий вершине пути $\tau(Q^{2r})$, либо объемлемо изотопен узлу Q^{2r}, либо содержит узел Q^{2r} в качестве слагаемого, то есть по лемме 2 верна оценка $u_2(S) \geqslant 2r$. Это означает, что путь $\tau(Q^{2r})$ не пересекается с шаром $B_{r-1}(U)$.

В графе Γ_k существует ребро, соединяющее узел Q и тривиальный узел (в силу леммы 3). Из леммы 4, применённой к этому ребру и узлу Q, следует, что существует ребро, соединяющее узел Q и узел Q^2. Продолжим применять лемму 4 к получающимся ребрам и узлу Q, пока не будет построен путь β с множеством вершин $\{U = Q^0, Q^1, \ldots, Q^{2r}\}$ и множеством рёбер $\{h_1, h_2, \ldots, h_{2r}\}$, где ребро h_m инцидентно вершинам Q^m и Q^{m-1} для $m \in \{1, 2, \ldots, 2r\}$. Путь β соединяет тривиальный узел и узел Q^{2r}.

Из замечания выше следует, что существует путь $\beta(K)$, соединяющий узлы K и K_Q. Заметим, что любой узел отвечающий вершине пути $\beta(K)$, является связной суммой узлов K и Q^m, где $m \in \{0, 1, \ldots, 2r\}$ (будем обозначать связную сумму узлов K и Q^m через K_m, тогда $K_0 = K$ и $K_{2r} = K_Q$). Если $m \geqslant r$, то по лемме 2 выполнено неравенство $u_2(K_m) \geqslant r$, так как узел K_m содержит в качестве слагаемого узел Q^m. Если $m < r$, то для $H(2)$-Гордиева расстояния между узлами K и K_m выполнено неравенство $d_2(K, K_m) < r$, так как подпуть пути $\beta(K)$ соединяющий K и K_m имеет длину m по построению. Предположим, что $u_2(K_m) < r$ при $m < r$. Из определения $H(2)$-Гордиевой длины сразу следует неравенство

$$2r = u_2(K) \leqslant u_2(K_m) + d_2(K, K_m) < r + r.$$

Противоречие. Это означает, что для любого узла Y, отвечающего вершине пути $\beta(K)$, верна оценка $u_2(Y) \geqslant r$, то есть множество вершин пути $\beta(K)$ не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$.

При конкатенации путей $\tau(Q^{2r})$ и $\beta(K)$ получается путь α_1, соединяющий узлы K и Q^{2r}. Аналогичным способом можно построить путь α_2,

соединяющий узлы Z и Q^{2r}. Путь, являющийся конкатенацией путей α_1 и α_2, соединяет узлы K и Z, причём, в силу построений, этот путь не пересекается с шаром $B_{r-1}(U)$, что и требовалось. □

Теорема 3. *Для произвольного узла K подмножество $S_1(K)$ вершин графа Γ_ℓ содержит некоторое брунново зацепление.*

Доказательство теоремы 3. Как известно из [26], любой узел K в S^3 может быть представлен в виде замыкания Александера некоторой унарной косы B_K в S^3. Расположим ленту в S^3 так, как указано в примере на рис. 9, соединив ей первую и последнюю нити косы B_K. Результатом вложенной перестройки узла K вдоль этой ленты является брунново зацепление, что и требовалось. □

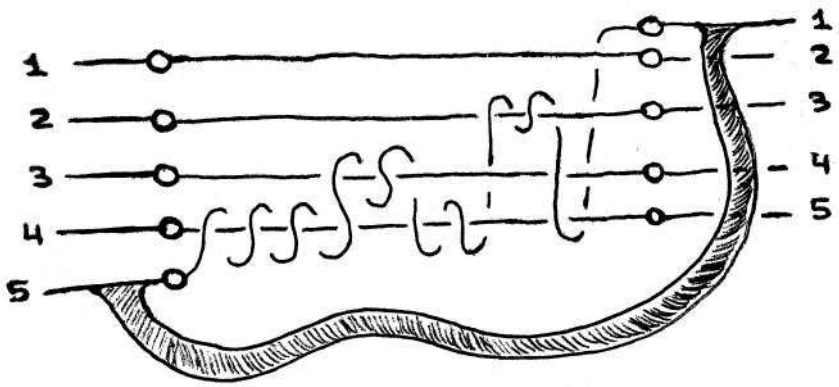


Рис. 9

Теорема 4. *Для произвольного узла K множество вершин $S_1(K)$ графа Γ_k содержит все те обмотки узла K, у которых абсолютное значение наклона лежит в множестве $\left\{\frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|} \mid i,j \in \mathbb{Z}; i \geqslant 0\right\}$.*

Доказательство теоремы 4. Пусть K — это узел в S^3, V — его трубчатая окрестность, а T — лежащая на торе ∂V обмотка узла K, абсолютное значение наклона которой равно $(3+2i)/2$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}$, $i \geqslant 0$. Зафиксируем на торе ∂V такие меридиан m и параллель ℓ, что m пересекает T ровно в $3+2i$ точках, ℓ пересекает T ровно в двух точках и ℓ пересекает m ровно в одной точке, причем $\ell \cap m \cap T = \emptyset$. Параллель ℓ делится точками пересечения с обмоткой T на две дуги. Обозначим через

J ту из этих дуг, которая не пересекает m. Пусть $b\colon I\times I\to\partial V$ — такое вложение квадрата, что $b(\{1/2\}\times I)=J$ и

$$b(I\times\{0\})\cup b(I\times\{1\})=b(I\times I)\cap T.$$

Перестройка обмотки T вдоль ленты $b(I\times I)$ дает кривую T', не пересекающуюся с ℓ и пересекающуюся с m только в тех же $3+2i$ точках, что и T. Поскольку $3+2i$ — нечетно, это означает, что кривая T' нестягиваема на ∂V и изотопна параллели ℓ, которая, в свою очередь, изотопна узлу K. Таким образом, узел T лежит в множестве $S_1(K)$.

Пусть теперь Z — это какая-нибудь лежащая на торе ∂V обмотка узла K, абсолютное значение наклона которой равно $\frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|}$ для некоторых $i,j\in\mathbb{Z}$, $i\geqslant 0$. Ясно, что на торе ∂V найдется такая обмотка S узла K, что ее абсолютное значение наклона равно $(3+2i)/2$, а $|j|$-кратное скручивание Дена тора ∂V по меридиану m переводит обмотку S в обмотку S_D, изотопную обмотке Z. Заметим, что параллель ℓ при таком скручивании переходит в кривую ℓ_D, тоже изотопную узлу K. Не умаляя общности можно считать, что лента $b(I\times I)$ не пересекается с окрестностью меридиана m, в которой проводится скручивание, а значит, вдоль этой ленты можно перестроить и обмотку S_D. Легко заметить, что результатом такой перестройки будет кривая ℓ_D, изотопная узлу K. Следовательно, узел S_D лежит в множестве $S_1(K)$, а так как обмотка S_D изотопна обмотке Z, то и Z лежит в $S_1(K)$. Тем самым мы показали, что множество $S_1(K)$ содержит все те обмотки узла K, у которых абсолютное значение наклона лежит в множестве $\left\{\frac{3+2i}{|2+(3+2i)j|}\;\middle|\;i,j\in\mathbb{Z};i\geqslant 0\right\}$. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Следующие множества связны по отношению к вложенным перестройкам и множеству* $\mathscr{K}$:

(1) *множество нетривиальных узлов,*
(2) *любое коконечное подмножество в множестве всех узлов,*
(3) *множество составных узлов,*
(4) *множество альтернированных узлов,*
(5) *множество торических узлов*[5] (*включая тривиальный узел*),
(6) *множество итерированных торических узлов* (*включая тривиальный узел*),
(7) *множество всех узлов, содержащих произвольный заданный узел в качестве слагаемого* (*включая заданный узел*).

Доказательство п. (7) теоремы 5. Пусть узел Z в S^3 является связной суммой узлов K и K_0. Это значит, что в S^3 найдется такой замкнутый

[5]Определение см. в [37].

шар B, что пара $(B, B \cap Z)$ — однониточный тэнгл, заузленный в узел K. Тогда при факторизации по шару B узел Z переходит в узел K_0. Из связности графа Γ_k следует, что для узла K_0 найдется набор лент, перестройки по которым переводят его в тривиальный. При этом можно подобрать ленты таким образом, чтобы ни одна из них не содержала точку, отвечающую шару B. Отсюда следует, что для узла Z найдется набор лент, не пересекающих B, последовательные перестройки по которым переведут узел Z в узел K. Кроме того, из теоремы Шуберта [38] о единственности разложения узла на простые составляющие следует, что каждый узел, отвечающий вершине из пути от Z до K, либо объемлемо изотопен узлу K, либо содержит K в качестве слагаемого. Отсюда очевидным образом следует требуемое. □

Доказательство п. (2) теоремы 5. Пусть X — произвольное конечное множество узлов. Заметим, что множество $S_1(U)$, где U — тривиальный узел, бесконечно (к примеру, потому что в $S_1(U)$ входят все двухниточные обмотки всех нетривиальных узлов, см. также [43]). Следовательно, в $S_1(U)$ найдется такой узел K, что множество $[K]$, состоящее из узла K и всех узлов, содержащих K в качестве слагаемого, не пересекает множества X. В силу доказанного выше п. (7) $[K]$ связно. Кроме того, пользуясь техникой из доказательства того же п. (7), несложно заметить, что (поскольку $K \in S_1(U)$) для произвольного узла Z существует вложенная перестройка, переводящая Z в узел, являющийся связной суммой узлов Z и K. Отсюда следует, что любое множество узлов, содержащее $[K]$, связно. В частности, связно и дополнение $\mathscr{K} \setminus X$, где $\mathscr{K}$ — множество всех узлов. Это доказывает искомое утверждение. □

Доказательство п. (1) теоремы 5. Прямо следует из доказанного выше пункта (2). □

Доказательство п. (3) теоремы 5. В силу доказанного выше пункта (7) для любого узла K множество $[K]$ (состоящее из узла K и всех узлов, содержащих K в качестве слагаемого) связно. Отсюда следует требуемое, поскольку для любых двух (в интересующем нас в настоящий момент случае — составных) узлов A и B множества $[A]$ и $[B]$ пересекаются. □

Доказательство п. (4) теоремы 5. Ясно, что разрешение перекрестка в альтернированной диаграмме всегда даёт альтернированную диаграмму с меньшим числом перекрестков. Отсюда, учитывая, что разрешение перекрёстка в диаграмме реализуется одной вложенной перестройкой, очевидным образом следует требуемое. □

Доказательство п. (5) теоремы 5. Пусть V — незаузленный полноторий в S^3, а T — произвольный узел, лежащий на ∂V. Минимальное количество точек пересечения простой замкнутой кривой на ∂V с меридианом, взятое по всем меридианам на ∂V, будем называть *индексом* кривой. Пусть $p := p(T)$ — индекс узла T. Если $p \leqslant 1$, то узел T тривиален. В случае, если $p \geqslant 2$, зафиксируем на ∂V меридиан m, пересекающий T ровно в p точках. Обозначим через J любую из дуг, на которые точки пересечения узла T с меридианом m делят m. Пусть $b\colon I \times I \to \partial V$ такое вложение квадрата, что $b(\{1/2\} \times I) = J$ и

$$b(I \times \{0\}) \cup b(I \times \{1\}) = b(I \times I) \cap T.$$

Обозначим через T_1 зацепление, полученное при перестройке узла T вдоль ленты $b(I \times I)$. Из предположения о минимальности числа точек в множестве $m \cap T$ следует, что T_1 есть узел, а не двухкомпонентное зацепление. Заметим, что узел T_1 пересекает меридиан m ровно в $p-2$ точках, так что T_1 имеет меньший индекс, чем T.

Из проведенного рассуждения следует, что для нетривиального торического узла T типа (p, q), где $p \geqslant 2$, найдется вложенная перестройка, переводящая его либо в тривиальный узел, либо в торический узел типа (p_1, q_1) с $p_1 < p$. Отсюда индукцией по p получаем требуемое. □

Доказательство п. (6) теоремы 5. Тривиальный узел будем называть *итерированным торическим узлом ступени* 0. При $n \geqslant 1$ назовем узел K *итерированным торическим узлом ступени* n, если K является обмоткой некоторого итерированного торического узла ступени $(n-1)$.

Пусть T — произвольный итерированный торический узел ступени $n \geqslant 1$. Тогда узел T является обмоткой некоторого итерированного торического узла T_{n-1} ступени $n-1$, и можно считать, что T расположен на крае трубчатой окрестности V узла T_{n-1}. Применяя рассуждение из доказательства пункта (5) к случаю узла T и полнотория V, мы видим, что существует последовательность вложенных перестроек (с лентами, вложенными в ∂V), переводящая узел T либо в тривиальный узел, либо в узел, объемлемо изотопный узлу T_{n-1}. Отсюда индукцией по n получаем требуемое. □

§4. Торические вложенные перестройки

В этом параграфе пошагово описывается граф Γ_{Tor}, то есть Гордиев граф торических вложенных перестроек на множестве торических узлов (вложенная перестройка торического узла, расположенного на крае незаузленного полнотория, называется торической, если лента, вдоль которой производится перестройка, также расположена на крае этого полнотория).

4.1. Торические вложенные перестройки и тэта-кривые на торе. Пусть V — незаузленный вложенный в S^3 полноторий. На краевом торе ∂V полнотория V имеется два выделенных изотопических класса простых нестягиваемых (на ∂V) замкнутых кривых — класс меридианов и класс параллелей. Зафиксируем какие-нибудь меридиан и параллель и ориентируем их произвольным образом. Заметим, что наклон (см. определение 23) простой нестягиваемой (на ∂V) замкнутой кривой на торе с фиксированными ориентациями меридиана и параллели не зависит от ориентации самой кривой.

Пусть T — произвольная простая нестягиваемая (на ∂V) замкнутая кривая, лежащая на ∂V, а $b\colon I \times I \to \partial V$ — такое вложение квадрата, что

$$b(I \times \partial I) = b(I \times I) \cap T.$$

Образ $b(I \times I)$ при таком вложении будем называть *торической лентой*, правильно расположенной по отношению к кривой T.

Пусть (T, b) и (K, c) — такие пары, что T и K — простые нестягиваемые замкнутые кривые, лежащие на торе ∂V, а $b(I \times I)$ и $c(I \times I)$ — торические ленты, правильно расположенные по отношению к T и K соответственно. Пары (T, b) и (K, c) будем называть эквивалентными, если существует такая изотопия $f_t\colon S^1 \to \partial V$, $t \in [0, 1]$, что $f_0(S^1) = T$, $f_1(S^1) = K$, и существует такая изотопия $g_t\colon I \times I \to \partial V$, $t \in [0, 1]$, что $g_0(I \times I) = b(I \times I)$, $g_1(I \times I) = c(I \times I)$ и для любого $t \in [0, 1]$ выполнено условие

$$g_t(I \times \partial I) = g_t(I \times I) \cap f_t(S^1).$$

Класс эквивалентности пары (T, b) будем обозначать через $[(T, b)]$.

Пусть ψ — это такое отображение, которое каждой паре (T, b) сопоставляет вложенную в тор ∂V тэта-кривую[6] θ_γ с выделенной дугой γ и невыделенными дугами α и β, где $\alpha \cup \beta = T$ и $\gamma = b(\{1/2\} \times I)$, то есть $\psi((T, b)) = \theta_\gamma$. Две тэта-кривые θ_γ и ζ_σ с выделенными дугами γ и σ и невыделенными дугами α, β и μ, ν соответственно будем называть эквивалентными, если существует такая изотопия $h_t\colon S^1 \to \partial V$, $t \in [0, 1]$, что $h_0(S^1) = \alpha \cup \beta$, $h_1(S^1) = \mu \cup \nu$, и существует такая изотопия $s_t\colon I \to \partial V$, $t \in [0, 1]$, что $s_0(I) = \gamma$, $s_1(I) = \sigma$ и для любого $t \in [0, 1]$ выполнено условие

$$s_t(\partial I) = s_t(I) \cap h_t(S^1).$$

Класс эквивалентности тэта-кривой θ_γ с выделенной дугой γ будем обозначать через $[\theta_\gamma]$.

[6]Тэта-кривой называется кусочно-гладкий граф из двух вершин и трех рёбер, гомеоморфный окружности с диаметром. Вложенная в ∂V тэта-кривая задаётся своими дугами, соответствующими ребрам.

Тогда классу $[(T,b)]$ можно сопоставить класс $[\psi((T,b))]$. Это корректно заданное отображение на классах пар (двум эквивалентным парам сопоставляются эквивалентные тэта-кривые, ведь в качестве изотопии для выделенной дуги подойдёт сужение исходной изотопии ленты) и биекция (если две пары переводятся в эквивалентные тэта-кривые, то изотопию выделенных дуг можно продолжить до изотопии лент, откуда следует инъективность, а в силу кусочной гладкости для любой тэта-кривой θ_γ с выделенной дугой γ существует такая лента $b(I\times I)$, что $b(\{1/2\}\times I)=\gamma$, откуда следует сюръективность). Это отображение будем обозначать через Θ, полагая

$$\Theta([(T,b)])=[\psi((T,b))].$$

Простая нестягиваемая замкнутая кривая T, лежащая на торе ∂V, является узлом в S^3, поэтому определено отображение φ, сопоставляющее паре (T,b) результат вложенной перестройки узла T по ленте $b(I\times I)$, то есть некоторое зацепление $\varphi((T,b))$, также лежащее на торе ∂V.

При этом очевидно, что эквивалентные пары переводятся в изотопные[7] зацепления, а значит, корректно определено сопоставление классу $[(T,b)]$ изотопического класса $[\varphi((T,b))]$ зацеплений на торе ∂V.

Несложный перебор показывает, что класс $[\varphi((T,b))]$ является классом неоднокомпонентных зацеплений в том и только в том случае, когда для любой тэта-кривой $\theta\in[\psi((T,b))]$ дополнение $\partial V\setminus\theta$ несвязно. В дальнейшем мы будем говорить только о тэта-кривых, чье дополнение в торе связно (назовём такие тэта-кривые невырожденными), и, соответственно, только о таких парах (T,b), для которых зацепление $\varphi((T,b))$ однокомпонентно, то есть является простой нестягиваемой[8] замкнутой кривой на торе ∂V.

Напомним, что

$$\varphi((T,b))=(T\setminus b(I\times\partial I))\cup b(\partial I\times I),$$

а значит, лента $b(I\times I)$ правильно расположена также и относительно кривой $\varphi((T,b))$. Тогда определено отображение χ, переводящее пару (T,b) в пару $(\varphi((T,b)),b)$. При этом если пары (T,b) и (K,c) эквивалентны, то эквивалентны и пары $\chi(T,b)$ и $\chi(K,c)$ — в качестве изотопии между кривыми $\varphi((T,b))$ и $\varphi((K,c))$ можно взять имеющуюся изотопию между кривыми T и K и доопределить её на соответствующих отрезках имеющейся изотопией между лентами $b(I\times I)$ и $c(I\times I)$ (по тому же принципу строится

[7]Здесь и далее в этом параграфе под изотопией зацеплений подразумевается изотопия на торе ∂V, а не в S^3, если не оговорено обратное.

[8]Если бы кривая $\varphi((T,b))$ была стягиваема, то дополнение $\partial V\setminus\psi((T,b))$ было бы несвязным, что невозможно, поскольку $\varphi((T,b))$ однокомпонентно, противоречие.

и новая изотопия между лентами). Тогда классу $[(T, b)]$ можно сопоставить класс $[\chi((T, b))]$ и это корректно задаёт отображение на классах пар. Будем обозначать получившееся отображение через Ω, полагая

$$\Omega([(T, b)]) = [\chi((T, b))].$$

Отображение Ω является инволюцией на множестве классов пар, так как (по определению φ) верно равенство

$$\chi(\chi((T, b))) = (T, b).$$

Заметим, что композиция $\Theta \circ \Omega \circ \Theta^{-1}$ является инволюцией на множестве классов тэта-кривых с выделенной дугой. Преобразование, соответствующее этой композиции, называется *флип-преобразованием тэта-кривой на торе* (см. рис. 10).

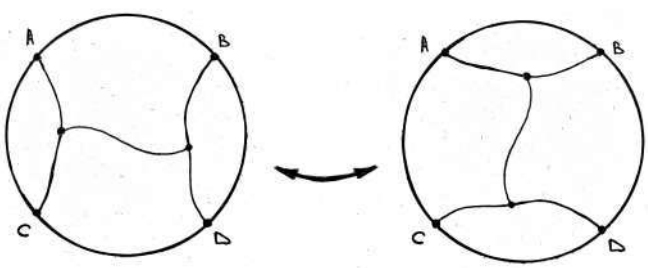


Рис. 10. Флип-преобразование.

Итогом этого раздела является сведение задачи преобразования торических узлов с помощью вложенных перестроек вдоль ленты, лежащей на торе, к задаче преобразования тэта-кривых с выделенной дугой на торе с помощью флип-преобразований.

4.2. Флип-преобразования и триангуляция Фарея. В работах [7, 28] описана связь флип-преобразований тэта-кривых на торе с идеальной[9] триангуляцией Фарея гиперболической плоскости. В настоящем разделе мы приведём некоторые конструкции и результаты этих работ, используемые в дальнейших рассуждениях.

Пусть $\mathbb{H}^2$ — гиперболическая плоскость. Будем работать с моделью гиперболической плоскости в верхней полуплоскости, то есть на множестве $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$. Эта полуплоскость ограничена окружностью $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Пусть $\mathbb{F}$ — такая идеальная триангуляция плоскости

[9]Под идеальной триангуляцией подразумевается разбиение на идеальные треугольники.

$\mathbb{H}^2$, вершинами которой являются точки множества $\mathbb{Q} \cup \{1/0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$, где $1/0 = \infty$, а две вершины a/b и c/d соединены ребром тогда и только тогда, когда для них выполнено равенство $|ad - bc| = 1$ (под ребрами подразумеваются геодезические в $\mathbb{H}^2$). В дальнейшем нам понадобится другое представление плоскости и триангуляции, а именно изображённый на рис. 11 образ плоскости $\mathbb{H}^2$ и триангуляции $\mathbb{F}$ при отображении $z \to (z-i)/(z+i)$.

Напомним, что любой простой нестягиваемой замкнутой кривой на торе ∂V можно сопоставить её наклон, то есть некоторый элемент p/q множества $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$. Это сопоставление задаёт биекцию между множеством классов изотопности простых нестягиваемых замкнутых кривых на торе ∂V и множеством вершин триангуляции $\mathbb{F}$.

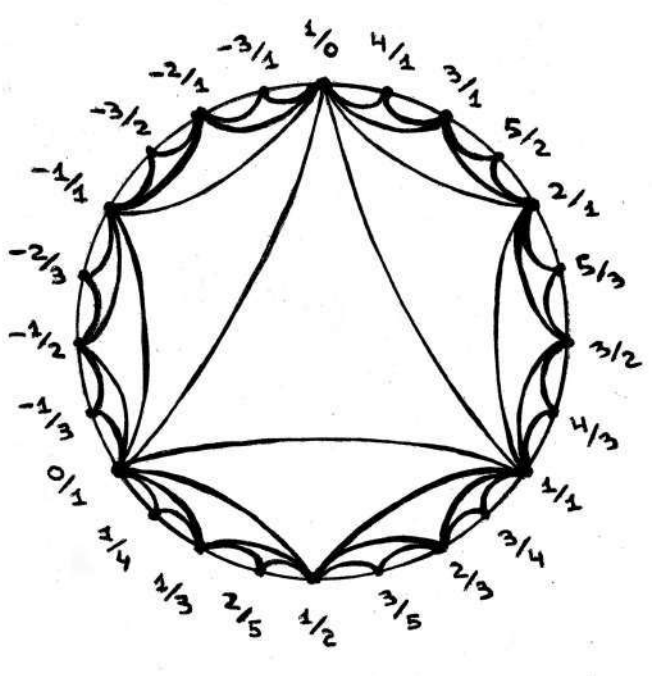


Рис. 11. Триангуляция Фарея гиперболической плоскости.

При этом невырожденной тэта-кривой на ∂V с дугами θ_1, θ_2, θ_3 можно сопоставить тройку наклонов $(p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3)$ содержащихся в ней кривых $\theta_1 \cup \theta_2$, $\theta_2 \cup \theta_3$ и $\theta_1 \cup \theta_3$ соответственно. Известно (см. [28]), что любая такая тройка наклонов является тройкой вершин некоторого треугольника триангуляции $\mathbb{F}$, а двум изотопным тэта-кривым сопоставляется одна

и та же тройка. Также из [28] известно, что такое сопоставление задаёт биекцию между множеством классов изотопности невырожденных тэта-кривых на ∂V и множеством треугольников триангуляции $\mathbb{F}$.

Для того, чтобы произвести флип-преобразование тэта-кривой, необходимо выбрать ту дугу, которую нужно преобразовать, то есть для любой тэта-кривой на торе ∂V существует ровно три флип-преобразования, каждое из которых преобразует одну из дуг этой тэта-кривой. Под флип-преобразованием тэта-кривой с выделенной дугой будем понимать флип-преобразование, преобразующее выделенную дугу. Флип-преобразование тэта-кривых с выделенной дугой задаёт инволюцию на множестве классов эквивалентности тэта-кривых с выделенной дугой.

Пусть флип-преобразование тэта-кривой θ_γ с выделенной дугой γ переводит её в некоторую тэта-кривую ζ_σ с выделенной дугой σ. Пусть α и β — две невыделенные дуги тэта-кривой θ_γ, а μ и ν — две невыделенные дуги тэта-кривой ζ_σ. Заметим, что любое флип-преобразование можно производить локально (изотопией переведём преобразуемую дугу в достаточно малый диск на торе), откуда следует, что неупорядоченная пара наклонов, соответствующих кривым $\alpha \cup \gamma$ и $\beta \cup \gamma$, совпадает с неупорядоченной парой наклонов, соответствующих кривым $\mu \cup \sigma$ и $\nu \cup \sigma$. Это означает, что изотопические классы тэта-кривых θ_γ и ζ_σ соответствуют треугольникам триангуляции $\mathbb{F}$, имеющим общее ребро.

Пусть λ — это отображение, переводящее тэта-кривую θ_γ с выделенной дугой γ и невыделенными дугами α и β в пару $((V_{\alpha\beta}, V_{\alpha\gamma}, V_{\beta\gamma}), V_{\alpha\gamma}V_{\beta\gamma})$, состоящую из треугольника триангуляции $\mathbb{F}$ с вершинами $V_{\alpha\beta}$, $V_{\alpha\gamma}$ и $V_{\beta\gamma}$ (вершины соответствуют наклонам кривых, образованных парами дуг тэта-кривой), и выделенного ребра этого треугольника. Заметим, что эквивалентные (в смысле предыдущего раздела) тэта-кривые с выделенной дугой под действием отображения λ переходят в одну и ту же пару из треугольника и ребра, что даёт отображение на классах эквивалентности, которое мы будем обозначать через Υ, полагая

$$\Upsilon([\theta_\gamma]) = \lambda(\theta_\gamma).$$

Из биективности указанного выше отображения из множества классов изотопности тэта-кривых в множество треугольников триангуляции $\mathbb{F}$ прямо следует биективность отображения Υ.

Композиция $\Upsilon \circ \Theta \circ \Omega \circ \Theta^{-1} \circ \Upsilon^{-1}$ является инволюцией на множестве треугольников триангуляции $\mathbb{F}$ с выделенным ребром.

Итогом этого раздела является сведение задачи преобразования тэта-кривых с выделенной дугой с помощью флип-преобразований к задаче

преобразования треугольников триангуляции Фарея с выделенным ребром.

4.3. Граф вложенных перестроек вдоль торических лент. Пусть (T, b) — пара, состоящая из простой нестягиваемой замкнутой кривой T, лежащей на торе ∂V, и торической ленты $b(I \times I)$, правильно расположенной по отношению к кривой T. Из построений следует, что вершина треугольника из пары $\Upsilon(\Theta([(T, b)]))$, противоположная выделенному ребру, имеет значение (соответствующий ей элемент множества $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$), равное наклону кривой T.

Пусть K — кривая из пары $\chi((T, b))$, то есть результат вложенной перестройки кривой T по ленте b. Наклон кривой K равен значению в той вершине треугольника $\Upsilon(\Theta(\Omega([(T, b)])))$, которая противоположна выделенному ребру (тому же самому, что и у треугольника $\Upsilon(\Theta([(T, b)]))$). То есть две простые нестягиваемые замкнутые кривые на торе ∂V связаны вложенной перестройкой вдоль торической ленты тогда и только тогда, когда для двух вершин триангуляции Фарея, соответствующих наклонам этих кривых, существует два треугольника этой триангуляции с общим ребром, каждый из которых содержит по одной из этих двух вершин в качестве вершины, противоположной общему ребру. Это соображение позволяет явно представить граф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин триангуляции $\mathbb{F}$, а две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда кривые, соответствующие этим вершинам, связаны вложенной перестройкой вдоль торической ленты. Будем обозначать этот граф через Γ_τ.

Приведём некоторые известные вспомогательные конструкции, которые помогут показать, что граф Γ_τ является лесом.

Добавим к множеству рациональных чисел со стандартным порядком элементы $-1/0$ и $1/0$ в качестве наименьшего и наибольшего элементов соответственно и обозначим полученное упорядоченное множество через Q. Везде далее при работе с рациональными числами из множества Q будем считать, что выбраны несократимые представители. Тогда упорядоченный набор $[-1/0,\ 0/1,\ 1/1,\ 1/0]$ элементов множества Q будем называть *набором* 1*-го уровня*, а *набором* k*-го уровня* — упорядоченный набор элементов множества Q, который состоит из

- всех элементов набора $(k-1)$-го уровня,
- всех медиант соседних элементов набора $(k-1)$-го уровня,

где медиантой пары $a/b, c/d \in Q$ называется элемент $(a+c)/(b+d) \in Q$. Например, набор 2-го уровня это

$$[-1/0,\ -1/1,\ 0/1,\ 1/2,\ 1/1,\ 2/1,\ 1/0].$$

Хорошо известно, что любое рациональное число, содержится в наборе k-го уровня для некоторого натурального числа k. При этом если для $a/b, c/d \in Q$ выполнено неравенство $a/b < c/d$, то выполнено и неравенство

$$a/b < (a+c)/(b+d) < c/d.$$

Отсюда следует, что если два элемента являются соседями в наборе $(k+1)$-го уровня, то один из них является элементом набора k-го уровня, а другой — не является. Легко видеть, что любому элементу p/q из множества Q соответствует некоторая вершина $[p/q]$ триангуляции $\mathbb{F}$ (рациональному числу — вершина с соответствующим наклоном, а элементам $-1/0$ и $1/0$ — вершина $1/0$). Если для вершины a/b существует элемент набора k-го уровня $p/q \in Q$, для которого $[p/q] = a/b$, то будем называть вершину a/b *вершиной k-го уровня*, а множество всех вершин k-го уровня будем обозначать через V_k. Если для $a/b, c/d \in Q$ выполнено равенство $|ad - bc| = 1$, то тройка $([a/b], [(a+c)/(b+d)], [c/d])$ является тройкой вершин некоторого треугольника триангуляции $\mathbb{F}$.

Лемма 5. *Граф Γ_τ является лесом из трех деревьев.*

Доказательство. Проведём индукцию по подграфам γ_k графа Γ_τ, где γ_k — подграф, порожденный множеством вершин V_k. Докажем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ подграф γ_k является лесом из трех деревьев.

База. Подграф γ_1 состоит из вершин $0/1$, $1/1$ и $1/0$ и не имеет ни одного ребра. Подграф γ_2 состоит из вершин $-1/1$, $0/1$, $1/2$, $1/1$, $2/1$ и $1/0$ и ребер $(1/0, 1/2), (1/1, -1/1)$ и $(0/1, 2/1)$.

Шаг. Пусть подграф γ_k, где $k > 1$, является лесом из трех деревьев. Пусть p/q — такая вершина триангуляции $\mathbb{F}$, что $p/q \in V_{k+1} \setminus V_k$. Это условие означает, что вершина p/q не совпадает с вершиной $1/0$. Тогда у элемента[10] p/q в наборе $(k+1)$-го уровня имеется два соседа — элементы a/b и c/d множества Q. Будем считать, что $a/b < c/d$. Из определения наборов и приведённых выше свойств медиант следует, что элемент p/q является медиантой элементов a/b и c/d. При этом элементы a/b и c/d являются соседними элементами набора k-го уровня, а значит, не умаляя общности, элемент a/b является элементом $(k-1)$-го уровня, а элемент c/d — не является. Тогда у элемента a/b в наборе $(k-1)$-го уровня есть такой соседний элемент e/f, что элемент c/d является медиантой элементов a/b и e/f. Заметим, что вершины $[a/b]$ и $[e/f]$ не могут одновременно совпадать с вершиной $1/0$. Это означает, что элементам a/b, p/q, c/d и e/f

[10]Если вершина не совпадает с вершиной $1/0$, то ей отвечает ровно один элемент множества Q. Далее оба этих объекта будем обозначать через p/q, при необходимости уточняя, вершина это или элемент множества Q.

набора $(k+1)$-го уровня соответствуют четыре различные вершины триангуляции $\mathbb{F}$. Из свойств медиант следует, что тройки $([a/b],\ [p/q],\ [c/d])$ и $([a/b],\ [c/d],\ [e/f])$ соответствуют двум треугольникам с общим ребром, то есть вершины p/q и $[e/f]$ соединены ребром в графе γ_{k+1}.

Обозначим через Δ треугольник с вершинами $([a/b],\ [p/q],\ [c/d])$. Пусть $(m/n,\ t/s,\ p/q)$ — тройка вершин некоторого треугольника триангуляции $\mathbb{F}$. Заметим, что вершины $[a/b]$ и $[c/d]$ делят окружность $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ на две замкнутые дуги A и B, где $\partial A = \partial B = \{[a/b], [c/d]\}$. Не умаляя общности предположим, что вершина $p/q \in A$. Тогда вершины $m/n, t/s$ принадлежат A, поскольку в противном случае ребра треугольников Δ и $(m/n,\ t/s,\ p/q)$ пересекались бы. Очевидно, что множество вершин V_{k+1} разбивает окружность $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ на такие замкнутые дуги, что если v/w и y/z — два произвольных соседних элемента набора $(k+1)$-го уровня, то вершины $[v/w]$ и $[y/z]$ соединены дугой. Известно, что a/b и p/q — соседние элементы набора $(k+1)$-го уровня, то есть вершины $[a/b]$ и p/q соединены такой дугой в окружности $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, на которой нет других вершин из V_{k+1}. Аналогичное соображение верно и для элементов c/d и p/q. Заметим, что дуга A является объединением дуг, полученных для пар $([a/b],[p/q])$ и $([c/d],[p/q])$. Тогда вершины m/n и t/s содержатся в множестве $\{[a/b],[c/d]\}$, то есть треугольник $(m/n,\ t/s,\ p/q)$ совпадает с треугольником Δ.

Это означает, что валентность вершины p/q в графе γ_{k+1} равна единице, а единственное ребро, инцидентное вершине p/q, соединяет её с вершиной подграфа γ_k. То есть подграф, порожденный множеством вершин $V_k \cup p/q$ всё ещё остается лесом из трех деревьев. Из произвольности выбора p/q следует требуемое. □

Из предыдущих рассуждений очевидно (см. рис. 12):

Лемма 6. *Граф Γ_τ состоит из трех изоморфных деревьев; каждая из вершин этого графа имеет бесконечную валентность.*

Замечание 9. Известно, что кривые с наклонами p/q и q/p представляют один и тот же узел. Как нетрудно видеть, из построения следует, что вершины a/b и c/d графа Γ_τ соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром вершины b/a и c/d.

Обозначим через Γ_h граф, получающийся при отождествлении вершин во всех парах вида $(a/b, b/a)$ в графе Γ_τ. Пусть M — множество таких вершин p/q графа Γ_τ, что $|p| > |q|$.

Лемма 7. *Граф Γ_h получается из графа Γ_τ удалением всех вершин множества M и добавлением рёбер, соединяющих пары вершин $(0/1, -1/2)$ и $(0/1, 1/2)$.*

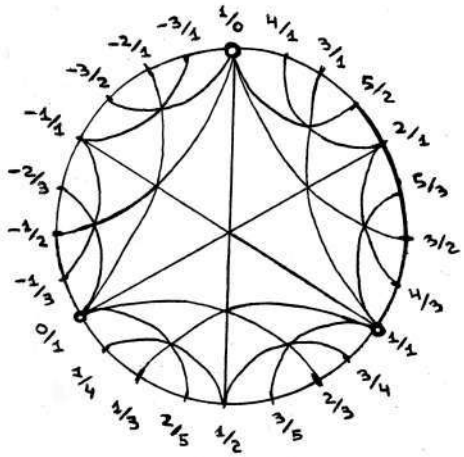


Рис. 12. Граф Γ_τ.

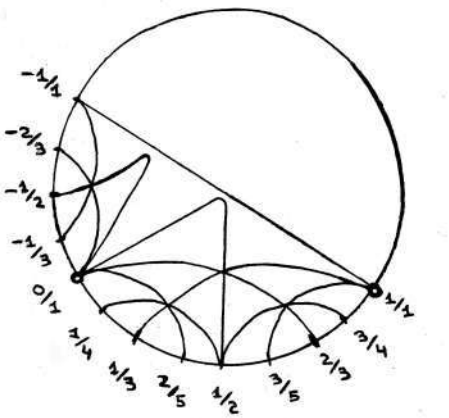


Рис. 13. Граф Γ_h.

Доказательство. Будем называть ребро графа Γ_τ внутренним, если обе его вершины лежат в множестве M и внешним, если ровно одна из его вершин лежит в множестве M. Из замечания 9 следует, что граф Γ_h получается из графа Γ_τ путём удаления всех вершин множества M, которые не инцидентны никакому внешнему ребру, и отождествления всех пар вершин вида $(a/b, b/a)$. Это тоже самое, что удалить из графа Γ_τ все вершины множества M и для каждого внешнего ребра $(a/b, c/d)$ графа Γ_τ, вершина a/b которого лежит в множестве M, добавить в полученный после удаления граф ребро $(b/a, c/d)$. Покажем, что в графе Γ_τ только четыре внешних ребра: $(0/1, 2/1)$, $(0/1, -2/1)$, $(-1/2, 1/0)$ и $(1/2, 1/0)$. Очевидно, что эти четыре ребра являются внешними. Пусть найдётся ребро $(a/b, c/d)$ графа Γ_τ, вершина a/b которого лежит в множестве M, не совпадающее с ребрами $(0/1, 2/1)$, $(0/1, -2/1)$, $(-1/2, 1/0)$ и $(1/2, 1/0)$ и являющееся внешним. Заметим, что вершины $-1/1$, $-2/1$, $1/0$, $2/1$ и $1/1$ разбивают полуокружность окружности $\mathbb{R} \cup \infty$ на четыре дуги. Не умаляя общности будем считать, что вершина a/b лежит на дуге, соединяющей вершины $1/0$ и $2/1$ (также она могла бы лежать на дуге, соединяющей вершины $-1/1$ и $-2/1$, вершины $-2/1$ и $1/0$ или вершины $2/1$ и $1/1$, см. рис. 11). Если в графе Γ_τ вершина a/b соединена с вершиной c/d ребром, то найдутся такие вершины e/f и g/h, что тройки вершин $(a/b, e/f, g/h)$ и $(c/d, e/f, g/h)$ являются тройками вершин треугольников триангуляции Фарея. Заметим, что вершины e/f и g/h должны лежать на дуге, соединяющей вершины $1/0$ и $2/1$, так как в противном случае ребра треугольника $(a/b, e/f, g/h)$ будут пересекать ребро $(1/0, 2/1)$. Аналогичные рассуждения показывают, что и

вершина c/d должна лежать на дуге, соединяющей вершины $1/0$ и $2/1$, что невозможно, поскольку ребро $(a/b, c/d)$ внешнее. Таким образом только рёбра $(0/1, 2/1)$, $(0/1, -2/1)$, $(-1/2, 1/0)$ и $(1/2, 1/0)$ являются внешними, а из рассуждений выше известно, что после удаления всех вершин множества M из графа Γ_τ необходимо добавить ребра вида $(b/a, c/d)$ для каждого внешнего ребра $(a/b, c/d)$. Следовательно нужно добавить рёбра $(0/1, 1/2)$ и $(0/1, -1/2)$. □

Замечание 10. Легко видеть, что граф Γ_h является лесом из двух деревьев.

Известно, что кривая с наклоном p/q представляет тривиальный узел тогда и только тогда, когда хотя бы одно число из пары $|p|, |q|$ равно единице. Множество вершин графа Γ_h, соответствующих таким кривым, будем обозначать через S. Тогда граф, который получается при отождествлении в графе Γ_h всех вершин множества S, является графом Γ_{Tor} (см. рис. 14, вершины на левой полуокружности соответствуют отрицательным рациональным числам). Из предыдущих рассуждений очевидно:

Теорема 6. *Граф Γ_{Tor} является деревом, каждая из вершин которого имеет бесконечную валентность.*

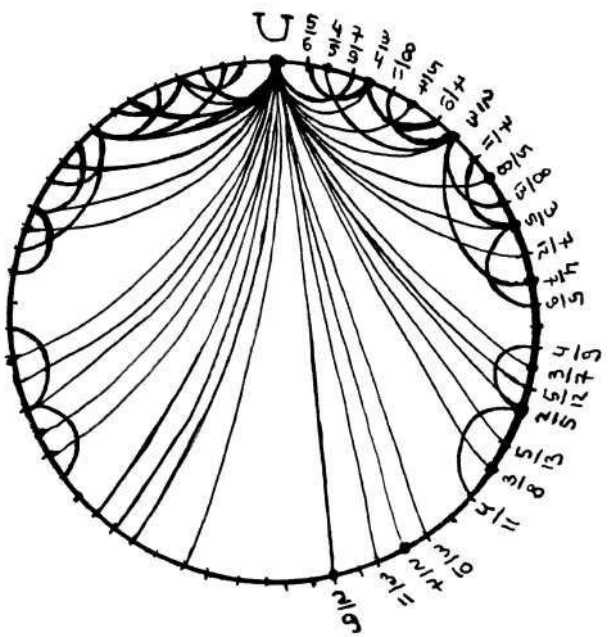


Рис. 14. Граф Γ_{Tor}.

Из описания графа Γ_{Tor} вытекает

Следствие 1. *Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существуют такие числа $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geqslant n$, что выполнено равенство $u_2(T_{p,q}) = 1$, где $T_{p,q}$ — торический узел типа (p, q). В том числе для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $u_2(T_{2n+1,2n+3}) = 1$.*

§5. (#)-преобразования

5.1. Предварительные сведения. Прежде чем перейти к основному результату этого параграфа, приведём некоторые технические леммы. В работе [33] была доказана нижняя оценка на (#)-Гордиево расстояние для узлов в графе $G((\#), \mathscr{K}^\circ)$:

Лемма 8. *Пусть K и Z — ориентированные узлы в S^3. Тогда выполнено неравенство*

$$d_{((\#),\mathscr{K}^\circ)}(K, Z) \geqslant 1/6|\sigma(K) - \sigma(Z)|.$$

Будем обозначать (#)-Гордиеву длину ориентированного узла K относительно множества всех ориентированных узлов $\mathscr{K}^\circ$ через $u_{(\#)}(K)$. Лемма выше, определение Гордиевой длины и тот факт, что сигнатура тривиального узла равна нулю (см. [37]), влечёт следующий результат:

Следствие 2. *Пусть K — ориентированный узел в S^3. Тогда выполнено неравенство*

$$u_{(\#)}(K) \geqslant 1/6|\sigma(K)|.$$

В работе [37] (глава 8.E) доказаны некоторые свойства сигнатуры:

Лемма 9. *Пусть K и Z — два узла в S^3, W — узел, являющийся связной суммой узлов K и Z, а $-K$ — зеркальное отражение узла K. Тогда выполнены равенства*

$$\sigma(W) = \sigma(K) + \sigma(Z), \quad \sigma(-K) = -\sigma(K).$$

Если Q — левосторонний, а $-Q$ — правосторонний трилистник[11] *в S^3, то выполнены равенства:*

$$\sigma(Q) = 2, \quad \sigma(-Q) = -2.$$

[11]Трилистник является хиральным узлом, то есть не объемлемо изотопен своему зеркальному отображению. Соответственно, можно определить два различных узла — левосторонний трилистник и правосторонний трилистник. В предыдущих рассуждениях, где шла речь о трилистнике, не имело значения, рассматривается левосторонний или правосторонний трилистник.

Лемма 10. *Пусть Q и $-Q$ — произвольно ориентированные левосторонний и правосторонний трилистники. Тогда выполнены равенства*

$$u_{(\#)}(Q) = 1, \quad u_{(\#)}(-Q) = 1.$$

Доказательство. На рис. 15 изображено (#)-преобразование, переводящее узел Q в тривиальный (для других ориентаций и зеркального отражения соответствующее (#)-преобразование строится аналогично). □

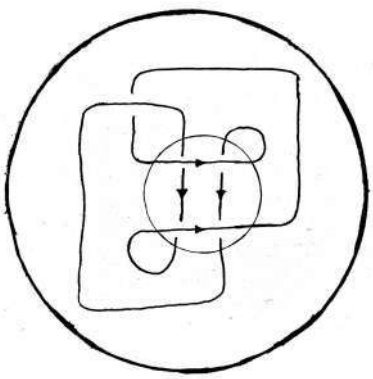


Рис. 15

5.2. Теорема о (#)-преобразованиях.

Лемма 11. *Граф $G((\#), \mathscr{K}^\circ)$ связен.*

Доказательство. В работе [33] (лемма 3.1) доказано, что ориентированный шаблон (#) является развязывающим относительно множества $\mathscr{K}^\circ$, откуда следует требуемое. □

Следующая теорема описывает асимптотическую структуру Гордиева графа $G((\#), \mathscr{K}^\circ)$ на бесконечности, а именно утверждает, что среди компонент связности дополнения шара в этом графе существует не более двух компонент с бесконечным диаметром.

Теорема 7. *Пусть r — произвольное натуральное число, а K и Z — два произвольных ориентированных узла, для которых выполнены условия*

$$u_{(\#)}(K) \geqslant 4r, \quad u_{(\#)}(Z) \geqslant 4r, \quad |sign(\sigma(K)) - sign(\sigma(Z))| \leqslant 1,$$

где через $sign(z)$ обозначается знак числа $z \in \mathbb{Z}$. Тогда в графе $G((\#), \mathscr{K}^\circ)$ существует путь, соединяющий вершины K и Z и не пересекающий шара $B_{(r-1,(\#),\mathscr{K}^\circ)}(U)$.

Доказательство теоремы 7. Будем обозначать шар $B_{(r-1,(\#),\mathscr{K}^\circ)}(U)$ через $B_{r-1}(U)$. Пусть K и Z — ориентированные узлы, удовлетворяющие условиям теоремы. Из условия

$$|sign(\sigma(K)) - sign(\sigma(Z))| \leqslant 1,$$

следует, что числа $\sigma(K)$ и $\sigma(Z)$ либо одновременно неотрицательны, либо одновременно неположительны. Пусть сначала оба эти числа неотрицательны. Пусть Q — это произвольно ориентированный левосторонний трилистник в S^3, а Q^n — это узел, являющийся связной суммой n копий ориентированного узла Q. Из леммы 8 и леммы 9 следует, что

$$u_{(\#)}(Q^n) \geqslant n/3.$$

Лемма 12. *Пусть K_1, K_2 и W — произвольные ориентированные узлы в S^3, а W_i — связная сумма узлов W и K_i, где $i \in \{1,2\}$. Тогда, если в графе $G((\#),\mathscr{K}^\circ)$ вершины K_1 и K_2 смежны, то и вершины W_1 и W_2 смежны.*

Доказательство. Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 4, достаточно вместо вложенной перестройки рассматривать $(\#)$-преобразование. □

Замечание 11. Можно провести рассуждение, аналогичное рассуждению из замечания 8. Пусть W — произвольный ориентированный узел, γ — некоторый путь в графе $G((\#),\mathscr{K}^\circ)$, $\{V_0, V_1, \ldots, V_n\}$ — множество вершин пути γ и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — множество ребер пути γ, причем ребро e_i инцидентно вершинам V_i и V_{i-1}, где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Последовательное применение леммы 12 к каждому ребру пути γ позволяет получить новый путь $\gamma(W)$ с множеством вершин $\{W_0, W_2, \ldots, W_n\}$ и множеством ребер $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, где вершина W_i соответствует связной сумме узлов W и V_i для $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, а ребро f_j инцидентно вершинам W_j и W_{j-1} для $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть τ — путь в графе $G((\#),\mathscr{K}^\circ)$, соединяющий тривиальный узел и узел K (такой путь существует в силу связности графа $G((\#),\mathscr{K}^\circ)$). Пусть $\{U = K_0, K_1, \ldots, K_{p-1}, K_p = K\}$ — множество вершин пути τ. Обозначим через m число

$$m := 3r + \max_{0 \leqslant i \leqslant p} |\sigma(K_i)|.$$

Из замечания 11 следует, что существует путь $\tau(Q^m)$, соединяющий узел Q^m и узел K_{Q^m}, который является связной суммой узлов K и Q^m. Из построения следует, что любой узел V, отвечающий вершине пути $\tau(Q^m)$, является связной суммой узлов Q^m и K_i для некоторого $0 \leqslant i \leqslant p$. Пользуясь этим фактом и леммами 8 и 9 получим оценку:

$$u_{(\#)}(V) \geqslant \frac{|\sigma(Q^m) + \sigma(K_i)|}{6} \geqslant \frac{|6r + 2(\max_{0 \leqslant j \leqslant p} |\sigma(K_j)|) + K_i|}{6} \geqslant r$$

Это значит, что множество вершин пути $\tau(Q^m)$ не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$.

В графе $G((\#), \mathscr{K}^\circ)$ существует ребро, соединяющее узел Q и тривиальный узел (в силу леммы 10). Из леммы 12, применённой к этому ребру и узлу Q, следует, что существует ребро, соединяющее узел Q и узел Q^2. Продолжим применять лемму 12 к получающимся ребрам и узлу Q, пока не будет построен путь β с множеством вершин $\{U = Q^0, Q^1, \ldots, Q^m\}$ и множеством рёбер $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, где ребро h_n инцидентно вершинам Q^n и Q^{n-1} для $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Путь β соединяет тривиальный узел и узел Q^m.

Из замечания 11 следует, что существует путь $\beta(K)$, соединяющий узлы K и K_{Q^m}. Заметим, что любой узел отвечающий вершине пути $\beta(K)$, является связной суммой узлов K и Q^n, где $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ (будем обозначать связную сумму узлов K и Q^n через K_{Q^n}). Если $n \geqslant 3r$, то лемма 8, лемма 9 и неотрицательность числа $\sigma(K)$ влекут неравенство $u_{(\#)}(K_{Q^n}) \geqslant r$. Если $n < 3r$, то для $(\#)$-Гордиева расстояния между узлами K и K_{Q^n} выполнено неравенство

$$d_{((\#), \mathscr{K}^\circ)}(K, K_{Q^n}) \leqslant n,$$

так как подпуть пути $\beta(K)$ соединяющий вершины K и K_{Q^n} имеет длину n по построению. По условию теоремы $u_{(\#)}(K) \geqslant 4r$. Предположим, что выполнено неравенство $u_{(\#)}(K_{Q^n}) < r$. Из определения $(\#)$-Гордиевой длины сразу следует неравенство

$$4r \leqslant u_{(\#)}(K) \leqslant u_{(\#)}(K_{Q^n}) + d_{((\#), \mathscr{K}^\circ)}(K, K_{Q^n}) < r + n$$

Противоречие. Это означает, что для любого узла S, отвечающего вершине пути $\beta(K)$, верна оценка $u_{(\#)}(S) \geqslant r$, то есть множество вершин пути $\beta(K)$ не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$.

При конкатенации путей $\tau(Q^m)$ и $\beta(K)$ получается путь α_1, соединяющий узлы K и Q^m. Аналогичным способом можно построить путь α_2, соединяющий узел Z и узел Q^l, где $l \geqslant 3r$. Повторяя конструкцию, используемую для построения пути β, можно построить путь α_3, соединяющий узлы Q^m и Q^l, причём множество вершин пути α_3 будет состоять из узлов вида Q^k, где $k \geqslant 3r$, а следовательно не будет пересекаться с множеством $B_{r-1}(U)$. Путь, являющийся конкатенацией путей α_1,α_3 и α_2, соединяет узлы K и Z, причём, в силу построений, множество вершин этого пути не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$, что и требовалось.

Если числа $\sigma(K)$ и $\sigma(Z)$ неположительны, то нужно провести все изложенные выше рассуждения, заменив узел Q на узел $-Q$. □

Замечание 12. Предположим, что для любого натурального числа n существует такой ориентированный узел $K(n)$, для которого выполнены условия $u_{(\#)}(K(n)) = n$ и $\sigma(K(n)) = 0$. Из верности этого предположения сразу следовало бы усиление предыдущей теоремы, а именно, что для произвольного натурального числа r и любых двух ориентированных узлов K и Z, для которых выполнены условия

$$u_{(\#)}(K) \geqslant 4r,\ u_{(\#)}(Z) \geqslant 4r,$$

существует такой путь в графе $G((\#), \mathscr{K}^\circ)$, соединяющий вершины K и Z, множество вершин которого не пересекается с множеством $B_{r-1}(U)$.

§6. $\mathcal{O}(n)$-преобразования

В данном параграфе исследованы свойства Гордивевых графов определенных ранее $\mathcal{O}(n)$-преобразований, введён новый тип преобразований узлов и изучено одно из преобразований такого типа, являющееся «предельным» случаем $\mathcal{O}(n)$-преобразований и названное $\mathcal{O}(\infty)$-преобразованием.

Лемма 13. *Если зацепление L_2 получается из зацепления L_1 с помощью однократного применения $\mathcal{O}(n)$-преобразования, где n — неотрицательное целое число, то зацепление L_2 получается из зацепления L_1 и с помощью однократного применения $\mathcal{O}(n+1)$-преобразования, иными словами, граф $G(\mathcal{O}(n), \mathscr{K})$ является подграфом графа $G(\mathcal{O}(n+1), \mathscr{K})$.*

Доказательство. На рис. 16 изображено $\mathcal{O}(n+1)$-преобразование, которое реализует заданное $\mathcal{O}(n)$-преобразование. □

Следствие 3. *Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ граф $G(\mathcal{O}(n), \mathscr{K})$ связен.*

Доказательство. Из леммы выше следует, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ граф Γ_k является подграфом графа $G(\mathcal{O}(n), \mathscr{K})$, причём множества вершин этих графов совпадают. По теореме 1 граф Γ_k связен, откуда следует требуемое. □

Лемма 14. *Для $\mathcal{O}(1)$-Гордиевой длины произвольного узла K выполнено неравенство*

$$u_{(\mathcal{O}(1),\mathscr{K})}(K) \leqslant \min(u_2(K), u_{(X,\mathscr{K})}(K)).$$

Иными словами, граф $G(\mathcal{O}(1), \mathscr{K})$ содержит графы Γ_k и $G(X, \mathscr{K})$ в качестве подграфов.

Доказательство. Несложно заметить, что X-преобразование может быть реализовано с помощью одного $\mathcal{O}(1)$-преобразования. Из возможности такой реализации и леммы 13 следует, что выполняется требуемое неравенство. □

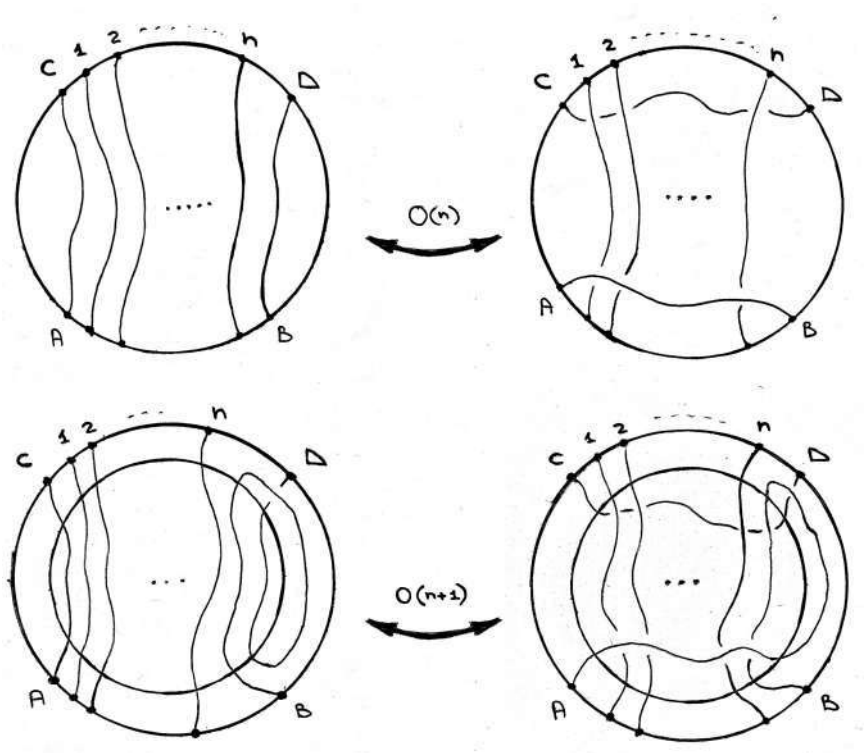


Рис. 16

Замечание 13. Для узла 7_5 в обозначениях Рольфсена верно, что

- $u_{(\mathcal{O}(1),\mathscr{K})}(7_5) = 1$ (см. рис. 17),
- $u_2(7_5) = 2$ (см. [15]),
- $u_{(X,\mathscr{K})}(7_5) = 2$ (см. [23]).

Отсюда следует, что граф $G(\mathcal{O}(1), \mathscr{K})$ не совпадает с объединением подграфов, соответствующих графам Γ_k и $G(X, \mathscr{K})$ (см. лемму 14). Объединение этих подграфов будем обозначать через $G(X + H(2), \mathscr{K})$. Расстояние между узлами K и Z в графе $G(X + H(2), \mathscr{K})$ будем обозначать через $d_{(X,H(2))}(K, Z)$.

Замечание 14. Пусть δ — шаблон локального преобразования, состоящий из двух тривиальных n-ниточных тэнглов (n-ниточный тэнгл называется тривиальным, если существует изотопия шара, переводящая нити тэнгла в параллельные отрезки). Доказательство теоремы 4 из работы [9] обобщается на любой шаблон, состоящий из двух тривиальных n-ниточных тэнглов, следовательно для произвольных узлов K и Z выполнено неравенство

$$(n-1)d_{(\delta,\mathscr{K})}(K,Z) \geqslant |mg(K,2) - mg(Z,2)|.$$

Из замечания 14 и того факта, что шаблон X состоит из двух тривиальных двуниточных тэнглов, следует

Лемма 15. *Для произвольных узлов K и Z выполнено неравенство*

$$d_{(X,\mathscr{K})}(K,Z) \geqslant |mg(K,2) - mg(Z,2)|.$$

Из замечания 14 доказательства теоремы 4 работы [9] следует

Лемма 16. *Для произвольных узлов K и Z выполнено неравенство*

$$d_{(X+H(2))}(K,Z) \geqslant |mg(K,2) - mg(Z,2)|.$$

Теорема 8. *Для любого натурального числа n граф $G(\mathcal{O}(n),\mathscr{K})$ имеет бесконечный диаметр.*

Доказательство теоремы 8. Из определения $\mathcal{O}(n)$-преобразования и леммы 16 следует, что для произвольных узлов K и Z выполнено неравенство

$$d_{(\mathcal{O}(n))}(K,Z) \geqslant \frac{d_{(X+H(2))}(K,Z)}{n+1} \geqslant \frac{|mg(K,2) - mg(Z,2)|}{n+1},$$

что и влечёт бесконечность диаметра. □

В качестве обобщения локальных преобразований можно рассмотреть следующую конструкцию:

Определение 26. *Тор-тэнглом на n нитях* или *n-ниточным тор-тэнглом* будем называть пару $V_A = (V, A)$, где V — произвольный незаузленный полноторий в S^3, а A — множество из n дизъюнктных вложенных в V дуг, таких что граничный тор ∂V полнотория V пересекается с каждой дугой в концевых точках этой дуги и только в них. Компоненты связности множества A будем называть *нитями* тор-тэнгла V_A.

Определение 27. Пусть S^3 — ориентированная сфера, а V — незаузленный полноторий в S^3. Тогда пару n-ниточных тор-тэнглов (V_A, V_C), будем называть *шаблоном тор-преобразования*, если множество концов нитей первого тэнгла совпадает с множеством концов нитей второго тэнгла.

Определение 28. Пусть L_1 и L_2 — два зацепления в S^3, V — незаузленный полноторий в S^3, а $\omega = (V_A, V_C)$ — некоторый шаблон тор-преобразования. Будем говорить, что зацепление L_2 получается из зацепления L_1 с помощью *ω-тор-преобразования*, если существуют такие зацепления L_1' и L_2' в S^3, что зацепление L_1' объемлемо изотопно зацеплению L_1, зацепление L_2' объемлемо изотопно зацеплению L_2, зацепления L_1' и L_2' совпадают вне внутренности полнотория V и пара $((V, V \cap L_1'), (V, V \cap L_2'))$ совпадает с шаблоном ω.



Рис. 17

Замечание 15. Для шаблона тор-преобразования ω и множества зацеплений M конструкции (ω, M)-Гордиевого графа, (ω, M)-Гордиевого расстояния, развязывающего шаблона и (ω, M)-Гордиевой длины определяются по аналогии со случаем локальных преобразований.

Определение 29. На рис. 18 приведен шаблон тор-преобразования, содержащий два 2-ниточных тор-тэнгла. Будем обозначать этот шаблон через $\mathcal{O}(\infty)$, а тор-преобразование, соответствующее этому шаблону, будем называть *$\mathcal{O}(\infty)$-преобразованием*.

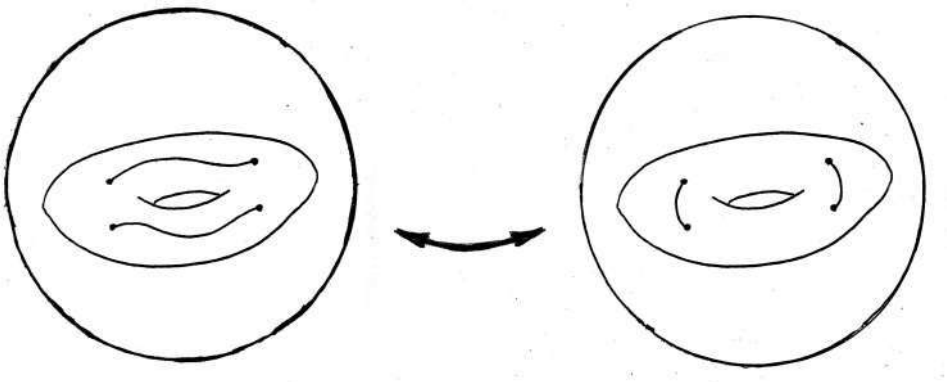


Рис. 18. $\mathcal{O}(\infty)$-преобразование.

Идея введения этого преобразования заключается в обобщении идеи $\mathcal{O}(n)$-преобразований — $\mathcal{O}(\infty)$-преобразование можно воспринимать как вложенную перестройку по ленте, число проколов в которой не ограничено.

Теорема 9. *Диаметр $(\mathcal{O}(\infty), \mathscr{K})$-Гордиева графа равен единице.*

Доказательство теоремы 9. Идея доказательства видна из примера на рис. 19. Пусть K и Z — произвольные узлы в S^3. Как известно из [26], любой узел может быть представлен в виде замыкания Александера некоторой унарной косы. Пусть B_K в S^3 — унарная коса на n нитях, представляющая узел K, а B_Z в S^3 — унарная коса на m нитях, представляющая узел Z, и $n \geqslant m$ (как на рис. 19). Дополним косу B_K справа тривиальной косой и расположим замыкание Александера получившейся унарной косы B_{K+} в S^3. Пусть γ — это дуга в S^3, дублирующая ведущую нить косы B_{K+} (под ведущей нитью унарной косы подразумевается та её нить, которая обходит остальные параллельные друг другу нити). Концы дуги γ лежат на ведущей нити косы B_{K+} (точки B и D на рис. 19). Пусть β — это дуга в S^3, которая идёт параллельно косе B_{K+} до того момента, пока все нити косы B_{K+} не станут параллельны друг другу, после чего дуга β вместе с нижними $m-1$ нитями косы B_{K+} образуют косу B_Z, причём дуга β соответствует ведущей нити этой косы. Концы дуги β лежат на ведущей нити косы B_{K+} (точки A и C на рис. 19). Пусть α_{AB} и α_{CD} — дуги, лежащие на ведущей нити косы B_{K+} и соединяющие точки A, B и C, D соответственно. Дуги γ, β, α_{AB} и α_{CD} образуют незаузленную окружность в S^3.

Пусть V— незаузленный полноторий, содержащий эту окружность, причём точки A, B, C и D лежат на крае ∂V. Полноторий V можно выбрать таким образом, чтобы V и дуги γ, β, α_{AB} и α_{CD} образовывали шаблон $\mathcal{O}(\infty)$-преобразования. Соответствующее $\mathcal{O}(\infty)$-преобразование переведёт узел K в узел Z. □

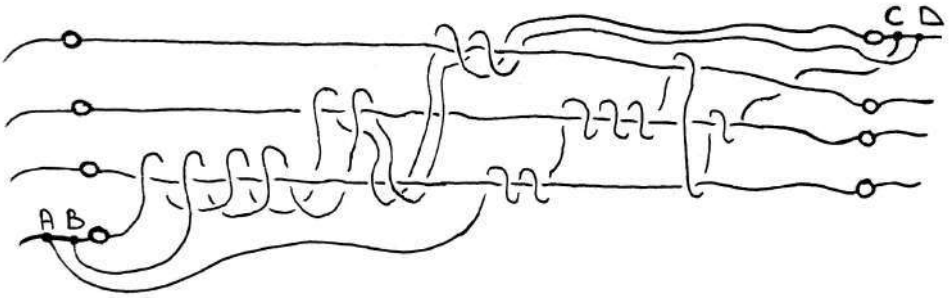


Рис. 19

Замечание 16. Теорема 8 утверждает, что для любого натурального числа n граф $G(\mathcal{O}(n), \mathscr{K})$ имеет бесконечный диаметр. Из леммы 13 следует, что с увеличением числа n количество ребер графа $G(\mathcal{O}(n), \mathscr{K})$ как минимум не уменьшается, а в «предельном графе» $G(\mathcal{O}(\infty), \mathscr{K})$ существуют все возможные ребра.

Список литературы

[1] Abe T., Hanaki R., Higa R., *The unknotting number and band-unknotting number of a knot*, Osaka J. Math. **49** (2012), № 2, 523–550.

[2] Abe T., Kanenobu T., *Unoriented band surgery on knots and links*, Kobe J. Math. **31** (2014), № 1-2, 21–44.

[3] Bao Y., *$H(2)$-unknotting operation related to 2-bridge links*, Topology Appl. **159** (2012), № 8, 2158–2167.

[4] Bao Y., *A note on knots with $H(2)$-unknotting number one*, Osaka J. Math. **51** (2014), № 3, 585–596.

[5] Buck D., Ishihara K., *Coherent band pathways between knots and links*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015), № 2, 1550006, 21 pp.

[6] Buck D., Ishihara K., Rathbun M., Shimokawa K., *Band surgeries and crossing changes between fibered links*, J. Lond. Math. Soc. (2) **94** (2016), № 2, 557–582.

[7] Fominykh E. A., *Dehn surgeries on the figure eight knot: an upper bound for complexity*, Sibirsk. Mat. Zh. **52** (2011), № 3, 680–689.

[8] Hirasawa M., Uchida Y., *The Gordian complex of knots*, Knots 2000 Korea, Vol. 1 (Yongpyong). J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), № 3, 363–368.
[9] Hoste J., Nakanishi Y., Taniyama K., *Unknotting operations involving trivial tangles*, Osaka J. Math. **27** (1990), № 3, 555–566.
[10] Ichihara K., Jong I. D., *Cosmetic banding on knots and links. With an appendix by Hidetoshi Masai*, Osaka J. Math. **55** (2018), № 4, 731–745.
[11] Ishihara K., Shimokawa K., Vazquez M., *Site-specific recombination modeled as a band surgery: applications to Xer recombination*, Discrete and topological models in molecular biology, Nat. Comput. Ser., Springer, Heidelberg, 2014, 387–401.
[12] Jabuka S., Liu B., Moore A. H., *Knot graphs and Gromov hyperbolicity*, (2019), preprint arXiv:1912.03766.
[13] Kanenobu S., Kanenobu T., *Oriented Gordian distance of two-component links with up to seven crossings*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015), № 10, 1540013, 14 pp.
[14] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), № 12, 1535–1547.
[15] Kanenobu T., *$H(2)$-Gordian distance of knots*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), № 6, 813–835.
[16] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links, II*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), № 9, 1250086, 22 pp.
[17] Kanenobu T., *Band surgery on knots and links, III*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), № 10, 1650056, 12 pp.
[18] Kanenobu T., Miyazawa Y., *H(2)-unknotting number of a knot*, Commun. Math. Res. **25** (2009), № 5, 433–460.
[19] Kanenobu T., Moriuchi H., *Links which are related by a band surgery or crossing change*, Bol. Soc. Mat. Mex. (3) **20** (2014), № 2, 467–483.
[20] Kanenobu T., Moriuchi H., *Coherent band-Gordian distances between knots and links with up to seven crossings*, Topology Appl. **264** (2019), 233–250.
[21] Kawauchi A., *A survey of knot theory.*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
[22] Kim P. K., Tollefson J. L., *Splitting the PL involutions of nonprime 3-manifolds*, Michigan Math. J. **27** (1980), № 3, 259–274.
[23] Kirby R., *Problems in Low-Dimensional Topology*, AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.2, Geometric Topology (Athens, GA, 1993). Providence, RI: Amer. Math. Soc., pp. 35–473, 1997.
[24] Lickorish W. B. R., *Unknotting by adding a twisted band*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), № 6, 613–615.

[25] Lidman T., Moore A. H., Vazquez M., *Distance one lens space fillings and band surgery on the trefoil knot*, Algebr. Geom. Topol. **19** (2019), № 5, 2439–2484.
[26] Makanin G. S., *On an analogue of the Alexander–Markov theorem*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), № 1, 200–210.
[27] Malyutin A. V., *On the question of genericity of hyperbolic knots*, International Mathematics Research Notices (2018), https://doi.org/10.1093/imrn/rny220.
[28] Martelli Bruno., Petronio C., *Complexity of geometric three-manifolds*, Geom. Dedicata **108** (2004), 15–69.
[29] McDonald C., *Band number and the double slice genus*, New York J. Math. **25** (2019), 964–974.
[30] Miyazawa Y., *Gordian distance and polynomial invariants*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), № 6, 895–907.
[31] Moore A. H., Vazquez M., *A note on band surgery and the signature of a knot*, (2018), preprint arXiv:1806.02440.
[32] Moore A. H., Vazquez M. H., *Recent advances on the non-coherent band surgery model for site-specific recombination*, Topology and geometry of biopolymers, 101–125, Contemp. Math., 746, Amer. Math. Soc., Providence, RI, [2020]
[33] Murakami H., *Some metrics on classical knots* Math. Ann. **270** (1985), № 1, 35–45.
[34] Nakamura T., Nakanishi Y., *Notes on sharp moves for knots.*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), № 7, 1250068, 20 pp.
[35] Nakanishi Y., Ohyama Y., *The Gordian complex with pass moves is not homogeneous with respect to Conway polynomials.*, Hiroshima Math. J. **39** (2009), № 3, 443–450.
[36] Ohyama Y., *The C_k-Gordian complex of knots.*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), № 1, 73–80.
[37] Rolfsen D., *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2003.
[38] Schubert H., *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Sitz.ber. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-Nat.wiss. Kl. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1949.
[39] Taniyama K., Yasuhara Akira., *Clasp-pass moves on knots, links and spatial graphs*, Topology Appl. **122** (2002), № 3, 501–529.
[40] Taniyama K., Yasuhara A., *Local moves on spatial graphs and finite type invariants*, Pacific J. Math. **211** (2003), № 1, 183–200.
[41] Torisu I., *The determination of the pairs of two-bridge knots or links with Gordian distance one*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), № 5, 1565–1571.

[42] Zeković A., *Computation of Gordian distances and $H(2)$-Gordian distances of knots*, Yugosl. J. Oper. Res. **25** (2015), № 1, 133–152.
[43] Zhang K., Yang Z., *A note on the Gordian complexes of some local moves on knots*, J. Knot Theory Ramifications **27** (2018), № 9, 1842002, 6 pp.
[44] Zhang K., Yang Z., Lei F., *The $H(n)$-Gordian complex of knots*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), № 13, 1750088, 7 pp.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Минца Дмитрия Ильича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «О взаимоотношении тривиальных и нетривиальных базисных множеств структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей» являются: теорема 1, теорема 2, следствие 1, следствие 2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

1) Изучен ряд работ по теме исследования (см. источники [1]-[20] в списке литературы в выпускной квалификационной работе).

2) Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Вячеславом Зигмундовичем Гринесом, профессором кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ НН.
3) Результаты выпускной квалификационной работы были представлены на семинаре международной лаборатории динамических систем и приложений.
4) Результаты выпускной квалификационной работы были представлены на конференции «Dynamics in Siberia-2021».
5) Результаты выпускной квалификационной работы были опубликованы в научном журнале «Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science».

Таким образом, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 16.06.2021. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  Минц Дмитрий Ильич

31 мая 2021 г. Нижний Новгород, Россия

Отзыв

на выпускную квалификационную работу

студента гр. 17 ФМ Минца Дмитрия Ильича

«О взаимоотношении тривиальных и нетривиальных базисных множеств структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей»

В работах В.З. Гринеса и Е.В. Жужомы была получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов замкнутых n-мерных многообразий (n>2), неблуждающие множества которых содержат растягивающиеся ориентируемые аттракторы коразмерности один. Одновременно было доказано, что несущим многообразием для таких диффеоморфизмов является n-мерный тор. Для случая n=2 несущее многообразие, допускающее структурно устойчивый диффеоморфизм с неблуждающим множеством, содержащим ориентируемый аттрактор не является, вообще говоря, двумерным тором. При этом неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма может содержать любое наперед заданное число нетривиальных ориентируемых атрракторов и репеллеров на поверхности достаточно большого рода. Заметим, что неблуждающие множества диффеоморфизмов, опреленных на многообразиях большей размерности, могут содержать лишь один ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один.

Задачей выпускной квалификационной работы Дмитрия Минца явилось описание неблуждающего множества структурно устойчивых диффеоморфизмов замкнутых поверхностей, все изолированные периодические точки которых являются источниками, а также исследование взаимосвязей между существованием нетривиальных и тривиальных нульмерных базисных множеств.

В работе доказано, что если все тривиальные базисные множества структурно устойчивого диффеоморфизма замкнутой поверхности являются источниковыми периодическими точками, то неблуждающее множество диффеоморфизма состоит из этих источников и в точности одного одномерного аттрактора. При этом несущее двумерное многообразие может иметь любой род и, в частности, может быть отличным от двумерного тора. Это контрастирует с многомерной (n>2) ситуацией.

В работе также доказано, что если неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма замкнутой поверхности содержит нетривиальное нульмерное базисное множество, то оно содержит источниковую и стоковую периодические точки.

При доказательстве результатов автор дипломной работы применил методы топологии, геометрии и качественной теории динамических систем на поверхностях. Доказательства результатов основаны на анализе асимптотического поведения устойчивых и неустойчивых многообразий граничных периодических точек, принадлежащих нетривиальным базисным множествам, а также изучении свойств слоений и ламинаций,

образованных устойчивыми и неустойчивыми многообразиями нетривиальных базисных множеств.

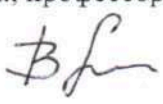
При работе над ВКР автор проявил значительное трудолюбие, изобретательность и весьма широкий кругозор.

Оформление выпускной квалификационной работы удовлетворяет требованиям, предъявляемым к написанию выпускных квалификационных работ. Результаты работы были представлены на семинаре международной лаборатории динамических систем и приложений, на конференции «Dynamics in Siberia-2021» и опубликованы в престижном научном журнале «Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science».

Рекомендую допустить выпускную квалификационную работу к защите. Оценка за выпускную квалификационную работу 10 баллов.

Руководитель:

В.З. Гринес, г.н.с., д.ф.-м.н., профессор

Подпись  Дата: 27.05.2021

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика

Минц Дмитрий Ильич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

О взаимоотношении тривиальных и нетривиальных базисных множеств структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
профессор
Гринес Вячеслав Зигмундович

Нижний Новгород, 2021

Содержание

1 Аннотация **2**

2 Введение **3**

3 Основная часть **8**

3.1 Вспомогательные сведения 8

3.1.1 Граничные периодические точки 8

3.1.2 Связки аттрактора 8

3.2 Доказательство теоремы 1 10

3.3 Доказательство следствий 1 и 2 16

3.4 Доказательство теоремы 2 18

4 Заключение **20**

Список литературы **21**

1 Аннотация

Данная выпускная квалификационная работа посвящена взаимосвязям между существованием тривиальных и нетривиальных базисных множеств A-диффеоморфизмов поверхностей. Доказано, что если все тривиальные базисные множества структурно устойчивого диффеоморфизма замкнутой поверхности являются источниковыми периодическими точками $\alpha_1, \dots \alpha_k$, то неблуждающее множество данного диффеоморфизма состоит из точек $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и в точности одного одномерного аттрактора Λ. Приведены достаточные условия просторной расположенности аттрактора Λ. Также доказано, что если неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма замкнутой поверхности содержит нетривиальное нульмерное базисное множество, то оно также содержит источниковую и стоковую периодические точки.

2 Введение

Пусть M^n - замкнутое гладкое многообразие размерности $n \geq 1$, $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм и $NW(f)$ - неблуждающее множество f. Говорят, что диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A (является A-диффеоморфизмом), если множество $NW(f)$ гиперболическое и периодические точки в $NW(f)$ всюду плотны.

Следующие два предложения содержатся в [1] (теорема 6.2 и следствие 6.3).

Предложение 1. *(Теорема о спектральном разложении). Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A. Тогда его неблуждающее множество $NW(f)$ единственным образом представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, каждое из которых топологически транзитивно:*

$$NW(f) = \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_k.$$

Предложение 2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A. Тогда справедливы следующие равенства:*

$$M^n = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(\Omega_i), \text{ где}$$

$$W^s(\Omega_i) = \{x \in M^n | f^m(x) \to \Omega_i \text{ при } m \to +\infty\},$$

$$W^u(\Omega_i) = \{x \in M^n | f^{-m}(x) \to \Omega_i \text{ при } m \to +\infty\}.$$

Множество Ω_i называется базисным множеством. Базисное множество, являющееся периодической траекторией, называется тривиальным. В противном случае базисное множество называется нетривиальным.

Пусть Ω_i $(i \in \{1, ..., k\})$ - базисное множество A-диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$. Множество Ω_i называется аттрактором (репеллером), если оно имеет замкнутую окрестность $U_{\Omega_i} \subset M^n$ такую, что $f(U_{\Omega_i}) \subset int$

$U_{\Omega_i}, \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} f^k(U_{\Omega_i}) = \Omega_i$ $(f^{-1}(U_{\Omega_i}) \subset int\ U_{\Omega_i}, \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(U_{\Omega_i}) = \Omega_i)$. В данном случае $\Omega_i = \bigcup\limits_{x\in\Omega_i} W^u(x)$ $(\Omega_i = \bigcup\limits_{x\in\Omega_i} W^s(x))$. Пусть $\dim\Omega_i$ обозначает топологическую размерность базисного множества Ω_i. Если $\dim\Omega_i = \dim W^u(x)$ $(\dim\Omega_i = \dim W^s(x))$, где $x \in \Omega_i$, то аттрактор (репеллер) Ω_i называется растягивающимся (сжимающимся). Из теоремы 2 [13] следует, что каждый растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер) Ω_i имеет локальную структуру прямого произведения r-мерного евклидова пространства и канторова множества, где r - топологическая размерность Ω_i.

В силу теоремы 3 [13] любое базисное множество Ω_i коразмерности один является либо аттрактором, либо репеллером. Таким образом, любое одномерное базисное множество A-диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ является растягивающимся аттрактором или сжимающимся репеллером.

Нетривиальное базисное множество Ω_i коразмерности один называется ориентируемым, если для любой точки $x \in \Omega$ и для любых фиксированных положительных α, β индекс пересечения многообразий $W^s_\alpha(x)$ и $W^u_\beta(x)$ одинаков во всех точках пересечения; здесь $W^s_\alpha(x) = \{y \in W^s(x) |\, l(x, y) < \alpha\}, W^u_\beta(x) = \{y \in W^u(x) |\, l(x, y) < \beta\}$, l - метрика на $W^s(x)$ и $W^u(x)$. В противном случае Ω_i называется неориентируемым.

Говорят, что диффеоморфизм удовлетворяет строгому условию трансверсальности, если устойчивые и неустойчивые многообразия точек его неблуждающего множества пересекаются трансверсально. Известно [18],[19], что диффеоморфизм структурно устойчив тогда и только тогда, когда он удовлетворяет аксиоме A и строгому условию трансверсальности.

В [10] доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть $f : M^n \to M^n$ $(n \geq 3)$ - структурно устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество $NW(f)$ которого содержит растягивающийся ориентируемый аттрактор Ω_i коразмерности один. Тогда:*

1. *Многообразие M^n гомотопически эквивалентно n-мерному тору $\mathbb{T}^n$; если $n \neq 4$, то M^n гомеоморфно $\mathbb{T}^n$;*

2. *Множество $NW(f)\backslash\Omega_i$ состоит из конечного числа изолированных источников и сёдел.*

Для случая $n = 2$ данное утверждение не верно. Именно, несущая поверхность M^2 структурно устойчивого диффеоморфизма f, неблуждающее множество $NW(f)$ которого содержит ориентируемый аттрактор Ω_i, не обязательно является тором, а может быть любой ориентируемой поверхностью, отличной от сферы, и динамика на множестве $NW(f)\backslash\Omega_i$ может быть устроена гораздо более сложно.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $f : M^2 \to M^2$ - структурно устойчивый диффеоморфизм, все тривиальные базисные множества которого являются источниковыми периодическими точками $\alpha_1, ..., \alpha_k$, где $k \geq 1$. Тогда неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f состоит из точек $\alpha_1, ..., \alpha_k$ и в точности одного одномерного аттрактора Λ.*

Из критерия структурной устойчивости и теоремы 1 следует, что если неблуждающее множество A-диффеоморфизма, все тривиальные базисные множества которого являются источниковыми периодическими точками, содержит два или более нетривиальных базисных множества, то существует точка x касания устойчивых и неустойчивых многообразий различных нетривиальных базисных множеств.

Таким образом, условие структурной устойчивости в теореме 1 является существенным. На рисунке 1 приведён пример структурно неустойчивого A-диффеоморфизма ориентируемой поверхности рода 2 (кренделя), неблуждающее множество которого состоит из одномерного аттрактора, одномерного репеллера, а также источниковой неподвижной точки. Это модификация примера, предложенного в статье [20].

В [17] было анонсировано обобщение хирургической операции С. Смейла на обобщённые псевдоаносовские диффеоморфизмы произвольной поверхности. Эта операция приводит к появлению структурно устойчивого диффеоморфизма той же поверхности с неблуждающим множеством, состоящим из одного одномерного аттрактора и конечного числа источниковых периодических то-

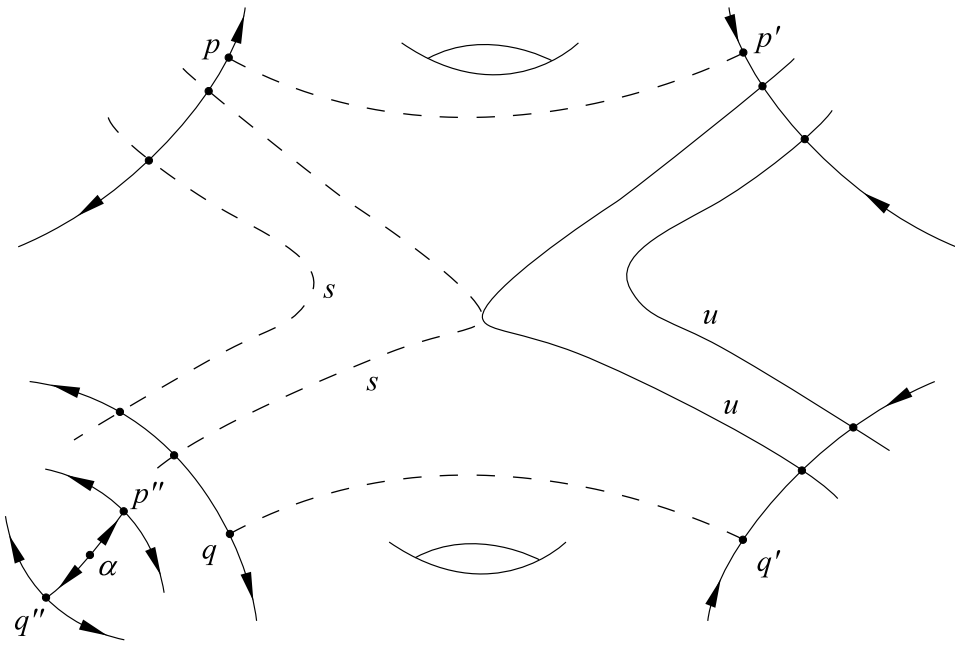


Рис. 1: Пример структурно неустойчивого A-диффеоморфизма ориентируемой поверхности рода 2 (кренделя), неблуждающее множество которого состоит из одномерного аттрактора, одномерного репеллера, а также источниковой неподвижной точки.

чек. Диффеоморфизмы, полученные в результате данной хирургической операции (в частности, DA-диффеоморфизмы двумерного тора), являются примерами диффеоморфизмов, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Недавно в [12] была получена топологическая классификация A-диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей рода большего единицы, неблуждающее множество которых состоит из одномерного просторно расположенного аттрактора и нульмерных источников.

Согласно [14], нетривиальное базисное множество Ω_i A-диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ называется просторно расположенным, если не существует гомотопной нулю петли, образованной парой отрезков устойчивого и неустойчивого многообразий какой-либо точки Ω_i. Ориентируемые базисные множества просторно расположены. Однако обратное не верно. Если неблуждающее множество A-диффеоморфизма поверхности M^2 содержит просторно расположенное базисное множество, то род поверхности M^2 равен по крайней ме-

ре 1, если M^2 ориентируема, и по крайней мере 3, если M^2 неориентируема. Невозможность существования просторно расположенных базисных множеств на неориентируемых поверхностях рода 1 и 2 (проективная плоскость и бутылка Клейна) была доказана в [15].

Пусть g - род поверхности M^2. Понятие связки аттрактора, которое используется далее, приведено в разделе 3.1.2.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1, аттрактор Λ не имеет связок степени один и $g \geq 1$, если поверхность M^2 ориентируемая, $g \geq 3$, если поверхность M^2 неориентируемая. Тогда аттрактор Λ просторно расположен на поверхности M^2.*

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и $k = 1$ (то есть α_1 - неподвижная точка). Тогда поверхность M^2 имеет род $g \geq 1$, если она ориентируемая, $g \geq 3$, если она неориентируемая, аттрактор Λ просторно расположен на поверхности M^2 и не имеет связок степени один.*

Замечание 1. *Теорема 1, а также следствия 1 и 2, естественно переформулируются для случая, когда все тривиальные базисные множества диффеоморфизма f являются стоковыми периодическими точками, а множество Λ является одномерным репеллером. Для доказательства данного случая достаточно рассмотреть диффеоморфизм f^{-1}.*

В [5] (теорема 1) доказано, что если неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма поверхности содержит одномерный аттрактор (репеллер), то оно также содержит источниковую (стоковую) периодическую точку. Следующая теорема дополняет данное утверждение.

Теорема 2. *Если неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ содержит нетривиальное нульмерное базисное множество Ω, то оно содержит источниковую и стоковую периодические точки.*

Результаты выпускной квалификационной работы опубликованы в научном журнале «Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science» [21].

3 Основная часть

3.1 Вспомогательные сведения

3.1.1 Граничные периодические точки

Для $\sigma \in \{s, u\}$ положим $\overline{\sigma} = s$, если $\sigma = u$, и $\overline{\sigma} = u$, если $\sigma = s$. Введем определение граничной периодической точки нетривиального базисного множества (данное понятие принадлежит В. З. Гринесу [3] и Р. В. Плыкину [14]). Периодическая точка p, принадлежащая нетривиальному базисному множеству Ω_i, называется граничной периодической точкой типа σ, если одна из компонент связности множества $W^{\sigma}(p)\backslash p$ не пересекается с Ω_i, и обе компоненты связности множества $W^{\overline{\sigma}}(p)\backslash p$ пересекаются с Ω_i. Периодическая точка $p \in \Omega_i$ называется граничной периодической точкой типа (s, u), если одна из компонент связности каждого из множеств $W^s(p)\backslash p, W^u(p)\backslash p$ не пересекается с Ω_i. Если множество Ω_i является нульмерным или одномерным, то множество граничных периодических точек является непустым и конечным [2],[3],[4],[14],[16] (см. также [8], [9] (гл. 3)). Периодическая точка нетривиального базисного множества, которая не является граничной точкой, называется внутренней точкой.

3.1.2 Связки аттрактора

Пусть A - подмножество топологического пространства X. Говорят, что точка $y \in \partial A$ достижима из точки $x \in int\, A$, если существует путь $c : [0, 1] \to X$ такой, что $c(0) = x, c(1) = y$ и $c(t) \in int\, A$ для каждого $t \in (0, 1)$. Объединение всех точек, достижимых из точек множества $int\, A$, называется достижимой изнутри границей множества A.

Из работ [2], [3],[4],[14],[16] (см. также [8], [9] (гл. 3)) следует, что для одномерного аттрактора (репеллера) Ω_i достижимая изнутри граница множества $M^2\backslash\Omega_i$ распадается единственным образом на конечное число связок (понятие связки принадлежит Р. В. Плыкину [16]).

Связкой b аттрактора (репеллера) Ω_i называется объединение максимального числа r_b неустойчивых (устойчивых) многообразий $W^{\sigma}_{p_1}, ..., W^{\sigma}_{p_{r_b}}$ $\overline{\sigma}$-граничных периодических точек $p_1, ..., p_{r_b}$ множества Ω_i, $\sigma = u$ $(\sigma = s)$, дости-

жимых из некоторой (общей для всех) точки $x \in (M^2 \backslash \Omega_i)$. Число r_b называется степенью связки. На рисунке 2 изображены связки степени 1-3.

Для связки аттрактора (репеллера) Ω_i существует последовательность точек $x_1, ..., x_{2r_b}$ такая, что:

1. x_{2i-1}, x_{2i} принадлежат различным компонентам связности множества $W^\sigma(p_i) \backslash p_i$;
2. $x_{2i+1} \in W^{\overline{\sigma}}(x_{2i})$ (полагаем $x_{2r_b+1} = x_1$);
3. $(x_{2i}, x_{2i+1})^{\overline{\sigma}} \cap \Omega_i = \varnothing, i = \overline{1, r_b}$;
4. кривая $L^\sigma_{2i} \cup (x_{2i}, x_{2i+1})^{\overline{\sigma}} \cup L^\sigma_{2i+1}$ является достижимой изнутри границей области, гомеоморфной открытому диску D_i, где L^σ_{2i} (L^σ_{2i+1}) есть компонента связности множества $W^\sigma(x_{2i}) \backslash x_{2i}$ $(W^\sigma(x_{2i+1}) \backslash x_{2i+1})$, не содержащая точки p_i (p_{i+1}).

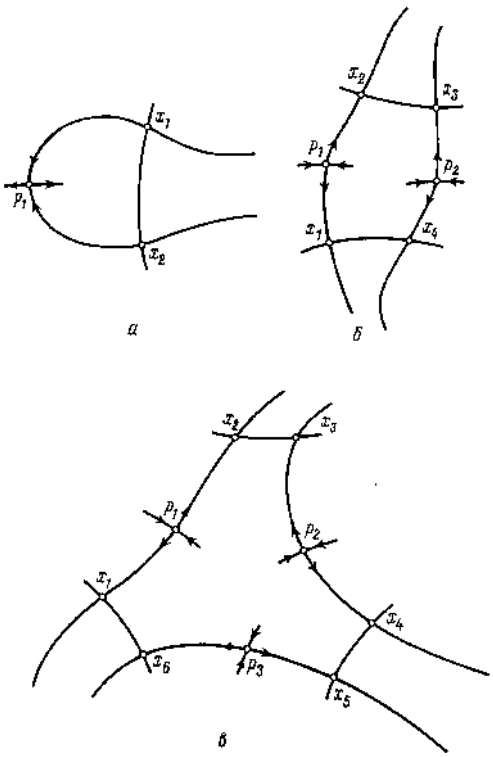


Рис. 2: Связки степени 1-3.

3.2 Доказательство теоремы 1

Всюду в данном разделе мы предполагаем, что выполняются условия теоремы 1.

Лемма 1. *Множество $NW(f)$ не содержит двумерных базисных множеств.*

Доказательство: Пусть Ω_i - двумерное базисное множество, входящее в разложение $NW(f)$ на базисные множества. Тогда по теореме 9.4. [7] $\Omega_i = \mathbb{T}^2$ и f является диффеоморфизмом Аносова. Но это невозможно, так как множество $NW(f)$ содержит по крайней мере одну источниковую периодическую точку. □

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

1. Если p является граничной периодической точкой нульмерного или одномерного базисного множества Ω, то будем обозначать через $W^s_{\varnothing}(p)$ ($W^u_{\varnothing}(p)$) компоненту связности множества $W^s(p)\backslash p$ ($W^u(p)\backslash p$), не пересекающуюся с Ω.

2. Если q является седловой периодической точкой диффеоморфизма f и $x, y \in W^\sigma(q), \sigma \in \{s, u\}$, то будем обозначать через $[x, y]^\sigma, (x, y)^\sigma$ связные дуги на многообразии $W^\sigma(q)$ с граничными точками x, y.

Доказательство следующей леммы использует идеи доказательства леммы 1 [5] и доказательства леммы 1 [6]. Эти идеи также использованы при доказательстве теоремы 1 [11].

Лемма 2. *Множество $NW(f)$ не содержит одномерных репеллеров.*

Доказательство:

Предположим противное. Пусть неблуждающее множество $NW(f)$ содержит базисное множество Ω_i, являющееся одномерным репеллером.

Пусть p - граничная периодическая точка репеллера Ω_i и $x \in W^s(p)$ - любая точка, отличная от p. Обозначим через $W^s_x(p)$ компоненту связности множества $W^s(p)\backslash p$, содержащую точку x. Из определения связки (см. раздел

3.1.2) следует, что существует единственная граничная периодическая точка q (q может совпадать с p, если p принадлежит связке степени 1) такая, что для точки $x \in W^s_x(p)$ найдётся единственная точка y, отличная от x, $y \in W^u(x) \cap W^s(q)$ и $(x,y)^u \cap \Omega_i = \varnothing$ (если q совпадает с p, то y принадлежит компоненте связности множества $W^s(p)\backslash p$, не содержащей точки x). При этом дуга $(x,y)^u$ состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f.

Докажем вначале, что для любой точки z, принадлежащей нетривиальному базисному множеству диффеоморфизма f, выполняется следующее: $W^s(z) \cap (x,y)^u = \varnothing$. Предположим противное, пусть существуют нетривиальное базисное множество Ω_j и точка $z \in \Omega_j$ такие, что $W^s(z) \cap (x,y)^u \neq \varnothing$ (по предположению $\Omega_j \neq \Omega_i$). Возможны два случая:

1. многообразие $W^s(z)$ не содержит граничной периодической точки базисного множества Ω_j;

2. многообразие $W^s(z)$ содержит граничную периодическую точку типа s или типа (s,u) базисного множества Ω_j.

Обозначим через $L(x)$ ($L(y)$) компоненту связности множества $W^s(x)\backslash x$ ($W^s(y)\backslash y$), не содержащую точку p (q). Положим $l_{xy} = L(x) \cup L(y) \cup [x,y]^u$. В силу [3],[14],[16] кривая l_{xy} ограничивает область D_{xy}, гомеоморфную диску, состоящую из блуждающих точек диффеоморфизма f, для которой кривая l_{xy} является достижимой изнутри границей.

Рассмотрим случай 1. Так как дуга $(x,y)^u$ состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f, то точка $z \notin (x,y)^u$. Тогда существует точка z_1, принадлежащая $W^s(z) \cap (x,y)^u$, такая, что $(z,z_1)^s \cap (x,y)^u = \varnothing$. Обозначим через $W^s_*(z_1)$ компоненту связности множества $W^s(z_1)\backslash z_1$, не содержащую точку z. В силу строгого условия трансверсальности $W^s(z_1) \cap D_{xy} \neq \varnothing$. Из [3] вытекает, что компонента $W^s_*(z_1)$ содержит множество, плотное в C-плотной компоненте множества Ω_j. Поэтому на компоненте $W^s_*(z_1)$ существуют точки, не принадлежащие области D_{xy}. Но тогда найдётся точка $z_2 \in (x,y)^u$, отличная от точки z_1, такая, что дуга $(z_1,z_2)^s$ целиком принадлежит области D_{xy}. Так как для любой точки $\tilde{x} \in W^s_x(p)$ найдётся единственная точка $\tilde{y} \in W^s_y(q)$ такая, что $\tilde{y} \in W^u(\tilde{x})$ и $(\tilde{x},\tilde{y})^u \subset D_{xy}$, то существует точка $\tilde{x}$, для которой дуга $(\tilde{x},\tilde{y})$ ка-

сается дуги $(z_1, z_2)^s$ в некоторой точке $\tilde{z}$, что противоречит строгому условию трансверсальности (см. рис. 3).

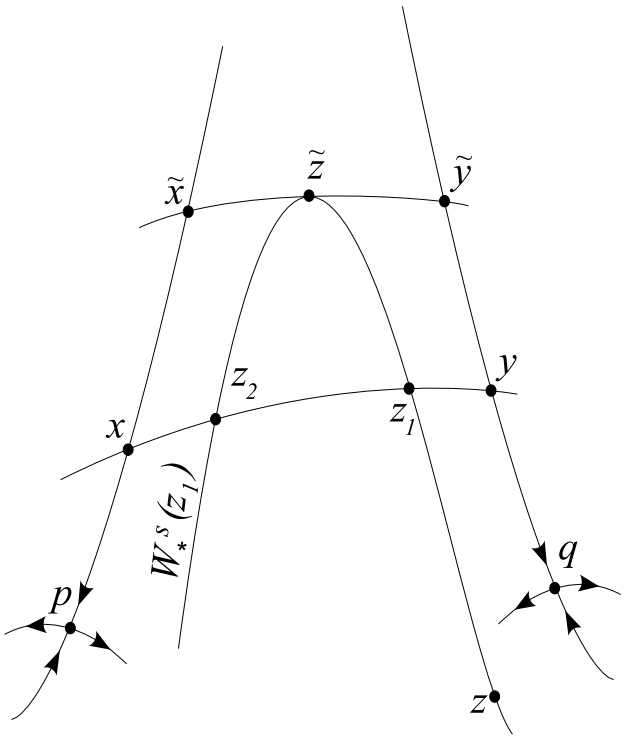


Рис. 3: Касание компоненты $W^s_*(z_1)$ и дуги $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Рассмотрим случай 2. Так как периодические точки плотны в множестве Ω_j и множество граничных периодических точек конечно, то в сколь угодно малой окрестности точки z найдётся внутренняя периодическая точка множества Ω_j. Но тогда в силу C^1-близости устойчивых многообразий точек из Ω_j на компактных множествах следует, что существует внутренняя периодическая точка $z' \in \Omega_j$ такая, что $W^s(z') \cap (x, y)^u \neq \varnothing$, и мы приходим к случаю 1.

Покажем, что компонента $W^u_\varnothing(p)$ целиком принадлежит устойчивому многообразию в точности одной стоковой периодической точки диффеоморфизма

f. Предположим противное. Тогда существует седловая периодическая точка p', принадлежащая некоторому нетривиальному базисному множеству, отличному от Ω_i, такая, что $W^s(p') \cap W^u_{\varnothing}(p) \neq \varnothing$. В силу предложения 2 многообразие M^2 представляется в виде объединения устойчивых многообразий базисных множеств. Из предложения 2 и того, что диффеоморфизм f удовлетворяет строгому условию трансверсальности, вытекает, что $W^s(p') \cap (x, y)^u \neq \varnothing$. Это противоречит доказанному выше.

Значит, диффеоморфизм f содержит по крайней мере одну стоковую периодическую точку. Получили противоречие с условием теоремы 1. Таким образом, множество $NW(f)$ не содержит одномерных репеллеров.

□

Лемма 3. *Множество $NW(f)$ не содержит нетривиальных нульмерных базисных множеств.*

Доказательство: Предположим противное. Пусть множество $NW(f)$ содержит нетривиальное нульмерное базисное множество Ω_1. Из [3] следует, что в данном множестве найдётся по крайней мере одна граничная периодическая точка x_1 либо типа u, либо типа (s, u). В силу условий теоремы 1 и предложения 2 компонента $W^u_{\varnothing}(x_1)$ пересекается с устойчивым многообразием по крайней мере одного нетривиального базисного множества. Обозначим это базисное множество через Ω_2. Заметим, что данное пересечение трансверсально, так как диффеоморфизм f удовлетворяет строгому условию трансверсальности.

Из условия теоремы 1 и лемм 1, 2 следует, что множество Ω_2 является либо нетривиальным нульмерным базисным множеством, либо одномерным аттрактором.

Докажем, что компонента $W^u_{\varnothing}(x_1)$ не пересекается с устойчивыми многообразиями одномерных аттракторов. Предположим противное. Пусть компонента $W^u_{\varnothing}(x_1)$ пересекается с устойчивым многообразием одномерного аттрактора Ω'. Для аттрактора Ω' дуга $(x, y)^s$ может быть определена так же, как была определена дуга $(x, y)^u$ для одномерного репеллера в доказательстве леммы 2.

Из доказательства леммы 2 вытекает следующее:

1. $W^u_{\varnothing}(x_1) \cap (x, y)^s = \varnothing$.

2. компонента $W^s_{\varnothing}(p)$, где p - граничная периодическая точка аттрактора Ω', целиком принадлежит неустойчивому многообразию ровно одной источниковой периодической точки.

Значит, компонента $W^u_{\varnothing}(x_1)$ не пересекается с устойчивыми многообразиями одномерных аттракторов.

Таким образом, множество Ω_2 является нетривиальным нульмерным базисным множеством. Из вышесказанного следует, что в базисном множестве Ω_2 существует граничная периодическая точка x_2 и компонента её неустойчивого многообразия $W^u_{\varnothing}(x_2)$, которая не пересекается с данным базисным множеством. Следовательно, компонента $W^u_{\varnothing}(x_2)$ пересекается с устойчивым многообразием нетривиального нульмерного базисного множества Ω_3, которое не совпадает с множеством Ω_1 (это следует из предложения 8.4 [1]).

Продолжая этот процесс, мы получаем цепочку базисных множеств (см. рис. 4). Введём на базисных множествах отношение $\prec$ следующим образом:

$$\Omega_i \prec \Omega_j \Leftrightarrow W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_j) \neq \varnothing.$$

Поскольку построенная цепочка не является циклом, отношение $\prec$ можно доопределить до отношения порядка, то есть базисные множества можно перенумеровать в соответствии с отношением $\prec$. Обозначим через Ω_j минимальное базисное множество среди всех нетривиальных нульмерных базисных множеств в построенной цепочке.

Из вышесказанного следует, что в базисном множестве Ω_j существует граничная периодическая точка x_j и компонента её неустойчивого многообразия $W^u_{\varnothing}(x_j)$, которая не пересекается с данным базисным множеством. Компонента $W^u_{\varnothing}(x_j)$ также не пересекается с устойчивыми многообразиями других нетривиальных нульмерных базисных множеств, поскольку множество Ω_j является минимальным в рассматриваемой цепочке. Следовательно, компонента $W^u_{\varnothing}(x_j)$ пересекается с устойчивым многообразием стоковой периодической точки. Получили противоречие с условием теоремы 1.

Таким образом, множество $NW(f)$ не содержит нетривиальных нульмерных базисных множеств.

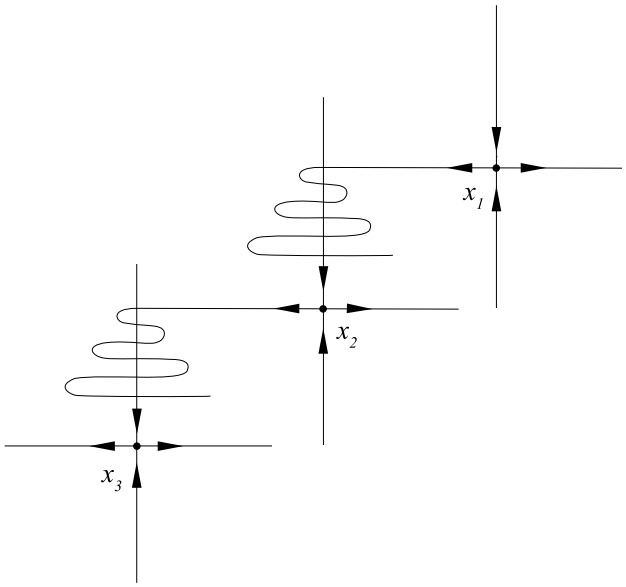


Рис. 4: Цепочка нетривиальных нульмерных базисных множеств.

□

Доказательство теоремы 1:

В силу предложения 2 и условия теоремы 1 множество $NW(f)$ содержит по крайней мере один одномерный аттрактор. Отсюда, из условия теоремы 1 и лемм 1, 2, 3 следует, что множество $NW(f)$ состоит из источниковых периодических точек $\alpha_1, ..., \alpha_k$ и одномерных аттракторов $\Omega_1, ..., \Omega_n$, где $n \geq 1$. Докажем, что $n = 1$.

Определим множество Λ следующим образом: $\Lambda = M^2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u(\alpha_i)$. Поскольку неустойчивое многообразие $W^u(\alpha_i), i = \overline{1,k}$, каждой источниковой периодической точки α_i гомеоморфно двумерному диску, то в силу утверждения 2.1. [12] множество Λ является связным. Из предложения 2 и определения множества Λ следует, что $\Lambda = \bigcup\limits_{j=1}^{n} W^u(\Omega_j)$, где каждое из множеств Ω_j является одномерным аттрактором. В силу свойств базисного множества, являющегося аттрактором (см. раздел 2), выполняются следующие равенства: $\Omega_j = W^u(\Omega_j), j = \overline{1,n}$. Значит, $\Lambda = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j$. Отсюда и из связности множества

Λ получаем, что $n = 1$. Таким образом, множество $NW(f)$ состоит из источниковых периодических точек $\alpha_1, ..., \alpha_k$ и в точности одного одномерного аттрактора Λ.

□

3.3 Доказательство следствий 1 и 2

Доказательство следствия 1:

Всюду в данном доказательстве мы предполагаем, что выполняются условия следствия 1.

Докажем вначале, что многообразие M^2 допускает одномерное слоение $\mathcal{F} = \{W^s(x), x \in NW(f)\}$, которое имеет k, $k \geq 1$, седловых особенностей $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$.

Из теоремы 1 и предложения 2 вытекает, что выполняются следующие равенства:

$$M^2 = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\alpha_i) \cup W^s(\Lambda) = \bigcup_{i=1}^{k} \alpha_i \cup \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x). \qquad (1)$$

Заметим, что устойчивые многообразия двух различных точек множества $NW(f)$ не пересекаются.

Рассмотрим произвольную точку $x \in M^2$, отличную от точек $\alpha_1, ..., \alpha_k$. В силу равенства (1) точка x принадлежит устойчивому многообразию некоторой точки y аттрактора Λ. Из теоремы 7.3 [1] следует, что устойчивое многообразие $W^s(y^*)$ любой точки $y^* \in \Lambda$, близкой к y, является C^1-близким к $W^s(y)$ на компактных множествах (см. рис. 5). Отсюда вытекает, что существует окрестность $U(x)$ точки x и гомеоморфизм $\psi : U(x) \to \mathbb{R}^2$, $\psi(x) = (0; 0)$ такой, что любая компонента связности пересечения $U(x) \cap W^s(NW(f))$ отображением ψ переводится в линию $y = const$ и ограничение $\psi|_{U(x) \cap W^s(NW(f))}$ является гомеоморфизмом на образ. Поскольку x - произвольная точка многообразия M^2, отличная от точек $\alpha_1, ..., \alpha_k$, то $\mathcal{F}$ является слоением, которое имеет k особенностей (точки $\alpha_1, ..., \alpha_k$). Из равенства (1) и определения связки аттрактора следует, что все особенности слоения $\mathcal{F}$ являются седловыми (см. определения 10.111. и 10.112. [7]).

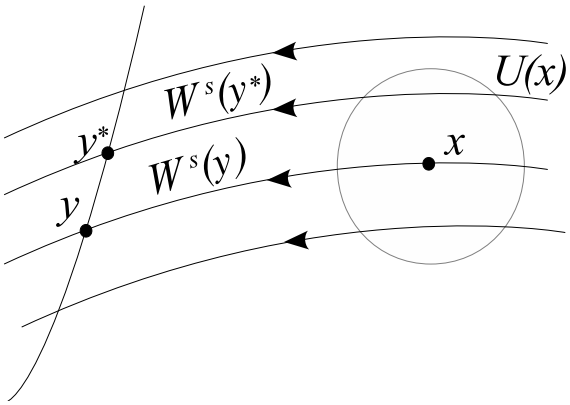


Рис. 5: Слои слоения $\mathcal{F}$ в окрестности $U(x)$ произвольной точки $x \in M^2 \backslash \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$.

В силу формулы (10.17) [7] индекс каждой седловой особенности α_i равен $1 - \frac{\nu_i}{2}$, где ν_i - это число сепаратрис, выходящих из точки α_i. Заметим, что $\nu_i \geq 2$, так как по условию следствия 1 аттрактор Λ не имеет связок степени один. Значит, индекс каждой седловой особенности α_i меньше либо равен нулю.

Докажем, что аттрактор Λ просторно расположен на многообразии M^2. Предположим противное. Тогда существуют точки $x, y \in \Lambda$ такие, что $y \in (W_x^s \cap W_x^u)$ и кривая, составленная из дуг $[x, y]^s, [x, y]^u$, является простой замкнутой кривой, ограничивающей область D, гомеоморфную двумерному диску. Слоение $\mathcal{F}$ трансверсально отрезку $[x, y]^u$. Так как отрезок $[x, y]^s$ принадлежит слою слоения $\mathcal{F}$, то в силу утверждения 10.101. [7], это слоение содержит по крайней мере одну особенность положительного индекса. Получили противоречие с доказанным выше.

□

Доказательство следствия 2:

Всюду в данном доказательстве мы предполагаем, что выполняются условия следствия 2.

Из теоремы 2.2. [14] и условия следствия 2 следует, что многообразие M^2 не является двумерной сферой, то есть имеет род $g \geq 1$.

Можно построить слоение $\mathcal{F}'$ аналогично тому, как построено слоение $\mathcal{F}$

(см. доказательство следствия 1). Слоение $\mathcal{F}'$ имеет единственную седловую особенность (точка α_1). Из утверждения 10.100. [7] вытекает выполнение следующего равенства: $\chi(M^2) = ind\ \alpha_1$, где $\chi(M^2)$ - эйлерова характеристика многообразия M^2, $ind\ \alpha_1$ - индекс единственной особенности слоения $\mathcal{F}'$.

Так как $ind\ \alpha_1 \leq \frac{1}{2}$ (α_1 - седловая особенность), а эйлерова характеристика проективной плоскости равна единице, то M^2 не является проективной плоскостью.

Из вышесказанного вытекает, что эйлерова характеристика поверхности M^2 меньше либо равна нулю, и, следовательно, индекс единственной особенности слоения $\mathcal{F}'$ меньше либо равен нулю. Рассуждая так же, как и в доказательстве следствия 1, приходим к выводу, что аттрактор Λ просторно расположен на многообразии M^2. Поскольку $ind\ \alpha_1$ не может быть равен $\frac{1}{2}$, то аттрактор Λ не имеет связок степени один.

Из [15] следует, что просторно расположенное базисное множество не может существовать на бутылке Клейна. Таким образом, $g \geq 1$, если поверхность M^2 ориентируемая, и $g \geq 3$, если она неориентируемая.

□

3.4 Доказательство теоремы 2

Всюду в данном разделе мы предполагаем, что выполняются условия теоремы 2.

Доказательство теоремы 2:

Предположим, что множество $NW(f)$ не содержит стоковых периодических точек.

Из [3] следует, что в нетривиальном нульмерном базисном множестве Ω существует по крайней мере одна граничная периодическая точка x_1 либо типа u, либо типа (s, u). В силу условия теоремы 2 и предложения 2 компонента $W^u_{\varnothing}(x_1)$ в каждой из своих точек трансверсально пересекается с устойчивыми многообразиями других базисных множеств. В силу доказательства леммы 2 компонента $W^u_{\varnothing}(x_1)$ не может пересекаться с устойчивым многообразием аттрактора. Следовательно, она может пересекаться либо с устойчивым многообразием нетривиального нульмерного базисного множества, либо

с устойчивым многообразием седловой точки, принадлежащей тривиальному базисному множеству.

Докажем, что компонента $W^u_\varnothing(x_1)$ пересекается с устойчивым многообразием по крайней мере одного нетривиального нульмерного базисного множества Ω_2. Предположим противное. Из строгого условия трансверсальности и того, что число базисных множеств конечно, следует, что устойчивые многообразия тривиальных седловых базисных множеств пересекаются с компонентой $W^u_\varnothing(x_1)$ не более чем по счётному числу точек. Из этого и того, что компонента $W^u_\varnothing(x_1)$ гомеоморфна прямой, получаем противоречие.

Можно построить цепочку нетривиальных нульмерных базисных множеств аналогично тому, как это было сделано в доказательстве леммы 3. Поскольку эта цепочка не является циклом (см. предложение 8.4 [1]), то она имеет минимальное нетривиальное нульмерное базисное множество Ω_j. Из вышесказанного следует, что существует граничная периодическая точка x_j базисного множества Ω_j и компонента её неустойчивого многообразия $W^u_\varnothing(x_j)$, которая не пересекается с данным базисным множеством. Компонента $W^u_\varnothing(x_j)$ также не пересекается с устойчивыми многообразиями других нетривиальных нульмерных базисных множеств, поскольку множество Ω_j является минимальным в рассматриваемой цепочке. Следовательно, компонента $W^u_\varnothing(x_j)$ должна пересекаться с устойчивым многообразием стоковой периодической точки. Таким образом, множество $NW(f)$ содержит стоковую периодическую точку.

Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что множество $NW(f)$ содержит источниковую периодическую точку.

□

4 Заключение

В данной выпускной квалификационной работе рассмотрен важный вопрос качественной теории динамических систем на поверхностях: вопрос взаимоотношения между тривиальными и нетривиальными базисными множествами A-диффеоморфизмов поверхностей. В работе описано неблуждающее множество структурно устойчивых диффеоморфизмов (заданных на произвольной замкнутой поверхности), все изолированные периодические точки которых являются источниками (теорема 1). Также доказано, что если неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма замкнутой поверхности содержит нетривиальное нульмерное базисное множество, то оно также содержит источниковую и стоковую периодические точки (теорема 2).

Теорема 1 даёт достаточное условие существования касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек A-диффеоморфизмов замкнутых поверхностей. Из критерия структурной устойчивости и теоремы 1 следует, что если неблуждающее множество A-диффеоморфизма, все тривиальные базисные множества которого являются источниковыми периодическими точками, содержит два или более нетривиальных базисных множества, то необходимо существует точка касания устойчивых и неустойчивых многообразий различных нетривиальных базисных множеств. Также теорема 1 может быть использована при описании неблуждающего множества диффеоморфизмов замкнутых поверхностей, которые получены из обобщённых псевдоаносовских диффеоморфизмов при помощи обобщённой хирургической операции С. Смейла.

Список литературы

[1] Смейл С., "Дифференцируемые динамические системы", *Успехи математических наук*, **25 1(151)** (1970), 113–185.

[2] Гринес В. З., "О топологической эквивалентности одномерных базисных множеств диффеоморфизмов на двумерных многообразиях", *Успехи математических наук*, **29 6(180)** (1974), 163–164.

[3] Гринес В. З., "О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I", *Труды Московского математического общества*, **32** (1975), 35–60.

[4] Гринес В. З., "О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II", *Труды Московского математического общества*, **34** (1977), 243–252.

[5] Гринес В. З., "О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами", *Математический сборник*, **188 4** (1997), 57–94.

[6] Grines V. Z., "Structural stability and asymptotic behavior of invariant manifolds of A-diffeomorphisms of surfaces", *Journal of dynamical and control systems*, **3 1** (1997), 91–110.

[7] Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V., *Dynamical systems on 2-and 3-manifolds*, **46**, Springer, 2016.

[8] Арансон С. Х., Гринес В. З., "Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях", *Успехи математических наук*, **45 1(271)** (1990), 3–32.

[9] Арансон С. Х., Гринес В. З., "Каскады на поверхностях. Динамические системы с гиперболическим поведением", *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*, **66** (1991), 148–187.

[10] Гринес В. З., Жужома Е. В., "Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один", *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, **66 2** (2002), 3–66.

[11] Grines V. Z., Pochinka O. V., van Strien S., "On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli", *Mosc. Math. J.*, **16 4** (2016), 727–749.

[12] Гринес В. З., Куренков Е. Д., "Диффеоморфизмы двумерных многообразий с одномерными просторно расположенными базисными множествами", *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, **84 5** (2020), 40–97.

[13] Плыкин Р. В., "О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла", *Математический сборник*, **84 2** (1971), 301–312.

[14] Плыкин Р. В., "Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей", *Математический сборник*, **94 2(6)** (1974), 243–264.

[15] Плыкин Р. В., "О существовании притягивающих (отталкивающих) периодических точек А-диффеоморфизмов проективной плоскости и бутылки Клейна", *Успехи математических наук*, **32 3(195)** (1977), 179–179.

[16] Плыкин Р. В., "О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов", *Успехи математических наук*, **39 6(240)** (1984), 75–113.

[17] Жиров А. Ю., Плыкин Р. В., "Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами", *Математические заметки*, **58 1** (1995), 149–152.

[18] Mañé R., "A proof of the C^1 stability conjecture", *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, **66** (1987), 161–210.

[19] Robinson C., "Structural stability of C^1 diffeomorphisms", *Journal of differential equations*, **22 1** (1976), 28–73.

[20] Robinson R. C., Williams R. F., "Finite stability is not generic", *Dynamical systems*, 1973, 451–462.

[21] Grines V. Z., Mints D. I., "On interrelations between trivial and nontrivial basic sets of structurally stable diffeomorphisms of surfaces", *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **31 2** (2021), 023132.

747

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Пальшина Глеба Павловича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Топологический анализ данных интегрируемых задач вихревой динамики» являются:

- постановка обобщённой ограниченной задачи трёх точечных магнитных вихрей в ферромагнетиках (формулы (13)–(16));
- множество критических значений на $\mathbb{R}^2(f,h)$ в ограниченной задаче трёх магнитных вихрей (системы (23) и (24) с учётом уравнений (21) и (22));
- бифуркационные диаграммы для отдельных случаев (Рис. 1, Рис. 2, Рис. 3) в ограниченной задаче трёх магнитных вихрей, в том числе случаев, которые встречаются в ограниченной задаче трёх точечных вихрей в идеальной жидкости (Рис. 2 и «вихревая пара» на Рис. 3);
- обнаружение некомпактных бифуркаций типа $Cyl \to \mathbb{T}^2 + Cyl$ (Рис. 3);
- замена переменных (25), явная редукция системы ограниченной задачи трёх магнитных вихрей к системе с одной степенью свободы, проверка системы на гамильтоновость, проверка переменных на каноничность относительно скобки Ли-Пуассона, запись гамильтониана редуцированной системы (26) и системы уравнений (32), а также дифференциального уравнения для угла поворота вращающейся системы координат;
- линии уровня редуцированного гамильтониана (Рис. 5, Рис. 6, Рис. 7) в ограниченной задаче трёх магнитных вихрей;
- новый тип бифуркационной диаграммы (Рис. 9) в обобщённой задаче двух вихревых нитей в конденсате Бозе-Эйнштейна, помещённом в гармоническую ловушку, и в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью;
- явный вид разделяющей кривой γ_3, отвечающей за изменение проекции торов в прообразе интегрального отображения без изменения их количества;
- замена переменных для вихрей *произвольных* интенсивностей в обобщённой задаче двух вихревых нитей в конденсате Бозе-Эйнштейна;
- понижение числа степеней свободы в обобщённой задаче двух вихревых нитей в конденсате Бозе-Эйнштейна, проверка системы на гамильтоновость, проверка переменных на каноничность относительно скобки Ли-Пуассона, запись системы уравнений (43) и гамильтониана редуцированной системы (44), а также дифференциального уравнения для угла поворота вращающейся системы координат;
- линии уровня редуцированного гамильтониана (Рис. 10, Рис. 11, Рис. 12) в обобщённой модели двух вихревых нитей в конденсате Бозе-Эйнштейна и в идеальной жидкости;
- пакет исполняемых файлов на языках Python и Wolfram Mathematica для топологического анализа двух обобщённых задач из области вихревой динамики (Приложения 1–15).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Павлом Евгеньевичем Рябовым, д.ф-м.н., профессором департамента анализа данных и машинного обучения факультета информационных технологий и анализа больших данных Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.
- Результаты работы частично представлены на международной конференции Школа для молодых механиков и математиков «Математические методы механики» (http://symm.info/), проводимой Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН 10–12 ноября 2020 г.
- Результаты работы частично представлены на III Международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics» (https://nnov.hse.ru/bipm/topmethods/2020/), проводимой Международной лабораторией динамических систем и приложений НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде 12-13 декабря 2020 г. На сайте конференции опубликован сборник тезисов: https://nnov.hse.ru/mirror/pubs/share/424699101.pdf .
- Получен диплом II степени конференции «Цифровая математика в финансах и экономике: инновации в условиях пандемии» в рамках XII Международного научного студенческого конгресса «Преодолеть пандемию: креативность и солидарность», проводимого Департаментом математики совместно с Департаментом анализа данных и машинного обучения Факультета информационных технологий и анализа больших данных Финансового университета при Правительстве Российской Федерации 13 марта 2021 г.
- Результаты работы частично представлены на «Понтрягинских чтениях – XXXII» в рамках Международной Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (https://vvmsh.math-vsu.ru/), проводимой Воронежским Государственным Университетом совместно с Московским Государственным Университетом им. М.В. Ломоносова и Математическим Институтом им. В.А. Стеклова РАН 3-9 мая 2021 г.
  Материалы конференции (развернутые статьи участников, выступивших с докладом на школе) будут опубликованы отдельным томом серии «Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Тематические обзоры» (издание ВИНИТИ РАН, главный редактор - академик РАН Р. В. Гамкрелидзе, с последующим переводом и изданием на английском языке в журнале «Journal of Mathematical Sciences» издательства Springer (индексируется в SCOPUS)). Статьи будут рецензироваться (рецензирование организовано отделом математики ВИНИТИ РАН).
- Результаты работы частично представлены на VIII Международной научно-практической конференции «Современная математика и концепции инновационного математического образования», проводимой Финансовым университетом при Правительстве РФ 28 мая 2021 г.
  По результатам конференции опубликована статья в рецензируемом научном журнале «Современная математика и концепции инновационного математического образования», входящем в перечень РИНЦ (https://elibrary.ru/item.asp?id=45792963).
- На сайте arXiv.org в соавторстве с П.Е. Рябовым и С.В. Соколовым опубликована статья «Dynamics of a few vortices in an ideal fluid and in a Bose-Einstein

condensate» в разделе Nonlinear Sciences, Exactly Solvable and Integrable Systems: https://arxiv.org/abs/2103.11667 .

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 17.06.2021. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись Пальшин Глеб Павлович

3 июня 2021 г. Москва, Россия

Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
**«Финансовый университет при
Правительстве Российской Федерации»
(Финансовый университет)**

ОТЗЫВ РУКОВОДИТЕЛЯ
о работе обучающегося в период подготовки выпускной квалификационной работы по программе бакалавриата

Обучающийся **Пальшин Глеб Павлович**
(фамилия, имя, отчество)

Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль: Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах
Наименование темы:

**«Топологический анализ данных
интегрируемых задач вихревой динамики»**

Руководитель: **Рябов Павел Евгеньевич**, профессор, доцент, д. ф.-м. н.
(фамилия, имя, отчество, должность, ученое звание, степень)

1. *Соответствие заявленных целей и задач теме ВКР:* задачи, которые ставились перед Пальшиным Г.П., полностью были достигнуты и соответствуют теме выпускной квалификационной работы.

2. *Соответствие полученных результатов заявленным целям и задачам*: основным объектом выпускной квалификационной работы являются вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы вихревой динамики и их топологический анализ, включая визуализацию полученных результатов.

3. *Умение проводить исследование в профессиональной деятельности (умение анализировать, владеть методами исследования и представления результатов)*: в ходе выполнения работы Пальшин Г.П. великолепно продемонстрировал умение использовать новые разделы современной математики, показал необходимый уровень знаний основ гамильтоновой динамики и топологического анализа данных.

4. *Характеристика использования в работе инструментария математики, математического моделирования, расчетов, статистических методов, пакетов специальных прикладных программ и т.п.:* топологический анализ данных включает в себя многие разделы современной математики, такие как дифференциальные уравнения, топология, визуализация данных. Используя инструментарий *Python и Wolfram Mathematica*, Пальшин Г.П. показал возможность численного моделирования бифуркаций торов Лиувилля, а также умение аналитически сводить системы к системам с меньшим числом степеней свободы, другими словами, понижать размерность фазового пространства.

5. *Наличие конкретных предложений и рекомендаций, сформулированных в ВКР, ценность полученных результатов*: результаты работы были представлены на пяти международных конференциях:

   - Школа для молодых механиков и математиков «Математические методы механики» (http://symm.info/), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 10-12 ноября 2020 г.;

   - III Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics» (https://nnov.hse.ru/bipm/topmethods/2020/), Международная лаборатория динамических систем и приложений, НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде, 12-13 декабря 2020 г.;

   - Диплом II степени конференции «Цифровая математика в финансах и экономике: инновации в условиях пандемии» в рамках XII Международного научного студенческого конгресса «Преодолеть пандемию: креативность и солидарность», Департамент математики совместно с Департаментом анализа данных и машинного обучения Факультета информационных технологий и анализа больших данных Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, 13 марта 2021 г.;

   - «Понтрягинские чтения – XXXII» в рамках Международной Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (https://vvmsh.math-vsu.ru/), Воронежский Государственный Университет совместно с Московским Государственным Университетом им. М.В. Ломоносова и Математическим Институтом им. В.А. Стеклова РАН, 3-9 мая 2021 г.;

   - VIII Международная научно-практическая конференция «Современная математика и концепции инновационного математического образования», Финансовый университет при Правительстве РФ,

Москва, 28 мая 2021 г.; публикация в сборнике статей по результатам конференции: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45792963;

с возможностью публикации в высокорейтинговых журналах.

6. *Степень самостоятельности при работе над ВКР (самостоятельность изложения и обобщения материала, самостоятельная интерпретация полученных результатов, обоснованность выводов)*:

- Исследована фазовая топология ограниченной задачи динамики двух магнитных вихрей. Такое исследование включает аналитическое определение бифуркационной диаграммы;

- Исследована возможность редукции к системе с меньшим числом степеней свободы;

- Была выполнена визуализация бифуркаций торов Лиувилля во всех рассмотренных в работе интегрируеммых моделях вихревой динамики с использованием интерактивной вычислительной среды Jupyter Notebook и ряда библиотек языка Python (в частности, SciPy и Matplotlib), а также с использованием инструментария «Wolfram Mathematica».

7. *Уровень сформированности компетенций, продемонстрированный в ходе работы над ВКР (перечень компетенций установлен методическими рекомендациями по выполнению ВКР в соответствии с ФГОС ВО или ОС ФУ)*: студент Пальшин Г.П. показал высокий профессиональный уровень сформированности компетенций (ПКП-2 – ПКП-7). Хочется отметить постоянное взаимодействие как на уровне обсуждения и выполнения аналитической части работы ВКР, так и на уровне программирования визуализации данных. Отметим также, что работа выполнена с использованием компьютерной издательской системы верстки LaTeX, приведены все гиперссылки как на формулы, так и на источники. Работа может послужить образцом для Template (шаблона) ВКР, которые используют математические формулы, язык программирования и векторную графику.

8. *Доля (%) заимствований в ВКР*: на момент написания отзыва доля (%) заимствований в ВКР, согласно представленному отчету антиплагиата, составляет всего лишь 5,53%, что свидетельствует о самостоятельном получении новых результатов.

9. *Недостатки в работе обучающегося в период подготовки ВКР*: никаких недостатков в работе обучающегося в период подготовки ВКР не отмечалось.

Выпускная квалификационная работа полностью соответствует требованиям, предъявляемым к ВКР, и безусловно может быть рекомендована к защите на заседании ГЭК.



Рябов Павел Евгеньевич

(Ф.И.О. руководителя, полностью)

31 мая 2021 г.

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
(Финансовый университет)
Факультет информационных технологий и анализа больших данных
Департамент анализа данных и машинного обучения

Выпускная квалификационная работа на тему
«Топологический анализ данных интегрируемых задач вихревой динамики»
Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика
«Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

Выполнил студент группы
ПМ17-1
Пальшин Глеб Павлович
_____
(подпись)
Руководитель д. ф.-м. н., проф.
Рябов Павел Евгеньевич
_____
(подпись)

ВКР соответствует предъявляемым требованиям

Руководитель Департамента
д. э. н., проф.,
В.И. Соловьёв
_____
(подпись)

Москва — 2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ **5**

1. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ МАГНИТНЫХ ВИХРЕЙ **10**

1.1. Обзор задачи динамики N взаимодействующих вихрей в идеальной жидкости: система дифференциальных уравнений, первые интегралы, скобка Ли-Пуассона, комплексная форма записи 10

1.2. Постановка задачи динамики трёх магнитных вихрей: система дифференциальных уравнений, первые интегралы, скобка Ли-Пуассона, комплексная форма записи 15

1.3. Ограниченная задача динамики трёх магнитных вихрей: аналитическое определение бифуркационного множества и бифуркационной диаграммы, имплементация бифуркационной диаграммы с использованием Wolfram Mathematica 20

1.4. Редукция ограниченной задачи динамики трёх магнитных вихрей к системе с меньшим числом степеней свободы 37

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ **48**

2.1. Постановка обобщённой задачи двух вихрей в идеальной жидкости и конденсате Бозе-Эйнштейна: система дифференциальных уравнений, скобка Ли-Пуассона, отображение момента 48

756

2.2. Бифуркационное множество и бифуркационная диаграмма системы двух точечных вихрей в обобщённой задаче вихревой динамики. Построение бифуркационной диаграммы с использованием Wolfram Mathematica 50
2.3. Сведение обобщённой задачи двух точечных вихрей к гамильтоновой системе с одной степенью свободы . 55

3. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ 60
3.1. Использованный инструментарий 60
3.2. Моделирование динамики трёх магнитных вихрей . 62
3.3. Визуализация вихревых траекторий в ограниченной задаче трёх магнитных вихрей 66
3.4. Визуализация обобщённого случая движения пары вихрей в идеальной жидкости и конденсате Бозе-Эйнштейна 69

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 72

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 74

ПРИЛОЖЕНИЕ 80
Приложение 1. BifurcationDiagramMagnetic.nb 80
Приложение 2. HamiltonianLinesMagnetic.nb 83
Приложение 3. BifurcationDiagramBoseEinstein.nb 87
Приложение 4. HamiltonianLinesBoseEinstein.nb 92
Приложение 5. ThreeVorticesAnimation.ipynb 96
Приложение 6. CompareTwoConfigurations.ipynb 104
Приложение 7. MagneticRestrictedVortices.ipynb 113
Приложение 8. CompareMagneticRestrictedVortices.ipynb . 121
Приложение 9. MagneticInitials.nb 130
Приложение 10. MagneticRestrictedTori.nb 135

757

Приложение 11. BoseEinsteinTrajectories.nb 139
Приложение 12. BoseEinsteinVortices.ipynb 143
Приложение 13. CompareBoseEinsteinVortices.ipynb 151
Приложение 14. BoseEinsteinInitials.nb 160
Приложение 15. BoseEinsteinTori.nb 165

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются некоторые интегрируемые модели вихревой динамики. Первые интегрируемые случаи в динамике вихрей были обнаружены практически сразу после открытия теории вихрей Гельмгольцем [1]. Например, классическая задача трёх вихрей была исследована Кирхгофом [2] и Грёбли [3], чуть позже Гринхилл указал на интегрируемость задачи двух вихрей вблизи цилиндра [4]. Некоторые интегрируемые случаи были описаны в монографии Горячева [5]. В современных работах классические интегрируемые случаи были пересмотрены с разных точек зрения. Обзор результатов по проблеме трёх вихрей можно найти, например, в работе Арефа [6]. Стоит упомянуть и современные исследования трёх вихрей на сфере: Борисова и Лебедева [7], Борисова и Павлова [8], Ньютона и Кидамби [9]. Основную роль в топологическом анализе подобных задач играют бифуркационные диаграммы отображения момента, которые занимают центральное место в данной работе.

Первая глава работы посвящена магнитным вихревым структурам в ферромагнитной среде. Магнитные вихри и магнитные пузыри представляют собой специальные решения уравнения Ландау-Лифшица [10]. Они характеризуются топологическим инвариантом — числом Понтрягина $\mathcal{N}$. В случае *магнитных пузырей*, которые возникают в магнитных плёнках с перпендикулярной анизотропией лёгкой оси [11], индекс Понтрягина принимает целые значения. В случае *магнитных вихрей*, реализованных в магнитной плёнке с анизотропией лёгкой плоскости [12], он будет принадлежать множеству полуцелых чисел.

Ранние исследования, в большинстве своём, были направлены на магнитные плёнки с бесконечной протяженностью, где пу-

зыри и вихри находились в возбуждённых состояниях над однородным основным состоянием. Позднее выяснилось, что основное состояние дискообразного магнитного элемента, который имеет диаметр порядка нескольких сотен нанометров, также является вихревой конфигурацией. Из этого последовал вывод о том, что вихрь является нетривиальным магнитным состоянием, которое может спонтанно создаваться на магнитных элементах конечной протяженности. Этим объясняется текущий интерес к выбранной теме [13][14][15], имеющей очевидное значение для приложений к устройствам.

Лежащая в основе топологическая структура сильно влияет на динамику магнитных вихрей. Основные черты магнитной вихревой динамики аналогичны демонстрируемым классическими гидродинамическими вихрями. Вихрь (или антивихрь) спонтанно закрепляется и не может свободно перемещаться в ферромагнитной среде, однако, при наличии внешних градиентов магнитного поля или других вихрей, движение относительно среды представляется возможным. Более того, такое движение проявляет характеристики, схожие с характеристиками двумерного движения электрических зарядов, помещённых в однородное магнитное поле. В качестве примера можно привести конфигурацию, где два подобных вихря вращаются вокруг друг друга, в то время как пара вихрь-антивихрь испытывает движение Кельвина.

В первом параграфе первой главы проведён обзор классической задачи N взаимодействующих гидродинамических вихрей в идеальной жидкости. Особый акцент сделан на интегрируемый в смысле Лиувилля случай $N = 3$. Так называемые уравнения Гельмгольца-Кирхгофа были явно решены самим Гельмгольцем для системы с двумя вихрями ($N = 2$), а Кирхгоф пришёл к вы-

воду, что система с тремя вихрями ($N = 3$) полностью интегрируема. Полное решение для $N = 3$ было дано в диссертации 1877 г. Грёбли [3], рассмотренной Арефом и др. [6] (см. также [16]). Некоторые важные аспекты задачи трёх вихрей были рассмотрены Синджем в работе [17]. При $N > 3$ система не является полностью интегрируемой, что в общем случае приводит к хаотической динамике.

Во втором параграфе, который посвящён магнитным вихревым структурам, акцент также сделан на случай $N = 3$. В описании движения магнитных вихрей используется приближённый коллективно-координатный подход, который позволяет избежать проблем, связанных с решением полного уравнения Ландау-Лифшица. Несмотря на приближение, такой метод позволяет сохранить важные динамические и топологические характеристики. Соответствующие уравнения являются обобщением уравнений Гельмгольца-Кирхгофа, которые встречаются при изучении N точечных вихрей в обычных жидкостях [1] [2]. Плоская система N вихрей в идеальной жидкости и система N магнитных вихрей в ферромагнетиках, помимо интеграла энергии, обладают тремя дополнительными первыми интегралами. Эти интегралы обладают аналогичными свойствами и в постановке задач отличаются лишь на постоянный коэффициент, что не влияет на топологические свойства. Различия проявляются в гамильтонианах, где в магнитном случае на завихренности Γ оказывают влияние *полярности* вихрей λ, принимающие значения ± 1. Система N магнитных вихрей сводится к системе N гидродинамических вихрей в идеальной жидкости в том случае, когда все полярности имеют один и тот же знак (одно и то же значение), т. е. когда $\lambda_i = 1 \ \forall i = 1, \ldots, N$ или $\lambda_i = -1 \ \forall i = 1, \ldots, N$. Влияние полярностей на гамильтониан естественным образом приводит к различиям в уравнениях движения (в общем случае). Такое различие

даёт возможность наблюдать новые типы траекторий и повышает интерес к модели с точки зрения топологического анализа.

В третьем параграфе первой главы рассматривается *ограниченная* задача трёх магнитных вихрей, когда один из вихрей закрепляется в начале координат. Для такой постановки задачи было аналитически определено бифуркационное множество и построена бифуркационная диаграмма с использованием *Wolfram Mathematica*. В четвёртом параграфе продемонстрировано явное понижение числа степеней свободы для системы трёх магнитных вихрей. В этих разделах подробно описаны как те случаи, которые свойственны исключительно магнитным вихревым структурам, так и те, которые имеют место в гидродинамике.

Во второй главе рассматривается общий случай двухпараметрического семейства интегрируемых систем, охватывающий как классическую идеальную жидкость, так и случай конденсата Бозе-Эйнштейна, заключённого в гармоническую ловушку [18]. Исследования динамики вихрей в квантовых жидкостях показали, что квантовые вихри ведут себя примерно так же, как тонкие вихревые нити в классических идеальных жидкостях. Вихревые структуры в конденсате Бозе-Эйнштейна, полученном для ультрахолодных атомарных газов [19], занимают среди них особое место. Рассматриваемая обобщённая модель двух вихревых нитей приводит к полностью интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, что позволяет применять топологические методы, используемые в подобных системах. Ранее были получены результаты для случаев, когда интенсивности вихрей положительны [20] или одного знака [21]. В работе [22] показано наличие бифуркации четырёх торов в один.

Первый параграф второй главы посвящён постановке обоб-

щённой задачи вихревой динамики. Во втором параграфе аналитически определена бифуркационная диаграмма в неявном виде. Помимо бифуркационных кривых, аналитически найдена разделяющая кривая γ_3, отвечающая за изменение проекции торов Лиувилля в прообразе интегрального отображения без изменения их количества. Так же показан новый тип бифуркационной диаграммы, который не наблюдался ранее в работах [23], [24], [25]. В третьем параграфе рассмотрено явное сведение системы к гамильтоновой системе с одной степенью свободы для интенсивностей *произвольных* знаков.

Завершает работу глава, посвящённая визуализации вихревых траекторий в *Wolfram Mathematica*, созданию анимированных изображений с использованием *Python*, а так же представлению движения вихрей в виде торической обмотки. Помимо ограниченной задачи трёх магнитных вихрей и модели двух вихрей в конденсате Бозе-Эйнштейна, в третьей главе рассматривается классическая модель вихрей в идеальной жидкости и модель магнитных вихрей в ферромагнетиках без дополнительных ограничений для $N = 3$.

1. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ МАГНИТНЫХ ВИХРЕЙ

1.1. Обзор задачи динамики N взаимодействующих вихрей в идеальной жидкости: система дифференциальных уравнений, первые интегралы, скобка Ли-Пуассона, комплексная форма записи

Перед тем как приступить к описанию модели магнитных вихрей, рассмотрим классическую задачу движения в бесконечной области идеальной жидкости N параллельных вихревых нитей с интенсивностями Γ_α, $\alpha = 1, \ldots, N$ (постоянными, согласно теоремам Гельмгольца), точки пересечения которых с перпендикулярной им плоскостью имеют декартовы координаты $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, N$. Через $\ell_{\alpha\beta}$ обозначим евклидово расстояние между вихрями α и β на плоскости (x, y):

$$\ell_{\alpha\beta} = |r_\alpha - r_\beta| = \sqrt{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2}.$$

Как было показано Кирхгофом [2], такая система может быть представлена в гамильтоновой форме с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha<\beta}^{N} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \ln \ell_{\alpha\beta} \tag{1}$$

и скобкой Ли-Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{\Gamma_\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} \right). \tag{2}$$

Пуассонова структура (2) и энергия взаимодействия вихрей (1) дают систему $2N$ нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, так же известных как уравнения Гельмгольца-Кирхгофа:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \{x_\alpha, H\} = \frac{1}{\Gamma_\alpha}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = \{y_\alpha, H\} = -\frac{1}{\Gamma_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}. \tag{3}$$

Помимо интеграла энергии H (1), система имеет три дополнительных первых интеграла:

$$P_x = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha y_\alpha, \quad P_y = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha x_\alpha, \quad F = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2), \tag{4}$$

что делает систему вполне интегрируемой для $N = 3$, согласно теореме Лиувилля в аналитической динамике. Интегрируемость системы позволяет отыскать все вихревые траектории, основываясь на свойстве постоянства гамильтониана (1), линейного момента (P_x, P_y) и углового момента F (4). Таким образом, система (3) при $N = 3$ вызывает особый интерес. Заметим, что в общем случае интегралы P_x, P_y и F (4) не находятся в инволюции. *Инволютивным* называют набор интегралов, между которыми скобка Пуассона (2) попарно равна нулю. В нашем же случае

$$\{P_y, P_x\} = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha, \quad \{P_x, F\} = -2P_y, \quad \{P_y, F\} = 2P_x.$$

Однако мы можем скомбинировать *два* инволютивных интеграла, например F и $P_x^2 + P_y^2$, а значит рассматриваемая система допускает редукцию на *две* степени свободы. Введём определение *суммарной циркуляции*

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha,$$

а для $\sigma \neq 0$ назовём точку с координатами

$$\left(\frac{P_y}{\sigma}, \frac{P_x}{\sigma}\right)$$

центром завихренности. Если $\sigma = 0$, то говорят, что центр завихренности находится на бесконечности. В силу инвариантности Γ_α и первых интегралов P_x, P_y, центр завихренности для системы N точечных вихрей в идеальной жидкости также остаётся постоянным.

В случае трёх точечных вихрей гамильтониан (1) приобретает вид

$$H = -\frac{1}{4\pi}\left[\Gamma_1\Gamma_2 \ln\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right) + \right.$$
$$+ \Gamma_1\Gamma_3 \ln\left((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2\right) +$$
$$\left. + \Gamma_2\Gamma_3 \ln\left((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2\right)\right],$$

а значения скобки Пуассона (2) для декартовых координат

$$\{x_\alpha, y_\alpha\} = +\frac{1}{\Gamma_\alpha}, \quad \{x_\alpha, y_\beta\} = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$
$$\{y_\alpha, x_\alpha\} = -\frac{1}{\Gamma_\alpha}, \quad \{y_\alpha, x_\beta\} = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Симплектическую структуру системы трёх точечных вихрей в

идеальной жидкости удобно записать в матричной форме

$$J = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Gamma_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Gamma_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Gamma_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Gamma_3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{5}$$

Столбцы и строки квадратной кососимметрической матрицы J (5) имеют смысл координат $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, а на их пересечении располагается значение скобки Ли-Пуассона (2), где первым аргументом является координата, соответствующая выбранной строке, вторым — координата, соответствующая выбранному столбцу.

Система дифференциальных уравнений (3) при $N = 3$ принимает вид

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N=3}\Gamma_\beta\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}, \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N=3}\Gamma_\beta\frac{x_\alpha - x_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}, \tag{6}$$

или более явно:

$$\begin{cases} 2\pi\dfrac{dx_1}{dt} = \Gamma_2\dfrac{y_2-y_1}{\ell_{12}^2} + \Gamma_3\dfrac{y_3-y_1}{\ell_{13}^2}, \\ 2\pi\dfrac{dy_1}{dt} = \Gamma_2\dfrac{x_1-x_2}{\ell_{12}^2} + \Gamma_3\dfrac{x_1-x_3}{\ell_{13}^2}, \\ 2\pi\dfrac{dx_2}{dt} = \Gamma_3\dfrac{y_3-y_2}{\ell_{23}^2} + \Gamma_1\dfrac{y_1-y_2}{\ell_{12}^2}, \\ 2\pi\dfrac{dy_2}{dt} = \Gamma_3\dfrac{x_2-x_3}{\ell_{23}^2} + \Gamma_1\dfrac{x_2-x_1}{\ell_{12}^2}, \\ 2\pi\dfrac{dx_3}{dt} = \Gamma_1\dfrac{y_1-y_3}{\ell_{13}^2} + \Gamma_2\dfrac{y_2-y_3}{\ell_{23}^2}, \\ 2\pi\dfrac{dy_3}{dt} = \Gamma_1\dfrac{x_3-x_1}{\ell_{13}^2} + \Gamma_2\dfrac{x_3-x_2}{\ell_{23}^2}, \end{cases}$$

где ℓ_{12}, ℓ_{13} и ℓ_{23} — длины сторон треугольника, образованного вихрями.

Стоит отметить, что иногда удобнее пользоваться комплексной формой записи системы, задавая положение вихрей при помощи комплексных координат $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, где $\alpha = 1, \ldots, N$. Тогда уравнения движения можно представить в виде

$$\dot{z}_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N}\frac{\Gamma_\beta}{\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta}, \qquad \alpha = 1, \ldots, N,$$

где $\bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$ — число, комплексно-сопряжённое с z_α.

1.2. Постановка задачи динамики трёх магнитных вихрей: система дифференциальных уравнений, первые интегралы, скобка Ли-Пуассона, комплексная форма записи

Перейдём к постановке задачи N точечных *магнитных* вихрей в магнитной плёнке [10], [26], [27]. В рассматриваемой модели каждый вихрь характеризуется *инвариантной* полной топологической завихренностью Γ_α и полярностью λ_α, которая отвечает за направление магнитного вихря и принимает значения $+1$ или -1 для намагниченности, направленной вверх или вниз, соответственно. Интегрированная топологическая плотность Γ_α связана с числом Понтрягина $\mathcal{N}_\alpha$ следующим соотношением:

$$\mathcal{N}_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{4\pi},$$

где $\mathcal{N}_\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, т. е. $\mathcal{N}_\alpha$ принадлежит множеству *полуцелых* чисел $\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \dots\}$, что отличает магнитные вихри, например, от магнитных пузырей, где $\mathcal{N}_\alpha \in \mathbb{Z}$. Таким образом, топологическая завихренность $\Gamma_\alpha \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots\}$.

Среди магнитных вихревых структур принято выделять *вихри* и *антивихри*. Для их определения удобно использовать так называемые *вихревые числа*

$$\kappa_\alpha = -\frac{\Gamma_\alpha}{2\pi\lambda_\alpha},$$

где $\kappa_\alpha \in \mathbb{Z}$. Если $\kappa_\alpha > 0$, то такой объект называют *вихрем*, если же $\kappa_\alpha < 0$, то *антивихрем*. В работах, посвящённых магнитным вихревым структурам, также часто можно встретить *скирмионные числа* s_α, представляющие собой нормализованный индекс

Понтрягина

$$\mathcal{N}_\alpha = -\frac{1}{2} s_\alpha.$$

Отсюда нетрудно убедиться в верности следующего соотношения:

$$s_\alpha = \kappa_\alpha \lambda_\alpha.$$

Система N магнитных вихрей может быть представлена в гамильтоновой форме с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha<\beta}^{N} \frac{\Gamma_\alpha \Gamma_\beta}{\lambda_\alpha \lambda_\beta} \ln \ell_{\alpha\beta} \tag{7}$$

и со скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = -2\pi \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{\Gamma_\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} \right). \tag{8}$$

В магнитной вихревой модели также присутствуют три дополнительные интеграла

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha y_\alpha, \\ P_y &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha x_\alpha, \\ F &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2), \end{aligned} \tag{9}$$

аналогичные интегралам (4). Соответствующая система $2N$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \{x_\alpha, H\} = -\frac{2\pi}{\Gamma_\alpha} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = \{y_\alpha, H\} = \frac{2\pi}{\Gamma_\alpha} \frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \tag{10}$$

в комплексной записи имеет вид

$$\dot{z}_\alpha = -\frac{1}{2\pi\lambda_\alpha i}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N}\frac{\Gamma_\beta}{\lambda_\beta\left(\bar{z}_\alpha-\bar{z}_\beta\right)},\quad \alpha=1,\ldots,N,$$

где $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ — комплексная координата, которая задаёт положение вихря, а $\bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$ — число, комплексно-сопряжённое с z_α.

В случае $N=3$ система принимает вид

$$\lambda_\alpha\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N=3}\frac{\Gamma_\beta}{\lambda_\beta}\frac{y_\alpha-y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2},\quad \lambda_\alpha\frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N=3}\frac{\Gamma_\beta}{\lambda_\beta}\frac{x_\alpha-x_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2},\qquad \textbf{(11)}$$

или более явно

$$\begin{cases}
2\pi\lambda_1\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\Gamma_2}{\lambda_2}\dfrac{y_1-y_2}{\ell_{12}^2}+\dfrac{\Gamma_3}{\lambda_3}\dfrac{y_1-y_3}{\ell_{13}^2},\\
2\pi\lambda_1\dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{\Gamma_2}{\lambda_2}\dfrac{x_2-x_1}{\ell_{12}^2}+\dfrac{\Gamma_3}{\lambda_3}\dfrac{x_3-x_1}{\ell_{13}^2},\\
2\pi\lambda_2\dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\Gamma_3}{\lambda_3}\dfrac{y_2-y_3}{\ell_{23}^2}+\dfrac{\Gamma_1}{\lambda_1}\dfrac{y_2-y_1}{\ell_{12}^2},\\
2\pi\lambda_2\dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{\Gamma_3}{\lambda_3}\dfrac{x_3-x_2}{\ell_{23}^2}+\dfrac{\Gamma_1}{\lambda_1}\dfrac{x_1-x_2}{\ell_{12}^2},\\
2\pi\lambda_3\dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{\Gamma_1}{\lambda_1}\dfrac{y_3-y_1}{\ell_{13}^2}+\dfrac{\Gamma_2}{\lambda_2}\dfrac{y_3-y_2}{\ell_{23}^2},\\
2\pi\lambda_3\dfrac{dy_3}{dt} = \dfrac{\Gamma_1}{\lambda_1}\dfrac{x_1-x_3}{\ell_{13}^2}+\dfrac{\Gamma_2}{\lambda_2}\dfrac{x_2-x_3}{\ell_{23}^2}.
\end{cases}$$

Благодаря наличию интегралов **(9)**, для $N=3$ система **(11)** также является интегрируемой по Лиувиллю с тремя степенями свободы.

Тройка интегралов P_x, P_y и F в общем случае не является *инволютивной*:

$$\{P_y, P_x\} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma_\alpha, \quad \{P_x, F\} = P_y, \quad \{P_y, F\} = -P_x,$$

Однако, простая комбинация

$$\left\{F, P_x^2 + P_y^2\right\} = 0$$

даёт пару интегралов, находящихся в инволюции, что означает возможность редукции на две степени свободы в системе N магнитных вихрей. По аналогии с суммарной циркуляцией вихрей в идеальной жидкости, введём понятие *суммарного скирмионного числа*

$$S = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma_\alpha.$$

Линейный момент (P_x, P_y) принимает привычное физическое значение, если $S = 0$. Для $S \neq 0$, как и в гидродинамической модели, можно определить *постоянный направляющий центр* — точку с координатами

$$\left(\frac{P_y}{S}, -\frac{P_x}{S}\right).$$

В силу наличия в уравнениях движения (11) полярностей λ_α, в общем случае вихревые траектории будут отличаться от траекторий, полученных из системы (6). Совпадение траекторий будет наблюдаться при одинаковых знаках полярностей $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ $\forall\alpha, \beta \in \{1, \ldots, N\}$. Гамильтониан (7) в случае $N = 3$ принимает

вид:

$$H = -\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\ln\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right)+\right.$$
$$\frac{\Gamma_1\Gamma_3}{\lambda_1\lambda_3}\ln\left((x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2\right)+$$
$$\left.\frac{\Gamma_2\Gamma_3}{\lambda_2\lambda_3}\ln\left((x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2\right)\right]. \quad \textbf{(12)}$$

Скобку Ли (8) для плоских прямоугольных координат магнитных вихрей (x_α, y_α)

$$\{x_\alpha, y_\alpha\} = -\frac{2\pi}{\Gamma_\alpha}, \quad \{x_\alpha, y_\beta\} = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$
$$\{y_\alpha, x_\alpha\} = +\frac{2\pi}{\Gamma_\alpha}, \quad \{y_\alpha, x_\beta\} = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

также можно представить в матричном виде

$$J = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\pi}{\Gamma_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{2\pi}{\Gamma_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{\Gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{2\pi}{\Gamma_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{\Gamma_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{2\pi}{\Gamma_3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1.3. Ограниченная задача динамики трёх магнитных вихрей: аналитическое определение бифуркационного множества и бифуркационной диаграммы, имплементация бифуркационной диаграммы с использованием Wolfram Mathematica

Рассмотрим систему трёх магнитных вихрей $\alpha = 0, 1, 2$ с завихренностями Γ_α и полярностями λ_α, находящихся на позициях $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$. Закрепим в точке $\mathcal{O}(0, 0)$ положение вихря с завихренностью Γ_0. Такую задачу назовём *ограниченной задачей трёх магнитных вихрей* [28], [29], [30], [31], гамильтониан которой, согласно (12), принимает вид

$$H = -\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{\Gamma_0\Gamma_1}{\lambda_0\lambda_1}\ln\left((x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2\right) + \right.$$
$$+\frac{\Gamma_0\Gamma_2}{\lambda_0\lambda_2}\ln\left((x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2\right) +$$
$$\left.+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\ln\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right)\right]$$

или, если учесть $x_0 \equiv 0$ и $y_0 \equiv 0$,

$$H = -\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{\Gamma_0\Gamma_1}{\lambda_0\lambda_1}\ln\left(x_1^2+y_1^2\right) + \frac{\Gamma_0\Gamma_2}{\lambda_0\lambda_2}\ln\left(x_2^2+y_2^2\right) + \right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\ln\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right)\right].$$

Введём обозначения $\ell_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $\ell_2 = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$, $\ell_{12} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ и проведём ряд преобразований, упрощающих анализ, но не изменяющих топологию системы. Домножив гамильтониан на константу $\left[-\left(2\pi\frac{\lambda_0}{\Gamma_0}\right)^2\right]$, перейдём к новому га-

мильтониану

$$\widetilde{H} = -4\pi^2 \left(\frac{\lambda_0}{\Gamma_0}\right)^2 \cdot H =$$

$$= \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\ln \ell_1 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_0}\frac{\lambda_0}{\lambda_2}\ln \ell_2 + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\frac{\Gamma_2}{\Gamma_0}\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\lambda_0}{\lambda_2}\ln \ell_{12} =$$

$$= \left\{\widetilde{\Gamma}_1 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}, \widetilde{\Gamma}_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_0}\right\} =$$

$$= \widetilde{\Gamma}_1\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\ln \ell_1 + \widetilde{\Gamma}_2\frac{\lambda_0}{\lambda_2}\ln \ell_2 + \widetilde{\Gamma}_1\widetilde{\Gamma}_2\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\frac{\lambda_0}{\lambda_2}\ln \ell_{12} =$$

$$= \frac{\widetilde{\Gamma}_1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}\ln \ell_1 + \frac{\widetilde{\Gamma}_2}{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}\ln \ell_2 + \frac{\widetilde{\Gamma}_1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}\frac{\widetilde{\Gamma}_2}{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}\ln \ell_{12} =$$

$$= \left\{\widetilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \widetilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right\} =$$

$$= \frac{\widetilde{\Gamma}_1}{\widetilde{\lambda}_1}\ln \ell_1 + \frac{\widetilde{\Gamma}_2}{\widetilde{\lambda}_2}\ln \ell_2 + \frac{\widetilde{\Gamma}_1}{\widetilde{\lambda}_1}\frac{\widetilde{\Gamma}_2}{\widetilde{\lambda}_2}\ln \ell_{12}.$$

Второй интеграл системы

$$F = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha=0}^{2}\Gamma_\alpha\left(x_\alpha^2 + y_\alpha^2\right)$$

домножим на константу $\left(-\frac{4\pi}{\Gamma_0}\right)$:

$$\widetilde{F} = -\frac{4\pi}{\Gamma_0}\cdot F = \sum_{\alpha=0}^{2}\frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_0}\left(x_\alpha^2 + y_\alpha^2\right) = \left\{\widetilde{\Gamma}_1 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}, \widetilde{\Gamma}_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_0}\right\} =$$

$$= 1\cdot\left(x_0^2 + y_0^2\right) + \widetilde{\Gamma}_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + \widetilde{\Gamma}_2\left(x_2^2 + y_2^2\right) =$$

$$= \widetilde{\Gamma}_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + \widetilde{\Gamma}_2\left(x_2^2 + y_2^2\right) = \widetilde{\Gamma}_1\ell_1^2 + \widetilde{\Gamma}_2\ell_2^2.$$

Также для удобства в системе дифференциальных уравнений **(10)** перейдём от времени t ко времени τ, где

$$\tau = -\frac{2\pi}{\Gamma_0}t \Longrightarrow t = -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\tau.$$

Левая часть первого уравнения из **(10)** для $\forall \alpha \neq \beta$, где $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, принимает вид

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \left\{t = -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\tau\right\} = \frac{dx_\alpha}{d(-\frac{\Gamma_0}{2\pi}\tau)} = -\frac{2\pi}{\Gamma_0}\frac{dx_\alpha}{d\tau},$$

а правая часть:

$$-\frac{2\pi}{\Gamma_\alpha}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_\alpha} = -\frac{2\pi}{\Gamma_\alpha}\frac{\partial\left(\left(\frac{\lambda_0}{\Gamma_0}\right)^2\left(\frac{\Gamma_0\Gamma_\alpha}{\lambda_0\lambda_\alpha}\ln\ell_\alpha + \frac{\Gamma_0\Gamma_\beta}{\lambda_0\lambda_\beta}\ln\ell_\beta + \frac{\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\ln\ell_{\alpha\beta}\right)\right)}{\partial y_\alpha} =$$

$$= -\frac{2\pi}{\Gamma_\alpha}\left(\frac{\lambda_0}{\Gamma_0}\right)^2\left(\frac{\Gamma_0\Gamma_\alpha}{\lambda_0\lambda_\alpha}\frac{\partial\ln\ell_\alpha}{\partial y_\alpha} + \frac{\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\frac{\partial\ln\ell_{\alpha\beta}}{\partial y_\alpha}\right) =$$

$$= -2\pi\left(\frac{\lambda_0}{\Gamma_0}\right)^2\left(\frac{\Gamma_0}{\lambda_0\lambda_\alpha}\frac{\partial\ln\ell_\alpha}{\partial y_\alpha} + \frac{\Gamma_\beta}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\frac{\partial\ln\ell_{\alpha\beta}}{\partial y_\alpha}\right) =$$

$$= -2\pi\left(\frac{\lambda_0}{\Gamma_0}\right)^2\left(\frac{\Gamma_0}{\lambda_0\lambda_\alpha}\frac{y_\alpha}{\ell_\alpha^2} + \frac{\Gamma_\beta}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}\right) =$$

$$= -2\pi\left(\frac{\lambda_0}{\Gamma_0\lambda_\alpha}\frac{y_\alpha}{\ell_\alpha^2} + \frac{\lambda_0^2\Gamma_\beta}{\lambda_\alpha\lambda_\beta\Gamma_0^2}\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}\right) =$$

$$= -2\pi\left(\frac{1}{\Gamma_0\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_0}}\frac{y_\alpha}{\ell_\alpha^2} + \frac{\frac{\Gamma_\beta}{\Gamma_0}}{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_0}\frac{\lambda_\beta}{\lambda_0}\Gamma_0}\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}\right) =$$

$$= -2\pi\left(\frac{1}{\Gamma_0\widetilde{\lambda}_\alpha}\frac{y_\alpha}{\ell_\alpha^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}_\beta}{\Gamma_0\widetilde{\lambda}_\alpha\widetilde{\lambda}_\beta}\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}\right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{\Gamma_0}\left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}_\alpha}\frac{y_\alpha}{\ell_\alpha^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}_\beta}{\widetilde{\lambda}_\alpha\widetilde{\lambda}_\beta}\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}\right).$$

Тогда первое равенство в (10) после замены времени на τ принимает вид

$$-\frac{2\pi}{\Gamma_0}\frac{dx_\alpha}{d\tau} = -\frac{2\pi}{\Gamma_0}\left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}_\alpha}\frac{y_\alpha}{\ell_\alpha^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}_\beta}{\widetilde{\lambda}_\alpha\widetilde{\lambda}_\beta}\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}\right) \sim$$

$$\sim \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_\alpha}\frac{y_\alpha}{\ell_\alpha^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}_\beta}{\widetilde{\lambda}_\alpha\widetilde{\lambda}_\beta}\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2}.$$

Аналогичная цепочка рассуждений проводится и для второго уравнения системы (10). Таким образом мы получаем нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка вида

$$\widetilde{\lambda}_\alpha\frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{y_\alpha}{\ell_\alpha^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}_\beta}{\widetilde{\lambda}_\beta}\frac{y_\alpha - y_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2},$$

$$\widetilde{\lambda}_\alpha\frac{dy_\alpha}{d\tau} = -\frac{x_\alpha}{\ell_\alpha^2} - \frac{\widetilde{\Gamma}_\beta}{\widetilde{\lambda}_\beta}\frac{x_\alpha - x_\beta}{\ell_{\alpha\beta}^2},$$

которые можно переписать более явно как

$$\widetilde{\lambda}_1\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{y_1}{\ell_1^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}_2}{\widetilde{\lambda}_2}\frac{y_1 - y_2}{\ell_{12}^2}, \qquad \widetilde{\lambda}_1\frac{dy_1}{d\tau} = -\frac{x_1}{\ell_1^2} - \frac{\widetilde{\Gamma}_2}{\widetilde{\lambda}_2}\frac{x_1 - x_2}{\ell_{12}^2},$$

$$\widetilde{\lambda}_2\frac{dx_2}{d\tau} = \frac{y_2}{\ell_2^2} + \frac{\widetilde{\Gamma}_1}{\widetilde{\lambda}_1}\frac{y_2 - y_1}{\ell_{12}^2}, \qquad \widetilde{\lambda}_2\frac{dy_2}{d\tau} = -\frac{x_2}{\ell_2^2} - \frac{\widetilde{\Gamma}_1}{\widetilde{\lambda}_1}\frac{x_2 - x_1}{\ell_{12}^2}.$$

Заметим, что после перехода к завихренностям $\widetilde{\Gamma}_\alpha$ изменилось множество, которому эти завихренности принадлежат. Если

$$\Gamma_\alpha \in \left\{2\,\pi\,n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z};\ n \neq 0\right\},$$

то $\widetilde{\Gamma}_\alpha \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$:

$$\widetilde{\Gamma}_\alpha \in \left\{ \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_0} = \frac{2\pi n}{2\pi m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z};\ n, m \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{n}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z};\ n, m \neq 0 \right\}.$$

Далее в работе будем опускать «˜», подразумевая переход к топологически эквивалентной системе с гамильтонианом

$$H = \frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\ln \ell_1 + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\ln \ell_2 + \frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\ln \ell_{12}, \tag{13}$$

вторым интегралом

$$F = \Gamma_1 \ell_1^2 + \Gamma_2 \ell_2^2, \tag{14}$$

дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{y_1}{\ell_1^2} + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\frac{y_1 - y_2}{\ell_{12}^2}, & \lambda_1 \frac{dy_1}{d\tau} &= -\frac{x_1}{\ell_1^2} - \frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\frac{x_1 - x_2}{\ell_{12}^2}, \\ \lambda_2 \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{y_2}{\ell_2^2} + \frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{y_2 - y_1}{\ell_{12}^2}, & \lambda_2 \frac{dy_2}{d\tau} &= -\frac{x_2}{\ell_2^2} - \frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{x_2 - x_1}{\ell_{12}^2}, \end{aligned} \tag{15}$$

и скобкой Ли-Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{\Gamma_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha}\right). \tag{16}$$

В комплексной форме записи уравнения (15) приобретают вид:

$$i\lambda_\alpha \dot{z}_\alpha = \frac{1}{\bar{z}_\alpha} + \frac{\Gamma_\beta}{\lambda_\beta}\frac{1}{\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta}, \quad \alpha \neq \beta \in \{1, 2\},$$

где $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ — комплексная координата, задающая положение вихря α, а $\bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$ — число, комплексно-сопряжённое с z_α.

Рассмотрим интегральное отображение $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$, где

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = \left(F(\boldsymbol{z}), H(\boldsymbol{z})\right),$$

а фазовое пространство

$$\mathcal{P} = \left\{(z_1, z_2) \,:\, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_1 \neq z_2\right\}.$$

Топологически анализ ограниченной задачи трёх магнитных вихрей начнём с нахождения критического множества $\mathcal{C}$ — множества точек, в которых $\operatorname{rank} d\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) < 2$, т. е. в которых для матрицы Якоби

$$\mathcal{J} = d\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H}{\partial y_1} & \dfrac{\partial H}{\partial x_2} & \dfrac{\partial H}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial y_2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

выполняется

$$\operatorname{rank} \mathcal{J} < 2.$$

Найдём в явном виде все элементы матрицы (17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_1} &= \frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{x_1}{\ell_1^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_1 - x_2}{\ell_{12}^2}, & \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2\Gamma_1 x_1, \\ \frac{\partial H}{\partial y_1} &= \frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{y_1}{\ell_1^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{y_1 - y_2}{\ell_{12}^2}, & \frac{\partial F}{\partial y_1} &= 2\Gamma_1 y_1, \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} &= \frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\frac{x_2}{\ell_2^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_2 - x_1}{\ell_{12}^2}, & \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 2\Gamma_2 x_2, \\ \frac{\partial H}{\partial y_2} &= \frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\frac{y_2}{\ell_2^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{y_2 - y_1}{\ell_{12}^2}, & \frac{\partial F}{\partial y_2} &= 2\Gamma_2 y_2. \end{aligned}$$

Ситуация $\operatorname{rank} \mathcal{J} = 0$ подразумевает равенство нулю всех элементов матрицы $\mathcal{J}$, а значит, в том числе и всех элементов второй строки, из чего следует, что для $\Gamma_\alpha \neq 0$ верно: $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 0, 0)$. Легко убедиться, что такая система уравнений не будет иметь решений, так как в ней возникает деление на ноль, и, сверх того, эти точки не принадлежат фазовому пространству $\mathcal{P}$.

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank} \mathcal{J} = 1$. В первую очередь, приравняем все миноры второго порядка матрицы (17) к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_1}\dfrac{\partial F}{\partial y_1} - \dfrac{\partial H}{\partial y_1}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0, & \textbf{(18a)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_1}\dfrac{\partial F}{\partial x_2} - \dfrac{\partial H}{\partial x_2}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0, & \textbf{(18b)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_1}\dfrac{\partial F}{\partial y_2} - \dfrac{\partial H}{\partial y_2}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0, & \textbf{(18c)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y_1}\dfrac{\partial F}{\partial x_2} - \dfrac{\partial H}{\partial x_2}\dfrac{\partial F}{\partial y_1} = 0, & \textbf{(18d)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y_1}\dfrac{\partial F}{\partial y_2} - \dfrac{\partial H}{\partial y_2}\dfrac{\partial F}{\partial y_1} = 0, & \textbf{(18e)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_2}\dfrac{\partial F}{\partial y_2} - \dfrac{\partial H}{\partial y_2}\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0. & \textbf{(18f)} \end{cases}$$

Упростим (18a):

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}$$

$$\left(\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{x_1}{\ell_1^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_1 - x_2}{\ell_{12}^2}\right)(2\Gamma_1 y_1) =$$

$$= \left(\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{y_1}{\ell_1^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{y_1 - y_2}{\ell_{12}^2}\right)(2\Gamma_1 x_1) \Bigg| \times \frac{1}{2\Gamma_1}$$

$$\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{x_1 y_1}{\ell_1^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{y_1(x_1 - x_2)}{\ell_{12}^2} = \frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{x_1 y_1}{\ell_1^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_1(y_1 - y_2)}{\ell_{12}^2}$$

$$\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{y_1(x_1 - x_2)}{\ell_{12}^2} = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_1(y_1 - y_2)}{\ell_{12}^2} \Bigg| \times \frac{\lambda_1\lambda_2\ell_{12}^2}{\Gamma_1\Gamma_2}$$

$$y_1(x_1 - x_2) = x_1(y_1 - y_2)$$

$$x_1y_1 - x_2y_1 = x_1y_1 - x_1y_2 \Big| \times\ -\frac{1}{x_2y_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Упростив (18f) похожим образом, заметим, что множества решений (18a) и (18f) совпадают. Перейдём к упрощению (18b):

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_1}$$

$$\left(\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\frac{x_1}{\ell_1^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_1 - x_2}{\ell_{12}^2}\right)(2\Gamma_2 x_2) =$$

$$= \left(\frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\frac{x_2}{\ell_2^2} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_2 - x_1}{\ell_{12}^2}\right)(2\Gamma_1 x_1) \Big| \times \frac{1}{2\Gamma_1\Gamma_2}$$

$$\frac{x_1x_2}{\lambda_1\ell_1^2} + \frac{\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_2(x_1 - x_2)}{\ell_{12}^2} = \frac{x_1x_2}{\lambda_2\ell_2^2} - \frac{\Gamma_1}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_1(x_1 - x_2)}{\ell_{12}^2}$$

$$\frac{x_1x_2}{\lambda_1\ell_1^2} - \frac{x_1x_2}{\lambda_2\ell_2^2} + \frac{\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_2(x_1 - x_2)}{\ell_{12}^2} + \frac{\Gamma_1}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_1(x_1 - x_2)}{\ell_{12}^2} = 0$$

$$\frac{x_1x_2}{\lambda_1\ell_1^2} - \frac{x_1x_2}{\lambda_2\ell_2^2} + \frac{\Gamma_1x_1^2 - (\Gamma_1 - \Gamma_2)x_1x_2 - \Gamma_2x_2^2}{\lambda_1\lambda_2\ell_{12}^2} = 0 \Big| \times \frac{\lambda_1\lambda_2}{x_1x_2}$$

$$\frac{\lambda_2}{\ell_1^2} - \frac{\lambda_1}{\ell_2^2} - \frac{\Gamma_1\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) - \Gamma_2\left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right)}{\ell_{12}^2} = 0$$

Проведя аналогичные упрощения для (18c) – (18e) с учётом равенства

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

полученного из (18a) и (18f), мы приходим к тому же множеству

решений, что и для (18b). Таким образом, в результате упрощения система (18a) – (18f) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}, \\ \dfrac{\lambda_2}{\ell_1^2} - \dfrac{\lambda_1}{\ell_2^2} - \dfrac{\Gamma_1\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) - \Gamma_2\left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right)}{\ell_{12}^2} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0, \\ x_1 x_2 \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right] \times \\ \quad \times \left[\lambda_2 \left(x_2^2 + y_2^2\right) - \lambda_1 \left(x_1^2 + y_1^2\right)\right] + \\ \quad + \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right)(x_1 - x_2)(\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2) = 0. \end{cases}$$

Введём следующие обозначения для полученных полиномиальных выражений:

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ F_2 &= x_1 x_2 \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right] \times \\ &\quad \times \left[\lambda_2 \left(x_2^2 + y_2^2\right) - \lambda_1 \left(x_1^2 + y_1^2\right)\right] + \\ &\quad + \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right)(x_1 - x_2)(\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2), \end{aligned}$$

а также обозначим через $\mathcal{N}$ замыкание множества решений системы:

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0. \tag{19}$$

Для дальнейшего анализа удобно перейти к полярным координатам

$$x_1 = r_1 \cos\theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin\theta_1, \quad x_2 = r_2 \cos\theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin\theta_2, \tag{20}$$

тогда решение первого уравнения из (19) с учётом замены (20):

$$r_1 r_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - r_1 r_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 = 0 \sim$$

$$\sim \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \theta_1 = \pi + \theta_2, \\ \theta_1 = \theta_2. \end{array} \right.$$

Второе равенство системы (19) с учётом (20) принимает вид

$$F_2 = r_1 \cos\theta_1 r_2 \cos\theta_2 \left[r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] \times$$
$$\times \left(\lambda_2 r_2^2 - \lambda_1 r_1^2 \right) + r_1^2 r_2^2 (r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2) \times$$
$$\times (\Gamma_1 r_1 \cos\theta_1 + \Gamma_2 r_2 \cos\theta_2).$$

Для случая $\theta_1 = \pi + \theta_2$:

$$F_2\Big|_{\theta_1 = \pi + \theta_2} = r_1 r_2 \cos(\theta_2 + \pi) \cos\theta_2 \left[r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\pi) \right] \times$$
$$\times \left(\lambda_2 r_2^2 - \lambda_1 r_1^2 \right) + r_1^2 r_2^2 (r_1 \cos(\theta_2 + \pi) - r_2 \cos\theta_2) \times$$
$$\times (\Gamma_1 r_1 \cos(\theta_2 + \pi) + \Gamma_2 r_2 \cos\theta_2),$$

$$F_2\Big|_{\theta_1 = \pi + \theta_2} = -r_1 r_2 \cos^2\theta_2 (r_1 + r_2)^2 \left(\lambda_2 r_2^2 - \lambda_1 r_1^2 \right) +$$
$$+ r_1^2 r_2^2 \cos^2\theta_2 (r_1 + r_2)(\Gamma_1 r_1 - \Gamma_2 r_2),$$

тогда второе уравнение в (19) сводится к

$$W_1(r_1, r_2) = 0, \qquad (21)$$

где

$$W_1(r_1, r_2) = \frac{1}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)\cos^2\theta_2} \times F_2\Big|_{\theta_1=\pi+\theta_2},$$

$$W_1(r_1, r_2) = (r_1 + r_2)\left(\lambda_1 r_1^2 - \lambda_2 r_2^2\right) + r_1 r_2(\Gamma_1 r_1 - \Gamma_2 r_2).$$

Аналогично для случая $\theta_1 = \theta_2$ (при $r_1 \neq r_2$):

$$\begin{aligned} F_2\Big|_{\theta_1=\theta_2} &= r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_1 \left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(0)\right] \times \\ &\times \left(\lambda_2 r_2^2 - \lambda_1 r_1^2\right) + r_1^2 r_2^2 (r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_1) \times \\ &\times (\Gamma_1 r_1 \cos\theta_1 + \Gamma_2 r_2 \cos\theta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2\Big|_{\theta_1=\theta_2} &= r_1 r_2 \cos^2\theta_1 (r_1 - r_2)^2 \left(\lambda_2 r_2^2 - \lambda_1 r_1^2\right) + \\ &+ r_1^2 r_2^2 \cos^2\theta_1 (r_1 - r_2)(\Gamma_1 r_1 + \Gamma_2 r_2), \end{aligned}$$

второе уравнение в (19) сводится к

$$W_2(r_1, r_2) = 0, \tag{22}$$

где

$$W_2(r_1, r_2) = \frac{1}{r_1 r_2 (r_1 - r_2)\cos^2\theta_1} \times F_2\Big|_{\theta_1=\theta_2},$$

$$W_2(r_1, r_2) = (r_1 - r_2)\left(\lambda_1 r_1^2 - \lambda_2 r_2^2\right) - r_1 r_2(\Gamma_1 r_1 + \Gamma_2 r_2),$$

или

$$W_2(r_1, r_2) = W_1(r_1, -r_2).$$

Интегралы системы после перехода к полярным координатам

(20) в общем случае принимают вид

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\ln r_1^2 + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\ln r_2^2 + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\ln\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]\right\}$$

и

$$F = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2.$$

Случай, когда $\theta_1 = \pi + \theta_2$, приводит к следующим значениям первых интегралов:

$$\gamma_1 : \begin{cases} h_1(r_1, r_2) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\Gamma_1}{\lambda_1}\ln r_1^2 + \dfrac{\Gamma_2}{\lambda_2}\ln r_2^2 + \dfrac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\ln(r_1 + r_2)^2\right\}, \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \end{cases} \tag{23}$$

В случае $\theta_1 = \theta_2$

$$\gamma_2 : \begin{cases} h_2(r_1, r_2) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\Gamma_1}{\lambda_1}\ln r_1^2 + \dfrac{\Gamma_2}{\lambda_2}\ln r_2^2 + \dfrac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\ln(r_1 - r_2)^2\right\}, \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2, \end{cases}$$

или

$$\gamma_2 : \begin{cases} h_2(r_1, r_2) = h_1(r_1, -r_2), \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \end{cases} \tag{24}$$

Системы (23) и (24) совместно с уравнениями (21) и (22) задают множество критических точек $\mathcal{C}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(f, h)$.

При помощи *Wolfram Mathematica* был создан виджет, который находит кривые (23) и (24) с учётом (21) и (22) для заданных параметров Γ_1, Γ_2, λ_1, λ_2 и создаёт изображение полученной бифуркационной диаграммы Σ. Панель управления виджета позволяет вносить изменения в параметры системы и наблюдать за соответствующими изменениями на бифуркационной диаграмме. Кроме того, она позволяет управлять настройками самого графика. Полный код программы находится в приложе-

нии BifurcationDiagramMagnetic.nb. Примеры бифуркационных диаграмм представлены на Рис. 1, Рис. 2, Рис. 3.

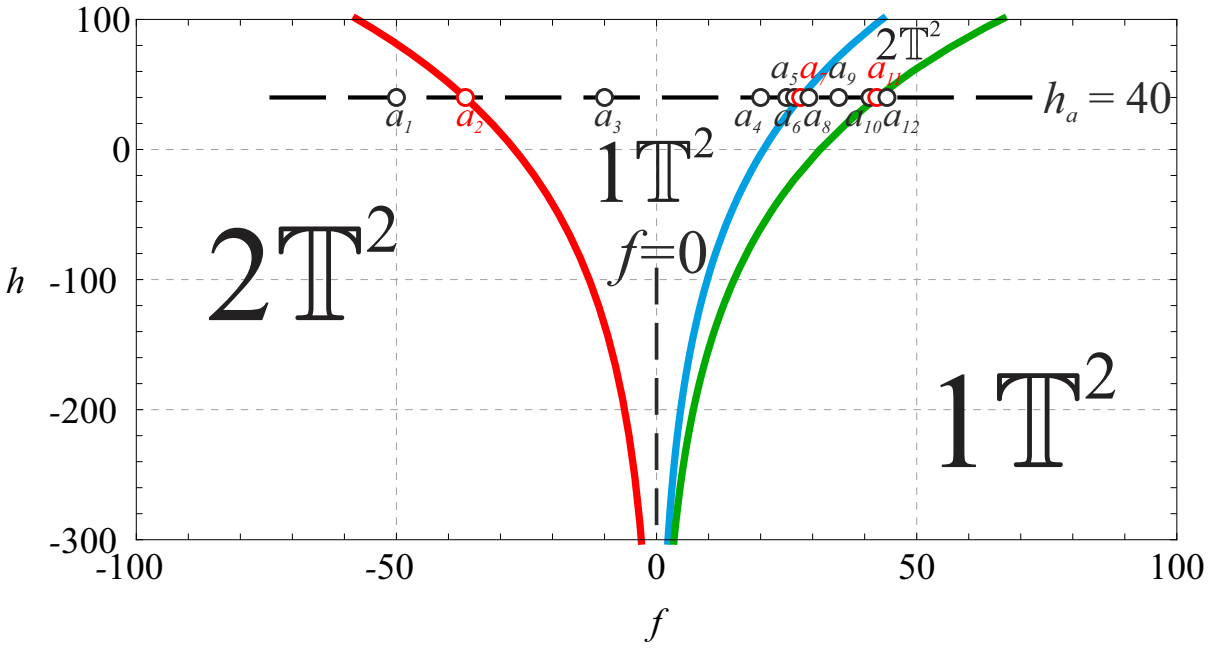


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для параметров $\Gamma_1 = -18.849556$, $\Gamma_2 = 12.566371$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.

На Рис. 1 изображена бифуркационная диаграмма для параметров $\Gamma_1 = -18.849556$, $\Gamma_2 = 12.566371$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Заметим, что полярности вихрей имеют разный знак, а значит, данная вихревая система встречается только в магнитном случае. Диаграмма содержит три кривые, которые имеют общую асимптоту $f = 0$ и разбивают плоскость $\mathbb{R}^2(f, h)$ на четыре части. Любой точке диаграммы (f, h) соответствуют постоянные значения интегралов F и H. В данном случае, бифуркационная диаграмма позволяет выбрать такие значения интегралов, которые дают систему вихрей, фазовые квазипериодические траектории которых лежат на поверхности одного ($1\mathbb{T}^2$) или двух ($2\mathbb{T}^2$) двумерных инвариантных торов Лиувилля. Абсолютные движения вихрей в виде торической обмотки, которая даёт более наглядное представление, даны в третьей главе данной работы, посвящённой визуализации вих-

ревых траекторий.

Таблица 1. Значения второго интеграла $f = a_k$.

a_1	a_2	a_3	a_4
-50	-36.749714	-10	20

a_5	a_6	a_7	a_8
25	27.5	27.703452	28

a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
35	42	42.331743	44

Значения второго интеграла f, соответствующие точкам на прямой $h = h_a = 40$ диаграммы Рис. 1 занесены в Табл. 1 и пригодятся нам в дальнейшем. Точки $a_2, a_7, a_{11} \in \Sigma$.

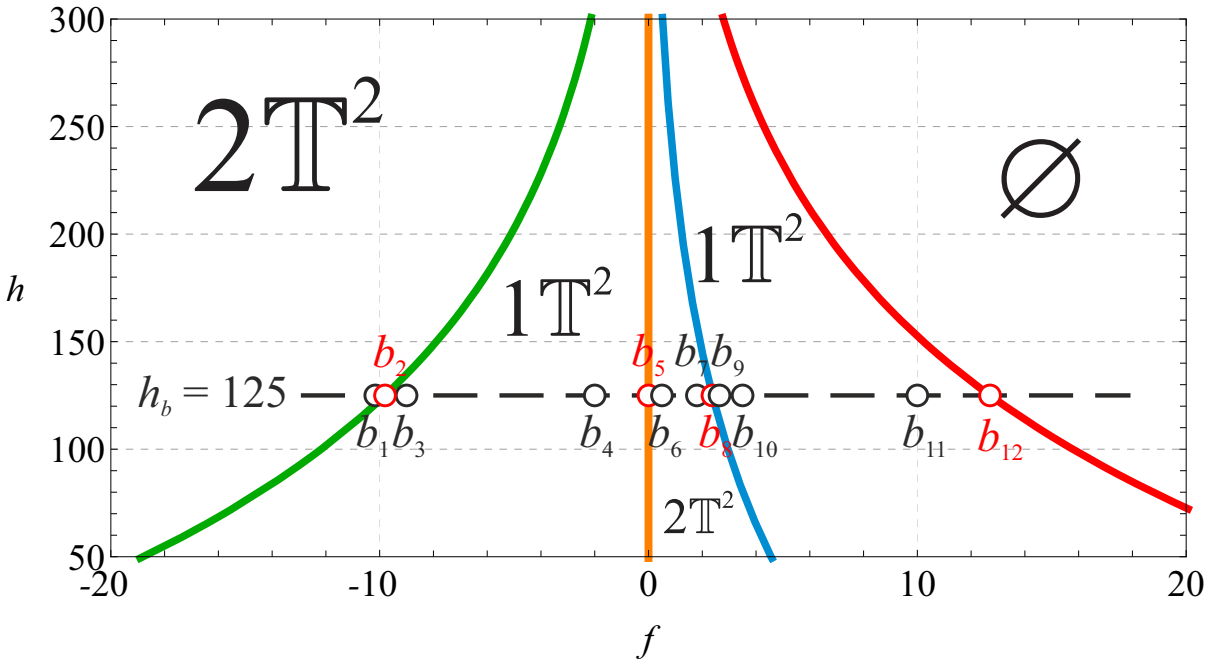


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для параметров $\Gamma_1 = 12.566371$, $\Gamma_2 = -18.849556$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$.

На Рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма для случая с параметрами $\Gamma_1 = 12.566371$, $\Gamma_2 = -18.849556$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$. Вихревые полярности равны, а значит, такой системе магнитных вихрей соответствует топологически эквивалентная система гидродинамических вихрей в идеальной жидкости.

Также стоит подчеркнуть, что такую вихревую пару принято называть «вихрь-антивихрь» [32], [33], [34]. Напомним, что если вихревое число $\kappa_\alpha > 0$, то объект называют вихрем, если $\kappa_\alpha < 0$ — антивихрем, где

$$\kappa_\alpha = -\frac{\Gamma_\alpha}{2\pi\lambda_\alpha}.$$

В нашем случае

$$\kappa_1 = -\frac{12.566371}{2\pi(-1)} \approx 2, \qquad \kappa_2 = -\frac{-18.849556}{2\pi(-1)} \approx -3.$$

Таблица 2. Значения второго интеграла $f = b_k$.

b_1	b_2	b_3	b_4
-10	-9.800684	-9	-2

b_5	b_6	b_7	b_8
0	0.5	1.8	2.378148

b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
2.45	3.5	10	12.703588

Важной особенностью диаграммы Рис. 2 является наличие прямой $f = 0$, которая не принадлежит множеству критических точек $\mathcal{C}$, но так же является бифуркационной. В отличие от предыдущего случая, помимо одного ($1\mathbb{T}^2$) и двух ($2\mathbb{T}^2$) торов Лиувилля, на диаграмме представлена область пустого множества $\emptyset$. Значения первой координаты точек (f_k, h_b) вдоль прямой $h_b = 125$, $k = 1, \ldots, 12$ занесены в Табл. 2. Точки $b_2, b_5, b_8, b_{12} \in \Sigma$.

Ещё один интересный случай, который мы рассмотрим, — это так называемая «вихревая пара», которой посвящены работы К.В. Кошеля, Е.А. Рыжова и других [35], [36], [37], [38]. Рассматриваются два взаимодействующих вихря в идеальной жидкости с равными по модулю но противоположными по знаку интенсивностями. На Рис. 3 изображена бифуркационная диаграм-

ма такой вихревой пары: $\Gamma_1 = 6.283185$, $\Gamma_2 = -6.283185$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. Нетрудно убедиться, что рассматриваемая пара тоже относится к случаю «вихрь-антивихрь», но на этот раз уже с равными по модулю вихревыми числами $\kappa_1 \approx -1$ и $\kappa_2 \approx 1$. Здесь мы снова наблюдаем появление бифуркационной прямой $f = 0$, которая не принадлежит критическому множеству $\mathcal{C}$.

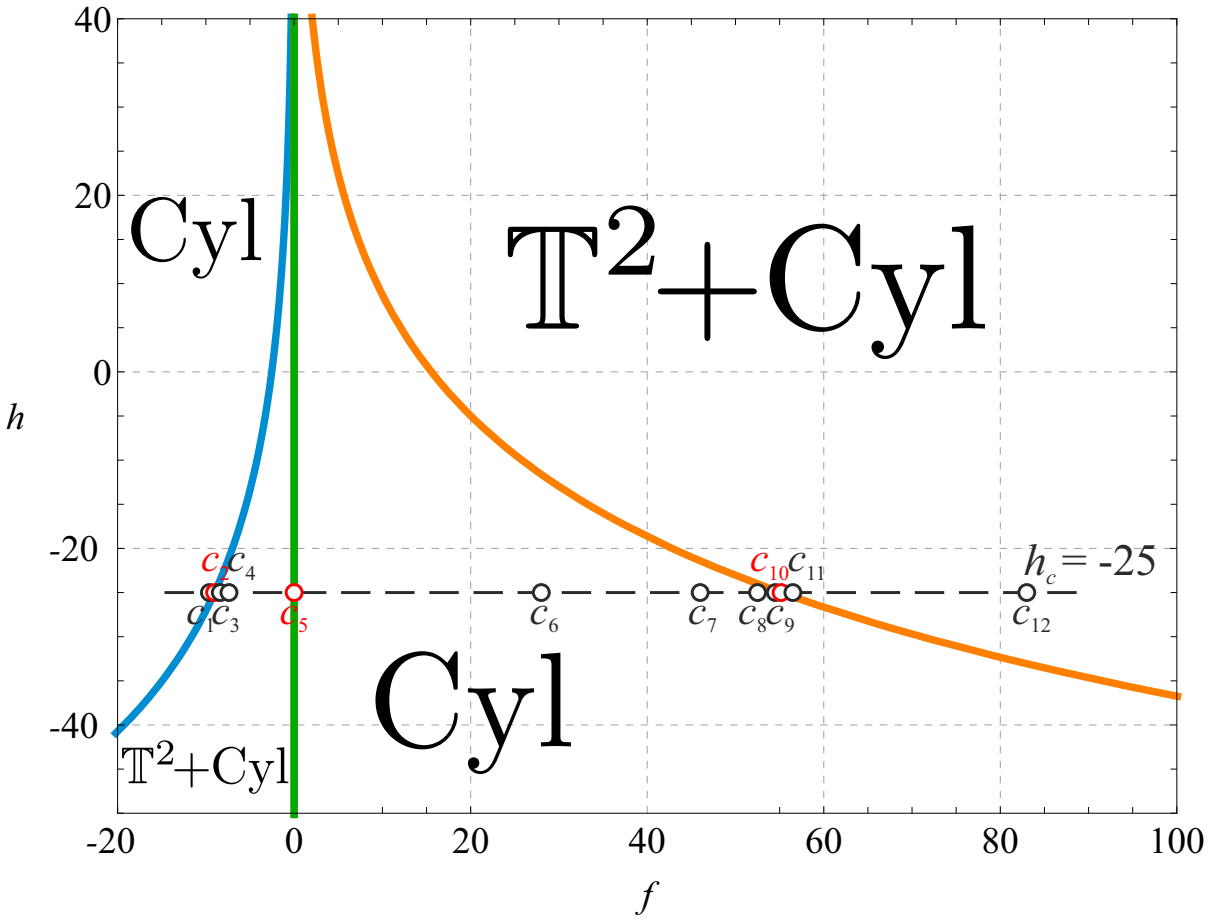


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для параметров $\Gamma_1 = 6.283185$, $\Gamma_2 = -6.283185$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$.

Интересной особенностью бифуркационной диаграммы Рис. 3 является наличие не только торов ($\mathbb{T}^2$), но и цилиндров (Cyl). На Рис. 3 присутствует бифуркация $\left(\mathbb{T}^2 + \mathrm{Cyl}\right) \to \mathrm{Cyl}$. Аналогичная бифуркация рассмотрена Л. Гавриловым в работе [39] и описывается Рис. 4.

Значения второго интеграла для точек c_k, $k = 1, \ldots, 12$ на диа-

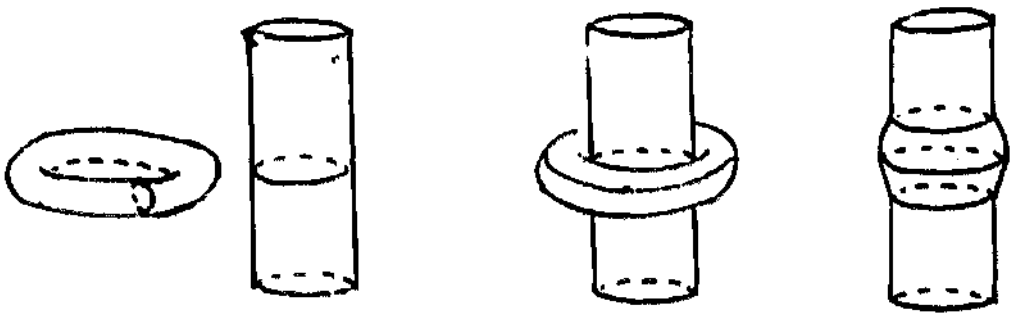


Рис. 4. Бифуркация $\left(\mathbb{T}^2 + \mathrm{Cyl}\right) \to (\mathbb{R}^1 \vee S^1) \times S^1 \to \mathrm{Cyl}$**.**

грамме Рис. 3 вдоль прямой $h = h_c = -25$ записаны в Табл. 3. Точки $c_2, c_5, c_{10} \in \Sigma$.

Таблица 3. Значения второго интеграла $f = c_k$**.**

c_1	c_2	c_3	c_4
-9.1	-9.010934	-8.95	-7.8

c_5	c_6	c_7	c_8
0	28	46	52.5

c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
55.1	55.165893	56.5	83

1.4. Редукция ограниченной задачи динамики трёх магнитных вихрей к системе с меньшим числом степеней свободы

В данном параграфе продемонстрируем сведение гамильтоновой системы (15) с двумя степенями свободы к *гамильтоновой* системе с *одной* степенью свободы. Благодаря наличию второго интеграла F (14), инвариантного относительно группы вращений $SO(2)$, мы можем перейти от фазовых переменных (x_1, y_1, x_2, y_2) к новым переменным (u, v, α). Физические переменные (u, v) — координаты одного из вихрей в координатной системе, связанной с вихрем, вращающимся вокруг центра завихренности. Переменная $\alpha(\tau)$ — угол поворота вращающейся системы координат. Предлагаемая замена выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}}[u\cos(\alpha) - v\sin(\alpha)],\\
y_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}}[u\sin(\alpha) + v\cos(\alpha)],\\
x_2 &= \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2)},\\
y_2 &= \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2)}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Отметим, что f, которая содержится в подстановке (25), при переходе к новым координатам в точности совпадает со значением второго интеграла F (14), а значит является константой. Расстояния между вихрями ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_{12} в новых координатах принимают вид

$$
\ell_1^2 = \frac{u^2 + v^2}{|\Gamma_1|},
$$

$$\ell_2^2 = \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)}{|\Gamma_2|},$$

$$\ell_{12}^2 = \frac{u^2+v^2}{|\Gamma_1|} + \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)}{|\Gamma_2|} - \\ - \frac{2\,u\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)}}{\sqrt{|\Gamma_1||\Gamma_2|}},$$

тогда второй интеграл (14)

$$F = \Gamma_1\ell_1^2 + \Gamma_2\ell_2^2 = \Gamma_1\frac{u^2+v^2}{|\Gamma_1|} + \\ + \Gamma_2\frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)}{|\Gamma_2|} = \operatorname{sgn}\Gamma_1\left(u^2+v^2\right) + \\ + \operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\operatorname{sgn}\Gamma_2\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right) = \\ = \operatorname{sgn}\Gamma_1\left(u^2+v^2\right) + (\operatorname{sgn}\Gamma_1)^2 f - \operatorname{sgn}\Gamma_1\left(u^2+v^2\right) = f,$$

а гамильтониан (13)

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\ln\ell_1^2 + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\ln\ell_2^2 + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\ln\ell_{12}^2\right\} = \\ = \frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\ln\left[\frac{u^2+v^2}{|\Gamma_1|}\right] + \frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\ln\left[\frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{|\Gamma_2|}\times\right.\right. \\ \left.\times\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\right] + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\ln\left[\frac{u^2+v^2}{|\Gamma_1|} + \right. \\ + \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{|\Gamma_2|}\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right) - \\ \left.\left. - \frac{2\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)u\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)}}{\sqrt{|\Gamma_1||\Gamma_2|}}\right]\right\}. \qquad (26)$$

Теперь получим систему дифференциальных уравнений для координат (u, v, α). Для этого нужно взять производные по времени τ от переменных (x_1, y_1, x_2, y_2) в системе уравнений (25). Полученные выражения приравниваются к соответствующим правым частям в (15). Решение такой системы относительно $\left(\frac{du}{d\tau}, \frac{dv}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}\right)$ даёт уравнения движения новой системы с одной степенью свободы.

Начнём с дифференцирования в (25). Получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}}[\dot{u}\cos(\alpha) - \dot{v}\sin(\alpha) - \dot{\alpha}(u\sin(\alpha) + v\cos(\alpha))],\\
\frac{dy_1}{d\tau} &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}}[\dot{u}\sin(\alpha) + \dot{v}\cos(\alpha) + \dot{\alpha}(u\cos(\alpha) - v\sin(\alpha))],\\
\frac{dx_2}{d\tau} &= -\frac{1}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\left[\frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\cos(\alpha)(u\dot{u} + v\dot{v})}{\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\,[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - (u^2+v^2)]}} + \right.\\
&\qquad \left. + \dot{\alpha}\sin(\alpha)\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\,[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - (u^2+v^2)]}\right],\\
\frac{dy_2}{d\tau} &= -\frac{1}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\left[\frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\sin(\alpha)(u\dot{u} + v\dot{v})}{\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\,[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - (u^2+v^2)]}} - \right.\\
&\qquad \left. - \dot{\alpha}\cos(\alpha)\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\,[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - (u^2+v^2)]}\right],
\end{aligned}
\tag{27}
$$

где $\dot{u} = \frac{du}{d\tau}$, $\dot{v} = \frac{dv}{d\tau}$, $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{d\tau}$. Затем перейдём к новым координатам (25) в уравнениях (15):

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{y_1}{\lambda_1 \ell_1^2} + \frac{\Gamma_2}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{y_1 - y_2}{\ell_{12}^2} = \tag{28}$$

$$= \frac{\sqrt{|\Gamma_1|}[u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha)]}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \lambda_1 (u^2 + v^2)} +$$

$$+ \frac{|\Gamma_1||\Gamma_2|\Gamma_2}{R_0} \left(\frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}} [u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)} \right),$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -\frac{x_1}{\lambda_1 \ell_1^2} - \frac{\Gamma_2}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{x_1 - x_2}{\ell_{12}^2} = \tag{29}$$

$$= \frac{\sqrt{|\Gamma_1|}[v \sin(\alpha) - u \cos(\alpha)]}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \lambda_1 (u^2 + v^2)} -$$

$$- \frac{|\Gamma_1||\Gamma_2|\Gamma_2}{R_0} \left(\frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}} [u \cos(\alpha) - v \sin(\alpha)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)} \right),$$

794

$$\frac{dx_2}{d\tau}=\frac{y_2}{\lambda_2\ell_2^2}+\frac{\Gamma_1}{\lambda_1\lambda_2}\frac{y_2-y_1}{\ell_{12}^2}= \tag{30}$$

$$=\frac{\sqrt{|\Gamma_2|}\sin(\alpha)}{\lambda_2\sqrt{\mathrm{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\mathrm{sgn}\,\Gamma_1-u^2-v^2)}}-$$

$$-\frac{|\Gamma_1||\Gamma_2|\Gamma_1}{R_0}\left(\frac{\mathrm{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}}[u\sin(\alpha)+v\cos(\alpha)]-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\sqrt{\mathrm{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\mathrm{sgn}\,\Gamma_1-u^2-v^2)}\right),$$

$$\frac{dy_2}{d\tau}=-\frac{x_2}{\lambda_2\ell_2^2}-\frac{\Gamma_1}{\lambda_1\lambda_2}\frac{x_2-x_1}{\ell_{12}^2}= \tag{31}$$

$$=-\frac{\sqrt{|\Gamma_2|}\cos(\alpha)}{\lambda_2\sqrt{\mathrm{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\mathrm{sgn}\,\Gamma_1-u^2-v^2)}}+$$

$$+\frac{|\Gamma_1||\Gamma_2|\Gamma_1}{R_0}\left(\frac{\mathrm{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}}[u\cos(\alpha)-v\sin(\alpha)]-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\sqrt{\mathrm{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\mathrm{sgn}\,\Gamma_1-u^2-v^2)}\right),$$

где

$$R_0=\lambda_1\lambda_2\left(|\Gamma_2|\left(u^2+v^2\right)+\right.$$

$$+|\Gamma_1|\mathrm{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\left(f\mathrm{sgn}\,\Gamma_1-u^2-v^2\right)-$$

$$\left.-2\mathrm{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)u\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2\,(f\mathrm{sgn}\,\Gamma_1-u^2-v^2)}\right).$$

Сопоставив правые части в уравнениях (28)–(31) с соответствующими правыми частями в уравнениях (27), получаем систему, решение которой относительно $\dot{u} = \dfrac{du}{d\tau}$, $\dot{v} = \dfrac{dv}{d\tau}$ и $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{d\tau}$ даёт следующие уравнения движения:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\Gamma_2 \operatorname{sgn}\Gamma_1}{\lambda_2\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)} - \frac{\sqrt{|\Gamma_1|}\Gamma_1\Gamma_2}{\operatorname{sgn}\Gamma_1\lambda_1\lambda_2}\frac{R_1^\alpha(u,v)}{Q_1^\alpha(u,v)},$$

$$\dot{v} = -\frac{u|\Gamma_1|}{\lambda_1\left(u^2+v^2\right)} + \frac{\operatorname{sgn}\Gamma_1 u\Gamma_2}{\lambda_2\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{R_1^v(u,v)}{Q_1^v(u,v)},$$

$$\dot{u} = \frac{v|\Gamma_1|}{\lambda_1\left(u^2+v^2\right)} - \frac{\operatorname{sgn}\Gamma_1 v\Gamma_2}{\lambda_2\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)} + v\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{R_1^u(u,v)}{Q_1^u(u,v)},$$

где

$$R_1^\alpha(u,v) = \Gamma_1\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right) - \Gamma_2 u^2,$$

$$\begin{aligned} Q_1^\alpha(u,v) = {} & \sqrt{|\Gamma_2|}u\sqrt{\operatorname{sgn}\left(\Gamma_1\Gamma_2\right)\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)}\times \\ & \times\left[\Gamma_2\left(u^2+v^2\right) - \Gamma_1\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\right] + \\ & + \sqrt{|\Gamma_1|}\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\times \\ & \times\left[\Gamma_1\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right) - \Gamma_2\left(u^2 - v^2\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1^v(u,v) = {} & \left[\Gamma_2 u^2 - \Gamma_1\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\right]\times \\ & \times\left[\Gamma_1 u^2 - \Gamma_2\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\right], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_1^v(u,v) = {} & \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)}\times \\
& \times \left[\Gamma_2\left(u^2+v^2\right)\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - 2u^2 - v^2\right) + \right. \\
& \left. + \left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\left(f|\Gamma_1| - 2u^2\Gamma_2 - v^2\Gamma_1\right)\right] - \\
& - u\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\times \\
& \times \left[\Gamma_2\operatorname{sgn}\Gamma_1\left(u^2+v^2\right)(\Gamma_1-\Gamma_2) + \right. \\
& + \Gamma_1|\Gamma_1|\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right) + \\
& \left. + \Gamma_2|\Gamma_1|\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - 3u^2 - v^2\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
R_1^u(u,v) = \left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)(\Gamma_1-\Gamma_2)^2 - u^2\Gamma_1\Gamma_2,
$$

$$
\begin{aligned}
Q_1^u(u,v) = {} & \left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\times \\
& \times \left\{\operatorname{sgn}\Gamma_1\left[\left(u^2+v^2\right)\left(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2\right) - 2\Gamma_1\Gamma_2 v^2\right] - \right. \\
& \left. - f\Gamma_1(\Gamma_1-\Gamma_2)\right\} + u\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)}\times \\
& \times \left[\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)(\Gamma_1 - 2\Gamma_2) - \Gamma_2\left(u^2+v^2\right)\right].
\end{aligned}
$$

Можно убедиться, что система остаётся гамильтоновой относительно (u,v):

$$
\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v}\operatorname{sgn}\Gamma_1, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u}\operatorname{sgn}\Gamma_1. \tag{32}
$$

Обратная подстановка

$$
U = \frac{\sqrt{|\Gamma_1|}(x_1x_2 + y_1y_2)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\sqrt{x_2^2+y_2^2}}, \quad V = \frac{\sqrt{|\Gamma_1|}(x_2y_1 - x_1y_2)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\sqrt{x_2^2+y_2^2}}
$$

приводит к каноническим переменным относительно скобки Ли-

Пуассона (16):

$$\{U, V\} = -\{V, U\} = \operatorname{sgn} \Gamma_1, \quad \{U, U\} = \{V, V\} = 0.$$

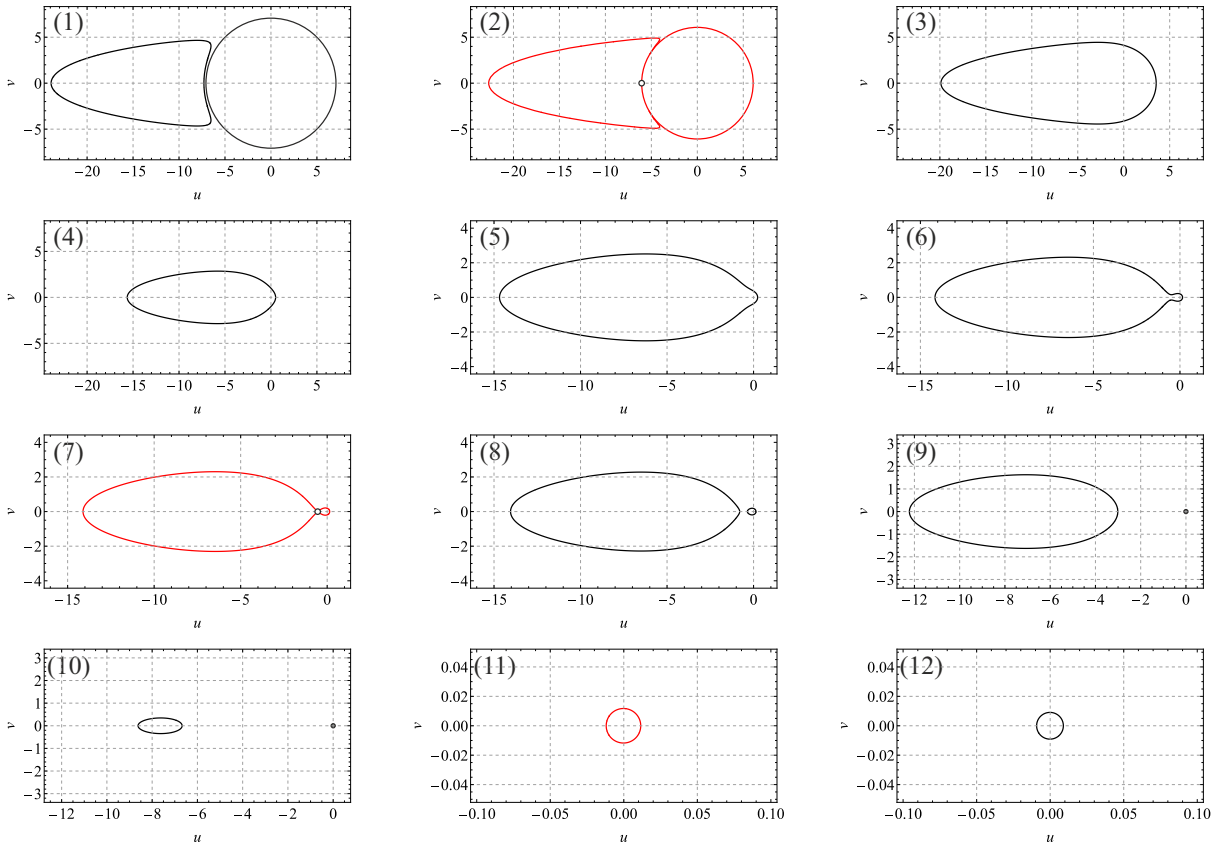


Рис. 5. Линии уровня редуцированного гамильтониана для параметров $\Gamma_1 = -18.849556$, $\Gamma_2 = 12.566371$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, соответствующие точкам (f_k, h_a) на Рис. 1, где $h_a = 40$, $f_k = a_k$, $k = 1, \ldots, 12$ (Табл. 1).

Критические точки редуцированного гамильтониана (26) определяют стационарные точки системы (32), соответствующие относительным положениям вихрей. Далее подробно рассмотрим линии уровня редуцированного гамильтониана для бифуркационных диаграмм Рис. 1, Рис. 2, Рис. 3, созданные при помощи исполняемого файла HamiltonianLinesMagnetic.nb. Удобно выбрать фиксированное значение интеграла h, т. е. горизонтальную линию на диаграмме, и, двигаясь слева направо, наблюдать за из-

менениями кривых.

На Рис. 5 изображены линии уровня редуцированного гамильтониана (26) для значений параметров $\Gamma_1 = -18.849556$, $\Gamma_2 = 12.566371$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, соответствующих движению вдоль линии $h = h_a = 40$ бифуркационной диаграммы на Рис. 1. Красным цветом выделены кривые, которым соответствуют точки на плоскости $\mathbb{R}^2(f, h)$, принадлежащие бифуркационному множеству Σ. Регулярные уровни редуцированного гамильтониана компактны, а движения происходят по замкнутым кривым. Критические значения приведённого гамильтониана определяют бифуркационное множество (21)–(24).

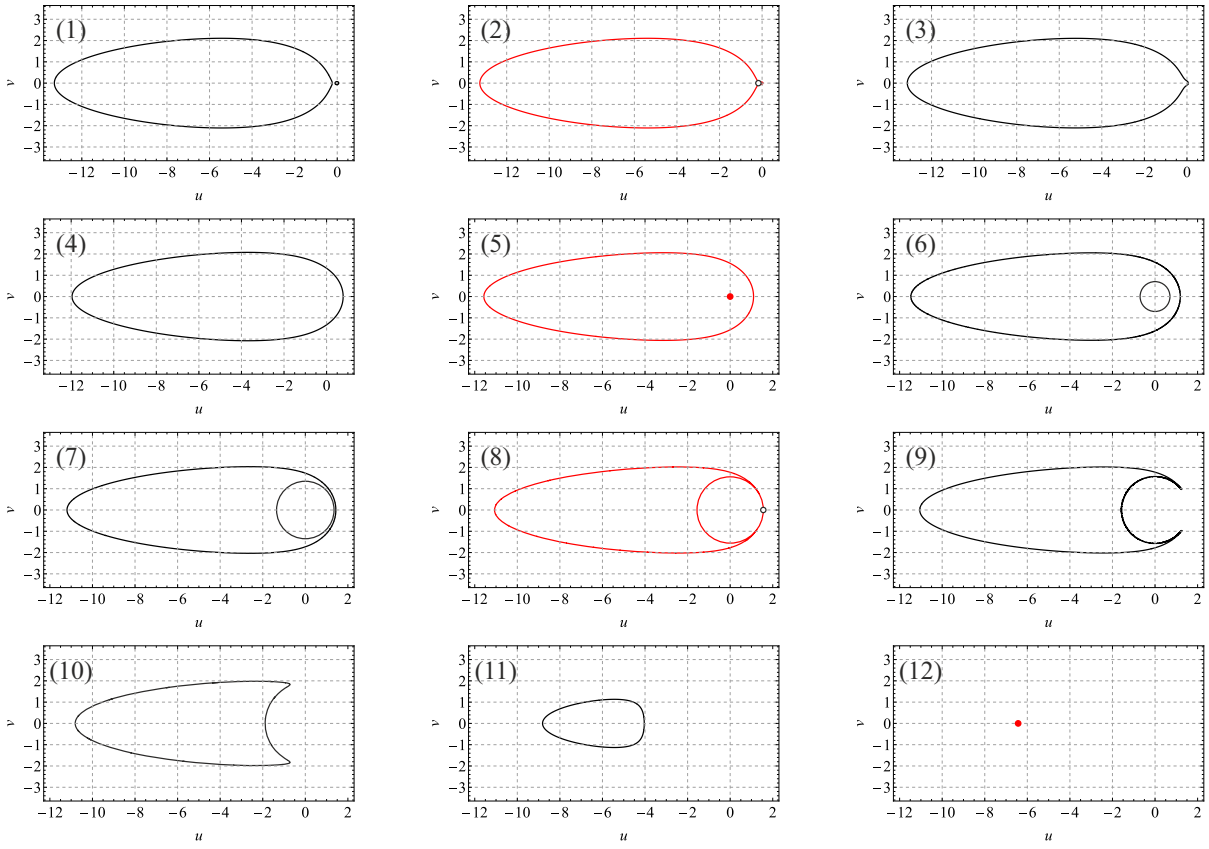


Рис. 6. Линии уровня редуцированного гамильтониана для параметров $\Gamma_1 = 12.566371$, $\Gamma_2 = -18.849556$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, соответствующие точкам (f_k, h_b) на Рис. 2, где $h_b = 125$, $f_k = b_k$, $k = 1, \ldots, 12$ (Табл. 2).

Рис. 6 соответствует движению вдоль линии $h = h_b = 125$ бифуркационной диаграммы Рис. 2 с параметрами $\Gamma_1 = 12.566371$, $\Gamma_2 = -18.849556$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$. Регулярные уровни редуцированного гамильтониана также компактны. Рис. 6 (4)–(6) хорошо демонстрирует, как проявляет себя прямая $f = 0$: при прохождении через неё слева направо возникает второй тор Лиувилля, т. е. имеет место бифуркация $1\mathbb{T}^2 \to 2\mathbb{T}^2$.

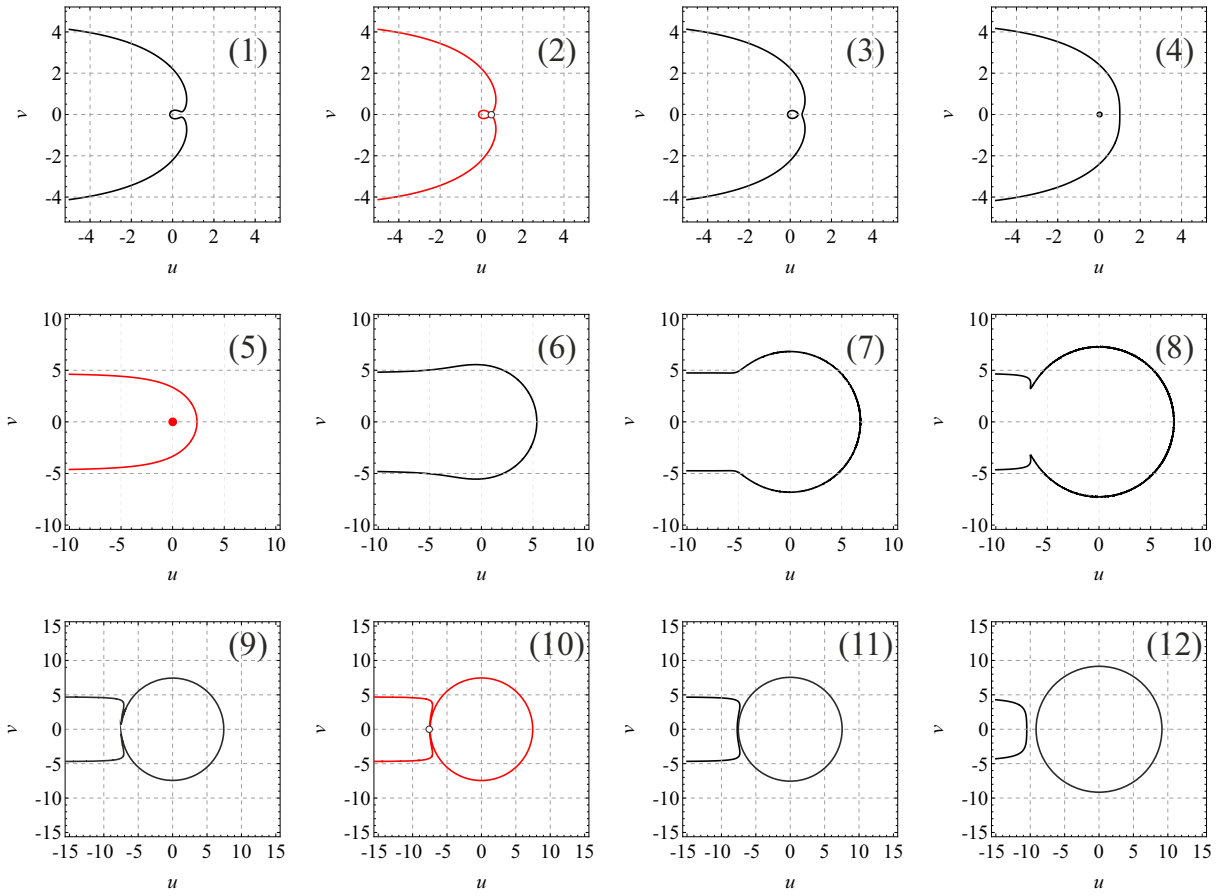


Рис. 7. Линии уровня редуцированного гамильтониана для параметров $\Gamma_1 = 6.283185$, $\Gamma_2 = -6.283185$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, соответствующие точкам (f_k, h_c) на Рис. 3, где $h_c = -25$, $f_k = c_k$, $k = 1, \ldots, 12$ (Табл. 3).

На Рис. 7, который соответствует бифуркационной диаграмме Рис. 3 для параметров $\Gamma_1 = 6.283185$, $\Gamma_2 = -6.283185$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, мы можем наблюдать как наличие цилиндров (Cyl) проявляется в *некомпактности* линий уровня гамильтониана. Пря-

мая $f = 0$ также проявляет свои бифуркационные свойства, что наглядно показано на Рис. 7 (4)–(6).

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ

2.1. Постановка обобщённой задачи двух вихрей в идеальной жидкости и конденсате Бозе-Эйнштейна: система дифференциальных уравнений, скобка Ли-Пуассона, отображение момента

Рассматривается интегрируемая модель вихревой динамики, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\Gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}(z_1, z_2), \quad \Gamma_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}(z_1, z_2), \quad k = 1, 2, \qquad \textbf{(33)}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\Big[\Gamma_1^2 \ln(1 - |z_1|^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - |z_2|^2) + \\ + \Gamma_1\Gamma_2 \ln\left(\frac{[|z_1 - z_2|^2 + (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)]^{\varepsilon}}{|z_1 - z_2|^{2(c+\varepsilon)}}\right)\Big], \qquad \textbf{(34)}$$

где $z_k = x_k + i_k$, $k = 1, 2$ — координаты k-ого вихря в плоской прямоугольной декартовой системе координат, а Γ_k — его интенсивность. Здесь параметр «ε» является параметром возмущения, а физический параметр «c» отвечает за взаимодействие между вихрями. Значение параметра $\varepsilon = 0$ приводит систему к первому предельному случаю — к модели двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармоническую ловушку [18], [40]. Второй предельный случай — модель пары точечных вихрей в идеальной жидкости, которая ограничена круговой областью, — возникает при значениях параметров $c = 0$ и $\varepsilon = 1$ [41].

Система (33) допускает дополнительный первый интеграл F, связанный с инвариативностью гамильтониана относительно вращений системы координат:

$$F = \Gamma_1 |z_1|^2 + \Gamma_2 |z_2|^2, \tag{35}$$

а значит является вполне интегрируемой системой с двумя степенями свободы, согласно теореме Лиувилля. Скобка Ли-Пуассона для фазового пространства $\mathcal{P}$ задаётся следующим образом:

$$\{z_k, z_j\} = -\frac{2i}{\Gamma_k}\delta_{kj}, \tag{36}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера (индикатор равенства элементов).

Основную роль при исследовании таких систем играет бифуркационное множество $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$, представляющее собой образ критического множества $\mathcal{C}$ интегрального отображения $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$ (множества точек, в которых $\operatorname{rank} d\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) < 2$), где

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = (F(\boldsymbol{z}), H(\boldsymbol{z})),$$

а фазовое пространство задаётся как

$$\mathcal{P} = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1,\ |z_2| < 1, z_1 \neq z_2\}.$$

В следующих параграфах для исследования поставленной задачи будут применены методы, аналогичные тем, которые подробно описанны в первой главе.

2.2. Бифуркационное множество и бифуркационная диаграмма системы двух точечных вихрей в обобщённой задаче вихревой динамики. Построение бифуркационной диаграммы с использованием Wolfram Mathematica

Введём обозначения F_1 и F_2 для следующих полиномиальных выражений:

$$F_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

$$\begin{aligned} F_2 = {} & c x_2 (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2)(x_2^2 + y_2^2 - 1)[x_2(x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] \times \\ & \times [(x_1^2 - 1)x_2^2 + x_1^2 y_2^2] + \Gamma_2 [(x_1^2 - 1)x_2^2 + x_1^2 y_2^2] \times \\ & \times \Big\{ \varepsilon x_2^3 (x_2^2 + y_2^2 - 1)^2 + x_1 (x_1 - x_2)(x_2^2 + y_2^2) \times \\ & \times [x_2(x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] \Big\} + \Gamma_1 x_1 (x_2^2 + y_2^2 - 1) \Big\{ x_2^2 (x_2 - x_1) \times \\ & \times (x_2^2 + y_2^2)[x_2(x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] + \varepsilon [(x_1^2 - 1)x_2^2 + x_1^2 y_2^2]^2 \Big\}, \end{aligned}$$

а замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0 \tag{37}$$

обозначим через $\mathcal{N}$. В таком случае выполняется следующая теорема.

Теорема 1. *Множество критических точек C интегрального отображения $\mathcal{F}$ совпадает с множеством решений системы (37). Множество $\mathcal{N}$ является двумерным инвариантным подмногообразием системы (33) с гамильтонианом (34).*

Доказательство. См. работу [24]. □

Для определения бифуркационной диаграммы Σ как образа множества критических точек $\mathcal{C}$ интегрального отображения $\mathcal{F}$ удобно перейти к полярным координатам

$$x_1 = r_1 \cos\theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin\theta_1, \quad x_2 = r_2 \cos\theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin\theta_2. \qquad \textbf{(38)}$$

Подстановка (38) в первое выражение системы (37) приводит к уравнению $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т. е. $\theta_1 - \theta_2 = 0$ или $\theta_1 - \theta_2 = \pi$.

В случае $\theta_1 = \theta_2 + \pi$ второе уравнение системы (37) сводится к

$$W_1(r_1, r_2) = 0, \qquad \textbf{(39)}$$

где

$$W_1(r_1, r_2) = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2)\Big\{[c(1 + r_1 r_2) + \varepsilon](\Gamma_1 r_1 - \Gamma_2 r_2) -$$

$$- \varepsilon(\Gamma_1 r_1^3 - \Gamma_2 r_2^3)\Big\} - r_1 r_2 (r_1 + r_2)(1 + r_1 r_2)[\Gamma_1(1 - r_2^2) - \Gamma_2(1 - r_1^2)].$$

В случае $\theta_1 = \theta_2$ второе уравнение системы (37) сводится к

$$W_2(r_1, r_2) = 0, \qquad \textbf{(40)}$$

где

$$W_2(r_1, r_2) = W_1(r_1, -r_2).$$

Подстановка (38) в гамильтониан (34) и момент завихренности (35) в случае $\theta_1 = \theta_2 + \pi$ приводит к следующим значениям

первых интегралов:

$$\gamma_1 : \begin{cases} h_1(r_1, r_2) = \dfrac{1}{2}\Big\{\Gamma_1^2 \ln(1 - r_1^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - r_2^2) + \\ \qquad + \Gamma_1\Gamma_2 \ln\Big[\dfrac{(1 + r_1 r_2)^{2\varepsilon}}{(r_1 + r_2)^{2(c+\varepsilon)}}\Big]\Big\}, \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \end{cases} \tag{41}$$

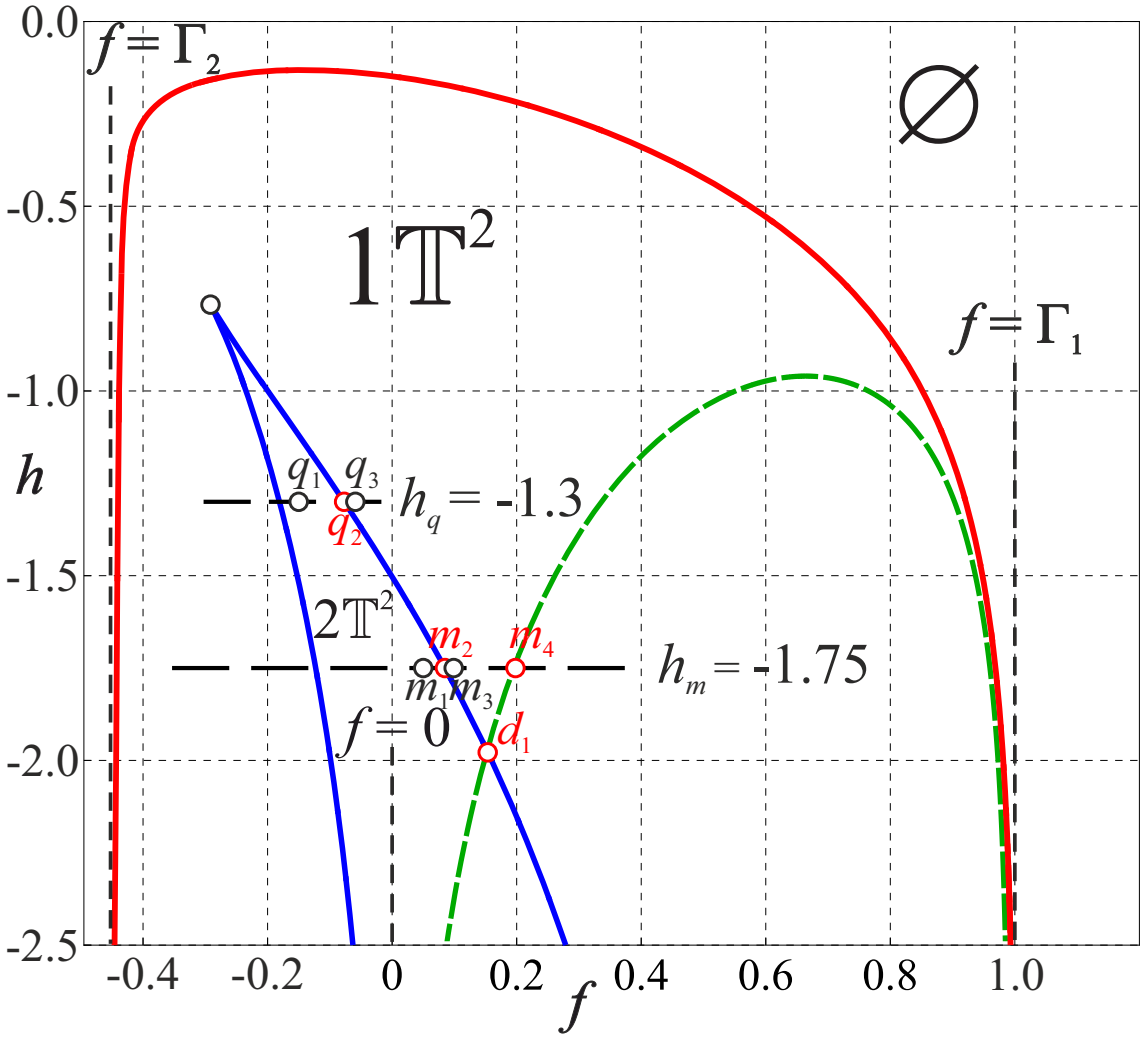


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0.45$, $c = 1.5$, $\varepsilon = 3$.

В случае $\theta_1 = \theta_2$

$$\gamma_2 : \begin{cases} h_2(r_1, r_2) = h_1(r_1, -r_2), \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \end{cases} \tag{42}$$

Системы (41) и (42) вместе с уравнениями (39), (40) неявным образом определяют бифуркационную диаграмму на плоскости $\mathbb{R}^2(f, h)$. Для визуализации диаграммы при помощи *Wolfram Mathematica* был создан виджет, полный код которого находится в приложении BifurcationDiagramBoseEinstein.nb. На Рис. 8 показана бифуркационная диаграмма системы двух вихрей с противоположными по знаку интенсивностями для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0.45$, $c = 1.5$, $\varepsilon = 3$. Здесь приведены следующие значения первых интегралов: $h_m = -1.75$, $h_q = -1.3$, $m_1 = 0.05$, $m_2 = 0.0847786118$ (точка $m_2 \in \gamma_2$), $m_3 = 0.09$, $m_4 = 0.198$, $d_1 = (0.1537691986, -1.9791878639)$ (точка $d_1 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$), $q_1 = -0.15$, $q_2 = -0.07707$, $q_3 = -0.075$. Данная диаграмма схожа с результатами, полученными в работе [25].

В нашем случае бифуркационное множество определяется как двухпараметрическое семейство. На Рис. 9 показан новый тип бифуркационной диаграммы из этого семейства, который не наблюдался ни в одной из работ [23], [24], [25]. Такая диаграмма содержит две «петли» с точками возврата, причём одна из петель имеет только одну вертикальную асимптоту. На рисунке также изображена разделяющая кривая γ_3, отвечающая за изменение проекции торов в прообразе интегрального отображения без изменения их количества. Уравнение для γ_3 можно представить в явном виде:

$$\gamma_3 : \; h = \frac{1}{2}\left\{\Gamma_1^2 \ln\left(1 - \frac{f}{|\Gamma_1|}\right) - \Gamma_1\Gamma_2(c+\varepsilon)\ln\left(\frac{f}{|\Gamma_1|}\right)\right\}, \; 0 < f < |\Gamma_1|\,.$$

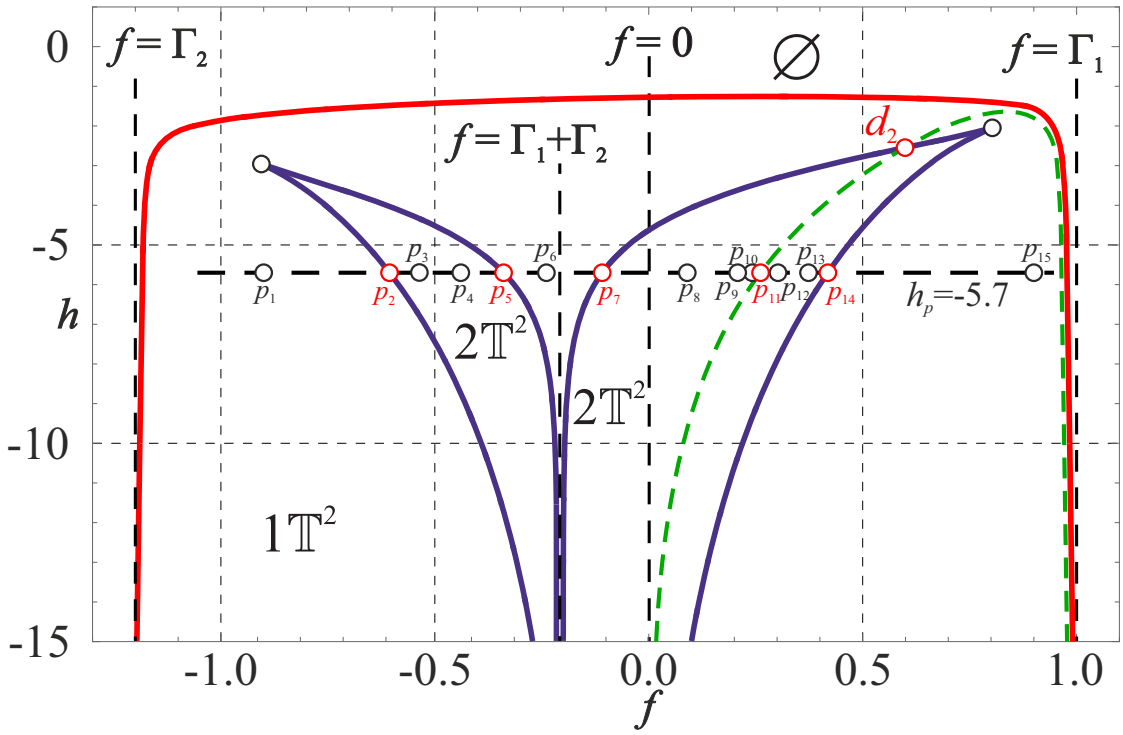


Рис. 9. Новая бифуркационная диаграмма для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -1.2$, $c = 0.09$, $\varepsilon = 7$.

Значения второго интеграла $f = p_k$, $k = 1, \ldots, 15$ **вдоль линии** $h = h_p = -5.7$ **представлены в Табл. 4, где точки** $p_2, p_5, p_7, p_{14} \in \gamma_2$, **точка** $d_2 = (0.6260532, -2.4840538628) \in \gamma_2 \cap \gamma_3$, **точка** $p_{11} \in (h = h_p) \cap \gamma_3$.

Таблица 4. Значения второго интеграла $f = p_k$.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
-0.9	-0.591655	-0.59	-0.425	-0.324902

p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
-0.225	-0.108766	0.09	0.2685	0.25

p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
0.271816	0.35	0.415	0.418417	0.9

2.3. Сведение обобщённой задачи двух точечных вихрей к гамильтоновой системе с одной степенью свободы

Для случая двух одинаковых вихрей и двух вихрей с интенсивностями одного знака понижение числа степеней свободы уже было предъявлено в работах [25] и [24] соответственно. Далее будет рассмотрено явное сведение системы (33) с гамильтонианом (34) к гамильтоновой системе с одной степенью свободы для вихрей с произвольными интенсивностями.

Для понижения числа степеней свободы перейдём от фазовых переменных (x_k, y_k) к новым переменным (u, v, α) (аналогичная замена (25) была сделана в четвёртом параграфе первой главы):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}}[u\cos(\alpha) - v\sin(\alpha)],\\
y_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}}[u\sin(\alpha) + v\cos(\alpha)],\\
x_2 &= \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2)},\\
y_2 &= \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2)}.
\end{aligned}
$$

Выбор такой замены продиктован наличием интеграла углового момента завихренности (35), инвариантного относительно группы вращений $SO(2)$. В результате замены переменные (u, v) приобретают значение координат одного из вихрей в координатной системе, которая связана со вторым вихрем, вращающимся вокруг центра завихренности. Существование однопараметрической группы симметрии позволяет совершить сведение к системе

с одной степенью свободы аналогично механическим системам с симметрией. Обратная подстановка

$$U = \frac{\sqrt{|\Gamma_1|}(x_1x_2 + y_1y_2)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \quad V = \frac{\sqrt{|\Gamma_1|}(x_2y_1 - x_1y_2)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

приводит к каноническим переменным относительно скобки Ли-Пуассона (36):

$$\{U, V\} = -\{V, U\} = \operatorname{sgn}\Gamma_1, \quad \{U, U\} = \{V, V\} = 0.$$

Как было сказано ранее, система остаётся гамильтоновой относительно переменных (u, v):

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v}\operatorname{sgn}\Gamma_1, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u}\operatorname{sgn}\Gamma_1 \tag{43}$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\Bigg\{ & \Gamma_1^2 \ln\left(1 - \frac{u^2+v^2}{|\Gamma_1|}\right) + \Gamma_2^2 \ln\Bigg(1 - \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)}{|\Gamma_2|}\times \\ & \times\left[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - (u^2+v^2)\right]\Bigg) - \Gamma_1\Gamma_2(c+\varepsilon)\ln\Bigg[\Bigg(\frac{\operatorname{sgn}\Gamma_1 u}{\sqrt{|\Gamma_1|}} - \\ & \frac{\operatorname{sgn}\Gamma_2\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\left[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - (u^2+v^2)\right]}}{\sqrt{|\Gamma_2|}}\Bigg)^2 + \frac{v^2}{|\Gamma_1|}\Bigg] + \\ & + \varepsilon\Gamma_1\Gamma_2\ln\Bigg[\Bigg(1 - \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)u}{\sqrt{|\Gamma_1||\Gamma_2|}}\times \\ & \times\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)\left[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - (u^2+v^2)\right]}\Bigg)^2 + \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1\Gamma_2)v^2}{|\Gamma_1||\Gamma_2|}\times \\ & \times\left[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - \left(u^2+v^2\right)\right]\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{44}$$

Угол поворота вращающейся системы координат $\alpha(t)$ удовлетво-

ряет дифференциальному уравнению

$$\dot{\alpha} = \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_2 - f + \operatorname{sgn}\Gamma_1\,(u^2+v^2)} + c\frac{\Gamma_1|\Gamma_2|\sqrt{|\Gamma_1|}}{\operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)}\frac{R_1(u,v)}{Q_1(u,v)} + \\ +\varepsilon\Gamma_1|\Gamma_2|\sqrt{|\Gamma_2|}\frac{|\Gamma_1| - u^2 - v^2}{\sqrt{\operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\,[f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - (u^2+v^2)]}}\frac{R_2(u,v)}{Q_2(u,v)},$$

где

$$R_1(u,v) = \Gamma_1\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right) - \Gamma_2 u^2,$$

$$Q_1(u,v) = \sqrt{|\Gamma_2|}u\sqrt{\operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2)}\times \\ \times\left[\Gamma_2\left(u^2+v^2\right) - \Gamma_1\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\right] + \\ +\sqrt{|\Gamma_1|}\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\left[\Gamma_1\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right) - \right. \\ \left. -\Gamma_2\left(u^2 - v^2\right)\right],$$

$$R_2(u,v) = \sqrt{|\Gamma_2|}\sqrt{\operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2)}\times \\ \times\left(|\Gamma_1| + u^2 + v^2\right) - \operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\sqrt{|\Gamma_1|}u\left[|\Gamma_2| + \operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\times\right. \\ \left.\times\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\right],$$

$$Q_2(u,v) = \operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)|\Gamma_2|\left[|\Gamma_1|\left(|\Gamma_1| + 4u^2\right) + \left(u^2+v^2\right)^2\right]\times \\ \times\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right) + |\Gamma_1|\left(u^2+v^2\right)\times \\ \times\left[\Gamma_2^2 + \left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)^2\right] - 2\,u\operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\sqrt{|\Gamma_1||\Gamma_2|}\times \\ \times\sqrt{\operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\,(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2)}\left(|\Gamma_1| + u^2 + v^2\right)\times \\ \times\left[|\Gamma_2| + \operatorname{sgn}\,(\Gamma_1\Gamma_2)\left(f\operatorname{sgn}\Gamma_1 - u^2 - v^2\right)\right].$$

Критические точки редуцированного гамильтониана (44) определяют стационарные точки системы (43), соответствующие относительным положениям вихрей. При фиксированном значе-

нии момента завихренности f, регулярные уровни редуцированного гамильтониана компактны, а движения происходят по замкнутым кривым. Критические значения приведённого гамильтониана определяют бифуркационное множество (39)–(42).

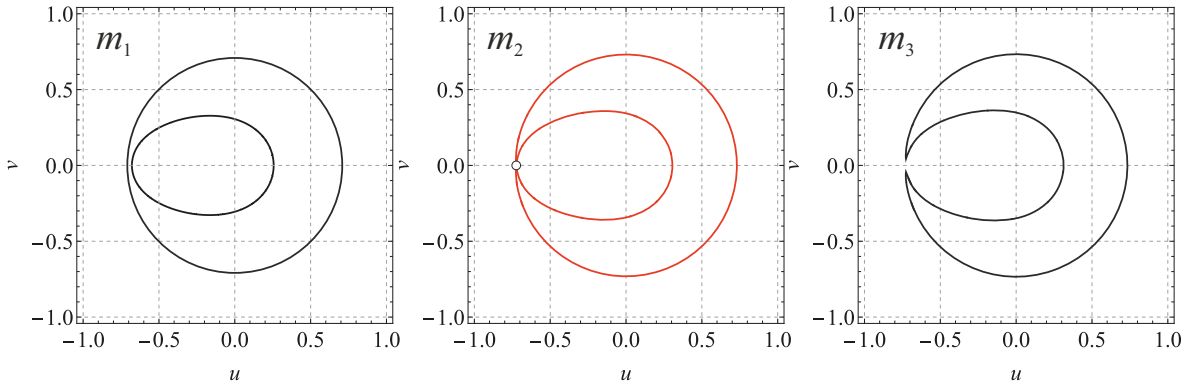


Рис. 10. Линии уровня редуцированного гамильтониана H для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0.45$, $c = 1.5$, $\varepsilon = 3$, соответствующих точкам $m_1 = 0.05$, $m_2 = 0.0847786118$ (точка $m_2 \in \gamma_2$), $m_3 = 0.09$ и значению $h_m = -1.75$.

На Рис. 10 представлены линии уровня редуцированного гамильтониана H (44) для значений параметра второго интеграла $f = m_1, m_2, m_3$, соответствующих движению вдоль линии $h = h_m = -1.75$ бифуркационной диаграммы на Рис. 8. Рис. 11 соответствует бифуркационной диаграмме на Рис. 9 и фиксированному значению $h = h_p = -5.7$. Изображения линий уровня созданы при помощи HamiltonianLinesBoseEinstein.nb.

На Рис. 12 изображены типичные линии уровня гамильтониана H (44) для случая пересечения одной из ветвей бифуркационной кривой γ_2 и разделяющей кривой γ_3. Здесь точка $d_1 = (0.1537691986, -1.9791878639) \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ соответствует бифуркационной диаграмме на Рис. 8, а $d_2 = (0.626053, -2.4840538628) \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ — диаграмме на Рис. 9 с соответствующими параметрами. Визуализация самих вихревых траекторий рассматривается далее, в третьей главе данной работы.

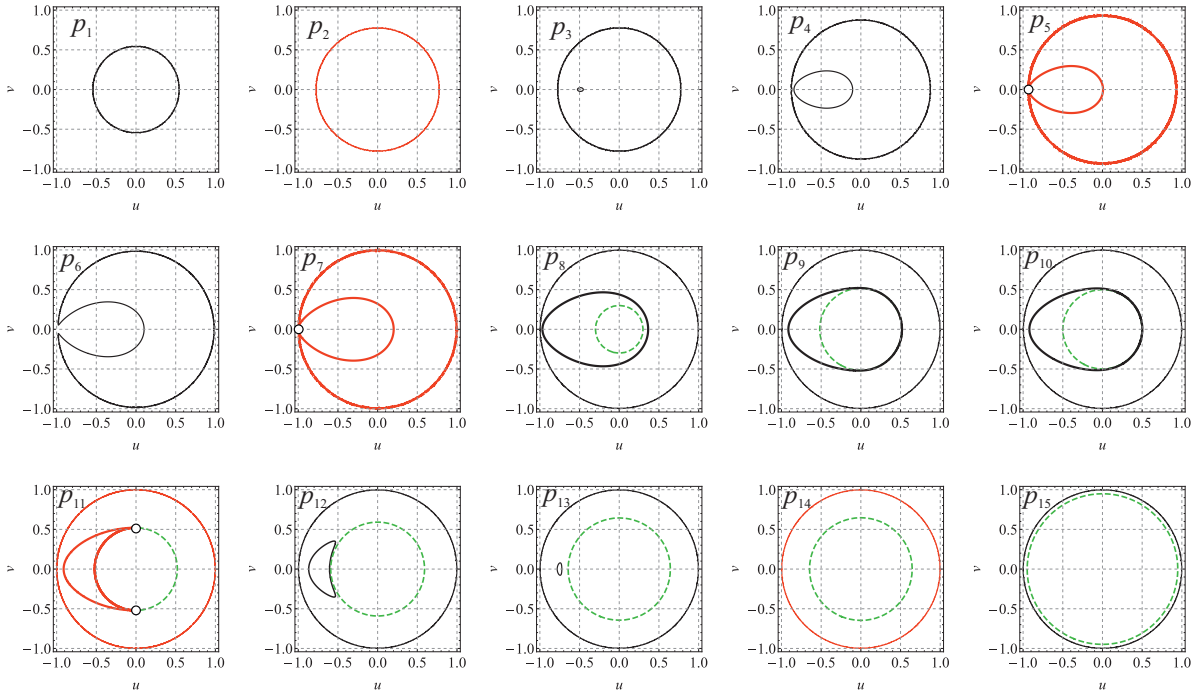


Рис. 11. Линии уровня редуцированного гамильтониана для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -1.2$, $c = 0.09$, $\varepsilon = 7$, соответствующие точкам (h_p, f_k) на **Рис. 9**, где $h_p = -5.7$, $f_k = p_k$, $k = 1, \ldots, 15$ **(Табл. 4).**

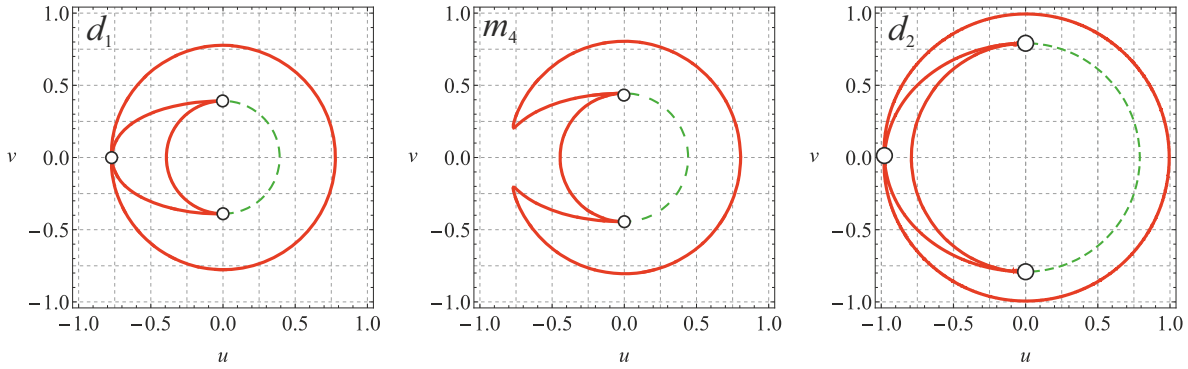


Рис. 12. Линии уровня редуцированного гамильтониана H, соответствующие точкам $d_1 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$, $m_4 \in (h = h_m) \cap \gamma_3$ и $d_2 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ на **Рис. 8** и **Рис. 9** соответственно.

3. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ

3.1. Использованный инструментарий

По результатам выполненной работы было создано несколько исполняемых программных файлов. Так, для создания бифуркационных диаграмм ограниченной задачи трёх магнитных вихрей был создан ноутбук *Wolfram Mathematica* BifurcationDiagramMagnetic.nb, содержащий виджет, который создаёт изображение бифуркационной диаграммы Σ для заданных параметров Γ_1, Γ_2, λ_1, λ_2. Панель управления виджета позволяет вносить изменения в параметры системы и наблюдать за соответствующими изменениями на бифуркационной диаграмме. Кроме того, она позволяет управлять настройками самого графика.

Аналогичный ноутбук с виджетом создан и для бифуркационной диаграммы обобщённой задачи двух вихревых нитей в конденсате Бозе-Эйнштейна и идеальной жидкости BifurcationDiagramBoseEinstein.nb. Стоит отметить, что методы, применённые в этих ноутбуках, несколько отличаются в силу повышенной сложности второй задачи.

Визуализация линий уровня гамильтониана, трёхмерных торических обмоток и некоторых вихревых траекторий также выполнена в *Wolfram Mathematica*. Полученные векторные изображения, включая результаты выполнения BifurcationDiagramMagnetic.nb и BifurcationDiagramBoseEinstein.nb, доводились до финального вида при помощи *CorelDRAW*.

Для анимированной визуализации динамики трёх точечных

вихрей был использован язык программирования *Python 3*. В качестве интерактивной вычислительной среды был выбран *Jupyter Notebook*. В Приложении находятся два исполняемых файла формата .ipynb: при выполнении первого (ThreeVortices.ipynb) для определённой конфигурации трёх точечных вихрей создаётся изображение и анимация, реализованная в форматах MP4, GIF, а так же в виде *JavaScript*-виджета с кнопками для управления содержимым, который встроен в ноутбук; при выполнении второго (CompareTwoConfigurations.ipynb) генерируется всё то же самое, только для двух конфигураций системы трёх точечных вихрей, выведенных на одно изображение, что позволяет визуально сравнивать влияние на систему вносимых изменений. Так, например, удобно наблюдать за воздействием полярностей λ на траектории магнитных вихрей в сравнении с траекториями гидродинамических вихрей в идеальной жидкости. Для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (6) и (11) использована библиотека *SciPy*, для визуализации вихревых траекторий — библиотека *Matplotlib*.

3.2. Моделирование динамики трёх магнитных вихрей

Написанные на языке *Python 3* средства визуализации позволили заметить существенную разницу между траекториями трёх точечных вихрей в гидродинамике и траекториями, возникающими только в случае магнитных вихрей.

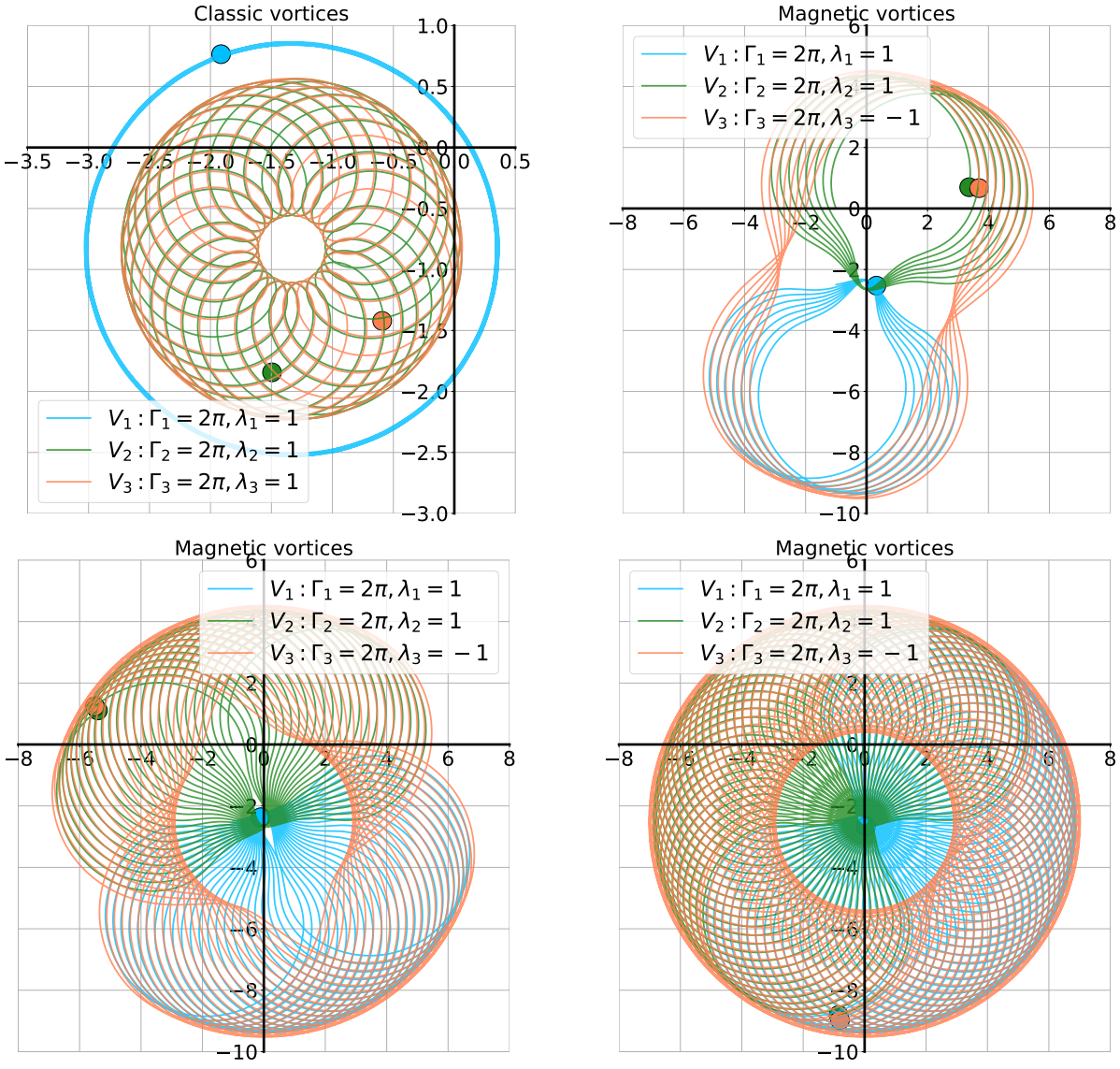


Рис. 13. Сравнение классической и магнитной конфигурации. Траектории магнитных вихрей с увеличением времени.

На Рис. 13 рассматривается система с завихренностями

$\Gamma_1 = 2\pi$, $\Gamma_2 = 2\pi$, $\Gamma_3 = 2\pi$ и начальными координатами $(x_1^0, y_1^0) = (-1, -2.5)$, $(x_2^0, y_2^0) = (-1, 0)$, $(x_3^0, y_3^0) = (-2, 0)$. Первое изображение сделано для гидродинамического случая ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$), остальные — для магнитного с полярностями $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$. Нетрудно заметить, что изменение полярности одного вихря (в данном случае $\lambda_3 = -1$) приводит к существенным изменениям траекторий всей системы.

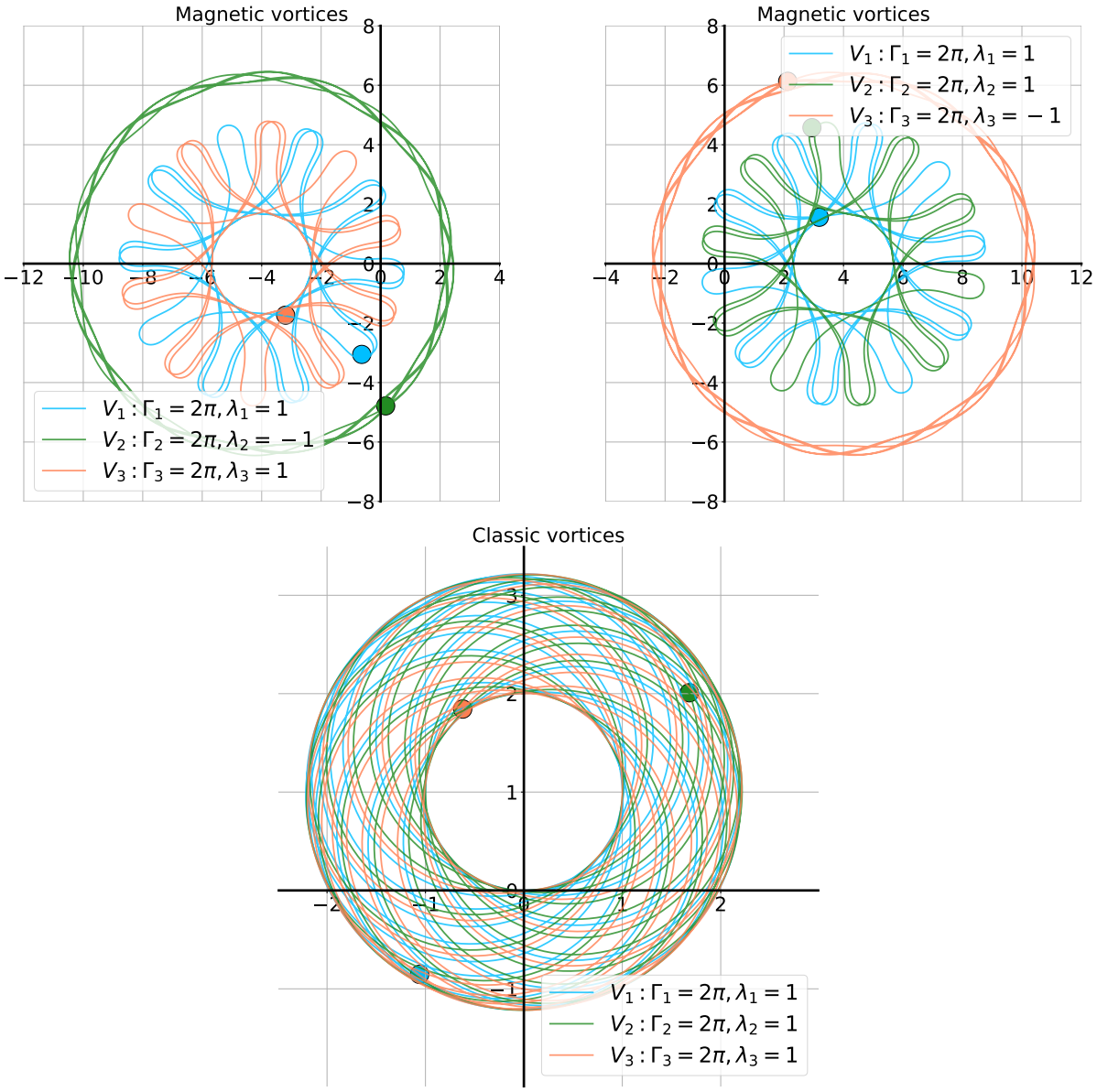


Рис. 14. Траектории магнитных вихрей для параметров $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = -1$ соответственно. Траектории трёх вихрей в идеальной жидкости.

Рассмотрим ещё несколько примеров. Так, для начальных координат $(x_1^0, y_1^0) = (0, 0)$, $(x_2^0, y_2^0) = (2, 1.5)$, $(x_3^0, y_3^0) = (-2, 1.5)$ существуют две конфигурации вихрей со связанными траекториями, получающиеся изменением одной из полярностей на отрицательную. На Рис. 14 первое изображение соответствует $\lambda_2 = -1$, второе соответствует $\lambda_3 = -1$, третье — случаю трёх вихрей в идеальной жидкости ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$).

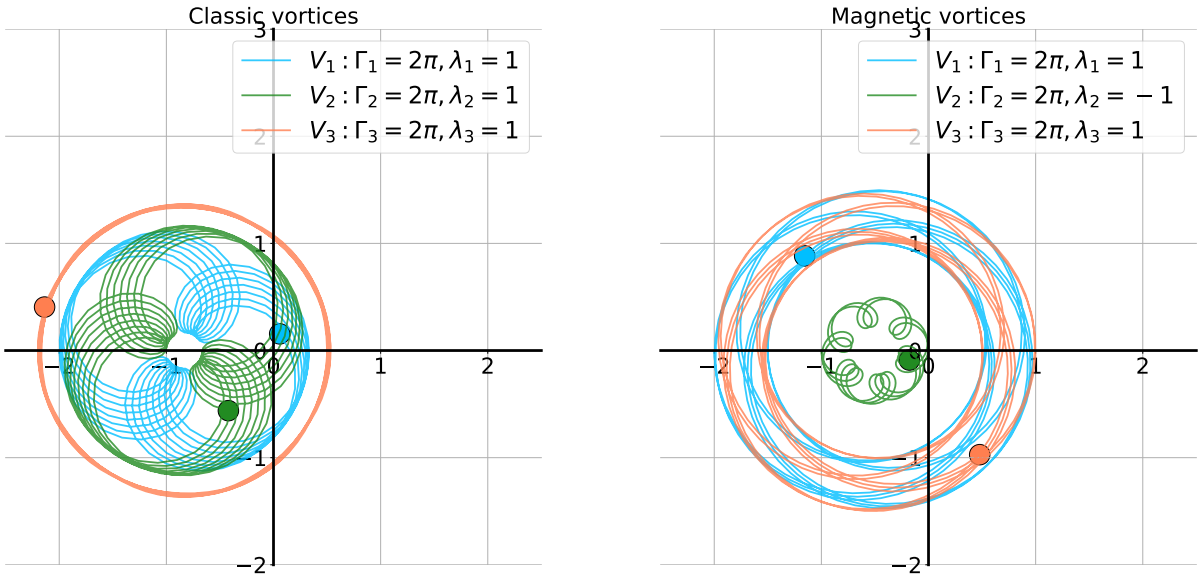


Рис. 15. Сравнение траекторий классических и магнитных вихрей.

Ещё одним интересным случаем является конфигурация с параметрами $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 2\pi$ и начальными координатами $(x_1^0, y_1^0) = (-2, 0)$, $(x_2^0, y_2^0) = (-1, 0)$, $(x_3^0, y_3^0) = (0.5, 0)$, где $\lambda_2 = -1$ для магнитного случая (Рис. 15). Связанные движения имеют место и при отрицательных Γ_α (Рис. 16).

Все эти результаты вызвали первоначальный интерес к интегрируемым системам магнитных вихрей в ферромагнетиках и послужили мотивацией для дальнейшего топологического анализа, изложенного в Главе 1.

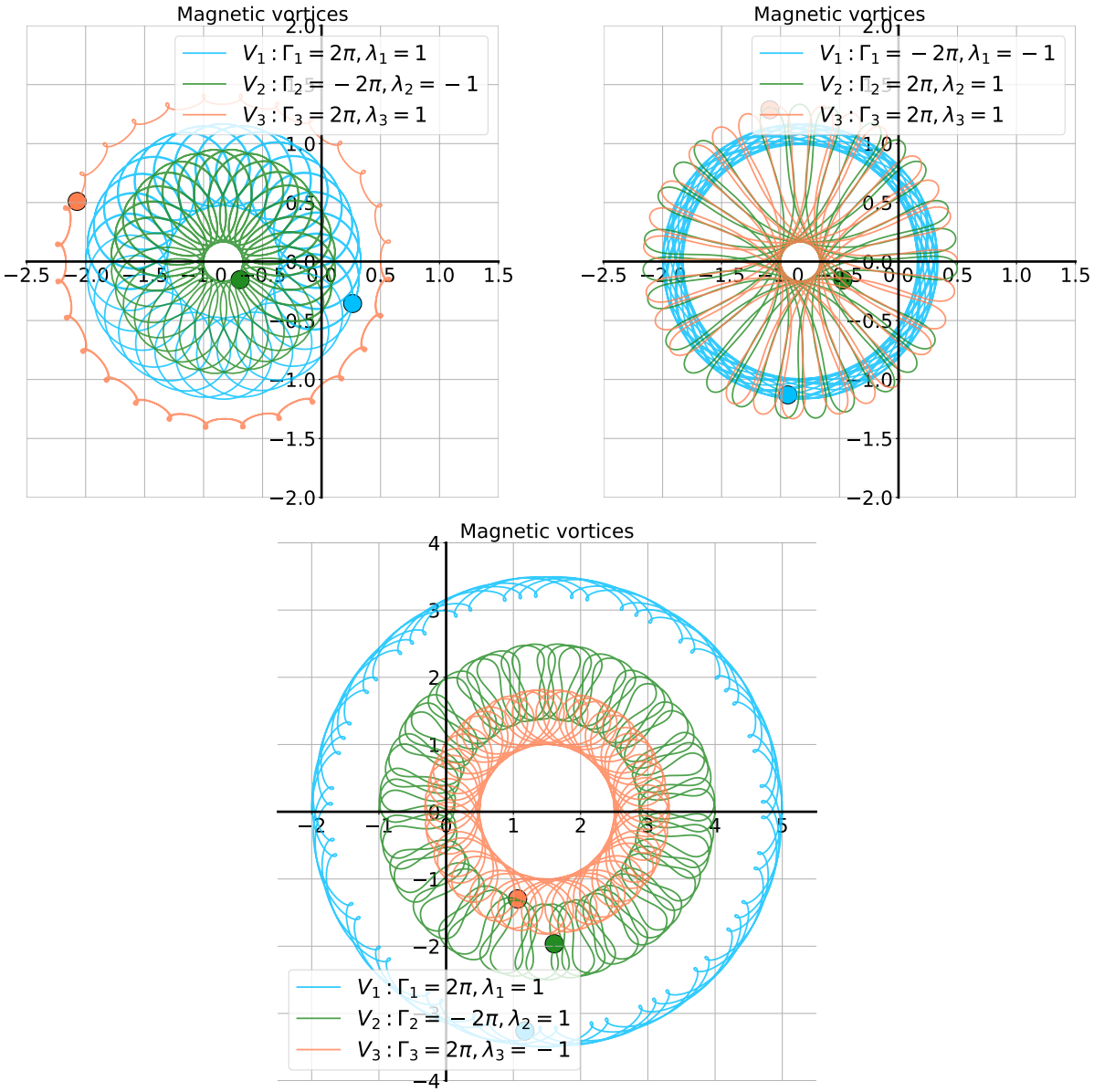


Рис. 16. Конфигурации точечных магнитных вихрей с начальными условиями $(x_1^0, y_1^0) = (-2, 0)$, $(x_2^0, y_2^0) = (-1, 0)$, $(x_3^0, y_3^0) = (0.5, 0)$ для разных по знаку Γ_α и λ_α.

3.3. Визуализация вихревых траекторий в ограниченной задаче трёх магнитных вихрей

В данном параграфе продемонстрированы некоторые результаты визуализации вихревых траекторий для ограниченной задачи трёх магнитных вихрей, топологический анализ которой подробно рассмотрен в Главе 1. Опираясь на бифуркационные диаграммы Рис. 1, Рис. 2 и Рис. 3 покажем, как рассмотренные ранее бифуркации влияют на вихревые траектории. Для визуализации использовались файлы MagneticRestrictedVortices.ipynb и CompareMagneticRestrictedVortices.ipynb, для поиска начальных координат вихрей — MagneticInitials.nb.

На Рис. 17 и Рис. 18 изображены траектории для системы с параметрами $\Gamma_1 = -18.849556$, $\Gamma_2 = 12.566371$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Данной системе соответствует бифуркационная диаграмма Рис. 1. Будем двигаться вдоль фиксированного значения гамильтониана $h = 100$, меняя значения f, слева направо, проходя через бифуркационную кривую. Таким образом, мы будем наблюдать за изменениями траекторий, в данном случае, происходящими во время бифуркации $2\mathbb{T}^2 \to 1\mathbb{T}^2$.

До пересечения бифуркационной кривой мы имеем два решения, которые соответствуют двум торам Лиувилля. Предпоследнее изображение на Рис. 18 соответствует точке $(-57.4786501, 100)$, которая попадает на бифуркационную кривую. Последний рисунок соответствует точке $(-57.4, 100)$ на бифуркационной диаграмме Рис. 1 и попадает в область $1\mathbb{T}^2$.

При помощи приложения MagneticRestrictedTori.nb мы можем создать проекцию вихревых траекторий на трёхмерное пространство, которая помогает лучше представить себе абсолютные дви-

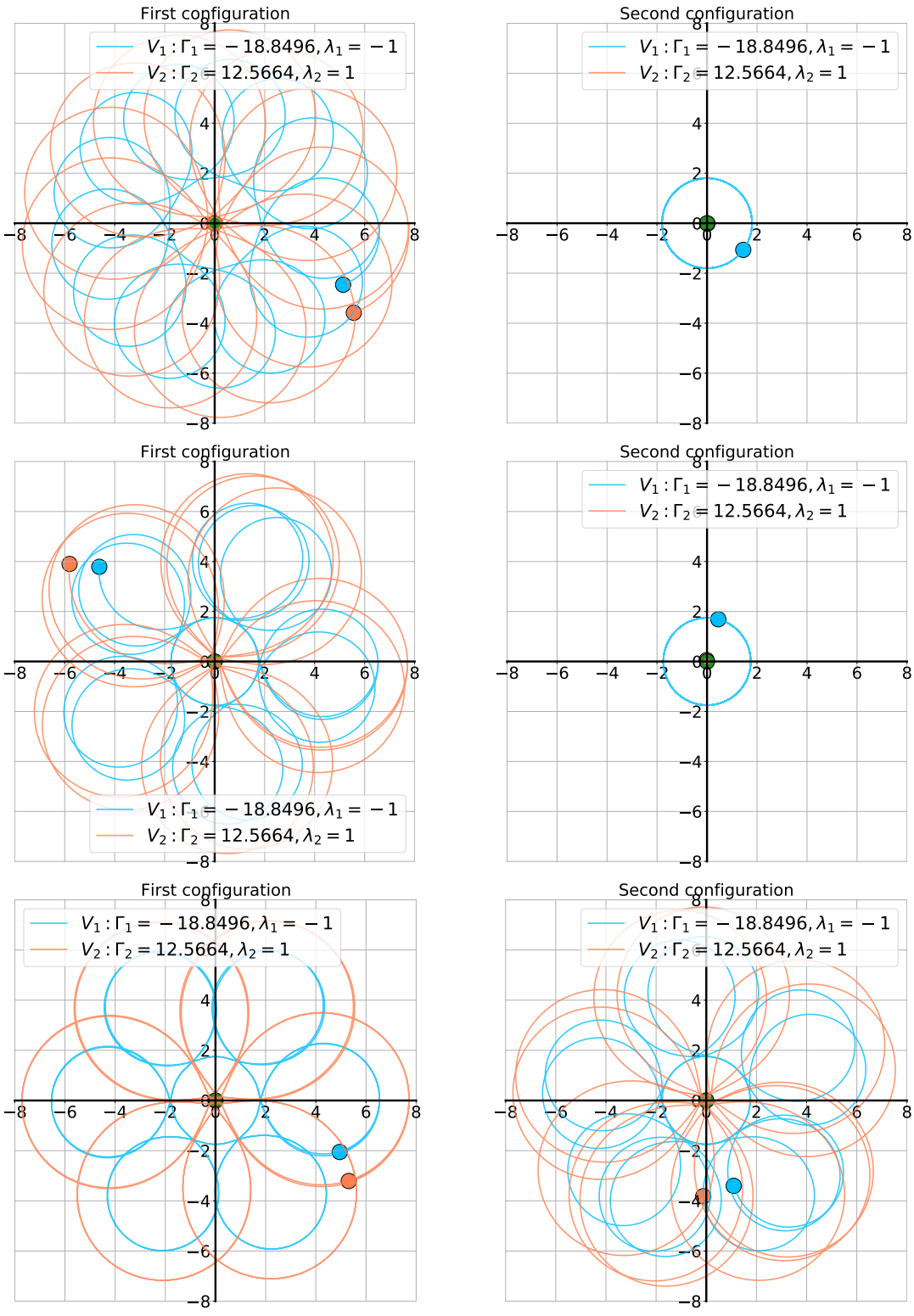


Рис. 17. Вихревые траектории для значения интеграла энергии $h = 100$ и значений интеграла углового момента завихренности $f_1 = -61$, $f_2 = -57.479$, $f_3 = -57.4786501$.

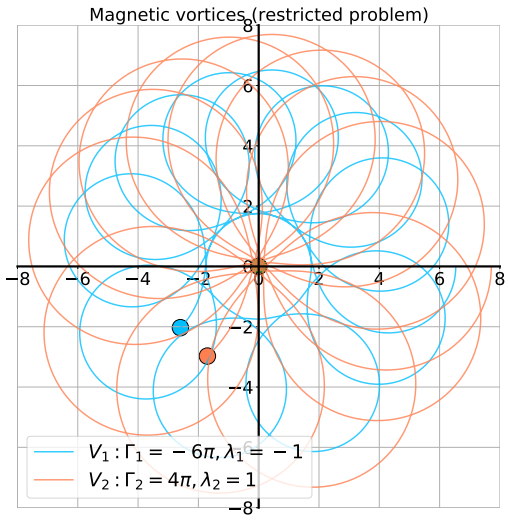


Рис. 18. Вихревые траектории для значений интегралов $h = 100$ и $f_4 = -57.4$.

жения в ограниченной задаче трёх вихрей. Пример такой проекции в виде обмотки тора изображён на Рис. 19.

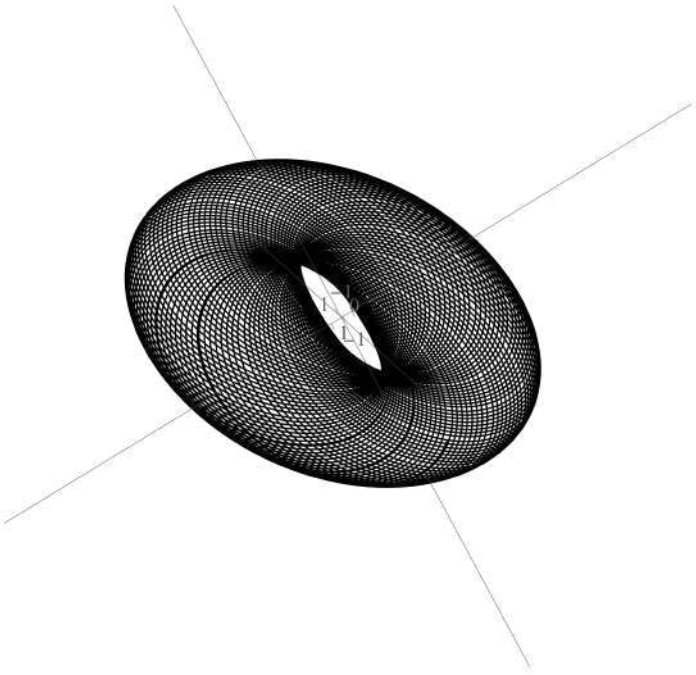


Рис. 19. Абсолютные движения магнитных вихрей в виде обмотки тора.

3.4. Визуализация обобщённого случая движения пары вихрей в идеальной жидкости и конденсате Бозе-Эйнштейна

Средствами *Wolfram Mathematica 12* (см. BoseEinsteinTrajectories) были созданы изображения для вихревых траекторий в обобщённой задаче вихревой динамики, включающей в себя модель двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, помещённом в гармоническую ловушку, и модель двух точечных вихрей, помещённых в идеальную жидкость, ограниченную круговой областью. Данная модель подробно рассмотрена во второй главе данной работы.

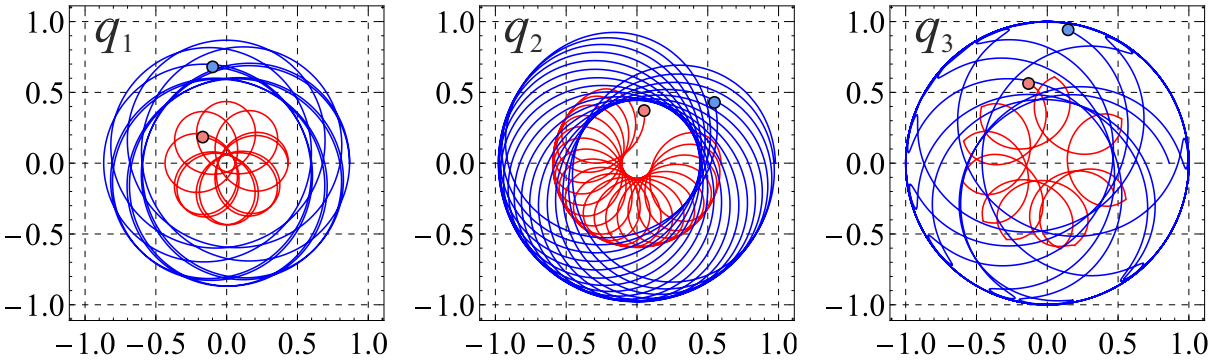


Рис. 20. Траектории вихрей для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0.45$, $c = 1.5$, $\varepsilon = 3$, соответствующие точкам $q_1 = (-0.15, -1.3)$, $q_2 = (-0.07707, -1.3)$ и $q_3 = (-0.075, -1.3)$ бифуркационной диаграммы Рис. 8.

Визуализация вихревых траекторий на плоскости позволяет лучше представить динамику вихрей и пронаблюдать, какие изменения происходят при переходе через бифуркационные кривые вдоль фиксированного значения одного из интегралов. Так на Рис. 20 показаны различные типы траекторий вихрей на плоскости (x, y), которые соответствуют точкам $q_1 = (-0.15, -1.3)$, $q_2 = (-0.07707, -1.3)$ и $q_3 = (-0.075, -1.3)$ бифуркационной диаграммы на Рис. 8 вдоль линии $h_q = -1.3$. На рисунке видно, что помимо

изменения числа торов Лиувилля, заметно меняется сам характер траекторий.

Также на языке *Python* написано два исполняемых файла (BoseEinsteinVortices.ipynb и CompareBoseEinsteinVortices.ipynb), которые помимо статического изображение (см. Рис. 21) создают анимированные изображения вихревых траекторий в различных форматах. Для нахождения начальных координат вихрей использовалось приложение BoseEinsteinInitials.nb.

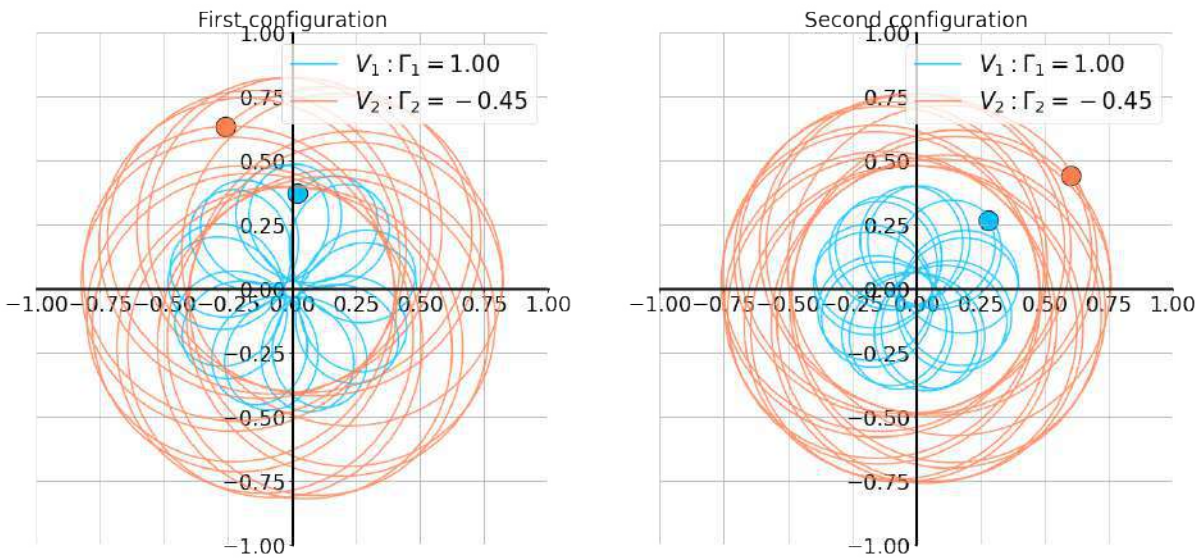


Рис. 21. Траектории вихрей для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0.45$, $c = 1.5$, $\varepsilon = 3$.

Следующий тип визуализации помогает лучше представить содержание теоремы Лиувилля-Арнольда, согласно которой в нашей системе, благодаря наличию двух инволютивных интегралов, траектории лежат на поверхности двумерных инвариантных торов Лиувилля, а движение является квазипериодическим. Мы можем изобразить проекцию торов на трёхмерное пространство, положив по осям три из четырёх переменных: (x_1, y_1, x_2, y_2). Примеры абсолютного движения вихрей в виде однокомпонентной торической обмотки для значений констант первых интегралов $h_q = -1.3$, $f = q_1 = -0.15$ и $h_p = -5.7$, $f = 0.283$ представлены

на Рис. 22 и созданы при помощи приложения BoseEinsteinTori.nb.

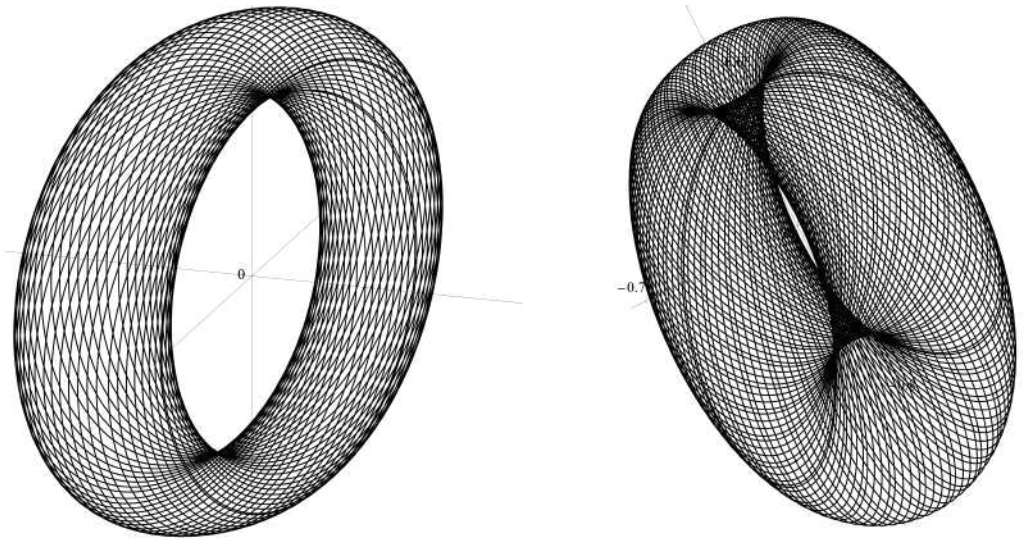


Рис. 22. Абсолютные движения вихрей в виде обмотки тора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная выпускная квалификационная работа была направлена на топологический анализ нескольких обобщённых динамических систем из области вихревой динамики. Первая система относится к модели точечных магнитных вихрей в ферромагнетиках, частным случаем которой является классическая модель из области гидродинамики, а именно, модель N вихревых нитей в безграничной идеальной жидкости. Вторая модель обобщает случай двух вихревых нитей в конденсате Бозе-Эйнштейна, помещённом в гармоническую ловушку, и случай двух вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью. Этим двум системам посвящены первая и вторая главы работы, соответственно.

В первой главе был проведён обзор задачи N гидродинамических вихрей в идеальной жидкости и задачи N магнитных вихрей в ферромагнетиках, также было показано, что вторая задача является более общим случаем по отношению к первой. Далее был проведён топологический анализ интегрируемой ограниченной задачи трёх магнитных вихрей, построены бифуркационные диаграммы как для случаев, которые встречаются в гидродинамической модели, так и для тех, которые относятся только к обобщающей. Было показано наличие некомпактных линий уровня гамильтониана, для которых траектории системы лежат на поверхности цилиндров. Также было показано сведение системы к системе с одной степенью свободы, которая сохраняет гамильтоновость. Для редуцированной системы были созданы изображения, позволяющие лучше понять бифуркационные диаграммы.

Во второй главе работы была найдена бифуркационная диаграмма отображения импульса для обобщённой системы, кото-

рая описывает как динамику двух вихрей в идеальной жидкости, помещённой внутри кругового цилиндра, так и в конденсате Бозе-Эйнштейна, заключённом в гармоническую ловушку. Стоит напомнить, что в случае двух вихрей одного знака, рассмотренном в [24], бифуркационная диаграмма вихрей в конденсате Бозе-Эйнштейна существенно отличается от диаграммы вихрей в идеальной жидкости. Здесь было обнаружено, что, с одной стороны, есть диаграммы, подобные построенным в [23], [24], [25], а с другой стороны, есть диаграммы, которые существенно отличаются от тех, что встречались ранее. Также было найдено аналитическое выражение для разделяющей кривой γ_3, не являющейся бифуркационной, но влияющей на проекцию торов в прообразе интегрального отображения. В последнем параграфе была дана явная редукция к гамильтоновой системе с одной степенью свободы для произвольных интенсивностей.

Третья глава полностью посвящена визуализации вихревых траекторий в задачах Главы 1 и Главы 2. Результатом работы стало создание целого ряда исполняемых файлов на языках *Python 3* и *Wolfram Mathematica 12*, полный код которых помещён в Приложения. Создание анимаций и трёхмерных проекций торов помогает лучше понять и наглядно представить особенности исследованных динамических систем.

Данная работа выполнена мною самостоятельно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] *Helmholtz H.* Über Integrale hydrodinamischen Gleichungen weiche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. rein. angew. Math. — 1858. — Vol. 55. — pp. 25-55. https://doi.org/10.1515/crll.1858.55.25

[2] *Kirchhoff G.R.* Vorlesungen über mathematische Physik: Bd. 1: Mechanik, Leipzig : Teubner, 1874. https://doi.org/10.1007/BF01696326

[3] *Gröbli W.* Speziele Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // Vierteljahrsch. d. Naturforsch. Geselsch. — 1877. — Vol. 22. — pp. 37-81. https://www.ngzh.ch/archiv/1877_22/22_2/22_11.pdf

[4] *Greenhill A.G.* Plane vortex motion // Quart. J. Pure Appl. Math. — 1877/78. — Vol. 15. — №58. — pp. 10-27. https://zbmath.org/09.0673.01

[5] *Горячев Д.Н.* О некоторых случаях движения прямолинейных вихрей // Учёные записки Моск. унив., отд. Физико-математич. — 1898. — №16. — С. 1-106. https://search.rsl.ru/ru/record/01003682311

[6] *Aref H., Rott N., Thomann H.* Gröbli's Solution Of The Three-Vortex Problem // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1992. — Vol. 24. — pp. 1-20. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.24.010192.000245

[7] *Borisov A.V., Lebedev V.G.* Dynamics of three vortices on a plane and a sphere — II. General compact case // Regular and

Chaotic Dynamics. — 1998. — Vol. 3. — №2. — pp. 99-114. https://doi.org/10.1070/RD1998v003n02ABEH000075

[8] *Borisov A.V., Pavlov A.E.* Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere — I // Regular and Chaotic Dynamics. — 1998. — Vol. 3. — №1. — pp. 28-38. https://doi.org/10.1070/RD1998v003n01ABEH000059

[9] *Newton P.K., Kidambi R.* Motion of three point vortices on a sphere // Physica D. — 1998. — Vol. 116. — №1-2. — pp. 143-175. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00236-4

[10] *Papanicolaou N., Zakrezewski W.J.* Dynamics of interacting magnetic vortices in a model Landau-Lifshitz equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1995. — Vol. 80. — №3. https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)00188-V

[11] *Malozemoff A.P., Slonczewski J.C.* Magnetic Domain Walls in Bubble Materials // New York : Academic Press. — 1979. https://doi.org/10.1016/C2013-0-06998-8

[12] *Huber D.L.* Dynamics of spin vortices in two-dimensional planar magnets // Physical Review B. — 1982. — Vol. 26. — №7. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.26.3758

[13] *Neudert A., McCord J., Schäfer R., Schultz L.* Subnanosecond vortex transformation in ferromagnetic film elements observed by stroboscopic wide-field Kerr microscopy // Journal of Applied Physics. — 2005. — Vol. 97. — №10. https://doi.org/10.1063/1.1850832

[14] *Waeyenberge B.V., Puzic A., Stoll H., Chou K.W., Tyliszczak T., Hertel R., Fähnle M., Brückl H., Rott K., Reiss G., Neudecker I., Weiss D., Back C.H., Schütz G.* Magnetic vortex core reversal by excitation with short bursts of an alternating

field // Nature. — 2006. — Vol. 444. — pp. 461–464. https://doi.org/10.1038/nature05240

[15] *Yamada K., Kasai S., Nakatani Y., Kobayashi K., Kohno H., Thiaville A., Ono T.* Electrical switching of the vortex core in a magnetic disk // Nature Materials. — 2007. — Vol. 6. — pp. 270-273. https://doi.org/10.1038/nmat1867

[16] *Aref H.* Motion of three vortices // The Physics of Fluids. — 1979. — Vol. 22. — №3. https://doi.org/10.1063/1.862605

[17] *Synge J.L.* On The Motion of Three Vortices // Canadian Journal of Mathematics. — 1949. — Vol. 1. — №3. https://doi.org/10.4153/CJM-1949-022-2

[18] *Torres P.J., Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., Carretero-Gonzalez R., Schmelcher P., Hall D.S.* Dynamics of vortex dipoles in confined Bose–Einstein condensates // Phys. Lett. A. — 2011. — Vol. 375. — pp. 3044-3050. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.06.061

[19] *Fetter A.L.* Rotating trapped Bose-Einstein condensates // Rev. Mod. Phys. — 2009. — Vol. 81. — №2. — pp. 647–691. https://doi.org/10.1134/S1054660X08010015

[20] *Ryabov P.E.* Bifurcations of Liouville Tori in a System of Two Vortices of Positive Intensity in a Bose-Einstein Condensate // Doklady Mathematics. — 2019. — Vol. 99. — №2. — pp. 225-229. https://doi.org/10.1134/S1064562419020364

[21] *Sokolov S.V., Ryabov P.E.* Bifurcation Diagram of the Two Vortices in a Bose-Einstein Condensate with Intensities of the Same Signs // Doklady Mathematics. — 2018. — Vol. 97. — №3. — pp. 286-290. https://doi.org/10.1134/S1064562418030249

[22] *Ryabov P.E.* Bifurcation of Four Liouville Tori in One Generalized Integrable Model of Vortex Dynamics // Doklady Physics. — 2019. — Vol. 64. — №8. — pp. 325-329. https://doi.org/10.1134/S1028335819080020

[23] *Sokolov S.V., Ryabov P.E.* Bifurcation Analysis of the Dynamics of Two Vortices in a Bose–Einstein Condensate. The Case of Intensities of Opposite Signs // Regular and Chaotic Dynamics. — 2017. — Vol. 22. — №8. — pp. 979–998. https://doi.org/10.1134/S1560354717080068

[24] *Ryabov P.E., Shadrin A.A.* Bifurcation Diagram of One Generalized Integrable Model of Vortex Dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. — 2019. — Vol. 24. — №4. — pp. 418–431. https://doi.org/10.1134/S156035471904004X

[25] *Ryabov P.E., Sokolov S.V.* Phase Topology of Two Vortices of Identical Intensities in a Bose-Einstein Condensate // Rus. J. Nonlin. Dyn. — 2019. — Vol. 15. — №1. — pp. 59–66. https://doi.org/10.20537/nd190106

[26] *Komineas S., Papanicolaou N.* Gröbli solution for three magnetic vortices // Journal of Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 51. — №4. https://doi.org/10.1063/1.3393506

[27] *Papanicolaou N., Tomaras T.N.* Dynamics of magnetic vortices // Nuclear Physics B. — 1991. — Vol. 360. — №2–3. https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90410-Y

[28] *Sreethin Sreedharan K., Priyanka Shukla.* Dynamical aspects of a restricted three-vortex problem // arXiv.org, Physics, Classical Physics. — 2019. https://arxiv.org/abs/1910.12646

[29] *Sreethin Sreedharan K., Priyanka Shukla.* On the dynamics of a free vortex pair in the presence of a fixed vortex // arXiv.org, Physics, Fluid Dynamics. — 2020. https://arxiv.org/abs/2003.00445

[30] *Neufeld Z., Tél T.* The Vortex Dynamics Analogue of the Restricted Three-Body Problem: Advection in the Field of Three Identical Point Vortices // Journal of Physics A General Physics. — 1997. — Vol. 30. — №6. https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/6/043

[31] *Andrade J., Boatto S., Vidal C.* Dynamics of restricted three and four vortices problem on the plane // Journal of Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 57. — №4. https://doi.org/10.1063/1.4943901

[32] *Kovalev A.S., Komineas S., Mertens F.G.* Scattering of vortex pairs in 2D easy-plane ferromagnets // Eur. Phys. J. B. — 2002. — Vol. 25. — pp. 89-100. https://doi.org/10.1140/e10051-002-0010-1

[33] *Komineas S., Papanicolaou N.* Dynamics of vortex-antivortex pairs in ferromagnets // arXiv.org, Condensed Matter, Mesoscale and Nanoscale Physics. — 2007. https://arxiv.org/abs/0712.3684

[34] *Komineas S.* Rotating Vortex Dipoles in Ferromagnets // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99. — №11. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.117202

[35] *Ryzhov E.A., Koshel. K.V.* Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex // Europhysics Letters. — 2013. — Vol. 102. — №4. http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/102/44004

[36] *Koshel K.V., Reinaud J.N., Riccardi G., Ryzhov E.A.* Entrapping of a vortex pair interacting with a fixed point vortex revisited. I. Point vortices // Physics of Fluids. — 2018. — Vol. 30. — №9. https://doi.org/10.1063/1.5040884

[37] *Reinaud J.N., Koshel K.V., Ryzhov E.A.* Entrapping of a vortex pair interacting with a fixed point vortex revisited. II. Finite size vortices and the effect of deformation // Physics of Fluids. — 2018. — Vol. 30. — №9. https://doi.org/10.1063/1.5052202

[38] *Sutyrin G.G., Perrot X., Carton X.* Integrable motion of a vortex dipole in an axisymmetric flow // Physics Letters A. — 2008. — Vol. 372. — №33. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.06.038

[39] *Gavrilov L.* Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Hėnon-Heiles system // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1989. — Vol. 34. — №1-2. — pp. 223-239. https://doi.org/10.1016/0167-2789(89)90236-4

[40] *Koukouloyannis V., Voyatzis G., Kevrekidis P.G.* Dynamics of three noncorotating vortices in Bose–Einstein condensates // Phys. Rev. E. — 2014. — Vol. 89. — №4. — pp. 042905-1-14. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.042905

[41] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Математические методы динамики вихревых структур. М.-Ижевск : ИКИ, 2005. — С. 368. http://window.edu.ru/resource/935/67935/files/ics16.pdf

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приведено содержание исполняемых файлов *Wolfram Mathematica* и *Jpyter Notebook*.

BifurcationDiagramMagnetic.nb

```
In(1):= h1[G1_,G2_,l1_,l2_,r1_,r2_]:=
        G1/l1 Log[r1]+G2/l2 Log[r2]+G1 G2/(l1 l2) Log[Sqrt[r1^2+r2^2+2 r1 r2]];
        h2[G1_,G2_,l1_,l2_,r1_,r2_]:=
        G1/l1 Log[r1]+G2/l2 Log[r2]+G1 G2/(l1 l2) Log[Sqrt[r1^2+r2^2-2 r1 r2]];
        ffunc[G1_,G2_,r1_,r2_]:=G1 r1^2+G2 r2^2;
        C1[G1_,G2_,l1_,l2_]:=
        (l1 r1^2-l2 r2^2)(r1+r2)+r1 r2(G1 r1-G2 r2);
        C2[G1_,G2_,l1_,l2_]:=
        (l1 r1^2-l2 r2^2)(r1-r2)-r1 r2(G1 r1+G2 r2);

In(2):= Sol1[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(
        solutions=Solve[{C1[G1,G2,l1,l2]==0,r1→0, r2→0},r1, Reals];
        result={};
        For[i=1,i≤ Length[solutions],i++,
        result=Append[result,Normal@(r1/.solutions[[i]])]
        ];
        result
        );

In(3):= Sol2[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(
        solutions=Solve[{C2[G1,G2,l1,l2]==0,r1→0, r2→0},r1, Reals];
        result={};
        For[i=1,i≤ Length[solutions],i++,
        result=Append[result,Normal@(r1/.solutions[[i]])]
        ];
        clresult={};
        For[i=1,i≤ Length[result],i++,
```

```
clresult=If[result[[i]]===r2,clresult,Append[clresult,result[[i]]]]
];
clresult
);
```

In(4):=

```
BifurcationDiagram[G1_,G2_,l1_,l2_,plotrange_,aspectratio_]:=(
ColorsArray={
Blue,Darker[Green],Red,Darker[Orange],Purple,Darker[Yellow]
};
plots={};
solution1=Sol1[G1,G2,l1,l2];
solution2=Sol2[G1,G2,l1,l2];
For[i=1,i≤ Length[solution1],i++,
plots=Append[plots,
ParametricPlot[
{
f_func[G1,G2,solution1[[i]],r2],
h_1[G1,G2,l1,l2,solution1[[i]],r2]
},
{r2,0.0001,10}, PlotRange→plotrange,
AspectRatio→ aspectratio,Frame→True,GridLines→Automatic,
GridLinesStyle→Directive[Dashed,Gray],Axes→False,
AxesLabel→None,ImageSize→72 9,PlotStyle→
Directive[Thickness[0.007],ColorsArray[[Length[plots]+1]]],
PlotTheme→"Detailed",FrameLabel→{f,h},
LabelStyle→Directive[20, Black,FontFamily→"Times"],
PlotLegends→None]];
];
For[i=1,i≤ Length[solution2],i++,
plots=Append[plots,
ParametricPlot[
{
f_func[G1,G2,solution2[[i]],r2],
h_2[G1,G2,l1,l2,solution2[[i]],r2]
},
{r2,0.0001,10}, PlotRange→plotrange,
AspectRatio→ aspectratio, Frame→True,GridLines→Automatic,
GridLinesStyle→Directive[Dashed,Gray],Axes→False,
```

```
AxesLabel→None,ImageSize→72 9,PlotStyle→
Directive[Thickness[0.007],ColorsArray[[Length[plots]+1]]],
PlotTheme→"Detailed",FrameLabel→{f,h},
LabelStyle→Directive[20, Black,FontFamily→"Times"],
PlotLegends→None]];
];
Show[plots]
);
```

In(5):=

```
Manipulate[
BifurcationDiagram
[
Γ1,Γ2,λ1,λ2,
{{AxisLeft,AxisRight},{AxisLower,AxisUpper}},
AspRatio
],
{{Γ1,1},-20,20,0.1},
{{Γ2,-1},-20,20,0.1},
{{λ1,1},{-1,1}},{{λ2,1},{-1,1}},
{{AxisLeft,-5,"Left border of the axis"},-100,10,1},
{{AxisRight,5,"Right border of the axis"},-10,100,1},
{{AxisLower,-5,"Lower bound of the axis"},-100,10,1},
{{AxisUpper,5,"Upper limit of the axis"},-10,100,1},
{{AspRatio,1,"Aspect ratio"},0,5,0.1}]
```

In(6):=

$$R\alpha=\Gamma_1(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2 u[t]^2;$$

$$Rv=(\Gamma_2 u[t]^2-\Gamma_1(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2))\times(\Gamma_1 u[t]^2-\Gamma_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$

$$Ru=(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)(\Gamma_1-\Gamma_2)^2-u[t]^2\Gamma_1\Gamma_2;$$

$$Q\alpha=\sqrt{\mathrm{Abs}[\Gamma_2]}u[t]\sqrt{\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times(\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2)-\Gamma_1(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2))}+\sqrt{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times(\Gamma_1(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2(u[t]^2-v[t]^2));$$

$$Qv=\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)(\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2)\times(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-2u[t]^2-v[t]^2)+(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times(f\,\mathrm{Abs}[\Gamma_1]-2u[t]^2\Gamma_2-v[t]^2\Gamma_1))-\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]u[t]\times(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)(\mathrm{Abs}[\Gamma_2](u[t]^2+v[t]^2)(\Gamma_1-\Gamma_2)+\Gamma_1\mathrm{Abs}[\Gamma_1]\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)+\Gamma_1\mathrm{Abs}[\Gamma_2](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-3u[t]^2-v[t]^2));$$

$$Qu=(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times(\mathrm{Sign}[\Gamma_1]((u[t]^2+v[t]^2)(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2)-2\Gamma_1\Gamma_2 v[t]^2)-f\Gamma_1(\Gamma_1-\Gamma_2))+u[t]\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times((f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)(\Gamma_1-2\Gamma_2)-\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2))};$$

$$dadt=-\frac{\Gamma_2\mathrm{Sign}[\Gamma_1]}{\lambda_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}-\frac{\sqrt{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}}{\mathrm{Sign}[\Gamma_1]}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{R\alpha}{Q\alpha};$$

$$dvdt=-\frac{u[t]\,\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}{\lambda_1(u[t]^2+v[t]^2)}+\frac{u[t]\,\Gamma_2\mathrm{Sign}[\Gamma_1]}{\lambda_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{Rv}{Qv};$$

$$dudt=\frac{v[t]\,\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}{\lambda_1(u[t]^2+v[t]^2)}-\frac{v[t]\,\Gamma_2\mathrm{Sign}[\Gamma_1]}{\lambda_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}+v[t]\,\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{Ru}{Qu};$$

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\mathrm{Log}\left[\frac{u[t]^2+v[t]^2}{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}\right]+\frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\mathrm{Abs}[\Gamma_2]}(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\right]+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\mathrm{Log}\left[\frac{u[t]^2+v[t]^2}{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}+\frac{\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\mathrm{Abs}[\Gamma_2]}(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\frac{2\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]u[t]\sqrt{\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}}{\sqrt{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]\mathrm{Abs}[\Gamma_2]}}\right]\right);$$

In(7):=

$$h_1[G1_,G2_,l1_,l2_,r1_,r2_]:=\frac{G1}{l1}\mathrm{Log}[r1]+\frac{G2}{l2}\mathrm{Log}[r2]+\frac{G1\,G2}{l1\,l2}\mathrm{Log}[\mathrm{Sqrt}[r1^2+r2^2+2\,r1\,r2]];$$

$$h_2[G1_,G2_,l1_,l2_,r1_,r2_]:=\frac{G1}{l1}\mathrm{Log}[r1]+\frac{G2}{l2}\mathrm{Log}[r2]+\frac{G1\,G2}{l1\,l2}\mathrm{Log}[\mathrm{Sqrt}[r1^2+r2^2-2\,r1\,r2]];$$

$$F[G1_,G2_,r1_,r2_]:=G1\,r1^2+G2\,r2^2;$$

```
C1[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(l1 r1^2-l2 r2^2)(r1+r2)+r1 r2(G1 r1-G2 r2);
C2[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(l1 r1^2-l2 r2^2)(r1-r2)-r1 r2(G1 r1+G2 r2);
Sol1[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(
solutions=Solve[{C1[G1,G2,l1,l2]==0,r1→0, r2→0},r1, Reals];
result={};
For[i=1,i≤ Length[solutions],i++,
result=Append[result,Normal@(r1/.solutions[[i]])]
];
result
);
Sol2[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(
solutions=Solve[{C2[G1,G2,l1,l2]==0,r1→0, r2→0},r1, Reals];
result={};
For[i=1,i≤ Length[solutions],i++,
result=Append[result,Normal@(r1/.solutions[[i]])]
];
clresult={};
For[i=1,i≤ Length[result],i++,
clresult=If[result[[i]]===r2,clresult,Append[clresult,result[[i]]]]
];
clresult
);
```

In(8):=

```
Γ1=-1.5;
Γ2=1;
λ1=-1;
λ2=1;
h0=40;
```

In(9):=

```
solutions1=Sol1[Γ1,Γ2,λ1,λ2];
solutions2=Sol2[Γ1,Γ2,λ1,λ2];
points={};
For[i=1,i≤ Length[solutions1],i++,
root=FindRoot[
{h1[Γ1,Γ2,λ1,λ2,solutions1[[i]],r2]==h0},{{r2,0.01}},
AccuracyGoal→20];
points=Append[
points,{f0→ Simplify[F[Γ1,Γ2,solutions1[[i]],r2]]/.root}
```

```
]
]
For[i=1,i≤ Length[solutions2],i++,
root=FindRoot[
{h2[Γ1,Γ2,λ1,λ2,solutions2[[i]],r2]==h0},{{r2,0.01}},
AccuracyGoal→20];
points=Append[
points,{f0→ Simplify[F[Γ1,Γ2,solutions2[[i]],r2]]/.root}
]
]
points=Sort[points];
```

In(10):=

```
fvalues=Sort[{-50,(f0/.points[[1]]),-10,20,25,27.5,
(f0/.points[[2]]),28,35,42,(f0/.points[[3]]),44}];
bifvalues={(f0/.points[[1]]),(f0/.points[[2]]),(f0/.points[[3]])};
uvplots={};

For[i=1,i≤ Length[fvalues],i++,
f=fvalues[[i]];
color=If[MemberQ[bifvalues,f],Red,Black];
uv=ContourPlot[H==h0,{u[t],-24,8},{v[t],-8,8},
ContourStyle→{color},PlotPoints→250,MaxRecursion→2,
PlotTheme→"Detailed",GridLines→Automatic,
GridLinesStyle→Directive[Gray, Dashed],Frame→True,
FrameLabel→{u,v},
LabelStyle→Directive[20, Black,FontFamily→"Times"],
AspectRatio→ 0.5];
uvplots=Append[uvplots,uv]
];
```

In(11):=

```
FigureComb={};
For[i=1,i≤ Length[uvplots],i=i+3,
FigureComb=If[i+2≤ Length[uvplots],
Append[FigureComb,uvplots[[i;;i+2]]],
Append[FigureComb,uvplots[[i;;Length[uvplots]]]]
]
]
```

In(12):= GraphicsGrid[FigureComb,ImageSize→ 1600]

BifurcationDiagramBoseEinstein.nb

In(13):=

```
W1[r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=(1-r1^2)(1-r2^2)((c(1+r1*r2)+e)
(G1*r1-G2*r2)-e(G1*r1^3-G2*r2^3))-
r1*r2*(r1+r2)(1+r1*r2)(G1(1-r2^2)-G2(1-r1^2));
W2[r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=(1-r1^2)(1-r2^2)((c(1-r1*r2)+e)
(G1*r1+G2*r2)-e(G1*r1^3+G2*r2^3))+
r1*r2*(r1-r2)(1-r1*r2)(G1(1-r2^2)-G2(1-r1^2))
h1[r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=
1/2(G1^2Log[1-r1^2]+G2^2Log[1-r2^2]+G1*G2*Log[(1+r1*r2)^(2*e)/(r1+r2)^(2*(c+e))]);
h2[r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=
1/2(G1^2Log[1-r1^2]+G2^2Log[1-r2^2]-(c+e)*G1*G2*Log[(r1-r2)^2]+
e*G1*G2*Log[(1-r1*r2)^2]);
f[r1_,r2_, G1_,G2_]:=G1*r1^2+G2*r2^2;
asymp0[G1_,G2_]:=f[1,1,G1,G2];
asymp1[G1_,G2_]:=f[0,0,G1,G2];
asymp2[G1_,G2_]:=f[1,0,G1,G2];
asymp3[G1_,G2_]:=f[0,1,G1,G2];

CriticalCurve[G1_,G2_,c_,e_,f_]:=
1/2 (Log[1-f/Abs[G1]] G1^2-(c+e) Log[f/Abs[G1]] G1 G2);
InverseCriticalCurve[G1_,G2_,c_,e_,h_]:=
FindRoot[1/2 (Log[1-f/Abs[G1]] G1^2-(c+e) Log[f/Abs[G1]] G1 G2)==h,
{f,0.5}];
```

In(14):=

```
CreateW1[G1_,G2_,c_,e_,steps_,plotrange_]:=(
r1ArrayForW1={};
r2Array=Array[#/steps&,steps-1];
For[i=1,i≤Length[r2Array], i++,
r1ArrayForW1= Append[
r1ArrayForW1,
NSolve[{W1[r2Array[[i]],G1,G2,c,e]==0, r1→0, r1<1},r1, Reals]]
];

h1ArrayForW1={};
For[i=1,i≤Length[r1ArrayForW1],i++,
```

```
solutions = {};
For[j=1,j≤Length[r1ArrayForW1[[i]]],j++,
solutions=Append[
solutions,
h1[r1ArrayForW1[[i,j,1,2]], r2Array[[i]],G1,G2,c,e]]
];
solutions = Select[solutions,FreeQ[#,Complex]&];
h1ArrayForW1=Append[h1ArrayForW1,solutions]
];

fArrayForW1={};
For[i=1,i≤Length[r1ArrayForW1],i++,
solutions = {};
For[j=1,j≤Length[r1ArrayForW1[[i]]],j++,
solutions=Append[
solutions,
f[r1ArrayForW1[[i,j,1,2]], r2Array[[i]],G1,G2]]
];
solutions = Select[solutions,FreeQ[#,Complex]&];
fArrayForW1=Append[fArrayForW1,solutions]
];

MaxNumberOfRoots=0;
For[i=1,i≤Length[fArrayForW1],i++,
MaxNumberOfRoots=
Max[MaxNumberOfRoots, Length[fArrayForW1[[i]]]];
];

linesForW1={};
For[j=1,j≤MaxNumberOfRoots,j++,
line={};
For[i=1,i≤Length[fArrayForW1],i++,
index=If[j≤Length[h1ArrayForW1[[i]]],j,0];
line=If[index≠0,Append[
line,
{fArrayForW1[[i]][[index]], h1ArrayForW1[[i]][[index]]}],
line]
];
```


842

```
linesForW1=Append[linesForW1,line];
];

ListPlot[linesForW1, Frame→True,GridLines→Automatic,
GridLinesStyle→Directive[Dashed,Black],Axes→False,
AxesLabel→None, ImageSize→72 9, PlotRange→plotrange,
PlotStyle→Directive[Red,Thickness[0.007]],
PlotTheme→"Detailed",FrameLabel→{f,h},
LabelStyle→Directive[20, Black,FontFamily→"Times"]]
)

In(15):= CreateW2[G1_,G2_,c_,e_,steps_,plotrange_]:=(

r1ArrayForW2={};
r2Array=Array[#/steps&,steps-1];

For[i=1,i≤Length[r2Array], i++,
r1ArrayForW2= Append[
r1ArrayForW2,
NSolve[{W2[r2Array[[i]],G1,G2,c,e]==0, r1→0, r1<1},r1, Reals]]
];

h2ArrayForW2={};
For[i=1,i≤Length[r1ArrayForW2],i++,
solutions = {};
For[j=1,j≤Length[r1ArrayForW2[[i]]],j++,
solutions=Append[
solutions,
h2[r1ArrayForW2[[i,j,1,2]], r2Array[[i]],G1,G2,c,e]]
];
solutions = Select[solutions,FreeQ[#,Complex]&];
h2ArrayForW2=Append[h2ArrayForW2,solutions]
];

fArrayForW2={};
For[i=1,i≤Length[r1ArrayForW2],i++,
solutions = {};
For[j=1,j≤Length[r1ArrayForW2[[i]]],j++,
```

```
solutions=Append[
solutions,
f[r1ArrayForW2[[i,j,1,2]], r2Array[[i]],G1,G2]]
];
solutions = Select[solutions,FreeQ[#,Complex]&];
fArrayForW2=Append[fArrayForW2,solutions]
];

MaxNumberOfRoots=0;
For[i=1,i≤Length[fArrayForW2],i++,
MaxNumberOfRoots=
Max[MaxNumberOfRoots, Length[fArrayForW2[[i]]]];
];

linesForW2={};
For[j=1,j≤MaxNumberOfRoots,j++,
line={};
For[i=1,i≤Length[fArrayForW2],i++,
index=If[j≤Length[h2ArrayForW2[[i]]],j,0];
line=If[index≠0,Append[
line,
{fArrayForW2[[i]][[index]], h2ArrayForW2[[i]][[index]]}],
line]
];
linesForW2=Append[linesForW2,line];
];

ListPlot[linesForW2, Frame→True,GridLines→Automatic,
GridLinesStyle→Directive[Dashed,Gray],Axes→False,
AxesLabel→None,ImageSize→72 9,PlotRange→plotrange,
PlotStyle→Directive[Thickness[0.007],Blue],
 PlotTheme→"Detailed",FrameLabel→{f,h},
LabelStyle→Directive[20, Black,FontFamily→"Times"]]
)
```

In(16):=

```
nsteps=1000;
pltrange={{-1.3,1.1},{-20,1}};
Manipulate[Show[
```

```
CreateW1[1,Γ2,c,ε,nsteps,pltrange],
CreateW2[1,Γ2,c,ε,nsteps,pltrange],
Graphics[{Dashed,Dashing[0.02],Thickness[0.003],Black,
Line[{{asymp0[1,Γ2],-100},{asymp0[1,Γ2],-6}}]}],
Graphics[{Dashed,Dashing[0.02],Thickness[0.003],Black,
Line[{{asymp1[1,Γ2],-100},{asymp1[1,Γ2],-12}}]}],
Graphics[{Dashed,Dashing[0.02],Thickness[0.003],Black,
Line[{{asymp2[1,Γ2],-100},{asymp2[1,Γ2],-0.5}}]}],
Graphics[{Dashed,Dashing[0.02],Thickness[0.003],Black,
Line[{{asymp3[1,Γ2],-100},{asymp3[1,Γ2],-0.5}}]}],
Plot[CriticalCurve[1,Γ2,c,ε,flevel],{flevel,0.0001,0.9999},
PlotStyle→Directive[Darker[Green],Dashed,
Dashing[{0.03,0.01}],Thickness[0.005]]]],
{{Γ2,-1.2},-2,2,0.01},{{c,0.09},0,2,0.01},{{ε,7},0,10,0.1}]
```

In(17):=

$$R_1=\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2 u[t]^2;$$

$$Q_1=\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\,u[t]\,\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]\times(\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2)-\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2))+\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times(\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2(u[t]^2-v[t]^2));$$

$$R_2=\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\,\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]\times(\text{Abs}[\Gamma_1]+u[t]^2+v[t]^2)-\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]]\,u[t]\times(\text{Abs}[\Gamma_2]+\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$

$$Q_2=\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\text{Abs}[\Gamma_2](\text{Abs}[\Gamma_1](\text{Abs}[\Gamma_1]+4\,u[t]^2)+(u[t]^2+v[t]^2)^2)\times(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)+\text{Abs}[\Gamma_1](u[t]^2+v[t]^2)(\Gamma_2{}^2+(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)^2)-2\,u[t]\,\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\,\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]\text{Abs}[\Gamma_2]]\times\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)](\text{Abs}[\Gamma_1]+u[t]^2+v[t]^2)\times(\text{Abs}[\Gamma_2]+\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$

$$x_1=((\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2])/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]])\times(u[t]*\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]*\text{Sin}[\alpha[t]]);$$

$$y_1=((\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2])/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]])\times(u[t]*\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]*\text{Cos}[\alpha[t]]);$$

$$x_2=(1/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]])*\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_2]*f-\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2]*(u[t]^2+v[t]^2)]*\text{Cos}[\alpha[t]];$$

$$y_2=(1/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]])*\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_2]*f-\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2]*(u[t]^2+v[t]^2)]*\text{Sin}[\alpha[t]];$$

$$r_1=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[x_1{}^2+y_1{}^2]];$$

$$r_2=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[x_2{}^2+y_2{}^2]];$$

$$r_{12}=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]];$$

$$\text{Expr}_1=\text{Refine}[\text{Simplify}[-\Gamma_1\frac{y_1}{1-r_1{}^2}-c*\Gamma_2\frac{y_1-y_2}{r_{12}{}^2}],\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$

$$\text{Expr}_2=\text{Refine}[\text{Simplify}[\Gamma_1\frac{x_1}{1-r_1{}^2}+c*\Gamma_2\frac{x_1-x_2}{r_{12}{}^2}],\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$

$$\text{Expr}_3=\text{Refine}[\text{Simplify}[-\Gamma_2\frac{y_2}{1-r_2{}^2}-c*\Gamma_1\frac{y_2-y_1}{r_{12}{}^2}],\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$

$$\text{Expr}_4=\text{Refine}[\text{Simplify}[\Gamma_2\frac{x_2}{1-r_2{}^2}+c*\Gamma_2\frac{x_2-x_1}{r_{12}{}^2}],\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$

$$\text{dadt}=\frac{\Gamma_2{}^2}{\Gamma_2-f+\text{Sign}[\Gamma_1](u[t]^2+v[t]^2)}+c\,\frac{\Gamma_1\text{Abs}[\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]]}{\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]}\frac{R_1}{Q_1}+\varepsilon\,\Gamma_1\text{Abs}[\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\times$$

$$\frac{\text{Abs}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2}{\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]}\frac{R_2}{Q_2};$$

dvdt=Sign[$\Gamma_1\,\Gamma_2$]Sqrt[Abs[Γ_1]](Expr$_2$ Cos[α[t]] - Expr$_1$ Sin[α[t]]) - u[t] dadt;

dudt=Sign[$\Gamma_1\,\Gamma_2$]Sqrt[Abs[Γ_1]](Expr$_2$ Sin[α[t]] + Expr$_1$ Cos[α[t]]) + v[t] dadt;

H=(1/2)(Γ_1^2Log[1-(u[t]^2+v[t]^2)/Abs[Γ_1]]+
Γ_2^2Log[1-(Sign[Γ_2]*f)/Abs[Γ_2]+
(Sign[Γ_1]Sign[Γ_2](u[t]^2+v[t]^2))/Abs[Γ_2]]-
Γ_1*Γ_2(c+ε)Log[(u[t]^2+v[t]^2)/Abs[Γ_1]-(2*u[t]*Sign[Γ_1]Sign[Γ_2]×
Sqrt[Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2))])/Sqrt[Abs[Γ_1]Abs[Γ_2]]+
(Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2)))/Abs[Γ_2]]+ε*Γ_1*Γ_2*Log[1-
(2*u[t]*Sign[Γ_1]Sign[Γ_2]Sqrt[Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2))])/
Sqrt[Abs[Γ_1]Abs[Γ_2]]+
(Sign[Γ_2](u[t]^2+v[t]^2)(f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2)))/(Abs[Γ_1]Abs[Γ_2])]);

In(18):=

W1[r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=(1-r1^2)(1-r2^2)((c(1+r1*r2)+e)(G1*r1-G2*r2)-
e(G1*r1^3-G2*r2^3))-r1*r2*(r1+r2)(1+r1*r2)(G1(1-r2^2)-G2(1-r1^2));
W2[r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=(1-r1^2)(1-r2^2)((c(1-r1*r2)+e)(G1*r1+G2*r2)-
e(G1*r1^3+G2*r2^3))+r1*r2*(r1-r2)(1-r1*r2)(G1(1-r2^2)-G2(1-r1^2));

h_1[r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=
$\frac{1}{2}$(G1^{2}Log[1-r1^2]+G2^{2}Log[1-r2^2]+G1*G2*Log[$\frac{(1+r1*r2)^{2*e}}{(r1+r2)^{2*(c+e)}}$]);
h_2[r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=
$\frac{1}{2}$(G1^{2}Log[1-r1^2]+G2^{2}Log[1-r2^2]-(c+e)*G1*G2*Log[(r1-r2)^2]+
e*G1*G2*Log[(1-r1*r2)^2]);
F[r1_,r2_, G1_,G2_]:=G1*r1^2+G2*r2^2;
h_r=$\frac{1}{2}$(Γ_1^2Log[1-r1^2]+Γ_2^2Log[1-r2^2]-(c+ε)*$\Gamma_1\Gamma_2$×Log[(r1-r2)^2]+
ε×$\Gamma_1\Gamma_2$Log[(1-r1*r2)^2]);

In(19):=

Γ_1=1;
Γ_2=-1.2;
h_0=-5.7;
ε=7;
c=0.09;

In(20):=
```
fvalues=Sort[{
-0.9,
-0.5916554992870691,
-0.59,
-0.425,
-0.3249016527771117,
-0.225,
-0.10876630832263678,
0.09,
0.2685,
0.25,
0.271816,
0.35,
0.415,
0.4184169197793053,
0.9
}];
bifvalues={
-0.5916554992870691,-0.3249016527771117,0.271816,
-0.10876630832263678,0.4184169197793053
};
uvplots={};

For[i=1,i≤ Length[fvalues],i++,
f=fvalues[[i]];
color=If[MemberQ[bifvalues,f],Red,Black];
uv=ContourPlot[H==h0,{u[t],-1,1},{v[t],-1,1},
ContourStyle→{color},PlotPoints→100,MaxRecursion→2,
PlotTheme→"Detailed",GridLines→Automatic,
GridLinesStyle→Directive[Gray, Dashed],Frame→True,
FrameLabel→{u,v},
LabelStyle→Directive[20, Black,FontFamily→"Times"],
AspectRatio→ 1];
uvplots=Append[uvplots,uv]
];
```

In(21):=
```
FigureComb={};
For[i=1,i≤ Length[uvplots],i=i+5,
```

```
FigureComb=If[i+4≤ Length[uvplots],
Append[FigureComb,uvplots[[i;;i+4]]],
Append[FigureComb,uvplots[[i;;Length[uvplots]]]]
]
]
```

In(22):=
```
GraphicsGrid[FigureComb,ImageSize→ 1600]
```

ThreeVorticesAnimation.ipynb

[1]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate.odepack import odeint

import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation, PillowWriter
plt.rcParams['animation.embed_limit'] = 2**128
%matplotlib inline

from IPython.display import HTML
```

[2]:
```
def model(y, t, gamma, lambd):

  """
  Model of 3 vortices for scipy.integrate.odepack.odeint solution of
  a system of ordinary differential equations.

  Parameters
  ----------
  y : np.array([], dtype=np.float64)
     Start coordinates of vortices: [x1, y1, x2, y2, x3, y3]
  t : np.array([], dtype=np.float64)
     Timeline array
  gamma : np.array([], dtype=np.int8)
     Vector of vortex strengths: [Gamma_1, Gamma_2, Gamma_3]
  lambd : np.array([], dtype=np.int8)
     Vector of vortex polarities: [lambda_1, lambda_2, lambda_3]
  """

  x1, y1, x2, y2, x3, y3 = y

  C1_sq = ( x2 - x3 )**2 + ( y2 - y3 )**2
  C2_sq = ( x3 - x1 )**2 + ( y3 - y1 )**2
  C3_sq = ( x1 - x2 )**2 + ( y1 - y2 )**2

  return [

     ( -gamma[1] * (y1 - y2) / C3_sq + gamma[2] * (y3 - y1) / C2_sq ) / lambd[0], # dx1/dt
     (  gamma[1] * (x1 - x2) / C3_sq - gamma[2] * (x3 - x1) / C2_sq ) / lambd[0], # dy1/dt

     ( -gamma[2] * (y2 - y3) / C1_sq + gamma[0] * (y1 - y2) / C3_sq ) / lambd[1], # dx2/dt
     (  gamma[2] * (x2 - x3) / C1_sq - gamma[0] * (x1 - x2) / C3_sq ) / lambd[1], # dy2/dt

     ( -gamma[0] * (y3 - y1) / C2_sq + gamma[1] * (y2 - y3) / C1_sq ) / lambd[2], # dx3/dt
     (  gamma[0] * (x3 - x1) / C2_sq - gamma[1] * (x2 - x3) / C1_sq ) / lambd[2], # dy3/dt
  ]
```

[3]:
```
def axes_format(ax, plot_limits, title, title_fontsize=24, spines_linewidth=3, labelsize=24, legend_fontsize=26):

  """
  Formats plot.
```

```
    Parameters
    ----------
    ax : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        Axis object to be formatted
    plot_limits : dict
        Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    title : str
        Plot title
    title_fontsize : int, optional
        Title fontsize
    spines_linewidth : int, optional
        Linewidth of plot axes
    labelsize : int, optional
        Label size
    legend_fontsize: int, optional
        Legend fontsize
    """

    ax.set_title(title, fontsize=title_fontsize)
    plt.tight_layout()

    ax.spines['left'].set_position('zero')
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.yaxis.tick_left()
    ax.spines['bottom'].set_position('zero')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.tick_bottom()

    ax.spines['left'].set_linewidth(spines_linewidth)
    ax.spines['bottom'].set_linewidth(spines_linewidth)

    ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=labelsize)

    ax.set_xlim(plot_limits['x_lim_l'], plot_limits['x_lim_r'])
    ax.set_ylim(plot_limits['y_lim_b'], plot_limits['y_lim_t'])

    ax.set(aspect='equal')

    plt.grid(ls='solid', lw=0.8)
    plt.legend(fontsize=legend_fontsize)
```

[4]:
```
def create_plot(result, title, colors, labels, plot_limits, output_filename=None, save_fig=False):

    """
    Creates plot for the given result.

    Parametes
    ---------
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    title : str
        Plot title.
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels : dict
```

```
    Dictionary of trajectories labels with keys [0,1,2]
plot_limits : dict
    Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
output_filename : str, optional
    Name of the output pdf-file
save_fig : bool, optional
    To save or not to save plot in a pdf-file. Default False. If True, then `output_filename ` should be given.
"""

fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, figsize=(10,10))

ax.plot(result[:, 0], result[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels[0], alpha=0.8)
ax.plot(result[:, 2], result[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels[1], alpha=0.8)
ax.plot(result[:, 4], result[:, 5], 'k-', lw=2 , color=colors[2], label=labels[2], alpha=0.8)

ax.scatter(result[:, 0][-1], result[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
ax.scatter(result[:, 2][-1], result[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)
ax.scatter(result[:, 4][-1], result[:, 5][-1], s=500, facecolors=colors[2], edgecolors='black', alpha=1)

axes_format(ax, plot_limits, title)

if save_fig:
    fig.savefig(f'{output_filename}.pdf', bbox_inches='tight')

plt.show()
```

[5]:
```
def update_plot_data(t, result, lines, mk, step):

    """
    Updates plot to create animation.

    Parameters
    ----------
    t : int
        Timestamp for animation update
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    lines : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for trajectories animation. One object for each trajectory.
    mk : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for vortex animation. One object for each vortex.
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    """

    lines[0].set_data(result[:, 0][:t*step], result[:, 1][:t*step])
    lines[1].set_data(result[:, 2][:t*step], result[:, 3][:t*step])
    lines[2].set_data(result[:, 4][:t*step], result[:, 5][:t*step])

    mk[0].set_data(result[:, 0][t*step-1], result[:, 1][t*step-1])
    mk[1].set_data(result[:, 2][t*step-1], result[:, 3][t*step-1])
    mk[2].set_data(result[:, 4][t*step-1], result[:, 5][t*step-1])
```


852

[6]:
```
def create_animation(result, step, title, colors, labels, plot_limits):

    """
    Creates animation object.

    Parameters
    ----------
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    title : str
        Plot title.
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels : dict
        Dictionary of trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits : dict
        Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    """
    plt.ioff()
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, figsize=(10,10))

    lines  = [ax.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels[i])[0] for i in range(3)]
    mk = [ax.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()]

    axes_format(ax, plot_limits, title)

    anim =  FuncAnimation(fig, update_plot_data,
                    fargs=(result, lines, mk, step),
                    frames=int(result.shape[0]/step), interval=2*step)
    plt.close(fig)

    return anim
```

[7]:
```
def save_animation_mp4(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in MP4 format.

    Parametes
    ----------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    Writer = matplotlib.animation.writers['ffmpeg']
```


853

```
    writer = Writer(fps=fps, bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.mp4', writer=writer)
```

[8]:
```
def save_animation_gif(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in GIF format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    writer = PillowWriter(fps=fps, codec='libx264', bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.gif', writer=writer)
```

[9]:
```
lambd = np.array([1, 1, -1], dtype=np.int8) # lambda vector
gamma = np.array([2*np.pi, -2*np.pi, 2*np.pi]) # gamma vector
```

[10]:
```
# vortex positions
r = np.array(
    [np.array([ -2,  0 ]),
     np.array([ -1,  0 ]),
     np.array([ 0.5, 0 ])]
)
```

[11]:
```
# output filename (without format)
output_filename = 'magnetic_vortices'

# plot title
title = 'Magnetic vortices'
```

[12]:
```
# axes limits
limits = {
    'x_lim_l': -2.5, # left
    'x_lim_r':  5.5, # right
    'y_lim_b': -4,   # bottom
    'y_lim_t':  4,   # top
}

# colors of vortices
colors = {
    0: 'deepskyblue',
    1: 'forestgreen',
    2: 'coral',
}
```

```
# labels of vortices
labels = {
  0: f'$V_1: \Gamma_1=2\pi, \lambda_1={lambd[0]}$',
  1: f'$V_2: \Gamma_2=-2\pi, \lambda_2={lambd[1]}$',
  2: f'$V_3: \Gamma_3=2\pi, \lambda_3={lambd[2]}$',
}
```

[13]:
```
# number of frames
frames = 40

# how many steps for 1 frame
steps_for_frame = 150

# number of vortices
N = 3

# timeline
t = np.linspace(0., frames, frames*steps_for_frame+1)
```

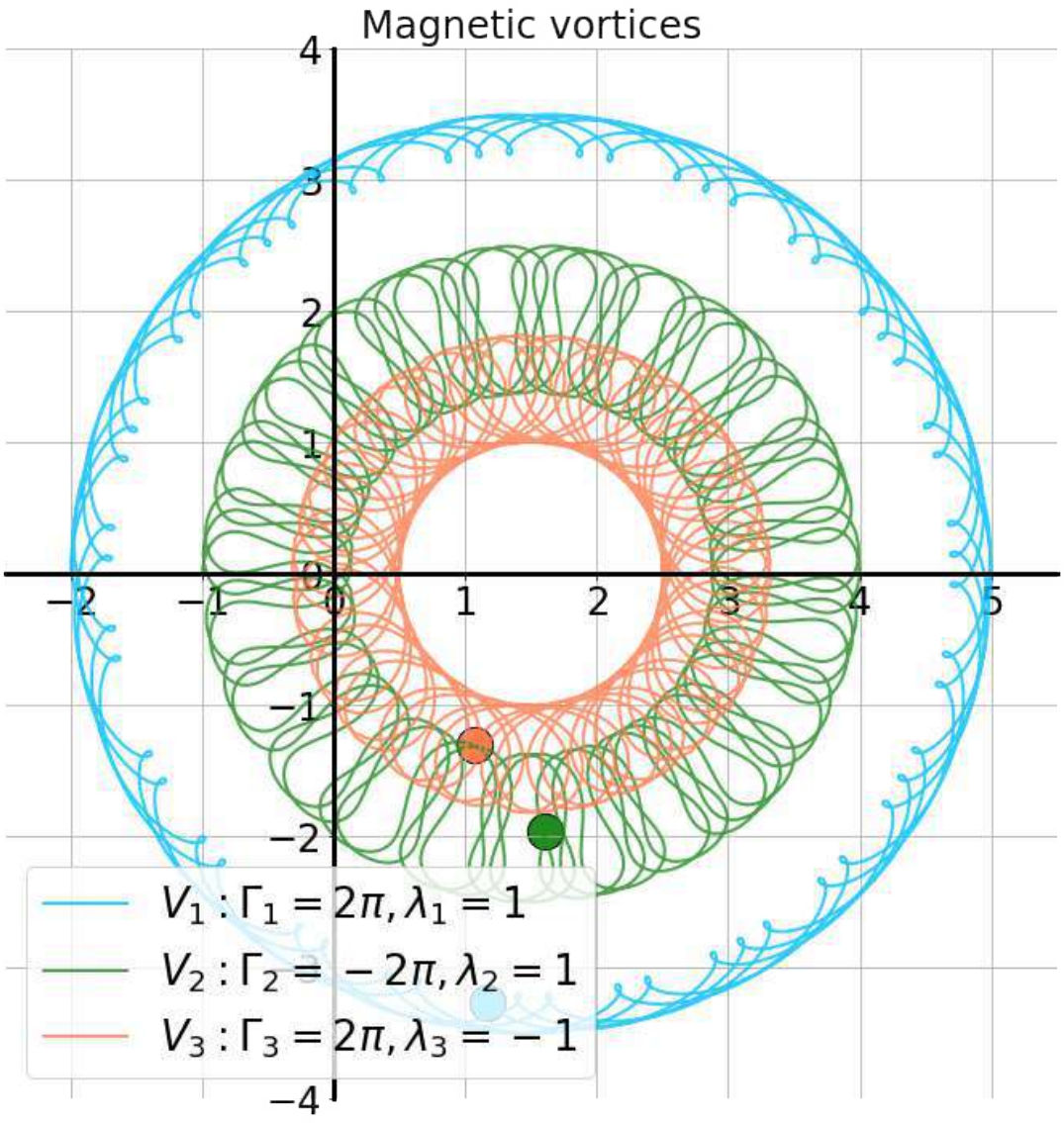
[14]:
```
%%time

# calculates vortex trajectories by solving the system
# of ordinary differential equations
result = odeint(model, r.reshape((N*2,)), t, (gamma, lambd))
```

Wall time: 252 ms

[15]:
```
%%time
create_plot(result, title, colors, labels, limits, output_filename, save_fig=True)
```


855



Wall time: 788 ms

[16]:
```
%%time

step=10
animation = create_animation(result, step, title, colors, labels, limits)
```

Wall time: 57.8 ms

856

[17]:
```
%%time

# JS animation with control buttons in Jupyter Notebook
HTML(animation.to_jshtml())
```

Wall time: 1min 14s

[17]: <IPython.core.display.HTML object>

[18]:
```
%%time

# saving animation to mp4-file
save_animation_mp4(animation, output_filename, fps=30, bitrate=1800, author='Palshin G.')
```

Wall time: 51.4 s

[19]:
```
%%time

# saving animation to gif-file
save_animation_gif(animation, output_filename, fps=30, bitrate=2, author='Palshin G.')
```

Wall time: 55.2 s

CompareTwoConfigurations.ipynb

[1]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate.odepack import odeint

import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation, PillowWriter
matplotlib.rcParams['animation.embed_limit'] = 2**128
%matplotlib inline

from IPython.display import HTML
```

[2]:
```
def model(y, t, gamma, lambd):

  """
  Model of 3 vortices for scipy.integrate.odepack.odeint solution of
  a system of ordinary differential equations.

  Parameters
  ----------
  y : np.array([], dtype=np.float64)
     Start coordinates of vortices: [x1, y1, x2, y2, x3, y3]
  t : np.array([], dtype=np.float64)
     Timeline array
  gamma : np.array([], dtype=np.int8)
     Vector of vortex strengths: [Gamma_1, Gamma_2, Gamma_3]
  lambd : np.array([], dtype=np.int8)
     Vector of vortex polarities: [lambda_1, lambda_2, lambda_3]
  """

  x1, y1, x2, y2, x3, y3 = y

  C1_sq = ( x2 - x3 )**2 + ( y2 - y3 )**2
  C2_sq = ( x3 - x1 )**2 + ( y3 - y1 )**2
  C3_sq = ( x1 - x2 )**2 + ( y1 - y2 )**2

  return [

     ( -gamma[1] * (y1 - y2) / C3_sq + gamma[2] * (y3 - y1) / C2_sq ) / lambd[0], # dx1/dt
     (  gamma[1] * (x1 - x2) / C3_sq - gamma[2] * (x3 - x1) / C2_sq ) / lambd[0], # dy1/dt

     ( -gamma[2] * (y2 - y3) / C1_sq + gamma[0] * (y1 - y2) / C3_sq ) / lambd[1], # dx2/dt
     (  gamma[2] * (x2 - x3) / C1_sq - gamma[0] * (x1 - x2) / C3_sq ) / lambd[1], # dy2/dt

     ( -gamma[0] * (y3 - y1) / C2_sq + gamma[1] * (y2 - y3) / C1_sq ) / lambd[2], # dx3/dt
     (  gamma[0] * (x3 - x1) / C2_sq - gamma[1] * (x2 - x3) / C1_sq ) / lambd[2], # dy3/dt
  ]
```

[3]:
```
def axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2,
          title_fontsize=24, spines_linewidth=3, labelsize=24, legend_fontsize=26):

  """
  Formats plot.
```

```
    Parameters
    ----------
    ax1 : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        The first axis object to be formatted
    ax2 : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        The second axis object to be formatted
    plot_limits1 : dict
        The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    plot_limits2 : dict
        The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    title1 : str
        The first plot title
    title2 : str
        The second plot title
    title_fontsize : int, optional
        Title fontsize
    spines_linewidth : int, optional
        Linewidth of plot axes
    labelsize : int, optional
        Label size
    legend_fontsize: int, optional
        Legend fontsize
    """

    ax1.set_title(title1, fontsize=title_fontsize)
    ax2.set_title(title2, fontsize=title_fontsize)
    plt.tight_layout()

    for ax in [ax1, ax2]:
        ax.spines['left'].set_position('zero')
        ax.spines['right'].set_color('none')
        ax.yaxis.tick_left()
        ax.spines['bottom'].set_position('zero')
        ax.spines['top'].set_color('none')
        ax.xaxis.tick_bottom()

        ax.spines['left'].set_linewidth(spines_linewidth)
        ax.spines['bottom'].set_linewidth(spines_linewidth)

        ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=labelsize)

        ax.grid(ls='solid', lw=0.8)
        ax.legend(fontsize=legend_fontsize)

        ax.set(aspect='equal')

    ax1.set_xlim(plot_limits1['x_lim_l'], plot_limits1['x_lim_r'])
    ax1.set_ylim(plot_limits1['y_lim_b'], plot_limits1['y_lim_t'])

    ax2.set_xlim(plot_limits2['x_lim_l'], plot_limits2['x_lim_r'])
    ax2.set_ylim(plot_limits2['y_lim_b'], plot_limits2['y_lim_t'])
```

[4]:
```
def create_plot(result1, result2, title1, title2,
                colors, labels1, labels2,
                plot_limits1, plot_limits2,
```

```
        output_filename=None, save_fig=False):

    """
    Creates plot for the given result.

    Parametes
    ---------
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
       Solution of the first system of ordinary differential equations
       given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
       Solution of the second system of ordinary differential equations
       given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    title1 : str
       The first plot title
    title2 : str
       The second plot title
    colors : dict
       Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels1 : dict
       Dictionary of the first trajectories labels with keys [0,1,2]
    labels2 : dict
       Dictionary of the second trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits1 : dict
       The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    plot_limits2 : dict
       The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    output_filename : str, optional
       Name of the output pdf-file
    save_fig : bool, optional
       To save or not to save plot in a pdf-file. Default False. If True, then `output_filename ` should be given.
    """

    plt.subplots_adjust(wspace=0)
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(20,9))

    ax1.plot(result1[:, 0], result1[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels1[0], alpha=0.8)
    ax1.plot(result1[:, 2], result1[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels1[1], alpha=0.8)
    ax1.plot(result1[:, 4], result1[:, 5], 'k-', lw=2 , color=colors[2], label=labels1[2], alpha=0.8)

    ax2.plot(result2[:, 0], result2[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels2[0], alpha=0.8)
    ax2.plot(result2[:, 2], result2[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels2[1], alpha=0.8)
    ax2.plot(result2[:, 4], result2[:, 5], 'k-', lw=2 , color=colors[2], label=labels2[2], alpha=0.8)

    ax1.scatter(result1[:, 0][-1], result1[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
    ax1.scatter(result1[:, 2][-1], result1[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)
    ax1.scatter(result1[:, 4][-1], result1[:, 5][-1], s=500, facecolors=colors[2], edgecolors='black', alpha=1)

    ax2.scatter(result2[:, 0][-1], result2[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
    ax2.scatter(result2[:, 2][-1], result2[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)
    ax2.scatter(result2[:, 4][-1], result2[:, 5][-1], s=500, facecolors=colors[2], edgecolors='black', alpha=1)

    axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2)

    if save_fig:
        fig.savefig(f'{output_filename}.pdf', bbox_inches='tight')
```

```
plt.show()
```

[5]:
```
def update_plot_data(t, result1, result2, lines, mk, step):

    """
    Updates plot to create animation.

    Parameters
    ----------
    t : int
        Timestamp for animation update
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the first system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the second system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    lines : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for trajectories animation. One object for each trajectory.
    mk : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for vortex animation. One object for each vortex.
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    """

    lines[0].set_data(result1[:, 0][:t*step], result1[:, 1][:t*step])
    lines[1].set_data(result1[:, 2][:t*step], result1[:, 3][:t*step])
    lines[2].set_data(result1[:, 4][:t*step], result1[:, 5][:t*step])

    mk[0].set_data(result1[:, 0][t*step-1], result1[:, 1][t*step-1])
    mk[1].set_data(result1[:, 2][t*step-1], result1[:, 3][t*step-1])
    mk[2].set_data(result1[:, 4][t*step-1], result1[:, 5][t*step-1])

    lines[3].set_data(result2[:, 0][:t*step], result2[:, 1][:t*step])
    lines[4].set_data(result2[:, 2][:t*step], result2[:, 3][:t*step])
    lines[5].set_data(result2[:, 4][:t*step], result2[:, 5][:t*step])

    mk[3].set_data(result2[:, 0][t*step-1], result2[:, 1][t*step-1])
    mk[4].set_data(result2[:, 2][t*step-1], result2[:, 3][t*step-1])
    mk[5].set_data(result2[:, 4][t*step-1], result2[:, 5][t*step-1])
```

[6]:
```
def create_animation(result1, result2, step,
                     title1, title2, colors, labels1,
                     labels2, plot_limits1, plot_limits2):

    """
    Creates animation object.

    Parameters
    ----------
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the first system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the second system of ordinary differential equations
```

```
    given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
step : int
    Step with which timestamps are chosen
title1 : str
    The first plot title
title2 : str
    The second plot title
colors : dict
    Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
labels1 : dict
    Dictionary of the first trajectories labels with keys [0,1,2]
labels2 : dict
    Dictionary of the second trajectories labels with keys [0,1,2]
plot_limits1 : dict
    The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
plot_limits2 : dict
    The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
"""

plt.subplots_adjust(wspace=0)
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(20,9))

lines  = ([ax1.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels1[i])[0] for i in range(3)]
      +
       [ax2.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels2[i])[0] for i in range(3)])

mk = ([ax1.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()]
   +
    [ax2.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()])

axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2)

if result1.shape == result2.shape:
   anim = FuncAnimation(fig, update_plot_data,
                        fargs=(result1, result2, lines, mk, step),
                        frames=int(result1.shape[0]/step), interval=2*step)
   plt.close(fig)

   return anim
```

[7]:
```
def save_animation_mp4(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

"""
Saves animation in MP4 format.

Parametes
---------
animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
    Animation object to save
output_filename : str
    Output filename (without format)
fps : int
    Animation frames per second
bitrate : int
    Animation bitrate
author : str
```

```
    You can put your name to animation metadata
  """

  Writer = matplotlib.animation.writers['ffmpeg']
  writer = Writer(fps=fps, bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
  animation.save(f'{output_filename}.mp4', writer=writer)
```

[8]:
```
def save_animation_gif(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

  """
  Saves animation in GIF format.

  Parametes
  ---------
  animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
    Animation object to save
  output_filename : str
    Output filename (without format)
  fps : int
    Animation frames per second
  bitrate : int
    Animation bitrate
  author : str
    You can put your name to animation metadata
  """

  writer = PillowWriter(fps=fps, codec='libx264', bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
  animation.save(f'{output_filename}.gif', writer=writer)
```

[9]:
```
lambd1 = np.array([1, 1, 1], dtype=np.int8) # lambda vector for the 1st configuration
gamma1 = np.array([2*np.pi, 2*np.pi, 2*np.pi]) # gamma vector for the 1st configuration

lambd2 = np.array([1,-1, 1], dtype=np.int8) # lambda vector for the 2nd configuration
gamma2 = np.array([2*np.pi, 2*np.pi, 2*np.pi]) # gamma vector for the 2nd configuration
```

[10]:
```
# vortex positions for the 1st configuration
r1 = np.array(
   [np.array([ -2,  0 ]),
    np.array([ -1,  0 ]),
    np.array([ 0.5, 0 ])]
)

# vortex positions for the 2nd configuration
r2 = np.array(
   [np.array([ -2,  0 ]),
    np.array([ -1,  0 ]),
    np.array([ 0.5, 0 ])]
)
```

[11]:
```
# output filename (without format)
output_filename = 'compare_two_configurations'

# plot title for the 1st configuration
title1 = 'Classic vortices'

# plot title for the 2nd configuration
```

```
title2 = 'Magnetic vortices'
```

[12]:
```
# axes limits for the 1st configuration
limits1 = {
  'x_lim_l': -2.5, # left
  'x_lim_r':  1.5, # right
  'y_lim_b': -2  , # bottom
  'y_lim_t':  2  , # top
}

# axes limits for the 2nd configuration
limits2 = {
  'x_lim_l': -2.5, # left
  'x_lim_r':  1.5, # right
  'y_lim_b': -2  , # bottom
  'y_lim_t':  2  , # top
}

# colors of vortices
colors = {
  0: 'deepskyblue',
  1: 'forestgreen',
  2: 'coral',
}

# labels of vortices for the 1st configuration
labels1 = {
  0: f'$V_1: \Gamma_1=2\pi, \lambda_1={lambd1[0]}$',
  1: f'$V_2: \Gamma_2=-2\pi, \lambda_2={lambd1[1]}$',
  2: f'$V_3: \Gamma_3=2\pi, \lambda_3={lambd1[2]}$',
}

# labels of vortices for the 2nd configuration
labels2 = {
  0: f'$V_1: \Gamma_1=-2\pi, \lambda_1={lambd2[0]}$',
  1: f'$V_2: \Gamma_2=2\pi, \lambda_2={lambd2[1]}$',
  2: f'$V_3: \Gamma_3=2\pi, \lambda_3={lambd2[2]}$',
}
```

[13]:
```
# number of frames for the 1st configuration
frames1 = 15

# number of frames for the 2nd configuration
frames2 = 15

# how many steps for 1 frame for the 1st configuration
steps_for_frame1 = 150

# how many steps for 1 frame for the 2nd configuration
steps_for_frame2 = 150

# number of vortices
N = 3

# timeline for the 1st configuration
t1 = np.linspace(0., frames1, frames1*steps_for_frame1+1)
```

```
# timeline for the 1nd configuration
t2 = np.linspace(0., frames2, frames2*steps_for_frame2+1)
```

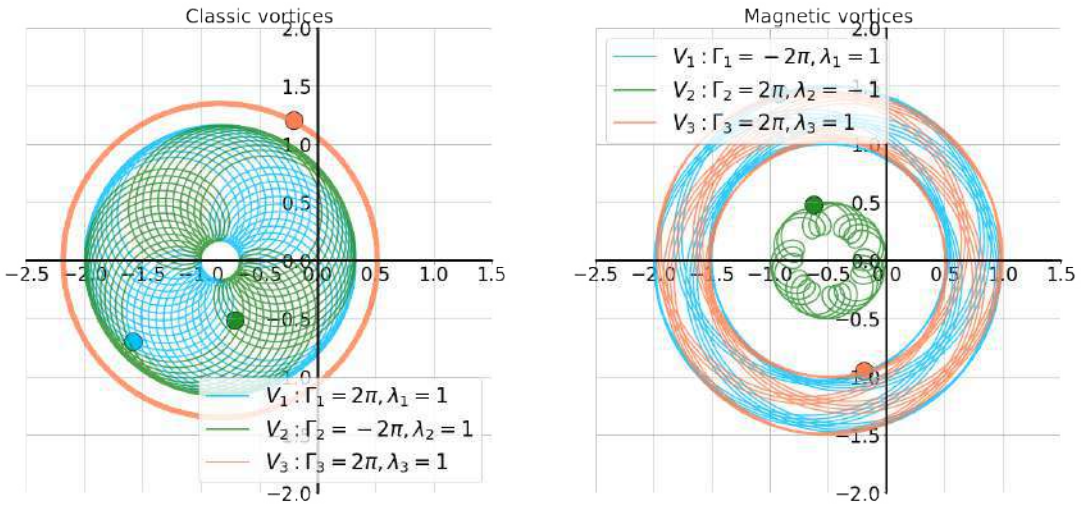
[14]:
```
%%time

# calculates vortex trajectories by solving two systems
# of ordinary differential equations
result1 = odeint(model, r1.reshape((N*2,)), t1, (gamma1, lambd1))
result2 = odeint(model, r2.reshape((N*2,)), t2, (gamma2, lambd2))
```

Wall time: 103 ms

[15]:
```
create_plot(result1, result2, title1, title2, colors, labels1, labels2,
        limits1, limits2, output_filename=output_filename, save_fig=True)
```

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



[16]:
```
%%time

step=1
animation = create_animation(result1, result2, step,
                             title1, title2, colors, labels1,
                             labels2, limits1, limits2)
```

Wall time: 107 ms

<Figure size 432x288 with 0 Axes>

[17]:
```
%%time

# JS animation with control buttons in Jupyter Notebook
HTML(animation.to_jshtml())
```

Wall time: 8min 28s

[18]:
```
%%time

# saving animation to mp4-file
save_animation_mp4(animation, output_filename, fps=30, bitrate=1800, author='Palshin G.')
```

Wall time: 5min 36s

[19]:
```
%%time

# saving animation to gif-file
save_animation_gif(animation, output_filename, fps=30, bitrate=2, author='Palshin G.')
```

Wall time: 7min 58s

MagneticRestrictedVortices.ipynb

[1]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate.odepack import odeint

import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation, PillowWriter
matplotlib.rcParams['animation.embed_limit'] = 2**128
%matplotlib inline

from IPython.display import HTML
```

[2]:
```
def model(y, t, gamma, lambd):

  """
  Model of 3 magnetic vortices restricted problem
  for scipy.integrate.odepack.odeint solution of
  the system of ordinary differential equations.

  Parameters
  ----------
  y : np.array([], dtype=np.float64)
     Start coordinates of vortices: [x1, y1, x2, y2]
  t : np.array([], dtype=np.float64)
     Timeline array
  gamma : np.array([], dtype=np.int8)
     Vector of vortex strengths: [Gamma_1, Gamma_2]
  lambd : np.array([], dtype=np.int8)
     Vector of vortex polarities: [lambda_1, lambda_2]
  """

  x1, y1, x2, y2 = y

  l1_sq  = x1**2 + y1**2
  l2_sq  = x2**2 + y2**2
  l12_sq = (x1-x2)**2 + (y1-y2)**2

  return [

     ( y1 / l1_sq + gamma[1]/lambd[1] * (y1 - y2)/l12_sq ) / lambd[0], # dx1/dt
     ( -x1 / l1_sq - gamma[1]/lambd[1] * (x1 - x2)/l12_sq ) / lambd[0], # dy1/dt

     ( y2 / l2_sq + gamma[0]/lambd[0] * (y2 - y1)/l12_sq ) / lambd[1], # dx2/dt
     ( -x2 / l2_sq - gamma[0]/lambd[0] * (x2 - x1)/l12_sq ) / lambd[1], # dy2/dt

  ]
```

[3]:
```
def axes_format(ax, plot_limits, title, title_fontsize=24, spines_linewidth=3, labelsize=24, legend_fontsize=26):

  """
  Formats plot.

  Parameters
```

```
    ----------
    ax : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        Axis object to be formatted
    plot_limits : dict
        Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    title : str
        Plot title
    title_fontsize : int, optional
        Title fontsize
    spines_linewidth : int, optional
        Linewidth of plot axes
    labelsize : int, optional
        Label size
    legend_fontsize: int, optional
        Legend fontsize
    """

    ax.set_title(title, fontsize=title_fontsize)
    plt.tight_layout()

    ax.spines['left'].set_position('zero')
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.yaxis.tick_left()
    ax.spines['bottom'].set_position('zero')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.tick_bottom()

    ax.spines['left'].set_linewidth(spines_linewidth)
    ax.spines['bottom'].set_linewidth(spines_linewidth)

    ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=labelsize)

    ax.set_xlim(plot_limits['x_lim_l'], plot_limits['x_lim_r'])
    ax.set_ylim(plot_limits['y_lim_b'], plot_limits['y_lim_t'])

    ax.set(aspect='equal')

    plt.grid(ls='solid', lw=0.8)
    plt.legend(fontsize=legend_fontsize)
```

[4]:
```
def create_plot(result, title, colors, labels, plot_limits, output_filename=None, save_fig=False):

    """
    Creates plot for the given result.

    Parametes
    ---------
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    title : str
        Plot title.
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels : dict
        Dictionary of trajectories labels with keys [0,1,2]
```

```
    plot_limits : dict
        Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    output_filename : str, optional
        Name of the output pdf-file
    save_fig : bool, optional
        To save or not to save plot in a pdf-file. Default False. If True, then `output_filename ` should be given.
    """

    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, figsize=(10,10))

    ax.plot(result[:, 0], result[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels[0], alpha=0.8)
    ax.plot(result[:, 2], result[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels[1], alpha=0.8)

    ax.scatter(result[:, 0][-1], result[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
    ax.scatter(result[:, 2][-1], result[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)

    ax.scatter(0, 0, s=500, facecolors=colors[2], edgecolors='black', alpha=1)

    axes_format(ax, plot_limits, title)

    if save_fig:
        fig.savefig(f'{output_filename}.pdf', bbox_inches='tight')

    plt.show()
```

[5]:
```
def update_plot_data(t, result, lines, mk, step):

    """
    Updates plot to create animation.

    Parameters
    ----------
    t : int
        Timestamp for animation update
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    lines : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for trajectories animation. One object for each trajectory.
    mk : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for vortex animation. One object for each vortex.
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    """

    lines[0].set_data(result[:, 0][:t*step], result[:, 1][:t*step])
    lines[1].set_data(result[:, 2][:t*step], result[:, 3][:t*step])

    mk[0].set_data(result[:, 0][t*step-1], result[:, 1][t*step-1])
    mk[1].set_data(result[:, 2][t*step-1], result[:, 3][t*step-1])
    mk[2].set_data(0, 0)
```

[6]:
```
def create_animation(result, step, title, colors, labels, plot_limits):

    """
    Creates animation object.
```

```
    Parameters
    ----------
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    title : str
        Plot title.
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels : dict
        Dictionary of trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits : dict
        Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    """
    plt.ioff()
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, figsize=(10,10))

    lines  = [ax.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels[i])[0] for i in range(2)]
    mk = [ax.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()]

    axes_format(ax, plot_limits, title)

    anim =  FuncAnimation(fig, update_plot_data,
                    fargs=(result, lines, mk, step),
                    frames=int(result.shape[0]/step), interval=2*step)
    plt.close(fig)

    return anim
```

[7]:
```
def save_animation_mp4(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in MP4 format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    Writer = matplotlib.animation.writers['ffmpeg']
    writer = Writer(fps=fps, bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.mp4', writer=writer)
```


870

[8]:
```
def save_animation_gif(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in GIF format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    writer = PillowWriter(fps=fps, codec='libx264', bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.gif', writer=writer)
```

[9]:
```
gamma = np.array([-6*np.pi,  4*np.pi ]) # gamma vector
lambd = np.array([ -1 ,  1 ]) # lambda vector
```

[10]:
```
# vortices initial position

r = np.array(
    [np.array([ 3.26034, -0.000230329 ]),
     np.array([ 4.2583, 0. ])]
)
```

[11]:
```
# output filename (without format)
output_filename = 'magnetic_restricted_1'

# plot title for the 1st configuration
title = 'Magnetic vortices (restricted problem)'
```

[12]:
```
# axes limits
limits = {
    'x_lim_l': -4.5, # left
    'x_lim_r':  4.5, # right
    'y_lim_b': -4.5, # bottom
    'y_lim_t':  4.5, # top
}

# colors of vortices
colors = {
    0: 'deepskyblue',
    1: 'coral',
    2: 'forestgreen',
}

# labels of vortices
labels = {
    0: f'$V_1: \Gamma_1={gamma[0]:.4f}, \lambda_1={lambd[0]}$',
```

```
  1: f'$V_2: \Gamma_2={gamma[1]:.4f}, \lambda_2={lambd[1]}$',
}
```

[13]:
```
# number of frames
frames = 20

# how many steps for 1 frame
steps_for_frame = 75

# number of vortices
N = 2

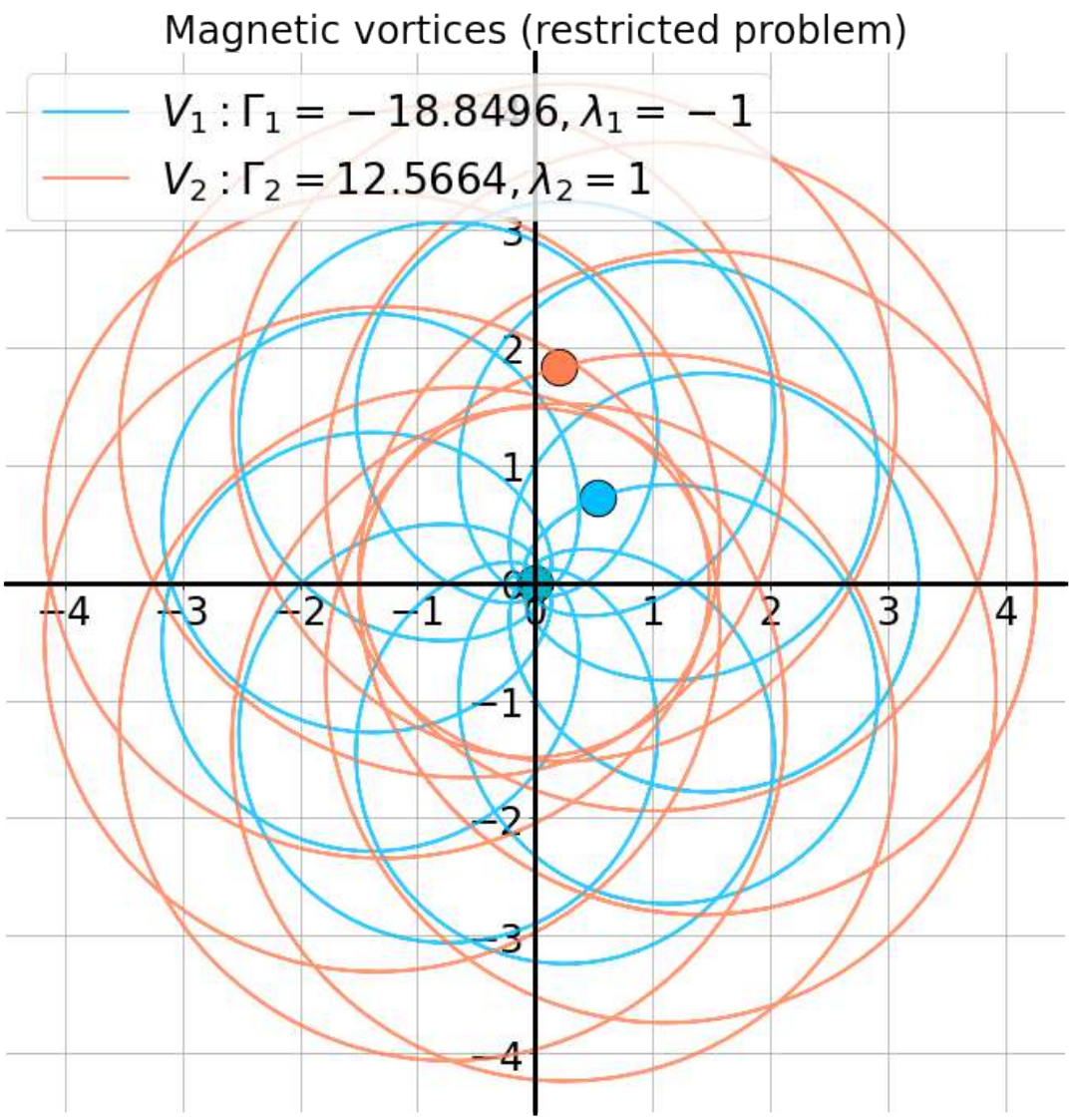
# timeline
t = np.linspace(0., frames, frames*steps_for_frame+1)
```

[14]:
```
%%time

# calculates vortex trajectories by solving the system
# of ordinary differential equations
result = odeint(model, r.reshape((N*2,)), t, (gamma, lambd))
```

```
Wall time: 120 ms
```

[15]:
```
%%time
create_plot(result, title, colors, labels, limits, output_filename, save_fig=True)
```



Wall time: 777 ms

[16]:
```
%%time

step=10
animation = create_animation(result, step, title, colors, labels, limits)
```

Wall time: 58.7 ms

[17]:
```
%%time
```


873

```
# JS animation with control buttons in Jupyter Notebook
HTML(animation.to_jshtml())
```

Wall time: 17 s

[17]: <IPython.core.display.HTML object>

[18]:
```
%%time

# saving animation to mp4-file
save_animation_mp4(animation, output_filename, fps=30, bitrate=1800, author='Palshin G.')
```

Wall time: 9.53 s

[19]:
```
%%time

# saving animation to gif-file
save_animation_gif(animation, output_filename, fps=30, bitrate=2, author='Palshin G.')
```

Wall time: 11 s

CompareMagneticRestrictedVortices.ipynb

[1]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate.odepack import odeint

import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation, PillowWriter
matplotlib.rcParams['animation.embed_limit'] = 2**128
%matplotlib inline

from IPython.display import HTML
```

[2]:
```
def model(y, t, gamma, lambd):

  """
  Model of 3 magnetic vortices restricted problem
  for scipy.integrate.odepack.odeint solution of
  the system of ordinary differential equations.

  Parameters
  ----------
  y : np.array([], dtype=np.float64)
     Start coordinates of vortices: [x1, y1, x2, y2]
  t : np.array([], dtype=np.float64)
     Timeline array
  gamma : np.array([], dtype=np.int8)
     Vector of vortex strengths: [Gamma_1, Gamma_2]
  lambd : np.array([], dtype=np.int8)
     Vector of vortex polarities: [lambda_1, lambda_2]
  """

  x1, y1, x2, y2 = y

  l1_sq  = x1**2 + y1**2
  l2_sq  = x2**2 + y2**2
  l12_sq = (x1-x2)**2 + (y1-y2)**2

  return [

     ( y1 / l1_sq + gamma[1]/lambd[1] * (y1 - y2)/l12_sq ) / lambd[0], # dx1/dt
     ( -x1 / l1_sq - gamma[1]/lambd[1] * (x1 - x2)/l12_sq ) / lambd[0], # dy1/dt

     ( y2 / l2_sq + gamma[0]/lambd[0] * (y2 - y1)/l12_sq ) / lambd[1], # dx2/dt
     ( -x2 / l2_sq - gamma[0]/lambd[0] * (x2 - x1)/l12_sq ) / lambd[1], # dy2/dt

  ]
```

[3]:
```
def axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2,
          title_fontsize=24, spines_linewidth=3, labelsize=24, legend_fontsize=26):

  """
  Formats plot.
```

```
    Parameters
    ----------
    ax1 : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        The first axis object to be formatted
    ax2 : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        The second axis object to be formatted
    plot_limits1 : dict
        The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    plot_limits2 : dict
        The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    title1 : str
        The first plot title
    title2 : str
        The second plot title
    title_fontsize : int, optional
        Title fontsize
    spines_linewidth : int, optional
        Linewidth of plot axes
    labelsize : int, optional
        Label size
    legend_fontsize: int, optional
        Legend fontsize
    """

    ax1.set_title(title1, fontsize=title_fontsize)
    ax2.set_title(title2, fontsize=title_fontsize)
    plt.tight_layout()

    for ax in [ax1, ax2]:
        ax.spines['left'].set_position('zero')
        ax.spines['right'].set_color('none')
        ax.yaxis.tick_left()
        ax.spines['bottom'].set_position('zero')
        ax.spines['top'].set_color('none')
        ax.xaxis.tick_bottom()

        ax.spines['left'].set_linewidth(spines_linewidth)
        ax.spines['bottom'].set_linewidth(spines_linewidth)

        ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=labelsize)

        ax.grid(ls='solid', lw=0.8)
        ax.legend(fontsize=legend_fontsize)

        ax.set(aspect='equal')

    ax1.set_xlim(plot_limits1['x_lim_l'], plot_limits1['x_lim_r'])
    ax1.set_ylim(plot_limits1['y_lim_b'], plot_limits1['y_lim_t'])

    ax2.set_xlim(plot_limits2['x_lim_l'], plot_limits2['x_lim_r'])
    ax2.set_ylim(plot_limits2['y_lim_b'], plot_limits2['y_lim_t'])
```

[4]:
```
def create_plot(result1, result2, title1, title2,
                colors, labels1, labels2,
                plot_limits1, plot_limits2,
                output_filename=None, save_fig=False):
```

```
    """
    Creates plot for the given result.

    Parametes
    ---------
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
       Solution of the first system of ordinary differential equations
       given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
       Solution of the second system of ordinary differential equations
       given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    title1 : str
       The first plot title
    title2 : str
       The second plot title
    colors : dict
       Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels1 : dict
       Dictionary of the first trajectories labels with keys [0,1,2]
    labels2 : dict
       Dictionary of the second trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits1 : dict
       The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    plot_limits2 : dict
       The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    output_filename : str, optional
       Name of the output pdf-file
    save_fig : bool, optional
       To save or not to save plot in a pdf-file. Default False. If True, then `output_filename` should be given.
    """

    plt.subplots_adjust(wspace=0)
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(20,9))

    ax1.plot(result1[:, 0], result1[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels1[0], alpha=0.8)
    ax1.plot(result1[:, 2], result1[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels1[1], alpha=0.8)

    ax2.plot(result2[:, 0], result2[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels2[0], alpha=0.8)
    ax2.plot(result2[:, 2], result2[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels2[1], alpha=0.8)

    ax1.scatter(result1[:, 0][-1], result1[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
    ax1.scatter(result1[:, 2][-1], result1[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)

    ax1.scatter(0, 0, s=500, facecolors=colors[2], edgecolors='black', alpha=1)

    ax2.scatter(result2[:, 0][-1], result2[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
    ax2.scatter(result2[:, 2][-1], result2[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)

    ax2.scatter(0, 0, s=500, facecolors=colors[2], edgecolors='black', alpha=1)

    axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2)

    if save_fig:
       fig.savefig(f'{output_filename}.pdf', bbox_inches='tight')
```

```
plt.show()
```

[5]:
```
def update_plot_data(t, result1, result2, lines, mk, step):

    """
    Updates plot to create animation.

    Parameters
    ----------
    t : int
        Timestamp for animation update
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the first system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the second system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    lines : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for trajectories animation. One object for each trajectory.
    mk : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for vortex animation. One object for each vortex.
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    """

    lines[0].set_data(result1[:, 0][:t*step], result1[:, 1][:t*step])
    lines[1].set_data(result1[:, 2][:t*step], result1[:, 3][:t*step])

    mk[0].set_data(result1[:, 0][t*step-1], result1[:, 1][t*step-1])
    mk[1].set_data(result1[:, 2][t*step-1], result1[:, 3][t*step-1])
    mk[2].set_data(0, 0)

    lines[2].set_data(result2[:, 0][:t*step], result2[:, 1][:t*step])
    lines[3].set_data(result2[:, 2][:t*step], result2[:, 3][:t*step])

    mk[3].set_data(result2[:, 0][t*step-1], result2[:, 1][t*step-1])
    mk[4].set_data(result2[:, 2][t*step-1], result2[:, 3][t*step-1])
    mk[5].set_data(0, 0)
```

[6]:
```
def create_animation(result1, result2, step,
                     title1, title2, colors, labels1,
                     labels2, plot_limits1, plot_limits2):

    """
    Creates animation object.

    Parameters
    ----------
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the first system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the second system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
```

```
    title1 : str
        The first plot title
    title2 : str
        The second plot title
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels1 : dict
        Dictionary of the first trajectories labels with keys [0,1,2]
    labels2 : dict
        Dictionary of the second trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits1 : dict
        The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    plot_limits2 : dict
        The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    """

    plt.subplots_adjust(wspace=0)
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(20,9))

    lines  = ([ax1.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels1[i])[0] for i in range(2)]
            +
             [ax2.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels2[i])[0] for i in range(2)])

    mk = ([ax1.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()]
        +
         [ax2.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()])

    axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2)

    if result1.shape == result2.shape:
        anim = FuncAnimation(fig, update_plot_data,
                             fargs=(result1, result2, lines, mk, step),
                             frames=int(result1.shape[0]/step), interval=2*step)
        plt.close(fig)

        return anim
```

[7]:
```
def save_animation_mp4(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in MP4 format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """
```


879

```
    Writer = matplotlib.animation.writers['ffmpeg']
    writer = Writer(fps=fps, bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.mp4', writer=writer)
```

[8]:
```
def save_animation_gif(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in GIF format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    writer = PillowWriter(fps=fps, codec='libx264', bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.gif', writer=writer)
```

[9]:
```
gamma1 = np.array([-6*np.pi,  4*np.pi ]) # gamma vector for the 1st configuration
lambd1 = np.array([ -1 ,  1 ]) # lambda vector for the 1st configuration

gamma2 = np.array([-6*np.pi,  4*np.pi ]) # gamma vector for the 2nd configuration
lambd2 = np.array([ -1 ,  1 ]) # lambda vector for the 2nd configuration
```

[10]:
```
# vortex positions

r1 = np.array(
    [np.array([ 3.25002, -0.000230329 ]),
     np.array([ 4.24835, 0. ])]
)

r2 = np.array(
    [np.array([ -0.0335614, -0.000230329 ]),
     np.array([ 1.48535, 0. ])]
)
```

[11]:
```
# output filename (without format)
output_filename = 'compare_two_restricted_configurations_1'

# plot title for the 1st configuration
title1 = 'First configuration'

# plot title for the 2nd configuration
title2 = 'Second configuration'
```

[12]:
```
# axes limits for the 1st configuration
limits1 = {
    'x_lim_l': -5, # left
```

```
  'x_lim_r': 5, # right
  'y_lim_b': -5, # bottom
  'y_lim_t': 5, # top
}

# axes limits for the 2nd configuration
limits2 = {
  'x_lim_l': -2, # left
  'x_lim_r': 2, # right
  'y_lim_b': -2, # bottom
  'y_lim_t': 2, # top
}

# colors of vortices
colors = {
  0: 'deepskyblue',
  1: 'coral',
  2: 'forestgreen',
}

# labels of vortices for the 1st configuration
labels1 = {
  0: f'$V_1: \Gamma_1={gamma1[0]:.4f}, \lambda_1={lambd1[0]}$',
  1: f'$V_2: \Gamma_2={gamma1[1]:.4f}, \lambda_2={lambd1[1]}$',
}

# labels of vortices for the 2nd configuration
labels2 = {
  0: f'$V_1: \Gamma_1={gamma2[0]:.4f}, \lambda_1={lambd2[0]}$',
  1: f'$V_2: \Gamma_2={gamma2[1]:.4f}, \lambda_2={lambd2[1]}$',
}
```

[13]:
```
# number of frames for the 1st configuration
frames1 = 20

# number of frames for the 2nd configuration
frames2 = 20

# how many steps for 1 frame for the 1st configuration
steps_for_frame1 = 75

# how many steps for 1 frame for the 2nd configuration
steps_for_frame2 = 75

# number of vortices
N = 2

# timeline for the 1st configuration
t1 = np.linspace(0., frames1, frames1*steps_for_frame1+1)

# timeline for the 1nd configuration
t2 = np.linspace(0., frames2, frames2*steps_for_frame2+1)
```

[14]:
```
%%time

# calculates vortex trajectories by solving two systems
```

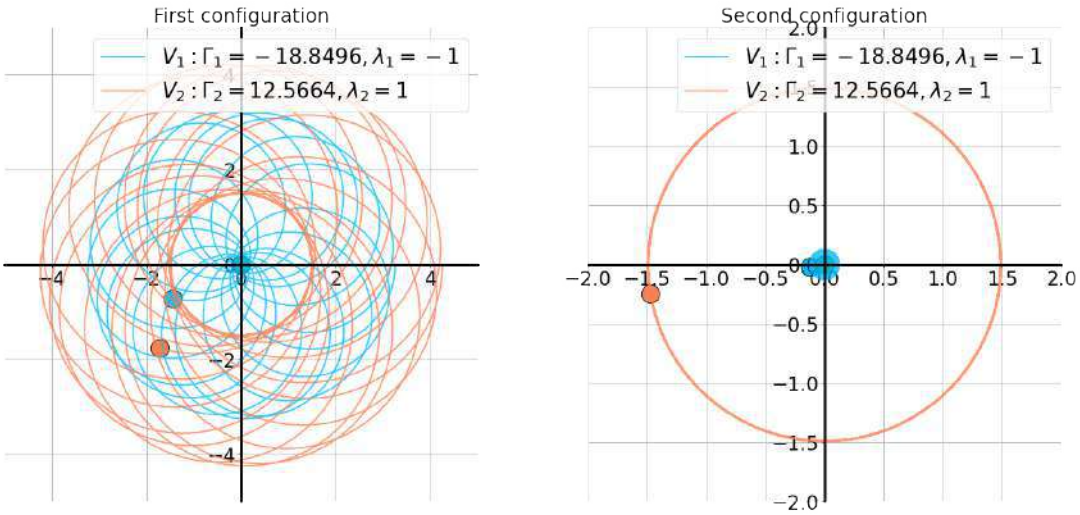

881

```
# of ordinary differential equations
result1 = odeint(model, r1.reshape((N*2,)), t1, (gamma1, lambd1))
result2 = odeint(model, r2.reshape((N*2,)), t2, (gamma2, lambd2))
```

Wall time: 656 ms

[15]:
```
%%time
create_plot(result1, result2, title1, title2, colors, labels1, labels2,
        limits1, limits2, output_filename=output_filename, save_fig=True)
```

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Wall time: 980 ms

[16]:
```
%%time

step=10
animation = create_animation(result1, result2, step,
                        title1, title2, colors, labels1,
                        labels2, limits1, limits2)
```

Wall time: 91.3 ms

<Figure size 432x288 with 0 Axes>

[17]:
```
%%time

# JS animation with control buttons in Jupyter Notebook
HTML(animation.to_jshtml())
```

```
Wall time: 26.3 s
```

[17]:
```
<IPython.core.display.HTML object>
```

[18]:
```
%%time

# saving animation to mp4-file
save_animation_mp4(animation, output_filename, fps=30, bitrate=1800, author='Palshin G.')
```

```
Wall time: 17.6 s
```

[19]:
```
%%time

# saving animation to gif-file
save_animation_gif(animation, output_filename, fps=30, bitrate=2, author='Palshin G.')
```

```
Wall time: 19.6 s
```

In(23):=

$$R\alpha=\Gamma_1(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2 u[t]^2;$$

$$Rv=(\Gamma_2 u[t]^2-\Gamma_1(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2))\times(\Gamma_1 u[t]^2-\Gamma_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$

$$Ru=(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)(\Gamma_1-\Gamma_2)^2-u[t]^2\Gamma_1\Gamma_2;$$

$$Q\alpha=\sqrt{\mathrm{Abs}[\Gamma_2]}\,u[t]\sqrt{\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}\times(\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2)-\Gamma_1(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2))+\sqrt{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times(\Gamma_1(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2(u[t]^2-v[t]^2));$$

$$Qv=\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}(\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2)\times(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-2u[t]^2-v[t]^2)+(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times(f\,\mathrm{Abs}[\Gamma_1]-2u[t]^2\Gamma_2-v[t]^2\Gamma_1))-\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]u[t](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)(\mathrm{Abs}[\Gamma_2](u[t]^2+v[t]^2)\times(\Gamma_1-\Gamma_2)+\Gamma_1\mathrm{Abs}[\Gamma_1]\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)+\Gamma_1\mathrm{Abs}[\Gamma_2](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-3u[t]^2-v[t]^2));$$

$$Qu=(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)(\mathrm{Sign}[\Gamma_1]((u[t]^2+v[t]^2)\times(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2)-2\Gamma_1\Gamma_2 v[t]^2)-f\,\Gamma_1(\Gamma_1-\Gamma_2))+u[t]\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}\times((f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)(\Gamma_1-2\Gamma_2)-\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2));$$

$$dadt=-\frac{\Gamma_2\mathrm{Sign}[\Gamma_1]}{\lambda_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}-\frac{\sqrt{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}}{\mathrm{Sign}[\Gamma_1]}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{R\alpha}{Q\alpha};$$

$$dvdt=-\frac{u[t]\,\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}{\lambda_1(u[t]^2+v[t]^2)}+\frac{u[t]\,\Gamma_2\mathrm{Sign}[\Gamma_1]}{\lambda_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{Rv}{Qv};$$

$$dudt=\frac{v[t]\,\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}{\lambda_1(u[t]^2+v[t]^2)}-\frac{v[t]\,\Gamma_2\mathrm{Sign}[\Gamma_1]}{\lambda_2(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}+v[t]\,\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\frac{Ru}{Qu};$$

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma_1}{\lambda_1}\mathrm{Log}\left[\frac{u[t]^2+v[t]^2}{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}\right]+\frac{\Gamma_2}{\lambda_2}\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\mathrm{Abs}[\Gamma_2]}(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\right]+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\lambda_1\lambda_2}\mathrm{Log}\left[\frac{u[t]^2+v[t]^2}{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]}+\frac{\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\mathrm{Abs}[\Gamma_2]}(f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\frac{2\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]u[t]\sqrt{\mathrm{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\mathrm{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)}}{\sqrt{\mathrm{Abs}[\Gamma_1]\mathrm{Abs}[\Gamma_2]}}\right]\right);$$

In(24):=

$$h_1[G1_,G2_,l1_,l2_,r1_,r2_]:=\frac{G1}{l1}\mathrm{Log}[r1]+\frac{G2}{l2}\mathrm{Log}[r2]+\frac{G1\,G2}{l1\,l2}\mathrm{Log}[\mathrm{Sqrt}[r1^2+r2^2+2\,r1\,r2]];$$

$$h_2[G1_,G2_,l1_,l2_,r1_,r2_]:=\frac{G1}{l1}\mathrm{Log}[r1]+\frac{G2}{l2}\mathrm{Log}[r2]+\frac{G1\,G2}{l1\,l2}\mathrm{Log}[\mathrm{Sqrt}[r1^2+r2^2-2\,r1\,r2]];$$

$$F[G1_,G2_,r1_,r2_]:=G1\,r1^2+G2\,r2^2;$$

```
C1[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(l1 r1^2-l2 r2^2)(r1+r2)+r1 r2(G1 r1-G2 r2);
C2[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(l1 r1^2-l2 r2^2)(r1-r2)-r1 r2(G1 r1+G2 r2);
Sol1[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(
solutions=Solve[{C1[G1,G2,l1,l2]==0,r1→0, r2→0},r1, Reals];
result={};
For[i=1,i≤ Length[solutions],i++,
result=Append[result,Normal@(r1/.solutions[[i]])]
];
result
);
Sol2[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(
solutions=Solve[{C2[G1,G2,l1,l2]==0,r1→0, r2→0},r1, Reals];
result={};
For[i=1,i≤ Length[solutions],i++,
result=Append[result,Normal@(r1/.solutions[[i]])]
];
clresult={};
For[i=1,i≤ Length[result],i++,
clresult=If[result[[i]]===r2,clresult,Append[clresult,result[[i]]]]
];
clresult
);
```

In(25):=

```
Γ1=-6Pi;
Γ2=4Pi;
λ1=-1;
λ2=1;
h0=40;
```

In(26):=

```
solutions1=Sol1[Γ1,Γ2,λ1,λ2];
solutions2=Sol2[Γ1,Γ2,λ1,λ2];
points={};
For[i=1,i≤ Length[solutions1],i++,
root=FindRoot[{h1[Γ1,Γ2,λ1,λ2,solutions1[[i]],r2]==h0},
{{r2,0.0001}},AccuracyGoal→∞];
points=Append[points,
{f0→ Simplify[F[Γ1,Γ2,solutions1[[i]],r2]]/.root}]
]
```

```
For[i=1,i≤ Length[solutions2],i++,
root=FindRoot[{h2[Γ1,Γ2,λ1,λ2,solutions2[[i]],r2]==h0},
{{r2,0.0001}},AccuracyGoal→20];
points=Append[points,
{f0→ Simplify[F[Γ1,Γ2,solutions2[[i]],r2]]/.root}]
]
points=Sort[points]
```

Out(26)=
```
{
{f0→-36.74971419724369`},
{f0→27.703452646388282`},
{f0→42.33174308849037`}
}
```

In(27):=
```
f=(f0/.points[[1]]);
solutions=NSolve[{H==h0,v[t]==0.001},{u[t],v[t]},Reals];
sol1=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[1]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[1]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,0},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
sol2=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[2]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[2]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,0},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
sol3=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[3]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[3]]),
```

```
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,0},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
sol4=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[4]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[4]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,0},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
```

In(28):=

$$x_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\,\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]\,\text{Sin}[\alpha[t]]);$$

$$y_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]\text{Cos}[\alpha[t]]);$$

$$x_2=\left(\frac{\text{Cos}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$

$$y_2=\left(\frac{\text{Sin}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$

In(29):=

```
Print[
"1st solution:",
\n(x₁, y₁):,
(Evaluate[{x₁,y₁}/.sol1]/.{t→ 0})[[1]],
\n(x₂, y₂):,
(Evaluate[{x₂,y₂}/.sol1]/.{t→ 0})[[1]]
]

Print[
"2nd solution:",
\n(x₁, y₁):,
(Evaluate[{x₁,y₁}/.sol2]/.{t→ 0})[[1]],
\n(x₂, y₂):,
(Evaluate[{x₂,y₂}/.sol2]/.{t→ 0})[[1]]
]

Print[
"3rd solution:",
\n(x₁, y₁):,
```

```
(Evaluate[{x1,y1}/.sol3]/.{t→ 0})[[1]],
\n(x2, y2):,
(Evaluate[{x2,y2}/.sol3]/.{t→ 0})[[1]]
]

Print[
"4th solution:",
\n(x1, y1):,
(Evaluate[{x1,y1}/.sol4]/.{t→ 0})[[1]],
\n(x2, y2):,
(Evaluate[{x2,y2}/.sol4]/.{t→ 0})[[1]]
]
```

1st solution:
(x_1, y_1): {5.228178582291297`,-0.00023032943298089036`}
(x_2, y_2): {6.170601889298866`,0.`}

2nd solution:
(x_1, y_1): {1.3975647133790023`,-0.00023032943298089036`}
(x_2, y_2): {0.0730166819829676`,0.`}

3rd solution:
(x_1, y_1): {1.3975638423138663`,-0.00023032943298089036`}
(x_2, y_2): {0.07299166897151833`,0.`}

4th solution:
(x_1, y_1): {-1.3963930362785646`,-0.00023032943298089036`}
(x_2, y_2): {0.020518561730909806`,0.`}

In(30):=

```
Rα=Γ1 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)-Γ2 u[t]^2;
Rv=(Γ2 u[t]^2-Γ1 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2))×
(Γ1 u[t]^2-Γ2 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2));
Ru=(f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2) (Γ1-Γ2)^2-u[t]^2 Γ1 Γ2;
Qα=√Abs[Γ2] u[t] √Sign[Γ1 Γ2] (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)×
(Γ2 (u[t]^2+v[t]^2)-Γ1 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2))+
√Abs[Γ1] (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)×
(Γ1 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)-Γ2 (u[t]^2-v[t]^2));
Qv=√Γ1 Γ2 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2) (Γ2 (u[t]^2+v[t]^2)×
(f Sign[Γ1]-2u[t]^2-v[t]^2)+(f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)×
(f Abs[Γ1]-2u[t]^2 Γ2-v[t]^2 Γ1))-
Sign[Γ1 Γ2] u[t] (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2) (Abs[Γ2] (u[t]^2+v[t]^2)×
(Γ1-Γ2)+Γ1 Abs[Γ1] Sign[Γ1 Γ2] (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)+
Γ1 Abs[Γ2] (f Sign[Γ1]-3u[t]^2-v[t]^2));
Qu=(f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2) (Sign[Γ1] ((u[t]^2+v[t]^2)×
(Γ1^2+Γ2^2)-2Γ1 Γ2 v[t]^2)-f Γ1 (Γ1-Γ2))+
u[t] √Γ1 Γ2 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)×
((f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2) (Γ1-2Γ2)-Γ2 (u[t]^2+v[t]^2));
dadt=-Γ2 Sign[Γ1] / (λ2 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2))-√Abs[Γ1] / Sign[Γ1] Γ1 Γ2 / (λ1 λ2) Rα / Qα;
dvdt=-u[t] Abs[Γ1] / (λ1 (u[t]^2+v[t]^2))+u[t] Γ2 Sign[Γ1] / (λ2 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2))+Γ1 Γ2 / (λ1 λ2) Rv / Qv;
dudt=v[t] Abs[Γ1] / (λ1 (u[t]^2+v[t]^2))-v[t] Γ2 Sign[Γ1] / (λ2 (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2))+v[t] Γ1 Γ2 / (λ1 λ2) Ru / Qu;
H=1/2 (Γ1/λ1 Log[(u[t]^2+v[t]^2) / Abs[Γ1]]+Γ2/λ2 Log[Sign[Γ1 Γ2] / Abs[Γ2] (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)]+
Γ1 Γ2 / (λ1 λ2) Log[(u[t]^2+v[t]^2) / Abs[Γ1]+Sign[Γ1 Γ2] / Abs[Γ2] (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2)-
2Sign[Γ1 Γ2] u[t] √Sign[Γ1 Γ2] (f Sign[Γ1]-u[t]^2-v[t]^2) / √Abs[Γ1] Abs[Γ2]]);
```

In(31):=

```
h1[G1_,G2_,l1_,l2_,r1_,r2_]:=
G1/l1 Log[r1]+G2/l2 Log[r2]+G1 G2/(l1 l2) Log[Sqrt[r1^2+r2^2+2 r1 r2]];
h2[G1_,G2_,l1_,l2_,r1_,r2_]:=
G1/l1 Log[r1]+G2/l2 Log[r2]+G1 G2/(l1 l2) Log[Sqrt[r1^2+r2^2-2 r1 r2]];
F[G1_,G2_,r1_,r2_]:=G1 r1^2+G2 r2^2;
```

```
C1[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(l1 r1^2-l2 r2^2)(r1+r2)+r1 r2(G1 r1-G2 r2);
C2[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(l1 r1^2-l2 r2^2)(r1-r2)-r1 r2(G1 r1+G2 r2);
Sol1[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(
solutions=Solve[{C1[G1,G2,l1,l2]==0,r1→0, r2→0},r1, Reals];
result={};
For[i=1,i≤ Length[solutions],i++,
result=Append[result,Normal@(r1/.solutions[[i]])]
];
result
);
Sol2[G1_,G2_,l1_,l2_]:=(
solutions=Solve[{C2[G1,G2,l1,l2]==0,r1→0, r2→0},r1, Reals];
result={};
For[i=1,i≤ Length[solutions],i++,
result=Append[result,Normal@(r1/.solutions[[i]])]
];
clresult={};
For[i=1,i≤ Length[result],i++,
clresult=If[result[[i]]===r2,clresult,Append[clresult,result[[i]]]]
];
clresult
);
```

In(32):=

```
Γ1=-18.849556;
Γ2=12.566371;
λ1=-1;
λ2=1;
h0=400;
```

In(33):=

```
solutions1=Sol1[Γ1,Γ2,λ1,λ2];
solutions2=Sol2[Γ1,Γ2,λ1,λ2];
points={};
For[i=1,i≤ Length[solutions1],i++,
root=FindRoot[{h1[Γ1,Γ2,λ1,λ2,solutions1[[i]],r2]==h0},
{{r2,0.0001}},AccuracyGoal→∞];
points=Append[points,
{f0→ Simplify[F[Γ1,Γ2,solutions1[[i]],r2]]/.root}]
]
```

```
For[i=1,i≤ Length[solutions2],i++,
root=FindRoot[{h2[Γ1,Γ2,λ1,λ2,solutions2[[i]],r2]==h0},
{{r2,0.0001}},AccuracyGoal→∞];
points=Append[points,
{f0→ Simplify[F[Γ1,Γ2,solutions2[[i]],r2]]/.root}]
]
points=Sort[points]
```

In(34):=

```
f=(f0/.points[[2]])+2;
solutions=NSolve[{H==h0,v[t]==0.001},{u[t],v[t]},Reals];
sol1=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[1]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[1]]),
α[0]==0.0},
{u,v,α},{t,0,5000},Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
sol2=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[2]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[2]]),
α[0]==0.0},
{u,v,α},{t,0,5000},Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
sol3=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[3]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[3]]),
α[0]==0.0},
{u,v,α},{t,0,100},Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
sol4=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
```

```
u[0]==(u[t]/.solutions[[4]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[4]]),
α[0]==0.0},
{u,v,α},{t,0,100},Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
```

In(35):=

$$x_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\,\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]\,\text{Sin}[\alpha[t]]);$$

$$y_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]\text{Cos}[\alpha[t]]);$$

$$x_2=\left(\frac{\text{Cos}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$

$$y_2=\left(\frac{\text{Sin}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$

In(36):=

```
x1x2y2sol1=ParametricPlot3D[
Evaluate[{x1,x2,y2}/.sol1],{t,0,1500},
PlotPoints→155000,PlotStyle→{Black}
];
```

In(37):=

```
Tori1=Show[{x1x2y2sol1},PlotRange→{{-30,30},{-30,30},{-30,30}},
Frame→False,Ticks→{{-1,1},{-1,1},{0,0}},GridLines→Automatic,
GridLinesStyle→Directive[Black,Black],Axes→True,Boxed→False,
AxesOrigin→{0,0,0},ImageSize→72 12,AspectRatio→1,
BaseStyle→{
FontWeight→"Plain",FontSize→24,FontFamily→"Times",Black
},
ViewAngle→15^∘]
```

In(38):=

$$R_1=\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2 u[t]^2;$$
$$Q_1=\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\,u[t]\,\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]\times$$
$$(\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2)-\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2))+$$
$$\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times$$
$$(\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2(u[t]^2-v[t]^2));$$
$$R_2=\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\,\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_1]+u[t]^2+v[t]^2)-\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]]\,u[t]\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_2]+\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$
$$Q_2=\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\text{Abs}[\Gamma_2](\text{Abs}[\Gamma_1](\text{Abs}[\Gamma_1]+4\,u[t]^2)+(u[t]^2+v[t]^2)^2)\times$$
$$(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)+\text{Abs}[\Gamma_1](u[t]^2+v[t]^2)(\Gamma_2{}^2+$$
$$(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)^2)-2\,u[t]\,\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\,\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]\text{Abs}[\Gamma_2]]\times$$
$$\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)](\text{Abs}[\Gamma_1]+u[t]^2+v[t]^2)\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_2]+\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$
$$x_1=((\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2])/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]])\times$$
$$(u[t]*\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]*\text{Sin}[\alpha[t]]);$$
$$y_1=((\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2])/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]])\times$$
$$(u[t]*\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]*\text{Cos}[\alpha[t]]);$$
$$x_2=(1/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]])*\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_2]*f-$$
$$\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2]*(u[t]^2+v[t]^2)]*\text{Cos}[\alpha[t]];$$
$$y_2=(1/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]])*\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_2]*f-$$
$$\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2]*(u[t]^2+v[t]^2)]*\text{Sin}[\alpha[t]];$$
$$r_1=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[x_1{}^2+y_1{}^2]];$$
$$r_2=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[x_2{}^2+y_2{}^2]];$$
$$r_{12}=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]];$$
$$\text{Expr}_1=\text{Refine}[\text{Simplify}[-\Gamma_1\frac{y_1}{1-r_1{}^2}-c*\Gamma_2\frac{y_1-y_2}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_2=\text{Refine}[\text{Simplify}[\Gamma_1\frac{x_1}{1-r_1{}^2}+c*\Gamma_2\frac{x_1-x_2}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_3=\text{Refine}[\text{Simplify}[-\Gamma_2\frac{y_2}{1-r_2{}^2}-c*\Gamma_1\frac{y_2-y_1}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_4=\text{Refine}[\text{Simplify}[\Gamma_2\frac{x_2}{1-r_2{}^2}+c*\Gamma_2\frac{x_2-x_1}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$

$$\text{dadt}=\frac{\Gamma_2{}^2}{\Gamma_2-f+\text{Sign}[\Gamma_1](u[t]^2+v[t]^2)}+c\,\frac{\Gamma_1\text{Abs}[\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]]}{\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]}\frac{R_1}{Q_1}+$$
$$\varepsilon\,\Gamma_1\text{Abs}[\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\times$$

$$\frac{\text{Abs}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2}{\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]}\frac{R_2}{Q_2};$$

dvdt=Sign[$\Gamma_1\,\Gamma_2$]Sqrt[Abs[Γ_1]](Expr$_2$ Cos[α[t]] - Expr$_1$ Sin[α[t]]) - u[t] dadt;

dudt=Sign[$\Gamma_1\,\Gamma_2$]Sqrt[Abs[Γ_1]](Expr$_2$ Sin[α[t]] + Expr$_1$ Cos[α[t]]) + v[t] dadt;

H=(1/2)(Γ_1^2Log[1-(u[t]^2+v[t]^2)/Abs[Γ_1]]+
Γ_2^2Log[1-(Sign[Γ_2]*f)/Abs[Γ_2]+
(Sign[Γ_1]Sign[Γ_2](u[t]^2+v[t]^2))/Abs[Γ_2]]-
Γ_1*Γ_2(c+ε)Log[(u[t]^2+v[t]^2)/Abs[Γ_1]-(2*u[t]*Sign[Γ_1]Sign[Γ_2]×
Sqrt[Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2))])/Sqrt[Abs[Γ_1]Abs[Γ_2]]+
(Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2)))/Abs[Γ_2]]+ε*Γ_1*Γ_2*Log[1-
(2*u[t]*Sign[Γ_1]Sign[Γ_2]Sqrt[Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2))])/
Sqrt[Abs[Γ_1]Abs[Γ_2]]+
(Sign[Γ_2](u[t]^2+v[t]^2)(f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2)))/(Abs[Γ_1]Abs[Γ_2])]);

In(39):=

W1[r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=(1-r1^2)(1-r2^2)((c(1+r1*r2)+e)(G1*r1-G2*r2)-
e(G1*r1^3-G2*r2^3))-r1*r2*(r1+r2)(1+r1*r2)(G1(1-r2^2)-G2(1-r1^2));
W2[r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=(1-r1^2)(1-r2^2)((c(1-r1*r2)+e)(G1*r1+G2*r2)-
e(G1*r1^3+G2*r2^3))+r1*r2*(r1-r2)(1-r1*r2)(G1(1-r2^2)-G2(1-r1^2));

h_1[r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=
$\frac{1}{2}$(G1^{2}Log[1-r1^2]+G2^{2}Log[1-r2^2]+G1*G2*Log[$\frac{(1+r1*r2)^{2*e}}{(r1+r2)^{2*(c+e)}}$]);
h_2[r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=
$\frac{1}{2}$(G1^{2}Log[1-r1^2]+G2^{2}Log[1-r2^2]-(c+e)*G1*G2*Log[(r1-r2)^2]+
e*G1*G2*Log[(1-r1*r2)^2]);
F[r1_,r2_, G1_,G2_]:=G1*r1^2+G2*r2^2;
h_r=$\frac{1}{2}$(Γ_1^2Log[1-r1^2]+Γ_2^2Log[1-r2^2]-(c+ε)*$\Gamma_1\Gamma_2$×Log[(r1-r2)^2]+
ε×$\Gamma_1\Gamma_2$Log[(1-r1*r2)^2]);

In(40):=

Γ_1=1;
Γ_2=-0.45;
c=1.5;
ε=3;
h0=-1.3;

In(41):=
```
roots1=FindRoot[{W2[r2,Γ1,Γ2,c,ε]==0,hr==h0},
{{r1,0.825},{r2,0.39}},AccuracyGoal→20];
roots2=FindRoot[{W2[r2,Γ1,Γ2,c,ε]==0,hr==h0},
{{r1,0.3},{r2,0.5}},AccuracyGoal→20];
points={
{f0→ F[r1,r2,Γ1,Γ2]/.roots1},
{f0→ F[r1,r2,Γ1,Γ2]/.roots2}
};
points=Sort[points];
```

In(42):=
```
sol2=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[2]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[2]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,20},
Method→"ExplicitRungeKutta",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→50];
```

In(43):=
$$x_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\,\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]\,\text{Sin}[\alpha[t]]);$$
$$y_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]\text{Cos}[\alpha[t]]);$$
$$x_2=\left(\frac{\text{Cos}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$
$$y_2=\left(\frac{\text{Sin}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$

In(44):=
```
tsol2=15;
x1y1sol2=ParametricPlot[Evaluate[{x1,y1}/.sol2],{t,0,tsol2},
PlotPoints→5000,PlotStyle→{Red}];
x1y1sol2point=Graphics[{PointSize[0.04],Red,
Point[Evaluate[{x1,y1}/.sol2]/.{t→tsol2}]}];
x2y2sol2=ParametricPlot[Evaluate[{x2,y2}/.sol2],{t,0,tsol2},
PlotPoints→5000,PlotStyle→{Blue}];
x2y2sol2point=Graphics[{PointSize[0.04],Blue,
Point[Evaluate[{x2,y2}/.sol2]/.{t→tsol2}]}];
Show[{x1y1sol2,x2y2sol2,x1y1sol2point,x2y2sol2point},Frame→True,
```

```
GridLines→Automatic,GridLinesStyle→Directive[Dashed,Black],
Axes→False,AxesLabel→None, PlotRange→{{-1,1},{-1,1}},
LabelStyle→Directive[20, Black,FontFamily→"Times"]]
```

BoseEinsteinVortices.ipynb

[1]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate.odepack import odeint

import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation, PillowWriter
matplotlib.rcParams['animation.embed_limit'] = 2**128
%matplotlib inline

from IPython.display import HTML
```

[2]:
```
def model(y, t, gamma, c, e):

    """
    Generalized model of two vortex filaments
    in a Bose-Einstein condensate enclosed
    in a cylindrical trap and two vortices
    in the ideal fluid contained in a domain
    with the form of a circular cylinder
    for scipy.integrate.odepack.odeint solution of
    the system of ordinary differential equations.

    Parameters
    ----------
    y : np.array([], dtype=np.float64)
        Start coordinates of vortices: [x1, y1, x2, y2]
    t : np.array([], dtype=np.float64)
        Timeline array
    gamma : np.array([], dtype=np.int8)
        Vector of vortex strengths: [Gamma_1, Gamma_2]
    c : float
    e : float
    """

    x1, y1, x2, y2 = y

    l1_sq  = x1**2 + y1**2
    l2_sq  = x2**2 + y2**2
    l12_sq = (x1-x2)**2 + (y1-y2)**2

    return [

        (
            -gamma[0] * y1 / (1 - l1_sq) -
            (c+e) * gamma[1] * (y1-y2) / l12_sq +
            e * gamma[1] * (y1 * l2_sq - y2) / (l1_sq*l2_sq - 2*(x1*x2 + y1*y2) + 1)
        ), # dx1/dt

        (
            gamma[0] * x1 / (1 - l1_sq) +
            (c+e) * gamma[1] * (x1-x2) / l12_sq -
            e * gamma[1] * (x1 * l2_sq - x2) / (l1_sq*l2_sq - 2*(x1*x2 + y1*y2) + 1)
```

```
    ), # dy1/dt



    (
        -gamma[1] * y2 / (1 - l2_sq) -
        (c+e) * gamma[0] * (y2-y1) / l12_sq +
        e * gamma[0] * (y2 * l1_sq - y1) / (l1_sq*l2_sq - 2*(x1*x2 + y1*y2) + 1)
    ), # dx2/dt

    (
        gamma[1] * x2 / (1 - l2_sq) +
        (c+e) * gamma[0] * (x2-x1) / l12_sq -
        e * gamma[0] * (x2 * l1_sq - x1) / (l1_sq*l2_sq - 2*(x1*x2 + y1*y2) + 1)
    ), # dy2/dt

]
```

[3]:
```
def axes_format(ax, plot_limits, title, title_fontsize=24, spines_linewidth=3, labelsize=24, legend_fontsize=26):

    """
    Formats plot.

    Parameters
    ----------
    ax : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        Axis object to be formatted
    plot_limits : dict
        Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    title : str
        Plot title
    title_fontsize : int, optional
        Title fontsize
    spines_linewidth : int, optional
        Linewidth of plot axes
    labelsize : int, optional
        Label size
    legend_fontsize: int, optional
        Legend fontsize
    """

    ax.set_title(title, fontsize=title_fontsize)
    plt.tight_layout()

    ax.spines['left'].set_position('zero')
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.yaxis.tick_left()
    ax.spines['bottom'].set_position('zero')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.tick_bottom()

    ax.spines['left'].set_linewidth(spines_linewidth)
    ax.spines['bottom'].set_linewidth(spines_linewidth)

    ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=labelsize)
```

```
    ax.set_xlim(plot_limits['x_lim_l'], plot_limits['x_lim_r'])
    ax.set_ylim(plot_limits['y_lim_b'], plot_limits['y_lim_t'])

    ax.set(aspect='equal')

    plt.grid(ls='solid', lw=0.8)
    plt.legend(fontsize=legend_fontsize)
```

[4]:
```
def create_plot(result, title, colors, labels, plot_limits, output_filename=None, save_fig=False):

    """
    Creates plot for the given result.

    Parametes
    ---------
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    title : str
        Plot title.
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels : dict
        Dictionary of trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits : dict
        Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    output_filename : str, optional
        Name of the output pdf-file
    save_fig : bool, optional
        To save or not to save plot in a pdf-file. Default False. If True, then `output_filename ` should be given.
    """

    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, figsize=(10,10))

    ax.plot(result[:, 0], result[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels[0], alpha=0.8)
    ax.plot(result[:, 2], result[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels[1], alpha=0.8)

    ax.scatter(result[:, 0][-1], result[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
    ax.scatter(result[:, 2][-1], result[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)

    axes_format(ax, plot_limits, title)

    if save_fig:
        fig.savefig(f'{output_filename}.pdf', bbox_inches='tight')

    plt.show()
```

[5]:
```
def update_plot_data(t, result, lines, mk, step):

    """
    Updates plot to create animation.

    Parameters
    ----------
    t : int
        Timestamp for animation update
```


899

```
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    lines : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for trajectories animation. One object for each trajectory.
    mk : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for vortex animation. One object for each vortex.
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    """

    lines[0].set_data(result[:, 0][:t*step], result[:, 1][:t*step])
    lines[1].set_data(result[:, 2][:t*step], result[:, 3][:t*step])

    mk[0].set_data(result[:, 0][t*step-1], result[:, 1][t*step-1])
    mk[1].set_data(result[:, 2][t*step-1], result[:, 3][t*step-1])
```

[6]:
```
def create_animation(result, step, title, colors, labels, plot_limits):

    """
    Creates animation object.

    Parameters
    ----------
    result : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    title : str
        Plot title.
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels : dict
        Dictionary of trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits : dict
        Axes limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    """
    plt.ioff()
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, figsize=(10,10))

    lines  = [ax.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels[i])[0] for i in range(2)]
    mk = [ax.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()]

    axes_format(ax, plot_limits, title)

    anim =  FuncAnimation(fig, update_plot_data,
                    fargs=(result, lines, mk, step),
                    frames=int(result.shape[0]/step), interval=2*step)
    plt.close(fig)

    return anim
```

[7]:
```
def save_animation_mp4(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
```


900

```
    Saves animation in MP4 format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    Writer = matplotlib.animation.writers['ffmpeg']
    writer = Writer(fps=fps, bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.mp4', writer=writer)
```

[8]:
```
def save_animation_gif(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in GIF format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    writer = PillowWriter(fps=fps, codec='libx264', bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.gif', writer=writer)
```

[9]:
```
gamma = np.array([1, -0.45]) # gamma vector
c = 1.5 # c parameter
e = 3 # epsilon parameter
```

[10]:
```
# vortices initial position

r = np.array(
    [np.array([ 0.435162,-0.001 ]),
     np.array([ 0.868418,0. ])]
)
```

[11]:
```
# output filename (without format)
output_filename = 'bose_einstein_1'
```


901

```
# plot title for the 1st configuration
title = 'Vortex trajectories'
```

[12]:
```
# axes limits
limits = {
  'x_lim_l': -1.1, # left
  'x_lim_r':  1.1, # right
  'y_lim_b': -1.1, # bottom
  'y_lim_t':  1.1, # top
}

# colors of vortices
colors = {
  0: 'deepskyblue',
  1: 'coral',
}

# labels of vortices
labels = {
  0: f'$V_1: \Gamma_1={gamma[0]}$',
  1: f'$V_2: \Gamma_2={gamma[1]}$',
}
```

[13]:
```
# number of frames
frames = 5

# how many steps for 1 frame
steps_for_frame = 1000

# number of vortices
N = 2

# timeline
t = np.linspace(0., frames, frames*steps_for_frame+1)
```

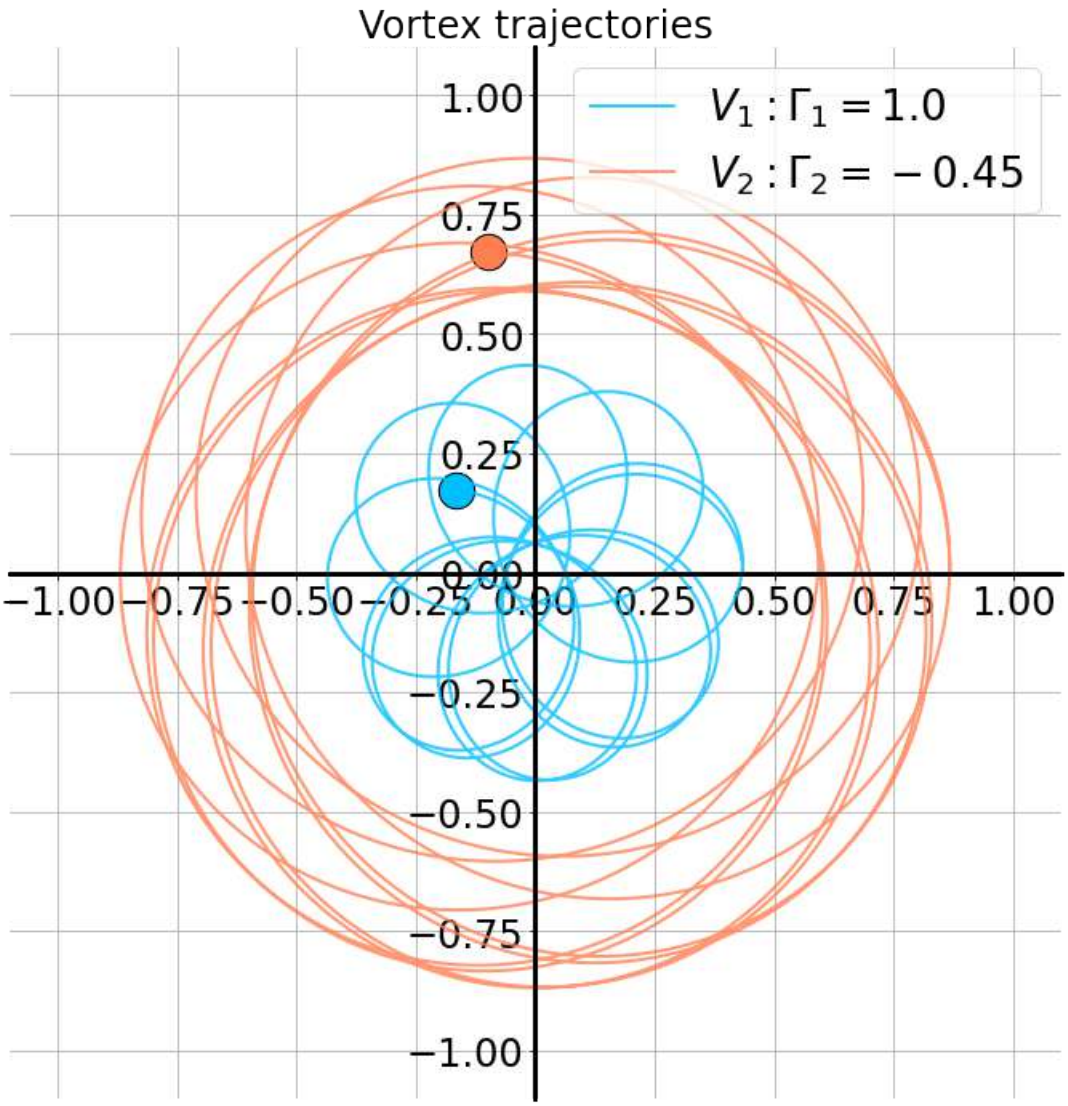
[14]:
```
%%time

# calculates vortex trajectories by solving the system
# of ordinary differential equations
result = odeint(model, r.reshape((N*2,)), t, (gamma, c, e))
```

```
Wall time: 38.5 ms
```

[15]:
```
%%time
create_plot(result, title, colors, labels, limits, output_filename, save_fig=True)
```


902



Wall time: 650 ms

[16]:
```
%%time

step=100
animation = create_animation(result, step, title, colors, labels, limits)
```

Wall time: 75.8 ms

[17]:
```
%%time
```


903

```
# JS animation with control buttons in Jupyter Notebook
HTML(animation.to_jshtml())
```

Wall time: 5.37 s

[17]: <IPython.core.display.HTML object>

[18]:
```
%%time

# saving animation to mp4-file
save_animation_mp4(animation, output_filename, fps=30, bitrate=1800, author='Palshin G.')
```

Wall time: 3.53 s

[19]:
```
%%time

# saving animation to gif-file
save_animation_gif(animation, output_filename, fps=30, bitrate=2, author='Palshin G.')
```

Wall time: 3.71 s

CompareBoseEinsteinVortices.ipynb

[1]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate.odepack import odeint

import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation, PillowWriter
matplotlib.rcParams['animation.embed_limit'] = 2**128
%matplotlib inline

from IPython.display import HTML
```

[2]:
```
def model(y, t, gamma, c, e):

    """
    Generalized model of two vortex filaments
    in a Bose-Einstein condensate enclosed
    in a cylindrical trap and two vortices
    in the ideal fluid contained in a domain
    with the form of a circular cylinder
    for scipy.integrate.odepack.odeint solution of
    the system of ordinary differential equations.

    Parameters
    ----------
    y : np.array([], dtype=np.float64)
        Start coordinates of vortices: [x1, y1, x2, y2]
    t : np.array([], dtype=np.float64)
        Timeline array
    gamma : np.array([], dtype=np.int8)
        Vector of vortex strengths: [Gamma_1, Gamma_2]
    c : float
    e : float
    """

    x1, y1, x2, y2 = y

    l1_sq  = x1**2 + y1**2
    l2_sq  = x2**2 + y2**2
    l12_sq = (x1-x2)**2 + (y1-y2)**2

    return [

        (
            -gamma[0] * y1 / (1 - l1_sq) -
            (c+e) * gamma[1] * (y1-y2) / l12_sq +
            e * gamma[1] * (y1 * l2_sq - y2) / (l1_sq*l2_sq - 2*(x1*x2 + y1*y2) + 1)
        ), # dx1/dt

        (
            gamma[0] * x1 / (1 - l1_sq) +
            (c+e) * gamma[1] * (x1-x2) / l12_sq -
            e * gamma[1] * (x1 * l2_sq - x2) / (l1_sq*l2_sq - 2*(x1*x2 + y1*y2) + 1)
```

```
    ), # dy1/dt



    (
        -gamma[1] * y2 / (1 - l2_sq) -
        (c+e) * gamma[0] * (y2-y1) / l12_sq +
        e * gamma[0] * (y2 * l1_sq - y1) / (l1_sq*l2_sq - 2*(x1*x2 + y1*y2) + 1)
    ), # dx2/dt

    (
        gamma[1] * x2 / (1 - l2_sq) +
        (c+e) * gamma[0] * (x2-x1) / l12_sq -
        e * gamma[0] * (x2 * l1_sq - x1) / (l1_sq*l2_sq - 2*(x1*x2 + y1*y2) + 1)
    ), # dy2/dt

]
```

[3]:
```
def axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2,
                title_fontsize=24, spines_linewidth=3, labelsize=24, legend_fontsize=26):

    """
    Formats plot.

    Parameters
    ----------
    ax1 : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        The first axis object to be formatted
    ax2 : matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot object
        The second axis object to be formatted
    plot_limits1 : dict
        The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    plot_limits2 : dict
        The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    title1 : str
        The first plot title
    title2 : str
        The second plot title
    title_fontsize : int, optional
        Title fontsize
    spines_linewidth : int, optional
        Linewidth of plot axes
    labelsize : int, optional
        Label size
    legend_fontsize: int, optional
        Legend fontsize
    """

    ax1.set_title(title1, fontsize=title_fontsize)
    ax2.set_title(title2, fontsize=title_fontsize)
    plt.tight_layout()

    for ax in [ax1, ax2]:
        ax.spines['left'].set_position('zero')
        ax.spines['right'].set_color('none')
        ax.yaxis.tick_left()
```

```
    ax.spines['bottom'].set_position('zero')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.tick_bottom()

    ax.spines['left'].set_linewidth(spines_linewidth)
    ax.spines['bottom'].set_linewidth(spines_linewidth)

    ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=labelsize)

    ax.grid(ls='solid', lw=0.8)
    ax.legend(fontsize=legend_fontsize)

    ax.set(aspect='equal')

ax1.set_xlim(plot_limits1['x_lim_l'], plot_limits1['x_lim_r'])
ax1.set_ylim(plot_limits1['y_lim_b'], plot_limits1['y_lim_t'])

ax2.set_xlim(plot_limits2['x_lim_l'], plot_limits2['x_lim_r'])
ax2.set_ylim(plot_limits2['y_lim_b'], plot_limits2['y_lim_t'])
```

[4]:
```
def create_plot(result1, result2, title1, title2,
                colors, labels1, labels2,
                plot_limits1, plot_limits2,
                output_filename=None, save_fig=False):

    """
    Creates plot for the given result.

    Parametes
    ---------
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the first system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the second system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    title1 : str
        The first plot title
    title2 : str
        The second plot title
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels1 : dict
        Dictionary of the first trajectories labels with keys [0,1,2]
    labels2 : dict
        Dictionary of the second trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits1 : dict
        The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    plot_limits2 : dict
        The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    output_filename : str, optional
        Name of the output pdf-file
    save_fig : bool, optional
        To save or not to save plot in a pdf-file. Default False. If True, then `output_filename ` should be given.
    """
```

```
plt.subplots_adjust(wspace=0)
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(20,9))

ax1.plot(result1[:, 0], result1[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels1[0], alpha=0.8)
ax1.plot(result1[:, 2], result1[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels1[1], alpha=0.8)

ax2.plot(result2[:, 0], result2[:, 1], 'k-', lw=2 , color=colors[0], label=labels2[0], alpha=0.8)
ax2.plot(result2[:, 2], result2[:, 3], 'k-', lw=2 , color=colors[1], label=labels2[1], alpha=0.8)

ax1.scatter(result1[:, 0][-1], result1[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
ax1.scatter(result1[:, 2][-1], result1[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)

ax2.scatter(result2[:, 0][-1], result2[:, 1][-1], s=500, facecolors=colors[0], edgecolors='black', alpha=1)
ax2.scatter(result2[:, 2][-1], result2[:, 3][-1], s=500, facecolors=colors[1], edgecolors='black', alpha=1)

axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2)

if save_fig:
    fig.savefig(f'{output_filename}.pdf', bbox_inches='tight')

plt.show()
```

[5]:
```
def update_plot_data(t, result1, result2, lines, mk, step):

    """
    Updates plot to create animation.

    Parameters
    ----------
    t : int
        Timestamp for animation update
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the first system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the second system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    lines : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for trajectories animation. One object for each trajectory.
    mk : list
        The list of matplotlib.lines.Line2D objects for vortex animation. One object for each vortex.
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    """

    lines[0].set_data(result1[:, 0][:t*step], result1[:, 1][:t*step])
    lines[1].set_data(result1[:, 2][:t*step], result1[:, 3][:t*step])

    mk[0].set_data(result1[:, 0][t*step-1], result1[:, 1][t*step-1])
    mk[1].set_data(result1[:, 2][t*step-1], result1[:, 3][t*step-1])

    lines[2].set_data(result2[:, 0][:t*step], result2[:, 1][:t*step])
    lines[3].set_data(result2[:, 2][:t*step], result2[:, 3][:t*step])

    mk[2].set_data(result2[:, 0][t*step-1], result2[:, 1][t*step-1])
    mk[3].set_data(result2[:, 2][t*step-1], result2[:, 3][t*step-1])
```

[6]:
```
def create_animation(result1, result2, step,
                     title1, title2, colors, labels1,
                     labels2, plot_limits1, plot_limits2):

    """
    Creates animation object.

    Parameters
    ----------
    result1 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the first system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    result2 : np.array([], dtype=np.float64)
        Solution of the second system of ordinary differential equations
        given by scipy.integrate.odepack.odeint() function
    step : int
        Step with which timestamps are chosen
    title1 : str
        The first plot title
    title2 : str
        The second plot title
    colors : dict
        Dictionary of trajectories colors with keys [0,1,2]
    labels1 : dict
        Dictionary of the first trajectories labels with keys [0,1,2]
    labels2 : dict
        Dictionary of the second trajectories labels with keys [0,1,2]
    plot_limits1 : dict
        The first axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    plot_limits2 : dict
        The second axis limits. Dictionary with keys ['x_lim_l', 'x_lim_r', 'y_lim_t', 'y_lim_b']
    """

    plt.subplots_adjust(wspace=0)
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(20,9))

    lines  = ([ax1.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels1[i])[0] for i in range(2)]
              +
              [ax2.plot([], [], 'k-', lw=2 , color=colors[i], label=labels2[i])[0] for i in range(2)])

    mk = ([ax1.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()]
          +
          [ax2.plot([], [], 'ro', ms=10, color=c)[0] for c in colors.values()])

    axes_format(ax1, ax2, plot_limits1, plot_limits2, title1, title2)

    if result1.shape == result2.shape:
        anim = FuncAnimation(fig, update_plot_data,
                             fargs=(result1, result2, lines, mk, step),
                             frames=int(result1.shape[0]/step), interval=2*step)
        plt.close(fig)

        return anim
```


909

[7]:
```
def save_animation_mp4(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in MP4 format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    Writer = matplotlib.animation.writers['ffmpeg']
    writer = Writer(fps=fps, bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.mp4', writer=writer)
```

[8]:
```
def save_animation_gif(animation, output_filename, fps, bitrate, author):

    """
    Saves animation in GIF format.

    Parametes
    ---------
    animation : matplotlib.animation.FuncAnimation object
        Animation object to save
    output_filename : str
        Output filename (without format)
    fps : int
        Animation frames per second
    bitrate : int
        Animation bitrate
    author : str
        You can put your name to animation metadata
    """

    writer = PillowWriter(fps=fps, codec='libx264', bitrate=bitrate, metadata=dict(author=author))
    animation.save(f'{output_filename}.gif', writer=writer)
```

[9]:
```
gamma1 = np.array([1, -0.45]) # gamma vector for the 1st configuration
c1 = 1.5
e1 = 3

gamma2 = np.array([1, -0.45]) # gamma vector for the 2nd configuration
c2 = 1.5
e2 = 3
```

[10]:
```
# vortex positions

r1 = np.array(
```


910

```
   [np.array([ 0.485954,-0.001 ]),
    np.array([ 0.824826,0. ])]
)

r2 = np.array(
   [np.array([ 0.401357,-0.001 ]),
    np.array([ 0.761706,0. ])]
)
```

[11]:
```
# output filename (without format)
output_filename = 'compare_bose_einstein_1'

# plot title for the 1st configuration
title1 = 'First configuration'

# plot title for the 2nd configuration
title2 = 'Second configuration'
```

[12]:
```
# axes limits for the 1st configuration
limits1 = {
  'x_lim_l': -1, # left
  'x_lim_r':  1, # right
  'y_lim_b': -1, # bottom
  'y_lim_t':  1, # top
}

# axes limits for the 2nd configuration
limits2 = {
  'x_lim_l': -1, # left
  'x_lim_r':  1, # right
  'y_lim_b': -1, # bottom
  'y_lim_t':  1, # top
}

# colors of vortices
colors = {
  0: 'deepskyblue',
  1: 'coral',
}

# labels of vortices for the 1st configuration
labels1 = {
  0: f'$V_1: \Gamma_1={gamma1[0]:.2f}$',
  1: f'$V_2: \Gamma_2={gamma1[1]:.2f}$',
}

# labels of vortices for the 2nd configuration
labels2 = {
  0: f'$V_1: \Gamma_1={gamma2[0]:.2f}$',
  1: f'$V_2: \Gamma_2={gamma2[1]:.2f}$',
}
```

[13]:
```
# number of frames for the 1st configuration
frames1 = 5

# number of frames for the 2nd configuration
```

```
frames2 = 5

# how many steps for 1 frame for the 1st configuration
steps_for_frame1 = 1000

# how many steps for 1 frame for the 2nd configuration
steps_for_frame2 = 1000

# number of vortices
N = 2

# timeline for the 1st configuration
t1 = np.linspace(0., frames1, frames1*steps_for_frame1+1)

# timeline for the 1nd configuration
t2 = np.linspace(0., frames2, frames2*steps_for_frame2+1)
```

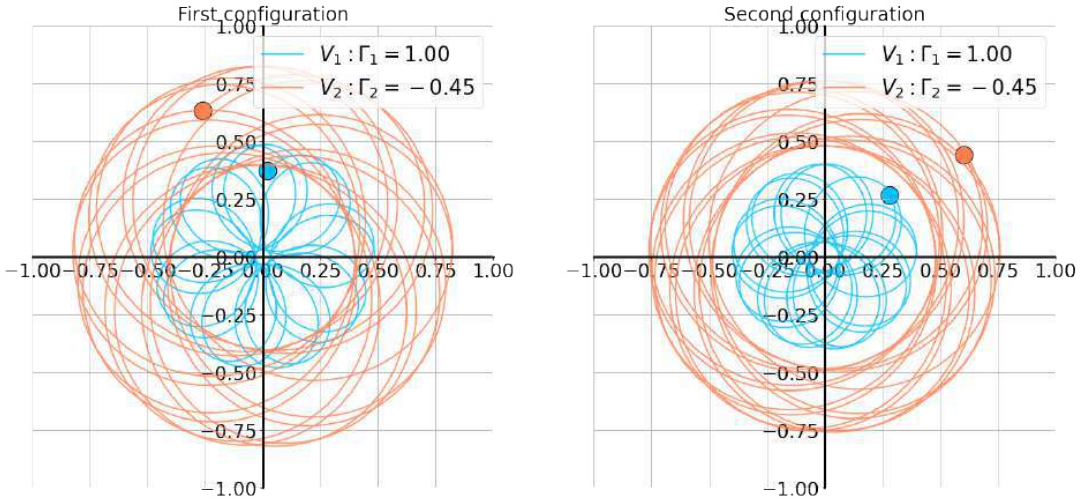
[14]:
```
%%time

# calculates vortex trajectories by solving two systems
# of ordinary differential equations
result1 = odeint(model, r1.reshape((N*2,)), t1, (gamma1, c1, e1))
result2 = odeint(model, r2.reshape((N*2,)), t2, (gamma2, c2, e2))
```

Wall time: 100 ms

[15]:
```
%%time
create_plot(result1, result2, title1, title2, colors, labels1, labels2,
        limits1, limits2, output_filename=output_filename, save_fig=True)
```

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



Wall time: 975 ms

[16]:
```
%%time

step=10
animation = create_animation(result1, result2, step,
                             title1, title2, colors, labels1,
                             labels2, limits1, limits2)
```

Wall time: 117 ms

<Figure size 432x288 with 0 Axes>

[17]:
```
%%time

# JS animation with control buttons in Jupyter Notebook
HTML(animation.to_jshtml())
```

Wall time: 1min 37s

[17]: <IPython.core.display.HTML object>

[18]:
```
%%time

# saving animation to mp4-file
save_animation_mp4(animation, output_filename, fps=30, bitrate=1800, author='Palshin G.')
```

Wall time: 1min 5s

[19]:
```
%%time

# saving animation to gif-file
save_animation_gif(animation, output_filename, fps=30, bitrate=2, author='Palshin G.')
```

Wall time: 1min 11s

913

In(45):=

$$R_1=\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2 u[t]^2;$$
$$Q_1=\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\,u[t]\,\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]\times$$
$$(\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2)-\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2))+$$
$$\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times$$
$$(\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2(u[t]^2-v[t]^2));$$
$$R_2=\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\,\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_1]+u[t]^2+v[t]^2)-\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]]\,u[t]\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_2]+\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$
$$Q_2=\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\text{Abs}[\Gamma_2](\text{Abs}[\Gamma_1](\text{Abs}[\Gamma_1]+4\,u[t]^2)+(u[t]^2+v[t]^2)^2)\times$$
$$(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)+\text{Abs}[\Gamma_1](u[t]^2+v[t]^2)(\Gamma_2{}^2+$$
$$(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)^2)-2\,u[t]\,\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\,\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]\text{Abs}[\Gamma_2]]\times$$
$$\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)](\text{Abs}[\Gamma_1]+u[t]^2+v[t]^2)\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_2]+\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$
$$x_1=((\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2])/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]])\times$$
$$(u[t]*\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]*\text{Sin}[\alpha[t]]);$$
$$y_1=((\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2])/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]])\times$$
$$(u[t]*\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]*\text{Cos}[\alpha[t]]);$$
$$x_2=(1/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]])*\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_2]*f-$$
$$\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2]*(u[t]^2+v[t]^2)]*\text{Cos}[\alpha[t]];$$
$$y_2=(1/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]])*\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_2]*f-$$
$$\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2]*(u[t]^2+v[t]^2)]*\text{Sin}[\alpha[t]];$$
$$r_1=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[x_1{}^2+y_1{}^2]];$$
$$r_2=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[x_2{}^2+y_2{}^2]];$$
$$r_{12}=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]];$$
$$\text{Expr}_1=\text{Refine}[\text{Simplify}[-\Gamma_1\frac{y_1}{1-r_1{}^2}-c*\Gamma_2\frac{y_1-y_2}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_2=\text{Refine}[\text{Simplify}[\Gamma_1\frac{x_1}{1-r_1{}^2}+c*\Gamma_2\frac{x_1-x_2}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_3=\text{Refine}[\text{Simplify}[-\Gamma_2\frac{y_2}{1-r_2{}^2}-c*\Gamma_1\frac{y_2-y_1}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_4=\text{Refine}[\text{Simplify}[\Gamma_2\frac{x_2}{1-r_2{}^2}+c*\Gamma_2\frac{x_2-x_1}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$

$$\text{dadt}=\frac{\Gamma_2{}^2}{\Gamma_2-f+\text{Sign}[\Gamma_1](u[t]^2+v[t]^2)}+c\,\frac{\Gamma_1\text{Abs}[\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]]}{\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]}\frac{R_1}{Q_1}+$$
$$\varepsilon\,\Gamma_1\text{Abs}[\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\times$$

$$\frac{\text{Abs}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2}{\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]}\frac{R_2}{Q_2};$$

dvdt=Sign[$\Gamma_1\,\Gamma_2$]Sqrt[Abs[Γ_1]](Expr$_2$ Cos[α[t]] - Expr$_1$ Sin[α[t]]) - u[t] dadt;

dudt=Sign[$\Gamma_1\,\Gamma_2$]Sqrt[Abs[Γ_1]](Expr$_2$ Sin[α[t]] + Expr$_1$ Cos[α[t]]) + v[t] dadt;

H=(1/2)(Γ_1^2Log[1-(u[t]^2+v[t]^2)/Abs[Γ_1]]+
Γ_2^2Log[1-(Sign[Γ_2]*f)/Abs[Γ_2]+
(Sign[Γ_1]Sign[Γ_2](u[t]^2+v[t]^2))/Abs[Γ_2]]-
Γ_1*Γ_2(c+ε)Log[(u[t]^2+v[t]^2)/Abs[Γ_1]-(2*u[t]*Sign[Γ_1]Sign[Γ_2]×
Sqrt[Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2))])/Sqrt[Abs[Γ_1]Abs[Γ_2]]+
(Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2)))/Abs[Γ_2]]+ε*Γ_1*Γ_2*Log[1-
(2*u[t]*Sign[Γ_1]Sign[Γ_2]Sqrt[Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2))])/
Sqrt[Abs[Γ_1]Abs[Γ_2]]+
(Sign[Γ_2](u[t]^2+v[t]^2)(f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2)))/(Abs[Γ_1]Abs[Γ_2])]);

In(46):=

W1[*r2_,G1_,G2_,c_,e_*]:=(1-r1^2)(1-*r2*^{2})((c(1+r1*r2)+*e*)(*G1*r1-G2*r2*)-
e(*G1*r1^3-*G2*r2*^{3}))-r1*r2*(r1+*r2*)(1+r1*r2)(*G1*(1-*r2*^{2})-*G2*(1-r1^2));
W2[*r2_,G1_,G2_,c_,e_*]:=(1-r1^2)(1-*r2*^{2})((c(1-r1*r2)+*e*)(*G1*r1+G2*r2*)-
e(*G1*r1^3+*G2*r2*^{3}))+r1*r2*(r1-*r2*)(1-r1*r2)(*G1*(1-*r2*^{2})-*G2*(1-r1^2));

h_1[*r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_*]:=
$\frac{1}{2}$(*G1*^{2}Log[1-*r1*^{2}]+*G2*^{2}Log[1-*r2*^{2}]+*G1*G2*Log[$\frac{(1+r1*r2)^{2*e}}{(r1+r2)^{2*(c+e)}}$]);
h_2[*r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_*]:=
$\frac{1}{2}$(*G1*^{2}Log[1-*r1*^{2}]+*G2*^{2}Log[1-*r2*^{2}]-(c+*e*)*G1*G2*Log[(*r1*-*r2*)^2]+
*e*G1*G2*Log[(1-r1*r2)^2]);
F[*r1_,r2_, G1_,G2_*]:=*G1*r1*^{2}+*G2*r2*^{2};
h_r=$\frac{1}{2}$(Γ_1^2Log[1-r1^2]+Γ_2^2Log[1-r2^2]-(c+ε)*$\Gamma_1\Gamma_2$×Log[(r1-r2)^2]+
ε×$\Gamma_1\Gamma_2$Log[(1-r1*r2)^2]);

In(47):=

Γ_1=1;
Γ_2=-0.45;
c=1.5;
ε=3;
h0=-1.75;

In(48):=
```
roots1=FindRoot[{W2[r2,Γ1,Γ2,c,ε]==0,hr==h0},
{{r1,0.825},{r2,0.39}},AccuracyGoal→20];
roots2=FindRoot[{W2[r2,Γ1,Γ2,c,ε]==0,hr==h0},
{{r1,0.3},{r2,0.5}},AccuracyGoal→20];
points={
{f0→ F[r1,r2,Γ1,Γ2]/.roots1},
{f0→ F[r1,r2,Γ1,Γ2]/.roots2}
};
points=Sort[points];
```

In(49):=
```
f=-0.1;
solutions=NSolve[{H==h0,v[t]==0.001},{u[t],v[t]},Reals];
```

In(50):=
```
sol1=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[1]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[1]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,0},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
sol2=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[2]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[2]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,0},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];

sol3=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[3]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[3]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,0},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
```

```
sol4=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[4]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[4]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,0},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
```

In(51):=
$$x_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\,\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]\,\text{Sin}[\alpha[t]]);$$
$$y_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]\text{Cos}[\alpha[t]]);$$
$$x_2=\left(\frac{\text{Cos}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$
$$y_2=\left(\frac{\text{Sin}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$

In(52):=
```
Print[
"1st solution:",
\n(x1, y1):,
(Evaluate[{x1,y1}/.sol1]/.{t→ 0})[[1]],
\n(x2, y2):,
(Evaluate[{x2,y2}/.sol1]/.{t→ 0})[[1]]
];

Print[
"2nd solution:",
\n(x1, y1):,
(Evaluate[{x1,y1}/.sol2]/.{t→ 0})[[1]],
\n(x2, y2):,
(Evaluate[{x2,y2}/.sol2]/.{t→ 0})[[1]]
];

Print[
"3rd solution:",
\n(x1, y1):,
(Evaluate[{x1,y1}/.sol3]/.{t→ 0})[[1]],
\n(x2, y2):,
```

```
(Evaluate[{x2,y2}/.sol3]/.{t→ 0})[[1]]
];

Print[
"4th solution:",
\n(x1, y1):,
(Evaluate[{x1,y1}/.sol4]/.{t→ 0})[[1]],
\n(x2, y2):,
(Evaluate[{x2,y2}/.sol4]/.{t→ 0})[[1]]
]
```

1st solution:
(x_1, y_1): {0.591568083202056`,-0.001`}
(x_2, y_2): {0.9999486620859366`,0.`}

2nd solution:
(x_1, y_1): {0.4013566313569315`,-0.001`}
(x_2, y_2): {0.7617059005711146`,0.`}

3rd solution:
(x_1, y_1): {0.06124155376604644`,-0.001`}
(x_2, y_2): {0.4801655453132332`,0.`}

4th solution:
(x_1, y_1): {-0.5916071286662404`,-0.001`}
(x_2, y_2): {0.9999999940985707`,0.`}

In(53):=

$$R_1=\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2 u[t]^2;$$
$$Q_1=\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\,u[t]\,\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]\times$$
$$(\Gamma_2(u[t]^2+v[t]^2)-\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2))+$$
$$\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)\times$$
$$(\Gamma_1(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)-\Gamma_2(u[t]^2-v[t]^2));$$
$$R_2=\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\,\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_1]+u[t]^2+v[t]^2)-\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]]\,u[t]\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_2]+\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$
$$Q_2=\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\text{Abs}[\Gamma_2](\text{Abs}[\Gamma_1](\text{Abs}[\Gamma_1]+4\,u[t]^2)+(u[t]^2+v[t]^2)^2)\times$$
$$(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)+\text{Abs}[\Gamma_1](u[t]^2+v[t]^2)(\Gamma_2{}^2+$$
$$(f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)^2)-2\,u[t]\,\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]\,\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]\text{Abs}[\Gamma_2]]\times$$
$$\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)](\text{Abs}[\Gamma_1]+u[t]^2+v[t]^2)\times$$
$$(\text{Abs}[\Gamma_2]+\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2));$$
$$x_1=((\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2])/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]])\times$$
$$(u[t]*\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]*\text{Sin}[\alpha[t]]);$$
$$y_1=((\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2])/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]])\times$$
$$(u[t]*\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]*\text{Cos}[\alpha[t]]);$$
$$x_2=(1/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]])*\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_2]*f-$$
$$\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2]*(u[t]^2+v[t]^2)]*\text{Cos}[\alpha[t]];$$
$$y_2=(1/\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]])*\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_2]*f-$$
$$\text{Sign}[\Gamma_1]*\text{Sign}[\Gamma_2]*(u[t]^2+v[t]^2)]*\text{Sin}[\alpha[t]];$$
$$r_1=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[x_1{}^2+y_1{}^2]];$$
$$r_2=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[x_2{}^2+y_2{}^2]];$$
$$r_{12}=\text{Simplify}[\text{Sqrt}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]];$$
$$\text{Expr}_1=\text{Refine}[\text{Simplify}[-\Gamma_1\frac{y_1}{1-r_1{}^2}-c*\Gamma_2\frac{y_1-y_2}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_2=\text{Refine}[\text{Simplify}[\Gamma_1\frac{x_1}{1-r_1{}^2}+c*\Gamma_2\frac{x_1-x_2}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_3=\text{Refine}[\text{Simplify}[-\Gamma_2\frac{y_2}{1-r_2{}^2}-c*\Gamma_1\frac{y_2-y_1}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$
$$\text{Expr}_4=\text{Refine}[\text{Simplify}[\Gamma_2\frac{x_2}{1-r_2{}^2}+c*\Gamma_2\frac{x_2-x_1}{r_{12}{}^2}],$$
$$\{\Gamma_1,\Gamma_2,c,\varepsilon,\alpha[t],u[t],v[t]\}\in\text{Reals}];$$

$$\text{dadt}=\frac{\Gamma_2{}^2}{\Gamma_2-f+\text{Sign}[\Gamma_1](u[t]^2+v[t]^2)}+c\,\frac{\Gamma_1\text{Abs}[\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_1]]}{\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2]}\frac{R_1}{Q_1}+$$
$$\varepsilon\,\Gamma_1\text{Abs}[\Gamma_2]\text{Sqrt}[\text{Abs}[\Gamma_2]]\times$$

$$\frac{\text{Abs}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2}{\text{Sqrt}[\text{Sign}[\Gamma_1\,\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)]}\frac{R_2}{Q_2};$$

dvdt=Sign[$\Gamma_1\,\Gamma_2$]Sqrt[Abs[Γ_1]](Expr$_2$ Cos[α[t]] - Expr$_1$ Sin[α[t]]) - u[t] dadt;

dudt=Sign[$\Gamma_1\,\Gamma_2$]Sqrt[Abs[Γ_1]](Expr$_2$ Sin[α[t]] + Expr$_1$ Cos[α[t]]) + v[t] dadt;

H=(1/2)(Γ_1^2Log[1-(u[t]^2+v[t]^2)/Abs[Γ_1]]+
Γ_2^2Log[1-(Sign[Γ_2]*f)/Abs[Γ_2]+
(Sign[Γ_1]Sign[Γ_2](u[t]^2+v[t]^2))/Abs[Γ_2]]-
Γ_1*Γ_2(c+ε)Log[(u[t]^2+v[t]^2)/Abs[Γ_1]-(2*u[t]*Sign[Γ_1]Sign[Γ_2]×
Sqrt[Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2))])/Sqrt[Abs[Γ_1]Abs[Γ_2]]+
(Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2)))/Abs[Γ_2]]+ε*Γ_1*Γ_2*Log[1-
(2*u[t]*Sign[Γ_1]Sign[Γ_2]Sqrt[Sign[Γ_2](f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2))])/
Sqrt[Abs[Γ_1]Abs[Γ_2]]+
(Sign[Γ_2](u[t]^2+v[t]^2)(f-Sign[Γ_1](u[t]^2+v[t]^2)))/(Abs[Γ_1]Abs[Γ_2])]);

In(54):=

W1[r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=(1-r1^2)(1-r2^2)((c(1+r1*r2)+e)(G1*r1-G2*r2)-
e(G1*r1^3-G2*r2^3))-r1*r2*(r1+r2)(1+r1*r2)(G1(1-r2^2)-G2(1-r1^2));
W2[r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=(1-r1^2)(1-r2^2)((c(1-r1*r2)+e)(G1*r1+G2*r2)-
e(G1*r1^3+G2*r2^3))+r1*r2*(r1-r2)(1-r1*r2)(G1(1-r2^2)-G2(1-r1^2));

h_1[r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=
$\frac{1}{2}$(G1^{2}Log[1-r1^2]+G2^{2}Log[1-r2^2]+G1*G2*Log[$\frac{(1+r1*r2)^{2*e}}{(r1+r2)^{2*(c+e)}}$]);
h_2[r1_,r2_,G1_,G2_,c_,e_]:=
$\frac{1}{2}$(G1^{2}Log[1-r1^2]+G2^{2}Log[1-r2^2]-(c+e)*G1*G2*Log[(r1-r2)^2]+
e*G1*G2*Log[(1-r1*r2)^2]);
F[r1_,r2_, G1_,G2_]:=G1*r1^2+G2*r2^2;
h_r=$\frac{1}{2}$(Γ_1^2Log[1-r1^2]+Γ_2^2Log[1-r2^2]-(c+ε)*$\Gamma_1\Gamma_2$×Log[(r1-r2)^2]+
ε×$\Gamma_1\Gamma_2$Log[(1-r1*r2)^2]);

In(55):=

Γ_1=1;
Γ_2=-0.45;
c=1.5;
ε=3;
h0=-1.3;

In(56):=
```
roots1=FindRoot[{W2[r2,Γ1,Γ2,c,ε]==0,hr==h0},
{{r1,0.825},{r2,0.39}},AccuracyGoal→20];
roots2=FindRoot[{W2[r2,Γ1,Γ2,c,ε]==0,hr==h0},
{{r1,0.3},{r2,0.5}},AccuracyGoal→20];
points={
{f0→ F[r1,r2,Γ1,Γ2]/.roots1},
{f0→ F[r1,r2,Γ1,Γ2]/.roots2}
};
points=Sort[points];
```

In(57):=
```
f=-0.15;
solutions=NSolve[{H==h0,v[t]==0.001},{u[t],v[t]},Reals];
sol1=NDSolve[{
u'[t]==dudt,
v'[t]==dvdt,
α'[t]==dadt,
u[0]==(u[t]/.solutions[[1]]),
v[0]==(v[t]/.solutions[[1]]),
α[0]==0.0},{u,v,α},{t,50},
Method→"BDF",MaxSteps→∞,AccuracyGoal→25];
```

In(58):=
$$x_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\,\text{Cos}[\alpha[t]]-v[t]\,\text{Sin}[\alpha[t]]);$$
$$y_1=\left(\frac{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_1]}}\right)(u[t]\text{Sin}[\alpha[t]]+v[t]\text{Cos}[\alpha[t]]);$$
$$x_2=\left(\frac{\text{Cos}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$
$$y_2=\left(\frac{\text{Sin}[\alpha[t]]}{\sqrt{\text{Abs}[\Gamma_2]}}\right)\sqrt{\text{Sign}[\Gamma_1\Gamma_2](f\,\text{Sign}[\Gamma_1]-u[t]^2-v[t]^2)};$$

In(59):=
```
x1x2y2sol1=ParametricPlot3D[
Evaluate[{x1,x2,y2}/.sol1],{t,0,50},
PlotPoints→155000,PlotStyle→{Black}
];
```

In(60):=
```
Tori1=Show[{x1x2y2sol1},PlotRange→{{-1,1},{-1,1},{-1,1}},
Frame→False,Ticks→{{-1,1},{-1,1},{0,0}},GridLines→Automatic,
GridLinesStyle→Directive[Black,Black],Axes→True,Boxed→False,
```

```
AxesOrigin→{0,0,0},ImageSize→72 12,AspectRatio→1,
BaseStyle→{
FontWeight→"Plain",FontSize→24,FontFamily→"Times",Black
},
ViewAngle→15^∘]
```

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Переладовой Алины Евгеньевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием “Разработка параллельного численного итерационного метода решения уравнения Пуассона на вложенных сетках” является: эффективная методика решения уравнения Пуассона на многоуровневых сетках.
Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 28 сентября по 17 ноября 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: решение уравнение Пуассона на вложенных сетках, метод сопряженных градиентов, в выдаче поисковиков было исследовано 13 источников литературы (список см. в списке литературы выпускной квалификационной работы) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Игорем Михайловичем Куликовым, доктором физико-математических наук.
- Ознакомлена с публикацией “GPUPEGAS: A NEW GPU-ACCELERATED HYDRODYNAMIC CODE FOR NUMERICAL SIMULATIONS OF INTERACTING GALAXIES”, Igor Kulikov.
- Были изучены “Лекции по газовой динамике” Стулов В.П., “Численное решение гиперболических уравнений” Куликовский А. Г. И др. (1-3 главы).
- Пройдено обучение на курсе платформы Coursera - Astrobiology: Exploring Other Worlds.
- Выступление с рефератом “Метод частиц в ячейках” на семинаре “Высокопроизводительные вычисления”.
- Участие в конференции XVII Конференция молодых ученых "Фундаментальные и прикладные космические исследования" в формате слушателя.
- Ознакомлена со статьей Tomoaki Matsumoto, A FAST ALGORITHM FOR SOLVING THE POISSON EQUATION ON A NESTED GRID.
- Участие в конференциях (МНСК-2021 и КМУ XVIII "Фундаментальные и прикладные космические исследования") с докладом “Разработка параллельного численного итерационного метода решения уравнения Пуассона на вложенных сетках”.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя

обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится в период с 21 по 25 июня 2021 года. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись  Переладова Алина Евгеньевна

27.05.2021
Новосибирск, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет Механико-математический факультет
Кафедра Вычислительных систем
Направление подготовки Математика и компьютерные науки

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Переладова Алина Евгеньевна

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы: Разработка параллельного численного итерационного метода решения уравнения Пуассона на вложенных сетках

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой

д. т. н., проф.

Глинский Б.М../.....

(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«……»……2021г.

Научный руководитель

д.ф.-м.н.,

с.н.с. ИВМиМГ СО РАН

Куликов И.М./……

(фамилия , И., О.) / (подпись, МП)

«……»……2021г.

Дата защиты: «……»……2021г.

Новосибирск, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 7

1.1. Уравнение Пуассона 7

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД 8

2.1. Вложенные сетки 8

2.2 Формирование сеток и граничные условия 8

2.3. Метод сопряженных градиентов 11

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ 13

3.1. Точное решение уравнения Пуассона 13

3.2. Результаты численного эксперимента 15

4. ВЫВОДЫ 19

5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 20

926

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной, но недостаточно изученной и требующей дальнейшего исследования проблемой математического моделирования эволюции звезд является построение равновесных конфигураций гравитирующих газовых тел.

Такие конфигурации важны для моделирования газодинамических процессов на этапах образования многочисленных астрофизических явлений, таких как, астрофизические струи, сверхновые коллапса ядра, гамма всплески, гравитационные волны, нейтронные звезды, образование черных дыр и т.п..
В данной работе мы будем проводить исследование, основываясь на таком явлении, как звездообразование. Звёзды образуются в молекулярных облаках, в них содержатся сгустки, называемые ядрами молекулярных облаков, из которых формируются звёзды в результате самогравитации.

Традиционные подходы к моделированию, использующие объемное интегральное представление гравитационного поля, могут иметь особенности, которые возникают, когда точки численного расчета лежат внутри или на границе исходного тела. Попытки избежать этих особенностей навязывают ограничения на расположение точек наблюдения относительно тела источника.

Эти методы могут быть вычислительно неэффективными для больших наборов данных со сложным распределением плотности. В последнее время численные методы использовались для моделирования гравитационного поля путем вычисления компонентов гравитационного потенциала, полученного путем решения уравнения Пуассона. Эти техники эффективнее, чем решение в виде интегральной формы, в том, что они сокращают время вычислений и использование памяти, и, следовательно, полезны для прямого моделирования больших наборов данных и для определенной инверсии процедуры.

Для изучения нам потребуется восстановление гравитационного потенциала, так как одной из важных компонент для решения подобных задач астрофизики является определения самосогласованного гравитационного поля для математического моделирования эволюции звезд, которое определяется как решение уравнения Пуассона.

Ранее в научных публикациях [2, 3, 6] были представлены различные методы решения уравнения Пуассона: метод сопряжённых градиентов (SOR); метод, основанный на быстром преобразовании Фурье (FFT); многосеточный метод (MG) или метод Федоренко. В таблице 1 приводится сравнение способов решения уравнения Пуассона на регулярной расчетной сетке в N^3 ячеек.

Таблица 1 – Сравнительная характеристика методов решения уравнения Пуассона

Метод	Временная сложность	Сложность при использовании N^3 процессоров
CGM	N^5	$N^2 \log N$
SOR	N^5	N^2
FFT	$N^3\, log(N)$	$\log(N)$
MG	N^3	$log^2(N)$

Из таблицы 1 заметим, что при использовании равномерных сеток в декартовых координатах наиболее эффективным методом решения уравнения Пуассона является метод быстрого преобразования Фурье. Этот прямой метод обладает быстрой скоростью сходимости при отсутствии начального приближения.

Итерационные методы (сопряженных градиентов или верхней релаксации) работают медленнее, тем не менее обладают важным для динамической задачи достоинством – начальным приближением. В случае быстрого преобразования Фурье его нет. С помощью близкого к решению начального приближения задача решается быстрее.

Мы заинтересованы в создании итерационного метода, поскольку многие решатели используют декомпозицию предметной области для распределения работы между процессорами. Большие вычислительные задачи могут успешно решаться на современных многопроцессорных компьютерах.

Однако, доступа к быстрому высокоскоростному компьютеру недостаточно. Также необходимо убедиться, что правильно используется огромная потенциальная мощность компьютера – минимизируется межпроцессорная коммуникация.

Мы используем термин «коммуникация», чтобы в будущем включать как «горизонтальное» перемещение данных, так и синхронизацию между блоками параллельной обработки, а также «вертикальное» перемещение данных между уровнями иерархии памяти. Взаимодействие стало намного дороже на современных компьютерах по сравнению с вычислениями, как с точки зрения пропускной способности, так и потребления энергии. Мы знаем, что эти методы могут увеличить вычислительные затраты, но тем не менее могут улучшить общую производительность из-за разрыва между стоимостью связи и вычислениями.

Изучая описание (рисунок 1, рисунок 2) параллельной реализации метода преобразования Фурье [4], мы отметили наличие больших накладных расходов в трехмерных массивах.

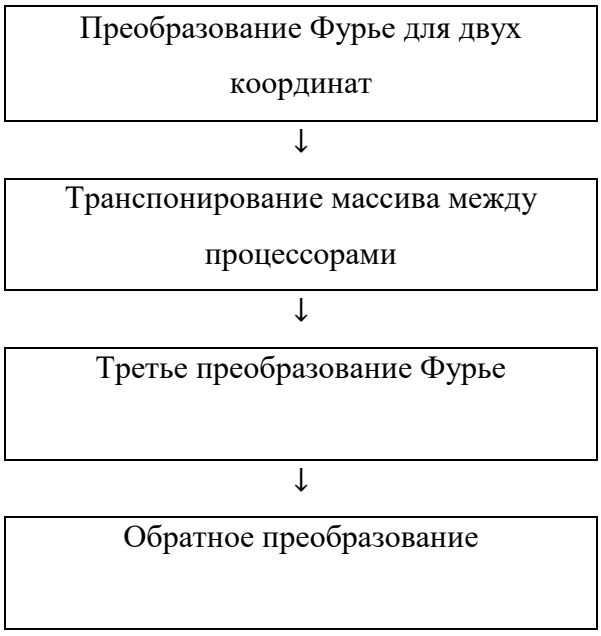


Рисунок 1 – Схема распараллеливания для метода Фурье

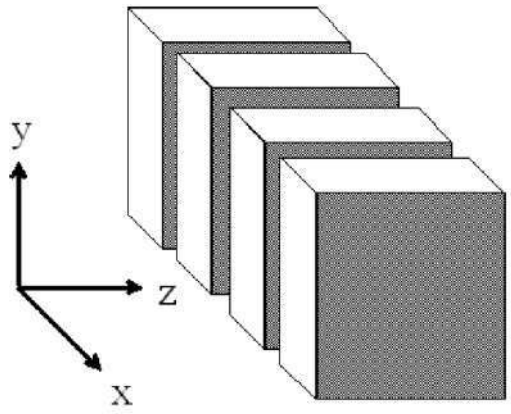


Рисунок 2 – Декомпозиция расчетной области

Обработка такого массива между памятью всех процессоров очень накладна.

Мы вводим численное решение уравнения Пуассона, которое непосредственно решает скалярную компоненты гравитационного поля. Этот подход имеет те же преимущества во времени вычислений и использовании памяти, что и другие численные решения уравнения Пуассона для гравитационного потенциала.

Кроме этого, сложность решения уравнения Пуассона для определения гравитационного потенциала состоит в существенной трёхмерности и нестационнарности моделируемых процессов. При численном решении этих задач требуется высокое разрешение сетки для адекватного решения уравнений.

Впрочем, часто существуют большие участки области, где не требуется высоких уровней очистки; использование высокоточной сетки в этих областях представляет собой напрасную трату вычислительных усилий. Ограничения вычислительных ресурсов часто приводят к компромиссу в разрешающей способности сетки, что приводит к недостаточному разрешению проблемы. Благодаря использованию вложенных сеток, мы можем достичь концентрации вложения в исследуемой области, что позволяет лучше решить проблему.

В этой работе мы разработали новый модифицированный метод, основанный на методе сопряженных градиентов в качестве базового итерационного метода. Итерационный метод сопряженных градиентов с параллельной реализацией позволяет нам совершать локальные пересылки данных, что эффективнее решения в том смысле, что они сокращают время вычислений и использование памяти, а следовательно, полезны для прямого моделирования и решения исследуемой задачи.

930

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Уравнение Пуассона

В случае гравитационного поля g, создаваемого притягивающим массивным объектом с плотностью ρ , закон Гаусса для гравитации в дифференциальной форме может быть использован для получения соответствующего уравнения Пуассона для гравитации,

$$\nabla g = -4\pi G\rho. \quad (1)$$

Поскольку гравитационное поле является консервативным (и безвихревым), его можно выразить через скалярный потенциал φ,

$$g = -\nabla\varphi, \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1)

$$\nabla(-\nabla\varphi) = -4\pi G\rho \Rightarrow \nabla^2\varphi = 4\pi G\rho, \quad (3)$$

И используя определение Лапласиана:

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi \quad (4)$$

Определим уравнение Пуассона для гравитационного потенциала в безразмерных переменных:

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho, \quad (5)$$

где ∇ обозначает дивергенцию, Δ - оператор Лапласа, G - универсальная гравитационная постоянная , ρ – плотность массы в каждой точке, а φ – гравитационный потенциал.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

2.1. Вложенные сетки

Наше разностное уравнение на равномерной сетке было решено с помощью многосеточной итерации, чтобы ускорить сходимость. Многосеточный метод – это быстрый и один из наиболее эффективных итерационных методов решения широкого круга задач.

Основная идея в том, что мы используем несколько сеток для разрешения различных характеристик решения в соответствующих масштабах. В частности, многосеточные методы позволяют избежать неэффективности работы с «грубым масштабом», низкочастотных ошибок на самой мелкой сетке.

Чтобы приблизить гравитационное поле, возникающее из таких распределений плотности, численные модели дискретизируют область с использованием регулярных или нерегулярных сеток, где предполагается, что каждая ячейка имеет однородную плотность. Поэтому используются последовательные вложенные сетки к центру для восстановления потенциала на всей последовательности сеток. Вложенная сетка состоит из однородных сеток с разным шагом и предназначена для покрытия пространства ближе к центру более мелкой сеткой.

2.2 Формирование сеток и граничные условия

Сначала мы вводим нашу вложенную сетку и определяем координаты. Вложенная сетка состоит из однородных сеток, каждая из которых имеет кубические ячейки.

Центр каждой ячейки:

$$x_i^m = 2^{-m+1}\left(i + \frac{1}{2}\right)h \tag{6}$$

$$y_k^m = 2^{-m+1}\left(k + \frac{1}{2}\right)h \tag{7}$$

$$z_l^m = 2^{-m+1}\left(l + \frac{1}{2}\right)h \tag{8}$$

Где $i, k, l,$ и m – целые числа и метки. Символ h обозначает шаг сетки в самой грубой сетке на уровне $m = 1$. При увеличении m на 1 шаг сетки уменьшается на $\frac{1}{2}$.

Определим диапазоны для $i, k, l,$ и m, как

$$-\frac{N}{2} \leq i \leq \frac{N}{2} - 1, \tag{9}$$

$$-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1, \tag{10}$$

$$-\frac{N}{2} \leq l \leq \frac{N}{2} - 1, \tag{11}$$

$$1 \leq m \leq m_{max} \tag{12}$$

Таким образом, наша вложенная сетка всего имеет $m_{max} \times N^3$ячеек. Для эффективного использования многосеточной итерации возьмем $N = 2^n$ в нашем расчете. Самая грубая сетка покрывает M^3, где $M = Nh$. Самая тонкая сетка имеет размер $2^{m_{max}-1}h$ поскольку все эти сетки концентрические, центральные области многократно покрываются этими сетками.

Когда объем покрыт ячейками разного размера, мы принимаем количество в самой маленькой ячейке в окончательном решении. На рисунке 1 показано распределение ячеек в нашей вложенной сетке. Для простоты он обозначает поперечное сечение в двух измерениях.

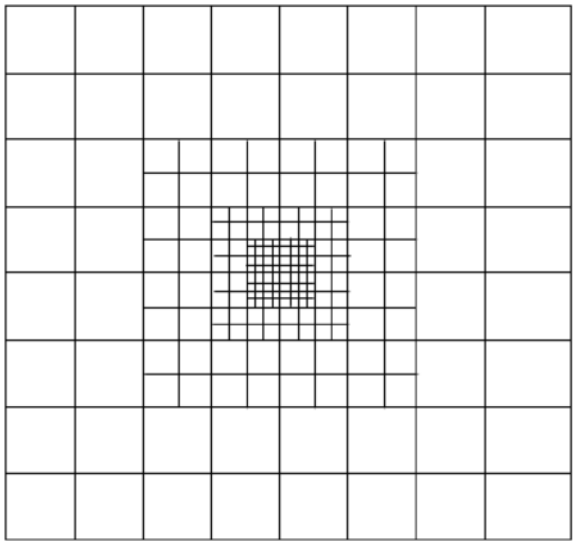


Рисунок 3 – Распределение вложенной сетки

Гравитационный потенциал оценивается в центре ячейки и обозначается

$$\varphi_{i,k,l}^{m} = \varphi(x_i^m, y_k^m, z_l^m). \quad (13)$$

Кроме того, усредненная по ячейкам плотность обозначена

$$\rho_{i,k,l}^{m} = \rho(x_i^m, y_k^m, z_l^m). \quad (14)$$

Граничные условия при решении на внешней вложенной сетке ($m = 1$) с исходной дискретизацией:

$$\varphi_{i,k,l}^{(m)} = \varphi_{\text{ан}} \quad (15)$$

При $m \geq 2$ (внутренняя сетка) граничное условие берется по внешней сетке с дискретизацией:

$$x_i^{(m)} = \frac{N}{4} + \frac{i}{2} + 1, \quad (16)$$

$$y_k^{(m)} = \frac{N}{4} + \frac{k}{2} + 1 \quad (17)$$

$$z_l^{(m)} = \frac{N}{4} + \frac{l}{2} + 1. \quad (18)$$

Особое внимание было уделено согласованию решения по интерфейсам корневой и вложенной сеток, чтобы решение сохраняло глобальную точность второго порядка.

При переходе от внешней к внутренней сетке граничные условия необходимо изменить для получения корректных данных, так как значения потенциала находится в центре ячейки. Это достигается интерполяцией по диагонали во внешней клеточной поверхности.

Когда k и l нечетные числа, это оценивается как

$$\varphi_{i+\frac{3}{2},k,l}^{(m)} = \frac{3}{4}\varphi_{(i+1)/2,(k-1)/2,(l-1)/2}^{(m-1)} + \frac{1}{4}\varphi_{(i+1)/2,(k+1)/2,(l+1)/2}^{(m-1)}. \quad (19)$$

Уравнение (19) использует гравитационный потенциал на обоих концах диагонали для линейной интерполяции. Эта интерполяция неуникальна; мы можем использовать билинейную интерполяцию на грубой поверхности ячейки.

Результат мало зависит от принятой интерполяции – количество ячеек на обоих концах диагонали зависит от четно-нечетной четности j и k.

Уравнение (19) следует соответствующим образом модифицировать, когда либо k, либо l четный.

На рисунке 4 схематично изображено необходимое значение потенциала в ячейке для соседних вложенной и корневой сеток.

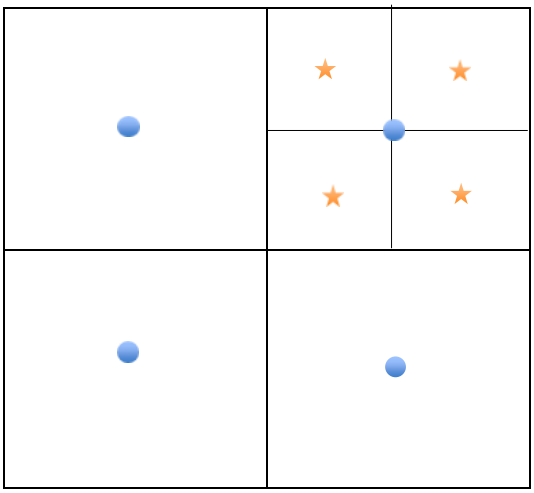


Рисунок 4 – Расположение значений потенциала на корневой (синие кружочки) и вложенной (оранжевые звёздочки) сетках

2.3. Метод сопряженных градиентов

Для восстановления гравитационного потенциала будем использовать 27-точечную схему, полученную для всех ячеек для аппроксимации уравнения Пуассона. Из полученных строк с 27 ненулевыми значениями можно сгенерировать матрицу, но в этом нет необходимости из-за простой структуры сетки.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{38}{9}\varphi_{i,k,l}+\frac{4}{9}\left(\varphi_{i-1,k,l}+\varphi_{i+1,k,l}+\varphi_{i,k-1,l}+\varphi_{i,k+1,l}+\varphi_{i,k,l-1}+\varphi_{i,k,l+1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{9}\left(\varphi_{i-1,k,l}+\varphi_{i+1,k-1,l}+\varphi_{i-1,k+1,l}+\varphi_{i+1,k+1,l}+\varphi_{i-1,k,l-1}+\varphi_{i+1,k,l-1}\right.\\
&\quad\left.+\varphi_{i-1,k,l+1}+\varphi_{i+1,k,l+1}+\varphi_{i,k-1,l-1}+\varphi_{i,k+1,l-1}+\varphi_{i,k-1,l+1}+\varphi_{i,k+1,l+1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{36}\left(\varphi_{i-1,k-1,l-1}+\varphi_{i-1,k+1,l-1}+\varphi_{i-1,k-1,l+1}+\varphi_{i-1,k+1,l+1}\right.\\
&\quad\left.+\varphi_{i+1,k-1,l-1}+\varphi_{i+1,k+1,l-1}+\varphi_{i+1,k-1,l+1}+\varphi_{i+1,k+1,l+1}\right)=4\pi G h^2\rho_{i,k,l}
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

27-точечный шаблон необходим для обеспечения максимальной инвариантности решения относительно поворота.

Алгоритм решения уравнения Пуассона будет состоять из нескольких этапов: на первом этапе учитываются граничные условия, на втором применяется итерационный метод сопряженных градиентов:

1. Формируем граничные условия $\varphi_{i,k,l}^{(m)}$
2. Подготовка перед итерационным процессом

   2.1. Начиная с x_0, мы ищем решение, и на каждой итерации нам нужна метрика, чтобы зафиксировать, ближе ли мы к аналитическому решению. Зададим начальное приближение: $x = x_0$.

   2.2. $Ax = b$. Умножение матрицы на вектор производим применением схемы.

   2.3. Пусть p_i - невязка на k-ом шаге: $p_0 = z_0 = b - Ax_0$. Обратите внимание, что z_0 также является невязкой, обеспечиваемой этим шагом алгоритма.

   2.4. Градиент равен $Ax - b$. Значение z_0 принимается как отрицательное значение градиента при $x = x_0$. Поэтому метод градиентного спуска потребует перемещения в направлении p_k. Однако, необходимо чтобы направления были сопряжены друг другу.

   Практический способ обеспечить это – требовать, чтобы следующее направление поиска строилось из текущего остатка и всех предыдущих направлений поиска.

   Следуя этому направлению, следующее оптимальное местоположение задается

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i z_i. \tag{21}$$

   2.5. В алгоритме α_iвыбирается таким, чтобы он был ортогонален p_i

$$\alpha_i = \frac{(p_i\ ,\ p_i)}{(Az_i, z_i)} \tag{22}$$

$$p_{i+1} = p_i - \alpha_i A z_i \tag{23}$$

$$\beta_i = \frac{(p_{i+1}\ ,\ p_{i+1})}{(p_i, p_i)} \tag{24}$$

$$z_{i+1} = p_{i+1} + \beta_i z_i \tag{25}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Мы оцениваем эффективность описанного выше алгоритма с упором на точность, сходимость и время вычислений (нагрузку). В наших численных расчетах для удобства примем $G = 1$. Все числовые вычисления производились с двойной точностью.

3.1. Точное решение уравнения Пуассона

Для исследования решения уравнения Пуассона при измельчении расчётной сетки рассмотрим кубическую функцию плотности, полученную из системы уравнений гидродинамики:

$$\rho = \begin{cases} 2r^3 - 3r^2 + 1, & r \in [0;1] \\ 0, & r > 1 \end{cases} \tag{26}$$

Необходимо помнить, что в области с нулевой плотностью потенциал принимает вид:

$$\varphi(r) = -\frac{m}{r}, \qquad r > r_0 \tag{27}$$

Иными словами, определим массу газа m в области для сохранения непрерывности функции потенциала на интервале $[0;1]$ со своей производной на границе $r = 1$.

Возьмем интеграл плотности по объему шара:

$$m = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \rho(r) r^2 \sin(\theta) dr \right) d\theta \right) d\varphi = 4\pi \int_0^1 (2r^5 - 2r^4 + r^2) dr = \frac{4\pi}{15} \tag{28}$$

Представим левую часть уравнения Пуассона: $\Delta\varphi = 4\pi\rho$ в сферических координатах используя оператор Лапласса, который определяется соответственно:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{d^2}{d\varphi^2} \tag{29}$$

Из того, что исследуемый объект не вращается и имеет сферическую форму следует, что звезда обладает центральной симметрией, и мы можем рассматривать равновесные конфигурации, при которых $\theta = 0$ из (29):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 4\pi\rho \tag{30}$$

Учитывая согласование в точке $r = 1$ для решения уравнения Пуассона, подставим функцию распределения плотности (26):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 4\pi(2r^3 - 3r^2 + 1), \tag{31}$$

Проинтегрировав выражение, получим функцию потенциала и ее производную:

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{15}r^5 - \frac{3\pi}{5}r^4 + \frac{2\pi}{3}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2, \tag{32}$$

$$\varphi'(r) = \frac{4\pi}{3}r^4 - \frac{12\pi}{5}r^3 + \frac{4\pi}{3}r + \frac{C_1}{r^2}, \tag{33}$$

Используя условие неразрывности функции потенциала и ее производной в точке $r = 1$,

Найдем C_1 и C_2:

$$\varphi(1) = \frac{4\pi}{15} - \frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} - C_1 + C_2, \tag{33}$$

$$\varphi'(1) = \frac{4\pi}{3} - \frac{12\pi}{5} + \frac{4\pi}{3} + C_1. \tag{34}$$

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 = -\dfrac{3\pi}{15}, \\ C_1 = -\dfrac{3\pi}{15} \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = -\frac{3\pi}{5} \tag{35}$$

В результате при подстановке (35) в (32) и (27), функция потенциала имеет вид:

938

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{15}r^5 - \frac{3\pi}{5}r^4 + \frac{2\pi}{3}r^2 - \frac{3\pi}{5}, r \in [0;1] \\ -\frac{4\pi}{15r}, r > 1 \end{cases} \quad (36)$$

3.2. Результаты численного эксперимента

На рисунке 5 изображен график, показывающий точное и полученное решения уравнений Пуассона для восстановления гравитационного потенциала. Шаг по пространству при этом взят $h = 0.01$, шаг по времени $\tau = 0.01, x \in [0,1]$.

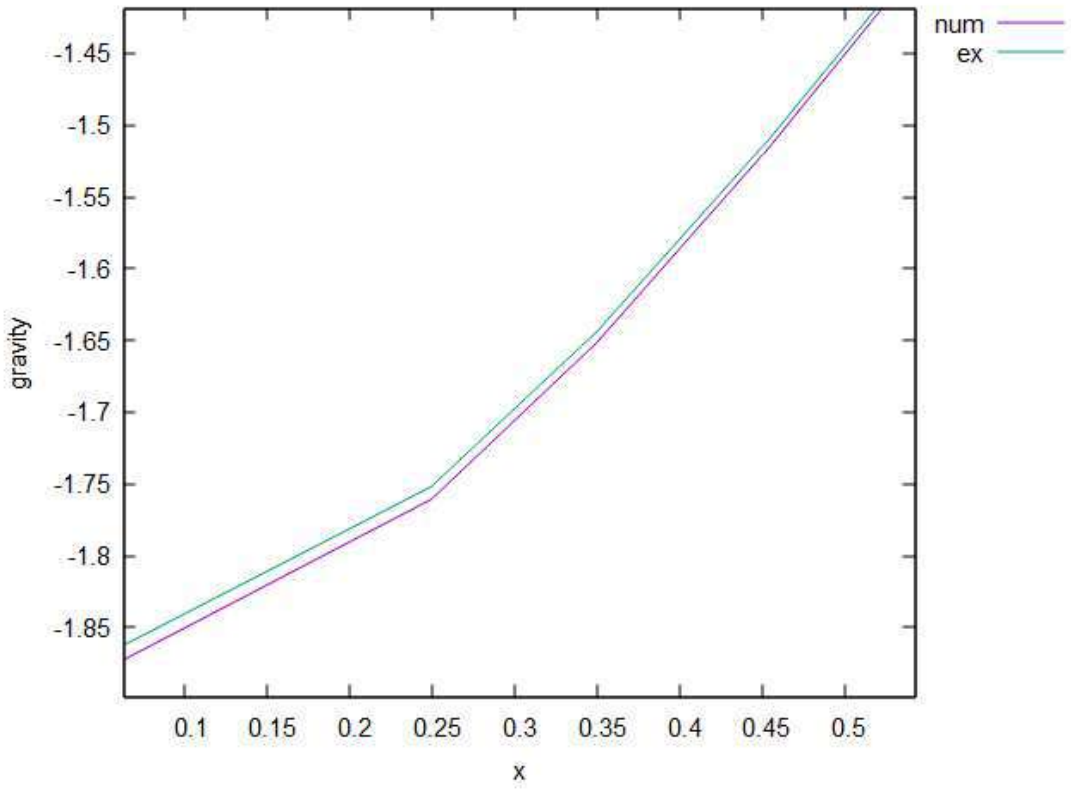


Рисунок 5 – Графики численного (фиолетовая линия) и точного решения (зеленая линия)

Из показанных графиков видно, что численное решение достаточно хорошо воспроизводит точное.

Для определения нормы отклонения численного решения от аналитического решения была найдена относительная невязка с использованием Эвклидовой нормы.

939

В таблице 2 приведены значения относительной невязки при измельчения сетки.

Таблица 2 – Эвклидова норма отклонения численного решения от аналитического

Сетка	Норма отклонения
16^3	6.476609211629934E-003
32^3	1.666516451907658E-003
64^3	4.237377781572590E-004

Из таблицы 2 можно заметить, что метод обладает вторым порядком сходимости.

После решения мы можем построить график изолинии плотности при $N = 32$.

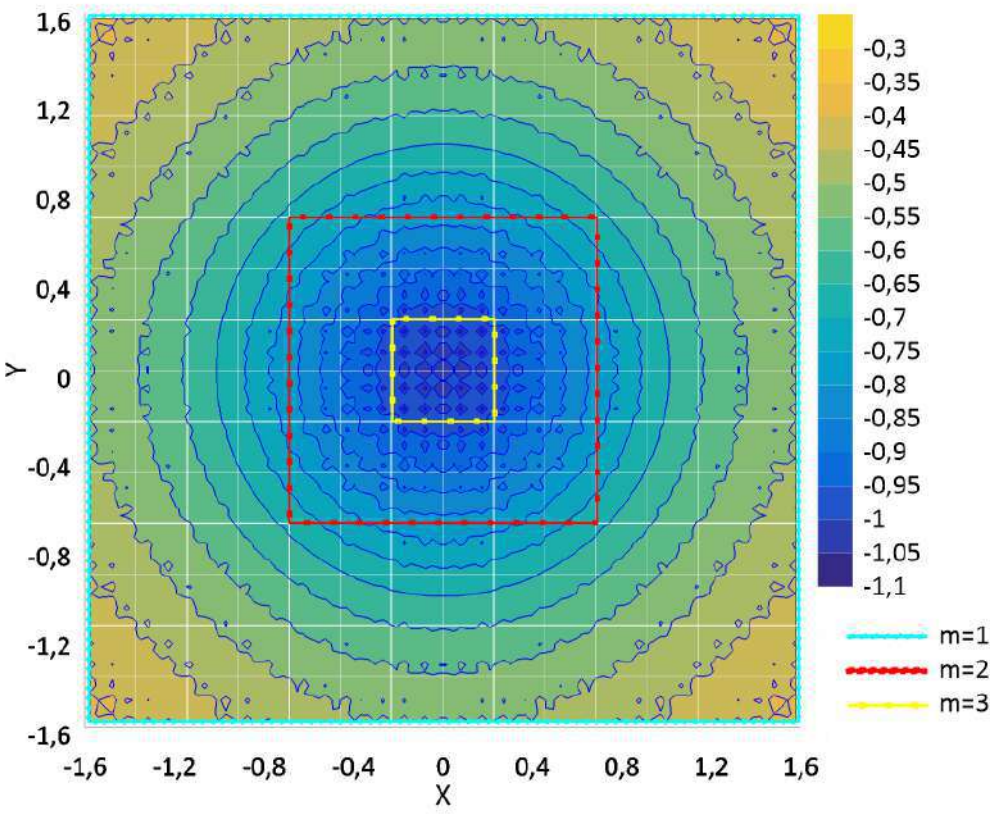


Рисунок 6 – График изолиний в плоскости xy, проходящей через центр эллипсоида с уровнями сеток (m=1-внешняя, m=2-первая вложенная, m=3-вторая вложенная)

Из рисунка 6 можем сделать вывод, что никаких особенностей вдоль линии сеток нет. Это говорит о достойном уровне полученного решателя, который позволяет на таких вложенных сетках строить решение без искажений

Для оценки масштабируемости вычислительной нагрузки были построены два графика изолиний для эффективной при $N = 16$ $(m = 1)$ и $N = 64$ $(m = 1)$:

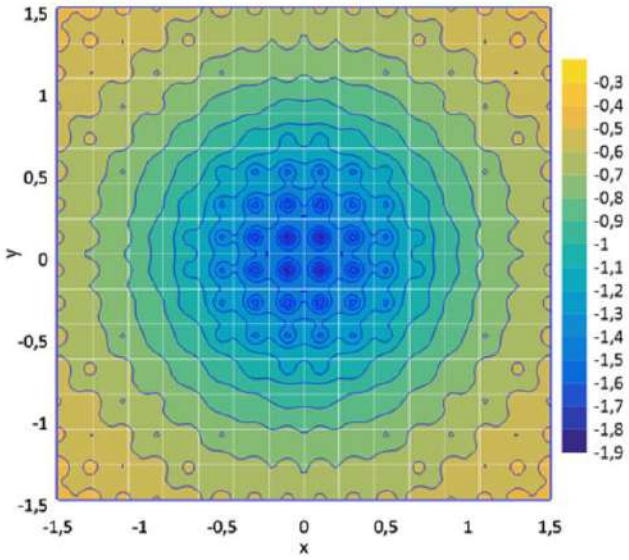


Рисунок 7 – График изолиний при $N = 16$

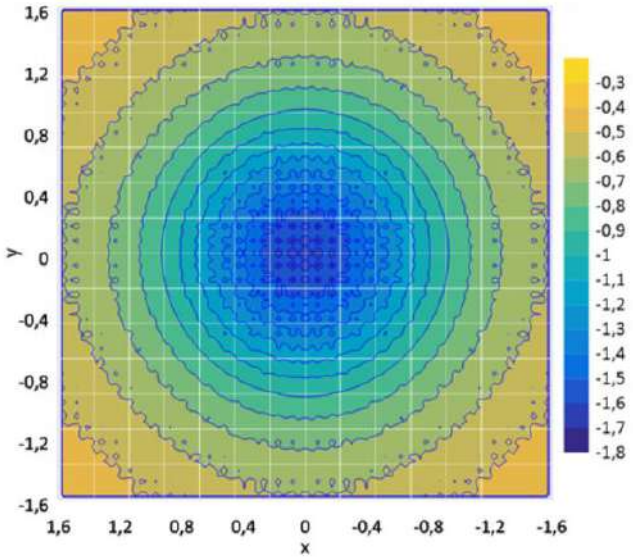


Рисунок 8 – График изолиний при $N = 64$

По рисунку 7 и рисунку 8 мы видим, что вычислительная нагрузка масштабируется, то есть пропорциональна общему количеству ячеек, задействованных во вложенной сетке.

Для оценки производительности параллельной реализации с помощью оператора forall программного кода Fortran 90 были использованы опции Intel Fortran Comiler: $/O2$ (оптимизировать для максимальной скорости, по умолчанию), /O3 (оптимизировать для максимальной скорости и включить более агрессивные оптимизации, которые могут не улучшить производительность некоторых программ), /Od (отключить оптимизацию), /Qparallel (позволяет автоматическому распараллеливанию генерировать многопоточный код для циклов, которые можно безопасно выполнять параллельно), $/\mathrm{Qpar} - \mathrm{num} - \mathrm{threads}$ (настраивает производительность приложения, устанавливая разное количество потоков).

941

На таблице 3 представлена значения процессорного времени при комбинировании различных операций на разных уровнях сеток.

Таблица 7 – Оценка процессорного времени при применении опций компилятора

m / t	/Od	/O2	/O3	/O2 /Qparallel /Qpar-num-threads=4	/O2 /Qparallel /Qpar-num-threads=8
1	0,645	0,453	0,453	0,3125	0,1563
2	0,650	0,422	0,421	0,3125	0,15623
3	0,633	0,437	0,437	0,3125	0,15623

Можем заметить, что при использовании максимальной оптимизации возможной для компьютера (Intel Core i7-9700, Gigabyte GeForce RTX 2070, 16Gb 2666Hz) время решения задачи при $N = 32$ сокращается, решатель работает корректно.

942

4. ВЫВОДЫ

В выпускной квалификационной работе разработан решатель для решения уравнения Пуассона для восстановления гравитационного потенциала.

Численный метод решения основывается на разностной схеме для уравнения Пуассона на вложенной сетке и многосеточного итерационного алгоритма.

У реализованного метода: точность, быстрая сходимость и масштабируемость.

Во-первых, он вычисляет гравитационный потенциал сферы с высокой точностью, даже когда тест разрешается только в тонких сетках. Во-вторых, экспериментально подтверждено, что итерация всегда сходится к точному решению разностного уравнения. В-третьих, вычислительная нагрузка итерации пропорциональна общему количеству ячеек во вложенной сетке. Таким образом, наш метод дает хорошее решение с минимальными затратами при большой вложенной сетке.

5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Воеводин В.В., Воеводин В.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.

[2] Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Снытников А.В. Параллельные численные алгоритмы. Решение задач многофазной гидродинамики и астрофизики. Новосибирск: НГУ, 2006.

[3] Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

[4] Код HERACLES. URL:http://irfu.cea.fr/Projets/Site_heracles/features.html (дата обращения 23.04.21)

[5] Куликов И.М. Математическое моделирование трехмерных гидродинамических процессов в самосогласованном гравитационном поле на суперЭВМ: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 2016.

[6] Куликов И.М. Суперкомпьютерное моделирование гидродинамических объектов в задачах астрофизики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020

[7] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

[8] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

[9] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.

[10] Стулов В.П. Лекции по газовой динамике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[11] Demmel J.W. Applied numerical linear algebra. SIAM, 1997

[12] Norman, M. L., & Bryan, G. L. 1999, in Numerical Astrophysics, ed. S. M.Miyama, K. Tomisaka, & T. Hanawa (Astrophys. & Space Sci. Library 240; Dordrecht: Kluwer)

[13] The Astrophysical Journal, 583/ A Fast Algorithm for Solving the Poisson Equation on a Nested Grid.Tomoaki Matsumoto, Tomoyuki Hanawa, 2003

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от Рябовой Татьяны
Павловны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием Исследование статистических методов обнаружения космических летательных аппаратов являются:

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

Произведен поиск в сети интернет, результаты поиска не содержали информации об исследуемой теме

Результаты работы докладывались на межвузовских, студенческих и научных конференциях:

- ИНДУСТРИАЛЬНАЯ РОССИЯ: ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА, 04.12.2020.

- Новое в науке и образовании, ОЧУ ВО «Еврейский университет», 16.03.2021.

- Управление и безопасность в информационных и киберфизических системах, МТУСИ, 19.04.2021.

По материалам указанных конференций опубликованы научные статьи:

- «Применение критерия Вилкоксона для обнаружения неопределенных космических объектов» - в сборнике научных статей по материалам четвертой международной научно-практической конференции, 04.12.2020.

- «Применение статистических методов для обнаружения космических объектов» - в сборнике статей по материалам межвузовской студенческой конференции ОЧУ ВО «Еврейский университет», 16.03.2021.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится/состоялась 15.05.2021. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись



ФИО полностью
Рябова Татьяна Павловна
Дата
31.05.2021
Город, страна
Москва, Россия

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский технический университет связи и информатики»

Кафедра Теории Вероятностей и Прикладной Математики

Разрешаю
допустить к защите
Зав. кафедрой _____
_____
_____20____г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

НА ТЕМУ

Исследование статистических методов обнаружения космических летательных аппаратов

Студент: Рябова Татьяна Павловна_____

Руководитель: _Замега Эмма Николаевна_____

Москва 2021 г.

Задание на бакалаврскую работу №1

ОТЗЫВ РУКОВОДИТЕЛЯ

на выпускную квалификационную работу студента _____

_____Рябовой Татьяны Павловны_____

(ФИО)

на тему Исследование статистических методов обнаружения космических летательных аппаратов

АННОТАЦИЯ

В период нарастающего интереса к развитию космической отрасли, задача обнаружения неопределенных объектов в космическом пространстве приобретает первостепенный характер. Сложность состоит в том, что параметры объектов неизвестны и, в зависимости от условий наблюдения, может присутствовать значительный уровень помех. В представленной работе проводится анализ применения статистических критериев и разработка наиболее подходящего алгоритма для решения поставленной задачи.

Работа объемом 56 страниц состоит из введения, трех глав, содержащих 8 рисунков, заключения, списка используемых источников, включающих 25 наименований и приложения с исходным кодом программы, созданной в среде MATLAB.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ..... **Ошибка! Закладка не определена.**

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ 18

1.1. Статистическая модель обнаружения неопознанного космического летательного аппарата 18

1.2. Параметрические критерии 21

1.3. Непараметрические критерии 22

1.3.1. Критерий $(\chi 2)$ 23

2.3.2. Критерий Колмогорова-Смирнова 25

2.3.3. Критерий Манна-Уитни 27

2.3.4. Двухвыборочный критерий Вилкоксона 28

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ 31

2.1 Алгоритм применения критерия Вилкоксона для обнаружения неопознанных летательных аппаратов 31

2.2. Вероятностные характеристики обнаружения неопознанного космического аппарата 33

2.3. Программная реализация критерия Вилкоксона 36

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 41

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 43

ПРИЛОЖЕНИЯ 46

ПРИЛОЖЕНИЕ А 46

ПРИЛОЖЕНИЕ Б 47

951

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, в период нарастающего интереса к освоению космического пространства и развития космической отрасли, возникает множество задач, которые связаны с изучением космического пространства. В связи с таким ажиотажем вокруг рассматриваемой отрасли всё более актуальной задачей становится контроль космического пространства: обнаружения летательных объектов, нарушающих свое целеполагание, определенное при запуске, различные космические тела: метеориты, части космического мусора и так далее.

Главная особенность, а в то же время и сложность, поставленной задачи заключается в том, что параметры объектов неизвестны и, в зависимости от условий наблюдения, может присутствовать значительный уровень помех, создаваемых радиацией от звезд, бликами, скоплениями космической пыли, а так же помехами самой аппаратуры. На кадрах может присутствовать как просто шум с нормальным законом распределения, так и шум с полезным сигналом, распределение которого на практике невозможно указать заранее. Поэтому задача носит вероятностный характер.

Существует ряд методов, позволяющих решать схожие задачи обнаружения объектов в околоземном космическом пространстве. Но все из них либо требуют постоянного содержания огромных вычислительных центров, либо имеют низкую точность определения, что неприемлемо, учитывая важность оперативного выполнения задачи.

В представленной работе описывается проблематика решения задачи в условиях космического пространства, проводится анализ применения статистических критериев: параметрических и непараметрических. На основе

проведенного исследования будет выбран один критерий, наиболее подходящий в условиях поставленной задачи.

Работа состоит из трех глав. В первой главе описывается проблематика решения задач контроля космического пространства.

Во второй главе приведены результаты анализа применимости наиболее популярным методов прикладной статистической статистики.

В третьей главе описывается разработка алгоритма обнаружения и результаты выполнения.

ГЛАВА 1. ПРОБЛЕМАТИКА РЕШАЕМОЙ ЗАДАЧИ

В настоящее время идет активное освоение космического пространства и интерес государств, корпораций, изобретателей и ученых-исследователей нарастает с каждым днем. Каждый день запускаются новые проекты по изучению и освоению космоса, каждую неделю подписываются акты и соглашения по запуску искусственных спутников, исследовательских модулей и ракет в космос. С момента начала эпохи освоения космоса, которая берет свое начало в день запуска самого первого искусственного спутника Земли – «Спутника-1», выведенным на орбиту учеными Советского Союза 4 октября 1957 года, на орбиту было выведено почти 17 тыс. искусственных спутников, хотя в настоящее время действующими остаются порядка 3 тыс. Эту цифру в подавляющем большинстве составляют запуски 21 века. Количество запущенных спутников в 2020 году, который запомнился всему миру беспрецедентными ограничениями в работе всех ведомств, достигает 1263. Это число сделало 2020 год абсолютным рекордсменом за все годы освоения космического пространства. На этом активная деятельность космической отрасли не останавливается и эксперты прогнозируют рост функционирующих аппаратов до 20 тыс. в ближайшие 7–10 лет.

В то же время, как спутники запускаются крупными корпорациями и государствами, деятельность в космосе доступна и небольшим сообществам. Появившиеся в начале века стандарты CubeSat и Pocketqube позволяют отправлять в космос спутники размером от 5x5x5 см до 10x10x10 см. Для иллюстрации быстрого роста числа запусков спутников, на рисунке 1 приведена статистика по количеству запущенных спутников по годам.

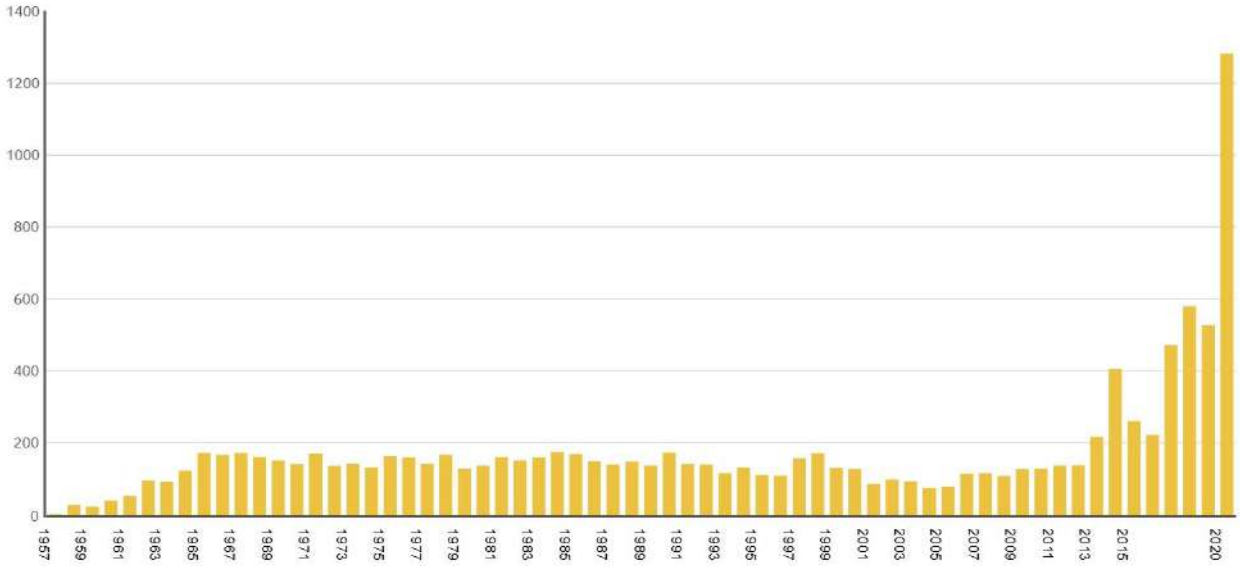


Рисунок 1 – Статистика запущенных спутников

Помимо функционирующих спутников, в околоземном пространстве за время активной деятельности человека в космосе скопилось великое множество космического мусора искусственного происхождения. В настоящее время все космические объекты можно классифицировать [1] следующим образом:

1. Спутники, прекратившие свою работу или изначально потерпевшие неудачу в выведении на орбиту,
2. Ступени ракет-носителей, разгонные блоки, которые были использованы для вывода космических аппаратов на орбиту,
3. Фрагменты разрушенных объектов на околоземных орбитах,
4. Малоразмерные операционные элементы, которые отделяются от ракет в космическом пространстве в процессе полета.

Кроме объектов искусственного происхождения, на орбитах и в целом в околоземном космическом пространстве могут находиться тела естественного происхождения.

Искусственным спутникам Земли нашли применение почти в каждой сфере. Их используют для исследования планет, галактик и прочих космических

объектов, для экспериментов над живыми организмами в условиях космоса, для мониторинга поверхности земли, для сбора информации для предсказывания погоды, для обеспечения связи, навигации. Помимо всего, спутники активно используют в военной отрасли. В настоящее время принята следующая классификация спутников [2] по назначению:

- астрономические спутники;
- биоспутники;
- спутники дистанционного зондирования Земли;
- метеорологические спутники;
- военные спутники;
- спутники связи;
- навигационные спутники;
- космические корабли;
- орбитальные станции;
- голоспутники.

Каждый выводимый на орбиту спутник подлежит строгому формальному описанию. В соответствии с 11 статьей Договора о космосе [А], каждое государство-участник договора обязано сообщать в максимально полной форме о характере, ходе и результатах деятельности в околоземном пространстве. Каждый запуск проходит по принятому во всем мире регламенту запуска и эксплуатации искусственных спутников Земли [3]. После запуска спутник попадает в международный каталог, где содержится информация о том, на какой орбите находится космический объект.

Международный каталог содержит в себе следующую информацию [4]:

1) набор элементов орбит каждого объекта, который необходим и достаточен для прогнозирования движения отслеживаемого объекта;
2) международный код-идентификатор;

3) данные о времени и месте запуска;
4) данные о назначении и целеполагании;
5) тип объекта;
6) масса, размеры и т.п.

Для иллюстрации классификации орбит приведем рисунок 2 [5]. Каждая орбита используется спутниками, имеющими определенный класс задач. Спутники-наблюдатели, информацию с которых мы будем использовать в дальнейшей разработке темы ВКР, обычно располагаются на высоких типах орбит, которые находятся на наибольшем удалении от поверхности Земли. Описание целеполагания и занимаемой орбиты очень важно для последующего мониторинга ситуации в космическом пространстве. Любое отклонение спутника от заданной орбиты может нести как прямую опасность физического характера: столкновения, влияние на работу систем спутников, нарушение условий проведения эксперимента, так и потенциальную опасность: отклонившейся спутник может быть использован в целях незаконного сбора информации.

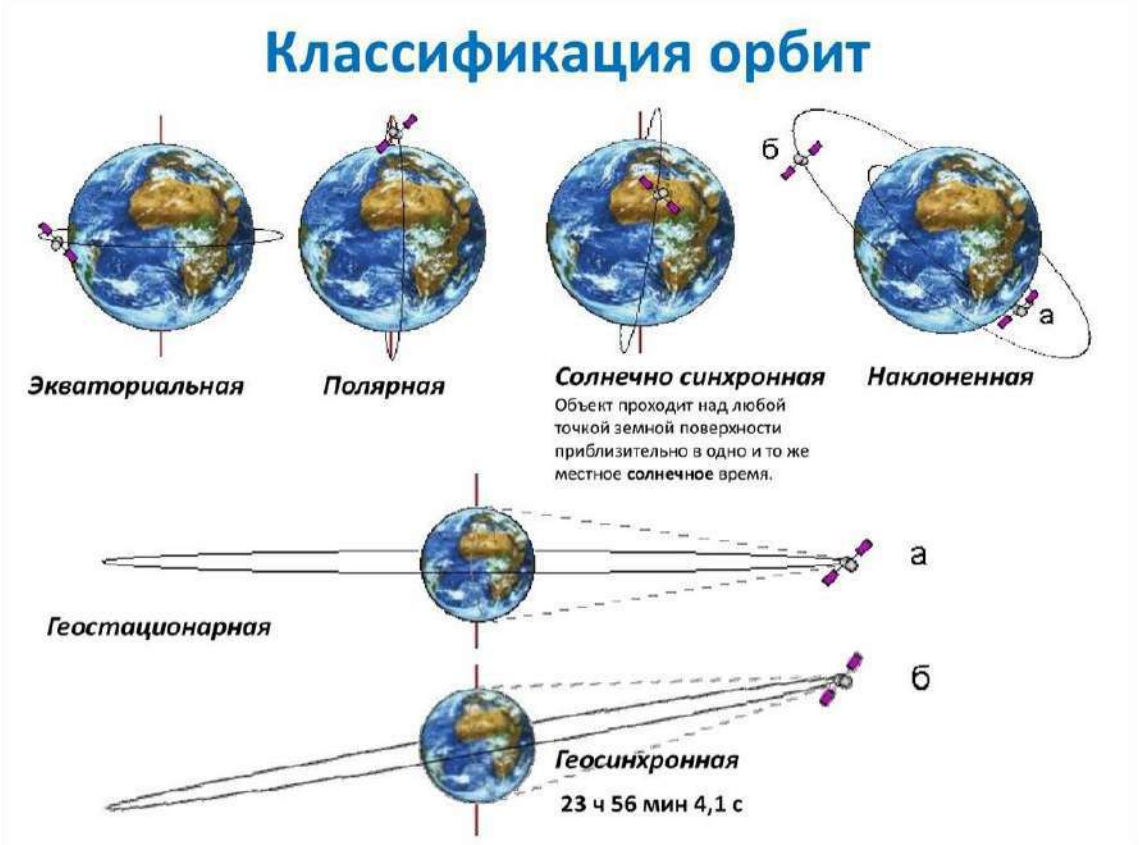


Рисунок 2 – Классификация орбит

В связи с высочайшим интересом всего мира к развитию космической отрасли встает вопрос о контроле, мониторинге и управлении объектами в космическом пространстве. Из-за высокого числа объектов искусственного происхождения в околоземном пространстве растет риск столкновения орбитальной аппаратуры между с собой или с космическим мусором. Отсюда появляется потребность в оценке обстановки на трассах полета космических аппаратов, прогнозирования опасных для них ситуаций. Также активное освоение космоса влечет за собой активное развитие военных космических технологий. В связи с этим каждой стране очень важно иметь системы наблюдения, которые позволят обеспечить оперативной информацией об оценке и прогнозировании опасных изменений в околоземном космическом пространстве.

Кроме количества и широчайшего спектра возможностей спутников, играет роль развитие информационных технологий. Уже в 1998 году произошел первый случай захвата контроля над спутником. Хакеры, получившие управление, направили солнечные батареи аппарата прямо на солнце, что моментально привело к выведению аппаратуры из строя. В настоящее время до сих пор не существует стандартов защиты спутников в околоземном пространстве, равно как и органов, которые бы регулировали обеспечение кибербезопасности, ответственность за любые происшествия ложится на компании-производители. Однако даже для компаний, которые ставят в приоритет вопрос кибербезопасности, затраты на ее обеспечение в каждом компоненте спутника могут оказаться непомерно высокими и даже превышать стоимость самого устройства. Все большая коммерциализация отрасли запуска космических объектов приводит к тому, что владельцы спутников передают непосредственное управление в специальные аутсорсинговые компании. С каждым шагом потенциальная уязвимость оборудования возрастает, поскольку современные хакеры получают все больше возможностей проникнуть в даже самую защищенную систему. Кроме того, известно, что самыми уязвимыми являются вышеупомянутые крошечные спутники CubeSat, использующиеся в основном частными лицами и образовательными организациями.

Еще в 1961 году, спустя всего 4 года с запуска 1-го спутника, в Советском Союзе начались исследования принципов контроля космического пространства. А уже в 1970 году созданный аппарат по контролю околоземной зоны, «Центр контроля космического пространства» (ЦККП), отслеживал 200–250 космических объектов [6]. В настоящее время существующие системы наблюдения за космическим пространством уже отслеживают 22 тыс. объектов. Но несмотря на быстрый темп развития области систем контроля околоземного космического пространства, еще очень многое предстоит сделать. На рисунке 3 приведена карта из доклада разработчиков системы наблюдения

«Автоматизированная система предупреждения об опасных ситуациях в околоземном космическом пространстве» [7].

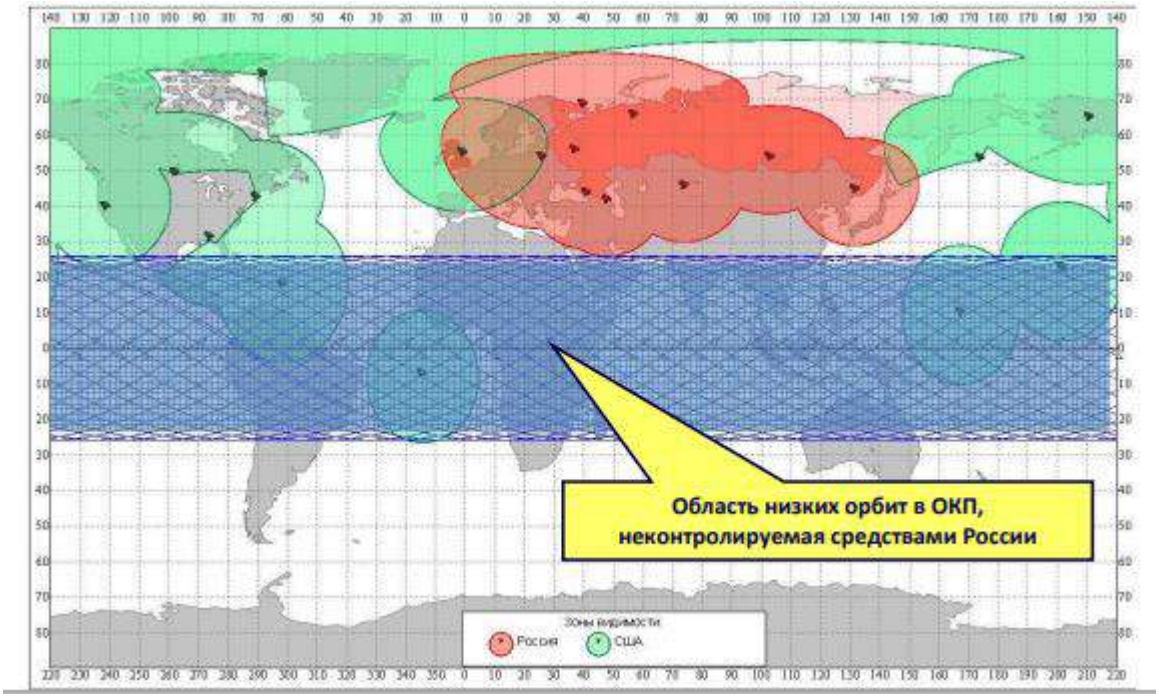


Рисунок 3 – Область неконтролируемая средствами России

Как мы можем видеть на карте – остаются заметные участки, которые пока не отслеживаются силами нашей страны. В связи с таким положением дел стоит вопрос о разработке новых технологий и алгоритмов, которые позволят охватывать больше важных областей околоземного космического пространства.

В настоящее время данные в системе обнаружения искусственных спутников Земли и космического мусора поступают с радиолокационной, оптической и радиотехнической аппаратуры Минобороны РФ, обсерваторий и ряда других организаций, осуществляющих сбор информации о космических объектах. Информация передается в ЦККП для последующего накопления, обработки и анализа. На основе всех полученных данных вырабатывается выходная информация о космическом объекте и обстановке для различных военных и гражданских потребителей. Но несмотря на многообразие информационных возможностей средств и систем контроля космического

пространства, все они имеют общие проблемы, которые обусловлены следующими факторами [8]:

1) большое количество и разнообразие космических объектов;
2) высокие требования к полноте, оперативности получения, точности и достоверности получаемой информации;
3) ограниченность ресурсов наблюдательных средств систем контроля космического пространства;
4) математическая и вычислительная сложность алгоритмов обработки измерительной информации.

Космические системы наблюдения в инфракрасном диапазоне за малоразмерными подвижными объектами решают задачи их обнаружения и определения параметров движения данных объектов. Инфракрасное излучение обладает рядом очень важных свойств в условиях решения задачи мониторинга околоземного космического пространства. В настоящее время ИК- излучение используется для визуализации объектов в условиях плохой видимости, термографии, для обнаружения небесных тел и так далее [9]. В связи с тем, что аппаратура работает в ИК-диапазоне есть вероятность искажения или «засвета» фотографий Солнцем, Луной или Землей, поэтому спутники с подобной аппаратурой отводят на максимально дальнюю орбиту, чтобы уменьшить влияние вышеперечисленных небесных тел.

Большое расстояние от Земли до спутника, на котором установлена камера и происходит обработка фотографий, создает ряд проблем: увеличивается время передачи информации в вычислительные центры и возможные искажения изображения при передаче. В задаче мониторинга околоземного космического пространства очень важно своевременное реагирование на возможные угрозы, поэтому каждая лишняя секунда уменьшает эффективность системы. В связи с этим обработку полученных кадров предлагается проводить непосредственно на

спутнике. Тут же возникает вышеупомянутая проблема систем наблюдения: ограниченность ресурсов на аппарате. Следовательно, разрабатываемый алгоритм обнаружения космических объектов должен требовать минимум вычислительной мощности. Пример обрабатываемого снимка, полученного с инфракрасной камеры спутника приведен на рисунке 4.

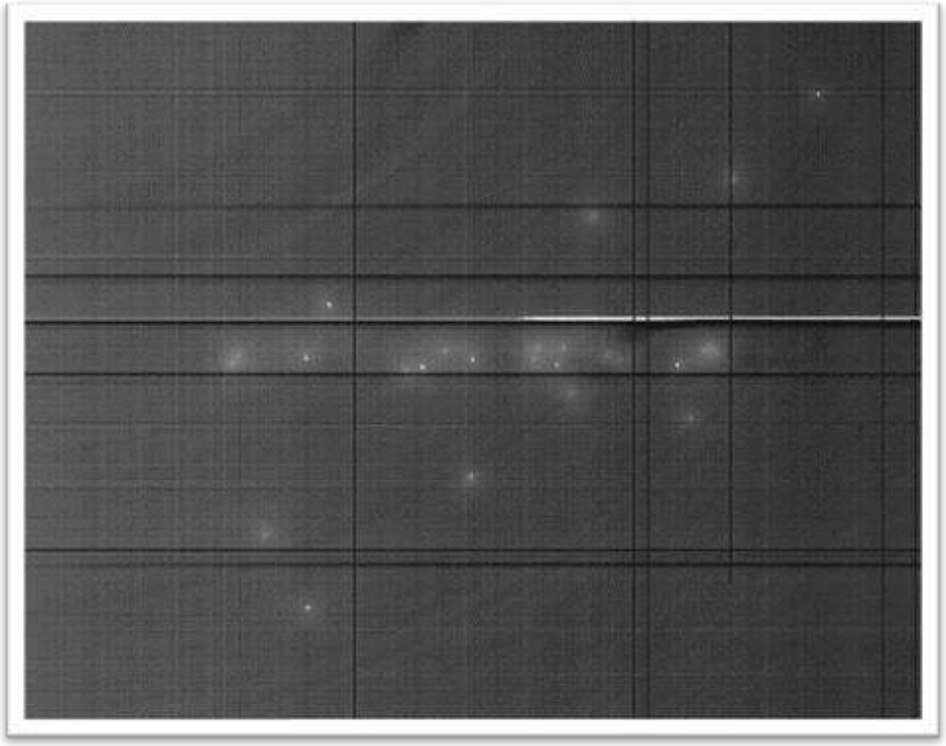


Рисунок 4 – Снимок с камеры, подлежащий обработке

Входной информацией служит последовательность кадров, получаемых с цифровой инфракрасной фотокамеры, установленной на космическом аппарате. Для успешного решения таких задач требуется проводить обработку кадров, так как в зависимости от условий наблюдения в кадрах может присутствовать значительный уровень сигналов фоновых помех. Помимо помех в кадре, связанных с особенностями работы в ИК-диапазоне, помехи могут быть обусловлены собственными тепловыми шумами фоточувствительной матрицы, отражением излучения солнца от облачных образований или других скоплений, наличием объектов, создающих ложные сигналы. Проблема обнаружения

полезного сигнала заключается в решении вопроса о наличии или отсутствии искомого сигнала на фоне помех или шумов. Обнаружение сигнала среди фона немыслимо без знания признаков, характерных для сигнала и для фона. Они должны быть известны и описаны, чтобы выявить различие между искомым сигналом и фоном. Вышеописанные стандарты запуска спутников, информация о расположении небесных тел, данные с систем, отслеживающих фрагменты космического мусора позволяют нам составить картину «нормального» состояния наблюдаемой области. Признаки, по которым сигнал не отличается от фона, бесполезны для обнаружения. Но в реальных задачах невозможно однозначно указать признаки, по которым сигнал абсолютно отличается от фона. Всегда есть вероятность принять за искомый сигнал какую-то составную часть фона или, наоборот, не заметить сигнал, замаскированный фоном. Поэтому задача носит вероятностный характер [10].

Наилучшие характеристики достигаются при одновременной обработке полного массива входной информации – набора кадров за интервал времени, на котором предполагается наличие обнаруживаемых подвижных объектов (полезных сигналов). Такой подход обеспечивает оперативную обработку поступающей информации, не требуя временных и ресурсных затрат на обработку каждой фотографии в отдельности.

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

2.1. Статистическая модель обнаружения неопознанного космического летательного аппарата

Выбор критерия обуславливается ограничениями, описанными в предыдущей главе, и связанными со спецификой условий, в которых будет решаться задача об обнаружении неопознанного объекта. Основные ограничения состоят в следующем:

1) строго ограниченные вычислительные ресурсы;
2) наличие помех;
3) необходимость знания признаков фона и помех.

Полезным сигналом в последовательности кадров ИК-аппаратуры считается сигнал, возникающий при наблюдении появления Nс объектов, при котором пространственно-временные объемы $W(x,k,s)$, описываемые формулой (2.1.1), расположения траекторий отдельных объектов могут пересекаться.

$$W(x,k,s) = \{V_{s1}, V_{s2}, \dots V_{sk}\}, s = 1,2,\dots,N\text{с}, \qquad (2.1.1)$$

где $V_{sj} = V_s(n,i,j)$ – фрагмент j-го кадра, содержащий сигнал s-й траектории, положение которого в кадре определяется параметрами траектории.

Такая ситуация возникает при появлении полезного сигнала на коротком интервале времени, точки возникновения которых в поле зрения аппаратуры оказываются на угловом расстоянии, не превышающем угловое разрешение камеры устройства. При этом в пространстве появляющиеся полезные сигналы могут быть разнесены достаточно далеко. В этих условиях образуется «неразрешенный» объект. При наблюдении такого сигнала, изображение, формируемое объективом в фокальной плоскости аппаратуры, содержит как

фоновые сигналы, создаваемые «разрешенными» космическими объектами или помехами, так и полезные сигналы в произвольном количестве. Форма, размеры и количество появляющихся полезных сигналов случайны и в общем случае неизвестны. Возможная близость полезного сигнала от разных фоновых объектов затрудняет выделение сигналов, порождаемых объектами, находящимися на одной орбите на сравнительно малых расстояниях. Из вышеописанного вытекает следующая модель неопределенного космического объекта в интервале номеров кадров от t_1 до t_k.

В некотором фрагменте G_j каждого из последовательности кадров $U_{t1},\ldots,$ $U_j,\ldots,U_{tk}$, накрывающем некоторый отслеживаемый район околоземного космического пространства, появляются m_j сигналов от N_j появившихся к j-му кадру объектов $(0 \le m_j < N_j, N_j \le N_{\text{ц}})$, а также сигналы фоновых объектов. Число полезных сигналов m_j, а также число фоновых сигналов – случайные величины, законы распределения которых неизвестны. В этом случае информацией для принятия решения о наличии или отсутствии неопределенного космического аппарата может служить последовательность чисел обнаруженных сигналов, рассчитываемое по формуле (2.1.2).

$$x_j = m_{0j} + m_j, j = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_k \qquad (2.1.2)$$

где m_{0j} – число ложных сигналов в j-м кадре.

Постановка задачи обнаружения неопределенного космического объекта может быть сведена к задаче проверки принадлежности двух выборок независимых случайных величин одному и тому же распределению. В первой выборке случайные величины имеют функцию распределения $F_1(x)$ и представляют собой число обнаруженных объектов x_j, $j = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_1 + +k_1 - 1$, в фрагменте кадра G_j в k_1 последовательных кадрах. Во второй выборке случайные величины с функцией распределения $F_2(y)$ представляют собой число обнаруженных объектов y_j, $j = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_1 + +k_2 - 1$, в k_2

последующих последовательных кадрах. При появлении неопознанного объекта во второй выборке, ее элементы стохастически больше элементов первой, то есть, вероятность того, что y_j превысит некоторый порог h, не менее вероятности того, что x_j больше того же порога, т. е.

$$P(y > h) \geq P(x > h) \quad (2.1.3)$$

Так как имеют место равенства (1.1.4) и (1.1.5),

$$P(x > h) = 1 - F_1(h) \quad (2.1.4)$$

$$P(y > h) = 1 - F_2(h) \quad (2.1.5)$$

то условие (2.1.3) можно представить в виде (2.1.6)

$$F_2(h) \leq F_1(h) \quad (2.1.6)$$

Таким образом, проверка нулевой гипотезы H_0 - появление в поле зрения аппаратуры неизвестных космических аппаратов против альтернативной гипотезы H_1 – отсутствие неизвестных космического аппарата сводится к проверке, что $F_2(y) \leq F_1(x)$ против $F_2(y) = F_1(x)$.

После описания постановки задачи и условий ее решения можно перейти к выбору методики проверки статистической гипотезы H_0. Проверяемая гипотеза принадлежит классу гипотез статистической однородности. Определим понятие гипотезы статистической однородности: гипотезами статистической однородности называются предположения о том, что две рассматриваемые выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, т. е. это гипотеза о равенстве функций распределения двух генеральных совокупностей, из которых извлечены рассматриваемые выборки.

Существует два принципа статистической обработки: параметрический и непараметрический [11]. В параметрический принцип входят все методы анализа нормально распределенных количественных признаков. Во всех остальных случаях используется непараметрический подход, который заключается в анализе количественных признаков, независящих от вида их распределения.

2.2. Параметрические критерии

Для корректного использования параметрических статистических критериев требуется предварительная проверка вида распределения. Пропуск этого шага в исследовании может привести к непрогнозируемым ошибкам в ходе проверки рабочей гипотезы. Принадлежность исследуемых данных нормальному закону распределения является необходимым аспектом для корректного применения большей части методов математической статистики [12]. Поэтому проверка на принадлежность нормальному закону является очень частой процедурой при проведении исследований. На больших выборках необходимость в дополнительной проверке на нормальность распределения отпадает. При возрастании числа измерений, выборочные средние стремятся к нормальному закону, даже если исходные данные не являются нормальными или имеют погрешность.

Для проверки данных на принадлежность к нормальному закону распределения имеется целый ряд статистических тестов. Например, Тест Лиллиефорса [13], Андерсона-Дарлинга [14] или критерий Шапиро-Уилка [15].

После проверки на нормальность следует применение параметрического критерия. Одним из наиболее давно описанных и часто применяемых критериев является *t*-критерий Стьюдента [16]. Наиболее часто данный критерий используется для проверки гипотезы о равенстве средних значений двух выборок. *T*-критерий Стьюдента в оригинальной редакции предполагает, что разбросы данных должны равняться. Однако, это предположение можно обойти, используя модификацию *t*-критерия Уэлча [17]. На практике в большинстве случаев значения стандартных отклонений и дисперсии двух генеральных совокупностей неизвестны, поэтому для усиления мощности критерия можно использовать критерий Фишера [18].

При сравнении двух выборок нулевая гипотеза ставится так: обе выборки происходят из генеральных совокупностей, подчиняющихся нормальному закону распределения и имеющих одинаковые средние значения. Формула *t*–критерия может быть представлена в виде (2.2.1), поскольку генеральные средние оцениваются при помощи выборочных средних.

$$t = \frac{\check{X} - \check{Y}}{S_{XY}\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}, \qquad (2.2.1)$$

где $$S_{XY}\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_x + n_Y - 2}}$$

В общем виде *F*–тест (критерий Фишера) используется для сравнения дисперсий двух выборок с нормальным законом распределения. То есть проверяется нулевая гипотеза о равенстве дисперсий. Генеральные дисперсии оцениваются на основе выборок и сам критерий рассчитывается как отношение дисперсии одной выборки к дисперсии другой выборки.

Подведем итоги по обзору параметрических критериев: параметрические критерии требуют предварительную проверку вида распределения. В условиях нашей задачи, то есть в условиях ограниченного вычислительного и временного ресурсов, эта особенность является неприемлемой. Если же не проводить предварительную проверку на нормальность, то вероятность ошибки стремительно возрастает и найти баланс между двумя крайностями не представляется возможным.

2.3. Непараметрические критерии

Особенностью непараметрических критериев [11, 12] является то, что они не включают в расчет параметры вероятностного распределения и основаны на использовании частот или рангов. Метода этой группы статистических критериев применяются в ситуациях, когда в исследовании неизвестны

параметры исследуемых выборок. То есть непараметрические критерии не основываются на оценке параметров при описании распределения. Исходя из этого, непараметрические критерии позволяют обрабатывать данные выборок малого объема, про распределение которых ничего неизвестно или известно недостаточно.

Из непараметрических статистических критериев наиболее часто использующимися для проверок гипотез статистической однородности являются:

1) критерий χ^2 [19, 20];
2) критерий Колмогорова [21];
3) критерий Манна–Уитни [22, 23];
4) ранговый критерий Вилкоксона [12, 24, 25].

Далее рассмотрим вышеперечисленные критерии, чтобы выделить один наиболее подходящий под все поставленные условия.

2.3.1. Критерий (χ^2)

Критерий однородности Хи–квадрат (χ^2) является достаточно универсальным критерием для проверки гипотез о различиях распределений двух и более совокупностей. Данный критерий широко применяется в разных сферах статистических исследований: медицина, психология, метрология, обработка изображений и так далее и тому подобное. Данный критерий является одним из самых популярных статистических критериев для анализа качественных данных, которые могут быть представлены как номинальные, порядковые или ранговые, а также для анализа частот. В основном, данный критерий используют для того, чтобы выяснить есть ли различия между выборкой «до» и выборкой «после». Например, чтобы выяснить есть ли влияние

некоторого фактора на исход. Прежде всего такой критерий можно использовать для анализа таблиц сопряженности.

Алгоритм применения критерия χ^2 для проверки гипотезы о равенстве функций распределения двух генеральных совокупностей, из которых извлечены рассматриваемые выборки, следующий:

1. Выдвигается нулевая гипотеза $H_0 : F_1(x) = F_2(y)$ и альтернативную гипотезу $H_1 : F_1(x) \leq F_2(y)$.
2. Задаем уровень значимости критерия α.
3. Используя выборки x_j и y_j, вычисляем значение статистики критерия χ^2 в следующем виде

$$X^2(x_i, y_j) = i \cdot j \sum_{n=1}^{k} \frac{(\frac{\mu_n}{i} - \frac{\nu_n}{j})^2}{\mu_n + \nu_n}, \qquad (2.3.1)$$

где μ_n, ν_n – количество элементов в n-ом интервале группировки для первой и второй выборок соответственно,

k – число групп, $n = \overline{1,k}$.

В случае, если i=j, статистика критерия χ^2 вычисляется в форме

$$X^2(x_i, y_j) = i \cdot j \sum_{n=1}^{k} \frac{(\mu_n - \nu_n)^2}{\mu_n + \nu_n} \qquad (2.3.2)$$

4. Сравниваем полученные значения статистик (2.3.1) или (2.3.2) с критическим значением, которые считается как квантиль $\chi^2_{1-\alpha,k-1}$ распределения χ^2 и делаем вывод о попадании значения статистики в критическую область.
5. Принимаем решение о принятии или отвержении нулевой гипотезы: если численное значение статистики $X^2(x_i, y_j) \geq \chi^2_{1-\alpha,k-1}$, тогда нулевая

гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы H_1. Иначе гипотеза H_0 принимается при уровне значимости α.

У вышеописанного критерия есть некоторые отличительные свойства:

1. Он основан на сравнении эмпирических частот распределения двух выборок,
2. Универсален, но наиболее удобен в применении, когда первоначальные данные сгруппированы по интервалам.

Мощность критерия χ^2 (вероятность отклонения нулевой гипотезы в случае, когда альтернативная гипотеза верна) сильно зависит от способа группировки и от числа выбранных интервалов [25]. При проверки простых гипотез, в случае оптимального выбора группировки и числа интервалов, данный критерий имеет преимущество в мощности, если сравнивать его с непараметрическими критериями согласия, однако, когда закон распределения не определен однозначно, мощность непараметрических критериев возрастает и вероятность неверно принять нулевую гипотезу (совершить ошибку второго рода) возрастает.

2.3.2. Критерий Колмогорова-Смирнова

Двухвыборочный критерий Колмогорова-Смирнова, как и критерий хи-квадрат, достаточно часто используется в прикладных статистических исследованиях. Для наибольшей уверенности в достоверности результатов теста Колмогорова-Смирнова необходимо обеспечить достаточно большой объем выборок. Обычно число измерений должно быть больше или равно 50 в одной и второй выборках.

Опишем алгоритм применения двухвыборочного критерия Колмогорова-Смирнова:

1. Выдвигается нулевая гипотеза о равенстве функций распределения, то есть $H_0 : F_1(x) = F_2(y)$, также формулируем альтернативную гипотезу $H_1 : F_1(x) \leq F_2(y)$,
2. Задается уровень значимости α,
3. Строятся эмпирические функции распределения $F_n(x)$ и $G_m(x)$ по исходным выборкам и находится значение по формуле (2.3.3) с учетом (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.6)

$$\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}, \quad (2.3.3)$$

$$D^+_{m,n} = \max_{1 \leq r \leq m} \left[\frac{r}{m} - F_n\left(y_{(r)}\right)\right] = \max_{1 \leq s \leq m} \left[G_m\left(x_{(s)}\right) - \frac{s-1}{n}\right], \quad (2.3.4)$$

$$D^-_{m,n} = \max_{1 \leq r \leq m} \left[F_n\left(y_{(r)}\right) - \frac{r-1}{m}\right] = \max_{1 \leq s \leq m} \left[\frac{s}{n} - G_m\left(x_{(s)}\right)\right], \quad (2.3.5)$$

$$D_{m,n} = max(D^+_{m,n}, D^-_{m,n}). \quad (2.3.6)$$

4. Находится критическая область – интервал $(k_{1-\alpha}; \infty)$, где $k_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1 - \alpha$ распределения Колмогорова.
5. Принимается решение о принятии или отвержении нулевой гипотезы. Логика принятия решения следующая: если значении статистики критерия (1.2.4) попадает в интервал критической области, то гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы H_1. Иначе, гипотеза H_0 принимается при уровне значимости α.

У критерия Колмогорова-Смирнова так же имеется ряд особенностей, главной из которых является то, что он используется для непрерывных семейств распределений. В случае непрерывности распределение нормированной статистики не зависит от типа функции распределения и критерий получает преимущество в ситуации, когда распределение выборок неизвестно. Однако, в противном случае, критерий Колмогорова-Смирнова чувствителен к различию форм распределений рассматриваемых выборок, например, к различиям в

рассеянии или асимметрии. В нашей задаче размер выборок заранее известен и равен 30, что гораздо меньше размера выборки в минимум 50 измерений для обеспечения наибольшей достоверности результатов.

2.3.3. Критерий Манна-Уитни

Критерий Манна-Уитни проверяет гипотезу о том, что значения двух совокупностей, из которых взяты выборки, различны. Данный статистический критерий позволяет оценить различия между двумя независимыми выборками по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. Метод определяет достаточно ли мала зона совпадающих значений между двумя ранжированными рядами значений обеих выборок. Чем меньше значение критерия, тем выше вероятность, что различия между значениями параметра в выборках достоверны.

Опишем алгоритм применения критерия Манна-Уитни:

1. Выдвигается нулевая гипотеза о равенстве функций распределения, то есть $H_0 : F_1(x) = F_2(y)$, также формулируем альтернативную гипотезу $H_1 : F_1(x) \leq F_2(y)$.
2. Объединяем две выборки $X_{[n]}$ и $Y_{[m]}$ в один общий вариационный ряд, расставляя элементы в порядке нарастания признака. Каждому элементу вариационного ряда присваивается ранг.
3. Далее ранжированный ряд вновь разделяется на два, которые состоят из единиц первой и второй выборок. Отдельно считается сумма рангов, проставленных элементам первой выборки и, аналогично, второй. Затем вычисляем

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1, \qquad (2.3.7)$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2, \qquad (2.3.8)$$

4. Зададим уровень значимости α.
5. Вычисляем статистику критерия как $U(X_{[n]}, Y_{[m]}) = min\{U_1; U_2\}$.
6. Далее по таблице критических значений критерия Манна-Уитни определяем критическое значение при выбранном уровне значимости.
7. Если полученное значение статистики $U(X_{[n]}, Y_{[m]})$ меньше или равно табличному значению, то нулевая гипотеза о равенстве функций распределения отвергается в пользу альтернативной гипотезы. Иначе, гипотеза H_0 принимается при уровне значимости α.

Достаточно мощный критерий, но существует ряд ограничений: теряет точность на больших выборках, в выборочных данных не должно быть повторяющихся значений, а также он чувствителен к распределению, то есть критерий предполагает, что распределения в сравниваемых выборках относятся к одинаковому типу. На практике, в поставленной задаче, мы не можем утверждать, что выборки не содержат одинаковых значений, а также что распределения принадлежат одному и тому же типу.

2.3.4. Двухвыборочный критерий Вилкоксона

Критерий Вилкоксона, в целом, является аналогом Манна-Уитни, с той разницей, что в последнем в качестве статистики используется число пар таких, что $X_i < Y_j$, тогда как статистика Вилкоксона представляет собой сумму рангов элементов выборки. Аналогично, алгоритм применения Вилкоксона следующий:

1. Выдвигается нулевая гипотеза о равенстве функций распределения, то есть $H_0 : F_1(x) = F_2(y)$, также формулируем альтернативную гипотезу $H_1 : F_1(x) \leq F_2(y)$.
2. Объединяем две выборки $X_{[n]}$ и $Y_{[m]}$ в один общий вариационный ряд, расставляя элементы в порядке нарастания признака. Каждому элементу вариационного ряда присваивается ранг.
3. Далее ранжированный ряд вновь разделяется на два, которые состоят из единиц первой и второй выборок.
4. Зададим уровень значимости α.
5. Вычисляем статистику критерия как сумму рангов второй выборки.
6. Далее по таблице критических значений критерия Вилкоксона определяем критическое значение при выбранном уровне значимости.
7. Если полученное значение статистики $W(X_{[n]}, Y_{[m]})$ меньше или равно табличному значению, то нулевая гипотеза о равенстве функций распределения отвергается в пользу альтернативной гипотезы. Иначе, гипотеза H_0 принимается при уровне значимости α.

Критерий Вилкоксона имеет ряд преимуществ перед всеми вышеописанными критериями. Двухвыборочный критерий Вилкоксона может быть использован для выборок с повторяющимися значениями, что делает его более универсальным в условиях представленной к решению задачи. У критерия так же есть ограничение на объем выборки, но наше количество элементов выборки – 30, что входит в область значений, на которых критерий можно использовать уверенно. Вообще говоря, двухвыборочный критерий Вилкоксона является непараметрическим аналогом параметрического критерия *t*-Стьюдента, который является одним из наиболее универсальных и популярных критериев для решения задач, подобно рассматриваемой в настоящей ВКР.

После проведенного анализа методов прикладной математической статистики, сделан вывод, что для решения поставленной задачи обнаружения неопределенных космических объектов на кадрах с инфракрасной аппаратуры в условиях ограниченного вычислительного ресурса, наиболее удачным и подходящим является вышеописанный двухвыборочный критерий Вилкоксона.

ГЛАВА 3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ

3.1. Алгоритм применения критерия Вилкоксона для обнаружения неопознанных летательных аппаратов

На основе результатов анализа всех вышеописанных подходов к решению поставленной задачи, а также с учетом особенностей условий ее выполнения, предлагается алгоритм решения задачи обнаружения неопознанных космических объектов на основе двухвыборочного критерия Вилкоксона.

Определим нулевую гипотезу H_0 и альтернативную гипотезу H_1:

1. H_0 – наличие неопознанных летательных аппаратов в кадре;
2. H_1 – отсутствие неопознанных летательных аппаратов в кадре.

Алгоритм содержит следующие действия:

1. Получение выборки чисел сигналов v_i в каждом кадре текущей последовательности из $m+n$ кадров, $i=j_i, j_2, \dots j_{n+m}$. Первые m элементов этой выборки образуют первую выборку, последующие n элементов – вторую.
2. Объединяем две выборки в один общий вариационный ряд, расставляя элементы в порядке нарастания признака. Каждому элементу вариационного ряда присваивается ранг.
3. Определяем вектора рангов второй выборки, то есть, номеров элементов второй выборки в упорядоченной выборке.
4. Вычисляем статистику Вилкоксона W как сумму рангов второй выборки.

5. Сравниваем с заранее установленным порогом h_1. При превышении порога принимается гипотеза H_0, в противном случае – отвергается в пользу альтернативы H_1.

При превышении порога принимается предварительное решение об обнаружении неопознанного летательного объекта. Номер кадра j_0, в котором произошло превышение порога h_1, служит оценкой кадра появления объекта, а номер кадра j_k, в котором значение статистики W оказалось меньше порога h_2, служит оценкой кадра исчезновения неопознанного летательного объекта.

Распределение вектора рангов второй выборки при гипотезе H_0 равномерное и полностью определяется значениями m и n при любом исходном распределении выборки:

$$P(s_1, s_2, \ldots, s_n|\mathrm{H}_0) = \frac{1}{C_{n+m}^n}, \qquad (3.1.1)$$

гле C_{n+m}^n – число сочетаний из $m+n$ элементов по n элементам.

Таким образом, распределение $P(W|H)$ статистики W при гипотезе H также полностью определяется значениями m и n. Следовательно, для заданной вероятности ложного срабатывания критерия $P_{\text{лт}}$ может быть рассчитан порог h_1. При достаточно больших значениях m и n распределение $P(W|H)$ нормализуется со средним и дисперсией, соответственно

$$\begin{cases} m_w = \dfrac{n(m+n-1)}{2} \\ \sigma_w^2 = \dfrac{mn(m+n+1)}{12} \end{cases} \qquad (3.1.2)$$

Значения m и n считаются достаточно большими, если $m \geq 8$ и $n \geq 8$.

Для обнаружения летательного аппарата значение n выбирается из следующего условия:

$$n = \frac{T - \Delta + (N_{\text{нко}} - 1)}{T_k}, \qquad (3.1.3)$$

где T – количество кадров наблюдения сигнала,

Δ - задержка обнаружения 1-го сигнала траектории,

T_k – длительность цикла наблюдения.

Пороги h_1 и h_2 вычисляются по формуле (2.1.4).

$$h_1 = h_2 = m_w + c\sigma_w^2, \qquad (3.1.4)$$

где c – константа, определяемая заданной вероятностью ложного срабатывания критерия $P_{лт}$.

Вероятность предварительного обнаружения неопознанного космического объекта при таком пороге оценивается путем статистического моделирования. Окончательное решение об обнаружении сигнала от неопознанного космического объекта принимается при условии обнаружения «неразрешенных» полезных сигналов во фрагменте кадра G_j на интервале времени, установленного заранее.

3.2. Вероятностные характеристики обнаружения неопознанного космического аппарата

Используемый для решения задачи ранговый алгоритм обеспечивает заданную вероятность ложного обнаружения, но не меньшую минимальной, определяемой размерами выборок. Синтез алгоритма обнаружения был произведен по сигнальной информации без каких-либо ограничений на параметры неопознанных летательных аппаратов, главными из которых являются число появившихся объектов и время наблюдения. Для снижения вероятности ложного обнаружения в процессе сопровождения появившихся объектов осуществляется определение главных параметров и решение об

обнаружении неопознанного объекта принимается, если эти параметры проходят селекцию на принадлежность истинным условиям обнаружения.

Таким образам, предварительное решение об обнаружении объекта, если в некоторой области G выполнены следующие условия относительно пороговых констант h_1, h_2 – порогов «срабатывания» статистического критерия, T_{min} – порога длительности наблюдения, N_0 – порога числа целей:

1. «Сработал» критерий Вилкоксона

$$W_{j0} = \sum_{i=1}^{n} r_i > h_1, \tag{3.2.1}$$

$$W_{jk} = \sum_{i=1}^{n} r_i < h_2\,; \tag{3.2.2}$$

2. Время наблюдения неопределенных объектов в кадре, удовлетворяет следующим неравенствам:

$$T_{min} \le T_{\text{нко}} < T_1; \tag{3.2.3}$$

3. Число траекторий одиночных целей n_o, обнаруженных в области G на интервале наблюдения объектов, удовлетворяют неравенству:

$$n_o \ge N_0 \tag{3.2.4}$$

В соответствии с вышеописанными правилами принятия решения вероятность ложного обнаружения объекта в области G:

$$\begin{aligned} Q_{\text{нко}} = P\left(W_{j0} > h_1, W_{jk} < h_2 \middle| H_0\right) \times \\ \times\ P(T_{min} \le T_{\text{нко}} < \tilde{N}T_1 | H_0) \cdot P_{\text{ЛТ}}^{N_0}, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

а вероятность правильного обнаружения:

$$\begin{aligned} P_{\text{нко}} = P\left(W_{j0} > h_1, W_{jk} < h_2 \middle| H_1\right) \times \\ \times\ P(T_{min} \le T_{\text{нко}} < \tilde{N}T_1 | H_1) \cdot P_{\text{ОБ}}^{N_0}, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

где $P_{\text{ЛТ}}^{N_0}$ и $P_{\text{ОБ}}^{N_0}$ – вероятности ложного и правильного обнаружения одиночной цели, соответственно.

Событие такое, что $W_{jk} < h_2$ рано или поздно наступает и определяет время наблюдения появившихся объектов, так что

$$P\left(W_{j0} > h_1, W_{jk} < h_2 \middle| H_0\right) = P\left(W_{j0} > h_1 \middle| H_0\right) \times \\ \times P(W_{jk} < h_2 | H_0, W_{j0} > h_1) = P\left(W_{j0} > h_1 \middle| H_0\right). \quad (3.2.7)$$

Согласно (2.1.4), вероятность ложного срабатывания критерия Вилкоксона

$$q_w = P\left(W_{j0} > h_1 \middle| H_0\right) = \Phi\left(\frac{h_1 - m_w}{\sigma_w}\right), \quad (3.2.8)$$

где m_w и σ_w определяются выражениями (3.1.3),

Ф – функция Лапласа.

Таким образом выбором порога h_1 по правилу (3.1.4) можно обеспечить близкое к минимальному значение вероятности ложного срабатывания критерия Вилкоксона.

Параметры процедуры селекции по времени наблюдения и числу объектов подбираются экспериментально по критерию минимума вероятности ложной селекции при допустимой вероятности правильной селекции.

Найти аналитически распределение статистики Вилкоксона при наличии сигналов от объектов и при появлении сигналов, позволяющее рассчитать вероятность правильного обнаружение неопознанного космического объекта в общем случае не удается. Оценки вероятности правильного обнаружения находятся путем статистического моделирования алгоритма обнаружения в условиях различных вариантов появления искомых целей, наблюдаемых широкопольным или узкопольным каналами бортовой аппаратуры наблюдения.

3.3. Программная реализация критерия Вилкоксона

Описанный ранее алгоритм реализован в пакете прикладных программ MATLAB.

Исследуемый кадр представляет собой таблицу со значением амплитуды в каждой из ячеек. Амплитуды получены в результате засветки внешних сигналов. Внешним сигналом может быть либо шум с нормальным законом распределения, либо полезный сигнал совместно с шумом, либо же присутствовать только шум. Модель генерируемых кадров, представлена на рисунках 5 и 6.

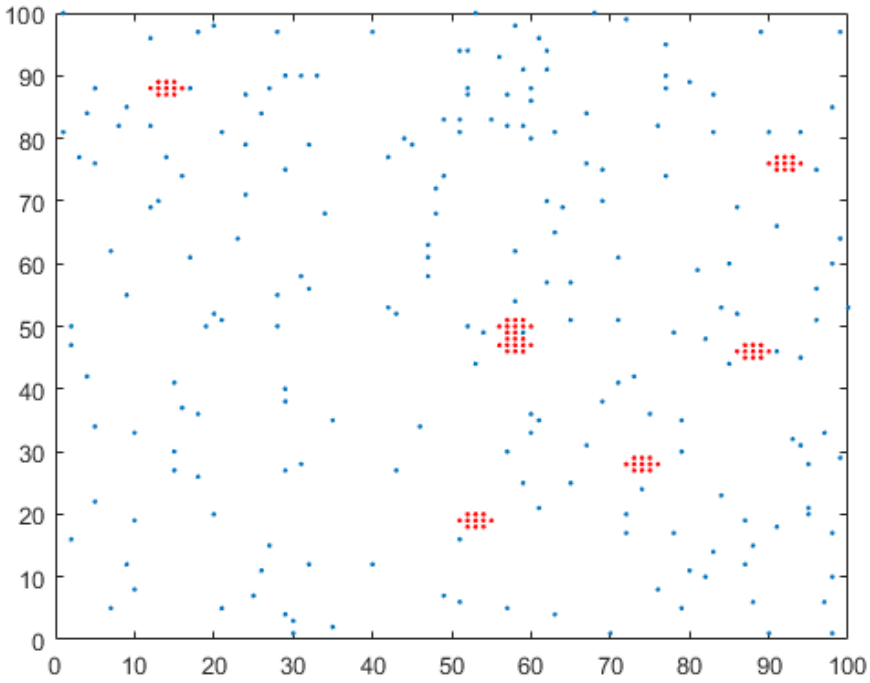


Рисунок 5 – Модель кадра с полезным сигналом

На рисунке 5 синие точки представляют собой шум с нормальным законом распределения и настраиваемыми параметрами математического ожидания и сигмы, а красные – полезные сигналы, расположение которых – случайно. Размер кадра выбран 100 на 100 для быстроты вычислений, но может быть так же задан любым образом.

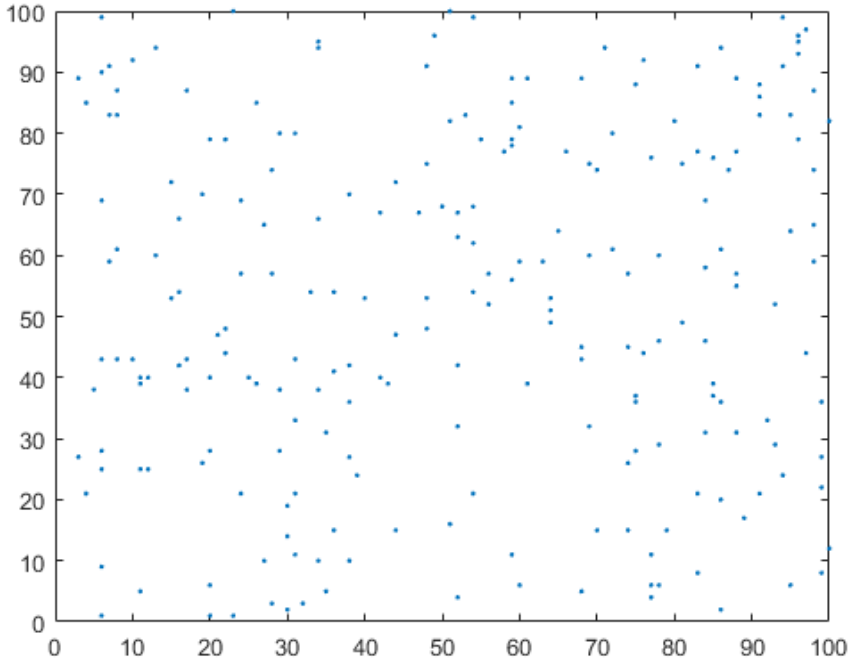


Рисунок 6 – Модель кадра без полезных сигналов

Моделирование реальной работы бортовой аппаратуры отслеживания производится следующим образом: есть некоторая последовательность кадров, по которой нужно принять решение о наличии сигналов определенной природы. Известно, что первые N кадров точно не содержат интересующие нас сигналы. На таких кадрах имеются только сигналы, порожденные фоновой помехой, которые так же попадают в обработку, ввиду погрешности селекции каналов фильтрации. В силу случайной природы помехи сигналы от неё также будут иметь случайный характер, то есть появляются они в разных местах для каждого кадра. При этом будем считается, что все ложные сигналы имеют распределение Гаусса с заданными параметрами.

На кадрах, начиная с N+1 могут быть, а могут и не появляться, полезные сигналы, которые нужно обнаружить. Процедура обнаружения таких сигналов сводится к следующему:

1. Строится обучающая выборка, каждый элемент которой - количество отметок, обнаруженных в кадре. Длина такой выборки N.

2. Происходит смещение на один кадр.

3. Строится выборка, называемая сигнальной, с тем же размером, что и обучающая, но первым элементом является количество отметок на втором кадре, последним элементом - количество отметок на (N+1) кадре.

4. По этим двум выборкам находится значение статистики Вилкоксона. По нему определяется, содержатся ли полезные сигналы среди помехи.

5. Сигнальная выборка смещается ещё на кадр.

В итоге строится зависимость количества отметок в кадре от номера кадра, а также значение статистики Вилкоксона. По превышении порога, задаваемого величиной ложной тревоги, принимается предварительное решение об обнаружении, если же таких сообщений накапливается некоторое количество - выдается обнаружение. Отдельно стоит вопрос о том, как определять количество отметок в кадре. Отметка - совокупность пикселей, стоящих рядом. Поскольку в задаче задано, что в кадре имеются не только ложные отметки, состоящие из нескольких пикселей, но и одиночные пиксели, то сначала удаляются все одиночные сигналы, а затем подсчитать количество отметок. Количество отметок определяется следующим образом:

$$N_{\text{отметок}} = \frac{N_{\text{пвк}}}{N_{\text{пво}}}, \qquad (3.3.1)$$

где $N_{\text{пвк}}$ - количество всех пикселей в кадре;

$N_{\text{пво}}$ - среднее число пикселей в отметке.

Данная модель построена таким образом, что мы знаем, сколько в среднем в отметке содержится пикселей, что делает возможным такую методику подсчета.

На рисунках 7 и 8 представлены графики зависимости номера кадра от количества обнаруженных отметок в кадре и зависимости номера кадра от значения статистики Вилкоксона, полученные в результаты двух запусков программы.

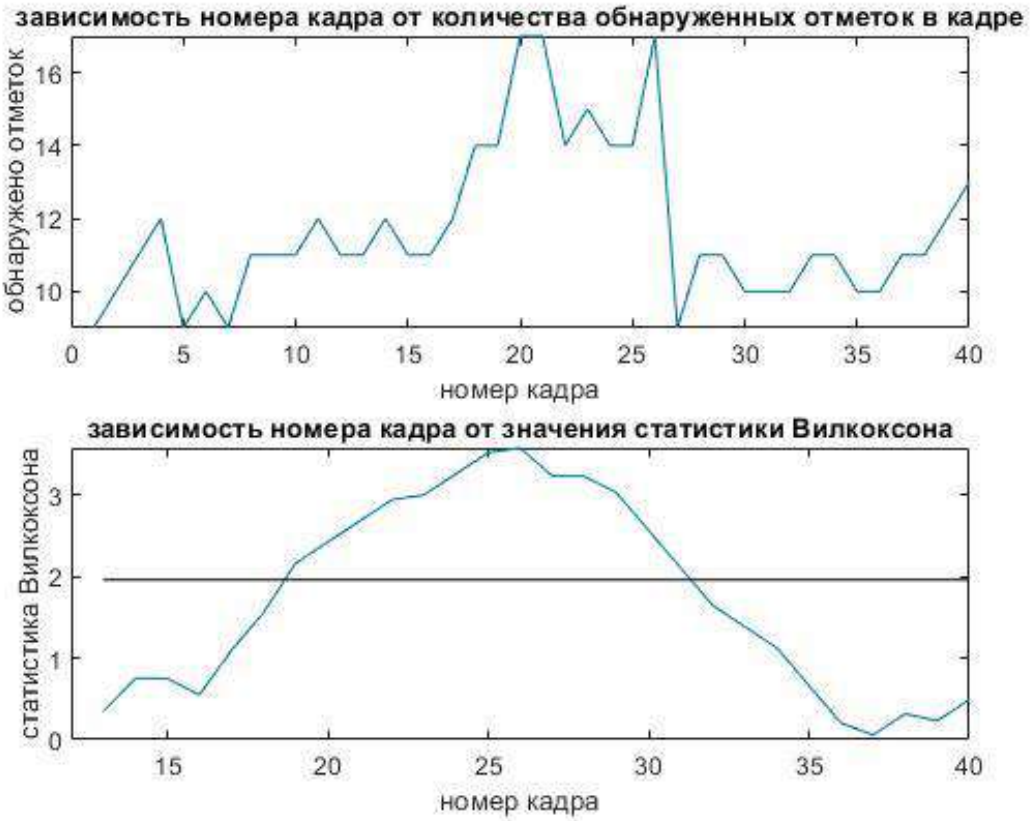


Рисунок 7 – Графики №1

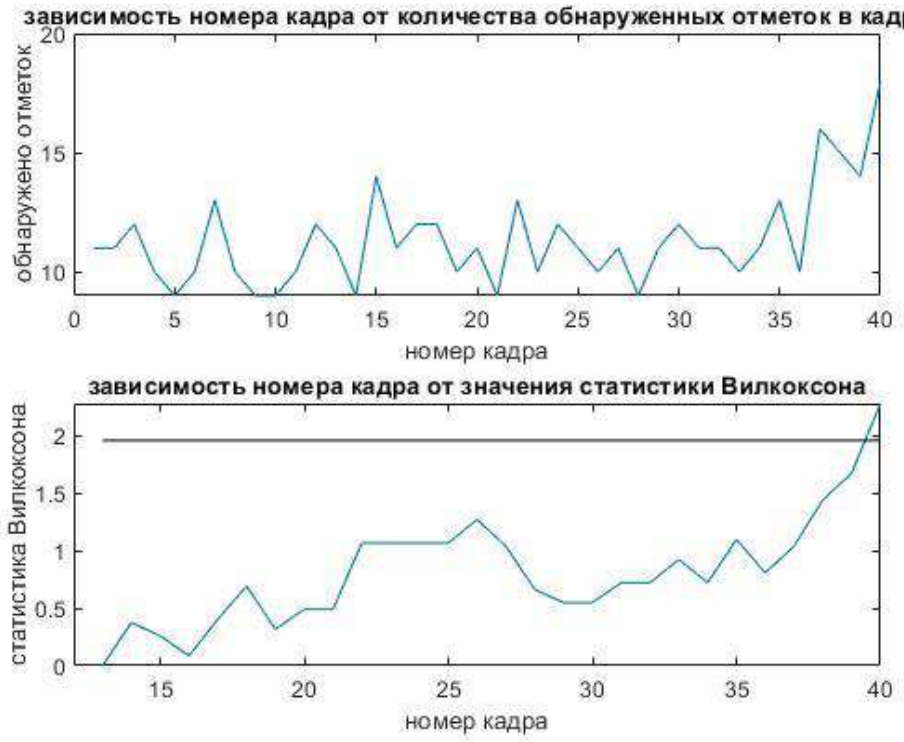


Рисунок 8 - Графики №2

985

Как видно из представленных графиков при резком росте количества отметок, значение статистики Вилкоксона так же растет и превышает установленный порог. Порог установлен заранее и рассчитан по формуле (3.1.4). Исходный код представлен в Приложении Б.

Итак, критерий Вилкоксона обеспечивает наименьшую вероятность ошибки первого рода, корректно применим на выборках до n=30, что отвечает условиям описанного при постановке задачи предполагаемой реализации. Из-за того, что критерий – непараметрический, он не требует большого вычислительного ресурса и не содержит громоздких математических вычислений, что делает его наиболее подходящим для условий отдаленности от Земли и строгой ограниченности вычислительного ресурса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения задачи обнаружения неопознанных космических объектов в околоземном космическом пространстве в представленной выпускной квалификационной работе предлагается использование непараметрического двухвыборочного критерия Вилкоксона.

Этапы решения поставленной задачи включают в себя следующее:

- Проведение анализа литературных источников, освещающих особенности решения задачи в условиях удаленности от Земли. На основе чего описаны основные ограничения выполнения поставленной задачи.
- Исходя из наложенных условий, на основе обзора и анализа возможности применения разного рода статистических критериев, сделан выбор в пользу двухвыборочного критерия Вилкоксона.
- На основе проведенного анализа предложен алгоритм реализации применения двухвыборочного критерия Вилкоксона, написанный в среде MATLAB.
- Генерация исходных данных. Помимо непосредственно написанного алгоритма двухвыборочного критерия Вилкоксона, проверяющего нулевую гипотезу H_0 – наличие неопознанных летательных аппаратов в кадре, программа содержит метод генерации тестовых данных.

На основе полученных данных можно сделать вывод, что применение двухвыборочного критерия Вилкоксона решает поставленную задачу, соблюдая все условия и при этом имея достаточно высокую точность обнаружения.

Описанный метод может быть применен не только в отрасли контроля околоземного космического пространства, но также в любых системах слежения, эксплуатанты которой ставят в приоритет задачу обнаружения аномалий в отслеживаемом периметре. Ввиду своей универсальности в вопросе реализации может быть описан в любой среде программирования и поэтому такой подход

может быть использован как гражданскими организациями и частными лицами, так и государственными, в том числе, военными.

Данный проект может быть усовершенствован добавлением методик оценки количества появившихся объектов в поле зрения аппаратуры отслеживания и определением района появления.

Так же повысить точность обнаружения может изменение методики подсчета количества отметок на кадре. Например, с помощью использования локальных максимумов.

Результаты работы докладывались на межвузовских, студенческих и научных конференциях:

- ИНДУСТРИАЛЬНАЯ РОССИЯ: ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА, 04.12.2020.

- Новое в науке и образовании, ОЧУ ВО «Еврейский университет», 16.03.2021.

- Управление и безопасность в информационных и киберфизических системах, МТУСИ, 19.04.2021.

По материалам указанных конференций опубликованы научные статьи:

- «Применение критерия Вилкоксона для обнаружения неопределенных космических объектов» - в сборнике научных статей по материалам четвертой международной научно-практической конференции, 04.12.2020.

- «Применение статистических методов для обнаружения космических объектов» - в сборнике статей по материалам межвузовской студенческой конференции ОЧУ ВО «Еврейский университет», 16.03.2021.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бахтигараев, Н. С. Фотографические наблюдения ИНТ и возможности их каталогизации / Н. С. Бахтигараев // Проблема загрязнения космоса (Космический мусор) / под ред. А. Г. Масевич. − М.: Космосинформ, 1993.
2. Бахтигараев, Н. С. Информационное обеспечение космических экспериментов на основе численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли / Н. С. Бахтигараев, В. В. Чазов // Космические исследования. − 2005. − Т. 43. − № 5.
3. Руководящие принципы Комитета по использованию космического пространства в мирных целях по предупреждению образования космического мусора, 2007
4. Хуторовский, З. Н. Ведение каталога космических объектов / З. Н. Хуторовский // Космические исследования. − 1993. − Т. 31. − Вып. 4
5. Шевцов, В.А. Основы построения инфокоммуникационных систем и связей. – Москва, 2018. – URL: https://en.ppt-online.org/689047
6. Смотрим в космические дали (к 40-летию ЦККП) // Под общей редакцией Л. К. Оляндэра - Москва: АвиаРус-21, 2005.
7. Лаврентьев, В.Г., Олейников И. И. / Автоматизированная система предупреждения об опасных ситуациях в околоземном космическом пространстве. – URL: http://www.astronomer.ru/data/0060/ASPOS.pdf
8. Веселков, С. А., Лапухин Е.Г. Проблемы создания системы контроля космического пространства. Методы сбора и обработки космической информации // Решетниковские чтения. 2011. - С. 8–12.
9. Козлов, С. И. Использование инфракрасных приборов в космической технике и дальнейшие перспективы их развития // Вестник науки и образования. 2019. – С. 63–71.

10. Рябова Т. П., Замега Э.Н., Применение критерия Вилкоксона для обнаружения неопределенных космических объектов // Индустриальная Россия: вчера, сегодня, завтра. Сборник научных статей по материалам IV Международной научно-практической конференции. 2020. – С. 11–13.

11. Дмитриев, А.И., Журавлев, Ю.И., Кренделев, Ф.П. О математических принципах классификации предметов или явлений // Дискретный анализ. Новосибирск: ИМ СО АНСССР, 1966. Вып. 7. С. 1–17.

12. Лемешко, Б.Ю, Руководство по применению «Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона». – Новосибирск 2014, – URL: https://ami.nstu.ru/~headrd/seminar/publik_html/guid_normal

_tets.pdf.

13. Dallal, G.E. and Wilkinson, L. An analytic approximation to the distribution of Lilliefors' test for normality. // The American Statistician. – 1986, P. 213–296.

14. Anderson T.W., and Darling D.A. Asymptotic theory of certain “goodness of fit” criteria based on stochastic processes // Ann. Math. Statist., 1952. V.23. – P. 193–212.

15. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит, 2006. – С. 454–456.

16. Классические методы статистики: t-критерий Стьюдента, 2012. – URL: https://r-analytics.blogspot.com/2012/03/t.html.

17. B. L. Welch. The Generalization of `Student’s' Problem when Several Different Population Variances are Involved // 1952. Vol. 34, No. 1/2, P. 28– 35/.

18. F-Test for Equality of Two Variances. – URL: https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda359.htm.

19. P. E. Greenwood, M. S. Nikulin. A guide to chi-squared testing. — New York: Wiley, 1996.

20. Классические метода статистики: критерий хи-квадрат. 2012. – URL: https://r-analytics.blogspot.com/2012/08/blog-post.html.

21. Чернова, Н.И. Критерий согласия: критерий Колмогорова. 2002. – URL: https://tvims.nsu.ru/chernova/ms/lec/node45.html.

22. Гублер Е. В., Генкин А. А. Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях. - Л., 1973.

23. Conover, William J. / Practical Nonparametric Statistics, John Wiley & Sons, 1980 (2nd Edition), P. 225–226.

24. W критерий Вилкосона. – URL: http://statistica.ru/local-portals/medicine/w-kriteriy-uilkoksona/.

25. Критерий согласия Пирсона. О мощности критерия. 2020. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Критерий_согласия_Пирсона.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

11 статья Договора о космосе

«Для содействия международному сотрудничеству в мирном исследовании и использовании космического пространства государства-участника Договора, осуществляющие деятельность в космическом пространстве, включая Луну и другие небесные тела, соглашаются в максимально возможной и практически осуществимой степени информировать Генерального секретаря Организации Объединенных Наций, а также общественность и международное научное сообщество о характере, ходе, местах и результатах такой деятельности. По получении указанной выше информации Генеральный секретарь Организации Объединенных Наций должен быть готов к ее немедленному и эффективному распространению.»

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Исходный код программы

```
clear
clc
hold off
                % Входные данные

N_k = 12;           % количество кадров, по которым строится обуч.выборка
N_all = 40;         % общее количество кадров (т.е. N_k было, (N_all-N_k) -
добавка)


% Параметры кадра
Ny = 100;           % количество строк в кадре
Nx = 200;           % количество столбцов в кадре


% Параметры помехи (шум)
m_o_noise = -0.2;       % мат. ожидание шума
sig_noise = 0.5;        % сигма шума


% Параметры помехи (ложные сигналы)
N_min_fake = 8;       % минимальное количество ложных сигналов
N_max_fake = 11;      % максимальное количество ложных сигналов
m_o_fakesignal = 1;   % мат. ожидание
sig_fakesignal = 1;   % сигма
size_fakeotm = 5;     % количество пикселей в одной ложной отметке


% Параметры полезных сигналов
N_min_signal = 5;     % минимальное количество полезных сигналов
N_max_signal = 8;     % максимальное количество полезных сигналов
m_o_signal = 4;       % мат. ожидание
sig_signal = 1;       % сигма
size_otm = 10;

N_otm = [];         % массив, элементы которого - кол-во отметок в кадре
```

```
for i = 1 : N_k

   N_fakeotm = floor( (N_max_fake - N_min_fake) * rand(1) + N_min_fake );
   A = kadr_blank(Nx, Ny, m_o_noise, sig_noise, N_fakeotm,...
      m_o_fakesignal, sig_fakesignal);
   n_otm = podschet_otm(A, size_fakeotm);
   N_otm = [N_otm n_otm];

end


t = 0;
k = 1;
Wilk_stat = [];
PR_wilk = [];
N_flow_true = 0;
% Цикл по кадрам
for i = 1 : N_all - N_k

   pr = priznak_starta;       % СВ, которая определеяет, появятся
                              %  нужные сигналы на этом кадре или нет
   if pr == 1
      t = t+1;
   end
   if t > 0
      t = t+1;
      if t > 10
         pr = 0;
         mean_fake_i_true = size_fakeotm;
      else
         pr = 1;
         mean_fake_i_true = mean([size_fakeotm, size_otm]);
      end
   else
      mean_fake_i_true = size_fakeotm;
   end

   % Разыгрывание количества ложных и полезных сигналов
   N_fakeotm = floor( (N_max_fake - N_min_fake) * rand(1) + N_min_fake );
   N_signal = floor( (N_max_signal - N_min_signal) * rand(1) + N_min_signal );

   [A, N_true] = kadr_new(Nx, Ny, m_o_noise, sig_noise, N_fakeotm, ...
```


994

```
        m_o_fakesignal, sig_fakesignal, N_signal, m_o_signal, sig_signal, pr);
    N_flow_true = N_flow_true + N_true;
    % Подсчёт количества отметок в кадре
    n_otm = podschet_otm(A, mean_fake_i_true);
    N_otm = [N_otm n_otm];

    Obuch_viborka = N_otm(1 : N_k);
    Signal_viborka = N_otm(k+1 : N_k+i);
    k = k + 1;

    % Сравнение кадров по критерию Вилкоксона
    [p_znach, pr_wilk] = Wilcoxon(Obuch_viborka, Signal_viborka);
    Wilk_stat = [Wilk_stat p_znach];
    PR_wilk = [PR_wilk pr_wilk];
end

subplot(2,1,1); plot(1:length(N_otm),N_otm)
title('зависимость номера кадра от количества обнаруженных отметок в кадре');
xlabel('номер кадра'); ylabel('обнаружено отметок');
subplot(2,1,2); plot(N_k+1 : N_all,Wilk_stat); hold on
interval = N_k+1 :0.1: N_all;
plot(interval, 1.96*ones(1, length(interval)),'Color', 'black')
title('зависимость номера кадра от значения статистики Вилкоксона');
xlabel('номер кадра'); ylabel('статистика Вилкоксона');
axis([N_k N_all 0 max(Wilk_stat)]);

% Подсчёт количества полезных сигналов за время наблюдения
m_obuch = floor( mean(N_otm(1:N_k)) );
PR = [ones(1,round(N_k/2)) PR_wilk ones(1,floor(N_k/2+0.5))];
if length(PR) > length(N_otm)
    PR(length(PR)) = [];
elseif length(PR) < length(N_otm)
    PR = [1 PR];
end
IT = [PR' N_otm'];
Sum = 0;
for i = 1 : size(IT,1)
    if IT(i,1) == 0
        Sum = Sum + IT(i,2) - m_obuch;
    end
end
```


995

```
% Поиск начала появления сигналов
t = 0;
for i = 1 : length(PR_wilk)
   if PR_wilk(1, i) == 0
      t = i + round(N_k/2);
      break
   end
end

str1 = ['Количество полезных сигналов априори = ', num2str(N_flow_true)];
disp(str1)
str2 = ['Количество обнаруженных сигналов по Вилкоксону = ', num2str(Sum)];
disp(str2)
str3 = ['Появление первых сигналов на кадре = ', num2str(t)];
disp(str3)


end



function A = kadr_blank(Nx, Ny, m_o_noise, sig_noise, N_fakeotm,...
   m_o_fakesignal, sig_fakesignal)

% Создание помехи в кадре
A = create_noise (Nx, Ny, m_o_noise, sig_noise);

% % Рисование помехи
% [rr, cc] = find(A);
% plot(cc, rr, '.'); hold on

% Наложение ложных сигналов
for i = 1 : N_fakeotm
   A = create_fakesignal(A, m_o_fakesignal, sig_fakesignal);
end

end



function [B, N] = kadr_new(Nx, Ny, m_o_noise, sig_noise, N_fakeotm,...
   m_o_fakesignal, sig_fakesignal, Nsignal, m_o_signal, sig_signal, pr)
```

```
% Создание помехи в кадре
A = create_noise (Nx, Ny, m_o_noise, sig_noise);

% Наложение ложных сигналов
for i = 1 : N_fakeotm

   A = create_fakesignal(A, m_o_fakesignal, sig_fakesignal);

end

B = A;
N = 0;

if pr == 1

   for i = 1 : Nsignal
      B = create_signal(B, m_o_signal, sig_signal);
   end
   N = Nsignal;
end

end



function [A] = create_noise (Nx, Ny, m_o, sig)

A = zeros(Ny, Nx);

for i = 1 : size(A, 1)
   for j = 1 : size(A, 2)

      A(i, j) = floor( m_o + sig * randn(1,1) );
      if A(i, j) < 0
         A(i ,j) = 0;
      end

   end
end

end
```


997

```
function [B] = create_fakesignal (B, m_o, sig)

x_min = 1; x_max = size(B, 2);
y_min = 1; y_max = size(B, 1);

x0 = floor( (x_max-x_min) .* rand(1) + x_min);      % случайный отсчет
y0 = floor( (y_max-y_min) .* rand(1) + y_min);      % случайная строка

% plot(x0, y0, '.', 'Color', 'red');

Amp = m_o;
B(y0, x0) = Amp;

% Размер сигнала
nx = 2;
ny = 1;

% Формирование объекта
for x = x0 - nx : x0 + nx
   for y = y0 - ny : y0 + ny

      [x, y] = bounds_xy (x, y, B);       % проверка на выход за границу кадра
      h = Amp * exp( -(x-x0)^2/(2*sig^2) ) * exp( -(y-y0)^2/(2*sig^2) );
      h = round(h);

      if h > B(y, x)
         B(y, x) = h;
%           plot(x, y, '.', 'Color', 'red');
      end

   end
end

end

function [B] = create_signal (B, m_o, sig)

x_min = 1; x_max = size(B, 2);
y_min = 1; y_max = size(B, 1);
```

```
x0 = floor( (x_max-x_min) .* rand(1) + x_min);      % случайный отсчет
y0 = floor( (y_max-y_min) .* rand(1) + y_min);      % случайная строка

% plot(x0, y0, '.', 'Color', 'red');

Amp = m_o;
B(y0, x0) = Amp;

% Размер сигнала
nx = 2;
ny = 1;

% Формирование объекта
for x = x0 - nx : x0 + nx
   for y = y0 - ny : y0 + ny

      [x, y] = bounds_xy (x, y, B);       % проверка на выход за границу кадра
      h = Amp * exp( -(x-x0)^2/(2*sig^2) ) * exp( -(y-y0)^2/(2*sig^2) );
      h = round(h);

      if h > B(y, x)
         B(y, x) = h;
%           plot(x, y, '.', 'Color', 'red');
      end

   end
end

end

function [x,y] = bounds_xy (x, y, A)

if x > size(A, 2)
   x = size(A, 2);
end

if x <= 0
   x = 1;
end

if y > size(A, 1)
```


999

```
    y = size(A, 1);
end

if y <= 0
    y = 1;
end

end

function pr = priznak_starta
pr = 0;
r = randi(100);
if r > 90
   pr = 1;

end
end



function numb = podschet_otm(A, s)

[AA] = udalenie_1pix (A);

[Y, X, Amp] = find(AA);
numb = round( length(Amp) / s );

end


function [A] = udalenie_1pix (A)

Nx = size(A, 2);
Ny = size(A, 1);


AA = zeros(Ny + 2,Nx + 2);
for ii = 1 : Ny
    for jj = 1 : Nx
        AA( ii + 1, jj + 1 ) = A( ii, jj );
    end
end
```


1000

```
[Y1, X1, Amp1] = find(A);

X2(:, 1) = X1(:, 1) + 1;
Y2(:, 1) = Y1(:, 1) + 1;
Amp(:, 1) = Amp1(:, 1);
for s = 1 : size(X1, 1)

   if AA( Y2(s, 1)-1, X2(s, 1)-1 )+AA( Y2(s, 1)-1, X2(s,1))+...
         AA(Y2(s,1)-1,X2(s,1)+1)+AA(Y2(s,1),X2(s,1)-
1)+AA(Y2(s,1),X2(s,1)+1)+...
         AA(Y2(s,1)+1,X2(s,1)-
1)+AA(Y2(s,1)+1,X2(s,1))+AA(Y2(s,1)+1,X2(s,1)+1) == 0
      Amp(s,1) = 0;
      A(Y1(s,1),X1(s,1)) = 0;
   end
end

end



function [p_znach, pr] = Wilcoxon(A, B)

% A = 4 + 2*randn(20,1);
% B = 10 + 2*randn(20,1);

n1 = length(A);
n2 = length(B);

u1 = poisk_u(A, B);
u2 = n1 * n2 - u1;
U = min( u1, u2 );
Mu = n1 * n2 / 2;
Du = n1 * n2 * ( n1+n2+1 )/12;

p_znach = abs( (U - Mu) / sqrt(Du) );


% Для любого уровня значимости
% Пример
% p_value = 0.05;
```


1001

```
% kvantil = sqrt(2) * erfinv( 1 - p_value );

kvantil = 1.96;
% kvantil = 2.326;
% kvantil = 6.3248;
pr = 0;

if p_znach <= kvantil
   pr = 1;
end

end

function u = poisk_u(A, B)
u = 0;

for i = 1 : length(A)
   for j = 1 : length(B)

      if A(i) < B(j)
         u = u + 1;
      elseif A(i) == B(j)
         u = u + 0.5;
      end

   end
end

end
```

Приложение

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки
от Тарасовой Татьяны Владимировны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием "Геометрические свойства многосолитонных решений" являются: реализация численной процедуры построения многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ) (раздел 2.2), описание эволюции третьего и четвертого статистических моментов для распределения амплитуд солитонов согласно геометрической прогрессии (раздел 3.2), вывод и исследование собственных функций для ассоциированной задачи рассеяния КдВ (в тексте этому соответствуют формулы 40 – 53), явная запись для плотности солитонного газа (формула 54), связь плотности солитонного газа с его статистическими моментами (формула 57).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 марта 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, arxiv.org по следующим ключевым словам: statistical moments of soliton gas, Korteweg-de Vries scattering problem eigenfunctions, density of soliton gas. В выдаче поисковиков было исследовано 6 статей, 5 монографий (см. список литературы выпускной квалификационной работы) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [3-5] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Алексеем Викторовичем Слюняевым, профессором кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ
- Проведено выступление на семинаре сектора моделирования экстремальных волновых явлений в океане в ИПФ РАН
- Проведено выступление на конференции "Shilnikov Workshop – 2020"

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 16 июня 2021 г. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Тарасова Татьяна Владимировна
30.05.2021
Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

**Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика**

Тарасова Татьяна Владимировна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Геометрические свойства многосолитонных решений

Рецензент:
Соустова Ирина Анатольевна,
Доктор физико-математических наук
Ведущий научный сотрудник
Лаборатория нелинейных волновых
процессов в геофизической
гидродинамике
Федеральное государственное бюджетное
научное учреждение «Федеральный
исследовательский центр Институт
прикладной физики Российской
академии наук»

Руководитель работы:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры фундаментальной
математики
Алексей Викторович Слюняев

Нижний Новгород, 2021

1004

Содержание

1 Введение **3**

2 Построение решений, содержащих большое число солитонов **4**
2.1 Преобразование Дарбу и многосолитонные решения уравнения Кортевега-де Вриза 4
2.2 Процедура построения многосолитонных решений 6
2.3 Интегралы сохранения и оценка точности численных решений 8

3 Многосолитонные взаимодействия и их статистические свойства **10**
3.1 Картина многосолитонных взаимодействий 10
3.2 Статистические моменты многосолитонных комплексов 14

4 Прямая квантовомеханическая аналогия для плотности солитонного газа **16**
4.1 Волновые функции для N-солитонного потенциала 16
4.2 Явная запись для плотности неоднородного солитонного газа 22

5 Заключение **25**

6 Приложение. Доказательство свойства изменения статистических моментов при увеличении числа солитонов. **26**

Литература **28**

1005

1 Введение

Солитоны - структурно устойчивые уединенные волны - являются объектом исследования в гидродинамике, оптике, физике плазмы и др. Их существование связано с интегрируемостью (принципиальной решаемостью начальной задачи) ряда уравнений в частных производных, базовых для описания распространения нелинейных волн в диспергирующих средах. В частности, солитонные решения имеют уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ), являющееся моделью для описания слабонелинейных и слабодисперсионных волн, нелинейное уравнение Шредингера, применимое для описания волновых процессов на поверхности глубокой воды и сигналов в оптических линиях связи, а также расширения данных уравнений и их вариации (модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза, уравнение Гарднера). Солитонные взаимодействия играют важную роль в динамике нелинейных волн, так как представляют собой долгоживущие энергетические образования со специфическими динамическими свойствами.

Начальная задача для ряда солитоносодержащих уравнений может быть решена с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР, [1]). Его суть заключается в сопоставлении начальному условию набора данных ассоциированной линейной задачи рассеяния, знание об эволюции которых можно использовать для восстановления решения при других значениях времени. Для указанных выше уравнений солитоны представляют собой асимптотическое решение начальной задачи на бесконечном интервале. Они взаимодействуют с другими волнами упруго и "живут" вечно. Описание полей, составленных только из солитонов, имеет высокую практическую значимость - например, при решении задачи статистического описания волновых полей.

Одной из причин интереса к данной задаче является проблема предсказания волн-убийц – аномально высоких волн в полях нерегулярных волн (в гидродинамике, оптике и т.д.), возникновение которых наиболее часто связывают с нелинейными механизмами [2]. Поле некогерентных случайных волн в силу центральной предельной теоремы описывается Гауссовым распределением вероятностей, в то время как в случае значительной когерентности теоретическое описание пока фактически не построено. Благодаря свойству устойчивости солитонов при взаимодействии друг с другом и волновыми пакетами удобной интерпретацией нелинейных полей с сильной когерентностью может служить ансамбль солитонов, или солитонный газ. Его анализ в целом проще по сравнению с описанием произвольного поля частично когерентных волн.

В интегрируемых системах ансамбль солитонов соответствует ситуации, когда динамика системы детерминирована, но настолько сложна, что может быть рассмотрена как хаотическая, наподобие газа частиц. Солитонный газ представляет собой суперпозицию солитонов со случайными фазами и случайными амплитудами, выбранными согласно некоторым распределениям вероятностей. В настоящей работе для анализа задачи столкновения большого (до ~ 50) числа солитонов в рамках уравнения Кортевега-де Вриза используются его точные аналитические решения. Несмотря на то, что эти выражения формально записываются в явной форме, они слишком сложны для аналитического анализа и исследуются с применением численных методов. Этот путь для большого (>5) числа солитонов также не тривиален и требует разработки и применения специальных подходов и численных алгоритмов.

Солитонный газ уже был исследован с точки зрения кинетической теории ([3], [4], [5]), уравнения которой описывают транспорт спектральной плотности солитонов, но не дают информации о поведении самих решений (например, поверхности воды или интенсивности

1006

электромагнитных полей) и об их вероятностных свойствах - в частности, о статистических моментах. В данной работе исследуются именно такие свойства, которые в силу большой общности рассматриваемой задачи мы будем называть геометрическими: как моментальные формы решений (волн), так и их усредненные статистические характеристики.

В настоящей работе в разделе 2 описан метод построения многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Вриза с помощью преобразования Дарбу. Описывается собственная реализация в среде Wolfram Mathematica процедуры с использованием длинной мантиссы числа, которая позволяет численно строить многосолитонные решения (до $N \sim 50$) с высокой точностью. Данная вычислительная процедура применяется в разделе 3 для построения картины эволюции и изучения свойств солитонных полей с модельным распределением амплитуд согласно геометрической прогрессии. Исследованы возможные режимы многосолитонных взаимодействий и их проявление в статистических моментах волнового поля. В разделе 4 на основе прямой квантовомеханической аналогии введена характеристика плотности солитонов уравнения Кортевега-де Вриза. Введенная плотность может быть однозначно вычислена для произвольного солитонного ансамбля (в т.ч. для единичной реализации солитонного ансамбля и в случае большой плотности) и характеризует степень взаимодействия солитонов. Показана состоятельность такого определения для расчета статистических моментов почти однородных солитонных полей.

2 Построение решений, содержащих большое число солитонов

Реализовать процедуру численного построения солитонных решений уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ) для их дальнейшего анализа можно многими способами - применяя аппарат обратной задачи рассеяния [1], используя τ-функции Хироты [6] или задействуя преобразования Дарбу [7]. В ходе выполнения настоящей работы были реализованы предварительные версии алгоритмов на основе каждого из перечисленных подходов. Выбор метода для получения многосолитонных решений сказывался на скорости построения решений и их точности. Также влияние на эффективность программы оказывало наличие или отсутствие в коде символьных вычислений. Процедура численного построения решений, основанная на преобразованиях Дарбу, оказалась наиболее предпочтительной для последующей оптимизации - по сравнению с остальными версиями она давала наиболее быстрый и точный результат. Математический аппарат, необходимый для реализации данной программы, а также её алгоритм изложены в этом разделе.

2.1 Преобразование Дарбу и многосолитонные решения уравнения Кортевега-де Вриза

Стандартная безразмерная форма уравнения КдВ может быть записана следующим образом:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

где действительная функция $u(x,t)$ обозначает возмущение, $x \in (-\infty, +\infty)$ играет роль пространственной координаты, $t \in (-\infty, +\infty)$ - деформационный параметр, имеющий смысл

времени. Кроме формы (1) общеупотребительна форма, отличающаяся знаком решения:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

В настоящей работе будет использоваться форма (1) или (2). Уравнение (2) является условием совместности системы, называемой парой Лакса [8]:

$$\begin{cases} \widehat{L}\Psi = \lambda\Psi & \text{(3a)} \\ \widehat{A}\Psi = \Psi_t, & \text{(3b)} \end{cases}$$

где

$$\widehat{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t), \qquad \widehat{A} = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x, \tag{4}$$

действительные числа λ - собственные значения задачи рассеяния, задаваемой уравнением (3a) (спектр задачи рассеяния). Преобразование Дарбу основывается на ковариантности уравнений пары Лакса относительно замены:

$$\widetilde{u} = u - 2\frac{\partial\gamma}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{1}{\Psi_1}, \tag{5}$$

$$\widetilde{\Psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \gamma\Psi, \tag{6}$$

где Ψ_1 - некоторое частное решение уравнения Шредингера (3a) при значении параметра $\lambda = \lambda_1$ [7].

Результат N-кратного преобразования Дарбу может быть записан следующим образом [7]:

$$\widetilde{u} = u - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln W_N(\Psi_1, \Psi_2, ...\Psi_N), \qquad \widetilde{\Psi} = \frac{W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ...\Psi_N, \Psi)}{W_N(\Psi_1, \Psi_2, ...\Psi_N)}, \tag{7}$$

где

$$W_N = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_N \\ \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1^{(N-1)} & \dots & \Psi_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \qquad W_{N+1} = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_N & \Psi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1^{(N)} & \dots & \Psi_N^{(N)} & \Psi^{(N)} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Здесь $\Psi_j^{(k)} := \frac{\partial^k\Psi_j}{\partial x^k}$, а Ψ_i - некоторые частные решения уравнения Шредингера с $\lambda = \lambda_i$.

Для того, чтобы получить потенциал $\widetilde{u}$, имеющий вид N-солитонного решения уравнения КдВ, возьмем в качестве начального затравочного решения уравнения КдВ $u(x,t) \equiv 0$, а в качестве частных решений уравнения Шредингера с этим потенциалом - функции

$$\Psi_i = \cosh\left(k_i(x - x_j) - 4k_i^3 t\right), \qquad \Psi_j = \sinh\left(k_j(x - x_j) - 4k_j^3 t\right) \tag{9}$$

при четном i и нечетном j. Так, затравочные функции Ψ_i и Ψ_j удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{\partial^2\Psi_i}{\partial x^2} = \lambda_i\Psi_i = -k_i^2\Psi_i, \quad -\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x^2} = \lambda_j\Psi_j = -k_j^2\Psi_j, \tag{10}$$

а параметры x_i и x_j задают сдвиги координаты. Временная зависимость для данных функций задается эволюционными соотношениями для уравнения КдВ (3b), следующими из обратной задачи рассеяния. При подстановке данных частных решений уравнения Шредингера в формулы (7) и (8) будет получено решение, образованное N солитонами с амплитудами $A_i = 2k_i^2$ и начальными координатами x_i. Невырожденные решения получаются при условии, что все величины k_i и k_j различны. Стоит отметить, что "начальные координаты" здесь нужно понимать условно, так как при взаимодействии солитоны приобретают фазовые сдвиги, и на самом деле в нулевой момент времени $t = 0$ максимум i-того солитона может быть не расположен в точке $x = x_i$.

Так как решение уравнения (1) получается путем смены знака решения уравнения (2), мы можем записать N-солитонное решение уравнения (1):

$$u_N = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln W_N(\Psi_1, \Psi_2, ...\Psi_N). \tag{11}$$

В частности, односолитонное решение имеет вид

$$u_1(x,t) = 2k_1^2 \operatorname{sech}^2\left(k_1(x - 4k_1^2 t - x_1)\right). \tag{12}$$

Параметр k_1 задает амплитуду солитона $A = 2k_1^2$ и его скорость $v = 4k_1^2$. Солитоны уравнения КдВ в форме (1) всегда имеют положительную полярность, $u > 0$. При $t \gg 1$ в силу того, что скорости всех солитонов различны, солитоны "разбегаются" (происходит их упорядочивание) и взаимодействуют слабо, поэтому многосолитонное решение (11) можно представить как линейную комбинацию одиночных солитонов:

$$\lim_{t\to+\infty} u_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} 2k_j^2 \operatorname{sech}^2\left(k_j(x - 4k_j^2 t - x_j + \delta_j)\right), \tag{13}$$

где параметр δ_j задает сдвиг фазы j-того солитона, полученный в результате взаимодействий с другими солитонами.

2.2 Процедура построения многосолитонных решений

Процедура численного построения N-солитонных решений основана на методе N-кратного преобразования Дарбу (11). Решение строится в узлах x_i регулярной сетки рассматриваемого интервала $[-L, L]$:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x, \quad i = 1, 2, ..., S, \quad x_1 = -L, \quad x_S = L, \quad \Delta x = const. \tag{14}$$

Для каждой точки x_i вычисляется логарифм Вронскиана $m_i = \ln W_N(x_i)$, определяемого формулой (8). Таким образом сконструирован массив $M = \{m_i, i = 1, 2, ..., S\}$. Стоит отметить, что определитель в (11) может быть вычислен символьно, однако в этом случае при $N > 5$ расчеты не эффективны по времени и дают большую погрешность при построении решения. Производные от затравочных функций вычислены аналитически. Остальные вычисления в рамках описываемой реализации произведены численно.

Аппроксимация второй производной и производных высшего порядка функции $F(x) := \ln W_N(x)$ осуществляется с помощью применения дискретного преобразования Фурье (ДПФ) к массиву M:

1. Для массива M вычисляется прямое ДПФ: $m_k \Rightarrow f_k, 1 \leq k \leq S \in 2\mathbb{N}$;

2. На основе полученного ДПФ строится массив $\{f_k^{(n)}\}$, необходимый для получения аппроксимации производной порядка n функции $F(x)$:

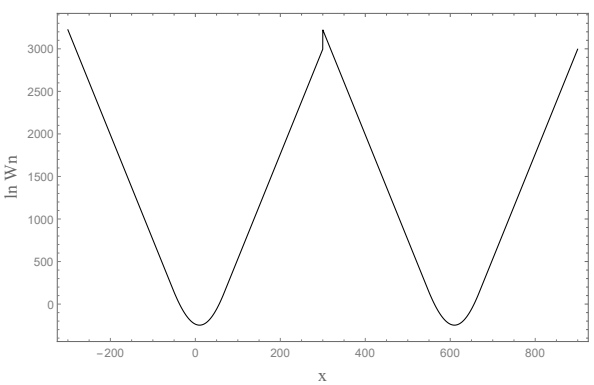
$$\begin{cases} k \leq \frac{S}{2} \Rightarrow f_k^{(n)} = (\frac{\pi i(k-1)}{L})^n \cdot f_k \\ k > \frac{S}{2} \Rightarrow f_k^{(n)} = (\frac{\pi i(k-1-S)}{L})^n \cdot f_k \end{cases} \tag{15}$$

3. Массив значений производной $F^{(n)}(x_k)$ вычисляется как обратное ДПФ к массиву $\{f_k^{(n)}\}$.

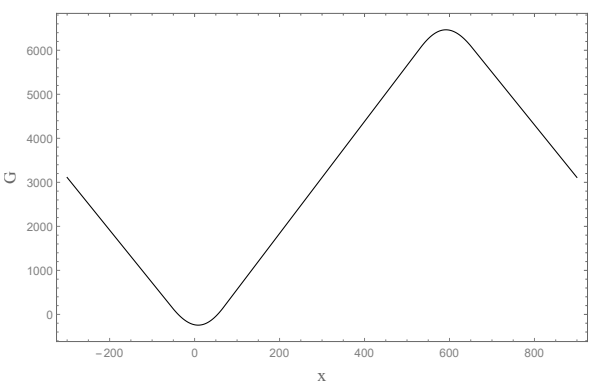
Хотя решение уравнения (2) может быть записано явно, его численное построение оказывается технически сложным, когда число солитонов N достаточно большое (например, когда $N \sim 10$). Ошибки округления оказывают существенное влияние на вычисление Вронскиана (8), и недостаточная вычислительная точность может приводить к непредсказуемым результатам. Чтобы справиться с этой проблемой, используется метод, предложенный в работе [9] и представляющий собой увеличение точности вычислений за счет задания длинной (100-значной) мантиссы для всех переменных, используемых в расчетах. Это позволяет строить решения, состоящие из большого числа солитонов (40-50).

Еще одна проблема связана с тем, что периодическое продолжение функции $F(x)$ имеет разрывы в точках $x = \pm L$ (рис.1а). При нахождении аппроксимаций производных функции $F(x)$ с помощью ДПФ появляются значительные осцилляции на концах рассматриваемого интервала $[-L, L]$ (т.н. эффект Гиббса). Так как решение уравнения КдВ - вторая производная функции $F(x)$, добавление к ней любой линейной функции не будет менять искомое решение. Подобрав подходящую линейную функцию, можно выровнять значения на концах рассматриваемого интервала и решить проблему непериодичности:

$$Z(x) = F(x) + \frac{v_1 - v_2}{2L}x, \quad F(-L) = v_1, \quad F(L) = v_2. \tag{16}$$



(a) $F(x) := \ln W_N(x)$ на интервале $[-L, 3L]$



(b) $G(x)$ на интервале $[-L, 3L]$

Рис. 1: Функции $F(x)$ и $G(x)$ для получения солитонных решений

Увеличить точность вычислений можно за счет использования в ДПФ дискретизации везде дифференцируемой функции $G(x)$, имеющей на интервале $[-L, L]$ производные, равные

1010

производным $F(x)$. Такая функция $G(x)$ может быть получена путем отражения периодической функции $Z(x)$ (рис.1b):

$$\begin{cases} G(x) = Z(x), -L \le x \le L & \text{(17a)} \\ G(2L+x) = 2Z(L) - Z(-x), -L \le x \le L & \text{(17b)} \end{cases}$$

2.3 Интегралы сохранения и оценка точности численных решений

Как обсуждалось выше, вычисление решения для больших N может сопровождаться большой погрешностью вычисления Вронскиана, что ведет к искажению функций u, недопустимых для целей настоящего исследования. Поэтому задача проверки точности построенного решения имеет большое значение. Специфическим свойством нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, является наличие бесконечной последовательности нетривиальных интегралов уравнения (законов сохранения). Так, оценить точность решения можно, учитывая существование ряда инвариантов уравнения КдВ. Первые два инварианта соответствуют законам сохранения массы и энергии. Для формы уравнения КдВ

$$Q_t + QQ_x + Q_{xxx} = 0 \tag{18}$$

список сохраняющихся величин $I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} T_m dx$, где плотность $T_m(x,t)$ выражается через решения уравнения $Q(x,t)$, приведен в работе [10]. С возрастанием порядка интегралов их форма усложняется. Ниже приведены первые десять сохраняющихся плотностей:

$$T_1 = Q_0, \qquad (Q_n := \frac{\partial^n}{\partial x^n} Q)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}Q_0^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{3}Q_0^3 - Q_1^2,$$

$$T_4 = \frac{1}{4}Q_0^4 - 3Q_0Q_1^2 + \frac{9}{5}Q_2^2,$$

$$T_5 = \frac{1}{5}Q_0^5 - 6Q_0^2Q_1^2 + \frac{36}{5}Q_0Q_2^2 - \frac{108}{35}Q_3^2,$$

$$T_6 = \frac{1}{6}Q_0^6 - 10Q_0^3Q_1^2 + 18Q_0^2Q_2^2 - 5Q_1^4 - \frac{108}{7}Q_0Q_3^2 + \frac{120}{7}Q_2^3 + \frac{36}{7}Q_4^2$$

$$T_7 = \frac{1}{7}Q_0^7 - 15Q_0^4Q_1^2 + 36Q_0^3Q_2^2 - 30Q_0Q_1^4 - \frac{324}{7}Q_0^2Q_3^2 + \frac{720}{7}Q_0Q_2^3 + 108Q_1^2Q_2^2 +$$
$$+ \frac{216}{7}Q_0Q_4^2 - \frac{1080}{7}Q_2Q_3^2 - \frac{648}{77}Q_5^2$$

$$T_8 = \frac{1}{8}Q_0^8 - 21Q_0^5Q_1^2 + 63Q_0^4Q_2^2 - 105Q_0^2Q_1^4 - 108Q_0^3Q_3^2 + 360Q_0^2Q_2^3 + 756Q_0Q_1^2u2^2 + 108Q_0^2Q_4^2 -$$
$$- 324Q_1^2Q_3^2 - 1080Q_0Q_2Q_3^2 + 378Q_2^4 - \frac{648}{11}Q_0Q_5^2 + \frac{4536}{11}Q_2Q_4^2 + \frac{1944}{143}Q_6^2$$

$$T_9 = \frac{1}{9}Q_0^9 - 28Q_0^6Q_1^2 + \frac{504}{5}Q_0^5Q_2^2 - 280Q_0^3Q_1^4 - 216Q_0^4Q_3^2 + 960Q_0^3Q_2^3 + 3024Q_0^2Q_1^2Q_2^2 - 168Q_1^6 +$$

$$+ 288Q_0^3Q_4^2 - 4320Q_0^2Q_2Q_3^2 - 2592Q_0Q_1^2Q_3^2 + 3024Q_0Q_2^4 + \frac{26496}{5}Q_1^2Q_2^3 -$$
$$- \frac{2592}{11}Q_0^2Q_5^2 + \frac{36288}{11}Q_0Q_2Q_4^2 + 864Q_1^2Q_4^2 - \frac{169344}{55}Q_1Q_3^2 -$$
$$- \frac{545184}{55}Q_2^2Q_3^2 + \frac{15552}{143}Q_0Q_6^2 - \frac{145152}{143}Q_2Q_5^2 + \frac{653184}{715}Q_4^3 - \frac{15552}{715}Q_7^2$$

$$T_{10} = \frac{1}{10}Q_0^{10} - 36Q_0^7Q_1^2 - 630Q_0^4Q_1^4 + \frac{756}{5}Q_0^6Q_2^2 - 1512Q_0Q_1^6 + 2160Q_0^4Q_2^3 + 9072Q_0^3Q_1^2Q_2^2 -$$
$$- \frac{1944}{5}Q_0^5Q_3^2 + 13608Q_0^2Q_2^4 + \frac{238464}{5}Q_0Q_1^2Q_2^3 + 13608Q_1^4Q_2^2 - 12960Q_0^3Q_2Q_3^2 -$$
$$- 11664Q_0^2Q_1^2Q_3^2 + 648Q_0^4Q_4^2 + \frac{178848}{11}Q_2^5 - \frac{1524096}{55}Q_0Q_1Q_3^3 - \frac{4906656}{55}Q_0Q_2^2Q_3^2 -$$
$$- \frac{334368}{5}Q_1^2Q_2Q_3^2 + \frac{163296}{11}Q_0^2Q_2Q_4^2 + 7776Q_0Q_1^2Q_4^2 - \frac{7776}{11}Q_0^3Q_5^2 - \frac{11045808}{715}Q_3^4 +$$
$$+ \frac{5878656}{715}Q_0Q_4^3 + \frac{22208256}{715}Q_1Q_3Q_4^2 + \frac{26570592}{715}Q_2^2Q_4^2 - \frac{1306368}{143}Q_0Q_2Q_5^2 - \frac{23328}{11}Q_1^2Q_5^2 +$$
$$+ \frac{69984}{143}Q_0^2Q_6^2 - \frac{5878656}{715}Q_4Q_5^2 + \frac{1679616}{715}Q_2Q_6^2 - \frac{139968}{715}Q_0Q_7^2 + \frac{419904}{12155}Q_8^2$$

Так как значения интегралов сохранения не зависят от времени, их можно вычислить явно, когда солитоны расположены далеко друг от друга, например, в пределе $t \to \pm\infty$. Для солитона Q уравнения (18):

$$Q = a\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{a}{12}}(x - \frac{a}{3}t) = 6 \cdot 2k^2\,\mathrm{sech}^2\,k(x - 4k^2t), \quad k = \sqrt{\frac{a}{12}}, \tag{19}$$

значение инварианта произвольного порядка выглядит следующим образом [11]:

$$I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} T_m dx = \sqrt{12}\frac{2^m[(m-1)!]^2}{(2m-1)!}a^{(2m-1)/2}. \tag{20}$$

Используя замену переменных $Q = 6U$:

$$Q = 6U \quad \Rightarrow \quad U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0, \tag{21}$$

мы можем записать интеграл сохранения $I_m^{(N)}$ порядка m для N-солитонного решения уравнения Кортевега-де Вриза в форме (1) и выразить его значение в терминах амплитуд солитонов:

$$I_m^{(N)} = 24^m\frac{[(m-1)!]^2}{(2m-1)!}\sum_{i=1}^{N}k_i^{(2m-1)}, \tag{22}$$

где $k_i = \sqrt{\frac{A_i}{2}}$, A_i - амплитуда солитона с номером $1 \le i \le N$.

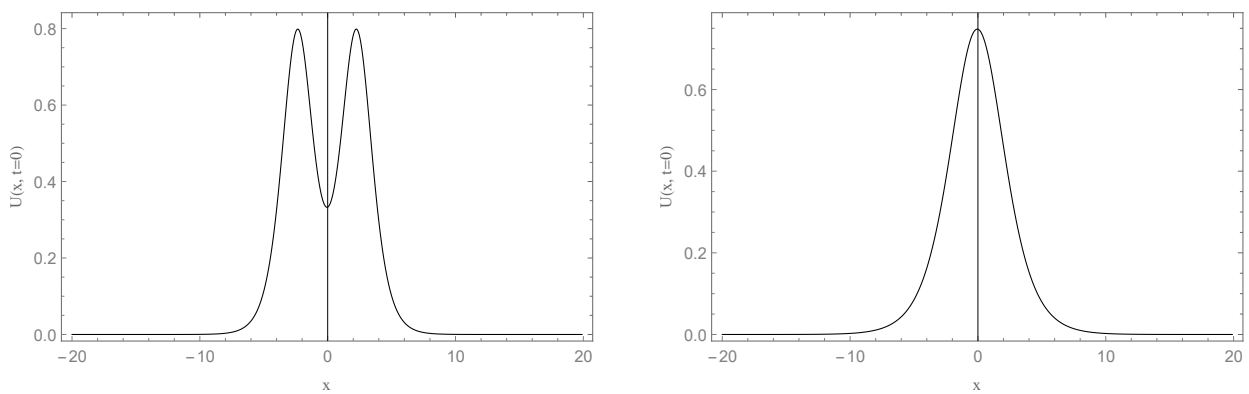
Таким образом, для любого численного решения можно проверить уровень соответствия полученного значения интеграла сохранения и его теоретического значения. Стоит отметить, что в реальных механических задачах число сохраняющихся интегралов мало (масса, импульс, энергия). Мы же будем контролировать первые десять интегралов сохранения для обеспечения математической точности решения. Выводы о геометрических свойствах многосолитонных полей строятся на основе решений, для которых относительная погрешность каждого из интегралов сохранения меньше 3%.

3 Многосолитонные взаимодействия и их статистические свойства

Высокая точность многосолитонных решений, полученных с помощью описываемой в разделе 2 процедуры, позволяет строить достоверные выводы об их эволюции и вероятностных свойствах. В данном разделе многосолитонные взаимодействия рассмотрены как с точки зрения их поведения при разных параметрах распределения амплитуд солитонов, так и с точки зрения статистических моментов, дающих вероятностное описание формы волн.

3.1 Картина многосолитонных взаимодействий

Рассмотрим многосолитонные решения $u(x,t)$, симметричные относительно координаты $x=0$ в момент времени $t=0$: $u(x,t=0)=u(-x,t=0)$. Как следует из записи решения в виде (11), при выборе в затравочных функциях (9) "начальных координат" $x_i=0$ $(i=1,2,...,N)$ выполняется свойство $u(x,t)=u(-x,-t)$. Следовательно, данная комбинация x_i ведет к четности решения $u(x,t=0)$ и симметричности решений $u(x,t=-T)$ и $u(x,t=T)$, $T\gg 1$, относительно $x=0$. Поэтому можно ожидать, что такой выбор "начальных координат" будет обеспечивать в каком-то смысле максимальную фокусировку солитонов при $t=0$ в точке $x=0$.



(a) Обменное взаимодействие: $\frac{A_1}{A_2}<3$ (b) Обгонное взаимодействие: $\frac{A_1}{A_2}>3$

Рис. 2: Типы двухсолитонных взаимодействий

Хорошо известно, что для двух солитонов уравнения КдВ выделяют два режима взаимодействия - обменный $(d=\frac{A_1}{A_2}<3)$ и обгонный $(d=\frac{A_1}{A_2}>3)$ [12]. Эти режимы определяются знаком второй производной двухсолитонного решения по координате в момент $t=0$ в точке $x=0$, что соответствует двугорбой (рис. 2a) или одногорбой (рис. 2b) форме волны в этот момент. Наличие порогового отношения амплитуд двух солитонов, которое разграничивает режимы их взаимодействия, ведет к идее распределения амплитуд большого числа солитонов, основанного на геометрической прогрессии:

$$A_i=\frac{1}{d^{i-1}},\quad d>1, \tag{23}$$

1013

и предположению о существовании граничного значения d, разделяющего режимы многосолитонных взаимодействий в рамках данного амплитудного распределения.

Нами рассмотрены многосолитонные решения, соответствующие числу солитонов $N \leq 50$. В соответствии с (23) первый солитон обладает максимальной амплитудой $A_1 = 1$. В случае $N > 2$ также существуют разные сценарии взаимодействий солитонов (рис. 3), обеспечивающие различные формы симметричных волн при $t = 0$ в зависимости от знаменателя геометрической прогрессии (23). Когда d – значение, близкое к единице, амплитуды солитонов становятся похожими между собой (амплитуды солитонов сконцентрированы около единицы), что ведет к проявлению известного эффекта отталкивания солитонов. Такие столкновения служат аналогом обменного взаимодействия. При достижении d значения, соответствующего примерно "одногорбому" решению ($d > 1.2$), визуально решение перестает меняться быстро при дальнейшем увеличении d. "Одногорбое" решение напоминает обгонный режим взаимодействия солитонов.

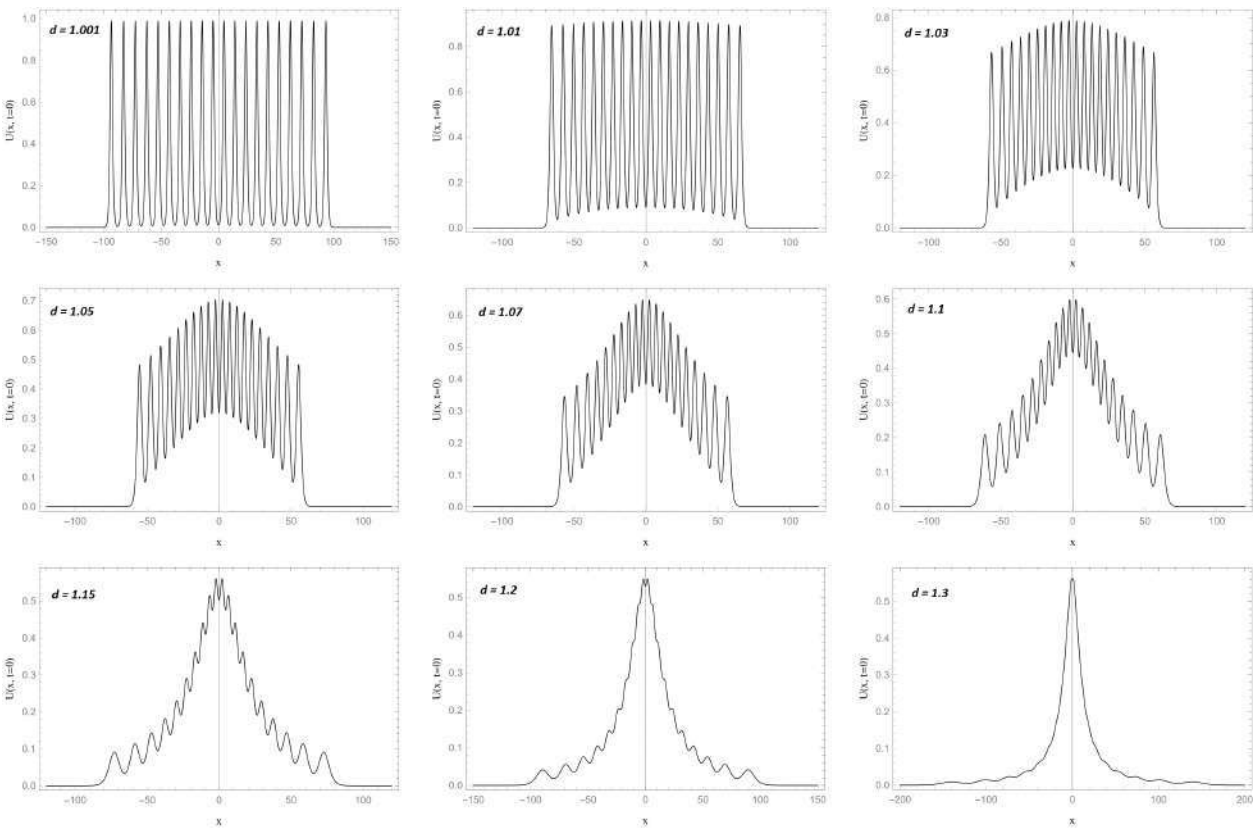


Рис. 3: 20-солитонное решение в момент времени $t = 0$ при разных d

Зависимость относительных ошибок интегралов сохранения от их номеров для 20-солитонного решения в момент времени $t = 0$ представлена на рис. 4. Для всех рассмотренных параметров d, задающих распределение амплитуд солитонов, ошибки близки между собой (точки, соответствующие разным d на рис. 4, совпадают). Относительные ошибки интегралов сохранения линейно возрастают при увеличении порядка интеграла. Вероятно, возрастание ошибок связано с ростом числа слагаемых, степеней вычисляемых величин и порядков производных в

1014

плотностях сохраняющихся величин при повышении порядка интеграла сохранения. Момент времени $t = 0$ соответствует максимальным относительным ошибкам интегралов сохранения по сравнению с другими t. При возрастании $|t|$ ошибки будут существенно уменьшаться вне зависимости от параметра амплитудного распределения d и номера интеграла. Данное свойство может объясняться тем, что при построении решений шаг разбиения рассматриваемого интервала фиксирован и дает более аккуратное описание волн, протяженных в пространстве с малыми градиентами.

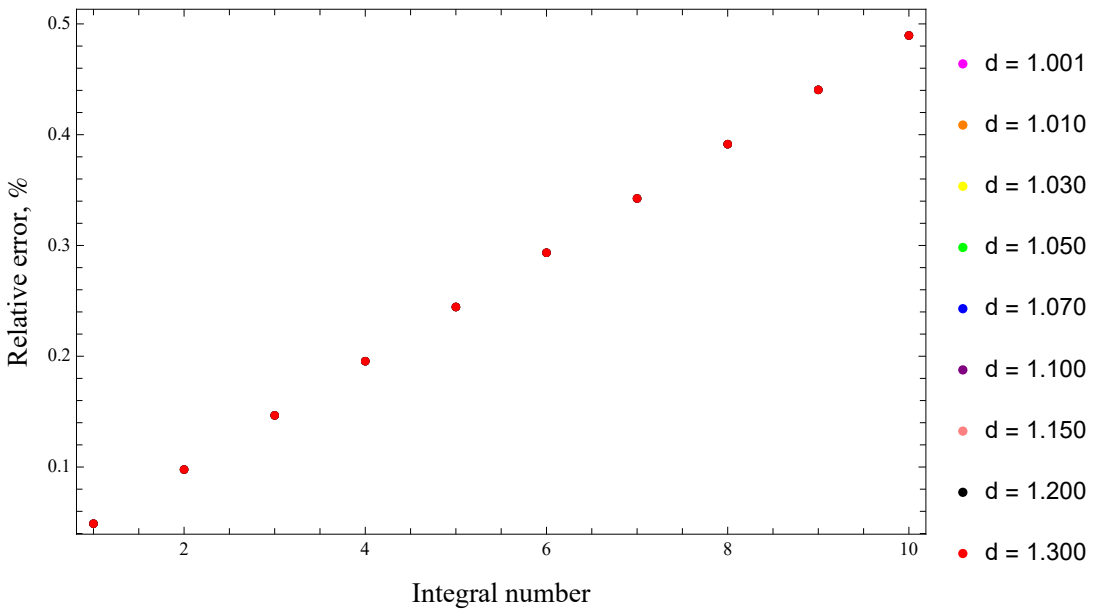
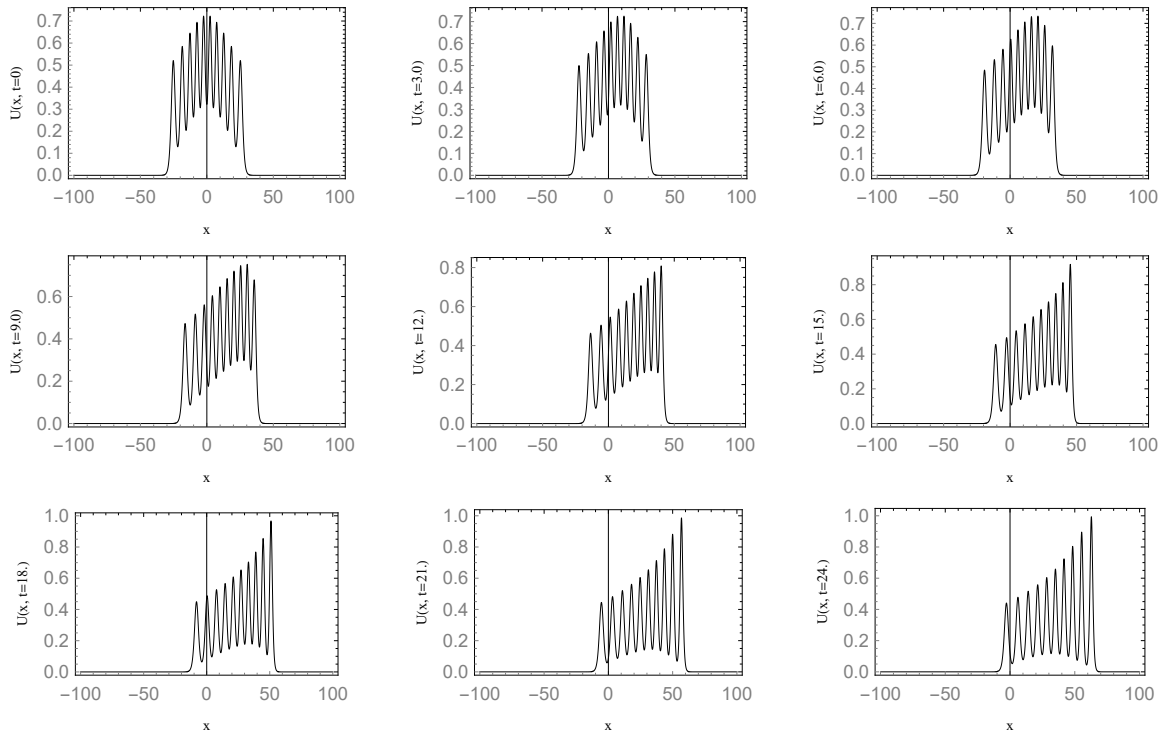


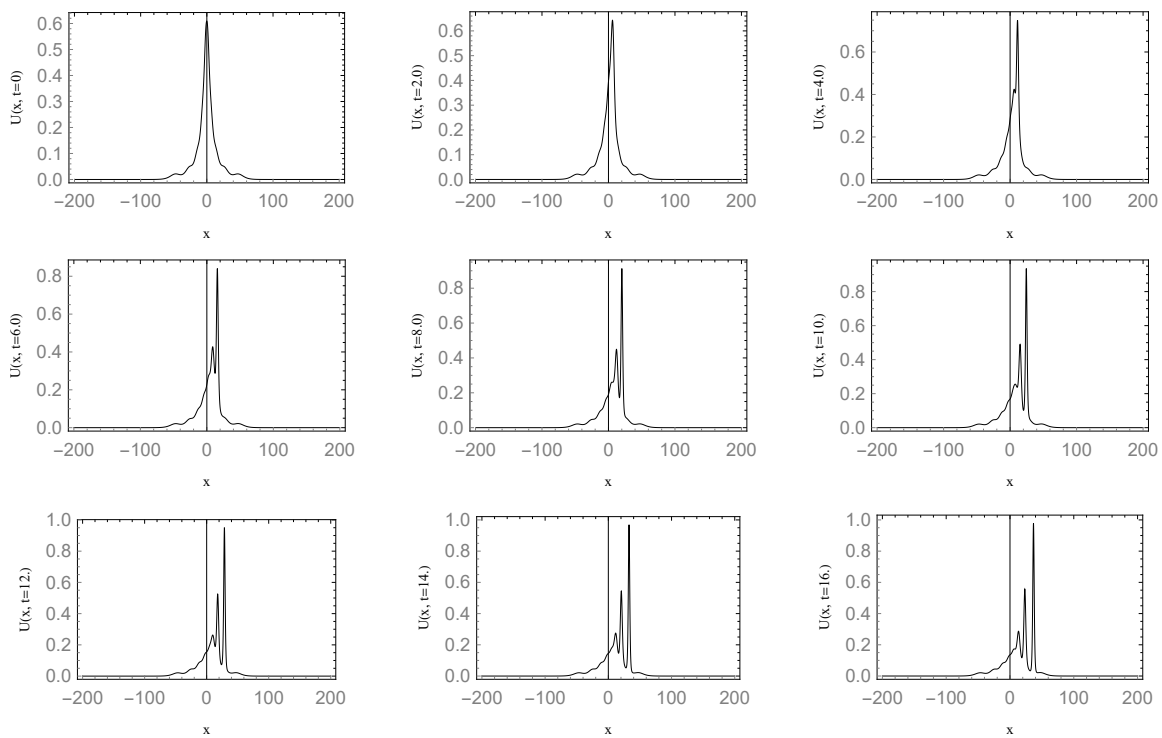
Рис. 4: Зависимость относительных ошибок интегралов сохранения 20-солитонного решения при $t = 0$ от порядка интеграла и параметра d

Сконструированные решения $u(x, t)$ обладают свойством симметрии $u(x, t) = u(-x, -t)$, что позволяет изучать их только при неотрицательных параметрах времени t. На рис. 5 показана эволюция 10-солитонного решения для двух разных значений параметров d. В начальный момент $t = 0$ солитоны сфокусированы около точки $x = 0$. Затем они разделяются в пространстве, причем в соответствии с зависимостью между амплитудами и скоростями солитонов первым отделяется солитон с наибольшей амплитудой, вторым - солитон со второй по величине амплитудой и т.д. Столкновение даже небольшого числа солитонов может демонстрировать сложную динамику.

1015



(a) Взаимодействие солитонов при $d = 1.1$



(b) Взаимодействие солитонов при $d = 1.6$

Рис. 5: Взаимодействие 10 солитонов при разных значениях d

1016

3.2 Статистические моменты многосолитонных комплексов

Для описания нерегулярных волн используют статистические моменты

$$M_n(t) = \frac{1}{\sigma^n}\int_{-\infty}^{+\infty} u^n(x,t)dx, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx, \tag{24}$$

где σ - среднеквадратическое отклонение. Более высокие моменты дают более детальное описание вероятностных характеристик волн. Первый и второй моменты соответствуют массе и энергии описываемой механической системы и совпадают с сохраняющимися интегралами КдВ. Поэтому факт взаимодействия солитонов их не меняет. Но меняются более высокие моменты, из которых наиболее часто используются третий (асимметрия) и четвертый (эксцесс):

$$M_3(N,t) = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{+\infty} U_N^3(x,t)dx, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} U_N^2(x,t)dx, \tag{25}$$

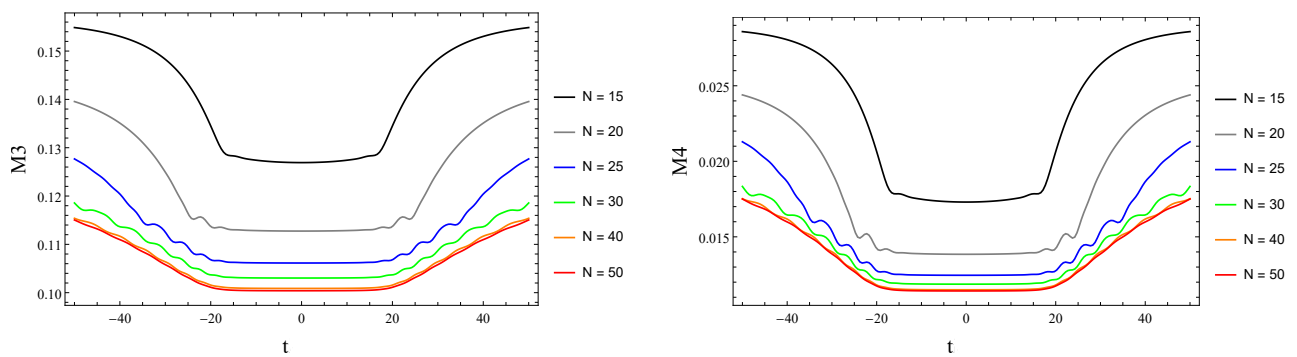
$$M_4(N,t) = \frac{1}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{+\infty} U_N^4(x,t)dx. \tag{26}$$

В пределе $t \to \pm\infty$, когда составляющие решение солитоны перекрываются слабо, они могут быть вычислены явно:

$$\widehat{M_3}(N, t=\infty) = \frac{8\cdot 16}{15}\sum_{i=1}^{N} k_i^5 : (\frac{16}{3}\sum_{i=1}^{N} k_i^3)^{\frac{3}{2}}, \tag{27}$$

$$\widehat{M_4}(N, t=\infty) = \frac{16\cdot 32}{35}\sum_{i=1}^{N} k_i^7 : (\frac{16}{3}\sum_{i=1}^{N} k_i^3)^{2}, \tag{28}$$

где $k_i = \sqrt{\frac{A_i}{2}}$, A_i - амплитуда солитона с номером $1 \le i \le N$.



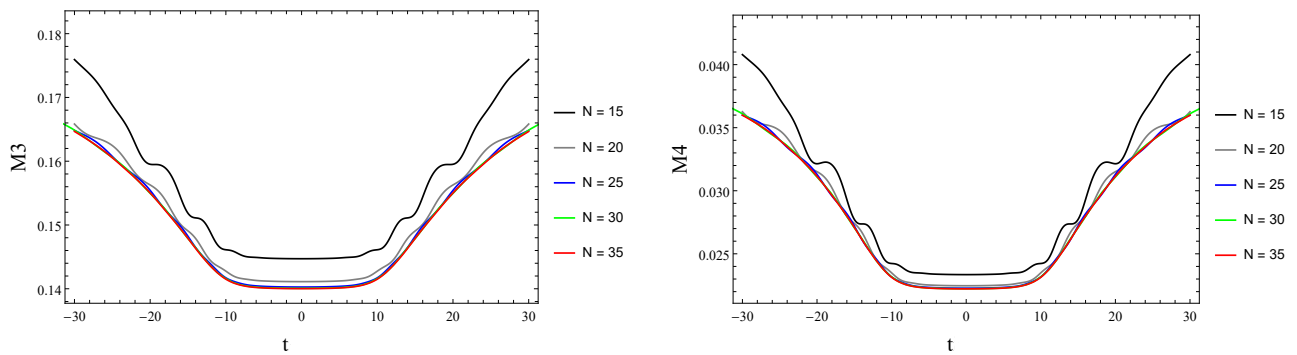
(a) (b)

Рис. 6: Эволюция третьего статистического момента (a) и четвертого статистического момента (b) поля N солитонов при $d = 1.1$

Изменение во времени третьего статистического момента $M_3(N,t)$ поля N солитонов выглядит следующим образом. Имея асимптотическое значение $\widehat{M_3}(N)$ при $t \to -\infty$, он понижается, когда солитоны начинают взаимодействовать, а после разделения солитонов в пространстве возвращается к значению $\widehat{M_3}(N)$ при $t \to +\infty$. Увеличение числа солитонов в столкновении при фиксированном значении d ведет к уменьшению статистического момента как в

1017

асимптотиках больших времен, так и при взаимодействии солитонов. Можно показать строго, что добавление одного солитона к существующему числу солитонов (то есть увеличение N при фиксированном d) понижает статистические моменты ансамбля невзаимодействующих солитонов (см. приложение). Кривые $M_3(N,t)$, выражающие зависимость третьего статистического момента от времени, при увеличении N сглаживаются, как следует из рис. 6 и 7. Можно говорить о существовании предельной кривой, выражающей зависимость статистического момента поля бесконечного числа солитонов, $N \to \infty$, от времени для данного d. При $d = 1.1$ кривые $M_3(N,t)$ приближаются к предельной кривой, когда число солитонов $N \sim 40$. Поведение четвертого статистического момента приводится на рис. 6(b), оно качественно аналогично поведению третьего: при взаимодействии солитонов КдВ эксцесс уменьшается, что соответствует меньшей вероятности больших волн. Такой вывод согласуется с результатами ранее проведенного прямого численного моделирования ансамблей солитонов КдВ [12].



(a) (b)

Рис. 7: Изменение во времени третьего (a) и четвертого (b) статистических моментов для N-солитонных решений при $N = 15...35$ и $d = 1.2$.

Зависимости статистических моментов сходятся к предельной кривой тем быстрее, чем отношение амплитуд солитонов d больше. На рис. 7 демонстрируется эволюция третьего и четвертого статистических моментов при $d = 1.2$. По сравнению со случаем $d = 1.1$, здесь кривые моментов близки к предельной кривой при меньшем числе солитонов: $N \sim 30$. Таким образом, числа солитонов $N = 40$ достаточно для того, чтобы хорошо аппроксимировать поведение статистических моментов в пределе бесконечно большого числа волн, если $d \geq 1.1$.

4 Прямая квантовомеханическая аналогия для плотности солитонного газа

Как было показано в разделе 3, солитонные взаимодействия изменяют вероятностные свойства волн, что находит свое отражение в поведении статистических моментов. При решении проблемы вероятностного описания ансамбля волн вводят характеристику, с помощью которой можно охарактеризовать степень взаимодействия солитонов и соответствующего влияния на статистические свойства ансамбля (в сопоставлении со свойствами невзаимодействующих солитонов). Такая характеристика солитонного газа называется плотностью.

Плотность солитонов легко определить в случае разреженного солитонного газа, когда солитоны расположены далеко друг от друга (взаимодействуют слабо) и столкновения происходят редко. Тогда плотность солитонного газа на отрезке $[\alpha, \beta]$ традиционно определяют равной отношению количества солитонов $N([\alpha, \beta])$, умещающихся на этом отрезке, к длине отрезка:

$$D([\alpha, \beta]) = \frac{N([\alpha, \beta])}{\beta - \alpha}. \tag{29}$$

Такое интуитивно понятное введение плотности не учитывает собственные характеристики солитонов, такие как их амплитуды. Более аккуратный подход в существующих кинетических моделях определяет плотность с учетом распределения амплитуд солитонов или связанного с ними параметра в спектре ассоциированной задачи рассеяния ([3], [4], [5]).

Определение (29) хорошо работает для однородного газа небольшой плотности. В случае, если газ плотный и/или неоднородный, положение конкретного солитона в пространстве не определено четко, что не позволяет вычислить плотность, определенную таким образом. В следующих параграфах мы предлагаем, по всей видимости, новый оригинальный способ определения плотности солитонов, который может быть использован для описания свойств солитонного газа в общем случае.

4.1 Волновые функции для N-солитонного потенциала

Заметим, что задача рассеяния для уравнения Кортевега-де Вриза (3а):

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U_N \Psi = \lambda \Psi \tag{30}$$

по форме совпадает с одномерным стационарным уравнением Шредингера, используемым для описания движения частиц в квантовой механике:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x), \tag{31}$$

где $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ - гамильтониан системы, $V(x)$ - потенциальная энергия в точке x, E - полная энергия системы, $\Psi(x)$ - волновая функция. Тогда для задачи рассеяния можно провести квантовомеханическую аналогию, в рамках которой N-солитонное решение U_N задает потенциальные ямы. Их положение можно определять по расположению захваченных ими

частиц. Вероятность P нахождения частицы в фиксированном интервале $[a, b]$ определяется с помощью волновой функции $\Psi(x)$:

$$P([a,b]) = \int_a^b |\Psi(x)|^2 dx. \tag{32}$$

Так, в рамках квантовомеханической аналогии для определения положений потенциальных ям, задаваемых многосолитонным решением, мы будем искать собственные функции задачи рассеяния (3а), удовлетворяющие нормировке

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1. \tag{33}$$

В такой интерпретации термин "плотность солитонного газа" обретает вероятностный смысл, а собственные функции задачи рассеяния можно называть волновыми функциями. В квантовой механике волновые функции комплекснозначны, но в нашем случае для действительных потенциалов собственные функции могут быть выбраны действительными, поэтому знак модуля в (33) может быть опущен.

Волновые функции для уравнения (30) можно сконструировать путем преобразований Дарбу параллельно с вычислением мультисолитонного решения u_N (см. раздел 2). Сначала необходимо рассмотреть уравнение Шредингера с нулевым потенциалом (первое уравнение пары Лакса):

$$-\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \lambda \Psi(x,t). \tag{34}$$

Его общим решением является функция $\Psi = C_1(t)e^{i\mu x} + C_2(t)e^{-i\mu x}$, где $\lambda = \mu^2$. Учитывая второе уравнение пары Лакса:

$$-4\frac{\partial^3 \Psi(x,t)}{\partial x^3} = \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}, \tag{35}$$

мы можем записать решение $\Psi(x,t)$, удовлетворяющее обоим уравнениям при нулевом потенциале:

$$\Psi(x,t) = \widetilde{C_1} e^{i(\mu x + 4\mu^3 t)} + \widetilde{C_2} e^{-i(\mu x + 4\mu^3 t)}, \tag{36}$$

где $\widetilde{C_1}$, $\widetilde{C_2}$ - произвольные константы.

Решением $\widetilde{\Psi}$ уравнения (30) будет являться результат N-кратного преобразования Дарбу [7]:

$$\widetilde{\Psi} = \frac{W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ...\Psi_N, \Psi)}{W_N(\Psi_1, \Psi_2, ...\Psi_N)}, \tag{37}$$

где $\Psi_1, \Psi_2, ...\Psi_N$ - затравочные функции, использующиеся для построения N-солитонного решения:

$$\Psi_i = \cosh\left(k_i(x - x_i) - 4k_i^3 t\right), \qquad \Psi_j = \sinh\left(k_j(x - x_j) - 4k_j^3 t\right), \tag{38}$$

а Вронскианы W_N и W_{N+1} определяются следующим образом:

$$W_N = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_N \\ \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1^{(N-1)} & \dots & \Psi_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad W_{N+1} = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_N & \Psi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1^{(N)} & \dots & \Psi_N^{(N)} & \Psi^{(N)} \end{vmatrix}. \tag{39}$$

В силу (36) все решения уравнения (30) вида (37) могут быть получены как линейная комбинация функций $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$:

$$\begin{aligned} &\Psi_N(\mu) = \frac{W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N, e^{i(\mu x + 4\mu^3 t)})}{W_N}, \\ &\widehat{\Psi}_N(\mu) = \frac{W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N, e^{-i(\mu x + 4\mu^3 t)})}{W_N}, \\ &x, t \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0 \Rightarrow \mu > 0, \quad \lambda < 0 \Rightarrow \mu = i\eta, \eta > 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Отметим, что в случае $\lambda \neq -k_j^2$, то есть $\mu \neq ik_j$, где k_j - коэффициент из одной из затравочных функций (38), функции $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$ будут линейно независимы на интервале $(-\infty, +\infty)$. Это можно показать, рассмотрев поведение функций $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$ при $x \to +\infty$:

$$\Psi_N(\mu) \sim \frac{\begin{vmatrix} e^{k_1 x - 4k_1^3 t} & \dots & e^{k_N x - 4k_N^3 t} & e^{i(\mu x + 4\mu^3 t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{N-1} e^{k_1 x - 4k_1^3 t} & \dots & k_N^{N-1} e^{k_N x - 4k_N^3 t} & (i\mu)^{N-1} e^{i(\mu x + 4\mu^3 t)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{k_1 x - 4k_1^3 t} & \dots & e^{k_N x - 4k_N^3 t} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_1^{N-1} e^{k_1 x - 4k_1^3 t} & \dots & k_N^{N-1} e^{k_N x - 4k_N^3 t} \end{vmatrix}} = e^{i(\mu x + 4\mu^3 t)} \prod_{j=1}^{N} (i\mu - k_j). \tag{41}$$

Аналогично, при $x \to +\infty$

$$\widehat{\Psi}_N(\mu) \sim e^{-i(\mu x + 4\mu^3 t)} \prod_{j=1}^{N} (-i\mu - k_j). \tag{42}$$

Таким образом, отношение функций $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$ при $x \to +\infty$ описывается выражением

$$\frac{\Psi_N(\mu)}{\widehat{\Psi}_N(\mu)} \sim \frac{e^{2i(\mu x + 4\mu^3 t)} \prod_{j=1}^{N} (i\mu - k_j)}{\prod_{j=1}^{N} (-i\mu - k_j)}, \tag{43}$$

при $\mu \neq \pm ik_j$ зависящим от x. Это подтверждает линейную независимость функций $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$ на $(-\infty, +\infty)$. Таким образом, пространство решений уравнения (30) задается базисными функциями $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$.

Заметим, что при условии $\lambda \neq -k_j^2$ (то есть $\mu \neq ik_j$) для любой функции вида $\widetilde{\Psi} = C_1 \Psi_N(\mu) + C_2 \widehat{\Psi}_N(\mu)$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, не может выполняться нормировка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\Psi}|^2 dx = 1. \tag{44}$$

Покажем это непосредственно. Рассмотрим случай $\lambda < 0, \lambda \neq -k_j^2$, где k_j - коэффициент одной из затравочных функций (38). Данным значениям λ соответствуют $\mu = i\eta, \eta > 0$, $\eta \neq k_j$. Тогда поведение функций $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$ при $x \to +\infty$ можно оценить как

$$\Psi_N(\mu) \sim T_1 e^{-(\eta x - 4\eta^3 t)}, \quad \widehat{\Psi}_N(\mu) \sim T_2 e^{(\eta x - 4\eta^3 t)}, \quad T_1, T_2 \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

Таким образом, при $x \to \pm\infty$ модуль одной из функций $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$ будет неограниченно возрастать, а другой - стремиться к нулю, и условие нормировки (44) не может быть выполнено.

Если $\lambda > 0$, то $\mu > 0$. В этом случае функции $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$ будут комплексно сопряжены и их поведение при $x \to +\infty$ будет выглядеть следующим образом:

$$\Psi_N(\mu) \sim T e^{i(\mu x + 4\mu^3 t)}, \quad \widehat{\Psi}_N(\mu) \sim T^* e^{-i(\mu x + 4\mu^3 t)}, \quad T \in \mathbb{C}. \tag{46}$$

Интеграл (44) можно записать как

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\Psi}|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |C_1\Psi_N + C_2\widehat{\Psi}_N|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (C_1\Psi_N + C_2\Psi_N^*)(C_1^*\Psi_N^* + C_2^*\Psi_N) dx = \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} (|C_1|^2|\Psi_N|^2 + |C_2|^2|\Psi_N|^2 + C_1C_2^*\Psi_N^2 + C_2C_1^*\Psi_N^{*2}) dx = \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \left(|C_1|^2|\Psi_N|^2 + |C_2|^2|\Psi_N|^2 + 2\mathrm{Re}(C_1C_2^*\Psi_N^2)\right) dx.
\end{aligned} \tag{47}$$

Так как при $x \to +\infty$ подынтегральное выражение эквивалентно

$$(|C_1|^2 + |C_2|^2)|T|^2 + A\cos(2(\mu x + 4\mu^3 t)) + B\sin(2(\mu x + 4\mu^3 t)), \tag{48}$$

где A, B - некоторые действительные константы, выполнение условия (44) невозможно.

Рассмотрим случай $\lambda = -k_j^2$, чему соответствуют значения $\mu = ik_j, k_j > 0, j = 1, 2, ..., N$. Покажем, что при данных значениях μ функции (40) линейно зависимы. Предположим, что k_j соответствует затравочной функции вида $\cosh(k_j x - 4k_j^3 t)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N, e^{-(k_j x - 4k_j^3 t)}) + W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N, e^{+(k_j x - 4k_j^3 t)}) = \\
&\begin{vmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_N & \exp(-(k_j x - 4k_j^3 t)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1^{(N)} & \dots & \Psi_N^{(N)} & \exp(-(k_j x - 4k_j^3 t))^{(N)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_N & \exp(+(k_j x - 4k_j^3 t)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1^{(N)} & \dots & \Psi_N^{(N)} & \exp(+(k_j x - 4k_j^3 t))^{(N)} \end{vmatrix} = \\
&\begin{vmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_N & 2\cosh(k_j x - 4k_j^3 t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1^{(N)} & \dots & \Psi_N^{(N)} & 2\cosh(k_j x - 4k_j^3 t)^{(N)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_j & \dots & \Psi_N & 2\Psi_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1^{(N)} & \dots & \Psi_j(N) & \dots & \Psi_N^{(N)} & 2\Psi_j^{(N)} \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

В случае, если k_j соответствует затравочной функции $\sinh(k_j x - 4k_j^3 t)$, можно провести аналогичную проверку:

$$W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N, e^{+(k_j x - 4k_j^3 t)}) - W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N, e^{-(k_j x - 4k_j^3 t)}) = 0. \tag{49}$$

Линейная зависимость функций $\Psi_N(\mu)$ и $\widehat{\Psi}_N(\mu)$ позволяет рассматривать в качестве волновой функции только функцию $\Psi_N(ik_j)$, умноженную на нормировочный коэффициент.

Значения $\mu = ik_j$ обеспечивают экспоненциальное спадание волновых функций на бесконечности, что означает возможность нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_N(k_j)|^2 dx = 1$:

$$\begin{aligned} |\Psi_N(k_j)| &\sim e^{-(k_j x - 4k_j^3 t)} |\prod_{i=1}^{N}(k_j + k_i)|, x \to +\infty, \\ |\Psi_N(k_j)| &\sim e^{(k_j x - 4k_j^3 t)} |\prod_{i=1}^{N}(k_j + k_i)|, x \to -\infty. \end{aligned} \tag{50}$$

Таким образом, без учета нормировки собственную функцию, соответствующую значению k_j, можно записать в виде

$$\Psi_N(k_j) = \frac{W_{N+1}(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N, e^{-(k_j x - 4k_j^3 t)})}{W_N}. \tag{51}$$

Здесь $k_i = \sqrt{\frac{A_i}{2}}$, где A_i - амплитуда солитона с номером i в многосолитонном решении u_N. Для односолитонного решения

$$u(x,t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - 4k^3 t)$$

волновая функция Ψ выглядит следующим образом:

$$\Psi = -\sqrt{\frac{k}{2}} \operatorname{sech}(kx - 4k^3 t).$$

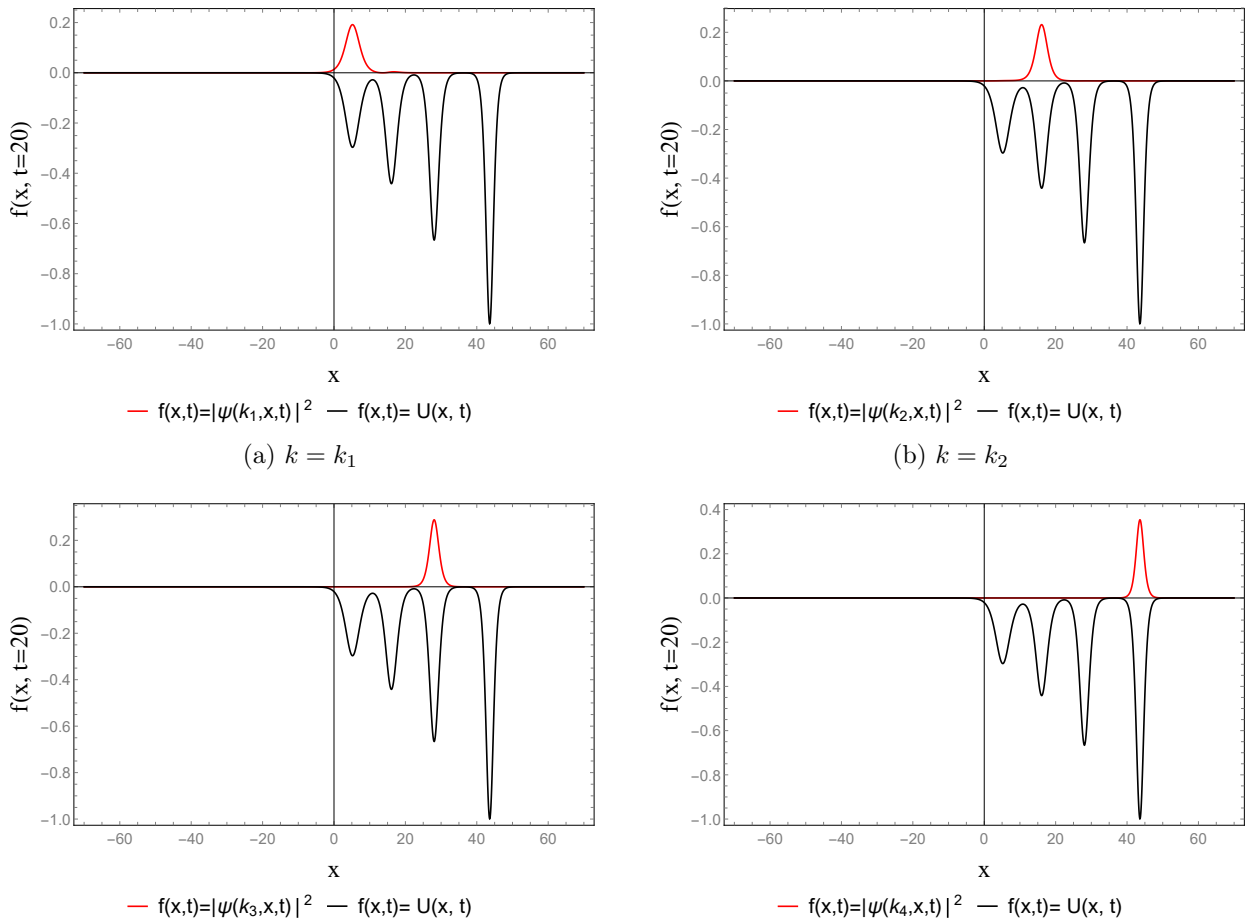
Для двух солитонов с амплитудами $A_1 = 2k_1^2, A_2 = 2k_2^2$ и начальными "координатами" $x_i = 0$ в затравочных функциях (38) волновые функции можно записать как

$$\Psi_1(k_1) = \sqrt{\frac{k_1(k_2^2 - k_1^2)}{2}} \frac{\operatorname{sh}(k_2 x - 4k_2^3 t)}{k_2 \operatorname{ch}(k_1 x - 4k_1^3 t) \operatorname{ch}(k_2 x - 4k_2^3 t) - k_1 \operatorname{sh}(k_1 x - 4k_1^3 t) \operatorname{sh}(k_2 x - 4k_2^3 t)}, \tag{52}$$

$$\Psi_2(k_2) = \sqrt{\frac{k_2(k_2^2 - k_1^2)}{2}} \frac{\operatorname{ch}(k_1 x - 4k_1^3 t)}{k_2 \operatorname{ch}(k_1 x - 4k_1^3 t) \operatorname{ch}(k_2 x - 4k_2^3 t) - k_1 \operatorname{sh}(k_1 x - 4k_1^3 t) \operatorname{sh}(k_2 x - 4k_2^3 t)}. \tag{53}$$

Как можно видеть, даже в случае $N = 2$ волновые функции имеют сложный вид. Однако при некоторых значениях параметров запись собственных функций достаточно компактна. В частности, в [8] приведены собственные функции в момент времени $t = 0$ для солитонов с амплитудами $A_1 = 8, A_2 = 2$:

$$\Psi_1 = \frac{1}{4\cosh^2 x}, \quad \Psi_2 = \frac{\tanh x}{2\cosh x}.$$



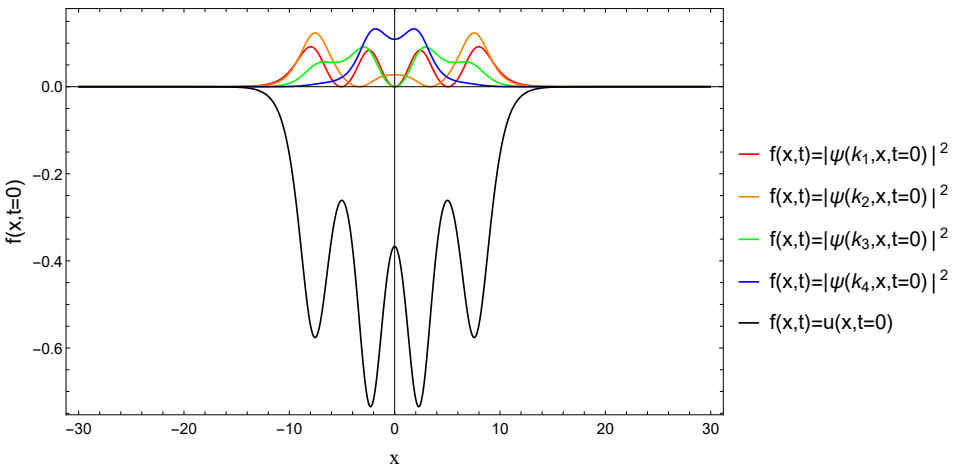
(a) $k = k_1$ (b) $k = k_2$

(c) $k = k_3$ (d) $k = k_4$

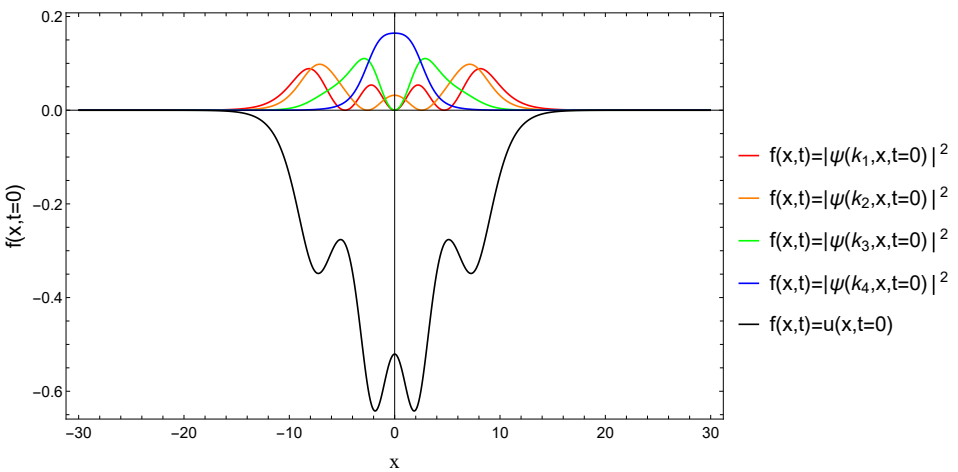
Рис. 8: Иллюстрация использования функции $\Psi^2(k_j, x, t)$ для определения позиции солитона

В качестве примера на рис. 8 изображены квадраты волновых функций $\Psi(k_j, x, t)$ для 4-солитонного решения $U(x, t)$ в момент времени $t = 20$, когда солитоны перекрываются слабо. Здесь k_j - параметры, определяющие амплитуды солитонов: $A_j = 2k_j^2$, каждому k_j соответствует волновая функция $\Psi(k_j, x, t)$. Видно, что область больших значений функции $\Psi^2(k_j, x, t)$ будет сконцентрирована около солитона с параметром k_j. Таким образом, при достаточно больших t квадрат собственной функции хорошо отражает позицию единичного солитона.

При значениях времени $t \ll 1$, близких к моменту фокусировки солитонов, когда солитоны взаимодействуют сильно, квадраты волновых функций демонстрируют иное поведение, приобретая дополнительные точки максимумов (рис. 9). Квадрат волновой функции, соответствующей наибольшему параметру k_j, принимает наибольшие значения вблизи точки $x = 0$. Наоборот, наибольшие значения квадратов волновых функций, отвечающих наименьшим k_j, смещены к краям области, где N-солитонное решение $u(x, t)$ сильно отличается от нулевого значения. Таким образом, собственные функции задачи рассеяния, действительно, могут быть использованы для определения положения солитонов, но возможность их использования для случая сильного взаимодействия солитонов пока не очевидна.



(a) $d = 1.3$



(b) $d = 1.6$

Рис. 9: $\Psi^2(k_j, x, t = 0)$ для 4-солитонного решения при разных d

4.2 Явная запись для плотности неоднородного солитонного газа

В приведенных в разделе 4.1 примерах фактически рассматривалась одна реализация солитонного газа (детерминистское решение), для которй было введено новое определение величины плотности для одного солитона. В настоящем подразделе рассмотрим применение введенной величины плотности газа для случая множества реализаций солитонного газа.

Ранее было показано, что волновую функцию $\Psi_j^2(x) = \Psi^2(k_j, x)$, соответствующую солитону с параметром k_j, можно использовать для определения позиции этого солитона. Введем плотность $D(x)$ солитонного газа, состоящего из N солитонов, в точке x как

$$D(x) = \sum_{n=1}^{N} \Psi_n^2(x). \tag{54}$$

В квантовой механике плотность вероятности $P(x)$ нахождения частицы в координате x опре-

1025

деляется величиной

$$P(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n \Psi_n^2(x), \tag{55}$$

где p_n - вероятность нахождения системы в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi_n(x)$. Так как в ансабле солитон с параметром k_j ассоциируется с частицей, положение которой описывается с помощью волновой функции (51), отвечающей этому параметру, будем считать, что все состояния $\Psi_n(x)$ системы равновероятны и $p_n = \frac{1}{N}$. Так, для квантовомеханической аналогии величина $D(x)$ имеет смысл плотности вероятности нахождения какой-либо частицы в координате x. Можно сказать, что для солитона с параметром k_j в интервале (a, b) находится его часть $\int_a^b \Psi_j^2(x)dx$, где $\Psi_j^2(x)$ - соответствующая ему волновая функция. Аналогично, введенная плотность солитонов может быть интерпретирована в вероятностном смысле для ансамбля разных реализаций солитонного газа.

Плотность однородного солитонного газа (54) тесно связана с его статистическими моментами, что и являлось целью при составлении данной характеристики. В разделе 3 было показано, что статистические моменты третьего и более высоких порядков не сохраняются в процессе взаимодействия солитонов. Характер изменения статистических моментов зависит от распределения амплитуд и позиций солитонов. Введя в рассмотрение плотность солитонного газа, которая характеризует степень солитонных взаимодействий, можно получить вероятностные оценки статистических моментов. Существенно, что плотность (54) однородного ансамбля реализаций солитонного газа, усредненная по их числу, связывает усредненные статистические моменты ансамбля с моментами поля слабо перекрывающихся солитонов с теми же амплитудами.

Продемонстрируем это свойство на примере однородного ансамбля R реализаций солитонного газа. Пусть каждая реализация состоит из N солитонов с амплитудами, выбранными эквидистантно из интервала $[1, 3]$:

$$A_i = 1 + \frac{2(i-1)}{N-1}. \tag{56}$$

Данное распределение амплитуд позволяет описать приближенно случай равномерного распределения амплитуд солитонов в интервале $[A_1, A_N]$. Фазы солитонов для каждого решения будем выбирать случайно и равновероятно из интервала $[-L, L], L = 20$. При увеличении числа реализаций в ансамбле усредненные по R реализациям статистические моменты и плотность солитонного газа стремятся к константному значению для каждой точки на интервале $[-L, L]$. При этом оказывается, что усредненные статистические моменты в фиксированной точке будут близки к статистическому моменту того же порядка для изолированных солитонов, умноженному на усредненную плотность солитонного газа в этой точке:

$$\overline{m_n(x)} = S_n \overline{D(x)}, \quad m_n(x) = u^n(x), \quad S_n = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n(x, t = \infty)dx. \tag{57}$$

Здесь черта означает усреднение по ансамблю, S_n соответствует n-му статистическому моменту для невзаимодействующих солитонов. Рис. 10 и 11 иллюстрируют связь (57) между плотностью и статистическими моментами для однородного ансамбля реализаций солитонного газа, состоящих из двух и пяти солитонов соответственно. На рисунках построены зависимости от координаты x усредненной плотности $D(x)$ и усредненных по числу реализаций

1026

нормированных статистических моментов $\frac{m_n(x)}{S_n}$. Однородность созданного газа внутри некоторой подобласти интервала $[-L, L]$ подтверждается отсутствием зависимости от координаты посчитанных статистических моментов в центральной области (она и есть область однородности). Для случая пяти солитонов (рис. 11) отметим, что величины плотностей (29) и (54) сильно отличаются друг от друга. На рисунке видно, что не все солитоны убираются в интервал $[-L, L] = [-20, 20]$, что вызывает противоречие в определении плотности (29). Рис. 10 для реализаций, составленных из двух солитонов, показывает, что в случае разреженного газа характеристики $D(x)$ и $\frac{N}{2L}$ имеют похожие значения. Так, если солитоны в некоторой суперпозиции перекрываются слабо, можно попытаться вычислить плотность солитонного газа в интервале $[-L, L]$ с помощью формулы (29). Однако при таком подходе возникает неоднозначность, когда один из солитонов в интервал $[-L, L]$ полностью не "умещается" - например, если область его больших значений разбивается на две части одной из прямых $x = -L$ или $x = +L$. При подсчете плотности, определяемой формулой (29), "вылезающие" из интервала солитоны нельзя учитывать полностью, даже если какая-то их часть находится в рассматриваемом интервале.

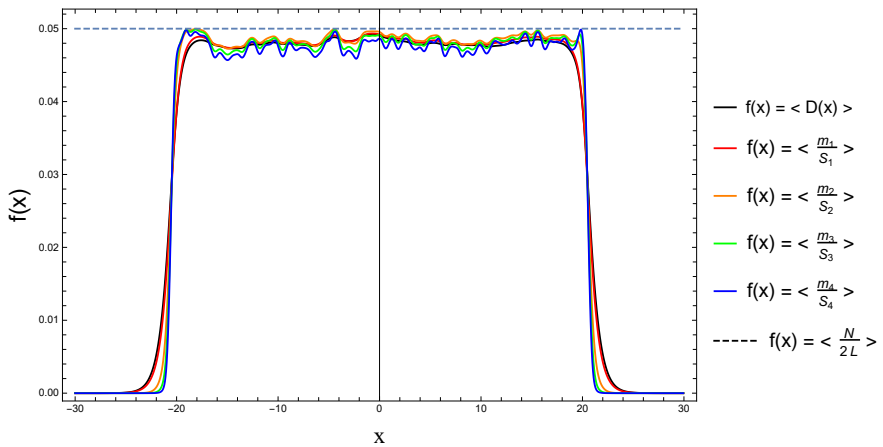


Рис. 10: Связь плотности и статистических моментов. $N = 2, R = 6.5 \cdot 10^4$

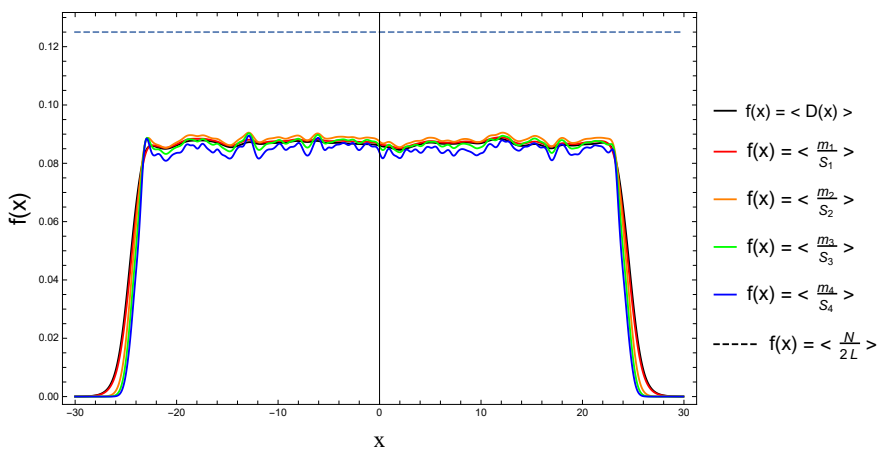


Рис. 11: Связь плотности и статистических моментов. $N = 5, R = 3.5 \cdot 10^4$

Созданный нами ансамбль реализаций солитонного газа однороден только в своей центральной части. На её краях наблюдается изменение статистических моментов в связи с эффектом отталкивания солитонов, проявляющимся при наличии в реализациях солитонов с близкими амплитудами. Это проявляется в картине обменного взаимодействия и появлении так называемой критической плотности газа, которая не может быть увеличена путем размещения в интервале дополнительного числа солитонов.

Приведенные примеры подтверждают адекватность введения величины плотности солитонного газа в форме (54), полученной с помощью квантовомеханической аналогии для задачи рассеяния уравнения КдВ. Предлагаемая плотность $D(x)$ солитонного газа может быть записана явно для каждой реализации солитонного газа и вычислена независимо от других характеристик. Величина $D(x)$ имеет смысл плотности вероятности нахождения солитона в координате x и имеет однозначную связь со статистическими моментами солитонного поля (как минимум до 4-го включительно для случая однородного поля), тем самым достаточна для описания вероятностных свойств солитонного газа при заданном распределении вероятностей амплитуд солитонов.

5 Заключение

В данной работе для исследования геометрических и в том числе статистических свойств солитонных полей реализована численная процедура построения многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Вриза с помощью преобразования Дарбу. Решения, состоящие из 40-50 солитонов, могут быть построены с высокой точностью: не выше 3% для десятого интеграла сохранения уравнения.

Для распределения амплитуд солитонов в соответствии с геометрической прогрессией исследован вид солитонных решений и статистические моменты. В зависимости от знаменателя геометрической прогрессии вследствие различной степени проявления эффекта отталкивания солитонов выделяется две качественно разные картины эволюции N-солитонного решения.

Во всех случаях столкновение большого числа солитонов приводит к уменьшению статистических моментов порядка $n \geq 3$. Добавление единичного солитона к существующему числу солитонов в суперпозиции приводит к понижению статистических моментов. В рамках рассмотренного амплитудного распределения кривые статистических моментов сходятся к универсальной кривой при увеличении числа солитонов. Поведение статистических моментов в пределе бесконечно большого числа волн может быть хорошо аппроксимировано с помощью конечного числа солитонов.

Квантовомеханическая аналогия для задачи рассеяния и аппарат преобразований Дарбу применены для нового способа введения ключевой характеристики солитонного газа - плотности солитонов уравнения Кортевега-де Вриза, которая может быть вычислена для произвольного солитонного поля. Для тестовых примеров показана адекватность введенного определения для однородного солитонного газа. При реализации однородных ансамблей солитонных решений показана однозначная зависимость введенной плотности от статистических моментов солитонного поля, которая позволяет использовать плотность солитонного газа для вычисления статистических моментов при известной функции распределения амплитуд солитонов.

Дальнейшие исследования могут быть посвящены вопросам о границах применимости вве-

денной плотности солитонного газа (в частности, о проявлении в статистических моментах критической плотности, случаях сильной неоднородности газа) а также возможности введения аналогичной характеристики для других солитоносодержащих уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния.

6 Приложение. Доказательство свойства изменения статистических моментов при увеличении числа солитонов.

Покажем явно, что добавление одного солитона к существующему набору солитонов (увеличение N для набора амплитуд в соответствии с последовательностью (23)) понижает статистические моменты ансамбля невзаимодействующих солитонов. Рассмотрим случай статистического момента третьего порядка.

Пусть $\widehat{M_3}(N)$ - статистический момент поля N невзаимодействующих солитонов. Тогда его можно записать следующим образом:

$$\widehat{M_3}(N, t=\infty) = \frac{8\cdot 16}{15}\sum_{i=1}^{N} k_i^5 : \left(\frac{16}{3}\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}},$$

где k_i - параметры, задающие амплитуды солитонов: $A_i = 2k_i^2, k_{i+1} < k_i$. Рассмотрим разность

$$\widehat{M_3}(N) - \widehat{M_3}(N+1) = \frac{8\cdot 16}{15}\sum_{i=1}^{N} k_i^5 : \left(\frac{16}{3}\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8\cdot 16}{15}\sum_{i=1}^{N+1} k_i^5 : \left(\frac{16}{3}\sum_{i=1}^{N+1} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}} \sim$$

$$\sim \frac{\sum_{i=1}^{N} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N+1} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}} - \sum_{i=1}^{N+1} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N+1} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Знак данной разности определяется знаком выражения

$$s = \sum_{i=1}^{N} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N+1} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}} - \sum_{i=1}^{N+1} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Для удобства мы будем рассматривать величину $\widehat{s}$, имеющую тот же знак, что и s:

$$\widehat{s} = s\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N+1} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}} + \sum_{i=1}^{N+1} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{N+1} k_i^3\right)^3 - \left(\sum_{i=1}^{N+1} k_i^5\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^3.$$

Тогда, применяя неравенство $k_{N+1} > k_i \ \forall i = 1, 2, ..., N$, запишем

$$\widehat{s} = \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5\right)^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^3 + 3\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3\right)^2 k_{N+1}^3 + 3k_{N+1}^6 \sum_{i=1}^{N} k_i^3 + k_{N+1}^9\right) -$$

$$- \left(\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5 \right)^2 + 2k_{N+1}^5 \sum_{i=1}^{N} k_i^5 + k_{N+1}^{10} \right) \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^3 > \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5 \right)^2 \left(3 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^2 k_{N+1}^3 + 3k_{N+1}^6 \sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right) -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{N} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^3 k_{N+1}^5 - k_{N+1}^{10} \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^3 = \sum_{i=1}^{N} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^2 k_{N+1}^3 \left(3 \sum_{i=1}^{N} k_i^5 - 2k_{N+1}^2 \sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right) +$$

$$+ k_{N+1}^6 \sum_{i=1}^{N} k_i^3 \left(3 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5 \right)^2 - k_{N+1}^4 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^2 \right) > \sum_{i=1}^{N} k_i^5 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^2 k_{N+1}^3 \left(3 \sum_{i=1}^{N} k_i^5 - 2 \sum_{i=1}^{N} k_i^5 \right) +$$

$$+ k_{N+1}^6 \sum_{i=1}^{N} k_i^3 \left(3 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5 \right)^2 - \left(k_{N+1}^2 \sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^2 \right) >$$

$$> \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^3 \right)^2 k_{N+1}^3 + 2k_{N+1}^6 \sum_{i=1}^{N} k_i^3 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^5 \right)^2 > 0.$$

Таким образом, для любого N выполняется $\widehat{M}_3(N) - \widehat{M}_3(N+1) > 0$, что и означает уменьшение третьего нормированного статистического момента при увеличении числа солитонов N.

Уменьшение нормированных статистических моментов других порядков при увеличении N доказывается аналогично.

1030

Литература

[1] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Издательство "Мир", 1987.

[2] А. В. Слюняев. Морские «волны-убийцы»: прогноз возможен? Вестник МГУ. Серия 3. Физика и Астрономия №3, 33-47 (2017).

[3] V. E. Zakharov. Kinetic equation for solitons. Journal of Experimental and Theoretical Physics 60, 993-1000 (1971).

[4] G. A. El, A.M. Kamchatnov. Kinetic equation for a dense soliton gas. Phys. Rev. Lett. 95, 204101 (2005)

[5] G. A. El. Critical density of a soliton gas. Chaos 26, 023105 (2016); doi: 10.1063/1.4941372

[6] А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. Издательство "Мир", 1989.

[7] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux transformations and solitons. Springer, 1991

[8] М. Табор. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Издательство URSS, 2001.

[9] A. Gelash, R. Mullyadzhanov. Anomalous errors of direct scattering transform. Phys. Rev. E. 2020. Vol. 101. P. 052206

[10] R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal. (1968). Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion. Journal of Mathematical Physics 9, 1204

[11] В. И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука" , 1973.

[12] Пелиновский Е.Н., Шургалина Е.Г., Слюняев А.В. Солитонный газ: взаимодействия, турбулентность и волны-убийцы. «Нелинейные волны-2016», 279-293 (2017).

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Уткина Артёма Александровича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Математическая модель импульсного погружателя, оптимального по коэффициенту асимметрии» являются:

1. Равенство 13, дает возможность найти значение коэффициента лямбда для каждой пары дебалансов.
2. Программа, для моделирвоания процесса погружения сваи (Раздел 4: Программная реализация)

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

1. Мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: Вибрационный погружатель, внедрение твердого тела в сопротивляющуюся среду, импульсный погружатель, вибрационное внедрение. Выдача поисковиков не содержала материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
2. Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Костиным Дмитрием Владимировичем, профессором кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета.
3. Проведены семинары с заведующим кафедры математического моделирования, профессором математического факультета Воронежского государственного университета Костиным Владимиром Алексеевичем.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоялась 10.06.19. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Уткин Артём Александрович
31 мая 2021 г. Воронеж, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФГБОУ ВО («ВГУ»)

Математический факультет

Кафедра математического моделирования

Математическая модель импульсного погружателя, оптимального по коэффициенту асимметрии

Бакалаврская работа

Направление 01.03.04 Прикладная математика

Профиль Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

Зав. кафедрой _____ д.ф.-м.н., проф. В.А. Костин __.__.2019 г.
подпись

Обучающийся _____ А.А. Уткин
подпись

Руководитель _____ д.ф.-м.н. Д.В. Костин
подпись

Воронеж 2019

1033

Содержание

Введение **3**

1 Описание вибрационного погружателя **4**

2 Построение модели работы импульсного погружателя **7**

3 Задача оптимизации **11**

4 Программная реализация **13**

5 Заключение **15**

Список литературы **16**

Введение

На сегодняшний день в строительной сфере довольно часто возникает потребность в использовании вибропогружателя для погружения свайных элементов в землю. Такая востребованность порождает задачу оптимизации характеристик погружателей для получения наилучшего результата их работы. Решение задачи оптимизации характеристик погружателя прикладными методами несомненно актуальна и соответствует профилю.

Целью работы была поставлена задача разработать программное обеспечение для автоматизированного расчета характеристик погружателя на основе теории вибрационных машин и теоремы об оптимальности импульса Максвелла-Фейера.

1 Описание вибрационного погружателя

Вибрационный погружатель предназначен для погружения или извлечения свай в песчаных или глинистых грунтах. Работа такого погружателя (рис. 1) основана на двух основных принципах:

1. На эффекте резкого снижения сопротивлению погружения свайного элемента при сообщении последнему вибрации;

2. На действии полигармонического импульса, создаваемого центробежными силами системы дебалансов.

Такую процедуру называют вибрационным погружением.

Определение 1. *Вибрационным погружением называют внедрение твердого тела в сопротивляющуюся среду под действием постоянной и знакопеременной сил.*

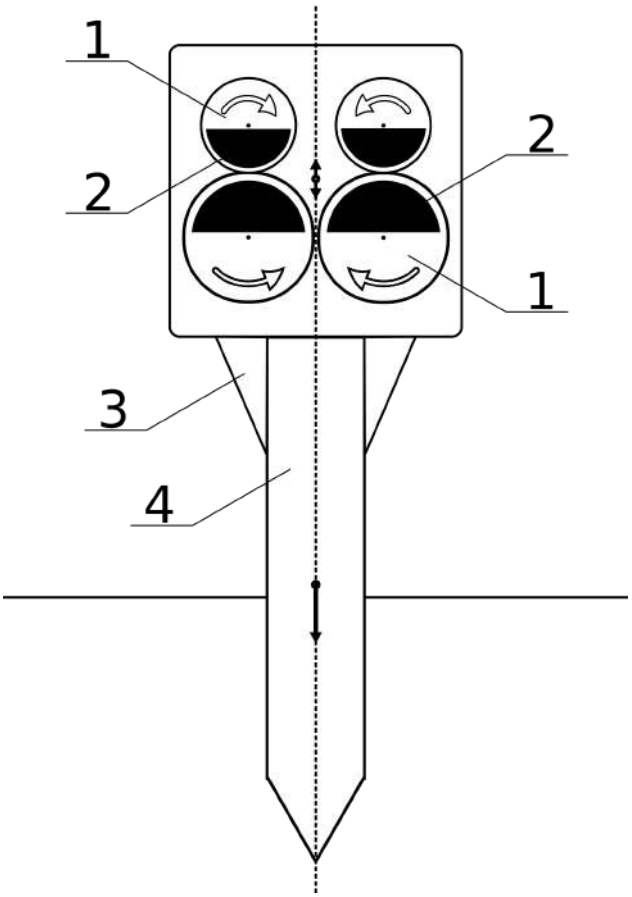


Рис. 1: Схема вибрационного погружателя.

1036

При вращении валов (1) с дебалансами (2) на их ось крепления действует центробежная сила и вибрационный погружатель получает вибрирующее движение, которое сообщается через наголовник (3) свайному элементу (4).

Определение 2. *Дебалансом называют неуравновешенность вращающихся частей машин (роторов, коленчатых валов, шкивов и т. п.).*

Определение 3. *Сила, препятствующая материальной точке, движущейся по окружности, удалиться от центра этой окружности, называется центростремительной силой. Она направлена по радиусу от окружности к центру. По третьему закону Ньютона имеется равная ей и противоположно направленная сила противодействия (сила, с которой движущаяся точка стремится удалиться от центра). Эта сила называется центробежной.*

При этом, предполагается, что погружаемый элемент жестко присоединен к возбудителю вибраций.

В случае с вибрационным погружателем в его конструкции участвует лишь одна пара[1] дебалансов. В таком случае графиком его гармоническим колебания будет косинусоида (рис. 2).

Определение 4. *Гармоническим колебанием называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение и др.), изменяются по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).*

При использовании в конструкции погружателя двух и более пар дебалансов разных характеристик, погружатель можно назвать импульсным. В графике гармоническим колебания такого погружателя будет заметен характерный импульс (рис. 5 и рис. 6), направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду.

Определение 5. *Импульсом силы называют векторную физическую величину, которая является мерой действия силы за некоторый промежуток времени. $\vec{I}$ — импульс силы $\vec{F}$ за малый промежуток времени t.*

[1]Причины использования дебалансов парами более подробно будет рассказано в главе 2.

1037

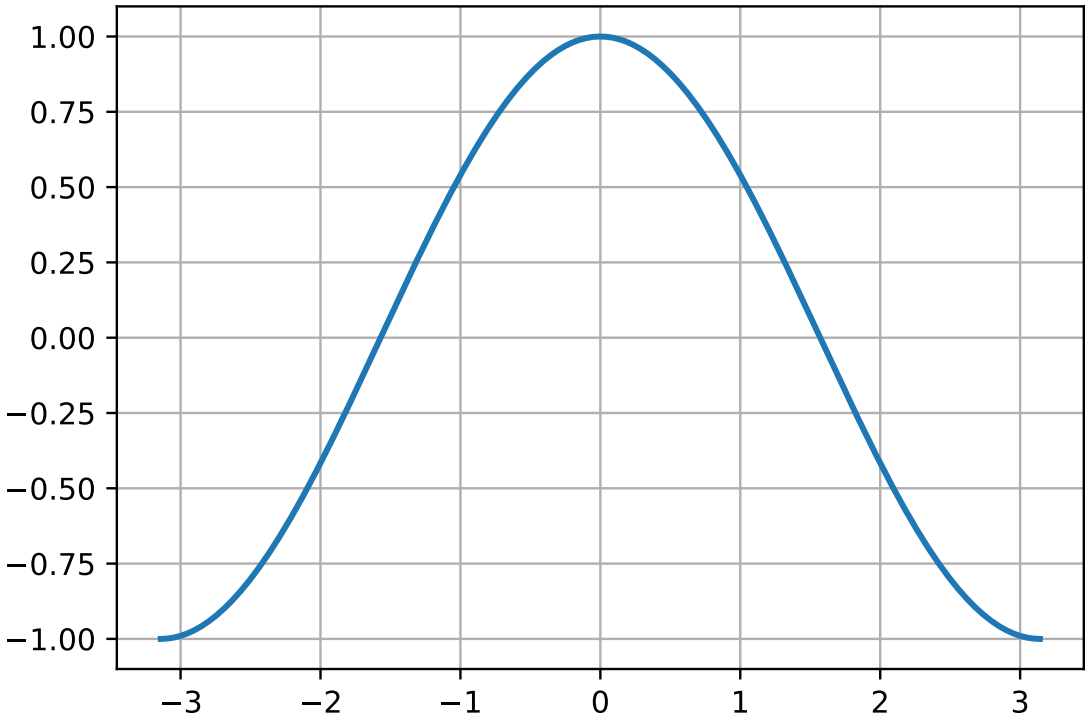


Рис. 2: Импульс силы для одной пары дебалансов.

1038

2 Построение модели работы импульсного погружателя

Пусть дан некий дебаланс с радиусом r, радиус вала которого равен R, ω — угловая скорость и l — расстояние от центра масс до оси вращения дебаланса, а его масса будет равна m (рис. 3).

Определение 6. *Центром масс называют точку, через которую должна проходить линия действия силы, чтобы под действием этой силы тело двигалось поступательно (не вращалось).*

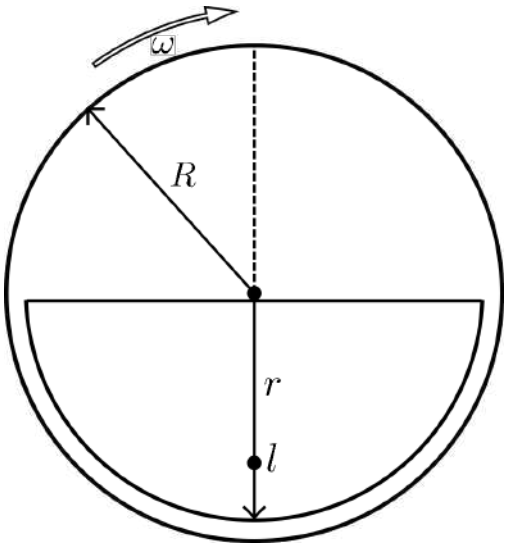


Рис. 3: Схема дебаланса.

Тогда, при вращении данного дебаланса возникнет центробежная сила, которая имеет вид:

$$F_{\text{центр.}} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R}_0 \tag{1}$$

В нашем случае $\vec{R}_0$ будет равен расстоянию от центра масс l, которое, в случае дебаланса, имеет вид:

$$l = \frac{4r}{3\pi} \tag{2}$$

Вращение такого дебаланса вокруг собственной оси будет иметь вид гармонического колебания, которое будет иметь вид:

1039

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$\text{где } \lambda = m \cdot \omega^2 \cdot l \tag{3}$$

где $x(t)$ — значение изменяющейся величины в момент времени t, λ — амплитуда колебаний, ω — циклическая (круговая) частота колебаний, φ_0 — начальная фаза колебаний.

Гармонические колебания являются периодическими. Период T этих колебаний равен периоду функции $\cos(\omega t + \varphi_0)$, то есть:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Начальная фаза колебаний в работе импульсного погружателя не является важной, из чего следует, что ее можно игнорировать:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t) \tag{4}$$

В работе импульсного погружателя полезной силой считается та, которая направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду. Для компенсации горизонтальных сил, возникающих при вращении одного дебаланса, в конструкции погружателя дебалансы используются парами (рис 4). Их вращение происходит в противоположные стороны, по отношению друг к другу (рис. 1). В таком случае, уравнение гармонического колебания пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m\omega^2 l \cos(\omega t) \tag{5}$$

Сила, направленная вверх может привести к разрушению погружаемого твердого тела. Для компенсации этой силы в импульсном погружателе используется несколько пар дебалансов с разными характеристиками.

Уравнение гармонического колебания для второй пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m_2 \cdot 4\omega^2 \cdot l(r_2) \cdot \cos(2\omega t)$$

Уравнение гармонического колебания для пары дебалансов в общем виде:

1040

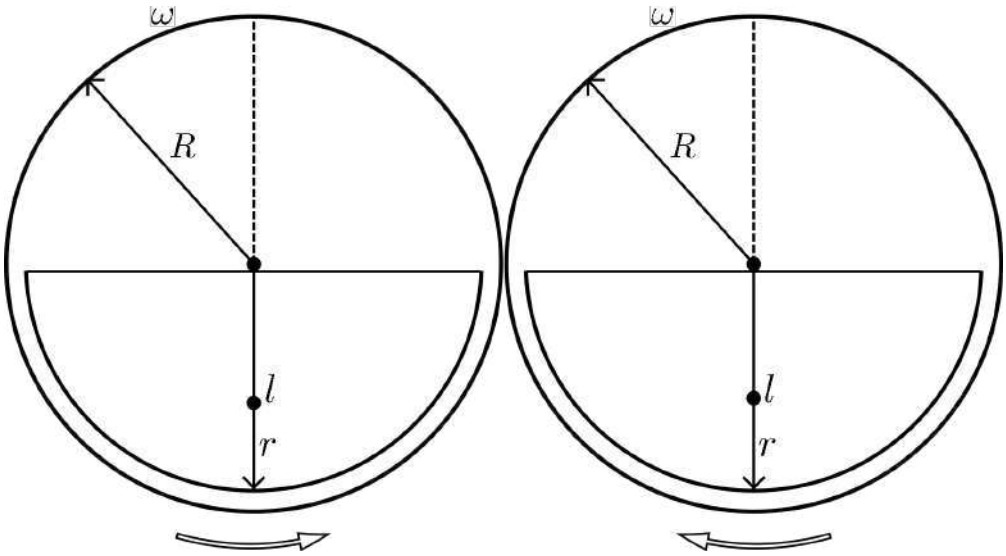


Рис. 4: Схема пары дебалансов.

$$x(t) = 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \tag{6}$$

Для всех пар дебалансов сумма гармонических колебаний будет иметь вид:

$$F = \sum_{k=1}^{n} 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \tag{7}$$

где n — количество пар дебалансов, k — порядковый номер пары дебалансов.

Из (7) следует, что угловая скорость каждого вышестоящего уровня пар дебалансов будет в два раза больше, по сравнению с предыдущим. Если же представить (7) в сокращенном виде, то:

$$\begin{gathered} F = \sum_{k=1}^{n} 2\lambda_k \cdot \cos(k\omega t) \\ \lambda = m \cdot \omega^2 \cdot l \end{gathered} \tag{8}$$

где n — количество пар дебалансов, k — порядковый номер пары дебалансов.

График импульса силы для трех пар дебалансов за время t представлен на графике (5).

1041

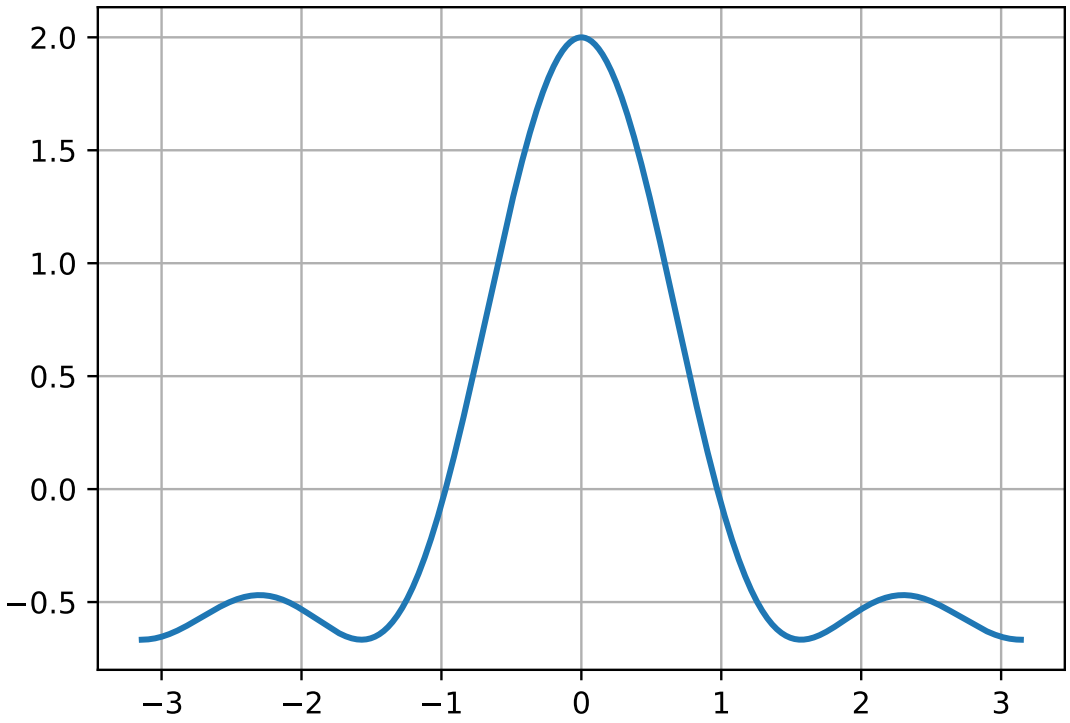


Рис. 5: Импульс силы для трех пар дебалансов.

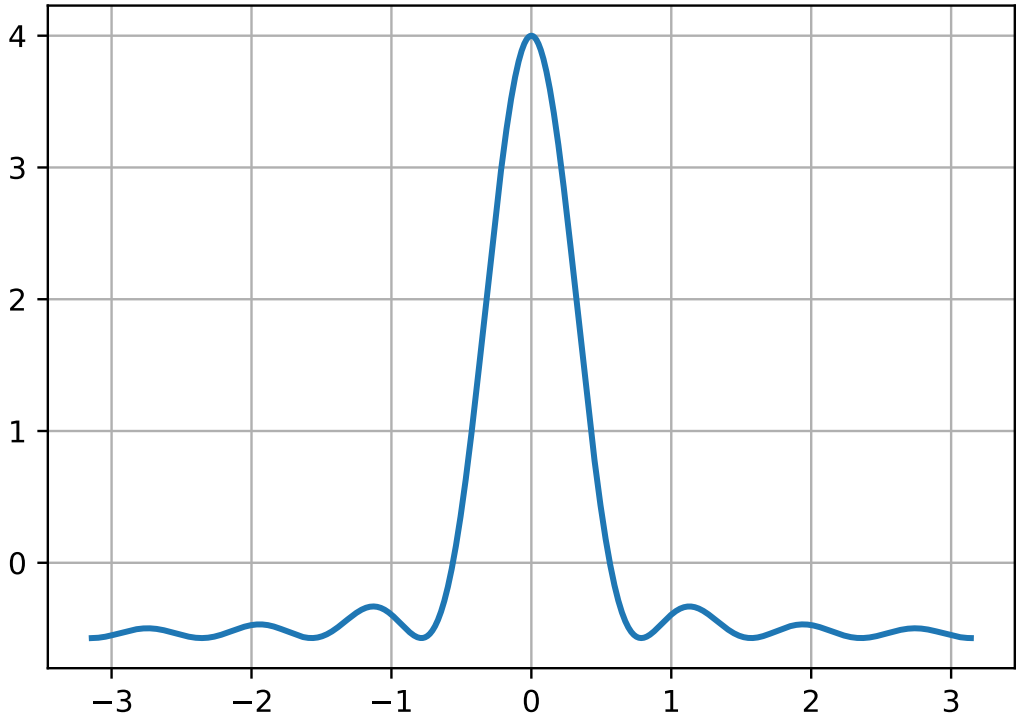


Рис. 6: Импульс силы для семи пар дебалансов.

1042

3 Задача оптимизации

При использовании импульсного погружателя важно, чтобы импульс, направленный на погружение сваи был как можно больше, а импульс, направленный в противоположную сторону как можно меньше. На основе этих рассуждений сформулируем задачу оптимизации: необходимо, чтобы соотношение максимального значения гармонического колебания к минимальному значению стремилось к максимуму.

Пусть $f_{\max}(t)$ — максимальное значение импульса силы за время t, $f_{\min}(t)$ — минимальное значение импульса за время t. Тогда:

$$\begin{gathered} K = \left| \frac{f_{\max}(t)}{f_{\min}(t)} \right| \to \max \\ f_{\max} = \max_t f(t, \lambda), \\ f_{\min} = \min_t f(t, \lambda) \end{gathered} \tag{9}$$

Число K будем называть коэффициентом асимметрии полинома (7).

Для достижения коэффициентом асимметрии максимального значения необходимо решение следующей задачи:

$$\begin{gathered} \inf_t f(t, \lambda) \to \sup_\lambda, \text{где } t \in [0, \pi] \\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = c, \text{где } c = const > 0 \end{gathered} \tag{10}$$

Исходя из теоремы об оптимальности модели полигармонического импульса [3] многочлен (7) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k) \cos(kt) \tag{11}$$

При этом имеет место равенство:

$$\max_\lambda K_n(\lambda) = n \tag{12}$$

Из этого следует, что:

$$\lambda_k = \frac{n-k+1}{n} \cdot \lambda_1, \quad \text{где } \lambda_1 = m_1 \cdot \omega_1^2 \cdot l_1 \tag{13}$$

где n — количество пар дебалансов, k — порядковый номер пары дебалансов.

Равенство (13) дает возможность найти значение коэффициента λ для каждой пары дебалансов. Это даст возможность оптимизацировать характеристик каждой пары дебалансов в импульсном погружателе отталкиваясь от нужных характеристик первой пары, что позволяет получить наибольший импульс, направленный на погружение твердого тела, и компенсацию силы, которая направлена в противоположную сторону.

4 Программная реализация

Для автоматизированного расчета оптимальных характеристик для пар дебалансов импульсного погружателя была создана программа на языке программирования Python (рис. 7).

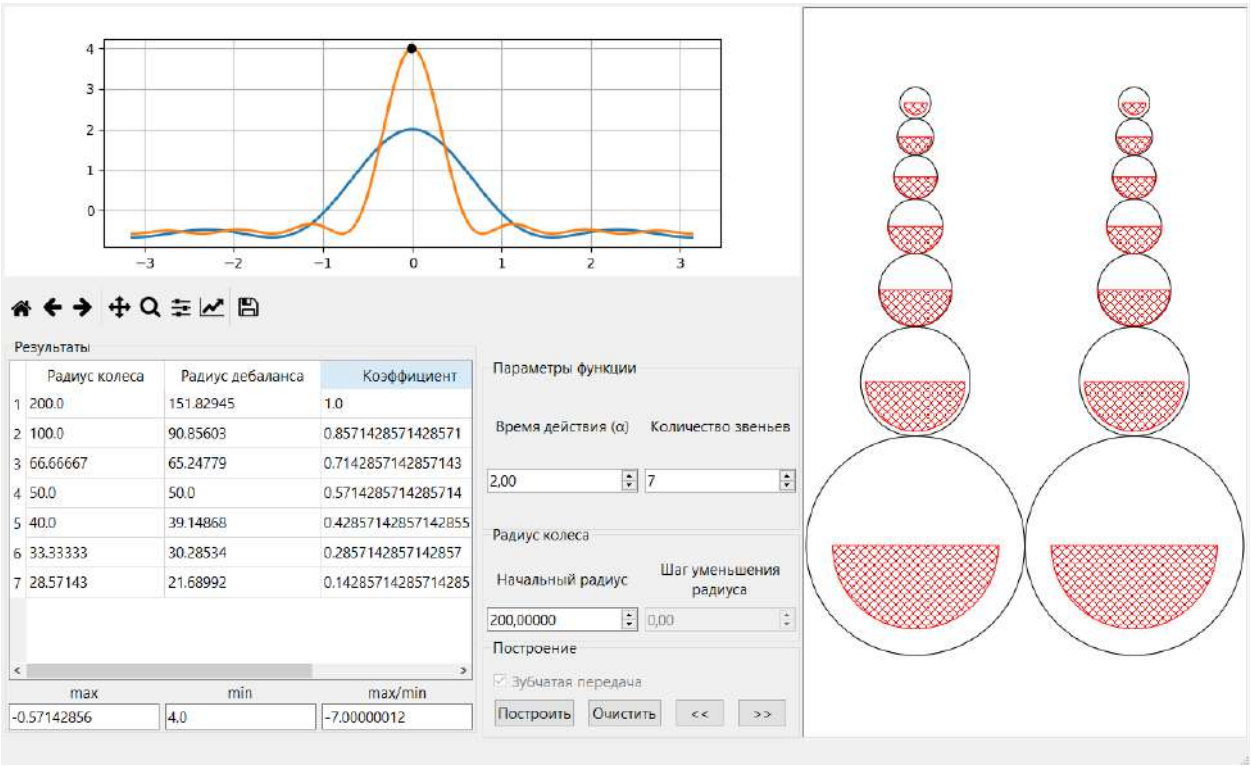


Рис. 7: Интерфейс программы.

Функционал данной программы позволяет указать радиус вала первой пары дкбалансов и количество пар дебалансов, присутствует возможность вывода графика гармонического колебания и определение его значения в определенный момент времени.

После ввода радиуса вала первой пары, радиусы остальных валов будут расчитаны по формуле:

$$R_k = \frac{R_0}{k} \tag{14}$$

где R_k — радиус нужного вала, R_0 — радиус вала первой пары, k — порядковый номер пары.

Для расчета радиуса дебаланса для всех пар используется формула:

$$r_n = R_0 \cdot \left(\frac{k-(n-1)}{n^2 \cdot (k+1)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{15}$$

1045

где r_k — радиус нужного дебаланса, R_0 — радиус вала первой пары, n — количество пар дебалансов, k — порядковый номер пары.

При этом нахождение оптимальных характеристик всех пар дебалансов происходит в реальном времени без необходимости какого либо ожидания выполнения расчетов, даже для максимального допустимого количества пар дебалансов, которое ограничено в программе значеним в 99 пар.

5 Заключение

Целью работы была поставлена задача разработки программного обеспечения для автоматизированного расчета характеристик погружателя используя прикладные методы математики. С помощью применения теоремы об оптимальности модели полигармонического импульса в отношении коэффициента асимметрии и на основе теории вибрационных машин эта цель была достигнута с применением языка программирования Python.

Список литературы

1. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. — М. : Физико-математическая литература, 1994.
2. *Костин В. А.*, *Костин Д. В.*, *Сапронов Ю. И.* Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов // ДАН. — М., 2012.
3. *Костин Д. В.* Бифуркация резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии // Математический сборник. — М., 2016. — С. 90—109.
4. *Лавендела Э. Э.* Вибрации в технике, Т. 4. Вибрационные процессы и машины. — М., 1981.
5. *Савинов О. А.*, *Лускин А. Я.* Вибрационный метод погружения свай и его применение в строительстве. — М. : Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960.
6. *Саммерфилд М.* Программирование на Python 3. Подробное руководство. — Символ-Плюс, 2009.
7. *Шлее М.* Qt 5.10. Профессиональное программирование на C++. — Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2018.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Шафигуллиной Динары Азатовны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Исследование линейных гамильтоновых систем» являются: вывод формул (31), (33), (42), (43), (44), Теорема 8.

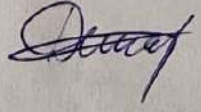
Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2020 г. мною был произведён поиск в научных работах, приведенных в списке литературы. При этом в работах [3-5] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Юмагуловым Маратом Гаязовичем, доктором физико-математических наук кафедры дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Башкирского государственно университета.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Таким образом, по результатам поиска в тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Защита работы состоялась 18.06.2020. На Смотр представлен проект окончательный текст работы.



Шафигуллина Динара Азатовна

28 мая 2021 г.
Уфа, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ПО ПРОГРАММЕ БАКАЛАВРИАТА

ШАФИГУЛЛИНА ДИНАРА АЗАТОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Выполнил:
Студент(ка) 4 курса очной формы обучения
Направление подготовки (специальность)
01.03.01 «Математика»
Направленность (профиль)
Дифференциальные уравнения,
динамические системы,
оптимальное управление

Допущено к защите в ГЭК и проверено на
объем заимствования:

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

_____ / М.Г. Юмагулов

Руководитель
д.ф.-м.н., профессор

_____ / М.Г. Юмагулов

«5» июня 2020 г.

УФА - 2020

Содержание

1. Введение **3**

2. Консервативные и гамильтоновы системы **4**

2.1. Динамические системы 4

2.2. Устойчивость точек равновесия 5

2.3. Общее определение гамильтоновых систем 5

2.4. Свойства гамильтоновых систем 6

2.5. Двумерные гамильтоновы системы 6

2.6. Другое представление гамильтоновых систем 7

3. Линейные гамильтоновы системы **7**

3.1. Спектральные свойства линейной гамильтоновой системы 10

3.2. Устойчивость линейной автономной гамильтоновой системы 11

3.3. Линейная периодическая гамильтонова система 12

3.4. Спектральные свойства линейной периодической гамильтоновой системы 12

3.5. Устойчивость линейной периодичской гамильтоновой системы 13

3.6. Устойчивость линейных гамильтоновых автономных систем с малым параметром 13

3.7. Устойчивость линейных гамильтоновых периодических систем с малым параметром 14

4. Гамильтоновы системы и задача небесной механики **17**

4.1. Постановка 17

4.2. Точки либрации 18

5. Приложение: исследование устойчивости точек либрации задачи трех тел **19**

5.1. Задача трех тел как гамильтонова система 19

5.2. Линеаризированное уравнение задачи трех тел 21

5.3. Вопрос устойчивости линеаризированного уравнения 24

6. Заключение **35**

7. Список использованных источников и литературы **36**

1. Введение

В теории динамических систем особое место знанимают консервативные и гамильтоновы системы. Изучению таких систем посвящена обширная литература (см.., например,[1],[3],[12]). Значительная часть исследований относится к изучению вопросов устойчивости основных режимов системы, к изучению вопросов о зависимости решений от параметров, о бифуркациях в системе.

В настоящей дипломной работе изучаются неавтономные периодические гамильтоновы системы, зависящие от малого параметра. Рассматривается вопрос об устойчивости точек равновесия в критических случаях, когда система имеет мультипликаторы равные 1 или -1. Изучаются методы исследования соответствующих задач.

В качестве основного приложения рассматривается задача об устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел. Рассматривается ситуация, когда один из мультипликаторов задачи равен -1. Предлагается схема исследования задачи, получены формулы для касательных к границам областей устойчивости.

1053

2. Консервативные и гамильтоновы системы

2.1. Динамические системы

Приведем вводные сведения из общей теории динамических систем.

Определение 1. *Динамическими системами называют объекты, характеризующиеся несколькким набором величин $x_1, x_2, \dots x_n$ при чем эти величины зависят от времени t, то есть данные величины есть функции от времени $x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)$. Динамические системы чаще всего задаются уравнением вида:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in R^N \tag{1}$$

В теории динамических систем так же встречается описание динамических систем с помощью уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t), \tag{2}$$

где F-периодическая функция с периодом T.В общем случае функция F не зависит от времени. В данном случае мы получаем отображение $F : R^N \to R^N$.

Динамические системы бывают дискретными и непрерывными.

Определение 2. *Если система может менять свое состояние в любой момент времени, то такая система будет называться непрерывной; если же система меняет свое состояние в фиксированный момент времени, то система называется дискретной.*

В данной работе мы будем рассматривать системы, относящиеся к непрерывным динамическим системам. Поэтому следующие определения будут приведены для непрерывных динамических систем.

Определение 3. *Решением динамической системы называется функция, подставив которую в уравнение динамической системы, мы получим верное равенство.*

Определение 4. *Постоянное решение $x \equiv const$ называется точкой равновесия динамической системы.*

2.2. Устойчивость точек равновесия

Пусть дана система $x' = f(x)$, а x^*-точка равновесия этой системы, тогда матрица вида $A = f'(x^*)$ будет называться матрицей Якоби, а система $x' = Ax$-линеаризированнной.

Теорема 1. *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, то x^*- устойчивые точки равновесия. Если же хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную чать, то x^*- неустойчивые.*

2.3. Общее определение гамильтоновых систем

Приведем основное определение гамильтоновых систем.

Определение 5. *Пусть w(x)- непрерывно дифференцируемая скалярная функция векторного аргумента x, т. е. $w : R^N \to R$. Производной функции w(x) по направлению векторного поля f(x) называют скалярную функцию, вычисляемую в каждой точке x как скалярное произведение*

$$L_f w(x) = (w'(x), f(x)), \tag{3}$$

где $w'(x) = (\frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2})$.
Функция $w(x)$ называется первым интегралом системы (1), если $L_f w(x) \equiv 0$(5).

Конечно, любая постоянная функция $w(x) \equiv C$ является первым интегралом любой динамической системы. Поэтому интерес представляют только нетривиальные (непостоянные) первые интегралы.

Определение 6. *Динамическая система (1) является консервативной, если она имеет нетривиальный первый интеграл.*

Пример 1. *Покажем, что система*

$$\begin{cases} x_1' = -x_2, \\ x_2' = x_1. \end{cases}$$

консервативна.
Система имеет нетривиальный первый интеграл $v(x) = x_1^2 + x_2^2$, следовательно, она является консервативной.

1055

Определение 7. *Пусть N-четно. Пусть уравнение*

$$x' = f(x), \tag{4}$$

где $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *можно записать в виде*

$$(5) \begin{cases} u' = \frac{\partial U}{\partial v}, \\ v' = -\frac{\partial U}{\partial u}. \end{cases}$$

где $U = U(u, v)$*. Тогда уравнение (4) называется Гамильтоновой системой,а функция U- функцией Гамильтона или гамильтонианом.*

Пример 2. *Рассмотрим функцию* $U = v^2 + u^2$*. Построим по этой функции систему вида (5):*

$$\begin{cases} u' = 2v, \\ v' = -2u. \end{cases}$$

2.4. Свойства гамильтоновых систем

Свойство 1. *Функция* $U = U(u, v)$ *является первым интегралом гамильтоновой системы.*

Свойство 2. *Гамильтонова система является консервативной.*

2.5. Двумерные гамильтоновы системы

Рассмотрим еще один вид гамильтоновых систем. Пусть имеется дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' = F(x, t), y \in R, \tag{5*}$$

где $F(x, t)$ - непрерывно дифференциируемая по x и непрерывная по t функция. Возможно, что функция F не зависит, тогда уравнение будет являться консервативной системой с одной степенью свободы:

$$x'' = F(x), x \in R$$

1056

Сделаем замену $y_1 = x, y_2 = x'$ и приведем уравнение (5*) к системе вида:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = F(y_1, t). \end{cases}$$

Пусть $T(y_2) = \frac{(y_2)^2}{2}$, $U(y_1, t) = -\int\limits_{x_0}^{y_1} F(s,t)ds$, $G(y_1, y_2, t) = U(y_1, t) + T(x_2)$.
Видно, что функция $G(y_1, y_2, t)$ является функцией Гамильтона, тогда вышеприведенные система и уравнение (5*) будут являться гамильтоновыми.

2.6. Другое представление гамильтоновых систем

Гамильтоновы системы могут быть записаны в другом виде.

Пусть $x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, U'(x,t) = \begin{bmatrix} U_u' \\ U_v' \end{bmatrix}$ и $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}, U_u' = \begin{bmatrix} U_{u_1}' \\ . \\ . \\ . \\ U_{u_n}' \end{bmatrix}, U_v' = \begin{bmatrix} U_{v_1}' \\ . \\ . \\ . \\ U_{v_n}' \end{bmatrix}$

Тогда систему (5) можно переписать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = JU'(x,t), x \in R^{2N}, \qquad (5**)$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, I- единичная квадратная матрица.

3. Линейные гамильтоновы системы

Определение 8. *Если правая часть системы (5) линейная, то есть вида Ax, то гамильтонова система будет линейной.*

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$(6) \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Теорема 2. *Система (6) является Гамильтоновой тогда и только тогда, когда* $a_{11} + a_{22} = 0$.

1057

Доказательство.Необходимость. Пусть система (6) Гамильтонова, то есть $\exists G(x,y)$ такая, что

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \frac{\partial G}{\partial y}, \\ a_{21}x + a_{22}y = -\frac{\partial G}{\partial x}. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения

$\int \partial G = \int (a_{11}x + a_{12}y)\partial y$

$$G = a_{11}xy + a_{12}\frac{y^2}{2} + C(x) \tag{7}$$

Найдем $\frac{dG}{dx}$ и подставим во второе уравнение нашей системы:

$\frac{dG}{dx} = a_{11}y + c'(x)$

$a_{21}x + a_{22}y = -a_{11} - c'(x)$

Найдем из последнего уравнения $c(x)$.

$c(x) = -a_{11}yx - a_{21}\frac{x^2}{2} - a_{22}yx$

Подставим $c(x)$ в (7)

$$G = a_{12}\frac{y^2}{2} - a_{21}\frac{x^2}{2} - a_{22}yx \tag{8}$$

Найдем $\frac{dG}{dy}$ с учетом (8) и подставим в перове уравнение системы (6)

$\frac{dG}{dy} = a_{12}y - a_{22}x$

$a_{11}x + a_{12}y = a_{12}y - a_{22}x$

$a_{11}x + a_{22}x = 0$

$a_{11} + a_{22} = 0$

Таким образом необходимость доказана.

Доказательство.Достаточность. Пусть мы знаем, что $a_{11} + a_{22} = 0$. Нужно доказать, что $\exists G(x,y)$ - Гамильтонова.

$$a_{11} + a_{22} = 0 \tag{9}$$

Прибавим и отнимем в (9) $a_{12}y$:

$a_{11}x + a_{22}y + a_{12}y - a_{12}y = 0$

1058

Пусть $\frac{\partial G}{\partial y} = a_{11}x + a_{12}y$

Тогда

$$G = a_{11}xy + \frac{a_{12}y^2}{2} + c(x) \tag{10}$$

Прибавим и отнимем в (9) $a_{21}x$

$a_{11}x + a_{22}y + a_{21}x - a_{21}x = 0$

$a_{11}x + a_{21}x = -a_{22}y - a_{21}x = 0$

Пусть

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -a_{22}y - a_{21}x \tag{11}$$

Найдем в (10) $\frac{\partial G}{\partial x}$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = a_{11}y + c'(x) \tag{12}$$

Подставим (11) в (12) и перенесем все в одну сторону. Найдем $C(X)$:

$a_{11}y + c'(x) + a_{22}y + a_{21}x = 0$

$c'(x) - a_{21}x = -a_{11}y - a_{22}y$ ($a_{11} + a_{22} = 0$ из условия)

$C'(X) - A_{21}X = 0$

$c'(x) = a_{21}x$

$c(x) = \frac{a_{21}x^2}{2}$

Подставим найденный $C(X)$ в (10):

$G = a_{11}xy + \frac{a_{12}y^2}{2} + \frac{a_{21}x^2}{2}$

Найденная функция G является Гамильтоновой, так как удовлетворяет условию $a_{11} + a_{22} = 0$. Следовательно, достаточность доказана.

Таким образом, теорема 1 доказана в обе стороны.

Теорема 3. *Система*

$$\frac{dx}{dt} = Ax, x \in R^{2n} \tag{13}$$

является гамильтоновой тогда и только тогда, когда

$$A = JB, \tag{14}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *B-симметрическая матрица.*

Доказательство.Необходимость. Пусть система (13) гамильтонова, то есть

$$a_{11} + a_{22} = 0 \tag{9}$$

. Требуется доказать, что

$$A = JB \tag{14}$$

, то есть $B = J^{-1}A$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, B-симметрическая матрица.

$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$.

$B = J^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{21} & a_{11} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -a_{21} & a_{11} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}$- симметрическая матрица$\Longrightarrow$ необходимость доказана.

Доказательство.Достаточность Пусть

$$A = JB \tag{14}$$

, где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$. Нужно доказать, что система (13) является гамильтоновой.

Перепишем равенство (14) в матричном виде $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \\ -b_{11} & -b_{12} \end{pmatrix}$

Для обеих частей выполняется равенство (7), тогда система (11) является гамильтоновой по предыдущей теореме. Достаточность доказана.

3.1. Спектральные свойства линейной гамильтоновой системы

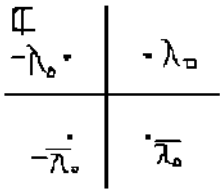
Определение 9. *Спектром линейной системы (6) называется множество всех собственных значений матрицы A.*

1060

Теорема 4. *Пусть*

$$x' = Ax \tag{15}$$

-гамильтонова система, то есть $A = JB$. Тогда, если λ_0- собственное значение матрицы A, то $-\lambda_0, \bar{\lambda}_0, -\bar{\lambda}_0$ так же являются собственными наченями матрицы A.



Доказательство. Найдем собственное значениеλ матрицы A, учитывая, что $a_{11}+a_{22} = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-(a_{11}^2 - \lambda^2) - a_{21}a_{12} = 0$

$-a_{11}^2 + \lambda^2 - a_{21}a_{12} = 0$

$\lambda^2 = a_{11}^2 + a_{21}a_{12}$

$\lambda = \pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}a_{12}}$, если $a_{11}^2 + a_{21}a_{12} \geq 0$ и $\lambda = \pm i\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}a_{12}}$, если $a_{11}^2 + a_{21}a_{12} < 0$

Пусть $\lambda_0 = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}a_{12}}$-известное собственное значение матрицы A, тогда из вышеприведенного видно, что существуют $-\lambda_0, \bar{\lambda}_0, -\bar{\lambda}_0$- собственные значения матрицы A. Теорема доказана.

3.2. Устойчивость линейной автономной гамильтоновой системы

Известно, что динамические систмеы могут быть устойчивыми, устойчивыми асимптотически и неустойчивыми, при этом для асимптотической устойчивости необходимо,чтобы все собственные значения располагались слево от мнимой оси, что невозможно для гамильтоновых систем. То есть гамильтоновые системы могут быть устойчивыми (но не асимптотически) и неустойчивыми.

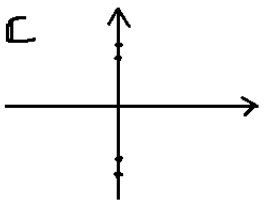


Рис. 1. Устойчивость

То есть, если все собственные значения расположены на комплексной оси, то система будет устойчивой. Если же хотя бы одно собственное значение находится не на комплексной оси, то система неустойчивая.Причем в обоих случаях собственные значения являются полупростыми.

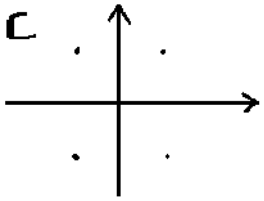


Рис. 2. Неустойчивость

3.3. Линейная периодическая гамильтонова система

Определение 10. *Линейной периодической гамильтоновой системой называется система вида*

$$x' = JB(t)x, \tag{16}$$

где $B(T+t) \equiv B(t)$, $B(t)$- *симметрическая матрица.*

3.4. Спектральные свойства линейной периодической гамильтоновой системы

Пусть $\mu_1\mu_2$-мультипликаторы системы (16). Тогда $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$.

Теорема 5. *Пусть* $\mu - 0$-*мультипликатор системы (16). Тогда числа* $\bar{\mu}_0, \frac{1}{\mu_0}, \frac{1}{\bar{\mu}_0}$ *также будут являться мультипликаторами системы (16).*

1062

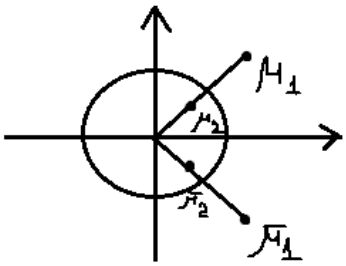


Рис. 3. Свойство спектра

3.5. Устойчивость линейной периодичской гамильтоновой системы

Как и в автономном случае, линейные периодические гамильтоновы системы могут устойчивыми (но не асимптотически) и неустойчивыми.

Теорема 6. *Если система (16) имеет мультипликатор $|\mu| \neq 1$, то система неустойчива.*

Теорема 7. *Если у системы (16) все мультипликаторы имеют вид $|\mu| = 1$-полупростые, то система является устойчивой. Если же хотя бы один из этих мультипликаторов неполупростой, то система неустойчива.*

3.6. Устойчивость линейных гамильтоновых автономных систем с малым параметром

Рассмотрим линейную гамильтонову систему $x' = (JA_0 + \varepsilon A_1)x$. Тогда, если матрица JA_0 имеет собственные значения с ненулевой вещественной частью, то система $x' = JA_0x$ будет неустойчивой, но если ε мало, то и система $x' = (JA_0 + \varepsilon A_1)x$ также будет неустойчивой.

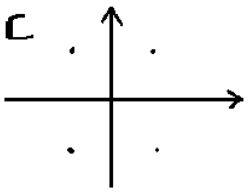


Рис. 4. Неустойчивая

1063

Если же матрица JA_0 имеет собственные значения на мнимой оси и эти собственные значения являются кратными, то малая добавка εA_1 может привести к тому, что собственные значения матрицы $(JA_0+\varepsilon A_1)$ "уйдут"с мнимой оси и система станет неустойчивой.(смотри рисунок 5)

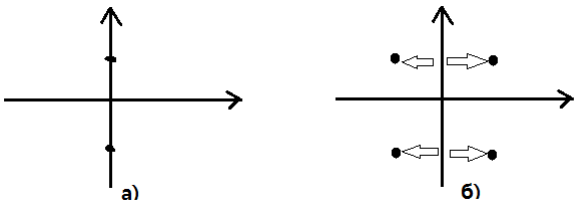


Рис. 5.

3.7. Устойчивость линейных гамильтоновых периодических систем с малым параметром

Рассмотрим теперь линейную гамильтонову периодическую систему вида

$$x' = (JA_0 + \varepsilon JS_1(t))x, \tag{20}$$

где A_0-постоянная матрица, $S_1(t+T) \equiv S_1(t)$, ε-малый параметр.
Если $\varepsilon = 0$, то система примет вид

$$x' = JA_0x \tag{21}$$

В общем случае собственные значения будут располагаться, как на следующем рисунке.

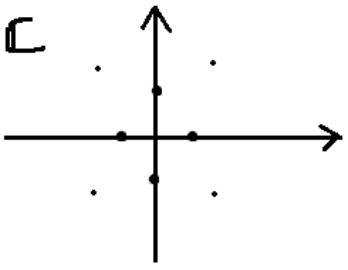


Рис. 6. Общий случай

Если матрица JA_0 имеет собственные значения с ненулевой вещественной частью, то вопрос устойчивости будет рассматриваться так же, как в предыдущем пунк-

те. При устойчивом случае собственные значения будут располагаться как на рисунке 9, при чем собственные значения будут чисто мнимыми и обязательно простыми.

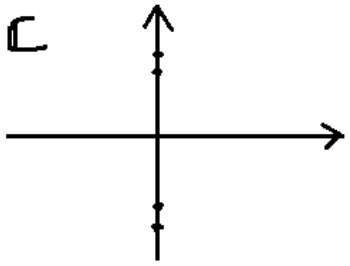


Рис. 7. Устойчивый случай

Если же матрица JA_0 имеет собственные значения на мнимой оси, то случай будет критическим. Здесь нужно строить мультипликаторы системы (20).

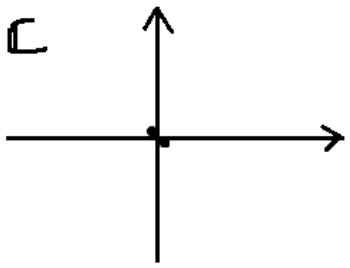


Рис. 8. Критический случай 1

Вторым критическим случаем будет являться случай, когда чисто мнимые собственные значения не будут являться простыми, то есть будут как минимум иметь кратность 2.

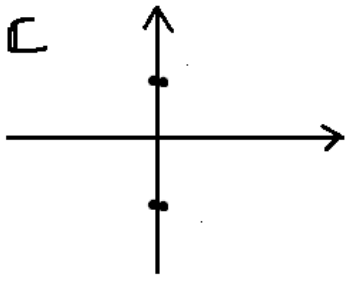


Рис. 9. Критический случай 2

Вопрос же об устойчивости ситсмеы (20) при малых ε более сложный и требует особого внимания.

Рассмотрим случай, когда матрица JA_0 имеет собственные значения $\pm\omega_0 i$. Тогда система (21) имеет мультипликаторы $e^{\pm\omega_0 iT}$, то есть мультипликаторы связаны с собственными значениями равенством $\mu = e^{\lambda T}$. Мультипликаторы рассматриваются на единичной окружности.

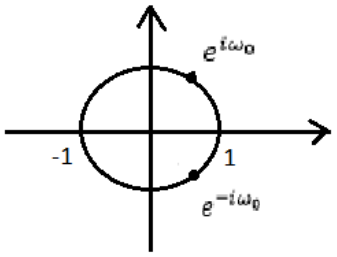


Рис. 10.

Возможны 3 случая:

1) собственные значения $\pm\omega_0 i$ являются прстыми, причем $\omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$

2) собственные значения $\pm\omega_0 i$ являются простыми

3)собственные значения $\pm\omega_0 i$ являются простыми, но $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при некотором k_0 (резонанастный случай).

В случае 1) мультипликаторы $e^{\pm\omega_0 iT}$ будет простым и не равным ± 1. Здесь система (20) устойчива.

В случаях 2) и 3) система (20) может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

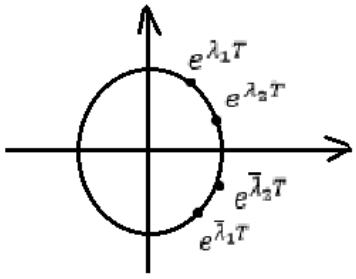


Рис. 11. Устойчивость

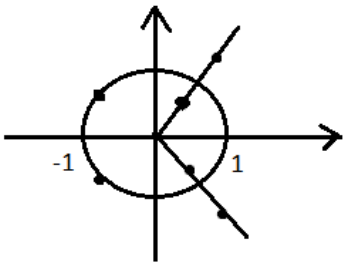


Рис. 12. Неустойчивость

Через $V(\varepsilon)$ обозначим матрицу монодромии системы (2). Она будет иметь вид:
$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2/2! + ... + \varepsilon^k V_k/k! + O(\varepsilon^{k+1})$
где $V_1 = V'(0), V_2 = \frac{V''(0)}{2!}, ..., V_k = \frac{V_k^{(k)}}{k!}$.
Тогда $V_0 = en^{JA_0T}$, $V_1 = e^{JA_0T}\int_0^T e^{-JA_0t}S_1(t)\varepsilon^{JA_0T}dt, V_2 = e^{JA_0T}\int_0^T e^{-JA_0t}(S_2(t)e^{JA_0T} + 2S_1(t)X_1(t))dt$ и так далее.
Критический случай на рисунке 14 возможен в 2-х случаях:
1.Система имеет полупростой мультипликатор $\mu_0 = 1$ или $\mu_0 = -1$ кратности 2.
2.Система имеет неполупростой мультипликатор $\mu_0 = 1$ или $\mu_0 = -1$ кратности 2.
Поэтому для начала рассмотрим равнение $e^{\lambda T} = 1$ и $e^{\lambda T} = -1$.
Решениями первого уравнения будут числа: $\lambda = 0, \pm\frac{2\pi i}{T}, \pm\frac{4\pi i}{T}, ..., \pm\frac{2\pi ki}{T}, ...$, а решениями второго уравнения являются числа: $\lambda = \pm\frac{\pi i}{T}, \pm\frac{3\pi i}{T}, ..., \pm\frac{(2k+1)\pi i}{T}, ...$
Таким образом наш критический случай будет называться резонансным. Именно его мы будем далее рассматривать.

4. Гамильтоновы системы и задача небесной механики

4.1. Постановка

Среди различных областей науки, где теория гамильтоновых систем и ее методы находят себе применение, небесная механика занимает особое место. Многие столетия ее задачи служат полигоном, на котором математики испытывают различные методы исследования. В небесной механике рассматривается огромное многообразие различных динамических моделей, описывающих движение материальных точек. В данной работе мы обратимся к задаче трех тел или плоской эллиптической задаче.

1067

Рассмотрим уравнения движения, описанное системой вида

$$(23)\begin{cases}\xi'' - 2\eta' = \frac{1}{1+ecos\nu}\frac{d\Omega}{d\xi},\\ \eta'' + 2\xi' = \frac{1}{1+ecos\nu}\frac{d\Omega}{d\eta},\end{cases}$$

где $\Omega = \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) + W$, $W = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}(0 < \mu \leq \frac{1}{2})$,
$r_1 = \sqrt{(\xi+\mu)^2+\eta^2}, r_2 = \sqrt{(\xi+\mu-1)^2+\eta^2}$.

И рассмотрим плоскую эллиптическую задачу в координатах Нехвилла:

$$(24)\begin{cases}\xi'' - 2\eta' = \rho(\xi - \mu + \frac{\mu-1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\xi - \frac{\mu}{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{3/2}}(\xi-1)),\\ \eta'' + 2\xi' = \rho(\eta + \frac{\mu+1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\xi - \frac{\mu}{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{3/2}}\eta).\end{cases}$$

здесь $\rho = \frac{1}{1+\varepsilon cos\nu}, \mu = \frac{m_1}{m_0+m_1}$.

Покажем, что система (23) это и есть система (24)

Пусть в системе (23) $e = \varepsilon, \nu = t$, то есть система примет вид

$$\xi'' - 2\eta' = \frac{1}{1+\varepsilon cost}\frac{d\Omega}{d\xi}, \eta'' + 2\xi' = \frac{1}{1+\varepsilon cost}\frac{d\Omega}{d\eta} \qquad (23')$$

Лемма 1. *Если произвести замену $x = \xi + \mu, y = \eta$ в полученной системе (23'), то система (23) придет к виду (24).*

Доказательство $\Omega = \frac{1}{2}((x-\mu)^2+y^2) + \frac{1-\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$.
Найдем частные производные $\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{d\Omega}{dx}$ и $\frac{d\Omega}{d\eta} = \frac{d\Omega}{dy}$.
$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{x(\mu-1)}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(x-1)\mu}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}} + x - \mu$
$\frac{d\Omega}{dy} = \frac{y(\mu-1)}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{y\mu}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}} + y$
Таким образом система (23) запишется в виде

$$(23'')\begin{cases}\xi'' - 2\eta' = \rho\frac{x(\mu-1)}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(x-1)\mu}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}} + x - \mu,\\ \eta'' + 2\xi' = \rho\frac{y(\mu-1)}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(y\mu}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}} + y,\end{cases}$$

где $\rho = \frac{1}{1+\varepsilon cost}, \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}(0 < \mu \leq \frac{1}{2})$. Отсюда видно, что система (23) и система (24) совпадают. Рассмотрим токи либрации систем (23) и (24).

4.2. Точки либрации

Определение 11. *Точки либрации-это постоянные решения систем (23) и (24), то есть это их точки равновесия.*

1068

Известно, что система (23) имеет точки либрации с координатами $L_4 = (\frac{1-2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), L_5 = (\frac{1-2\mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, а система (24) имеет точки либрации $L_4 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), L_5 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.Проверим, действительно ли L_4, L_5 являются точками либрации системы (23).

Проверим, действительно ли L_4, L_5 являются точками либрации системы (23). Для этого найдем частные производные $\frac{d\Omega}{d\xi}, \frac{d\Omega}{d\eta}$.

$\frac{d\Omega}{d\xi} = \xi - \frac{\mu(\mu+\xi-1)}{[(\mu+\xi-1)^2+\eta^2]^{3/2}} - \frac{(1-\mu)(\mu+\xi)}{[(\mu+\xi)^2+\eta^2]^{3/2}}$

$\frac{d\Omega}{d\eta} = \eta - \frac{\mu\eta}{[(\mu+\xi-1)^2+\eta^2]^{3/2}} - \frac{\eta(1-\mu)}{[(\mu+\xi)^2+\eta^2]^{3/2}}$

Далее подставим координаты точк либрации в систему (23). Видно, что в левой части системы получается 0 в обоих уравнениях. То есть, чтобы L_4, L_5 были точками либрации необходимо, чтобы частные производные $\frac{d\Omega}{d\xi}, \frac{d\Omega}{d\eta}$ в этих точах равнялись так же нулю.

$\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{1-2\mu}{2} - \frac{\mu(\mu+\frac{1-2\mu}{2}-1)}{[(\mu+\frac{1-2\mu}{2}-1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^{3/2}} - \frac{(1-\mu)(\mu+\frac{1-2\mu}{2})}{[(\mu+\frac{1-2\mu}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^{3/2}} = \frac{1-2\mu}{2} - \frac{\mu(2\mu+1-2\mu-2)}{2[(\frac{2\mu+1-2\mu-2}{2})^2+\frac{3}{4}]^{3/2}} - \frac{\mu+\frac{1-2\mu}{2}-\mu^2-\frac{\mu-2\mu^2}{2})}{[(\frac{2\mu+1-2\mu}{2})^2+\frac{3}{4}]^{3/2}} = \frac{1-2\mu}{2} + \frac{\mu}{2(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})^{3/2}} - \frac{2\mu+1-2\mu-2\mu^2-\mu+2\mu^2}{2(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})^{3/2}} = \frac{1-2\mu}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1-\mu}{2} = \frac{1-2\mu+\mu-1+\mu}{2} = 0$

$\frac{d\Omega}{d\eta} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu\frac{\sqrt{3}}{2}}{[(\mu+\frac{1-2\mu}{2}-1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^{3/2}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mu)}{[(\mu+\frac{1-2\mu}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu\sqrt{3}}{2[(\frac{2\mu+1-2\mu-2}{2})^2+\frac{3}{4}]^{3/2}} - \frac{\sqrt{3}-\mu\sqrt{3}}{2[(\frac{2\mu+1-2\mu}{2})^2+\frac{3}{4}]^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu\sqrt{3}}{2[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}]^{3/2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\mu}{2[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}]^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-\mu\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\mu\sqrt{3}-\sqrt{3}+\mu\sqrt{3}}{2} = 0$

Таким образом, так как $\frac{d\Omega}{d\xi} = 0$ и $\frac{d\Omega}{d\eta} = 0$, то L_4, L_5 действительно являются точками либрации системы (23).

Лемма 2. *Замена $x = \xi + \mu, y = \eta$ переводит точки либрации системы (23) в точки либрации системы (24).*

5. Приложение: исследование устойчивости точек либрации задачи трех тел

5.1. Задача трех тел как гамильтонова система

Покажем, что система (23) является гамильтоновой. Для этого в системе (23) произведем замену

$$x_1 = \xi, x_2 = \eta, x_3 = \xi' - \eta, x_4 = \eta' + \xi \tag{25}$$

1069

. Перепишем систему в виде $\xi' = \eta + \xi' - \eta, \eta' = -\xi + \eta' + \xi, \xi'' - 2\eta' = -\xi + \xi + \rho\frac{d\Omega}{d\xi}, \eta'' + 2\xi' = -\eta + \eta + \rho\frac{d\Omega}{d\eta}$. Используя замену (25) получим:

$$(26)\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = -x_1 + x_4, \\ x_3' = -x_1 + x_4 + r\frac{d\Omega}{dx_1}, \\ x_4' = -x_2 - x_3 + r\frac{d\Omega}{dx_2}, \end{cases}$$

где $\Omega = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + W$, $W = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, r_1 = \sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}, r_2 = \sqrt{(x_1+\mu-1)^2 + x_2^2}$.

Определение 12. *Гамильтоновой системой четвертого порядка называется система вида:*

$$(27)\begin{cases} x_1' = \frac{dH}{dx_3}, \\ x_2' = \frac{dH}{dx_4}, \\ x_3' = -\frac{dH}{dx_1}, \\ x_4' = -\frac{dH}{dx_2}, \end{cases}$$

где $H(x_1, x_2, x_3, x_4)$- функция Гамильтона.

Для системы (26) в качестве функция Гамильтона возьмем функцию

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1^3 + x_4^2}{2} + x_2x_3 - x_1x_4 - \rho\Omega(x_1, x_2) \qquad (28)$$

.

Лемма 3. *Функция (28) является функцией Гамильтона системы (26).*

Доказательство Для доказательства леммы подставим функцию (28) в правую часть системы (27). Для этого вычислим сначалачастные производные.

$\frac{dH}{dx_1} = x_1 - x_4 - r\frac{d\Omega}{dx_1}$

$\frac{dH}{dx_2} = x_2 + x_3 - r\frac{d\Omega}{dx_2}$

$\frac{dH}{dx_1} = x_3 + x_2$

$\frac{dH}{dx_1} = x_4 - x_1$

Полученные производные подставим в систему (27) и в результате получим систему

1070

(26):

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = -x_1 + x_4, \\ x_3' = -x_1 + x_4 + r\frac{d\Omega}{dx_1}, \\ x_4' = -x_2 - x_3 + r\frac{d\Omega}{dx_2}, \end{cases}$$

Таким образом, видно, что функция (28) является функцией Гамильтона для системы (26). Запишем систему (26) в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = -x_1 + x_4, \\ x_3' = -x_1 + x_4 + r(x_1 - \frac{(1-\mu)(\mu+x_1)}{[(\mu+x_1)^2+x_2^2]^{3/2}} - \frac{\mu(\mu+x_1-1)}{[(\mu+x_1-1)^2+x_2^2]^{3/2}}), \\ x_4' = -x_2 - x_3 + r(x_2 - \frac{x_2(1-\mu)}{[(\mu+x_1)^2+x_2^2]^{3/2}} - \frac{\mu x_2}{[(\mu+x_1-1)^2+x_2^2]^{3/2}}), \end{cases}$$

или

$$(29) \begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = -x_1 + x_4, \\ x_3' = -x_1 + x_4 + r(x_1 - \frac{(1-\mu)(\mu+x_1)}{a_1^{3/2}} - \frac{\mu(\mu+x_1-1)}{a_2^{3/2}}), \\ x_4' = -x_2 - x_3 + r(x_2 - \frac{x_2(1-\mu)}{a_1^{3/2}} - \frac{\mu x_2}{a_2^{3/2}}), \end{cases}$$

где $a_1 = (\mu + x_1)^2 + x_2^2, a_2 = (\mu + x_1 - 1)^2 + x_2^2$ Аналогичная система для системы (24) имеет вид:

$$(30) \begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 + \mu + y_4, \\ y_3' = -y_1 + \mu + y_4 + r(y_1 - \mu - \frac{(1-\mu)y_1}{b_1^{3/2}} - \frac{\mu(y_1-1)}{b_2^{3/2}}), \\ y_4' = -y_2 - y_3 + r(y_2 - \frac{y_2(1-\mu)}{b_1^{3/2}} - \frac{\mu y_2}{b_2^{3/2}}), \end{cases}$$

где $b_1 = y_1^2 + y_2^2, b_2 = (y_1 - 1)^2 + y_2^2$. При этом замена $y_1 = x_1 + \mu, y_2 = x_2, y_3 = x_3, y_4 = x_4$ связывает системы (29) и (30).

5.2. Линеаризированное уравнение задачи трех тел

Система (29) имеет треугольные точки либрации вида: $L_{4,5} = (\frac{1-2\mu}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\mu}{2})$,а система (30) имеет треугольные точки либрации вида $L_{4,5} = (\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\mu}{2})$. Най-

дем линеаризированнное уравнения в точке $L_4 = (\frac{1-2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\mu}{2})$ системы (29). Для этого построим матрицу Якоби в точке либрации L_4. Она будет иметь вид:

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4+3\frac{1}{1+\varepsilon cost}}{4} & \frac{3\sqrt{3}\frac{1}{1+\varepsilon cost}-6\sqrt{3}\mu\frac{1}{1+\varepsilon cost}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}\frac{1}{1+\varepsilon cost}-6\sqrt{3}\mu\frac{1}{1+\varepsilon cost}}{4} & \frac{9\frac{1}{1+\varepsilon cost}-4}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4+3\rho}{4} & \frac{3\sqrt{3}\rho-6\sqrt{3}\mu\rho}{4} & 0 & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}\rho-6\sqrt{3}\mu\rho}{4} & \frac{9\rho-4}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где $\rho = r = \frac{1}{1+\varepsilon cost}$.

Таким образом, линеаризированное урвнение в точке L_4 будет иметь вид

$$\frac{dh}{dt} = JA(t, \varepsilon, \mu)h, \tag{32}$$

где матрица A имеет вид (31).

Так же найдем линеаризированное уравнение в точке либрации $L_4 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\mu}{2})$ для системы (30). Построим матрицу Якоби в точке L_4:

$$JB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4+3\frac{1}{1+\varepsilon cost}}{4} & \frac{-6\sqrt{3}\frac{1}{1+\varepsilon cost}\mu+3\frac{1}{1+\varepsilon cost}\sqrt{3}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{-6\frac{1}{1+\varepsilon cost}\sqrt{3}\mu+3\frac{1}{1+\varepsilon cost}\sqrt{3}}{4} & \frac{9\frac{1}{1+\varepsilon cost}-12\mu-4}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$JB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4+3\rho}{4} & \frac{-6\rho\sqrt{3}\mu+3\rho\sqrt{3}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{-6\rho\sqrt{3}\mu+3\rho\sqrt{3}}{4} & \frac{9\rho-4}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где $\rho = r = \frac{1}{1+\varepsilon cost}$.

Линеаризированное уравнение системы (30) в точке L_4 будет иметь вид:

$$\frac{dh}{dt} = JB(t, \varepsilon, \mu)h, \tag{34}$$

где матрица B имеет вид (32). Проверим, будут ли полученные матрицы A и B гамильтоновыми. В этом нам поможет привиденная ниже лемма.

1072

Лемма 4. *Матрица $D(t)$ порядка $2N \times 2N$ будет гамильтоновой если и только если она представима в виде:*

$$D(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ D_3(t) & -(D_1(t))^T \end{pmatrix},$$

где $D_j(t)$-матрицы порядка $N \times N$, $(D_1(t))^T$-транспонированная матрица, а $D_2(t)$ и $D_3(t)$- симметрические.

Проверим с помощью леммы 4, являются ли матрицы A и B гамильтоновыми.

Матрицу A запишем в виде:

$$JA(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & -(A_1(t))^T \end{pmatrix},$$

где $A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{-7+4\rho+6\mu}{4} & \frac{3\sqrt{3}\rho-6\sqrt{3}\mu\rho}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}\rho-6\sqrt{3}\mu\rho}{4} & \frac{9\rho-4}{4} \end{pmatrix}$,

$A_4(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицы $A_j(t)$ имеют порядок 2 на 2, $A_2(t)A_3(t)$-симметрические.

Осталось проверить действительно ли $A_4(t) = -(A_1(t))^T$.

$A_1(t)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -(A_1(t))^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A_4(t).$

То есть мтрица A удовлетворяет условиям леммы 4, а следовательно матрица A- гамильтонова.

То же самое проделаем для матрицы B:

$$JB(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ B_3(t) & -(B_1(t))^T \end{pmatrix},$$

где $B_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{-4+3\rho}{4} & \frac{-6\sqrt{3}\mu+3\rho\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-6\rho\sqrt{3}\mu+3\rho\sqrt{3}}{4} & \frac{9\rho-12\mu-4}{4} \end{pmatrix}$,

$B_4(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицы $B_j(t)$ имеют порядок 2 на 2, $B_2(t)B_3(t)$-симметрические.Проверим, равна ли матрица $B_4(t)$ матрице $-(B_1(t))^T$.

$B_1(t)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -(B_1(t))^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B_4(t).$

Условия леммы 4 выполнены, следовательно, матрица B- гамильтонова.

1073

5.3. Вопрос устойчивости линеаризированного уравнения

Для простоты начнем изучение устойчивости, когда в матрице (31) $\varepsilon = 0, \rho = 1$, тогда получим матрицу вида:

$$A_0(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} & 0 & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

Построим характеристическое уравнение для полученной матрицы (35).

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} & -\lambda & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} & -\lambda & 1 \\ \frac{5}{4} & -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{4} & -\lambda & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} & -1 & -\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -1 & -\lambda & 1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} & \frac{5}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda^3 - \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} - \lambda \cdot \frac{5}{4} - \lambda) - (-\lambda^2 - \frac{1}{4} + \lambda\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} -$$

$$-1) + \lambda\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} - \frac{5}{16} - \lambda\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} - (\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4})^2 + \lambda^2 \cdot \frac{5}{4} = \lambda^4 + \lambda\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} + \lambda^2 \cdot \frac{5}{4} + \lambda^2 + \lambda^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} - \lambda\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} + 1 + \lambda\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} - \frac{5}{16} - \lambda\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4} - (\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu}{4})^2 + \lambda^2 \cdot \frac{5}{4} = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$$

То есть характеристическое уравнение для системы (35) будет иметь вид:

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \tag{36}$$

В данном случае система будет зависеть от трех переменных, то есть

$$x' = A(t, \varepsilon, \mu)x, x \in R^N \tag{37}$$

$A_0(\mu) = a(t, 0, \mu)$.

Через $V(\varepsilon)$ обозначим матрицу монодрамии системы (37). Тогда $V(0) = e^{A_0(\mu)\cdot 2\pi}$.

Критический случай в задаче об устойчивости системы (36)- это случай, когда $V(0)$ имеет собственные значения 1 или -1. А это возможно тогда и только тогда, когда$A_0(\mu)$ имеет собственные значения $\lambda_0 = \pm i$ или $\lambda_0 = \pm\frac{i}{2}$, так как $e^{\lambda_0 2\pi} = e^{\pm i2\pi} = 1$ или $e^{\lambda_0 2\pi} = e^{\pm i2\pi} = -1$.Поэтому надо выяснить, когда уравнение (36) имеет корни $\lambda_0 = \pm i$ или $\lambda_0 = \pm\frac{i}{2}$.Для этого решим характеристическое уравнение (34).

Для начала сделаем замену $k = \lambda^2$.Уравнение примет вид:

$k^2 + k + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0$

$D = 1 - 4 \cdot \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 1 - 27\mu(1-\mu)$

$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2}$

Вернемся к замене $\lambda^2 = k$

$\lambda_1^2 = \frac{-1+\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2}$ и $\lambda_2^2 = \frac{-1-\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2}$

$\lambda_1 = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2}}$ и $\lambda_2 = \pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2}}$

Но нам нужно, чтобы $\lambda_{1,2} = \pm i$ или $\lambda_{1,2} = \pm\frac{i}{2}$. Поэтому нужно выяснить, при каких μ это будет выполняться.

Вариант, когда $\lambda_{1,2} = \pm i$ невозможен ни при каких μ, так как решением уравнений $\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2}} = \pm i$ и $\pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2}} = \pm i$ будет пустое множество, то есть таких решений нет.

Проверим второй вариант, когда $\lambda_{1,2} = \pm\frac{i}{2}$.

$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2}} = \frac{i}{2}$

$\frac{-1+\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}{2} = -\frac{1}{4}$

$-1 + \sqrt{1 - 27\mu + 27\mu^2} = -\frac{1}{2}$

$\sqrt{1 - 27\mu + 27\mu^2} = \frac{1}{2}$

$1 - 27\mu + 27\mu^2 = \frac{1}{4}$

$27\mu^2 - 27\mu + \frac{3}{4} = 0$

$D = 729 - 81 = 648 = 18\sqrt{2}$

$\mu_{1,2} = \frac{27 \pm 18\sqrt{2}}{54} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$

Таким образом, $\lambda_{1,2} = \pm\frac{i}{2}$ тогда и только тогда, когда $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Теперь для матрицы $A_0 = A_0(\mu_0)$, где $\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$, с собственными значениями $\lambda_0 = \pm\frac{i}{2}$ найдем собственные вектора. Сделать это нужно в соответсвии с равенствами:

$$A_0(e + ig) = \frac{i}{2}(e + ig) \tag{38}$$

$$A_0^*(e^* + ig^*) = -\frac{i}{2}(e^* + ig^*) \tag{38'}$$

Найденными собственными векторами мы воспользуемся, когда будем непосредственно изучать устойчивость системы (23). Пусть для простоты $e + ig = w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$, тогда равенство (36) примет вид:

1075

$$A_0 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}, \text{ где } A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} w_2 + w_3 = \frac{i}{2} w_1, \\ -w_1 + w_4 = \frac{i}{2} w_2, \\ -\frac{w_1}{4} + \frac{\sqrt{1} w_2}{2} + w_4 = \frac{i}{2} w_3, \\ \frac{\sqrt{6} w_1}{2} + \frac{5 w_2}{4} - w_3 = \frac{i}{2} w_4, \end{cases}$$

Нужно решить полученную систему уравнений и найти сосбственный вектор.

Из первого уравнения получаем $w_2 = \frac{i}{2} w_1 - w_3$ и подставим это выражение во второе уравнение системы. Таким образом из второго уравнение получаем $w_4 = \frac{3w_1}{4} - \frac{iw_3}{2}$. Далее подставим полученные выражения в третье уравнение системы и в результате получим: $w_3 = \frac{(i+2\sqrt{6})w_1}{10}$. Подставим выраженное w_3 в привиденные выше выражения и получим $w_2 = \frac{2iw_1}{5} - \frac{\sqrt{6}w_1}{5}, w_4 = \frac{4w_1}{5} - \frac{iw_1\sqrt{6}}{10}$.

Таким образом все w_i выражаются через w_1, поэтому возьмем $w_1 = 5$, тогда получим вектор $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2i - \sqrt{6} \\ \frac{i}{2} + \sqrt{6} \\ 4 - \frac{i\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$.

То есть собственное значение матрицы $A_0(\mu_0)$ это $e + ig = \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$.

Лемма 5. *Пусть $e + ig$ ненулевой вектор, удовлетворяющий равенству (38). Тогда $(e, Jg) \neq 0$, при этом набор векторов*

$$e, g, e^* = vJg, g^* = -vJe, v = \frac{1}{(e, Jg)} \tag{39}$$

удовлетворяет соотношениям (38),(38') и условиям нормировки $(e, e^*) = 1, (e, g^*) = 0$.

С помощью леммы 5 найдем собственный вектор $e^* + ig^*$.

$$Jg = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$(e, Jg) = 5 \cdot \frac{1}{2} + (-\sqrt{6}) \cdot -\frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6} \cdot 0 + 4 \cdot (-2) = \frac{5}{2} + \frac{6}{2} - 8 = -\frac{5}{2}$

$v = 1 : (-\frac{5}{2}) = -\frac{2}{5}$

$$e^* = vJg = -\frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{\sqrt{6}}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Проверим, удовлетворяет ли полученный вектор e^* условию $(e, e^*) = 1$.

$$(e, e^*) = \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{\sqrt{6}}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = -1 - \frac{6}{5} + 0 + \frac{16}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Теперь найдем $g*$ с помощью равенства $g^* = -vJe$.

$$g^* = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 4 \\ -5 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{5} \\ \frac{8}{5} \\ -2 \\ \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{pmatrix}$$

Проведем проверку условия $(e, g^*) = 0$

$$(e, g^*) = \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{5} \\ \frac{8}{5} \\ -2 \\ \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{pmatrix} = 2\sqrt{6} - \frac{8\sqrt{6}}{5} - 2\sqrt{6} + \frac{8\sqrt{6}}{5} = 0$$

Далее, для простоты, будем рассматривать только матрицу (31) и соответствующее ей уравнение (32).

Подставим в матрицу (35) найденный выше $\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$ и получим:

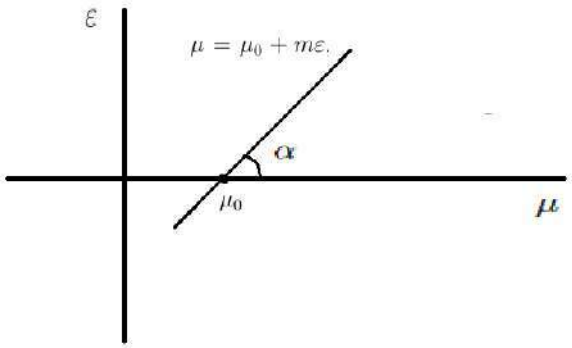
$$A_0(\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

1077

Рассмотрим прямую

$$\mu = \mu_0 + m\varepsilon, \tag{41}$$

где m-коэффициент. Тогда $tg\alpha = \frac{1}{m}$ (если $m \neq 0$), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (если $m = 0$).



Подставим уравнение (41) в матрицу (31):

$$A(t,\varepsilon,\mu_o+m\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4+3\cdot\frac{1}{1+\varepsilon cost}}{4} & \frac{3\sqrt{3}\frac{1}{1+\varepsilon cost}-6\sqrt{3}(\mu_o+m\varepsilon)\frac{1}{1+\varepsilon cost}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{3\sqrt{3}\frac{1}{1+\varepsilon cost}-6\sqrt{3}(\mu_o+m\varepsilon)\frac{1}{1+\varepsilon cost}}{4} & \frac{9\cdot\frac{1}{1+\varepsilon cost}-4}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

По формуле Тэйлора: $f(\varepsilon) = f(0) + f'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Считая, что $f(\varepsilon) = A(t,\varepsilon,\mu_o+m\varepsilon)$, получим

$A(t,\varepsilon,\mu_o+m\varepsilon) = A(t,0,\mu_0)+\varepsilon[A'_\varepsilon(t,0,\mu_0)+m\cdot A'_\mu(t,0,\mu_0)]+O(\varepsilon^2) = A_0(\mu_0)+\varepsilon[A'_\varepsilon(t,0,\mu_0)+ m\cdot A'_\mu(t,0,\mu_0)]+O(\varepsilon^2)$, где $A_0(\mu_0)$ это матрица (40).

$$A'_\varepsilon(t,0,\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3cost}{4} & \frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost}{4} & -\frac{9cost}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} = -cost \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu_0}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\mu_0}{4} & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'_\mu(t,0,\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $Q(t) = A'_\varepsilon(t,0,\mu_0) + m\cdot A'_\mu(t,0,\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3cost}{4} & \frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost}{4} & -\frac{9cost}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} +$

1078

$$+ m \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3cost}{4} & \frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & -\frac{9cost}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда система (32) будет иметь вид

$$\frac{dh}{dt} = (A_0(\mu_0) + \varepsilon \cdot Q(t) + O(\varepsilon^2))h \tag{42}$$

Перепишем матрицу (40) в виде $A_0(\mu_0) = JB_0 \Rightarrow B_0 = J^{-1}A_0(\mu_0)$.

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

То есть $A_0(\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Найдем матрицу $S(t, \varepsilon)$. $\varepsilon Q(t) = JS(t, \varepsilon) \Rightarrow S(t, \varepsilon) = \varepsilon J^{-1} Q(t)$

$$S(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3cost}{4} & \frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & -\frac{9cost}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3\varepsilon cost}{4} & -\frac{(3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3})\varepsilon}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{(3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3})\varepsilon}{4} & \frac{9\varepsilon cost}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда система (32) перепишется в виде

$$\frac{dh}{dt} = J(B_0 + S(t, \varepsilon))h, \tag{43}$$

Наша система имеет случай, когда матрица имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$.В нашем случае $\omega_0 = \frac{1}{2}, k_0 = 2, T = 2\pi$.

Построим матрицу вида: $B = \begin{bmatrix} (V_1 e, e^*) & (V_1 g, e^*) \\ (V_1 e, g^*) & (V_1 g, g^*) \end{bmatrix}$. Изучая эту матрицу, мы и сможем ответить на вопрос устойчивости системы (23). Векторы матрицы e, e^*, g, g^* были

1079

найдены выше, матрица $S(t) = \begin{pmatrix} \frac{3cost}{4} & -\frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & \frac{9cost}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а компоненты матрицы вычисляются по следующим формулам:

$$(V_1e, e^*) = -(V_1g, g^*) = \mu_0 v \int\limits_0^T [cos(2\omega_0 t)(S(t)e, g) - \tfrac{1}{2} sin(2\omega_0 t)[(S(t)g, g) - (S(t)e, e)]]dt$$

$$(V_1g, e^*) = \mu_0 v \int\limits_0^T [cos^2(\omega_0 t)(S(t)g, g) + sin^2(\omega_0 t)(S(t)e, e) + sin(2\omega_0 t)(S(t)e, g)]dt$$

$$(V_1e, g^*) = (V_1g, e^*) - \mu_0 v \int\limits_0^T [(S(t)e, e) - (S(t)g, g)]dt$$

$$S(t)\cdot g = \begin{pmatrix} \frac{3cost}{4} & -\frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & \frac{9cost}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{2} \\ \frac{9cost}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S(t)\cdot e = \begin{pmatrix} \frac{3cost}{4} & -\frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{4} & \frac{9cost}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{15cost+9\sqrt{2}(2\mu_0-1)cost-18m\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-5\cdot(3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3})-9\sqrt{6}cost}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(S(t)g, g) = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3}}{2} \\ \frac{9cost}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} = 0 + 9cost + 0 + 0 = 9cost$$

$$(S(t)e, e) = \begin{pmatrix} \frac{15cost+9\sqrt{2}(2\mu_0-1)cost-18m\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-5\cdot(3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3})-9\sqrt{6}cost}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot \frac{15cost+9\sqrt{2}(2\mu_0-1)cost-18m\sqrt{2}}{4} +$$

$$+\sqrt{6}\cdot\frac{5\cdot(3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3})+9\sqrt{6}cost}{4} = \frac{75cost+45\sqrt{2}(2\mu_0-1)cost-90m\sqrt{2}+5\sqrt{6}(3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3})+54cost}{4} =$$

$$= \frac{129cost+90\sqrt{2}(2\mu_0-1)cost-180m\sqrt{2}}{4}$$

1080

$$(S(t)e,g)=\begin{pmatrix}\frac{15cost+9\sqrt{2}(2\mu_0-1)cost-18m\sqrt{2}}{4}\\ \frac{-5\cdot(3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3})-9\sqrt{6}cost}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}=\frac{-5\cdot(3\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost-6m\sqrt{3})-9\sqrt{6}cost}{2}=$$
$$=\frac{-15\sqrt{3}(2\mu_0-1)cost+30m\sqrt{3}-9\sqrt{6}cost}{2}$$

Здесь $\mu_0=-1$. Для удобства вычислений воспользуемся вспомогательной программой Maple. В привиденных ниже вычислениях для удобства первая формула обозначена за B1, вторая- за B2, а третья- за B3. Окончательные значения формул записаны под B11, B22 и B33 соответсвенно.

```
> B1 := (-1)·(-2/5)·∫_0^(2π) cos(t)·(-15√3·(2·μ-1)·cos(t)+30·m·√3-9√6·cos(t))/2 - 1/2·
      sin(t)·(9·cos(t) - (129·cos(t)+90√2·(2·μ-1)·cos(t)-180·m·√2)/4) dt

                B1 := -9√3 √2 π/5 - 6√3 μ π + 3√3 π                    (1)

> B2 := (-1)·(-2/5)·∫_0^(2π) (cos(t/2)·cos(t/2)·9·cos(t) + sin(t/2)·sin(t/2)
      ·(129·cos(t)+90√2·(2·μ-1)·cos(t)-180·m·√2)/4 + sin(t)
      ·(-15√3·(2·μ-1)·cos(t)+30·m·√3-9√6·cos(t))/2) dt

                B2 := -18√2 m π - 9√2 μ π + 9√2 π/2 - 93 π/20          (2)

> B3 := -18√2 m π - 9√2 μ π + 9√2 π/2 - 93 π/20 - (-1)·(-2/5)·
      ∫_0^(2π) ((129·cos(t)+90√2·(2·μ-1)·cos(t)-180·m·√2)/4 - 9·cos(t)) dt

                B3 := 18√2 m π - 9√2 μ π + 9√2 π/2 - 93 π/20           (3)

> B11 := simplify(B1)

                B11 := -3√3 π (3√2 + 10 μ - 5)/5                       (4)

> B22 := simplify(B2)

                B22 := -18 π (31/120 + (m + μ/2 - 1/4)√2)              (5)

> B33 := simplify(B3)

                B33 := 18 π (-31/120 + (m - μ/2 + 1/4)√2)              (6)

>
```

Рис. 13.

1081

Таким образом матрица B будет иметь вид:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{3}\pi(3\sqrt{2}+10\mu_0-5)}{5} & -18\pi(\frac{31}{120} + (m + \frac{\mu_0}{2} - \frac{1}{4})\sqrt{2}) \\ 18\pi(-\frac{31}{120} + (m - \frac{\mu_0}{2} + \frac{1}{4})\sqrt{2}) & -\frac{(3\sqrt{3}\pi(3\sqrt{2}+10\mu_0-5)}{5} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Подставим в матрицу (44) $\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$, получим:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}\pi(3\sqrt{2}-\frac{10\sqrt{2}}{3})}{5} & -18\pi(\frac{31}{120} + (m - \frac{\sqrt{2}}{3})\sqrt{2}) \\ 18\pi(-\frac{31}{120} + (m + \frac{\sqrt{2}}{3})\sqrt{2}) & -\frac{3\sqrt{3}\pi(3\sqrt{2}-\frac{10\sqrt{2}}{3})}{5} \end{bmatrix} \quad (44')$$

Найдем теперь детерминант матрицы (44').

$detB = \begin{vmatrix} \frac{3\sqrt{3}\pi(3\sqrt{2}-\frac{10\sqrt{2}}{3})}{5} & -18\pi(\frac{31}{120} + (m - \frac{\sqrt{2}}{3})\sqrt{2}) \\ 18\pi(-\frac{31}{120} + (m + \frac{\sqrt{2}}{3})\sqrt{2}) & -\frac{3\sqrt{3}\pi(3\sqrt{2}-\frac{10\sqrt{2}}{3})}{5} \end{vmatrix} = -(\frac{3\sqrt{3}\pi(3\sqrt{2}-\frac{10\sqrt{2}}{3})}{5})^2 + 18\pi(\frac{31}{120} + (m - \frac{\sqrt{2}}{3})\sqrt{2}) \cdot 18\pi(-\frac{31}{120} + (m + \frac{\sqrt{2}}{3})\sqrt{2}) = -\frac{6\pi^2}{25} - \frac{729}{400}\pi^2 + 648\pi^2 m^2$

Устойчивость (43) зависит от неизвестного параметра m. Выясним при каких m система будет устойчивой, а при каких неустойчивой.

Пусть $detB < 0$, в этом случае система будет неустойчивой.

$-\frac{6\pi^2}{25} - \frac{729}{400}\pi^2 + 648\pi^2 m^2 < 0$

$-\frac{6}{25} - \frac{729}{400} + 648m^2 = 0$

$-\frac{33}{16} + 648m^2 = 0$

$648m^2 = \frac{33}{16}$

$m^2 = \frac{33}{16 \cdot 648}$

$m = \pm\frac{\sqrt{66}}{144}$

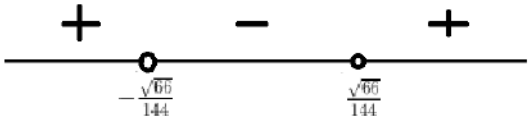


Рис. 14.

Теорема 8. *Пусть* $m \in (-\frac{\sqrt{66}}{144}, \frac{\sqrt{66}}{144}) \Rightarrow$ *система (23) неустойчива.*
Пусть $m \in (-\infty, -\frac{\sqrt{66}}{144}) \bigcup (\frac{\sqrt{66}}{144}, +\infty) \Rightarrow$ *система (23) устойчива.*

То есть по теореме 8 и рисунку 14 видно, что система будет неустойчивой в случае, когда $m \in (-\frac{\sqrt{66}}{144}, \frac{\sqrt{66}}{144})$.Соответсвенно, устойчивой (но не асимптотически) она будет,

когда $m \in (-\infty, -\frac{\sqrt{66}}{144}) \bigcup (\frac{\sqrt{66}}{144}, +\infty)$.

Построим прямые, подставив в уравнение $m = \pm\frac{\sqrt{66}}{144}$.

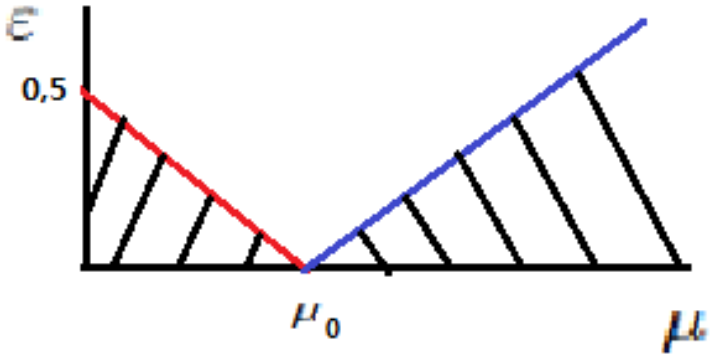


Рис. 15.

Здесь в заштрихованных частях изначально данная система (23)-уравнение движения будет устойчивой, в остальных частях, соответсвенно, неустойчивой.

Для сравнения приведем график устойчивости(неустойчивости) плоской эллиптической задачи в координатах Нехвилла (24).

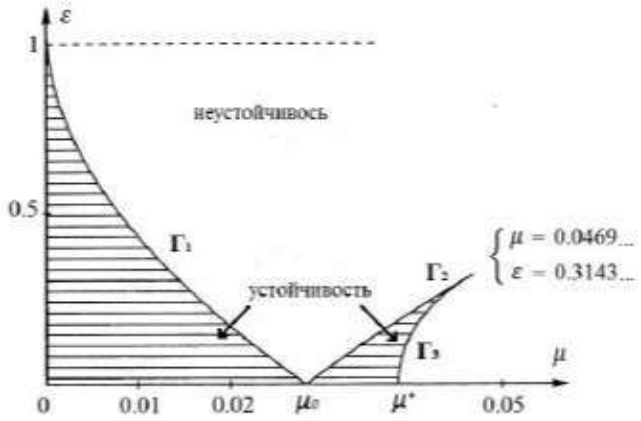


Рис. 16.

Видно, что устойчивость(неустойчивость) задач (23) и (24) схожа и прямые, постороенные на рисунке 15 являются касательными к кривым рисунка 16. Покажем это на следующем рисунке.

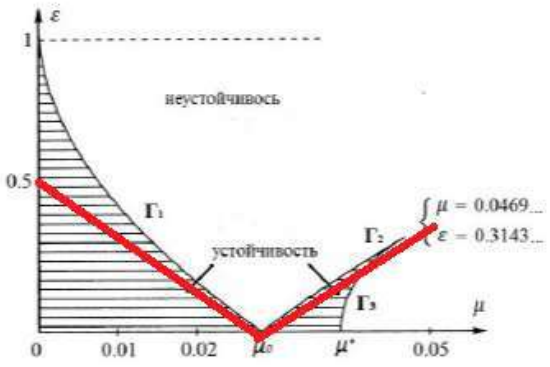

ε
1
0.5
неустойчивость
Γ₁
устойчивость
Γ₂
Γ₃
μ = 0.0469...
ε = 0.3143...
μ
0
0.01
0.02
μ₀
μ*
0.05

Рис. 17.

6. Заключение

Основным объектом исследования настоящей дипломной работы были неавтономные периодические гамильтоновы системы, зависящие от малого параметра. Изучался вопрос об устойчивости точек равновесия в критических случаях, когда система имеет мультипликаторы равные 1 или -1. В качестве основного приложения рассматривалась задача об устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел.

Получены следующие основные результаты:

1) Показана гамильтоновость основных уравнений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел.

2) Построена линеаризованная система задачи в окрестностях треугольных точек либрации.

3) На основе спектральных свойств линеаризованной задачи определены критические значения параметров задачи.

4) Получены формулы для касательных к границам областей устойчивости точек либрации.

Я подтверждаю, что настоящая работа написана мною лично и не нарушает интеллектуальные права третьих лиц

Автор Шарипханов Д.А.

1085

7. Список использованных источников и литературы

1. Демидович Б.П.Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер., Издательство "Лань"1967-472 стр. с илл.

2. Юмагулов М. Г. Ведение в теорию динамических систем, Издательство "Лань"2015-272 с.:ил.

3. Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л.С., Белова А. С. Методы теории возмущений в приложениях к дифференциальным уравнениям и гамильтоновым системам: Учебное пособие, Башкирский гос. ун-т Уфа, 2020.-168 с.

4. Маркеев П. А. Точки либрации в небесной механике и космодинамике, Издательство "Наука"1978-312 с.

5. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н., Исанбаева Н.Р. Биффуркации в окрестностях границ областей устойчивости точек либрации задачи трех тел, Астрономический журнал том 95 №2, Башкирский государственный университет, 2017

6. Маршал К. Задача трех тел, Институт компьютерных исследований, 2004-640 стр.

7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:МЦНО, 2012-344 с.

8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.:Мир, 1972-740 с.

9. Каток А.Б., Хасселюлат Б. Введение в теорию динамических систем. М.:МЦНМО, 2005-464 с.

10. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.:Мир, 1973-167 с.

11. Трещев Д. Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем. М.:Фазис, 1998-184 с.

12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, Издательство "Наука 1965

13. Беллман Р. Теория устойчивости решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954

14. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.:Едиториал УРСС. 2004-432 с.

15. Юмагулов М.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения: теория и приложения.-М.-Ижевск:НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2008-182 с.

Докторант Шафикумова Л.А.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Шлиенковой Ольги Васильевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Создание программного комплекса численного решения краевых задач на графе» являются: Методы пунктов 3.2 и 3.3, а также соответствующие им алгоритмы

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- Исслсдование краевых задач для дифференциальных уравнений, заданных на графе, вызванное потребность описания процессов в сетевых технических системах, началось сравнительно недавно – в конце 70-х годов прошлого века (см. [1, 2] и библиографию также). До настоящего времени численные методы решения краевых задач на графе не разработаны. Известны лишь работы [3, 4], предлагающие сеточный метод, приводящий к необходимости решения системы линейных уравнений большой размерности. Построение алгоритмов и программная реализация указанных сеточных методов не производились. Поэтому разработка пошагового метода решения краевых задач на графе является актуальной.
- В период работы над бакалаврской работой с 01 сентября 2018 г. по 15 июля 2020 г. мною был произведён анализ численных методов решения дифференциальных уравнений и краевых задач, изложенных в учебной и научной литературе. Выше мною обоснована актуальность и практическая значимость тематики исследования. Кроме того,. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс и Google по следующим ключевым словам: решение краевой задачи на графе, численное решение краевой задачи на графе, в выдаче поисковиков было исследовано 6 работ (см. список работ [1-6] в списке литературы к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Михаилом Григорьевичем Завгородним, доцентом кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета.
- В 2019 г. и 2020 г. проведены выступления секции кафедры функционального анализа и операторных уравнений (руководители семинара - доц. Кунаковская О.В., доц. Завгородний М.Г.) в рамках научной сессии математического факультета Воронежского государственного университета.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше

математический материал действительно является новым и имеет практическую значимость.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоялась 26.06.2020. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись Шлиенкова Ольга Васильевна

25 мая 2020 г. Воронеж, Россия

ОТЗЫВ

научного руководителя о выпускной квалификационной работе бакалавра Шлиенковой Ольги Васильевны, обучающейся по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математическое и компьютерное моделирование, на математическом факультете Воронежского государственного университета на тему

«Создание программного комплекса численного решения краевых задач на графе»

При описании процессов, происходящих в сетевых технических системах, приходят к необходимости отыскания решений краевых задач для дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе. Однако, до настоящего времени численные методы решения таких задач практически не разработаны. Имеются лишь отдельные попытки – работы Фрязинова (1970) и Воеводина-Шугрина (1981) – приводящие к необходимости решения систем линейных уравнений достаточно большой размерности. Эффективные алгоритмы и программы отсутствуют.

Студентке математического факультета Шлиенковой О.В. была поставлена следующая задача: на основе пошагового метода, предложенного мною в соавторстве с Трибунских О.А., разработать алгоритм и написать программу отыскания численного решения краевой задачи, заданной на графе-дереве.

С поставленной задачей Шлиенкова О.В. отлично справилась. Ею были составлены алгоритмы и написаны программные методы ввода/вывода графа и функций, заданных на нем; проверки различных свойств графа и его преобразований. Были составлены алгоритмы и написаны программные модули решения так называемой «задачи Коши на графе» и краевой задачи на графе. Программа отлажена, выполнено ее тестирование на краевых задачах, имеющих аналитическое решение. Тесты показали хорошую согласованность численного и аналитического решений.

Бакалавр Шлиенкова О.В. показала хорошую математическую подготовку, продемонстрировала умения и навыки построения алгоритмов и программирования.

Считаю, что выпускная квалификационная работа Шлиенковой О.В. отвечает всем требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам, и безусловно заслуживает оценки «отлично».

Руководитель
доцент кафедры функционального анализа
и операторных уравнений,
доцент, канд. физ.-мат. наук _____ М.Г. Завгородний
подпись *расшифровка*

17.06.2020г.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Математический факультет

Кафедра функционального анализа и операторных уравнений

Создание программного комплекса численного решения краевых задач на графе

Бакалаврская работа

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профиль Математическое и компьютерное моделирование

Зав. кафедрой _____ д. ф.-м. н., проф. М.И. Каменский __.__.20__г.

Обучающийся _____ О.В. Шлиенкова

Руководитель _____ к. ф.-м. н., доц. М.Г. Завгородний

Воронеж 2020

1090

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Математический факультет

Кафедра функционального анализа и операторных уравнений

Создание программного комплекса численного решения краевых задач на графе

Бакалаврская работа

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профиль Математическое и компьютерное моделирование

Зав. кафедрой _____ д. ф.-м. н., проф. М.И. Каменский __.__.20__г.

Обучающийся _____ О.В. Шлиенкова

Руководитель _____ к. ф.-м. н., доц. М.Г. Завгородний

Воронеж 2020

Содержание

1. Актуальность 3
2. Постановка задачи 3
3. Метод решения краевой задачи второго порядка на графе-дереве 4
3.1. Вспомогательные результаты 4
3.2. Пошаговый метод решения “задачи Коши” на графе-дереве 5
3.3. Метод решения краевой задачи на графе-дереве 7
4. Алгоритмы пошагового метода 8
5. Программная реализация алгоритмов пошагового метода 12
6. Примеры работы программ 14
6.1. Пример 1. Решение краевой задачи на графе-пучке 14
6.2. Пример 2. Решение краевой задачи на графе-дереве 18
7. Интерфейс пользователя 25
8. Программный код 27
Литература 36

1. Актуальность

При описании процессов сетевых технических систем приходят к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений или к начально-краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, заданных на геометрическом графе (сети, составленной из осевых линий элементов).

В то время как для решения дифференциальных уравнений на отрезке аналитические и численные методы разработаны достаточно давно, постановка краевых задач для дифференциальных уравнений, заданных на графе, а также исследование условий разрешимости для них, началось сравнительно недавно – в конце 80-х годов прошлого века. Известны работы Ю. В. Покорного и его учеников, а также, других авторов (см. [1, 2] и библиографию также). До настоящего времени численные методы не разработаны. Известна лишь работа Фрязинова И.В. [3], где предлагается сеточный метод решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, заданных на графе. Однако такой метод ведет к необходимости решения системы линейных уравнений большой размерности. Отметим еще один подход к решению краевых задач второго порядка на графе, предложенный Воеводиным А. Ф. и Шугриным С. М. [4]. Они рассматривают задачи на графах специального вида – “одномерных клеточных комплексах” со специальными условиями согласования – “условиями узла” (фактически переопределенными). И если количество ребер велико, то их метод также сводится к необходимости решения системы линейных уравнений большой размерности. Построение алгоритмов и программная реализация методов Фрязинова и Воеводина-Шугрина, не производилась.

В работах Завгороднего М.Г. и Трибунских О.А. (см. [5, 6]) начата разработка пошагового метода решения краевых задач на графе, который не требует решения системы большой размерности и наличия большого объема памяти.

В настоящей работе продолжена разработка упомянутого пошагового метода решения дифференциальных уравнений, заданных на графе. Мне удалось разработать алгоритм для решения дифференциальных уравнений второго порядка, заданных на графе-дереве. Он не требует решения системы большой размерности и большого объема памяти. Также мне удалось разработать программный комплекс, который реализует этот алгоритм.

2. Постановка задачи

Пусть задан геометрический граф, имеющий m вершин и s ребер. Вершины представляют собой точки пространства R^3, а ребра – интервалы, соединяющие все или некоторые пары вершин.

На каждом ребре задано дифференциальное уравнение

$$u''(x)+g(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x), \qquad (1)$$

где коэффициенты $g(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – непрерывные функции, заданные на каждом ребре.

В каждой граничной вершине a (которой инцидентно лишь одно ребро) задано граничное условие

$$u(a) = c_a, \tag{2}$$

где c_a – некоторая константа.

В каждой внутренней вершине b (которой инцидентно два и более ребра) задаются условия согласования:

$$u(b_\gamma) = u(b_\eta), \qquad \gamma \in I^b \setminus \eta; \qquad \sum_{\gamma \in I^b} p(b_\gamma) u'(b_\gamma) = 0, \tag{3}$$

где I^b – множество всех ребер, инцидентных вершине b и $\eta \in I^b$ – фиксированное ребро, свое для каждой вершины b. Здесь через $u(b_\gamma)$ обозначен односторонний предел функции $u(x)$ в вершине b вдоль ребра $\gamma \in I^b$.

Требуется разработать метод численного решения краевой задачи (1)-(3) и реализовать его в виде алгоритма и библиотеки программ.

3. Метод решения краевой задачи второго порядка на графе-дереве

Для дальнейшей работы предварительно докажем вспомогательные факты.

3.1. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Если конечный граф-дерево имеет не менее двух вершин, то, по крайней мере, две его вершины граничные.*

Доказательство. Построим максимальную непродолжимую цепь с граничными вершинами a и b. Тогда вершины a и b будут граничными и для графа-дерево. Действительно. Если предположить, что $\rho(b) > 1$, то существует, по крайней мере, два ребра инцидентные вершине b и принадлежащие построенной цепи. Но так как цепь непродолжимая, то она образует цикл, что не возможно, так как граф является деревом. Аналогично доказывается для вершины a. **Лемма доказана.**

Лемма 2. *Если конечный граф-дерево имеет больше одной внутренней вершины, то он имеет, по крайней мере, две внутренние вершины, все инцидентные ребра которым, кроме одного, граничные.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть граф-дерево не имеет внутренних вершин, все инцидентные ребра которых, кроме одного, граничные. То есть у всех внутренних вершин более одного инцидентных внутренних ребер. Зафиксируем произвольную вершину a. И начнем строить

максимальную цепь, где одна из граничных вершин – это вершина a. Т.к. у каждой внутренней вершины более одного внутреннего ребра, то мы всегда из внутреннего ребра сможем перейти во внутреннее ребро. То есть получим бесконечную цепь, что противоречить условию, т.к. граф-дерево – это конечный граф. Таким образом, доказали наличие хотя бы одной внутренней вершины, все инцидентные ребра которой, кроме одного, граничные. Аналогичным образом доказывается существование второй такой вершины, если начинать строить цепь из вершины, существование которой доказано выше. **Лемма доказана.**

3.2. Пошаговый метод решения "задачи Коши" на графе-дереве

Будем рассматривать дифференциальное уравнение (1) на связном графе-дереве (см. рисунок 1). Требование связности не нарушает общности предлагаемого метода поиска решения. Так, если граф не связен, то решения на каждом подграфе – компоненте связности, не зависят друг от друга и их можно найти по отдельности.

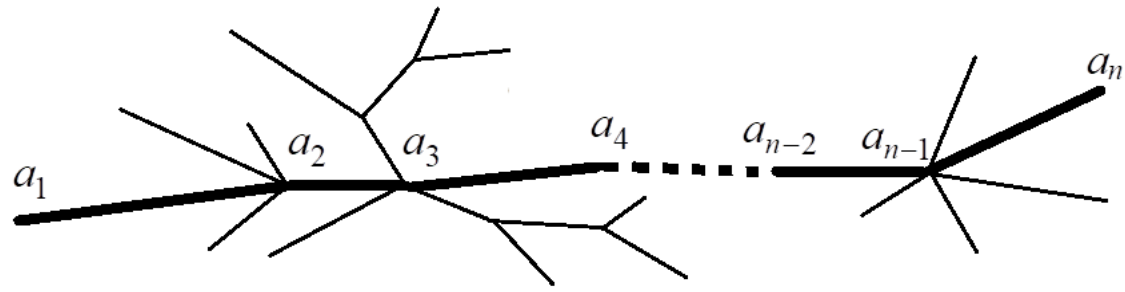


Рис.1. Граф-дерево

Предварительно на графе-дереве построим маршрут, необходимый для постановки так называемой "задачи Коши".

Найдем (*Алгоритм «Нахождение вершин, все инцидентные ребра которых граничные, кроме одного»*) две внутренние вершины такие, что все инцидентные ребра каждой из этих вершин, кроме одного, граничные (инцидентные граничным вершинам). Существование таких вершин следует из леммы 2. На рисунке 1 это вершины a_2 и a_{n-1}. Произвольно выбираем две граничные вершины, смежные внутренним вершинам a_2 и a_{n-1} соответственно. На рисунке 1 это вершины a_1 и a_n. Строим (*Алгоритм «Нахождение маршрута между выбранными вершинами»*) маршрут

$$S = \big((a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), ..., (a_{n-2}, a_{n-1}), (a_{n-1}, a_n)\big),$$

соединяющий выбранные вершины a_1 и a_n. На рисунках 1 и 2 этот маршрут выделен жирными линиями. Искомый маршрут найден.

Приступим к постановке задачи Коши. Для этого изменим условия (2), (3) нашей краевой задачи. Добавим в точке a_1, кроме условия $u(a_1) = c_{a_1}$, еще одно условие $u'(a_1) = \tilde{c}_{a_1}$, где $\tilde{c}_{a_1}$ – некоторая константа. Кроме того, единственное

условие в точке a_n исключим. Во всех остальных вершинах (кроме вершин a_1 и a_n) условия (2), (3) сохраним. Задачу для дифференциального уравнения (1) при новом наборе условий будем называть задачей Коши на графе.

Для решения задачи Коши на связном графе-дереве предлагается следующий метод.

На первом шаге на ребре (a_1, a_2) находим (*Алгоритм решения задачи Коши на ребре*) решение $u(x)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (1) с заданными начальными условиями: $u(a_1) = c_{a_1}$, $u'(a_1) = \tilde{c}_{a_1}$. Полученные числовые значения решения $u(x)$ на ребре (a_1, a_2) с заданным шагом записываем в файл на диск. Полагаем $c_{02} = u(a_2)$.

Производим декомпозицию графа, удалив вершину a_2 (см. рис.2). И решаем краевые задачи вида (1)-(3), полученные путем сужения нашей краевой задачи (1)-(3) на все полученные компоненты связности (на первом шаге это интервалы), кроме двух компонент, которые содержит по одному ребру, принадлежащему выбранному маршруту. При этом для каждой компоненты связности задаем необходимое дополнительное краевое условие $u(a_2) = c_{02}$. Краевые задачи на интервале решаем с помощью известного метода пристрелки [4]. Полученные числовые значения решения $u(x)$ на компонентах связности записываем в файл на диск.

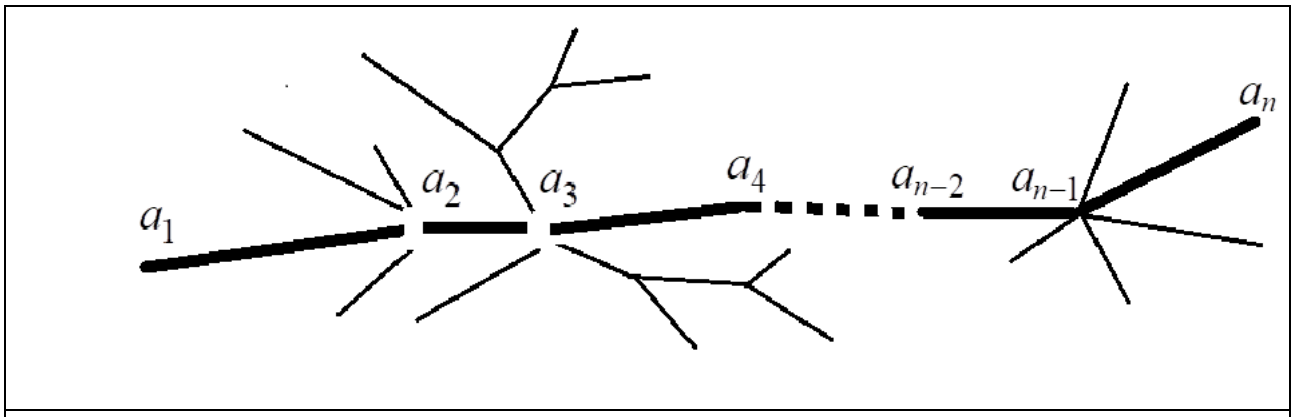


Рис.2. Декомпозиция графа

На втором шаге сначала, используя последнее условие согласования (3) вычисляем значение $c_{12} = u'(a_2)$ производной $u'(x)$ в точке a_2 вдоль ребра (a_2, a_3). Затем на ребре (a_2, a_3) находим решение задачи Коши для однородного дифференциального уравнения (1) с начальными условиями $u(a_2) = c_{02}$, $u'(a_2) = c_{12}$. Полученные числовые значения решения $u(x)$ на ребре (a_2, a_3) с заданным шагом записываем в файл на диск. Полагаем $c_{03} = u(a_3)$.

Производим декомпозицию, исключив точку a_3. Решаем краевые задачи на всех вновь полученных компонентах связности (на втором шаге это не обязательно интервалы), кроме двух компонент связности, содержащих ребра, принадлежащие выбранному маршруту. Отметим, что если компонента

связности не является интервалом, то для решения краевой задачи на этой компоненте используется описываемый здесь пошаговый метод. Продолжая таким образом последовательное построение решения, в итоге получим значения решения $u(x)$ с заданным шагом на всех ребрах графа. Решение задачи Коши найдено.

Отметим, что найденное решение задачи Коши не обязано удовлетворять условию (2) в вершине a_n и поэтому, как правило, не будет решением краевой задачи (1)-(3).

3.3. Метод решения краевой задачи на графе-дереве

Если граф состоит лишь из одного ребра, то решение краевой задачи находится известным методом стрельбы. Алгоритм этого метода описан ниже.

Пусть теперь граф имеет более одного ребра. На этом графе найдем по приведенному выше методу решения двух задач Коши при разных правых частях дифференциального уравнения (1) и разных начальных и граничных условиях.

Первое решение $u_o(x)$ – это решение однородного (при $f(x) \equiv 0$) дифференциального уравнения (1) при начальных условиях $u(a_1) = 0$, $u'(a_1) = 1$, заданных в граничной вершине a_1, и при условиях

$$u(a) = 0, \qquad (2^*)$$

заданных во всех остальных граничных вершинах $a \neq a_n$. В вершине a_n граничное условие для задачи Коши не задается. Условия согласования (3) во всех внутренних вершинах сохраняются.

Второе решение $u_ч(x)$ – это решение неоднородного дифференциального уравнения (1) с начальными условиями $u(a_1) = c_{a_1}$, $u'(a_1) = 0$ в граничной вершине a_1 и с сохранением условий (2), (3) во всех остальных вершинах, кроме a_1 и a_n.

Легко убедиться, что решение $u(x) = u_ч(x) + Cu_o(x)$ неоднородного дифференциального уравнения (1) при любой константе C удовлетворяет всем условиям (2), (3), кроме граничного условия (2) в вершине a_n. Действительно, пусть $a \neq a_n$. Тогда, если a – граничная вершина, то

$$u(a) = u_ч(a) + Cu_o(a) = u_ч(a) + C \cdot 0 = u_ч(a) = c_a .$$

А если a – внутренняя вершина, то

$$u(b_\gamma) = u_ч(b_\gamma) + Cu_o(b_\gamma) = u_ч(b_\eta) + Cu_o(b_\eta) = u(b_\eta), \quad \gamma \in I^b \setminus \eta ;$$

$$\sum_{\gamma\in I^b} p\left(b_\gamma\right)u'\left(b_\gamma\right)=\sum_{\gamma\in I^b} p\left(b_\gamma\right)\left[u'_ч\left(b_\gamma\right)+Cu'_o\left(b_\gamma\right)\right]=\sum_{\gamma\in I^b} p\left(b_\gamma\right)u'_ч\left(b_\gamma\right)+C\sum_{\gamma\in I^b} p\left(b_\gamma\right)u'_o\left(b_\gamma\right)=0$$

Константа C находится из уравнения $u_ч\left(a_n\right)+Cu_o\left(a_n\right)=c_{a_n}$. Таким образом, функция $u\left(x\right)=u_ч\left(x\right)+\dfrac{c_{a_n}-u_ч\left(a_n\right)}{u_o\left(a_n\right)}u_o\left(x\right)$ является решением краевой задачи (1)-(3) на графе-дереве. Естественно $u_o\left(a_n\right)$ не должно равняться нулю, в противном случае краевая задача (1)-(3) вырождена и для поиска решения применяются другие методы.

4. Алгоритмы пошагового метода

Для реализации разработанного метода предлагаются ниже следующие алгоритмы.

1) *Алгоритм ввода графа.*

Ввод ориентированного графа осуществляется через расширенную матрицу смежности с дополнительным параметром – длина ребра

Вводим конечное количество вершин n в графе. Создается массив размерностью $n\times n$, в который мы будем записывать матрицу смежности ориентированного графа. Если i-я в j-я вершины смежные, и ребро ориентацией от i-ой вершины к j-ой , то в ij-й элемент массива записываем длину ребра. Иначе – в ij-й элемент массива записываем «0».

Каждому элементу массива ставятся в соответствие три файла, которые содержат значения функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, вычисленные на соответствующем ребре с заданным шагом.

2) *Алгоритм «Добавление вершины»*

Размерность матрицы смежности графа увеличивается на один, то есть создается массив размерностью $(n+1)\times(n+1)$, где добавляются обнуленные $n+1$ столбец и $n+1$ строчка.

3) *Алгоритм «Проверки на связность»*

Строим маршруты от произвольно выбранной граничной вершины до каждой из остальных граничных вершин. Если все маршруты существуют, то граф связен, если нет – не связен.

4) *Алгоритм «Удаление вершины»*

Если степень вершины, которую мы хотим удалить, не равна 1, то в месте этой вершины (в месте соединения ребер) нарушается связность. Граф распадается на такое число компонент связности, какова степень вершины. Поэтому для каждой компоненты связности строим новую матрицу смежности.

5) *Алгоритм «Добавление ребра»*

Вводим индекс i вершины, из которой исходит ребро, и индекс вершины j, в которую входит ребро, которое мы хотим добавить. Вводим длину этого ребра. На ij-тое место матрицы смежности записываем длину ребра.

6) *Алгоритм «Удаление ребра»*

Вводим индекс i вершины, из которой исходит ребро, и индекс вершины j, в которую входит ребро, которое мы хотим удалить. Обнуляем ij-тое место матрицы смежности.

7) *Алгоритм «Определение степени вершины»*

Вводим индекс i вершины, степень которой хотим найти. Суммируем количество ненулевых элементов i-го столбца и i-той строки матрицы смежности.

8) *Алгоритм «Нахождение вершины с максимальной степенью»*

Пользуемся предыдущим Алгоритмом по определению степени вершины для всех вершин графа. Записываем степени вершин в массив. Далее находим максимальный элемент этого массива и выводим вершины, степени которых равны этому максимальному значению.

9) *Алгоритм «Нахождение вершин, все инцидентные ребра которых граничные, кроме одного»*

Для каждой i-той вершины находим смежные с ней, у которых проверяем степень. Если у всех, кроме одной, степень больше одного, то i-тая вершина - это искомая вершина. Запоминаем ее номер.

10) *Алгоритм «Нахождение маршрута между выбранными вершинами»*

Для нахождения маршрута между выбранными вершинами используется алгоритм Терри.

11) Алгоритм решения задачи Коши на ребре

Для решения задачи Коши на ребре мною были использованы два метода. Метод Эйлера и метод Рунге-Кутты для дифференциального уравнения второго порядка.

а) Метод Эйлера для моей задачи приобрел такой вид:

Задается задача Коши: таблицы со значениями функций-коэффициентов $g(x)$, $q(x)$, $f(x)$ через подынтервал h, начальные условия $u(a)$ и $u'(a)$. На основе метода Эйлера и формулы Тейлора строится цикл, который для каждого следующего шага вычисляет новые начальные условия:

$$u(a+h) = u(a) + u'(a)h + \frac{1}{2}\left(-g(a)u'(a) - q(x)u(a) + f(a)\right)h^2,$$

$$u'(a+h) = u'(a) + \left(-g(a)u'(a) - q(a)u(a)\right)h.$$

б) Метода Рунге-Кутты для моей задачи приобрел такой вид:

Задается задача Коши: таблицы со значениями функций-коэффициентов $g(x)$, $q(x)$, $f(x)$ через подынтервал h, начальные условия $u(a)$ и $u'(a)$. На основе расчетных формул метода Рунге-Кутты строится цикл, который для каждого следующего шага вычисляет новые начальные условия:

Положим $\upsilon_0 = u(a)$ и $\upsilon_1 = hu'(a)$.

$\upsilon_{0,i} = u_i$, $\upsilon_{1,i} = hu'_i$

$$k_1 = \left(\frac{h^2}{2!}\right)\left(f(x_i) - q(x_i)\upsilon_{0,i} - g(x_i)\upsilon_{1,i}\right)$$

$$k_2 = \left(\frac{h^2}{2!}\right)\left(f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - q\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(\upsilon_{0,i} + \frac{\upsilon_{1,i}}{2} + \frac{k_1}{4}\right) - g\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(\upsilon_{1,i} + k_1\right)\right)$$

$$k_3 = \left(\frac{h^2}{2!}\right)\left(f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - q\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(\upsilon_{0,i} + \frac{\upsilon_{1,i}}{2} + \frac{k_2}{4}\right) - g\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(\upsilon_{1,i} + k_2\right)\right)$$

$$k_4 = \left(\frac{h^2}{2!}\right)\left(f(x_i + h) - q(x_i + h)\left(\upsilon_{0,i} + \upsilon_{1,i} + k_3\right) - g(x_i + h)\left(\upsilon_{1,i} + 2k_3\right)\right)$$

$$k = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3),\ k' = \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\upsilon_{0,i+1} = \upsilon_{0,i} + \upsilon_{1,i} + k,\ \upsilon_{1,i+1} = \upsilon_{1,i} + k'$$

$$u_{i+1} = \upsilon_{0,i+1},\ u'_{i+1} = \frac{1}{h}\upsilon_{1,i+1}$$

Таким образом, получаем численное решение задачи Коши на конечном отрезке. А именно, получаем значения функции $u(x)$ в точках x_i, где $x_{i+1} = x_i + h$, $x_0 = a$ и $x_n = b$ – начало и конец отрезка.

12) Алгоритм решения краевой задачи на ребре

Для численного решения краевой задачи на конечном отрезке я использую метод пристрелки.

Пусть ребро γ является интервалом (a,b) и на ребре $\gamma = (a,b)$ задана краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения 2-ого порядка:

$$u''(x) + g(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \qquad (x \in \gamma) \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$u(a) = u_a, \qquad u(b) = u_b. \tag{5}$$

Методом пристрелки заключается в том, что мы из краевой точки a выпускаем два решения задачи Коши, но с разными начальными условиями. После чего, сравнивая получившиеся значения во второй краевой точке со значением, которое дано в условии, находим решение краевой задачи.

В силу теории линейных дифференциальных уравнений (см. [12]) общее решение неоднородного уравнения (4) имеет вид: $u(x)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)+u_ч(x)$, где $u_1(x)$, $u_2(x)$ – решения однородного уравнения (4) с начальными условиями $u(a)=0$, $u'(a)=1$ для первого решения и $u(a)=1$, $u'(a)=0$ для второго решения, и $y_ч(x)$ – частное решение. неоднородного уравнения (4) с начальными условиями $u(a)=u_a$ и $u'(a)=0$.

Подставим общее решение неоднородного дифференциального уравнения в первое условие (5) и получим следующее равенство: $u_a=C_1\cdot 0+C_2\cdot 1+u_a$. Отсюда можно сделать вывод, что $C_2=0$. Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (4) представимо в виде: $u(x)=C_1u_1(x)+u_ч(x)$.

Таким образом, используя один из алгоритмов решения задачи Коши на ребре находим решение $u_1(x)$ однородного дифференциального уравнения (4) с начальными условиями $u(a)=0$, $u'(a)=1$ и решение $y_ч(x)$ неоднородного уравнения (4) с начальными условиями $u(a)=u_a$ и $u'(a)=0$. Зная значения $u_1(b)$ и $u_ч(b)$ в точке b найденных решений, в силу второго условия (5) находим значение константы: $C_1=\dfrac{u_b-u_ч(b)}{u_1(b)}$. Далее находим численное решение $u(x)$ краевой задачи (4), (5) на ребре γ, складывая решения $u_1(x)$ и $u_ч(x)$: $u(x)=C_1u_1(x)+u_ч(x)$.

Решение краевой задачи (4), (5) на ребре γ найдено.

13) Алгоритм решения краевой задачи на графе дереве

Для построения алгоритма решения краевой задачи (1)-(3) на графе мы пользуемся разработанным нами методом (см. выше).

С помощью *Алгоритма «Нахождение вершин, все инцидентные ребра которых граничные, кроме одного»* находим необходимые нам вершины, между которыми строим после маршрут с помощью *Алгоритма «Нахождение маршрута между выбранными вершинами».* Согласно методу решения краевой задачи на графе-дереве находим решения двух задач Коши при разных правых частях дифференциального уравнения (1) и разных начальных и

граничных условиях с помощью *Алгоритма решения задачи Коши на ребре* и *Алгоритма решения краевой задачи на ребре.* Декомпозиция графа в это время осуществляется с помощью *Алгоритма «Удаление вершины».* Согласно выше описанному Методу решения краевой задачи на графе-дереве находим решение однородного дифференциального уравнения $u_o(x)$ и решение неоднородного дифференциального уравнения $u_ч(x)$. Находим значение константы *C* из уравнения $u_ч(a_n) + Cu_o(a_n) = c_{a_n}$.

После этого находим искомое численное решение исходной краевой задачи (1)-(3) на всем графе по формуле:

$$u(x) = \frac{c_{a_n} - u_ч(a_n)}{u_o(a_n)} u_o(x) + u_ч(x).$$

5. Программная реализация алгоритмов пошагового метода

На основе предложенного пошагового метода и составленных алгоритмов на языке C++ на платформе Microsoft Visual Studio была написана библиотека программных модулей.

Мной использовался язык C++, потому что он использует объектно-ориентированное программирование, также он структурированный и компилируемый. Компиляторы языка C++ есть на каждой операционной системе, со средой разработки и библиотеками не возникнет больших проблем. C++ активно поддерживается: есть много книг и сайтов для изучения.

Платформа Microsoft Visual Studio была выбрана мной в качестве среды разработки, потому что эта интегрированная среда разработки поддерживает большое количество языков, имеет возможность отладки и интуитивный стиль кодирования (отступы, цветное кодирование и т. д.), что очень помогает при чтении кода. Также эта платформа при создании нового кода автоматически устанавливает стандартный стереотипный код, который точно понадобится для работы.

Был разработан класс graf. В него входят такие данные, как

double *v, *v1 - записывается матрица смежности, где вместо единиц стоят длины ребер графа,

double *ya0, *ya1 – записываются начальные условия для граничных вершин краевой задачи,

int *gr, *vn – динамические массивы, в которые будут записываться внешние и граничные вершины,

int kg, kv – целочисленные переменные, в которые записываются количество граничных и внешних вершин,

int size, n – размер матрицы смежности и количество интервалов, на которые разбиваем ребра графа.

Также класс граф содержит такие методы, как

graf(), graf(int n) – компиляторы, ввод графа через матрицу смежности,

void udalr() – метод удаления ребра,

void dobr() – метод добавления ребра,

graf dobv() – метод добавления вершины,

graf udalv(int n) – метод удаления вершины,

int indexv(int n), int indexv1(int n) – метод поиска степени вершины,

void maxindexv() – метод поиска вершины с максимальной степенью,

bool svyaz() – метод проверки графа на связность,

void marsh(char *res) - метод построения маршрута между двумя граничными вершинами, которым смежны вершины, которым инцидентны все граничные ребра, кроме одного,

void vyvod(char *res) – метод вывода матрицы смежности,

int colvo(){return size;} - метод вывода количества вершин в графе,

void ver() – метод построения массива граничных и внутренних вершин,

void sozdd() – метод создания дубликата матрицы смежности,

void ugran() – метод ввода начальных условия для граничных вершин графа;

void vyvodneor() – создание и вывод в текстовый файл матрицы смежности для графа, считая его неориентированным;

~graf(){} – деструктор,

double method(const char *up1, const char *up2, const char *up3, int n, double y0p, double y1p, double a, double b, const char *res, int t, double ya1f) – метод для решения задачи Коши,

double methodob(const char *up1, const char *up2, const char *up3, double y0p, double y1p, double a, double b, const char *res, int t, double ya1f) – метод для решения задачи Коши на отрезке в обратную сторону,

double res(const char *res1, const char *res2, const char *res, double c, double &ya1f) - метод для подсчета решения краевой задачи на ребре при подстановке найденной константы и вывода решения

void resr(const char *res1, const char *res2, const char *res, double c) – метод для подсчета решения краевой задачи на графе при подстановке найденной константы и вывода решения.

Все вышеизложенные методы работают по алгоритмам, описанным выше в пункте 4.

Работа программы выглядит следующим образом:

1. Вводится граф с помощью метода graf() класса graf;
2. Строится маршрут с помощью метода void marsh(…) класса graf;
3. Решается задача Коши на первом ребре маршрута с помощью метода double method(…) класса graf;
4. Далее согласно алгоритму производится декомпозиция графа с помощью метода graf udalv(…) класса graf;
5. Согласно алгоритму и маршруту с помощью методов double method(…), void resr(…), graf udalv(…) класса graf строится численное решение на остальных ребрах графа до последнего ребра;
6. На последнем ребре маршрута решается задача Коши с помощью метода double method(…) класса graf;

7. Повторяются пункты 3-6, но с другими начальными условиями, как описано в алгоритме решения краевой задачи второго порядка на геометрическом графе-дереве
8. Находится численное решение согласно формуле алгоритма решения краевой задачи второго порядка на графе-дереве и выводится численное решение с помощью метода void resr(…) класса graf.

6. Примеры работы программ

6.1. Пример 1. Решение краевой задачи на графе-пучке

Пусть дан граф-пучок Γ_3, состоящий из трех ребер, представленный на рисунке 3.

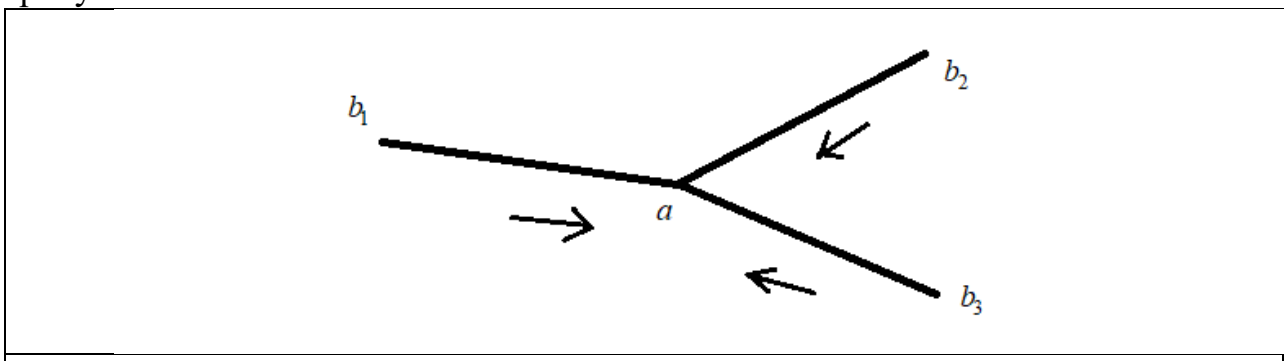


Рис. 3 Граф-пучок, состоящий из трех ребер

Обозначим через a внутренюю вершину графа, через b_1, b_2, b_3 - граничные вершины, через γ_1, γ_2 и γ_3 – ребра, выходящие из вершин b_1, b_2, b_3 в вершину a, соотвественно.

Пусть ребра γ_1, γ_2 и γ_3 имеют длины 1, 2 и π, соотвественно. На графе Γ_3 рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} u''(x) - 2u'(x) + 5u(x) = 5x^2 - 4x + 2, & x \in \gamma_1, \\ u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = e^x, & x \in \gamma_2, \\ u''(x) + u'(x) - 2u(x) = 9\cos x - 7\sin x, & x \in \gamma_3 \end{cases}$$

при граничных условиях

$$u(b_i) = 0, \qquad i = \overline{1,3},$$

и условиях согласования

$$u(a_1) = u(a_2) = u(a_3), \qquad \sum_{i=1}^{3} u'(a_i) = 0.$$

Решением в явном виде данной задачи является функция

$$u(x)=\begin{cases} -1.229055\sin(2x)e^{x}+x^{2}, & x\in\gamma_1,\\ -0.269867e^{x}+0.269867e^{2x}-xe^{x}, & x\in\gamma_2,\\ 2.17467e^{-2x}-0.17467e^{x}-2\cos x+3\sin x, & x\in\gamma_3. \end{cases}$$

Приведем значения явного решения и численное решение, полученное нашей программой.

X1;Y1 – численное решение на ребре γ_1

X1;YA1 – аналитическое решение на ребре γ_1

X2;Y2 – численное решение на ребре γ_2

X2;YA2 – аналитическое решение на ребре γ_2

X3;Y3 – численное решение на ребре γ_3

X3;YA3 – аналитическое решение на ребре γ_3

X1	Y1	YA1	X2	Y2	YA2	X3	Y3	YA3
0	0	0	0	0	0	0	-3,72E-05	0
0,05	-0,114698	-0,12649	0,1	-0,0771183	-0,07915	0,157	-0,141688	-0,122059
0,1	-0,235384	-0,25986	0,2	-0,166075	-0,1713	0,314	-0,068153	-0,0541887
0,15	-0,361623	-0,39949	0,3	-0,267654	-0,27751	0,471	0,130687	0,147142
0,2	-0,492799	-0,54458	0,4	-0,382513	-0,39872	0,628	0,406664	0,436194
0,25	-0,628115	-0,6941	0,5	-0,51112	-0,53572	0,785	0,7239865	0,775181
0,3	-0,766564	-0,84677	0,6	-0,653672	-0,68901	0,942	1,036544	1,13233
0,35	-0,906939	-1,00109	0,7	-0,809983	-0,85871	1,099	1,371776	1,48052
0,4	-1,04781	-1,1553	0,8	-0,97937	-1,04437	1,256	1,660121	1,79638
0,45	-1,18754	-1,3074	0,9	-1,16048	-1,24481	1,413	1,949497	2,0597
0,5	-1,32426	-1,45513	1	-1,35112	-1,45779	1,57	2,12878	2,25295
0,55	-1,45587	-1,59601	1,1	-1,54793	-1,67975	1,727	2,22884	2,36107
0,6	-1,58006	-1,72729	1,2	-1,74619	-1,90534	1,884	2,29244	2,37121
0,65	-1,69431	-1,84601	1,3	-1,93935	-2,12689	2,041	2,27401	2,2726
0,7	-1,79588	-1,949	1,4	-2,11866	-2,33378	2,198	2,20856	2,05634
0,75	-1,88183	-2,03289	1,5	-2,27256	-2,51157	2,355	1,90174	1,71526
0,8	-1,94906	-2,09415	1,6	-2,38602	-2,64099	2,512	1,50718	1,24368
0,85	-1,99431	-2,12909	1,7	-2,43979	-2,69663	2,669	0,916695	0,637113
0,9	-2,01419	-2,13393	1,8	-2,40931	-2,64531	2,826	0,22931	-0,108049
0,95	-2,00516	-2,10482	1,9	-2,26352	-2,44413	2,983	-0,682005	-0,994939
1	-1,96364	-2,03789	2	-1,9636	-2,03794	3,14	-1,96355	-2,0267

График численного и аналитического решений на ребре γ_1:

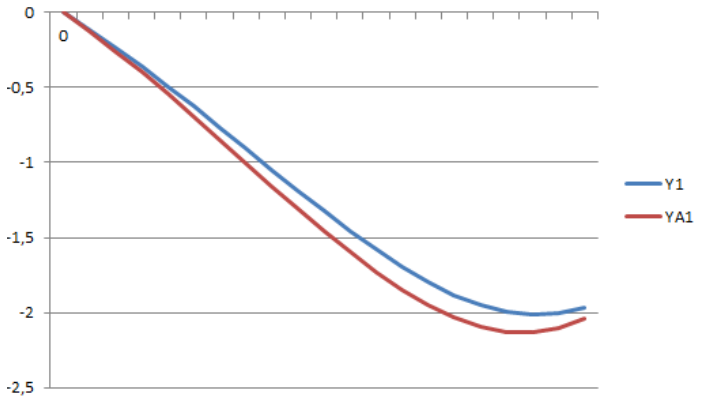


График численного и аналитического решений на ребре γ_2:

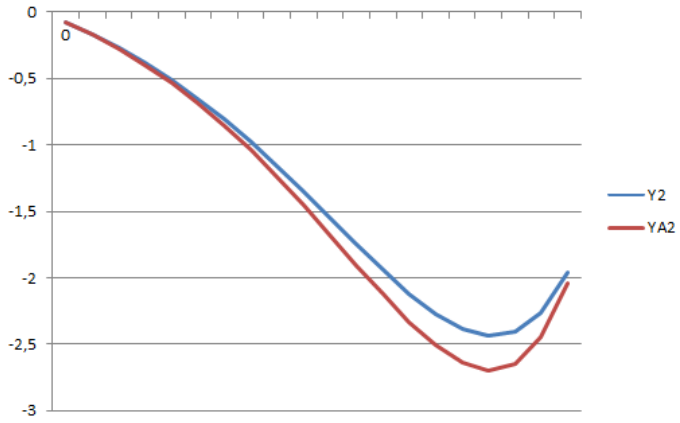
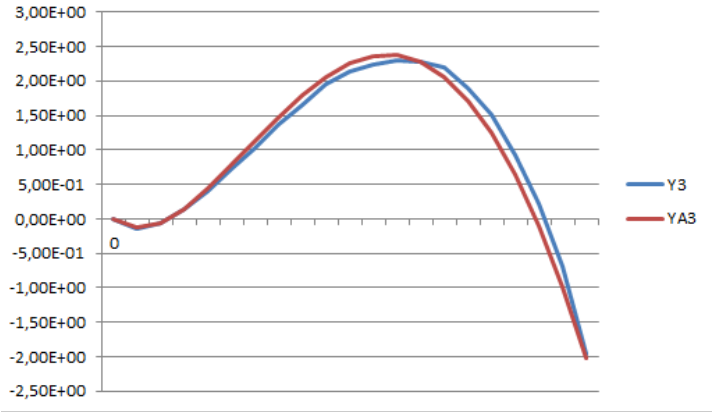


График численного и аналитического решений на ребре γ_3:



Данное решение имеет погрешность метода, равную Mh^p, где M - некоторая константа, а $p = 2$ – порядок метода.

Погрешность на ребре γ_1 составляет 0,07425, где шаг $h = 0,05$, на ребре γ_2 – 0,07434, где шаг $h = 0,1$, на ребре γ_3 – 0,06306, где шаг $h = 0,157$.

На графиках видим поведение численного и аналитического решений на каждом ребре и также видим наглядную разницу между ними.

Теперь возьмем шаг в 10 раз меньше. И посмотрим результат для того же примера. В таблицы я выведу каждое 10-е значение.

X1;Y1 – численное решение на ребре γ_1

X1;YA1 – аналитическое решение на ребре γ_1

X2;Y2 – численное решение на ребре γ_2

X2;YA2 – аналитическое решение на ребре γ_2

X3;Y3 – численное решение на ребре γ_3

X3;YA3 – аналитическое решение на ребре γ_3

X1	Y1	YA1	X2	Y2	YA2	X3	Y3	YA3
0	0	0	0	0	0	0	-3,72E-05	0
0,05	-0,125112	-0,12649	0,1	-0,0788656	-0,07915	0,157	-0,12163	-0,122059
0,1	-0,257019	-0,25986	0,2	-0,170518	-0,1713	0,314	-0,052554	-0,0541887
0,15	-0,395152	-0,39949	0,3	-0,27596	-0,27751	0,471	0,143068	0,147142
0,2	-0,538735	-0,54458	0,4	-0,396077	-0,39872	0,628	0,43177	0,436194
0,25	-0,686777	-0,6941	0,5	-0,531591	-0,53572	0,785	0,769811	0,775181
0,3	-0,838057	-0,84677	0,6	-0,682936	-0,68901	0,942	1,12065	1,13233
0,35	-0,99119	-1,00109	0,7	-0,850169	-0,85871	1,099	1,471564	1,48052
0,4	-1,14426	-1,1553	0,8	-1,03281	-1,04437	1,256	1,760123	1,79638
0,45	-1,29555	-1,3074	0,9	-1,22964	-1,24481	1,413	2,0394	2,0597
0,5	-1,44278	-1,45513	1	-1,43843	-1,45779	1,57	2,21268	2,25295
0,55	-1,58354	-1,59601	1,1	-1,65568	-1,67975	1,727	2,32879	2,36107
0,6	-1,71515	-1,72729	1,2	-1,8762	-1,90534	1,884	2,33253	2,37121
0,65	-1,83471	-1,84601	1,3	-2,09262	-2,12689	2,041	2,27531	2,2726
0,7	-1,93911	-1,949	1,4	-2,29475	-2,33378	2,198	2,07085	2,05634
0,75	-2,02504	-2,03289	1,5	-2,46892	-2,51157	2,355	1,809017	1,71526
0,8	-2,08905	-2,09415	1,6	-2,5969	-2,64099	2,512	1,395071	1,24368
0,85	-2,12747	-2,12909	1,7	-2,65477	-2,69663	2,669	0,676693	0,637113
0,9	-2,1366	-2,13393	1,8	-2,61167	-2,64531	2,826	-0,100293	-0,108049
0,95	-2,11257	-2,10482	1,9	-2,42756	-2,44413	2,983	-1,002031	-0,994939
1	-2,05159	-2,03789	2	-2,05159	-2,03794	3,14	-2,05159	-2,0267

График численного и аналитического решений на ребре γ_1:

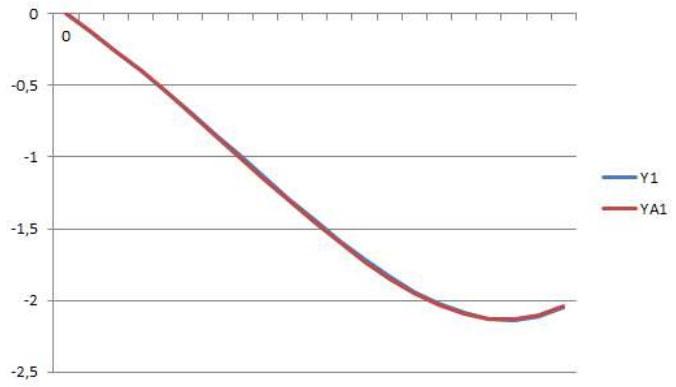


График численного и аналитического решений на ребре γ_2:

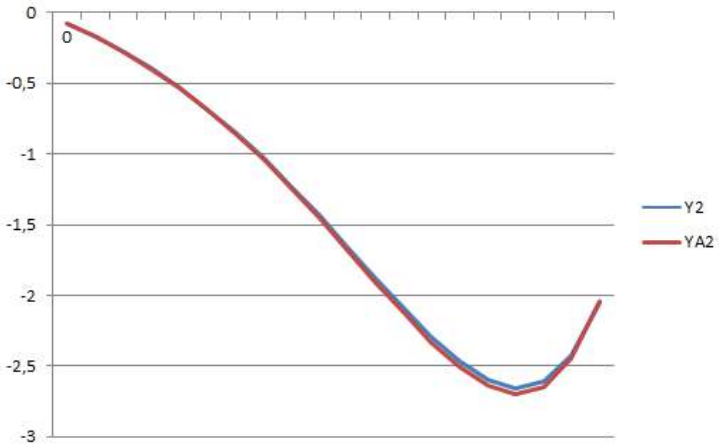
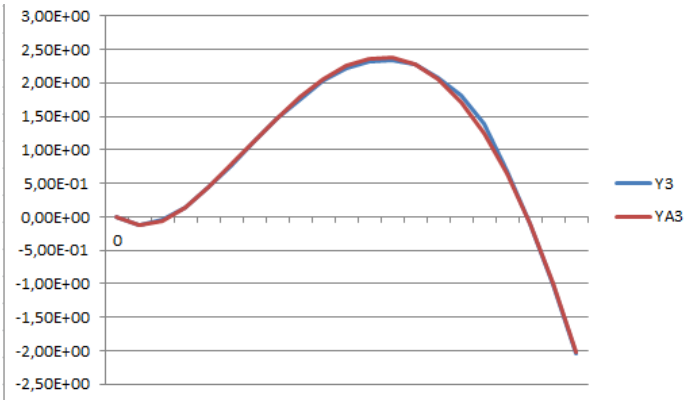


График численного и аналитического решений на ребре γ_3:



Теперь погрешность на ребре γ_1 составляет 0,0137, где шаг $h = 0,005$, на ребре γ_2 – 0,01365, где шаг $h = 0,01$, на ребре γ_3 – 0,02489, где шаг $h = 0,0157$.

На графиках видим поведение численного и аналитического решений на каждом ребре и также видим наглядную разницу между ними.

По сравнению с предыдущим решением с уменьшением шага в 10 раз погрешность на ребре γ_1 уменьшилась в $\approx 5,4$, на ребре γ_2 – $\approx 5,45$, а на ребре γ_3 - ≈ 3.

6.2. Пример 2. Решение краевой задачи на графе-дереве

Пусть дан граф-дерево Γ_5, состоящий из пяти ребер, представленный на рисунке 4.

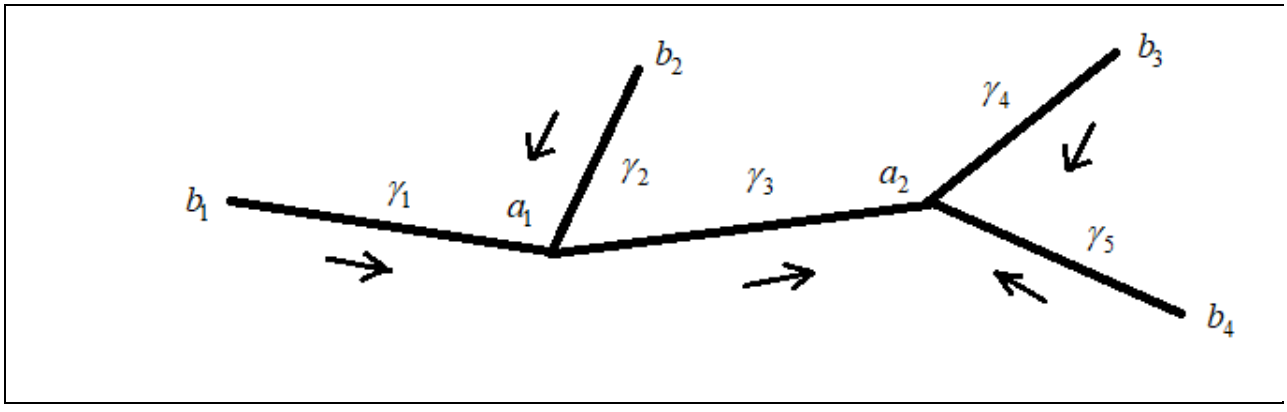


Рис. 4 Граф-дерево, состоящий из пяти ребер

Обозначим через a_1 и a_2 внутрение вершины графа, через b_1, b_2, b_3, b_4 – граничные вершины. Через γ_1, γ_2 – ребра, выходящие из вершин b_1, b_2 в вершину a_1, соответсвенно, и γ_3, γ_4 и γ_5 – ребра из вершин a_1, b_3, b_4 в вершину a_2, соотвественно.

Пусть ребра γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 и γ_5 имеют длины 1, 2, π, 1 и 1, соотвественно. На графе Γ_5 рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} u''(x)-2u'(x)+5u(x)=5x^2-4x+2, & x\in\gamma_1,\\ u''(x)-3u'(x)+2u(x)=e^x, & x\in\gamma_2,\\ u''(x)+u'(x)-2u(x)=9\cos x-7\sin x, & x\in\gamma_3\\ u''(x)-2u'(x)+u(x)=x-1, & x\in\gamma_4\\ u''(x)+6u'(x)+9u(x)=9x^2+12x-43, & x\in\gamma_5 \end{cases}$$

при граничных условиях

$$u(b_i)=0, \qquad i=\overline{1,4},$$

и условиях согласования

$$u(a_1^1)=u(a_1^2)=u(a_1^3), \qquad u_1'(1)+2u_2'(2)-u_3'(0)=0,$$

$$u(a_2^1)=u(a_2^2)=u(a_2^3), \qquad u_4'(1)+2u_5'(1)+3u_3'(\pi)=0.$$

Решением данной задачи является функция

$$u(x)=\begin{cases} -1,5601882e^x\sin(2x)+x^2, & x\in\gamma_1,\\ -0,25253087e^x+0,25253087e^{2x}-xe^x, & x\in\gamma_2,\\ -2,2047967e^{-2x}+1,348438e^x-2\cos x+3\sin x, & x\in\gamma_3,\\ -e^x+12,4777179xe^x+x+1, & x\in\gamma_4,\\ 5e^{-3x}+742,1753847xe^{-3x}+x^2-5, & x\in\gamma_5. \end{cases}$$

Приведем значения явного решения и численное решение, полученное нашей программой.

X1;Y1 – численное решение на ребре γ_1

X1;YA1 – аналитическое решение на ребре γ_1

X2;Y2 – численное решение на ребре γ_2

X2;YA2 – аналитическое решение на ребре γ_2

X3;Y3 – численное решение на ребре γ_3

X3;YA3 – аналитическое решение на ребре γ_3

X4;Y4 – численное решение на ребре γ_4

X4;YA4 – аналитическое решение на ребре γ_4

X5;Y5 – численное решение на ребре γ_5

X5;YA5 – аналитическое решение на ребре γ_5

X1	Y1	YA1	X2	Y2	YA2	X3	Y3	YA3	X4	Y4	YA4	X5	Y5	YA5
0	0	0	0	0	0	0	-2,7216	-2,85636	0	0	0	0	0	0
0,05	-0,14661	-0,161245	0,1	-0,079996	-0,081165	0,157	-1,40227	-1,53931	0,05	0,700267	0,654602	0,05	30,1045	31,2459
0,1	-0,30121	-0,33256	0,2	-0,172665	-0,175991	0,314	-0,06263	-0,30636	0,1	1,46726	1,37383	0,1	52,5957	53,6958
0,15	-0,46467	-0,513184	0,3	-0,278975	-0,285697	0,471	1,04075	0,87922	0,15	2,30594	2,16272	0,15	67,995	69,1954
0,2	-0,63574	-0,702083	0,4	-0,399807	-0,411444	0,628	2,13259	2,04305	0,2	3,22159	3,02666	0,2	78,4766	79,247
0,25	-0,81339	-0,897943	0,5	-0,53589	-0,554264	0,785	3,30972	3,20333	0,25	4,21982	3,9174	0,25	83,706	85,069
0,3	-0,99636	-1,09916	0,6	-0,687742	-0,714981	0,942	4,45047	4,37366	0,3	5,30662	5,00309	0,3	86,7456	87,6466
0,35	-1,18311	-1,30381	0,7	-0,855554	-0,894098	1,099	5,66171	5,56538	0,35	6,4885	6,12829	0,35	87,1722	87,7725
0,4	-1,37184	-1,50967	0,8	-1,03909	-1,09166	1,256	6,99102	6,78935	0,4	7,7719	7,354	0,4	85,2221	86,0815
0,45	-1,56045	-1,71419	0,9	-1,23756	-1,30705	1,413	8,32754	8,05755	0,45	9,16439	8,68772	0,45	83,1465	83,0795
0,5	-1,74659	-1,91453	1	-1,44938	-1,53877	1,57	9,69354	9,38444	0,5	10,6735	10,1374	0,5	79,5663	79,1665
0,55	-1,92759	-2,1075	1,1	-1,67198	-1,78413	1,727	11,1451	10,7882	0,55	12,3074	11,7116	0,55	75,2656	74,6568
0,6	-2,10053	-2,28965	1,2	-1,90154	-2,0388	1,884	12,7038	12,2918	0,6	14,0748	13,4194	0,6	70,3096	69,795
0,65	-2,26219	-2,45719	1,3	-2,13259	-2,29699	2,041	14,3965	13,924	0,65	15,9849	15,2705	0,65	65,4683	64,7689
0,7	-2,40912	-2,60612	1,4	-2,35768	-2,54856	2,198	16,358	15,721	0,7	18,0474	17,2752	0,7	60,5721	59,7212
0,75	-2,53758	-2,73214	1,5	-2,56676	-2,78208	2,355	18,5005	17,7265	0,75	20,273	19,4445	0,75	55,4962	54,758
0,8	-2,64363	-2,83078	1,6	-2,74665	-2,98042	2,512	20,8658	19,9941	0,8	22,6723	21,7902	0,8	50,7565	49,9565
0,85	-2,72316	-2,89736	1,7	-2,8802	-3,12119	2,669	23,5833	22,5877	0,85	25,257	24,3248	0,85	46,0673	45,3707
0,9	-2,77184	-2,92709	1,8	-2,94545	-3,1749	2,826	26,5833	25,5833	0,9	28,041	27,0616	0,9	41,9651	41,0365
0,95	-2,7852	-2,91506	1,9	-2,91434	-3,10317	2,983	30,1261	29,0706	0,95	31,0352	30,0149	0,95	37,7733	36,9758
1	-2,75871	-2,85636	2	-2,75159	-2,85636	3,14	34,2257	33,1548	1	34,2557	33,1997	1	34,2557	33,1997

График численного и аналитического решений на ребре γ_1:

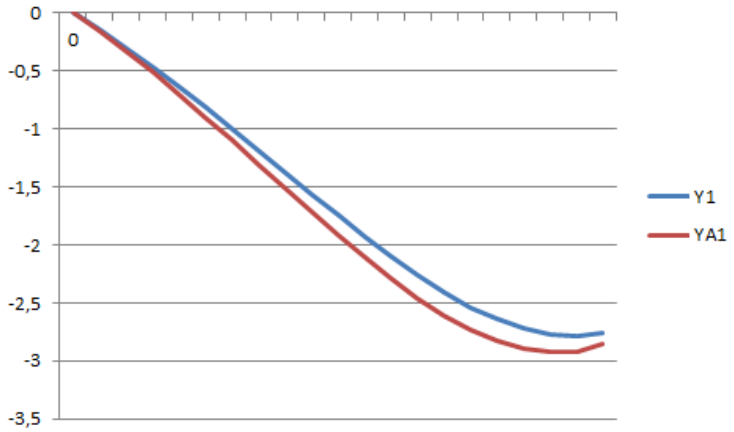


График численного и аналитического решений на ребре γ_2:

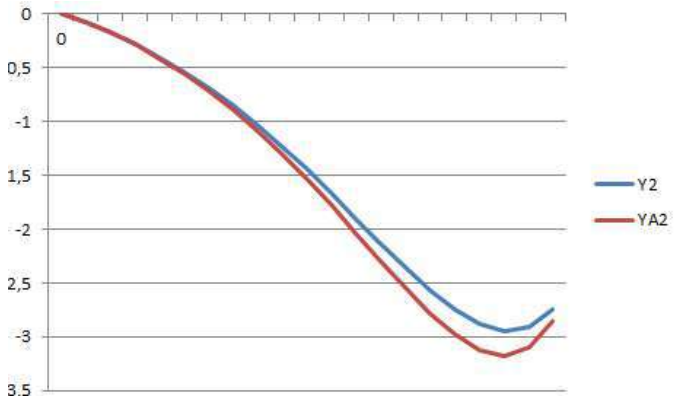


График численного и аналитического решений на ребре γ_3:

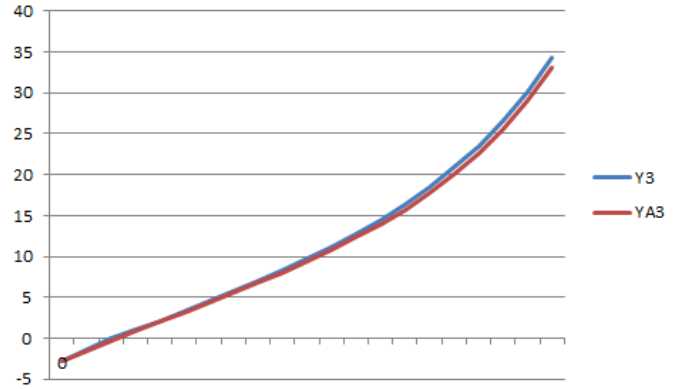


График численного и аналитического решений на ребре γ_4:

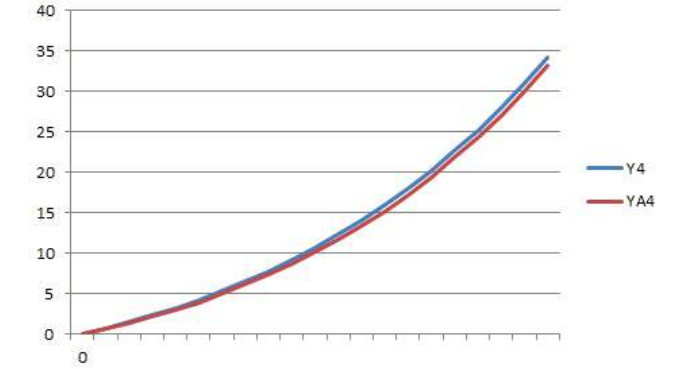
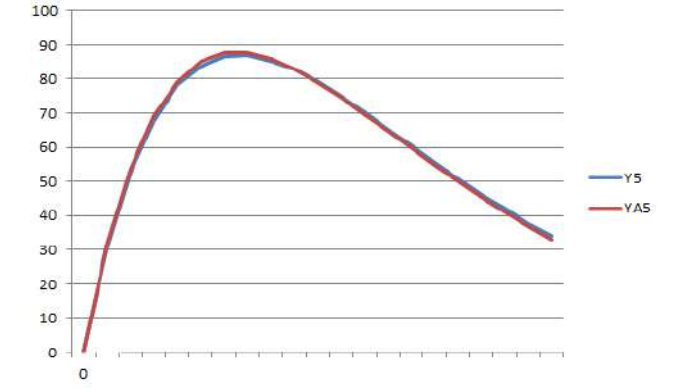


График численного и аналитического решений на ребре γ_5:



Данное решение имеет погрешность метода, равную Mh^p, где M - некоторая константа, а $p = 2$ – порядок метода.

Погрешность во внутренней вершине a_1 на ребре γ_1 составляет 0,09765, где шаг $h = 0,05$, на ребре γ_2 – 0,10477, где шаг $h = 0,1$, на ребре γ_3 – 0,13467, где шаг $h = 0,157$.

Погрешность во внутренней вершине a_2 на ребре γ_3 составляет 1,0709, где шаг $h = 0,05$, на ребре γ_4 – 1,056, где шаг $h = 0,1$, на ребре γ_5 – 1,056, где шаг $h = 0,157$.

На графиках видим поведение численного и аналитического решений на каждом ребре и также видим наглядную разницу между ними.

Теперь возьмем шаг в 10 раз меньше. И посмотрим результат для того же примера. В таблицы я выведу каждое 10-е значение.

X1;Y1 – численное решение на ребре γ_1

X1;YA1 – аналитическое решение на ребре γ_1

X2;Y2 – численное решение на ребре γ_2

X2;YA2 – аналитическое решение на ребре γ_2

X3;Y3 – численное решение на ребре γ_3

X3;YA3 – аналитическое решение на ребре γ_3

X4;Y4 – численное решение на ребре γ_4

X4;YA4 – аналитическое решение на ребре γ_4

X5;Y5 – численное решение на ребре γ_5

X5;YA5 – аналитическое решение на ребре γ_5

X1	Y1	YA1	X2	Y2	YA2	X3	Y3	YA3	X4	Y4	YA4	X5	Y5	YA5
0	0	0	0	0	0	0	-2,82773	-2,85636	0	0	0	0	0	0
0,05	-0,15878	-0,161245	0,1	-0,08103	-0,081165	0,157	-1,4445	-1,53931	0,05	0,659988	0,654602	0,05	31,1022	31,2459
0,1	-0,32745	-0,33256	0,2	-0,1756	-0,175991	0,314	-0,22709	-0,30636	0,1	1,38489	1,37383	0,1	53,5257	53,6958
0,15	-0,50525	-0,513184	0,3	-0,28491	-0,285697	0,471	0,947447	0,87922	0,15	2,17973	2,16272	0,15	69,0199	69,1954
0,2	-0,69119	-0,702083	0,4	-0,41008	-0,411444	0,628	2,10409	2,04305	0,2	3,04987	3,02666	0,2	79,0763	79,247
0,25	-0,88401	-0,897943	0,5	-0,55209	-0,554264	0,785	3,2602	3,20333	0,25	4,00121	3,9174	0,25	84,921	85,069
0,3	-1,08212	-1,09916	0,6	-0,71173	-0,714981	0,942	4,42919	4,37366	0,3	5,03966	5,00309	0,3	87,5452	87,6466
0,35	-1,28368	-1,30381	0,7	-0,88945	-0,894098	1,099	5,62171	5,56538	0,35	6,17182	6,12829	0,35	87,6724	87,7725
0,4	-1,48652	-1,50967	0,8	-1,08526	-1,09166	1,256	6,84843	6,78935	0,4	7,40488	7,354	0,4	86,0221	86,0815
0,45	-1,68814	-1,71419	0,9	-1,29849	-1,30705	1,413	8,12128	8,05755	0,45	8,7464	8,68772	0,45	83,1361	83,0795
0,5	-1,88576	-1,91453	1	-1,52726	-1,53877	1,57	9,45407	9,38444	0,5	10,2036	10,1374	0,5	79,2663	79,1665
0,55	-2,07629	-2,1075	1,1	-1,76995	-1,78413	1,727	10,8653	10,7882	0,55	11,786	11,7116	0,55	74,8256	74,6568
0,6	-2,25633	-2,28965	1,2	-2,02122	-2,0388	1,884	12,3776	12,2918	0,6	13,3238	13,4194	0,6	70,076	69,795
0,65	-2,42218	-2,45719	1,3	-2,27519	-2,29699	2,041	14,0196	13,924	0,65	15,361	15,2705	0,65	64,9681	64,7689
0,7	-2,56991	-2,60612	1,4	-2,52296	-2,54856	2,198	15,945	15,721	0,7	17,3743	17,2752	0,7	60,0721	59,7212
0,75	-2,69532	-2,73214	1,5	-2,7524	-2,78208	2,355	18,0955	17,7265	0,75	19,5519	19,4445	0,75	55,0191	54,758
0,8	-2,79398	-2,83078	1,6	-2,94701	-2,98042	2,512	20,1834	19,9941	0,8	21,9057	21,7902	0,8	50,2062	49,9565
0,85	-2,86133	-2,89736	1,7	-3,08505	-3,12119	2,669	22,9334	22,5877	0,85	24,4478	24,3248	0,85	45,7173	45,3707
0,9	-2,89265	-2,92709	1,8	-3,13771	-3,1749	2,826	25,9431	25,5833	0,9	27,1928	27,0616	0,9	41,3564	41,0365
0,95	-2,88306	-2,91506	1,9	-3,06795	-3,10317	2,983	29,2453	29,0706	0,95	30,1534	30,0149	0,95	37,1732	36,9758
1	-2,82773	-2,85636	2	-2,82773	-2,85636	3,14	33,3458	33,1548	1	33,3458	33,1997	1	33,3458	33,1997

График численного и аналитического решений на ребре γ_1:

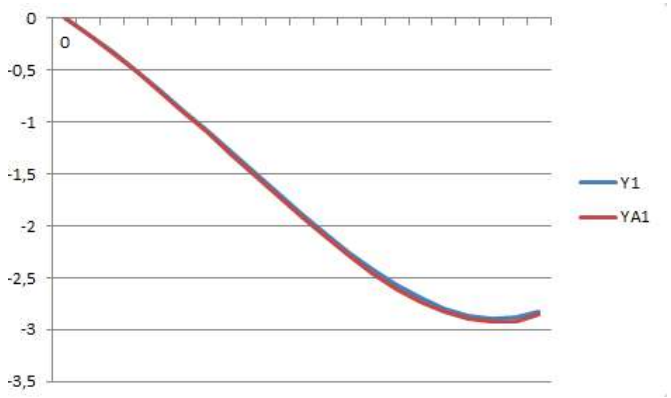


График численного и аналитического решений на ребре γ_2:

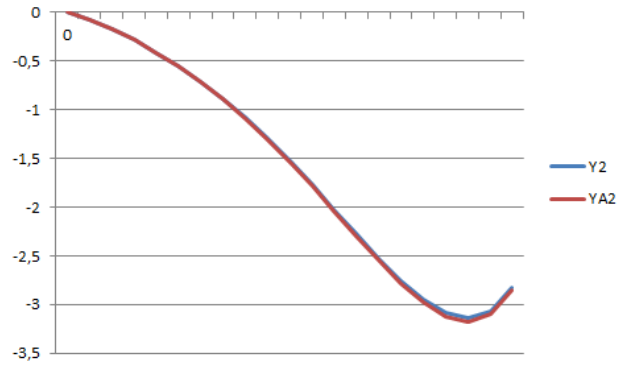


График численного и аналитического решений на ребре γ_3:

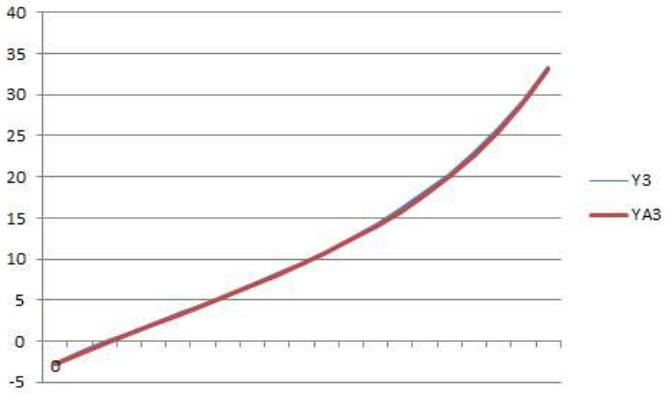


График численного и аналитического решений на ребре γ_4:

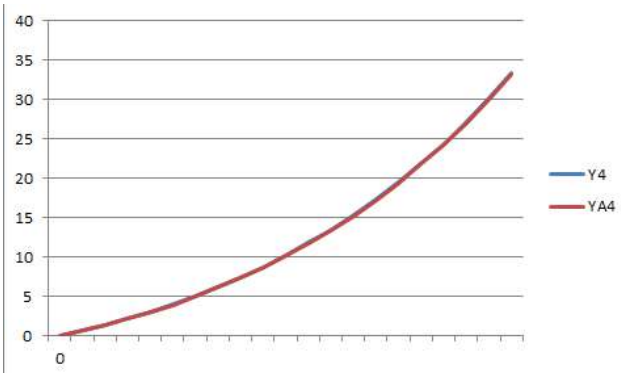


График численного и аналитического решений на ребре γ_5:



Теперь погрешность во внутренней вершине a_1 на ребре γ_1 составляет 0,02863, где шаг $h = 0,05$, на ребре γ_2 – 0,02863, где шаг $h = 0,1$, на ребре γ_3 – 0,02863, где шаг $h = 0,157$.

Погрешность во внутренней вершине a_2 на ребре γ_3 составляет 0,191, где шаг $h = 0,05$, на ребре γ_4 – 0,1461, где шаг $h = 0,1$, на ребре γ_5 – 0,1461, где шаг $h = 0,157$.

На графиках видим поведение численного и аналитического решений на каждом ребре и также видим наглядную разницу между ними.

По сравнению с предыдущим решением с уменьшением шага в 10 раз погрешность во внутренней вершине a_1 на ребре γ_1 уменьшилась в $\approx 3,4$, на ребре γ_2 – $\approx 3,66$, а на ребре γ_3 - $\approx 4,7$. По сравнению с предыдущим

решением во внутренней вершине a_2 на ребре γ_3 уменьшилась в $\approx 5,6$, на ребре γ_4 – $\approx 6,2$, а на ребре γ_5 - $\approx 6,2$.

7. Интерфейс пользователя

Интерфейс программного комплекса для пользователя представлен на рисунках 5, 6, 7 и 8.

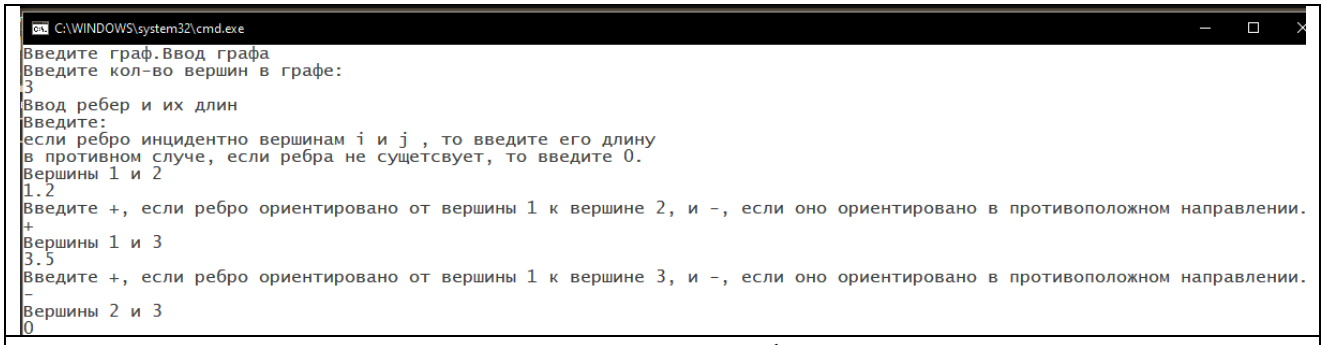


Рис.5. Ввод графа

На рисунке 5 представлен процесс ввода графа. Сначала вводится количество вершин, а после – каждое ребра с учетом его ориентации, если оно существует.

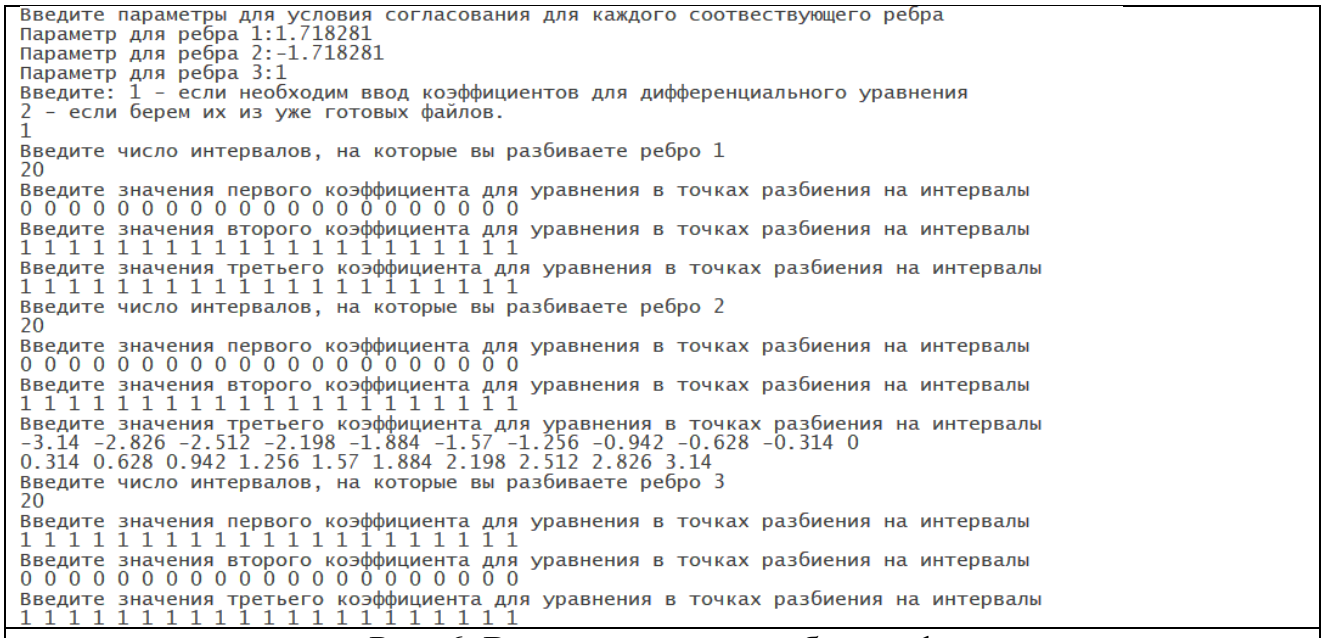


Рис. 6. Ввод данных для ребер графа

На рисунке 6 представлен интерфейс ввода данных для ребер графа. То есть ввод параметра для каждого ребра $p(b_\gamma)$, число интервалов разбиения для ребер и численное значение коэффициентов $g(x)$, $q(x)$, $f(x)$ на интервалах.

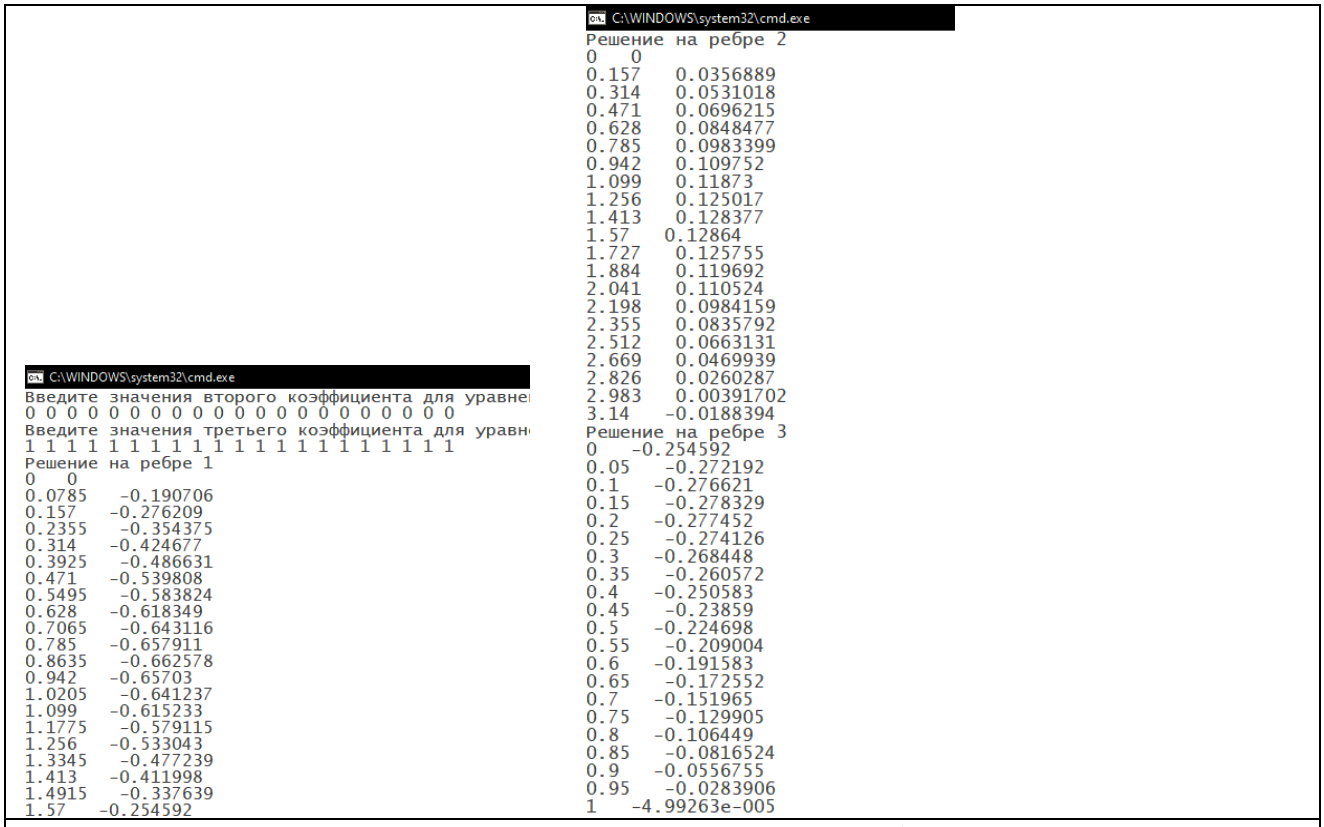


Рис.7. Решение краевой задачи на графе-пучке

На рисунке 7 представлен интерфейс вывода численного решения краевой задачи второго порядка на графе-пучке, состоящего из трех ребер. Решение выводится в виде таблицы, один столбец которой – это значение x_i, а второй – значение искомой функции $u(x_i)$.

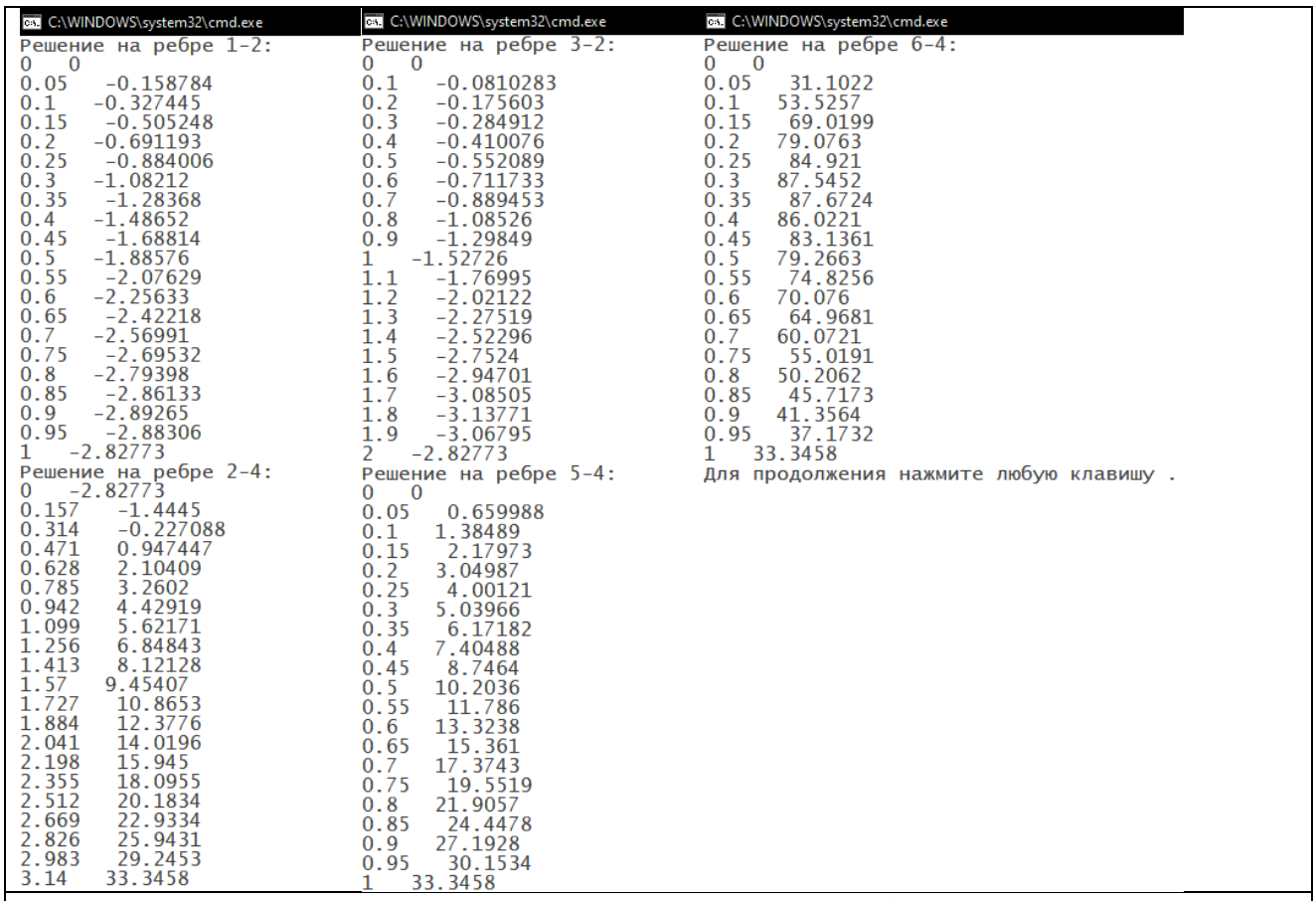


Рис.8. Решение краевой задачи на графе-дереве

На рисунке 8 представлен интерфейс вывода численного решения краевой задачи второго порядка на графе-дереве, состоящего из пяти ребер. Решение выводится в виде таблицы, один столбец которой – это значение x_i, а второй – значение искомой функции $u(x_i)$.

8. Программный код

Программная реализация некоторых методов класса graf.

```
graf::graf()
{
     char s;
     cout<<"Ввод графа \nВведите кол-во вершин в графе: \n";
     cin>>size;
     v=new double[size*size];
     for(int i=0; i<size; i++)
          for(int j=0; j<size; j++)v[j+i*size]=0;
     cout<<"Ввод ребер и их длин \n";
     cout<<"Введите: \nесли ребро инцидентно вершинам i и j , то
введите его длину\n";
     cout<<"в противном случе, если ребра не сущетсвует, то введите
0. \n";
     double m;
```

```
	for(int i=0; i<size; i++)
	{
		for(int j=i+1; j<size; j++)
		{
			cout<<"Вершины "<<i+1<<" и "<<j+1<<endl;
			cin>>m;
			if(m<0)
			{
				cout<<"Вы ввели неверное значение.";
				exit(0);
			}
			if(m)
			{
				cout<<"Введите ""+"", если ребро ориентировано
от вершины "<<i+1<<" к вершине "<<j+1<<", и ""-"", если оно
ориентировано в противоположном направлении.";
				cin>>s;
				if(s=='+')v[j+i*size]=m;
				else v[i+j*size]=m;
			}
		}
	}
	double x, y, l;
	int p;
	string f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9;
	std::stringstream out;
	f1="D:\\g";
	f2="D:\\q";
	f3="D:\\f";
	f5=".txt";
	cout<<"Введите: 1 - если необходим ввод коэффициентов для
дифференциального уравнения"<<endl;
	cout<<"2 - если берем их из уже готовых файлов."<<endl;
	cin>>p;
	if(p==1)
	{
		cout<<"Введите число интервалов, на которые вы разбиваете
ребра"<<endl;
		cin>>n;
		for(int i=0; i<size; i++)
		{
			for(int j=0; j<size; j++)
			{
				if(v[j+i*size]=!0)
				{
					out.str("");
					out<<i;
					out.str("");
					out<<j;
					f4=out.str();
					f9=out.str();
					f6=f1+f4+f9+f5;
					f7=f2+f4+f9+f5;
```

```
                        f8=f3+f4+f9+f5;
                        ofstream fail1(f6, ios::app);
                        l=v[j+i*size]/n;
                        cout<<"Введите значения первого
коэффициента для уравнения в точках разбиения на интервалы
"<<endl;
                        for(int q=0; q<n+1; j++)
                        {
                             x=j*l;
                             cin>>y;
                             fail1<<x<<"   "<<y<<endl;
                        }
                        fail1.close();
                        ofstream fail2(f7, ios::app);
                        cout<<"Введите значения второго
коэффициента для уравнения в точках разбиения на интервалы
"<<endl;
                        for(int q=0; q<n+1; j++)
                        {
                             x=j*l;
                             cin>>y;
                             fail2<<x<<"   "<<y<<endl;
                        }
                        fail2.close();
                        ofstream fail3(f8, ios::app);
                        cout<<"Введите значения третьего
коэффициента для уравнения в точках разбиения на интервалы
"<<endl;
                        for(int q=0; q<n+1; j++)
                        {
                             x=j*l;
                             cin>>y;
                             fail3<<x<<"   "<<y<<endl;
                        }
                        fail3.close();
                   }
              }
         }
     }
     else cout<<"Берем данные из исходных файлов"<<endl;
};

graf::graf(int n)
{
     size=n;
     v=new double[size*size];
     for(int i=0; i<size; i++)
          for(int j=0; j<size; j++)v[j+i*size]=0;
};

int graf::indexv(int n)
{
     int i=0;
```

```
     for(int j=size*n;j<size*(n+1);j++)if(v[j])i++;
     for(int j=0;j<size;j++)if(v[j*size+n])i++;
     return i;
};

int graf::indexv1(int n)
{
     int i=0;
     for(int j=size*n;j<size*(n+1);j++)if(v1[j]>0)i++;
     for(int j=0;j<size;j++)if(v1[j*size+n]>0)i++;
     return i;
};

void graf::maxindexv()
{
     int *st, max;
     st=new int[size];
     for(int a=0; a<size; a++)
          st[a]=indexv(a);
     max=st[0];
     for(int a=0;a<size;a++)
          if(max<st[a])max=st[a];
     cout<<"Вершина(вершины) с максимальной степенью: ";
     for(int a=0;a<size;a++)
          if(max==st[a])cout<<a+1<<' ';
     cout<<endl;
};

void graf::udalr()
{
     int a, b;
     char y;
     do
     {
          cout<<"Введите номер вершины, от которой ориентировано
удаляемое ребро: ";
          cin>>a;
          cout<<"Введите номер вершины, к которой ориентировано
удаляемое ребро: ";
          cin>>b;
          if((0<=a-1)&&(a-1<size)&&(0<=b-1)&&(b-1<size))v[(b-1)+(a-
1)*size]=0;
          else cout<<"Ввели неверное значение. \n";
          cout<<"Нажмите клавишу 'y', если хотите повторить ввод,
или любую другую, если хотите выйти из программы. \n";
          cin>>y;
     }while((y=='y')||(y=='Y'));
};

void graf::dobr()
{
     int a, b;
     double d;
```

```
	char y;
	do
	{
		cout<<"Введите номер вершины, от которой ориентировано
добавляемое ребро: ";
		cin>>a;
		cout<<"Введите номер вершины, к которой ориентировано
добавляемое ребро: ";
		cin>>b;
		cout<<"Введите длинну ребра: ";
		cin>>d;
		if((0<=a-1)&&(a-1<size)&&(0<=b-1)&&(b-1<size)&&(d))v[(b-
1)+(a-1)*size]=d;
		else cout<<"Ввели неверное значение. \n";
		cout<<"Нажмите клавишу 'y', если хотите повторить ввод,
или любую другую, если хотите выйти из программы. \n";
		cin>>y;
	}while((y=='y')||(y=='Y'));
};

void graf::vyvod(char *res)
{
	ofstream fout(res, ios::app);
	for(int i=0; i<size; i++)
	{
		for(int j=0; j<size; j++)
		{
			cout<<v[i*size+j]<<"  ";
			fout<<v[i*size+j]<<"  ";
		}
		cout<<endl;
	}
	fout.close();
};

graf graf::dobv()
{
	graf g1(size+1);
	for(int i=0; i<size; i++)
		for(int j=0; j<size; j++) g1.v[i*size+j]=v[i*size+j];
	return g1;
};

void graf::ver()
{
	kg=0, kv=0;
	gr=new int[size];
	vn=new int[size];
	for(int i=0; i<size; i++)
	{
		gr[i]=-1;
		vn[i]=-1;
	}
```

```
     for(int i=0; i<size; i++)
          if(indexv(i)==1)
          {
               gr[kg]=i;
               kg++;
          }
          else
          {
               vn[kv]=i;
               kv++;
          };
};

void graf::ugran()
{
     ver();
     ya0=new double[size];
     ya1=new double[size];
     for(int i=0; i<size; i++)
     {
          ya0[i]=0;
          ya1[i]=0;
     }
     for(int i=0; i<size; i++)
     {
          for(int j=i+1; j<size; j++)
          {
               if((v[j+i*size]=!0)||(v[i+j*size]=!0))
               {
                    if(indexv(i)==1)
                    {
                         cout<<"Введите граничные условия для
вершины "<<i+1<<endl;
                         cout<<"Сначала значение в начальной точке,
потом значение производной в начальной точке"<<endl;
                         cin>>ya0[i];
                         cin>>ya1[j];
                    }
               }
          }
     }
};

void graf::vyvodneor()
{
     char *q;
     q="D:\\graf.txt";
     ofstream fout(q, ios::app);
     fout<<size<<"\n";
     for(int i=0; i<size; i++)
     {
          for(int j=i; j<size; j++)
          {
```

```
                if(v[i*size+j]=!0)
                {
                     v[i*size+j]=1;
                     v[j*size+i]=1;
                }
           }
      }
      for(int i=0; i<size; i++)
      {
           for(int j=0; j<size; j++)fout<<v[i*size+j]<<"  ";
           fout<<endl;
      }
      fout.close();
};

void graf::sozdd()
{
      double *v1;
      v1=new double[size*size];
      for(int i=0; i<size*size; i++) v1[i]=v[i];
};

double graf::method(const char *up1, const char *up2, const char
*up3, double y0p, double y1p, double a, double b, const char *res,
int t, double &ya1f)
{
      double x, gx, qx, yx, fx, h, y0, y1, yxp, k;
      h=(b-a)/n;
      ifstream fin1(up1);
      ifstream fin2(up2);
      ifstream fin3(up3);
      ofstream fail(res, ios::app);
      x=a;
      fail<<x<<"      "<<y0p<<"\n";
      y0=y0p;
      y1=y1p;
      fin1>>k>>gx;
      fin2>>k>>qx;
      if(t==0)fx=0;
      else fin3>>k>>fx;
      yx=y0+y1*h+(1/2.0)*(-gx*y1-qx*y0+fx)*h*h;
      yxp=y1+(-gx*y1-qx*y0+fx)*h;
      y0p=yx;
      y1p=yxp;
      fail<<x+h<<"      "<<y0p<<"\n";
      for(int i=2; i<=n; i++)
      {
           x=i*h;
           fin1>>k>>gx;
           fin2>>k>>qx;
           if(t==0)fx=0;
           else fin3>>k>>fx;
           y0=y0p;
```

```
            y1=y1p;
            yx=y0+y1*h+(1/2.0)*(-gx*y1-qx*y0+fx)*h*h;
            fail<<x<<"      "<<yx<<"\n";
            if(i==n-1) ya1f=yx;
            yxp=y1+(-gx*y1-qx*y0+fx)*h;
            y0p=yx;
            y1p=yxp;
      };
      fail.close();
      return yx;
};

double graf::methodob(const char *up1, const char *up2, const char
*up3, double y0p, double y1p, double a, double b, const char *res,
int t, double &ya1f)
{
      double x, gx, qx, yx, fx, h, y0, y1, yxp, k;
      h=(b-a)/n;
      ifstream fin1(up1);
      ifstream fin2(up2);
      ifstream fin3(up3);
      ofstream fail(res, ios::app);
      x=b;
      fail<<x<<"      "<<y0p<<"\n";
      y0=y0p;
      y1=y1p;
      fin1>>k>>gx;
      fin2>>k>>qx;
      if(t==0)fx=0;
      else fin3>>k>>fx;
      yx=y0-y1*h+(1/2.0)*(-gx*y1-qx*y0+fx)*h*h;
      yxp=-y1+(-gx*y1-qx*y0+fx)*h;
      y0p=yx;
      y1p=-yxp;
      fail<<x-h<<"      "<<y0p<<"\n";
      for(int i=2; i<=n; i++)
      {
            x=b-i*h;
            fin1>>k>>gx;
            fin2>>k>>qx;
            if(t==0)fx=0;
            else fin3>>k>>fx;
            y0=y0p;
            y1=y1p;
            yx=y0-y1*h+(1/2.0)*(-gx*y1-qx*y0+fx)*h*h;
            fail<<x<<"      "<<yx<<"\n";
            if(i==n-1) ya1f=yx;
            yxp=y1-(-gx*y1-qx*y0+fx)*h;
            y0p=yx;
            y1p=-yxp;
      };
      fail.close();
      return yx;
```

```
};

void graf::resr(const char *res1, const char *res2, const char
*res, double c)
{
     double y1, y2, k, y;
     ifstream fin11(res1);
     ifstream fin12(res2);
     ofstream fout11(res, ios::app);
     for(int i=0; i<=n; i++)
     {
          fin11>>k>>y1;
          fin12>>k>>y2;
          y=c*y1+y2;
          cout<<k<<"   "<<y<<"\n";
          fout11<<k<<"   "<<y<<"\n";
     };
     fout11.close();
};

double graf::res(const char *res1, const char *res2, const char
*res, double c, double &ya1f)
{
     double y1, y2, k, y;
     ifstream fin1(res1);
     ifstream fin2(res2);
     ofstream fout1(res, ios::app);
     for(int i=0; i<=n; i++)
     {
          fin1>>k>>y1;
          fin2>>k>>y2;
          y=c*y1+y2;
          if(i==n-1)ya1f=y;
          fout1<<k<<"   "<<y<<"\n";
     };
     fout1.close();
     return y;
};
```

Литература

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 272 с.
2. Краевые задачи для дифференциальных уравнений на графе : учебник / М. Г. Завгородний, С. П. Майорова ; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. – 147 с. : ил. – (Учебник Воронежского государственного университета).
3. И. В. Фрязинов, Алгоритм решения разностных задач на графах, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, том 10, № 2, С. 474–477
4. А. Ф. Воеводин, С. М. Шугрин, Численные методы расчета одномерных систем. – Новосибирск, Наука, 1981. – 208 с.
5. Завгородний М.Г., Трибунских О.А. Приближенное решение задачи малых деформаций системы струн с пружинами // Сб. науч. трудов ВВШ МВД РФ. Вып. 4. – Воронеж, 1997. – С. 125-127
6. Завгородний М.Г., Трибунских О.А. О методе суперпозиции для краевой задачи на графе // Сб. науч. трудов ВВШ МВД РФ. Вып. 7. – Воронеж, 1997. – С.150 - 154.
7. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач: Пер. с англ.—М.: Мир, 1982—296 с, ил.
8. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. - Москва: Издательство «Мир». Редакция литература по математическим наукам, 1978, 432 с.
9. Оре О. Теория графов. – 2-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 336 с.
10. Шилдт, Герберт. Ш57 C++: руководство для начинающих, 2-е издание. : Пер. с англ. - М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. - 672 с. : ил. - Парал. тит. англ.
11. C/C++. Программирование на языке высокого уровня / Т. А. Павловская. — СПб.: Питер, 2003. —461 с: ил.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - Издательство: Физматлит, 1959, 468 с.

Приложение
В Оргкомитет
Смотра дипломных
работ математи-
ков России от
Юнусовой Розалии
Олеговны

Заявление о новизне.

Сообщаю, что новыми в моей выпускной квалификационной работе под названием "Полные проективные аффинности с нулевой трансверсальной кривизной" являются примеры и доказательство основной теоремы.

Для проверки новизны:
- с 1.10.2020 начала изучать работы на смежные темы в сети Интернет: Google, ResearchGate, Web of Science, Яндекс;
- систематически консультировалась с научным руководителем Жуковой Ниной Ивановной (доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры "Фундаментальная математика" в ННГУ ВШЭ Н.Н.);
- еженедельно, с 24.11.2020 по 18.05.2021, посещала геометрический семинар, участвовала в обсуждении данного вопроса;
- изучила статьи моего научного руководителя, все они представлены в списке литературы.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьевки и сверху оценить 2-5 работ других участников на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ.

Защита работы состоится 16 июня 2021 г
На смотр предоставлен проект текста работы.

Юнусова Р.О
3 июня 2021 г
Нижний Новгород,
Россия.

тел. +79601996229.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика

Юнусова Розалия Олеговна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Полные проективные слоения с нулевой трансверсальной кривизной

Рецензент
к.физ-мат.наук,
доцент
Багаев Андрей Владимирович

Научный руководитель
Доктор физ.-мат. наук,
профессор
Жукова Нина Ивановна

Нижний Новгород, 2021

Содержание

1 Введение **4**

2 Гладкие многообразия **6**
2.1 Задание многообразия атласом 6
2.2 Гладкие отображения. Диффеоморфизм 7
2.3 Касательное векторное пространство 8
2.4 Векторные поля и их компоненты 9

3 Проективные преобразования риманова многообразия **9**
3.1 Геодезические риманова многообразия 9
3.2 Группа проективных преобразований риманова многообразия . 10

4 Слоения и ассоциированные структуры **11**
4.1 Минимальные множества 12
4.2 Ростковые группы голономии слоения 14
4.3 Гладкие распределения и слоения 15

5 Связность Эресмана **15**
5.1 Связность Эресмана для субмерсий 15
5.2 Связность Эресмана для слоений 16
5.3 Связь между связностями для субмерсий и слоений 17

6 Слоения накрытые расслоениями **17**
6.1 Накрывающие отображения 17
6.2 Минимальные множества групп диффеоморфизмов 17

7 Проективные слоения с нулевой трансверсальной кривизной **19**
7.1 Проективное пространство 19
7.2 Проективная группа 19
7.3 $(G, G/H)$-многообразия и $(G, G/H)$-слоения 20
7.4 Полнота $(G, G/H)$-слоений 21
7.5 Существование минимальных множеств 22

8 Примеры **23**

Литература **27**

1 Введение

Целью данной работы является изучение структуры и существование минимальных множеств для полных проективных слоений с нулевой трансверсальной кривизной.

Определение 1.1 *Пусть (M, F) — слоение. Если слой $L \in (M, F)$ — вложенное подмногообразие в M, то L будет называться собственным слоем. Если каждый слой $\widetilde{L}$ слоения (M, F) является собственным, то и слоение (M, F) называется собственным.*

Слой L слоения (M, F) называется *замкнутым*, если он является замкнутым подмножеством многообразия M. Р. Пале в [11] доказал, что любой замкнутый слой является собственным. В частности, любой компактный слой слоения является собственным. Обратное, вообще говоря, не верно, то есть, существуют собственные незамкнутые слои.

Определение 1.2 *Пусть M — многообразие со слоением (M, F) и $B \subset M$ — подмножество M. Если B представимо в виде объединения некоторых слоев слоения (M, F), то B называется насыщенным подмножеством.*

Отметим, что в теории динамических систем насыщенные подмножества называются *инвариантными*.

В данной работе представлены следующие два определения *минимального множества* и доказана их эквивалентность.

Определение 1.3 *Непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ в многообразии M называется минимальным множеством, если каждый слой L слоения (M, F), принадлежащий $\mathcal{M}$, всюду плотен в $\mathcal{M}$, то есть, если замыкание $\overline{L}$ совпадает с $\mathcal{M}$.*

Определение 1.4 *Непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ в многообразии M называется минимальным множеством, если $\mathcal{M}$ минимально по включению среди всех подмножеств из M, обладающих данными свойствами, то есть если существует непустое замкнутое насыщенное подмножество $K \subset \mathcal{M}$, то $K = \mathcal{M}$.*

Д.В. Аносов в математической энциклопедии написал, что вопросы существования и строения минимальных множеств являются центральными в качественной теории динамических систем и слоений [1].

Примером минимального множества служит любой замкнутый слой слоения, если он существует.

Как известно, любое слоение (M, F) на компактном многообразии M имеет минимальное множество. Это, вообще говоря, не верно для слоений на некомпактных многообразиях.

Бенье и Майнеза [7], а также Инаба [6] доказали, что существуют слоения на некомпактных многообразиях, не имеющие *минимальных множеств.*

Одним из главных результатов данной работы является доказательство следующей теоремы о существовании минимального множества для проективных слоений (M, F). Отметим, что компактность многообразия M не предполагается.

Теорема 1.1 (Основная теорема) *Пусть (M, F) — это произвольное полное проективное слоение коразмерности $q \geq 2$ на $n-$мерном гладком многообразии M. Предположим, что трансверсальная кривизна (M, F) равна нулю. Тогда существует минимальное множество этого слоения.*

В данной работе построено континуальное семейство проективных слоений на замкнутых 3-многообразиях и исследована структура этих слоений и их минимальных множеств.

1133

2 Гладкие многообразия

2.1 Задание многообразия атласом

Открытое связное подмножество в $\mathbb{R}^n$ будем называть областью.

Определение 2.1 *Пространство M является n-мерным топологическим многообразием, если $\forall\ m \in M\ \exists\ U \subset M \,|\, \varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм на области $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией, где $\mathbb{R}^n$ — евклидового пространства, а $n \in \mathbb{N}$ — зафиксированно.*

Пусть $\{U_\alpha \,|\, \alpha \in J\}$ — система открытых множеств в M и $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — система гомеоморфизмов множеств $\{U_\alpha\}$ на $\{V_\alpha\}$ — области из $\mathbb{R}^n$, причем M может быть представимо в виде: $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, то есть $\{U_\alpha \mid \alpha \in J\}$ — открытое покрытие M. Пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — называется картой.

Определение 2.2 *Совокупность карт $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ называется атласом топологического многообразия M, если $\{U_\alpha \mid \alpha \in J\}$ — открытое покрытие M.*

Определение 2.3 *Пусть $(x^1, x^2, ...x^k, ..., x^n)$ — произвольная декартова система координат, зафиксированная как система линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим любую точку Q из U_α и композиции $x^k_\alpha := x^k_\alpha(Q) := x^k(\varphi_\alpha(Q))$, где $k = \overline{1,n}$. В таком случае $\{x^k\}$ задают систему функций на U_α — локальную систему координат на карте U_α.*

Точка Q может иметь несколько наборов локальных координат, если она принадлежит нескольким картам из атласа.

Определение 2.4 *Если на (M, A^r) все возникающие функции перехода систем координат — класса гладкости C^r во всей области их определения, то атлас $A^r = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ будет называться C^r-гладким.*

Многообразие M гомеоморфно области в $\mathbb{R}^n$, если достаточно одной карты, чтобы задать на нем атлас. Если это выполняется, то M называется элементарным многообразием.

Определение 2.5 *Два C^r-гладких атласа называются эквивалентными, если их объединение тоже C^r-гладкий атлас.*

Многообразием класса гладкости C^r называется пара $(M, [A^r])$, такая что $[A^r]$ — класс эквивалентности C^r-гладких атласов.
Для задания многообразия достаточно задать любой атлас A^r из $[A^r]$.

Пара $(\mathbb{R}^n, A^r)$ называется стандартным C^r-гладким многообразием, где $A^r = (\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$.

2.2 Гладкие отображения. Диффеоморфизм

Определение 2.6 *Пусть $g : M \to \widetilde{M}$ — непрерывное отображение двух гладких многообразий, такое что для произвольных локальных систем координат $(x^1, x^2, ..., x^n)$ в окрестности точки $Q_0 \in M$ и $(y^1, y^2, ..., y^m)$ в окрестности точки $P_0 = g(Q_0) \in \widetilde{M}$*

$$y = (y^k) = (f^k(x^1, x^2, ..., x^n)) = f(x)$$

– вектор-функции класса гладкости C^r. Тогда отображение g – C^r-гладкое.

Определение 2.7 *Если $g : M \to \widetilde{M}$ — гомеоморфизм C^r-гладких многообразий и обратное отображение $g^{-1} : \widetilde{M} \to M$ тоже гладкое класса C^r, то говорят, что g — гладкий гомеоморфизм класса C^r или диффеоморфизм класса C^r. В таком случае, многообразия M и $\widetilde{M}$ называют диффеоморфными.*

Если $g : M \to \widetilde{M}$ — гомеоморфизм многообразий гладкости C^r, то в общем случае обратное отображение $g^{-1} : \widetilde{M} \to M$ — не гладкое.

Теорема 2.1 *Пусть $g : M \to \widetilde{M}$ — диффеоморфизм C^r-гладких многообразий M и $\widetilde{M}$, $r \geq 1$. В таком случае их размерности совпадают $dimM = dim\widetilde{M}$, то есть размерность многообразия инвариантна относительно диффеоморфизмов.*

Более того, известно, что размерность многообразия инвариантна относительно гомеоморфизмов, то есть является топологическим инвариантом.

Лемма 2.1 *Для каждого C^r-гладкого многообразия M найдется такой атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, для которого существует диффеоморфизм, переводящий окрестность U_α каждой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ в n-мерный шар $\mathbb{R}^n$.*

2.3 Касательное векторное пространство

Определение 2.8 *Функция $f : M \to R^1$, заданная на (M, A^r) — C^r-гладком многообразии, называется C^r-гладкой в точке $Q \in M$, если существует такая карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in A^r$, $Q \in U_\alpha$, для которой отображение $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}^1$ тоже C^r-гладкое.*

Если функция $f : M \to R^1$ гладкая в каждой точке на M, то она гладкая на многообразии (M, A^r).

Предложение 2.1 *Множество всех C^r-гладких функций на M образует кольцо по сложению и умножению и обозначается $\mathcal{F}^r(M)$.*

Тогда для произвольных f и g из $\mathcal{F}^{\,r}(M)$, определенных поточечно, выполняются следующие равенства

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \ \forall \ x \in M$,
2. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \ \ \forall \ x \in M$.

Тождественное отображение $id_M(x) = x \ \forall x \in M$ выступает в роли единицы кольца.

Определение 2.9 *Если отображение $P_x : \mathcal{F}^r(M) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам*

1. $P_x(\lambda f)(x) = \lambda P_x f(x)$,
2. $P_x(f + g)(x) = P_x f(x) + P_x g(x)$,
3. $P_x(fg)(x) = f P_x g(x) + g P_x f(x)$

для произвольных f и g из $\mathcal{F}^r(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то оно называется касательным вектором к C^r-гладкому многообразию M в точке $x \in M$. А множество таких касательных векторов — касательным пространством, которое обозначается через $T_x(M)$.

2.4 Векторные поля и их компоненты

Далее будем считать, что M — гладкое n-мерное многообразие, $TM = \cup_{x \in M} T_x(M)$ — пространство касательного расслоения.

Определение 2.10 *Отображение* $P : M \to TM : x \to P_x$, *такое что* $P_x \in T_x(M)\ \forall\ x \in M$, — *называется векторным полем на* M.

Касательный вектор P_x является тензором типа $(0,1)$ в пространстве $T_x(M)$, $x \in M$, а векторное поле P — тензорным полем на M типа $(0,1)$.

Пусть (U, φ) — карта многообразия в точке $x \in M$, $f \in \mathcal{F}^r(M)$ и $\partial_i^\varphi(x)(f)$ — частная производная по i-той переменной от функции $f \circ \varphi^{-1}$ в точке $\varphi(x)$. Тогда $\partial_i^\varphi(x)$ — вектор в точке $x \in M$.

Определение 2.11 *Векторы* $\partial_1^\varphi(x), \partial_2^\varphi(x), ..., \partial_n^\varphi(x)\ \forall\ x \in U$ *образуют голономный базис касательного пространства* $T_x(M)$. *Следовательно, если* $P : M \to TM$, *то* $P_x = \sum_{i=1}^n P^i(x)\partial_i^\varphi(x)$. *Таким образом определяются функции* $P^i : U \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, *называемые компонентами векторного поля* X *в карте* (U, φ).

Определение 2.12 *Если компоненты* $P^1, ..., P^n$ *векторного поля дифференцируемы в каждой карте* $(U, \varphi) \in A^r$, *то векторное поле* $P : M \to TM$ *будет называться дифференцируемым.*

Множество всех C^r-гладких векторных полей на гладком многообразии M обозначим $\mathcal{D}^r(M)$.

Определение 2.13 *Пусть* $X, Y \in \mathcal{D}^r(M)$ *и для гладкого векторного поля* Z *верно равенство* $X(Yf) - Y(Xf) = Zf\ \forall\ f \in \mathcal{F}^r(M)$. *Тогда* Z *обозначают* $[X, Y]$ *и называют произведением (скобкой) Ли векторных полей* X *и* Y, *то есть* $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.

3 Проективные преобразования риманова многообразия

3.1 Геодезические риманова многообразия

Пусть (M, g) — произвольное C^r-гладкое n-мерное риманово многообразие, $r \geq 2$.

Теорема 3.1 *На любом римановом многообразии (M, g) существует единственная связность Леви-Чивита.*

Согласно данной теореме на (M, g) определена связность Леви-Чивита ∇. Геодезические линии связности Леви-Чивита ∇ называются *геодезическими риманова многообразия* (M, g).

Из определения геодезической следует, что кривая $\gamma(s)$, $s \in (\alpha, \beta)$, является *геодезической линией* риманова многообразия (M, g) тогда и только тогда, когда касательный вектор $\frac{d\gamma(s)}{ds}|_{\gamma(s)}$ в произвольной точке $\gamma(s)$ при параллельном переносе вдоль γ в любую другую точку $\gamma(\hat{s})$ этой кривой совпадает с касательным вектором $\frac{d\gamma(s)}{ds}|_{\gamma(\hat{s})}$ к γ в точке $\gamma(\hat{s})$.

Пример 3.1 *Если на гладкой поверхности $M \subset \mathbb{E}^3$, рассматриваемой с индуцированной метрикой g, лежит прямая γ, то γ — геодезическая риманова многообразия (M, g).*

3.2 Группа проективных преобразований риманова многообразия

Определение 3.1 *Пусть (M, g) — гладкое риманово многообразие. Проективной структурой риманова многообразия (M, g) называется класс проективно эквивалентных метрик $[g]$, содержащий g. Пара $(M, [g])$ называется проективным римановым многообразием.*

Матвеев [9] использовал следующие обозначения: Iso —группа изометрий многообразия (M, g), $Proj$ — алгебраическая группа проективных преобразований.

Таким образом $Proj/Iso$ — множество смежных классов. Через $|Proj/Iso|$ обозначается мощность множества $Proj/Iso$.

Предложение 3.1 *Множество всех проективных преобразований гладкого риманова многообразия (M, g) образует алгебраическую группу $Proj$.*

Пользуясь данными обозначения формулируем теорему Матвеева [9] о проективных преобразованиях римановых многообразий.

Теорема 3.2 *Предположим, что (M, g) — связное гладкое замкнутое римановo многообразие, $dim M \geq 2$, а $Proj$ и Iso — группы Ли всех проективных преобразований и всех изометрий многообразия (M, g), соответственно.*

Если $|Proj/Iso| > 2$, *то:*

либо риманова метрика g *обладает постоянной положительной секционной кривизной,*

либо любое проективное преобразование риманова многообразия (M, g) *является аффинным преобразованием, то есть, автоморфизмом связности Леви–Чивита метрики* g.

4 Слоения и ассоциированные структуры

Определение 4.1 *Пусть* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^q$, $n = k + q$. *Тогда множество*

$$F_{st} = \{\mathbb{R}^k \times \{c\} | c \in \mathbb{R}^q\}$$

называется стандартным слоением в $\mathbb{R}^n$ *коразмерности* q.

Пусть $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) | x_n \geq 0\}$. Край $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n_+ \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

Определение 4.2 *Пусть* $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^q_+$, $n = k + q$. *Тогда множество*

$$F_{st} = \{\mathbb{R}^k \times \{c\} | c \in \mathbb{R}^q_+\}$$

называется стандартным слоением в $\mathbb{R}^n_+$ *коразмерности* q, *касательным к краю.*

Замечание 4.1 *Сужение* $(F_{st}|_{\partial\mathbb{R}^n_+})$ *— стандартное слоение края. Если* $q = n - 1$, *то* $(F_{st}|_{\partial\mathbb{R}^n_+}) = \partial\mathbb{R}^n_+$ *— один слой.*

Пусть (M, F) — слоение, а слой L вложенное подмногообразие в M. Тогда слой L будет называться собственным. Если каждый слой $\widetilde{L}$ слоения (M, F) является собственным, то и само слоение (M, F) — собственное. Напомним, что слой $L \in (M, F)$ называют замкнутым, если он является замкнутым подмножеством многообразия M. Примером собственного слоя является любой замкнутый слой данного слоения. Однако, вообще говоря, собственный слой не обязательно замкнут.

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие.

Определение 4.3 *Семейство* $F = \{L_\alpha |\ \alpha \in A\}$ *линейно связных подмножеств* $L_\alpha \subset M$ *называется слоением на* M*, если:*
(F_1) $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset\ \forall\ \alpha, \beta \in A,\ \alpha \neq \beta$;
(F_2) $\bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha = M$;
(F_3) *для любого* $p \in M$ *найдется карта* (U, φ) *на* M*, такая что* $\varphi(U) = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^q, n = k + q$*, если* $L_\alpha \cap U \neq \emptyset$*, то* $\varphi(K_c(L_\alpha \cap U)) = \mathbb{R}^k \times \{c\},\ c \in \mathbb{R}^q$*, где* $K_c(L_\alpha \cap U)$ *— компоненты связности пересечения* $L_\alpha \cap U$.

Определение 4.4 *Пусть* (M, F) *— слоение. Тогда* L_α *называется слоем* (M, F)*,* $codim F = q$.
Условия (F_1) *и* (F_2) *означают, что* F *— разбиение* M.
Условие (F_3) *означает, что* φ *отображает* $(U, F|_U)$ *на стандартное слоение* $(\mathbb{R}, F_{st})$ *коразмерности* q*. Карта* (U, φ) *называется слоеной картой. Компоненты связности* $K_c(L_\alpha \cap U)$ *называются локальными слоями в окрестности* U.

Определение 4.5 *Пусть* M *и* N *— гладкие многообразия. Отображение* $f : M \to N$ *называется диффеоморфизмом, если:*
(1) отображение $f : M \to N$ *— биекция;*
(2) отображение $f : M \to N$ *гладкое;*
(3) обратное отображение $f^{-1} : N \to M$ *также гладкое.*

Замечание 4.2 *Если существует диффеоморфизм многообразий* $f : M \to N$*, то размерности* $dim M$ *и* $dim N$ *совпадают и* $f(\partial M) = \partial N$.

Определение 4.6 *Слоения* (M, F) *и* (N, Φ) *называются изоморфными или эквивалентными, если существует диффеоморфизм* $f : M \to N$*, который отображает слои в слои.*

Пример 4.1 *В определении слоения координатное отображение* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *— изоморфизм слоений* $(U, |_U)$ $(\mathbb{R}^n, F_{st})$.

4.1 Минимальные множества

Пусть M — многообразие со слоением (M, F) и $B \subset M$ — подмножество M. Если B представимо в виде объединения некоторых слоев слоения (M, F), то B называется насыщенным подмножеством.

Замечание 4.3 *В теории динамических систем аналогичное подмножество называется инвариантным.*

Далее приведем два определения *минимальноого множества.*

Определение 4.7 *Непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ в многообразии M называется минимальным множеством, если каждый слой L слоения (M, F), принадлежащий $\mathcal{M}$, всюду плотен в $\mathcal{M}$, то есть, если замыкание $\overline{L}$ совпадает с $\mathcal{M}$.*

Определение 4.8 *Непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ в многообразии M называется минимальным множеством, если $\mathcal{M}$ минимально по включению среди всех подмножеств M, обладающих данными свойствами, то есть если существует непустое замкнутое насыщенное подмножество $K \subset \mathcal{M}$, то $K = \mathcal{M}$.*

Предложение 4.1 *Определения 4.7 и 4.8 эквивалентны.*

Доказательство. 1. Сначала докажем, что из 4.7 следует 4.8.

Для этого предположим, что первое определение выполняется, а второе нет.

Пусть $\mathcal{M}$ — минимальное множество в M и $L \subset \mathcal{M}$, тогда, по первому определению, $\overline{L} = \mathcal{M}$. Предположим, что существует непустое замкнутое насыщенное подмножество $K \subset \mathcal{M}$ такое, что $K \neq \mathcal{M}$. Тогда существует слой $L \subset K$, так как K непусто. По свойству замыкания получаем, что $\overline{L} \subset \overline{K} = K$, так как K — замкнуто.

Получаем, что $\overline{L} \subset K \subset \mathcal{M}$, так как по условию $K \subset \mathcal{M}$. Но $\overline{L} = \mathcal{M}$, следовательно, $\mathcal{M} \subset K \subset \mathcal{M}$, откуда $K = \mathcal{M}$. Согласно предположению, $K \neq \mathcal{M}$. Пришли к противоречию, тем самым доказав, что из определения 4.7 следует определение 4.8.

2. Теперь докажем обратное. Пусть $\mathcal{M}$ — минимальное множество по определению 4.8. Рассмотрим произвольный слой L в $\mathcal{M}$, тогда $L \subset \mathcal{M}$. По свойству замыкания, $\overline{L} \subset \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$, так как $\mathcal{M}$ – замкнуто. Обозначим через K замыкание $\overline{L}$. Тогда K — непустое и замкнутое подмножество в $\mathcal{M}$. Согласно [Там., Теорема 4.9], замыкание любого слоя слоения является объединением слоев, то есть $K = \overline{L}$ насыщенное подмножество в $\mathcal{M}$. По второму определению, $K = \mathcal{M}$, то есть $\overline{L} = \mathcal{M}$ для каждого $L \subset \mathcal{M}$, следовательно, $\mathcal{M}$ удовлетворяет определению 4.7. □

4.2 Ростковые группы голономии слоения

Далее определяем важные инварианты слоения — ростковые группы голономии слоев L_α, которые обозначим через $\Gamma(L_\alpha, x),\ \ x \in L_\alpha$.

Пусть M— C^r-гладкое многообразие, отображение $f : U \to V$ — диффеоморфизм окрестностей точки x такой, что $f(x) = x$, и отображение $g : U' \to V'$ — также диффеоморфизм окрестностей точки x такой, что $g(x) = x$.

Отображения f и g эквивалентны, если существует окрестность, в которой fи g определены и совпадают. Это отношение эквивалентности во множестве диффеоморфизмов, отображающих окрестность точки x в другую окрестность этой точки и оставляющих точку x на месте.

Введенный класс эквивалентности называется *ростком диффеоморфизмов* в точке x и обозначается через $\{f\}_x$.

Пусть H_x — семейство локальных диффеоморфизмов, определенных в окрестности точки x. Введем операцию произведения в множестве ростков
$\Gamma = \{\{f_x\} | f \in H_x.\}$
$(\forall\ \{f\}_x, \{h\}_x \in \Gamma) \Rightarrow (\exists\ (h \circ f)_x \in \Gamma)$.
$\{f\}_x * \{h\}_x := h \circ f_x\ \ \forall\ \{f\}_x, \{h\}_x \in \Gamma$.

Множество Γ с операцией $*$ образует группу $(\Gamma, *)$ — группу ростков диффеоморфизмов в точке x в многообразие M.

Определение 4.9 *Пусть $L = L(x)$ — слой слоения (M, F). Пусть Φ_h и Φ_g — локальные голономные диффеоморфизмы q-мерного трансверсального диска D^q_x, заданные петлями h и g в слое L. Равенство*

$$\{\Phi_h\}_x * \{\Phi_g\}_x := \{\Phi_{h \cdot g}\}_x$$

определяет произведение ростков голономных диффеоморфизмов Φ_h и Φ_g.

Определение 4.10 *Группа ростков локальных голономных диффеоморфизм вдоль слоевых петель в точке $x \in L$ диска D^q_x с введенной операцией называется группой голономии слоя L в точке x и обозначается через $\Gamma(L, x)$.*

Предложение 4.2 *Отображение $\chi : \pi_1(L, x) \to \Gamma(L, x)$*

$$\chi([h]) := \{\Phi_h\}_x, [h] \in \pi_1(L, x),$$

— эпиморфизм групп.

4.3 Гладкие распределения и слоения

Пусть $\mathfrak{M}$ — гладкое подрасслоение касательного расслоения $\pi : TM \to M$ постоянного ранга, то есть $\mathfrak{M} \subset TM$, $\mathfrak{M}_x = \pi^{-1}(x) \cap \mathfrak{M}$ — k-мерное подпространство T_xM, $\forall\ x \in M$ существует окрестность U и k гладких векторных полей $X_1, X_2, ..., X_k$ на U:

$$\mathfrak{M}|_z =< X_1|_z, X_2|_z, ..., X_k|_z > \quad \forall\ z \in U.$$

$X_1, X_2, ..., X_k$ — локальный базис $\mathfrak{M}|_U$, $k = dim(\mathfrak{M})$.

Определение 4.11 *Гладкое подрасслоение $\mathfrak{M}$ называется вполне интегрируемым, если существует слоение (M, F) такое, что $TF = \mathfrak{M}$. Слои этого слоения называются интегральными многообразиями $\mathfrak{M}$.*

Теорема 4.1 (Теорема Фробениуса) *Гладкое подрасслоение $\mathfrak{M}$ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in M$ найдется окрестность $U = U(x)$ и локальный базис $X_1, X_2, ..., X_k$ на U, такие что скобка $[X_i, X_j]|_z \in \mathfrak{M}|_z$ для любых $z \in U$.*

Пример 4.2 *Любое гладкое векторное поле X на n-мерном многообразии M определяет одномерное интегрируемое распределение $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_x :=< X_x >$ для любых $x \in M$.*

Заметим, что касательные пространства к слоям любого слоения (M, F) образуют гладкое интегрируемое распределение $\mathfrak{M} = TF$ на M.

5 Связность Эресмана

5.1 Связность Эресмана для субмерсий

Определение 5.1 *Пусть $\mathfrak{M}$ — гладкое распределение на M такое, что $T_xM = \mathfrak{N}_x \oplus \mathfrak{M}_x\ \forall\ x \in M$, где $\mathfrak{N}_x = T_xp^{-1}(z)$, $p(z) = x$. Пусть $p : M \to B$ — субмерсия на B, $m = dimM$, $n = dimB$ и следовательно $m > n$. Пусть $\sigma : [0, 1] \to B$, $b = \sigma(0)$ — гладкая кривая в B. Тогда интегральная кривая $\hat{\sigma} : [0, 1] \to M$ для $\mathfrak{M}$ называется $\mathfrak{M}$-лифтом σ в точку $x \in p^{-1}(b)$, если $x = \hat{\sigma}(0)$ и $\sigma = p \circ \hat{\sigma}$.*

Определение 5.2 *Пусть $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям, указанным выше. Тогда если для любой гладкой кривой $\sigma : [0,1] \to B$, $b = \sigma(0)$ в B и для любой точки $x \in p^{-1}(b)$ существует $\mathfrak{M}$-лифт в точку x, то $\mathfrak{M}$ называется связностью Эресмана для субмерсии $p : M \to B$.*

5.2 Связность Эресмана для слоений

Пусть M — гладкое многообразие, $dimM = n$, F — гладкое слоение на M, $codimF = q$, TF—распределение, которое соответствует F.

Теперь определим связность Эресмана для слоений. Для этого нам нужно ввести понятие вертикальной и горизонтальной кривой.

Пусть $\mathfrak{M}$ — гладкое распределение на M, такое что $TM = \mathfrak{M} \oplus TF$ — $\mathfrak{M}$ трансверсально слоению F. Будем говорить, что распределение TF вертикальное, а $\mathfrak{M}$ — горизонтальное. Тогда если каждый касательной вектор кривой $\delta : [0,1] \to M$ лежит в слое слоения F, то она называется вертикальной. В таком случае вся кривая $\delta : [0,1] \to M$ будет полностью лежать в данном слое. Аналогично определяется горизонтальная кривая, то есть каждый касательной вектор горизонтальной кривой $\delta : [0,1] \to M$ принадлежит горизонтальному распределению $\mathfrak{M}$.

Определение 5.3 *Пусть задано отображение $\vartheta : [0,1] \times [0,1] \to M$. Назовем отрезок $I_1 = [0,1]$ вертикальным, а отрезок $I_2 = [0,1]$ — горизонтальным. Тогда отображение $\vartheta : [0,1] \times [0,1] \to M$ будет называться вертикально-горизонтальной гомотопией, если кривая $\vartheta|_{t\times[0,1]}$ — вертикальна при любых $t \in I_1$ и $\vartheta|_{[0,1]\times t}$ — горизонтальна при любых $t \in I_2$.*

Пара кривых $(\vartheta|_{0\times[0,1]}, \vartheta|_{[0,1]\times 0})$ будет называться базой для ϑ.

Определение 5.4 *Связностью Эресмана для слоения (M, F) называется такое гладкое распределение $\mathfrak{M}$, для которого в многообразии M для каждой пары кривых (α, β), таких что $\alpha(0) = \beta(0)$, существует вертикально-горизонтальная гомотопия $\vartheta : [0,1] \times [0,1] \to M$, базой которой является пара путей (α, β), где α и β — горизонтальная и вертикальная кривые, соответственно.*

5.3 Связь между связностями для субмерсий и слоений

Имеет место следующая теорема, доказанная в [8].

Теорема 5.1 *Пусть $p : M \to B$ — субмерсия на B со связными слоями, размерность $dimB = n$ и $\mathfrak{M}$— n-мерное распределение, трансверсальное слоям субмерсии p. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *распределение $\mathfrak{M}$— связность Эресмана для субмерсии $p : M \to B$;*
- *распределение $\mathfrak{M}$— связность Эресмана для слоения*

$$F = \{p^{-1}(y) |\ y \in B\}.$$

6 Слоения накрытые расслоениями

6.1 Накрывающие отображения

Определение 6.1 *Пусть задано непрерывное отображение топологическое пространств $p : X \to B$. Окрестность U_b точки $b \in B$ называется правильно накрытой отображением p, если $p^{-1}(U_b) = \coprod_{\alpha \in J} V_\alpha$, где сужение $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_b$ отображения p на V_α гомеоморфизм $\forall\ \alpha \in J$.*

Определение 6.2 *Непрерывное отображение топологических пространств $p : X \to B$ называется накрывающим отображением, если для любой точки $b \in B$ найдется правильно накрытая окрестность. Пространство X называется накрывающим, а B — базой накрытия.*
Накрывающее отображение $p : X \to B$ называется универсальным, если X линейно связно (односвязно) и фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0) = [e_{x_0}]$ тривиальна.

6.2 Минимальные множества групп диффеоморфизмов

Определение 6.3 *Пусть $\mathcal{K}$ — подмножество многообразия M. Тогда непустое замкнутое подмножество $\mathcal{K} \subset M$, являющееся объединением орбит, называется минимальным множеством для группы диффеоморфизмов Ψ, если $\mathcal{K}$ — минимально по включению.*

Также как для слоений, мы проверяем, что K — минимальное множество для группы диффеморфизмов Ψ многообразия M тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$

— непустое замкнутое подмножество $\mathcal{K} \subset M$, в котором орбита $\Psi.x$ каждой точки $x \in \mathcal{K}$ всюду плотна в $\mathcal{K}$.

Теорема 6.1 *Пусть (M, F) — гладкое , $h : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение и $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ — индуцированное слоение. Предположим, что слои слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ образованы слоями субмерсии $f : \widetilde{M} \to B = \widetilde{M}/\widetilde{F}$. Группу накрывающих преобразований универсального накрытия обозначим $H \cong \pi_1(M)$, а индуцированную группу диффеоморфизмов базы B — $\Psi = \Psi(H)$. Пусть L — слой слоения (M, F) и $b \in f(h^{-1}(L)) \subset B$.*

Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) Слой L является собственным тогда и только тогда, когда орбита $\Psi.b$ состоит из изолированных точек.

(2) Слой L является замкнутым тогда и только тогда, когда орбита $\Psi.b$ является замкнутым подмножеством в B.

(3) Множество $\mathcal{M} \subset M$ является минимальным множеством слоения (M, F) тогда и только тогда, когда $\mathcal{K} := f(h^{-1}(\mathcal{M}))$ — минимальное множество для группы Ψ в B.

Доказательство. Докажем утверждение 3. Пусть $\mathcal{M} \subset M$ — минимальное множество слоения (M, F) и $\mathcal{K} := f(h^{-1}(\mathcal{M}))$. Тогда $h : \widetilde{M} \to M$ замкнуто в $\widetilde{M}$ как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении $h : \widetilde{M} \to M$. Кроме того, $h : \widetilde{M} \to M$ — насыщенное относительно слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$, как прообраз насыщенного множества $\widetilde{M}$. Так как любая субмерсия — открытое отображение, то дополнение к $\mathcal{K} = f(h^{-1}(\mathcal{M})$ открыто в B, поэтому $\mathcal{K}$ замкнутое подмножество в B. Предположим, что $\mathcal{K}$ не минимально по включению среди всех непустых замкнутых подмножество в B, инвариантных относительно группы Ψ. Тогда найдется такое $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, что $\mathcal{K}'$ — непустое замкнутое подмножество. Тогда $\mathcal{M}' = h(f^{-1}(\mathcal{K})) \subset \mathcal{M}$ — непустое, замкнутое, насыщенное относительно слоения (M, F), подмножество $\mathcal{M}$, что противоречит тому, что $\mathcal{M}$ — минимальное множество слоения (M, F). Пришли к противоречию, следовательно, наше предположение не верно.

Если $\mathcal{K}$ — минимальное множество группы Ψ, то, аналогично предыдущему проверяется, что $\mathcal{M} = h(f^{-1}(\mathcal{K}))$ — минимальное множество слоения (M, F). Таким образом, (3) доказано.

Доказательство утверждений (1) и (2) использует те же аргументы, что и доказательство (3). □

Так как любой замкнутый слой слоения является собственным, то, в обозначениях теоремы 6.1, если орбита $\Psi.b$ точки $b \in B$ является замкнутым подмножеством в B, то слой $L = h(f^{-1}(b))$ — собственный.

7 Проективные слоения с нулевой трансверсальной кривизной

7.1 Проективное пространство

Проективное пространство $\mathbb{RP}^q$, $q \geq 2$, определяется как множество всех прямых в $\mathbb{R}^{q+1}$, каждую из которых можно однозначно определить как прямую, проходящую через начало координат. Такая прямая определяется вектором $\lambda \in \mathbb{R}^{q+1}$, $\lambda \neq 0$ и обозначается через $l = l(\lambda)$.

Пусть U_i — множество прямых $l = l(\lambda)$, где $\lambda = \{(\lambda_1, ..., \lambda_i, ..., \lambda_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \backslash \{0\} \,|\, \lambda_i > 0\}$. Множество U_i — открытое подмножество в $\mathbb{R}^{q+1}$. Определим $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ равенством $\varphi(l(\lambda)) = (\alpha\lambda_0, ..., \alpha\lambda_{i-1}, \alpha\lambda_{i-1}, ..., \alpha\lambda_q)$. Отображение φ_i ставит в соответствие точке $l(\lambda) \in U_i$ точку пересечения $l(\lambda)$ с гиперплоскостью $x_i = 1$ в $\mathbb{R}^{q+1}$. Так как $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ — гомеоморфизм, то (U_i, φ_i) — карта.

Таким образом, на $\mathbb{RP}^q$ задается атлас $A^\infty = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i = \overline{1, n+1}\}$ класса гладкости C^∞. Класс эквивалентности C^∞-атласов, содержащий построенный атлас, определяет структуру гладкого A^∞-многообразия на $\mathbb{RP}^q$.

7.2 Проективная группа

Пусть $\mathbb{RP}^q$, $q \geq 2$, — вещественное проективное пространство,
$GL(q+1, \mathbb{R})$ — линейная группа. Мы рассматриваем $GL(q+1, \mathbb{R})$ как группу обратимых линейных преобразований векторного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. При этом любая точка в $\mathbb{RP}^q$ определяется как одномерная прямая $l(\lambda)$, проходящая через начало координат, где λ — направляющий вектор этой прямой. Группа $GL(q+1, \mathbb{R})$ действует на $\mathbb{RP}^q$ как группа преобразований, так как она переводит вектор – в вектор и, следовательно, прямую, проходящая через начало координат, – в прямую, проходящая через начало координат.

Пусть преобразования A и B из $GL(q+1,\mathbb{R})$ действуют одинаково на $\mathbb{RP}^q$. Это выполняется тогда и только тогда, когда $A=\alpha B,\ \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Так как только в этом случае каждый ненулевой вектор λ заменяется коллинеарным вектором. Группа преобразований $GL(q+1,\mathbb{R})$ не является эффективной, и ядро эффективности состоит из тривиальных преобразований вида $\alpha E,\ \alpha\neq 0$, где E — единица группы $GL(q+1,\mathbb{R})$. Все такие преобразования αE образуют центр $\mathbf{C}$ группы $GL(q+1,\mathbb{R})$, поскольку они коммутируют с любым элементом $B\in GL(q+1,\mathbb{R})$.

Факторгруппа группы $GL(q+1,\mathbb{R})$ по центру $\mathbf{C}(\mathbb{R}^q)=\{\alpha E\,|\,\alpha\neq 0\}$ обозначается через

$$PGL(q,\mathbb{R})=GL(q+1,\mathbb{R})/\mathbf{C}$$

и называется *вещественной проективной группой* на $\mathbb{RP}^q$.

Заметим, что при $q=2k,\ \ k\in\mathbb{N}$

$$PGL(2k,\mathbb{R})=SL(2k+1,\mathbb{R}).$$

Для нечетного значения $q=2k-1,\ k\in\mathbb{N}$, группа $PGL(q,\mathbb{R})$ изоморфна группе всех автоморфизмов с определителем 1, профакторизованной по дискретному нормальному делителю $N=\{E,-E\}$, то есть

$$PGL(2k-1,\mathbb{R})=SL(2k,\mathbb{R})/\{\pm E\}.$$

Таким образом, вещественная проективная группа $PGL(q,\mathbb{R})$ действует на проективном пространстве $\mathbb{RP}^q$ эффективно.

7.3 $(G,G/H)$-многообразия и $(G,G/H)$-слоения

Пусть G — группа Ли и H — ее замкнутая подгруппа, тогда H — подгруппа Ли в G. Группа G действует на однородном пространстве G/H левыми сдвигами. Предположим, что это действие эффективное, это эквивалентно тому, что группы G и H не имеют общих нетривиальных нормальных подгрупп. Преобразование однородного пространства G/H, индуцированное элементом $g\in G$, будем обозначать через f_g.

Определение 7.1 *Многообразие M называется $(G,G/H)$-многообразием, если оно имеет атлас $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i,j\in J}$, обладающий свойствами:*

1) $\varphi_i(U_i)\subset X$;

2) если $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, *то возникающий диффеоморфизм* $\gamma_{ij} : \varphi_j(U_i \bigcap U_j) \to \varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ *является сужением преобразования* f_g *для некоторого* $g \in G$.

Напомним определение Хефлигера слоения, заданного N-коциклом. Предположим, что заданы:

1) открытое покрытие $\{U_i \,|\, i \in J\}$ многообразия M;

2) субмерсии со связными слоями $f_i : U_i \to V_i$ на $V_i \subset N$;

3) если $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, то существует такой диффеоморфизм $\gamma_{ij} : f_j(U_i \bigcap U_j) \to f_i(U_i \bigcap U_j)$ открытых подмножеств риманова многообразия (N, g_N), что $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \bigcap U_j$.

Максимальный N-коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, обладающий указанными выше свойствами, определяет новую топологию τ_F на M, называемую *слоевой*, базой которой является множество слоев всех субмерсий f_i. Компоненты линейной связности топологического пространства (M, τ_F) образуют разбиение M, которое обозначается через $F = \{L_\alpha | \alpha \in A\}$ и называется слоением, *заданным* N*-коциклом* $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, а L_α, $\alpha \in A$, – его слоями.

Поскольку любой N-коцикл содержится в единственном максимальном N-коцикле, для задания слоения (M, F) достаточно задать какой-либо N-коцикл, обладающий свойствами 1)–3).

Определение 7.2 *Слоение* (M, F), *заданное* G/H*-коциклом* $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, *называется* $(G, G/H)$*-слоением, если* $U_i \bigcap U_j \neq \varnothing$, $i, j \in J$, *то для* γ_{ij} *существует такой элемент* $g \in G$, *что* $\gamma_{ij} = f_g|_{f_j(U_i \bigcap U_j)}$.

7.4 Полнота $(G, G/H)$-слоений

Пусть (M, F) — $(G, G/H)$-слоение и $k : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение. Тогда, как известно [12], определена субмерсия $D : \widetilde{M} \to \widetilde{G/H}$ в $\widetilde{G/H}$, где $\widetilde{G/H}$ — универсальное накрывающее многообразие для однородного пространства G/H. Субмерсия $D : \widetilde{M} \to \widetilde{G/H}$ называется *разлагающим отображением* для слоения (M, F). Подчеркнем, что D, вообще говоря, не сюръективно.

Определение 7.3 $(G, G/H)$*-слоение* (M, F) *называется полным, если его разлагающее отображение* $D : \widetilde{M} \to \widetilde{G/H}$ *сюръективно.*

В [3] дано другое, эквивалентное определение полноты $(G, G/H)$-слоения.
В [12] $(G, G/H)$-слоения называются трансверсально однородными.

Определение трансверсально плоского проективного слоения

Определение 7.4 *Пусть $G = PGL = PGL(q, \mathbb{R})$ — группа Ли проективных преобразований проективного пространства $\mathbb{R}P^q$, а H — ее стационарная подгруппа в произвольной точке $z \in \mathbb{RP}^q$. Тогда $(G, G/H)$-слоение (M, F) называется трансверсально плоским проективным слоением.*

Слоение (M, F) называется полным, если оно является полным $(G, G/H)$-слоением.

7.5 Существование минимальных множеств

Теорема 7.1 *Пусть (M, F) — это произвольное проективное слоение коразмерности $q \geq 2$ на n-мерном гладком многообразии M, допускающее связность Эресмана. Предположим, что трансверсальная кривизна (M, F) равна нулю. Тогда существует минимальное множество этого слоения.*

Доказательство. Пусть (M, F) — полное проективное слоение произвольной коразмерности q на n-мерном гладком многообразии M. По определению, (M, F) является трансверсально однородным слоением, моделируемым на однородном пространстве $G/H = \mathbb{RP}^q$, где $G = PGL = PGL(q, \mathbb{R})$ — группа Ли проективных преобразований проективного пространства $\mathbb{RP}^q$, а H — ее стационарная подгруппа в произвольной точке $z \in \mathbb{RP}^q$. Подчеркнем, что группа $G = PGL$ транзитивно действует на $\mathbb{RP}^q$. Из определения слоения (M, F) вытекает, что его можно рассматривать как $(G, G/H)$-слоение, где $(G, G/H) = (PGL, \mathbb{RP}^q)$. Таким образом, (M, F) — $(PGL, \mathbb{RP}^q)$-слоение.

Из [3, Предложение 4] вытекает, в частности, что для трансверсально полного проективного слоения существует связность Эресмана. Следовательно, к $(PGL, \mathbb{RP}^q)$-слоению (M, F) применима теорема 2 статьи Н.И. Жуковой [4].

Согласно этой теореме, слоение (M, F) обладает следующими свойствами:

(1) существует такое регулярное накрывающее отображение $f : \hat{M} \to M$, что индуцированное слоение $\hat{F}$ на $\hat{M}$ образовано слоями локально три-

виального расслоения $r : \hat{M} \to B$ над односвязным $(PGL, \mathbb{RP}^q)$-многообразием B;

(2) на $(PGL, \mathbb{RP}^q)$-многообразии B индуцирована группа автоморфизмов Ψ и эпиморфизм

$$\chi : \pi_1(M, x) \to \Psi$$

фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$ на Ψ, причем группа накрывающих преобразований накрытия $\hat{M}$ изоморфна группе Ψ;

(3) для любых точек $y \in M$ и $z \in f^{-1}(y)$сужение $f_{|\hat{L}} : \hat{L} \to L$ на слой $\hat{L} := \hat{L}(z)$ слоения $(M, \hat{F})$ является регулярным накрывающим отображением на слой $L := L(y)$ слоения (M, F) с группой накрывающих преобразований, изоморфной стационарной подгруппе Ψ_b в точке $b := r(z) \in B$ группы Ψ. Более того, подгруппа Ψ_b изоморфна ростковой группе голономии $\Gamma(L, y)$ слоя L.

Напомним, что группа $\Psi = \Psi(M, F)$, удовлетворяющая указанным условиям (1) – (3), называется *глобальной группой голономии* $(PGL, \mathbb{R}P^q)$-слоения (M, F), допускающего связность Эресмана [4].

Трансверсальная полнота проективного слоения (M, F) влечет полноту $(PGL, \mathbb{RP}^q)$-многообразия B. В силу односвязности B, B является универсальным накрывающим многообразием для $\mathbb{RP}^q$, поэтому $B = \mathbb{S}^q$. Таким образом, B компактно. Следовательно, Ψ — некоторая группа диффеоморфизмов сферы $\mathbb{S}^q$.

Как известно, любая группа диффеоморфизмов компактного многоообразия имеет минимальное множество, поэтому существует минимальное множество $\mathcal{K}$ группы Ψ. Согласно теореме 6.1, $\mathcal{M} := f(r^{-1}(\mathcal{K}))$ — минимальное множество проективного слоения (M, F). □

8 Примеры

Далее мы строим континуальное семейство проективных слоений на замкнутых 3-многообразиях и исследуем структуру этих слоений и их минимальных множеств.

Обозначим через $\theta : GL(3,\mathbb{R}) \to PGL(3,\mathbb{R}) = GL(3,\mathbb{R})/\mathbf{C}$ проекцию на фактор-группу. Пусть $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ — двулистное накрытие проективного пространства сферой, а $\sigma : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^2 : w \mapsto \frac{w}{|w|} \ \forall \ w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ \mu > 1$$

си $\gamma_A := \theta(A) \in PGL$ — проективное преобразование, индуцированное матрицей $A \in GL(3,\mathbb{R})$. Обозначим через Γ группу проективных преобразований с образующей γ_A.

Определим слоение надстройкой преобразования γ_A. Для этого рассмотрим действие $\Phi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2) \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2$, определенное равенством

$$\Phi(n,(t,z)) := (t+n, \gamma_A^n(z)) \ \forall \ n \in \mathbb{Z}.$$

Положим $M := (\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2)/\mathbb{Z}$, тогда M – это 3-многообразие без края. Обозначим через $k : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2 \to M$ — фактор-отображение, оно является регулярным накрывающим отображением, указанным в доказательстве теоремы 7.1. Пусть $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}^1 \times \{z\} \,|\, z \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ — тривиальное слоение произведения $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2$. Так как действие группы $\mathbb{Z}$ сохраняет это слоение, то на M индуцируется слоение (M,F), слои которого являются образами слоев слоения $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2, \mathbb{F})$, причем слои слоения $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2, \mathbb{F})$ накрывают соответствующие слои слоения $(M,\mathbb{F})$. Таким образом, слоение (M,F) накрыто расслоением $pr_2 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$.

Как известно, отображение $p : M \to \mathbb{S}^1$, ставящее в соответствие орбите $\mathbb{Z}.(t,z)$ орбиту $\mathbb{Z}.t$, является локально тривиальным расслоением над окружностью $\mathbb{S}^1$ со стандартным слоем $\mathbb{RP}^2$, поэтому M компактно. Так как слоение (M,F) одномерное, то любой его замкнутый слой — одномерное компактное подмногообразие без края, то есть – окружность (с точностью до диффеоморфизма). Следовательно, любой незамкнутый слой диффеоморфен прямой $\mathbb{R}^1$.

Согласно теореме 7.1, слоение (M,F) имеет минимальное множество. Заметим, что при изменении μ действие группы Γ заменяется на топологически сопряженное, а слоение (M,F) заменяется изоморфным в категории слоений. Следовательно, мы построили 1-параметрическое семейство неизоморфных слоений $(M,F) = (M,F)_\varphi$, зависящее от параметра $\varphi \in [0,2\pi)$. Выясним, какие минимальные множества имеет слоение (M,F) в зависимости от φ.

Поставим $\mathbb{RP}^2$ в соответствие множество точек верхней полусферы, у которой диаметрально противоположные точки экватора отождествлены. Вектор $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ неподвижен относительно $A^n \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому замечаем, что «северный полюс» $N = f(X_0)$ – изолированная неподвижная точка группы Γ. Следовательно, $L_0 = k(pr_2^{-1}(N)) \cong \mathbb{S}^1$ — изолированный компактный слой слоения (M, F), диффеоморфный $\mathbb{S}^1$.

Подчеркнем, что точки экватора сферы $\mathbb{S}^2$ соответствуют векторам вида $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Под действием A^n вектор X поворачивается n раз на угол φ в координатной плоскости $0x^1x^2$.

Возможны следующие два случая.

Случай 1. Для значений углов φ, сравнимых с нулем по $mod\ 2\pi$, найдется такое m, что $A^m X = X \ \forall\, X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. То есть вектор $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ после поворота на угол $m\varphi \in \mathbb{N}$ вернется в начальное положение. Например, при значении угла $\varphi = \frac{\pi}{4}$ в качестве m можно взять $m = 8k$, $k \in \mathbb{Z}$. В таком случае все орбиты точек экватора $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ конечны и, следовательно, замкнуты. Им соответствуют замкнутые слои слоения (M, F), диффеоморфные окружности $\mathbb{S}^1$.

Исследуем поведение других слоев. Пусть $x = f \circ \sigma(X)$, где $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, причем $X^1 \neq 0$ и $X^3 > 0$. Тогда $A^n X \to N$ при $n \to +\infty$. Кроме того, замыкание $\overline{\Gamma.x}$ орбиты $\Gamma.x$ содержит конечное множество из m точек, представляющее собой проекцию на $\mathbb{RP}^2$ конечной орбиты вектора $X' = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ относительно группы с образующей A. Следовательно, слой $L = k(pr_2^{-1}(x))$

не замкнут, диффеоморфен прямой, а его замыкание равно

$$\overline{L} = L \cup L_0 \cup L',$$

где $L' = k(pr_2^{-1}(\Gamma.y))$, $y = f(\sigma(X'))$, и L_0 — компактные слои.

Таким образом, в случае 1 проективное слоение (M, F) – собственное, имеет континуум минимальных множеств, диффеоморфных окружности. Среди них существует единственный изолированный компактный слой, остальные компактные слои образуют рациональные обмотки вложенного тора $\mathbb{T}^2 \subset M$. Любой некомпактный слой L диффеоморфен $\mathbb{R}^1$, а его предельное множество $\overline{L} \setminus L$ равно объединению изолированного компактного слоя L_0 и некоторого компактного слоя L' на указанном торе.

Случай 2. В случае значений угла φ, не сравнимых с нулем по $mod\ 2\pi$, вектор $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ после поворота на угол $n\varphi$ никогда не вернется в начальное положение. Следовательно, замыкание $\overline{\Gamma.X} = \mathcal{K}$ орбиты $\Gamma.X$ есть окружность в $\mathbb{RP}^2$, которая является образом экватора при фактор-отображении $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$. Так как $\mathcal{K}$ — нетривиальное минимальное множество группы Γ, то оно соответствует нетривиальному минимальному множеству $\mathcal{M}$ слоения, причем $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^1 \times \mathcal{K})/\mathbb{Z} = (\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}^2$ диффеоморфно тору.

Исследуем поведение других слоев. Пусть $y = f \circ \sigma(Y)$, где $Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \end{pmatrix}$, причем $Y^1 \neq 0$ и $Y^3 > 0$. Тогда $\gamma_A^n(y) \to N$ при $n \to +\infty$. Кроме того, при $n \to +\infty$ $\mu^n Y^3 \to 0$, поэтому замыкание орбиты $\Gamma.y$ содержит окружность $\mathcal{K}$, нетривиальное минимальное множество группы Γ. Наблюдение показывает, что орбита $\Gamma.y$ дискретна, поэтому, согласно теореме 6.1, слои $L_y := k(pr_2^{-1}(y))$ — собственные. Замыкание слоя L_y равно

$$\overline{L_y} = L_y \cup L_0 \cup \mathcal{M}.$$

Таким образом, в случае 2 проективное слоение (M, F) имеет нетривиальное минимальное множество, диффеоморфное тору, индуцированное слоение на котором образовано иррациональными обмотками тора, и тривиальное минимальное множество — единственный замкнутый слой L_0. Остальные слои

собственные, диффеоморфны прямой, причем каждый из них в замыкании содержит оба минимальных множества.

Список литературы

[1] Аносов Д.В. Минимальное множество // Математическая энциклопедия. М.: Сов. энц., 1982. Т. 3. С. 690–691.

[2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Из-во МГУ, 1980.

[3] Жукова Н.И. Минимальные множества картановых слоений // Тр. МИАН. 2007. Т. 256, С. 115–147.

[4] Жукова Н.И. Глобальные аттракторы конформных слоений // Мат. сб. 2012. Т. 256, С. 115–147.

[5] Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979.

[6] Inaba T. An example of a flow on a non-compact surface without minimal set // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1999. V. 19, N 1. P. 31–33.

[7] Beniere J.C., Meigniez G. Flows without minimal set // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1999. V. 19, № 1. P. 21–30.

[8] Blumenthal R. A., Hebda J.J. Ehresmann connections for foliations// Indiana Univ. Math. J 1984. V.33, № 4. P. 597–611.

[9] Матвеев В.С. О числе нетривиальных проективных преобразований замкнутых многообразий // Фунд. и прикладная математика. 2015. Т. 20, № 2. С. 125–131.

[10] Зуланке Р. Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.

[11] Пале Р. Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе // М.: Мир, 1970.

[12] Blumenthal R. Transversely homogeneous foliations. Ann. Institut Fourier. 1979. V. 29. P. 143–158.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Аксеновой Дарья
Дмитриевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Автоморфизмы моноидов изотопических классов струнных зацеплений» являются: глава 4, леммы 3.2, 3.3 и 3.4.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с января 2020 года по май 2021 года мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: струнные зацепления, моноиды струнных зацеплений, автоморфизмы струнных зацеплений, автоморфизмы групп крашеных кос. в выдаче поисковиков было исследованы статьи и книги представленные в списке литературы, прилагаемом к настоящей ВКР и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работе [BNS18] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако не для струнных зацеплений, а для крашеных кос, и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Нежинским Владимиром Михайловичем, профессором СПбГУ (кафедра высшей геометрии) и РГПУ им. А. И. Герцена (кафедра геометрии).
- Проведена серия консультаций с ведущим научным сотрудником ПОМИ РАН Малютиным Андреем Валерьевичем.
- Проведено выступление на студенческом семинаре по маломерной топологии Международного математического института им. Л. Эйлера.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на

мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 25.06.2021. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись  Аксенова Дарья Дмитриевна
30.05.2021
Санкт-Петербург, Россия

Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»



Выпускная квалификационная работа

Автоморфизмы моноидов изотопических классов струнных зацеплений

Обучающегося 2 курса очной формы обучения
направление подготовки: 44.04.01 Педагогическое образование
направленность (профиль): Математическое образование

Аксеновой Дарьи Дмитриевны

Руководитель выпускной
квалификационной работы:
д. ф.-м. наук, профессор,
зав. кафедрой геометрии
Нежинский Владимир
Михайлович

Санкт-Петербург
2021

1158

Аннотация

Настоящая работа посвящена исследованию моноидов StL_n струнных зацеплений с n нитями и содержащихся в них групп крашеных кос P_n. Определяется новая серия автоморфизмов этих моноидов. Исключительность этой серии обусловлена тем, что их ограничения на подгруппы крашеных кос дополняют автоморфизм-отражение, внутренние и центральные автоморфизмы до порождающего множества $Aut(P_n)$. Отметим, что геометрический смысл последних автоморфизмов контрастирует с конструкцией новых автоморфизмов. Изложение этой конструкции и является основным результатом настоящей работы.

Содержание

1 Введение **3**

2 Предварительные сведения **4**
2.1 Изотопии шаров и сфер 4
2.2 Струнные зацепления 4
2.3 Ленты 5
2.4 Зацепления с лентой 6

3 Леммы **6**
3.1 О выпрямлении ленты 6
3.2 О заталкивании струн в правый цилиндр 8
3.3 Об изотопической однозначности выпрямления ленты 9
3.4 Об изотопической однозначности заталкивания струн в правый цилиндр 11

4 Определение автоморфизмов θ_n **13**
4.1 Построение 14
4.2 Корректность построения 15
4.3 Свойство гомоморфизма и биективность 16

5 Автоморфизмы групп крашеных кос P_n **16**
5.1 Группы крашеных кос 16
5.2 Действие автоморфизма θ_n на группе крашеных кос P_n 18
5.3 Связь между автоморфизмом θ_n и известными автоморфизмами групп крашеных кос 19

1159

1 Введение

Теория узлов и зацеплений получила свое бурное развитие в 20 веке. Многие известные математики, такие как М. Ден, Дж. Конвей, Э. Артин, У. Тёрстон, А. А. Марков, занимались ее изучением. Было открыто большое количество инвариантов, таких как инварианты Александера, Джонса и Конвея или, на более поздних этапах, инварианты Васильева, Гусарова и Концевича. Также существуют алгоритмы различения трехмерных многообразий, которые помогают отличать узлы. Тем не менее в настоящее время эта научная область продолжает развиваться.

Исследования изотопических классов вложений многообразий малой размерности являются одной из центральных линий топологии. Некоторые из них образуют алгебраические структуры, анализ которых помогает продвинуться в вопросе понимания этих объектов. Стоит отметить, что изучение автоморфизмов позволяет приблизиться к решению задачи классификации, которая, в свою очередь, является основной целью многих разделов математики.

Настоящая работа посвящена описанию нового класса автоморфизмов моноидов StL_n изотопических классов струнных зацеплений с n нитями. Струнные зацепления обобщают крашеные косы, являющиеся классическим объектом маломерной топологии. Теория кос Артина допускает алгебраическое описание, и благодаря этому в ней совершено большое количество открытий. В том числе в 1981 году Дж. Дайер и И. Гроссман (см. [DGO21]) описали автоморфизмы групп кос B_n, а в 2007 году Р. Бэлл и Д. Маргалит (см. [BM07]) представили группы автоморфизмов $Aut(P_n)$ групп крашеных кос P_n в виде полупрямого произведения центральных автоморфизмов $Aut_c(P_n)$ и группы классов отображений $Mod(S_{n+1})$ проколотой сферы. А в 2017 году В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим и М. Синг (см. [BNS18]) предложили порождающее множество для группы $Aut(P_n)$.

В настоящей работе определяются новые автоморфизмы $\theta_n \colon StL_n \to StL_n$. Мы показываем, что они в некотором смысле продолжают с P_n до StL_n автоморфизмы $w_n \colon P_n \to P_n$, определённые для $n \geq 4$ в работе [BNS18].

Опишем структуру настоящей работы.

В разделе *Предварительные сведения* приводятся основные определения.

В разделе *Леммы* доказываются четыре вспомогательных результата, на которые опирается построение автоморфизмов θ_n и его корректность. А именно, рассматриваются процедуры, называющиеся *выпрямлением ленты* и *затакливанием струн в правый цилиндр*.

Следующий раздел *Определение автоморфизмов* θ_n состоит из трёх частей. В первой части изложено построение θ_n. Во второй части доказывается его корректность. В третьей части доказывается, что функции θ_n являются автоморфизмами, то есть обратимы и удовлетворяют свойству гомоморфизма.

Заключительный раздел *Автоморфизмы групп крашеных кос* состоит из трёх частей. В первой части вводятся вспомогательные определения, связанные с группами крашеных кос. Во второй части описывается задание автоморфизмов θ_n на стандартных образующих групп P_n. В третьей части устанавливается связь между автоморфизмами θ_n и известными порождающими множествами для групп $Aut(P_n)$.

1160

2 Предварительные сведения

В настоящем разделе вводятся понятия, связанные со струнными зацеплениями и лентами.

2.1 Изотопии шаров и сфер

Далее под *шаром* D^3 имеется в виду произвольное топологическое пространство, диффеоморфное замкнутому единичному шару в $\mathbb{R}^3$. Аналогично определяются *сферы* S^2 и S^3.

Сечением $F_t\colon A \to B$ отображения $F\colon A\times[0,1] \to B$, где $t \in [0,1]$, называется отображение, определённое формулой $F_t(a) = F(a,t)$.

Изотопией сферы S^3 (соотв. шара D^3) называется гладкое отображение $F\colon S^3\times[0,1] \to S^3$ (соотв. $F\colon D^3 \times [0,1] \to D^3$) такое, что для любого $t \in [0,1]$ сечение $F_t\colon S^3 \to S^3$ (соотв. $F_t\colon D^3 \to D^3$) является диффеоморфизмом.

Мы говорим, что изотопия F сферы S^3 (соотв. шара D^3) *неподвижна* на $A \subset S^3$ (соотв. $A \subset D^3$), если для любого $t \in [0,1]$ сужение на A сечения F_t является тождественным.

Следующий результат получен в работе [Cerf68].

Предложение 2.1. Пусть φ — диффеоморфизм шара D^3 такой, что ограничение φ на границу $S^2 := \partial D^3$ шара D^3 является тождественным. Тогда существует изотопия F шара D^3 такая, что:

1. F неподвижна на S^2;
2. $F_0 = id$;
3. $F_1 = \varphi$.

2.2 Струнные зацепления

Здесь и далее в работе мы предполагаем, что зафиксировано $n \in \mathbb{N}$. В некоторых обозначениях мы опускаем индекс n, когда он может быть восстановлен из контекста.

Пусть $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация евлидова пространства $\mathbb{R}^3$. Для $r = (n+1)/2$ положим $D := \{(x,y) \mid x^2 + (y-r)^2 \le r^2\}$. Пусть $C_n := D \times [0,1]$ — цилиндр, $D_1 := D \times \{0\}$ и $D_2 := D \times \{1\}$ — его нижнее и верхнее основание. Для $k \in \{1,2,\dots,n\}$ обозначим через $a_k := (0,k,0)$ и $b_k := (0,k,1)$ точки в дисках D_1 и D_2 соответственно.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $A_1, A_2, \dots, A_m$ – конечное семейство множеств. Определим их *дизъюнктное объединенение* формулой

$$\coprod_{k=1}^{m} A_k := \bigcup_{k=1}^{m} \{(a,k) \mid a \in A_k\}.$$

Обозначим через I_n дизъюнктное объединение n копий отрезка $[0,1]$.

Определение 2.1. *Зацеплением с n нитями* называется гладкое вложение $f\colon I_n \to S^3$ такое, что:

1. $f(0,k) = a_k$ и $f(1,k) = b_k$ для всех $k \in \{1,2,\dots,n\}$;
2. $f(\operatorname{Int} I_n)$ не пересекается с $D_1 \cup D_2$;

1161

3. существует такое $\varepsilon > 0$, что $f([0,\varepsilon]\times\{1,2,\dots,n\}) \subseteq C_n$ и $f([1-\varepsilon,1]\times\{1,2,\dots,n\}) \subseteq C_n$;

Определение 2.2. Зацепление с n нитями f называется *струнным зацеплением с n нитями*, если $f(\mathrm{Int}\ I_n) \subset \mathrm{Int}\ C_n$.

Струнные зацепления f_1 и f_2 с n нитями называются *изотопными*, если существует изотопия F трехмерной сферы S^3 такая, что:

1. F неподвижна на $S^3 \setminus \mathrm{Int}\ C_n$;
2. $F_0 = id$;
3. $F_1 \circ f_1 = f_2$.

Легко видеть, что изотопность струнных зацеплений с n нитями является отношением эквивалентности. Обозначим через StL_n множество соответствующих классов эквивалентности. Элемент множества StL_n называется *изотопическим классом струнных зацеплений*.

На множестве StL_n определим операцию $*\colon StL_n \times StL_n \to StL_n$ следующим образом. *Произведением* изотопических классов струнных зацеплений f и g называется изотопический класс струнного зацепления $fg\colon I_n \to C_n$, определённого формулой

$$(fg)(t,k) = \begin{cases} f(2t,k), & \text{при } t \in [0,\frac{1}{2}], \\ g(2t-1,k), & \text{при } t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Легко видеть, что это произведение корректно и что операция $*$ задаёт на StL_n структуру моноида.

2.3 Ленты

Определение 2.3. Пусть $l : [0,1]^2 \to S^3$ – гладкое вложение. Его *сердцевиной* $c_l : [0,1] \to S^3$ называется отображение, заданное формулой $c_l(t) := l(1/2,t)$. Вложение l называется *лентой*, если:

1. $l(t,0) = (0,t+1/2,0)$ и $l(t,1) = (0,t+1/2,1)$;
2. $l([0,1]\times(0,1))$ не пересекается с $D_1 \cup D_2$;
3. сердцевина c_l является зацеплением с 1 нитью.

Допуская вольность речи, будем называть сердцевиной ленты l и отображение c_l, и его образ.

Определение 2.4. Пусть l – такая лента, что $\mathrm{Im}\ l \subseteq \mathbb{R}^3$. Её *коэффициентом скручивания* $lk(l)$ называется степень отображения $\psi\colon (0,1)^2 \to S^2$, заданного формулой

$$\psi(t,s) = \frac{l(0,t) - l(1,s)}{|l(0,t) - l(1,s)|}.$$

Как и в случае классического коэффициента скручивания оснащённых узлов, коэффициент скручивания ленты допускает стандартные наглядную интерпретации (см. [BZ03]).

1162

2.4 Зацепления с лентой

Определение 2.5. *Зацеплением с лентой и n нитями* называется гладкое вложение $f\colon [0,1]^2 \coprod I_n \to S^3$ такое, что:

1. отображение $l\colon [0,1]^2 \to S^3$, заданное формулой $l(s,t) = f(s,t,1)$, является лентой;
2. отображение $g\colon I_{n+1} \to S^3$, заданное формулой $g(t,1) = f(1/2,t,1)$ и $g(t,k) = (t,k,2)$ для $k \in \{2,3,\dots,n\}$, является зацеплением с $n+1$ нитью.

3 Леммы

В настоящем разделе формулируются и доказываются вспомогательные результаты, необходимые для определения автоморфизмов θ_n.

3.1 О выпрямлении ленты

Прямой называется лента $l_0\colon [0,1]^2 \to S^3$, заданная формулой

$$l_0(t,s) = (0, t+1/2, s).$$

Лемма 3.1. Пусть $l\colon [0,1]^2 \to C_n$ — лента в цилиндре C_n, коэффициент скручивания которой делится на 4. Тогда существует изотопия Φ трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1. Φ неподвижна на $D_1 \cup D_2$;
2. $\Phi_0 = id$;
3. $\Phi_1 \circ l = l_0$.

Доказательство. Хорошо известно (см. аналогичную конструкцию для узлов и зацеплений в [BZ03]), что любая изотопия трёхмерной сферы S^3, неподвижная на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C_n$, сохраняет коэффициент скручивания ленты. Обозначим через π ортогональный проектор $\mathbb{R}^3$ на плоскость $\{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$. Известно (см. аналогичную конструкцию для узлов и зацеплений в [BZ03]), что существует изотопия F трехмерной сферы S^3 такая, что:

1. F неподвижна на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C_n$;
2. $F_0 = id$;
3. проекция относительно π сердцевины ленты $l_1 := F_1 \circ l$ регулярна и не пересекает проекции дисков D_1 и D_2.

Пусть V – регулярная окрестность сердцевины ленты l_1. Заметим, что существует изотопия G трехмерной сферы S^3 такая, что:

1. G неподвижна на объединении $S^3 \setminus \operatorname{Int} C_n$ и сердцевины ленты l_1;
2. $G_0 = id$;
3. образ ленты $l_2 := G_1 \circ l_1$ содержится в V.

1163

Обозначим через $\mathcal{D}$ диаграмму сердцевины ленты l_2 относительно вышеупомянутой регулярной проекции π. Обойдем все перекрестки этой диаграммы, согласно ориентации сердцевины, начиная от диска D_1. В процессе обхода каждый перекресток посещается дважды. Перекресток называется *нисходящим* (соотв. *восходящим*), если при первом его посещении мы проходим по сердцевине ленты сверху (соотв. снизу). Диаграмма $\mathcal{D}$ называется *нисходящей* (соотв. *восходящей*), если все её перекрестки являются нисходящими (соотв. восходящими).

Обозначим через J объединение по всем двойным точкам $c \in \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ диаграммы $\mathcal{D}$ всех отрезков на $\pi^{-1}(c)$, соединяющих точки сердцевины ленты l_2. Обозначим через U регулярную окрестность объединения дисков D_1 и D_2, сердцевины ленты l_2 и множества J.

Далее опишем изотопию H трёхмерной сферы S^3 такую, что:

1. H неподвижна на $S^3 \setminus U$;
2. $H_0 = id$;
3. проекция сердцевины ленты $l_3 := H_1 \circ l_2$ на плоскость $\{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ регулярна и соответствующая диаграмма является нисходящей;
4. $|lk(l_3) - lk(l_2)|$ делится на 4.

Последовательно для каждого восходящего перекрестка c диаграммы $\mathcal{D}$ проделаем следующую процедуру, изменяющую ленту l_2. Обозначим через δ часть ленты, соответствующей верхней дуге перекрестка c. Выполним следующую последовательность действий (см. Рис. 1):

1. приблизим часть δ к части ленты, соответствующей нижней дуге перекрестка c;
2. подвинем часть δ вдоль ленты к диску D_1;
3. обогнем частью δ диск D_1;
4. подвинем часть δ вдоль ленты к перекрестку c.

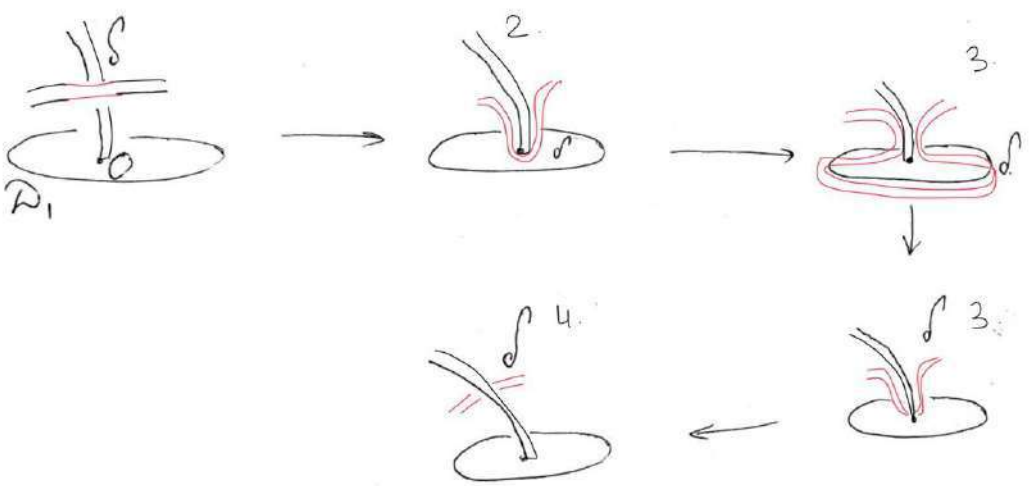


Рис. 1: Изменение типа перекрестка

Легко видеть, что каждое такое действие изменяет коэффициент скручивания ленты на 4 и что в результате всех действий получается нисходящая диаграмма. Таким образом, указанная последовательность процедур задает искомую изотопию H.

Хорошо известно (см. [Cr04, Theorem 2]), что существует изотопия K трехмерной сферы S^3 такая, что:

1. K неподвижна на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C_n$;
2. $K_0 = id$;
3. композиция K_1 и сердцевины l_3 является сердцевиной прямой ленты l_0.

Заметим, что коэффициенты скручивания ленты l_3 и $l_4 := K_1 \circ l_3$ совпадают. Отсюда следует, что число $lk(l_4)$ делится на 4. Значит существует (см. [Fra07, Spherical Braids] и [Fra07, Plate Trick]) изотопия M трехмерной сферы S^3 такая, что:

1. M неподвижна на $D_1 \cup D_2$;
2. $M_0 = id$;
3. $M_1 \circ l_4 = l_0$.

Таким образом, искомая изотопия трехмерной сферы S^3 найдена. □

3.2 О заталкивании струн в правый цилиндр

Пусть $f\colon [0,1]^2 \coprod I_{n-1} \to S^3$ — зацепление с лентой и $n-1$ нитью такое, что соответствующая лента является прямой.

Положим $T := D_1 \cup D_2 \cup \operatorname{Im} l_0$. Будем называть *правой половиной цилиндра* C_n множество $C'_n := C_n \cap \{(x,y,z) \mid y \geq 3/2,\ x,z \in \mathbb{R}\}$.

Обозначим через $\bar{f}$ сужение на I_{n-1} вложения f.

Лемма 3.2. Существует изотопия Ψ трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1. Ψ неподвижна на T;
2. $\Psi_0 = id$;
3. $\operatorname{Im}(\Psi_1 \circ \bar{f}) \subseteq C'_n$.

Доказательство. Приведем конструктивное описание изотопии Ψ. Сначала опишем последовательность действий, выталкивающих струны в $\{(x,y,z) \mid y \geq 3/2,\ x,z \in \mathbb{R}\}$ (см. Рис. 2):

1. Возьмем регулярную окрестность ленты l_0. От отрезка $\{(0,3/2,z) \mid 0 \leq z \leq 1\}$ в полупространстве $y \leq 3/2$ раздуем эту окрестность, как показано на рисунке (параллельно плоскости $z = 0$). Таким образом, выталкиваем зацепление за левую часть цилиндра.
2. Их точки $K(0,0,\frac{1}{2})$ нее выпустим луч в отрицательном направлении оси . Если луч пересек нити зацепления, то в окрестностях этих точек немного сдвинем их, избавясь от пересечений. Далее возьмем регулярную окрестность луча, сходящуюся в точке K. Раздуем эту окрестность из точки K до плоскости $y = 0$. При этом в левую часть цининдра нити не могут проникать. Затем подвинем эту плоскость вправо до положения $y = 3/2$.

1165

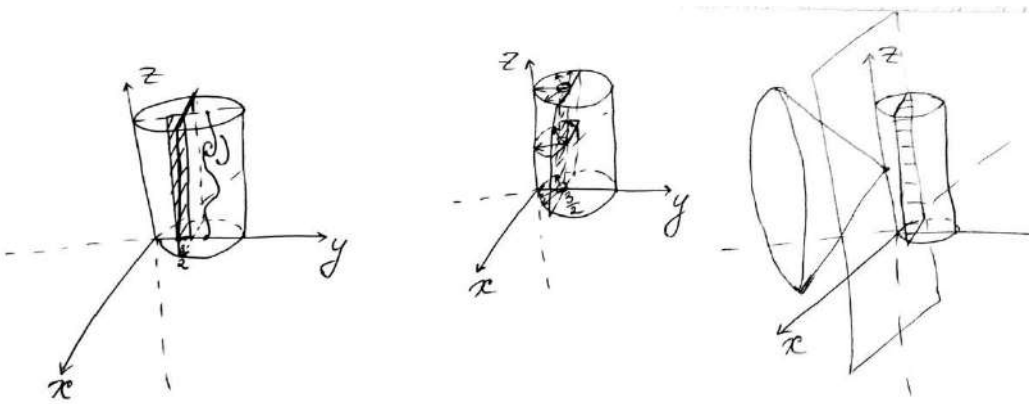


Рис. 2: Раздувание окрестностей

Таким образом, получили полупространство с полудисками и прикрепленными к ним нитями (Рис. 4). Сгладив вершину конуса, выталкивание струн проводим таким же образом. Далее очевидно, что нити можно поместить в C'_n.

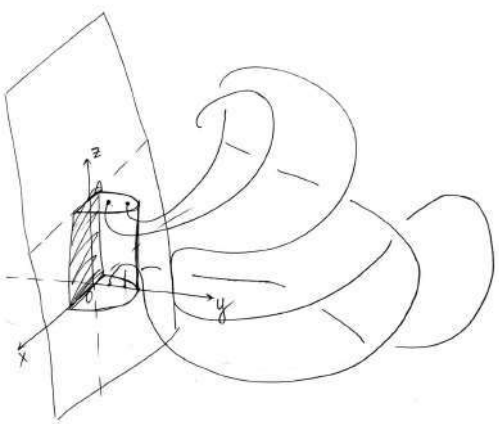


Рис. 3

Таким образом, искомая изотопия трёхмерной сферы S^3 найдена. □

3.3 Об изотопической однозначности выпрямления ленты

Пусть $f, f', g, g' \colon [0,1]^2 \coprod I_{n-1} \to S^3$ — зацепления с лентой и n нитями такие, что ленты, соответствующие f' и g', являются прямыми. Пусть F и G – изотопии трёхмерной сферы S^3 такие, что:

1. F и G неподвижны на $D_1 \cup D_2$;
2. $F_0 = id$ и $G_0 = id$;
3. $F_1 \circ f = f'$ и $G_1 \circ g = g'$.

Лемма 3.3. Пусть Г – изотопия трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1166

1. Γ неподвижна на $D_1 \cup D_2$;
2. $\Gamma_0 = id$;
3. $\Gamma_1 \circ f = g$.

Тогда существует изотопия Ω трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1. Ω неподвижна на T;
2. $\Omega_0 = id$;
3. $\Omega_1 \circ f' = g'$.

Доказательство. Пусть $Z := \{(x, y, z) \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1/4,\ z \in [0,1]\}$ — цилиндр, ограничивающий прямую ленту, то есть $\partial\,(\mathrm{Im}\ l_0) \subseteq \partial Z$. Пусть

$$R := Z \cup (D \times [-1/2, 0]) \cup (D \times [1, 3/2]),$$

где $D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-r)^2 \le r^2\}$.

Заметим, что существует диффеоморфизм $\tau\colon S^3 \setminus R \to S^3 \setminus T$. Положим

$$\psi := \begin{cases} \left(\tau^{-1} \circ G_1 \circ \Gamma_1 \circ F_1^{-1} \circ \tau\right), & \text{если } x \in S^3 \setminus R; \\ x, & \text{если } x \in R. \end{cases}$$

Поскольку диффеоморфизм $G_1 \circ \Gamma_1 \circ F_1^{-1}$ тождествен на T, отображение ψ является диффеоморфизмом S^3. Заметим, что диффеоморфизм ψ тождествен на R.

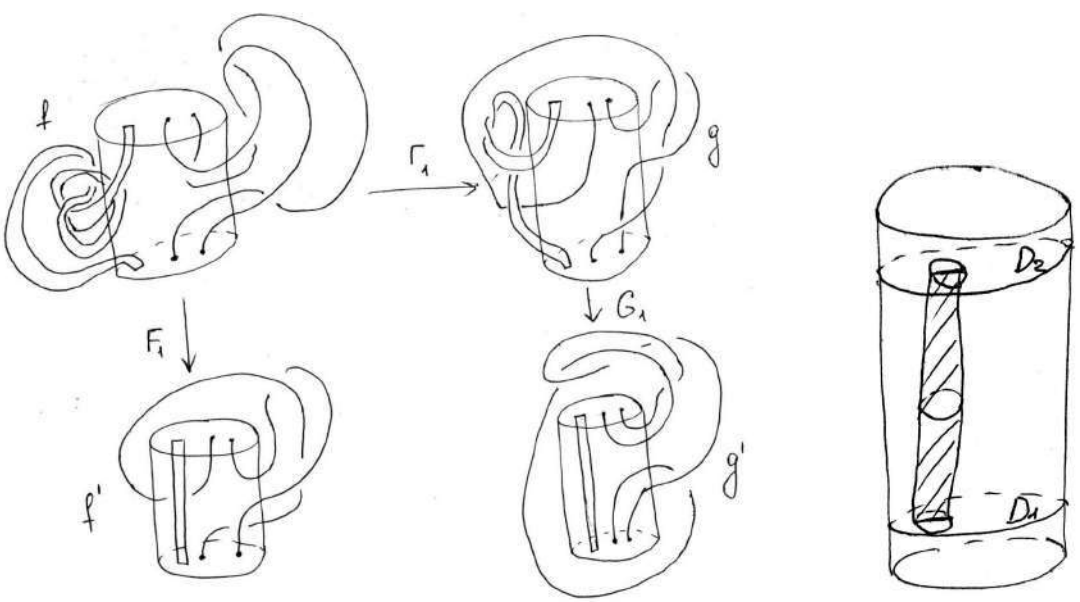


Рис. 4: Слева: Иллюстрация к формулировке Леммы 3.3. Справа: множество R.

Положим $B := S^3 \setminus \mathrm{Int}\ R$. Пусть $\varphi\colon B \to B$ — ограничение диффеоморфизма ψ на трёхмерный шар B. По определению ψ, ограничение диффеоморфизма φ на ∂B является тождественным. Из Предложения 2.1, применённого к диффеоморфизму φ, следует, что существует изотопия K трёхмерного шара B такая, что:

1167

1. K неподвижна на ∂B;

2. $K_0 = id$;

3. $K_1 = \varphi$.

Заметим, что $\tau^{-1}(S^3 \backslash T) = B$ и $\tau(B) = S^3 \backslash T$. Определим изотопию Ω трёхмерной сферы S^3 формулой

$$\Omega(x,t) := \begin{cases} \tau(K(\tau^{-1}(x),t)), & \text{если } x \in S^3 \setminus T; \\ x, & \text{если } x \in T. \end{cases}$$

По определению диффеоморфизма τ и изотопии K трёхмерного шара B, отображение Ω является гладким.

Заметим, что Ω неподвижна на T и что $\Omega_0 = id$. Имеем

$$\begin{aligned} \Omega_1 \circ f' &= \tau \circ \psi \circ \tau^{-1} \circ f' \\ &= \tau \circ \left(\tau^{-1} \circ G_1 \circ \Gamma_1 \circ F_1^{-1} \circ \tau\right) \circ \tau^{-1} \circ f' \\ &= G_1 \circ \Gamma_1 \circ F_1^{-1} \circ f' = G_1 \circ \Gamma_1 \circ f = G_1 \circ g = g'. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая изотопия трехмерной сферы S^3 найдена. □

Отметим, что для доказательства корректности определения автоморфизмов θ_n требуется лишь частный случай Леммы 3.3, в котором условие «Γ неподвижна на $D_1 \cup D_2$» ослаблено до «Γ неподвижна на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C_n$». Для полноты повествования мы приводим и доказываем более общую формулировку утверждения.

3.4 Об изотопической однозначности заталкивания струн в правый цилиндр

Пусть $f, g\colon [0,1]^2 \coprod I_{n-1} \to S^3$ — зацепления с лентой и n нитями такие, что ленты, соответствующие f и g, являются прямыми. Обозначим через $\bar{f}$ и $\bar{g}$ сужения на I_n вложений f и g соответственно. Пусть F и G – изотопии трёхмерной сферы S^3 такие, что:

1. F и G неподвижны на T;

2. $F_0 = id$ и $G_0 = id$;

3. $\operatorname{Im}(F_1 \circ \bar{f}) \subseteq C'_n$ и $\operatorname{Im}(G_1 \circ \bar{g}) \subseteq C'_n$.

Положим $f' := F_1 \circ f$ и $g' := G_1 \circ g$.

Лемма 3.4. Пусть Ω – изотопия трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1. Ω неподвижна на T;

2. $\Omega_0 = id$;

3. $\Omega_1 \circ f = g$.

Тогда существует изотопия Λ трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1168

1. Λ неподвижна на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C'_n$;

2. $\Lambda_0 = id$;

3. $\Lambda_1 \circ f' = g'$.

Доказательство. Пусть $M := \partial C'_n \setminus T$ — часть боковой поверхности цилиндра C'_n, дополняющая правый край ленты l_0.

Для удобства представим трехмерную сферу S^3 в виде трехмерного шара B, содержащего C_n, с отождественными точками границы ∂B (см. левую часть Рис. 5). Определим изотопию $\mathcal{B}$ трёхмерной сферы S^3 следующим образом.

1. Точку на боковой поверхности цилиндра C'_n подведем к краю шара B.(см. центральную часть Рис. 5)

2. Так как точки края шара B отождествлены в пространстве S^3, расширим точку касания до окружности вдоль края шара B (см. правую часть Рис.5).

3. Вдоль края шара B будет снача расширять окружность, а затем сужать по другую сторону от цилиндра C'_n (см. Рис.6)

4. Аналогично пункту 1 от точки касания приблизим точку касания, но у цилиндру со стороны ленты (см. Рис. 7).

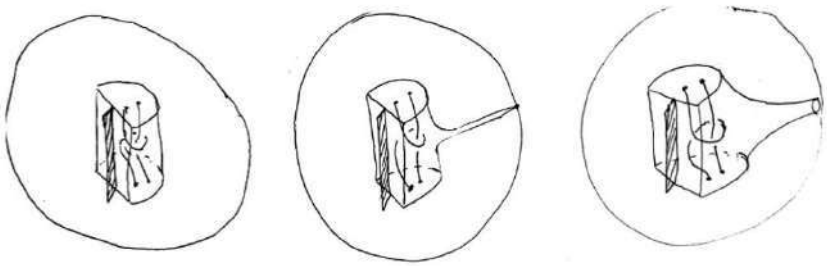


Рис. 5: Начало построения изотопии $\mathcal{B}$.

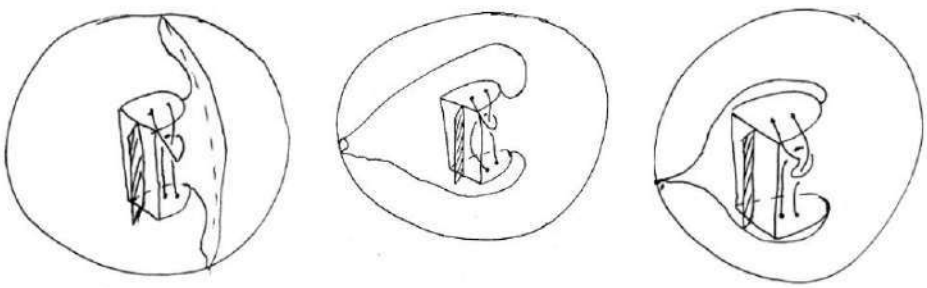


Рис. 6: Продолжение построения изотопии $\mathcal{B}$.

1169

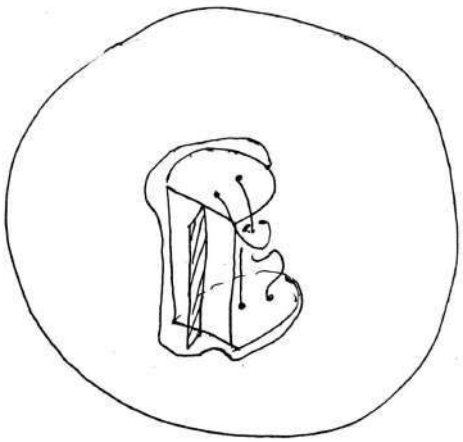


Рис. 7: Окончание построения изотопии $\mathcal{B}$.

Нетрудно видеть, что преобразования 1-4 можно считать гладкими.
Обозначим $\varphi := \mathcal{B}_1^{-1} \circ \Omega_1 \circ \mathcal{B}_1$ и заметим, что диффемоморфизм φ тождествен на $T \cap \partial C'_n$.
Легко видеть, что существует изотопия H трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1. H неподвижна на T;
2. $H_0 = id$;
3. диффеоморфизм $H_1 \circ \varphi$ тождествен на M.

Пусть $\psi\colon C'_n \to C'_n$ — ограничение $H_1 \circ \varphi$ на C'_n. Заметим, что ограничение ψ на край шара C'_n является тождественным. Из Предложения 2.1 следует, что существует изотопия K трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1. K неподвижна на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C'_n$;
2. $K_0 = id$;
3. $K_1 \circ \psi = id$.

Определим изотопию Λ трёхмерной сферы S^3 формулой

$$\Lambda(x,t) := \begin{cases} K(x,t), & \text{если } x \in C'_n; \\ x, & \text{если } x \in S^3 \setminus C'_n. \end{cases}$$

Заметим, что Λ неподвижна на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C'_n$ и что $\Lambda_0 = id$. Имеем

$$\Lambda_1 \circ f' = \mathcal{B}_1^{-1} \circ \Omega_1 \circ \mathcal{B}_1 \circ f' = \mathcal{B}_1^{-1} \circ \Omega_1 \circ f' = \mathcal{B}_1^{-1} \circ g' = g'.$$

Таким образом, искомая изотопия трёхмерной сферы S^3 найдена. □

4 Определение автоморфизмов θ_n

В настоящем разделе приводится определение отображений $\theta_n\colon StL_n \to StL_n$, доказывается его корректность и доказывается, что θ_n является автоморфизмом моноида StL_n.

1170

4.1 Построение

Пусть f — струнное зацепление с n нитями. Определим новое струнное зацепление f_5 следующим образом.

Шаг 1. К точкам $(0, n+1, 0)$ и $(0, n+1, 1)$ добавим еще одну нить, совпадающую с образующей цилиндра C_n. Иными словами, пусть $f_1 \colon I_{n+1} \to C_n$ — гладкое вложение такое, что:

1. сужение f_1 на I_n совпадает с f;
2. $f_1(t, n+1) = (0, n+1, t)$.

Шаг 2. Вклеим ленту l так, чтобы выполнялись следующие условия:

1. сердцевина l совпадает с первой нитью f;
2. лента l не пересекается с остальными нитями f;
3. коэффициент скручивания l равен нулю.

Иными словами, пусть $f_2 \colon [0,1]^2 \coprod I_n \to C_n$ — гладкое вложение такое, что выполняется следующее:

1. сужение вложения f_2 на $[0,1]^2$ является лентой с нулевым коэффициентом скручивания, сердцевина которой совпадает с сужением на I_1 вложения f_1;
2. сужение вложения f_2 на I_n совпадает с $f_1 \circ s$, где $s \colon I_n \to I_{n+1}$ определяется формулой $s(t,k) := (t, k+1)$.

Отметим, что f_2 — зацепление с лентой и n нитями.

Шаг 3. Согласно Лемме 3.1, существует изотопия Φ трехмерной сферы S^3, неподвижная на дисках D_1 и D_2 и выпрямляющая ленту l. Положим $f_3 := \Phi_1 \circ f_2$. Отметим, что f_3 — зацепление с лентой и n нитями.

Шаг 4. Согласно Лемме 3.2, существует изотопия Ψ трехмерной сферы S^3, неподвижная на стойке T, заталкивающая все нити в правый цилиндр C'_n. Положим $f_4 := \Psi_1 \circ f_3$. Отметим, что f_4 — зацепление с лентой и n нитями.

Шаг 5. Удалим ленту и сдвинем все нити влево так, чтобы их концы совпали с точками $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Иными словами, пусть $\bar{f}_4$ — сужение вложения f_4 на I_n и P — параллельный перенос, заданный формулой $P(x,y,z) := (x, y-1, z)$. Определим $f_5 \colon I_n \to C_n$ формулой $f_5(t,k) = P \circ \bar{f}_4(t,k)$. Отметим, что f_5 – струнное зацепление с n нитями.

Положим значение функции θ_n на изотопическом классе струнного зацепления f равным изотопическому классу струнного зацепления f_5.

Легко видеть, что в отличие от f_1, отображения $f_2, \ldots, f_5$ определены неоднозначно. Тем не менее, ниже показано, что функция θ_n определена корректно.

1171

4.2 Корректность построения

В настоящем разделе доказано, что значение функции θ_n не зависит от выбора представителей изотопических классов.

Пусть f и g — представители одного изотопического класса. Докажем, что струнные зацепления f_5 и g_5, определенные на **Шаге 5**, изотопны.

Обозначим через $F\colon S^3 \times [0,1] \to S^3$ изотопию между струнными зацеплениями f и g. Заметим, что $F_1 \circ f_1 = g_1$, где f_1 и g_1 определены на **Шаге 1**.

Пусть f_2 и g_2 – зацепления с лентой и n нитями, определённые на **Шаге 2**. Пусть $f_2' := F_1 \circ f_2$. Заметим, что ограничения на I_n вложений f_2' и g_2 совпадают и что сердцевины лент, соответствующих f_2' и g_2, совпадают. Поскольку коэффициенты скручивания таких лент совпадают, существует (см. аналогичную конструкцию для узлов и зацеплений в [BZ03]) изотопия G трёхмерной сферы S^3 такая, что:

1. G неподвижна на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C_n$;
2. G неподвижна на образе сужения на $(\{1/2\} \times [0,1]) \coprod I_n$ вложения g_2;
3. $G_0 = id$;
4. композиция G_1 и ленты, соответствующей вложению f_2', является лентой, соответствующей вложению g_2.

Определим изотопию Γ трёхмерной сферы S^3 формулой

$$\Gamma(x,t) := \begin{cases} F(x,2t), & \text{если } t \in [0,1/2]; \\ G(x,2t-1), & \text{если } t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Заметим, что $\Gamma_0 = id$, изотопия Γ неподвижна на $S^3 \setminus \operatorname{Int} C_n$ и

$$\Gamma_1 \circ f_2 = G_1 \circ F_1 \circ f_2 = G_1 \circ f_2' = g_2.$$

Существование изотопии Γ гарантирует возможность применения Леммы 3.3. Согласно этой лемме, существует изотопия Ω трехмерной сферы S^3 такая, что:

1. Ω неподвижна на T;
2. $\Omega_0 = id$;
3. $\Omega_1 \circ f_3 = g_3$, где f_3 и g_3 определены на **Шаге 3**.

Существование изотопии Ω гарантирует возможность применения Леммы 3.4. Согласно этой лемме, существует изотопия Λ трехмерной сферы S^3 такая, что:

1. Λ неподвижна на дополнении к $\operatorname{Int} C_n'$;
2. $\Lambda_0 = id$;
3. $\Lambda_1 \circ f_4 = g_4$, где f_4 и g_4 определены на **Шаге 4**.

Определим отображение $G\colon S^3 \times [0,1] \to S^3$ формулой

$$G(x,t) := \left(P \circ \Lambda_t \circ P^{-1}\right)(x),$$

где $P(x,y,z) = (x, y-1, z)$. Легко видеть, что G является изотопией между струнными зацеплениями f_5 и g_5.

Таким образом, отображение $\theta_n\colon StL_n \to StL_n$ определено корректно.

1172

4.3 Свойство гомоморфизма и биективность

В настоящем разделе доказано, что отображение θ_n является гомоморфизмом и биекцией.

Пусть f и g — струнные зацепления с n нитями. Пусть $f_1, \dots, f_5$ и $g_1, \dots, g_5$ — отображения, определённые при построении θ_n. Напомним, что процедура применения автоморфима θ_n является пошаговой. Реализуем её для струнного зацепления fg.

Заметим, что отображение $(fg)_1$ определено однозначно и $f_1 g_1 = (fg)_1$. Для $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ определим $f_k g_k$ аналогично тому, как определялось произведение струнных зацеплений, и положим $(fg)_k := f_k g_k$. Нетрудно видеть, что эти отображения удовлетворяют требуемым условиям. В частности, струнные зацепления $f_5 g_5$ и $(fg)_5$ изотопны. Значит θ_n удовлетворяет свойству гомоморфизма.

Докажем биективность θ_n. Для этого покажем, что существует обратное отображение θ_n^{-1}.

Обозначим через R_n поворот $\mathbb{R}^3$ на π вокруг прямой $\{(0, (n+1)/2, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Определим θ_n^{-1} аналогично θ_n, по шагам. Схема построения такая же со следующими отличиями:

1. на первом шаге нить добавляется к точкам $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$, а не к $(0, n{+}1, 0)$ и $(0, n{+}1, 1)$;
2. на втором шаге лента вклеивается к последней нити, а не к первой;
3. третий шаг осуществляется без изменений;
4. на четвертом шаге струны заталкиваются в цилиндр $C_n''' := R_n(C_n')$, а не в C_n';
5. на пятом шаге струны сдвигаются вправо, а не влево.

Доказательство корректности определения θ_n^{-1} проводится аналогично, как для θ_n. Нетрудно видеть, что $\theta_n \circ \theta_n^{-1} = \theta_n^{-1} \circ \theta_n = id$.

Замечание 4.1. Обозначим через $r_n \colon StL_n \to StL_n$ автоморфизм, заданный на струнных зацеплениях формулой $f \mapsto R_n \circ f$. Тогда $r_n^2 = id$ и

$$\theta_n^{-1} = r_n \circ \theta_n \circ r_n.$$

5 Автоморфизмы групп крашеных кос P_n

В настоящем разделе мы определяем группы крашеных кос P_n и доказываем, что для каждого $n \geq 4$ автоморфизм θ_n проволжает автоморфизм w_n групп крашеных кос P_n, определённый в работе [BNS18].

5.1 Группы крашеных кос

По определению, группа кос с 1 нитью тривиальна. Пусть $n \geq 2$.

Определение 5.1. *Группой кос с n нитями* называется группа B_n, заданная образующими и соотношениями следующим образом:

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ для } 1 \leq i \leq n-2 \text{ и } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ для } |i-j| \geq 2 \rangle.$$

1173

Элементы группы B_n допускают хорошо известную геометрическую интерпретацию (см. [KT08] и Рис. 8).

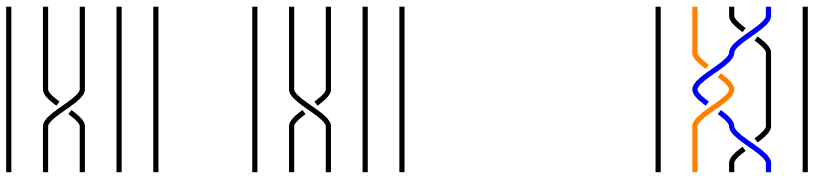


Рис. 8: Слева: косы σ_2 и σ_2^{-1} с 5 нитями. Справа: крашеная коса $A_{2,4}$ с 5 нитями.

Определение 5.2. *Группой крашеных кос с n нитями* P_n называется подгруппа группы B_n, порождённая элементами

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-1}^{-1},$$

где $1 \le i < j \le n$.

Равносильное данному геометрическое определение группы крашеных кос [KT08] аналогично определению моноида струнных зацеплений. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $r = (n+1)/2$ положим $D := (x,y) \mid x^2 + (y-r)^2 \le r^2$. Пусть $C_n := D \times [0,1]$ — цилиндр, а $D_1 := D \times \{1\}$ и $D_2 := D \times \{0\}$ — его верхнее и нижнее основание. Для $k \in \{1,2,\dots,n\}$ обозначим через $a_k := (0,k,0)$ и $b_k := (0,k,1)$ точки на дисках D_1 и D_2 соответственно. Обозначим через I_n дизъюнктное объединение n копий $X_k := [0,1]$ отрезка:

$$\coprod_{k=1}^{n} X_k = \bigcup_{k\in\{1,2,\dots,n\}} \{(t,k) \mid t \in X_k\}.$$

Определение 5.3. *Геометрической крашеной косой с n нитями* называется гладкое вложение $f\colon I_n \to C_n$ такое, что

1. $f(\operatorname{Int} I_n) \subset \operatorname{Int} C_n$;
2. $f(0,k) = a_k$ и $f(1,k) = b_k$ для $k \in \{1,2,\dots,n\}$;
3. $\operatorname{Im} f$ пересекается перпендикулярно с дисками D_1 и D_2.
4. $f(t,k) = (x,y,t)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$;

Геометрические косы с n нитями f_1 и f_2 называются *изотопными*, если существует изотопия F трехмерной сферы S^3 такая, что:

1. F неподвижна на дополнении к $\operatorname{Int} C_n$;
2. $F_0 = id$;
3. $F_1 \circ f_1 = f_2$;
4. для каждого t композиция $F_t \circ f$ является крашеной косой.

1174

Легко видеть, что изотопность геометрических кос с n нитями является отношением эквивалентности. Обозначим через P_n множество соответствующих изотопических классов. Элемент множества P_n называется *крашеной косой*.

Операция *произведение* для крашеных кос определяется аналогично операции произведения струнных зацеплений.

Пусть $v\colon P_n \to StL_n$ отображение, которое ставит в соответствие крашеной косе $\overline{b}$ ее изотопический класс $[b]$ как струнного зацепления.

Предложение 5.1. Отображение $v\colon P_n \to StL_n$ является инъективным гомоморфизмом.

Этот мономорфизм фиксирует вложение P_n в StL_n, которое теперь будет всегда подразумеваться в дальнейшем.

5.2 Действие автоморфизма θ_n на группе крашеных кос P_n

На Рис. 9 изображено действие автоморфизма θ_4 на образующих группы P_4. Для произвольного $n \geq 2$ действие автоморфизма θ_n на P_n задается следующей формулой:

$$\theta(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i-1,j-1}, & \text{для } i \neq 1; \\ (A_{1,2}A_{1,3}..A_{1,n})^{-1}, & \text{для } i = 1 \text{ и } j = 2; \\ (A_{1,n-1}A_{2,n-1}..A_{n-2,n-1}A_{n-1,n})^{-1}, & \text{для } i = 1 \text{ и } j = n; \\ (A_{1,j-1}A_{2,j-1}..A_{j-2,j-1}A_{j-1,j}..A_{j-1,n-1}A_{j-1,n})^{-1}, & \text{для } i = 1 \text{ и } 3 \leq j \leq n-1. \end{cases} \tag{1}$$

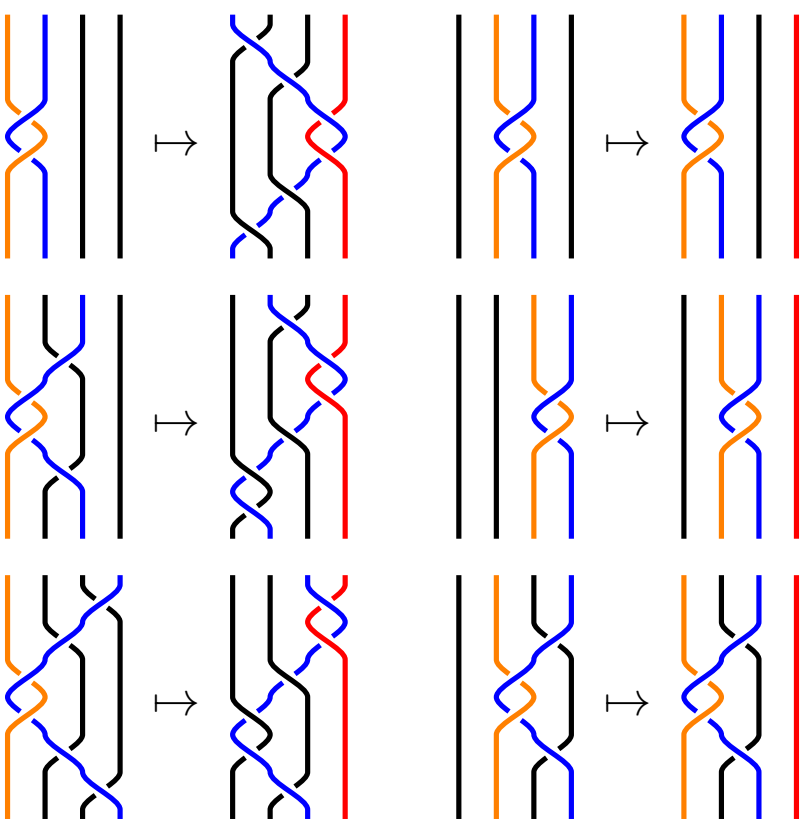


Рис. 9: Примеры действия автоморфизма θ_4.

1175

5.3 Связь между автоморфизмом θ_n и известными автоморфизмами групп крашеных кос

Пусть $n \geq 4$. В этом случае определён автоморфизм w_n группы P_n, описанный в работе [BNS18]. Напомним его задание на стандартных образующих:

$$w_n(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i,j}, & \text{для } i \neq 1 \text{ и } j \neq n; \\ (A_{1,n}A_{1,2}A_{1,3}..A_{1,n-1})^{-1}, & \text{для } i = 1 \text{ и } j = n; \\ (A_{2,n}A_{1,2}A_{2,3}..A_{2,n-1})^{-1}, & \text{для } i = 2 \text{ и } j = n; \\ (A_{i,n}A_{1,i}..A_{i-1,i}A_{i,i+1}..A_{i,n-1})^{-1}, & \text{для } i > 2 \text{ и } j = n. \end{cases}$$

Заметим, что выполняется следующее соотношение:

$$\theta_n(A_{i,j}) = \begin{cases} w_n(A_{i-1,j-1}), & \text{для } i \neq 1; \\ A_{1,n}^{-1}w_n(A_{1,n})A_{1,n}, & \text{для } i = 1 \text{ и } j = 2; \\ A_{n-1,n}^{-1}w_n(A_{n-1,n})A_{n-1,n}, & \text{для } i = 1 \text{ и } j = n; \\ A_{j-1,n}^{-1}w_n(A_{j-1,n})A_{j-1,n}, & \text{для } i = 1 \text{ и } 3 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Перепишем его следующим образом:

$$A_{i,j} \mapsto \begin{cases} w_n(A_{i-1,j-1}), & \text{при } i \neq 1; \\ A_{j-1,n}^{-1}w_n(A_{j-1,n})A_{j-1,n}, & \text{при } i = 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при $i \neq 1$ выполняется равенство

$$w_n(A_{i-1,j-1}) = A_{i-1,j-1}^{-1}w_n(A_{i-1,j-1})A_{i-1,j-1}.$$

Для $1 \leq j < i \leq n-1$ положим $A_{i,j} := A_{j,i}$. Далее индекс n отождествляется с индексом 0, индекс $n+1$ – с индексом 1, и так далее. Имеем:

$$\theta_n(A_{i,j}) = A_{i-1,j-1}^{-1}w_n(A_{i-1,j-1})A_{i-1,j-1}.$$

Таким образом, для $n \geq 4$ автоморфизм θ_n в некотором смысле продолжает автоморфизм w_n с группы крашеных кос P_n на моноид струнных зацеплений StL_n.

Пусть теперь $n = 3$. Опишем связь между автоморфизмом θ_3 и автоморфизмами из некоторого порождающего множества группы $Aut(P_3)$.

Напомним, что порождающий элемент центра группы P_3 имеет вид

$$z = A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3}.$$

Заметим, что группа P_3 порождается множеством $\{A_{1,2}, A_{2,3}, z\}$. Авторы статьи [BNS18] показывают, что группа $Aut(P_3)$ порождается следующими автоморфизмами:

$$\psi : \begin{cases} A_{1,2} \mapsto A_{1,2}z^{-2}; \\ A_{2,3} \mapsto A_{2,3}; \\ z \mapsto z^{-1}, \end{cases} \quad \phi_{1,3} : \begin{cases} A_{1,3} \mapsto A_{1,3}z^{-1}; \\ A_{2,3} \mapsto A_{2,3}; \\ z \mapsto z, \end{cases} \quad \phi_{2,3} : \begin{cases} A_{1,3} \mapsto A_{1,3}; \\ A_{2,3} \mapsto A_{2,3}z^{-1}; \\ z \mapsto z, \end{cases}$$

$$\rho : \begin{cases} A_{1,3} \mapsto A_{2,3}; \\ A_{2,3} \mapsto A_{1,3}z; \\ z \mapsto z, \end{cases} \quad \sigma : \begin{cases} A_{1,3} \mapsto A_{1,3}^{-1}; \\ A_{2,3} \mapsto A_{2,3}; \\ z \mapsto z, \end{cases} \quad \nu : \begin{cases} A_{1,3} \mapsto A_{1,3}A_{2,3}; \\ A_{2,3} \mapsto A_{2,3}; \\ z \mapsto z. \end{cases}$$

1176

Пользуясь равенством (1), перепишем задание автоморфизма θ_3 на порождающем множестве $\{A_{1,2}, A_{2,3}, z\}$:

$$\theta_3 : \begin{cases} A_{1,3} \mapsto A_{2,3}^{-1} A_{1,3} A_{2,3} z^{-1}; \\ A_{2,3} \mapsto A_{2,3}^{-1} A_{1,3}^{-1} z; \\ z \mapsto z^{-1}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что выполняется следующее соотношение:

$$\theta_3 = \phi_{2,3}^{-1} \psi \phi_{1,3} \rho\sigma\rho\sigma\rho\nu^{-1}\rho\nu\sigma\nu.$$

Таким образом, мы показали, что для любого $n \geq 4$ автоморфизм θ_n моноида струнных зацеплений StL_n в некотором смысле продолжает автоморфизм w_n группы P_n крашеных кос, и установили, как для $n = 3$ автоморфизм θ_n выражается через некоторое порождающее множество группы $Aut(P_3)$.

Список литературы

[Bar95] D. Bar-Natan, *Vassiliev homotopy string link invariants*, J. Knot Theory Ramifications, 4(1):13–32, 1995.

[BBK15] R. Blair, J. Burke, R. Koytcheff, *A prime decomposition theorem for the 2-string link monoid*, J. Knot Theory Ramifications, 24(2):1550005, 24, 2015.

[BM07] R. W. Bell and D. Margalit, *Injections of Artin groups*, Comment. Math. Helv. 82, 725–751, 2007.

[BNS18] V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim, M Singh, *Automorphisms of pure braid groups*, Monatshefte für Mathematik, 187:1–19, 2018.

[BZ03] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, 2nd ed. de Gruyter Stud. Math. 5. Berlin: de Gruyter, 2003.

[CC05] R. Charney, J. Crisp, *Automorphism groups of some affine and finite type Artin groups*, Math. Res. Lett. 12 (2005) 321–333, MR2150887.

[Cerf68] J. Cerf, Sur les Difftomorphismes de la Sphere de Dimension Trois (14 = 0), Springer Lecture Notes, 53 (1968).

[CFR12] D. Cohen, M. Falk, R. Randell, *Pure braid groups are not residually free*, In Configuration spaces, CRM Series, 14. Ed. Norm., Pisa, 2012, 213–230.

[Cr89] P. R. Cromwell, *Homogeneous links*, Journal of the London Mathematical Society, 2(3):535–552, 1989.

[Cr04] P. R. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, 2004.

[DG81] J. L. Dyer, E. K. Grossman, *The automorphism groups of the braid groups*, Amer. J. Math. 103, 1151–1169, 1981.

[DGO21] K. Dekimpe, D. L. Gonçalves, O. Ocampo, *The R_∞ property for pure Artin braid groups*, Monatsh Math 195, 15–33 (2021).

[Fra07] G. K. Francis, *A topological picturebook*, 2nd printing. New York, NY: Springer, 2nd printing edition, 2007.

[Hub16] J. H. Hubbard, *Teichmuller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Volume 2: Surface homeomorphisms and rational functions*, Matrix Editions, Ithaca, NY, 2016, x+262 pp., ISBN 978-1-943863-00-6.

[HL90] N. Habegger, X.-S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc., 3(2):389–419, 1990.

[HL98] N. Habegger, X.-S. Lin, *On link concordance and Milnor's $\overline{\mu}$ invariants*. Bull. London Math. Soc., 30(4):419–428, 1998.

[HT97] J. Hass, A. Thompson, *Neon bulbs and the unknotting*, Journal of Knot Theory and Its Ramification, 6(2):235-242, 1997.

[KT08] C. Kassel, V. Turaev, *Braid groups*, in Graduate Texts in Mathematics, vol. 247 (Springer, New York, 2008); With the graphical assistance of Olivier Dodane.

[MF97] A. T. Fomenko, S. V. Matveev, *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*, Kluwer: Dordrecht, 1997.

[Mur96] K. Murasugi, *Knot theory and Its Applications*, Birkhauser, 1996.

[MY14] J. B. Meilhan, A. Yasuhara, *Abelian quotients of the string link monoid*, Algebr. Geom. Topol. 14 (3) 1461 - 1488, 2014.

[Rol03] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series, No. 7. Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.

1178

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Беловой Дианы Владиславовны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Смешанная задача для уравнения с инволютивным отклонением и периодическими краевыми условиями» являются: Теорема 2, Теорема 3, Теорема 4.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 1 сентября 2018 года по 31 мая 2020 года мною были изучены статьи Бурлуцкой М.Ш. [3-5], [9-12], [14], [16-17], Хромова А.П. [1], а также некоторые другие статьи авторов, которые занимались схожей проблематикой (Андреев А.А., Баскаков А.Г., Вагабов А.И. и др.). К тому же при написании работы опиралась на результаты, полученные ранее мною в бакалаврской работе и опубликованные в [18-20]. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [3-5], [9-12], [14], [16-17] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Бурлуцкой Марией Шаукатовной (доцентом кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета.)
- Проведено выступление в Воронежской весенней математической школе «Понтрягинские чтения-XXXI» в 2020 году.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 30.05.2021. На Смотр представлен проект текста работы.



Белова Диана Владиславовна
28 мая 2021 г. Воронеж, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО "ВГУ")

Математический факультет

Кафедра математического анализа

Смешанная задача для уравнения с инволютивным отклонением и периодическими краевыми условиями

Магистерская работа

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Программа – Математический анализ и приложения

Зав.кафедрой _____ д.ф.-м.н., проф. А.Д. Баев _._.20_

Студент _____ Д.В. Белова

Руководитель _____ к.ф.-м.н., доц. М.Ш. Бурлуцкая

Воронеж 2020

Содержание

Введение **3**

§ 1. Эталонная задача **4**

§ 2. Асимптотика собственных значений и собственных функций оператора L **8**

§ 3. Решение задачи (1)–(2) **13**

1181

Введение

Рассматривается следующая смешанная задача с инволюцией и с периодическими краевыми условиями:

$$\frac{\partial u(x,t))}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t))}{\partial x} + q_1(x)u(1-x,t) + q_2(x)u(x,t), \tag{1}$$

$$x \in [0;1], \quad t \in (-\infty;+\infty),$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u(x,0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Предполагаем, что $q_j(x)$ и $\varphi(x)$ комплекснозначные функции, $q_j \in C^1[0,1]$, $j = 1,2$, а на $\varphi(x)$ накладываем минимальные требования, следующие из постановки задачи: $\varphi \in C^1[0,1]$ и

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) - \varphi'(1) + \varphi(0)[q_1(0) - q_1(1) + q_2(0) - q_2(1)] = 0. \tag{3}$$

Уравнение (1) представляет собой простейшее уравнение в частных производных, содержащее инволюцию в аргументе $u(x,t)$, т.е отображение $g(x) = 1 - x$ такое, что $g(g(x)) = x$. Интерес к операторам с такой инволюцией вызван, в частности, работами А.П. Хромова (см. [1]) по исследованию интегральных операторов с инволюцией в верхнем пределе. Различные спектральные задачи для интегральных и функционально-дифференциальных операторов с инволюциями активно исследуются (см., например, [2]–[8] и библиографию в них). Изучение смешанных задач для уравнения первого порядка с инволюцией проводится в работах [9]–[13]. Здесь будет использоваться техника работ [9]–[12], основанная на применении метода Фурье и идей по ускорению сходимости ряда, представляющего формальное решение. В работе [10] исследовалась задача с периодическими краевыми условиями, но с инволюцией в производной

(здесь иначе выбирается вспомогательная эталонная задача). Данная работа обобщает результаты работы [12].

Метод Фурье в задаче (1)–(2) приводит к спектральной задаче:

$$Ly = \lambda y, \tag{4}$$

для оператора L:

$$(Ly)(x) = y'(x) + q_1(x)y(1-x) + q_2(x)y(x), \quad y(0) = y(1).$$

Наряду с L будет также рассматривается оператор L_0, который получается из L, при $q_1(x) = 0$:

$$(L_0y)(x) = y'(x) + q_2(x)y(x), \quad y(0) = y(1). \tag{5}$$

Считаем, что область определения этих операторов D_L (D_{L_0}) включает непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $y(0) = y(1)$.

§ 1. Эталонная задача

Задачу (1)–(2) с $q_1(x) \equiv 0$ будем называть эталонной (в соответствие с [10]), ее решение будем обозначать $u_0(x,t)$. В этом случае уравнение (1) является простейшим уравнением в частных производных первого порядка, и исследование задачи не представляет трудностей. Приведем здесь решение этой задачи методом Фурье, необходимое для исследования общего случая, показав возможность суммирования соответствующего формального ряда. Здесь достаточно предполагать, что $q_2(x) \in C[0,1]$. Условия (3) здесь заменяются на

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) - \varphi'(1) + \varphi(0)[q_2(0) - q_2(1)] = 0. \tag{6}$$

Лемма 1. *Собственные значения λ_n^0 и собственные функции $y_n^0(x)$ оператора L_0 имеют вид:*

$$\lambda_n^0 = 2\pi ni + a, \quad y_n^0(x) = s(x)e^{2\pi nix}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $a = \int_0^1 q_2(t)dt$, $s(x) = e^{ax - \int_0^x q_2(t)dt}$.

Доказательство. Из (5) получаем, что $y^0 = ce^{\int_0^x q_2(t)dt - \lambda^0 x}$,
т.к. $y^0(0) = y^0(1)$, то:
$e^{2\pi ni} = e^{\int_0^x q_2(t)dt - \lambda_n^0}$, откуда $\lambda_n^0 = \int_0^1 q_2(t)dt + 2\pi ni$, и
$y_n^0 = e^{-\int_0^x q_2(t)dt + (\int_0^1 q_2(t)dt + 2\pi ni)x}$.

□

Лемма 2. *Оператор L_0 не является самосопряженным, а сопряженный для него имеет вид:*

$$(L_0^* z)(x) = -z'(x) + \overline{q_2(x)}z(x), \quad z(0) = z(1)$$

Собственному значению $\lambda_n^{0*} = \overline{\lambda}_n^0$ сопряженного оператора соответствует собственная функция $z_n(x) = e^{2\pi nix}s_1(x)$, где $s_1(x) = e^{-\overline{a}x + \int_0^x \overline{q_2(t)}dt}$.

Доказательство. Из свойства сопряженного оператора $(L_0 y, z) = (y, L_0^* z)$:
$(L_0 y, z) = \int_0^1 (y'(x) + q_2(x)y(x))\overline{z}(x)dx = \int_0^1 y'(x)\overline{z}(x)dx +$
$+ \int_0^1 q_2(x)y(x)\overline{z}(x)dx =$
$= y(1)\overline{z}(1) - y(0)\overline{z}(0) - \int_0^1 \overline{z}'(x)y(x)dx + \int_0^1 q_2(x)y(x)\overline{z}(x)dx.$
Из того, что $y(0) = y(1)$ получаем условие $\overline{z}(0) = \overline{z}(1)$.
Итак, $(L_0 y, z) = + \int_0^1 y(x)(\overline{-z'(x) + \overline{q}_2(x)z(x)})dx$.
Т.е $L_0^* z = -z'(x) + \overline{q_2(x)}z(x)$, $z(0) = z(1)$.
Вид собственных собственных функций получается так же, как и в 1.

□

Учитывая,что

$$s_1(x) = e^{\overline{-ax+\int_0^x q_2(t)dt}} = (\overline{s(x)}\,)^{-1},$$

получаем:

Лемма 3. *Собственные значения λ_n^{0*} и собственные функции $z_n^0(x)$ оператора L_0^* имеют вид:*

$$\lambda_n^{0*} = -2\pi ni + \overline{a}, \quad z_n^0(x) = (\overline{s(x)})^{-1} e^{2\pi nix}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где a и $s(x)$ из леммы 1.

Всюду далее через $(\cdot,\cdot)$ будем обозначать скалярное произведение в $L_2[0,1]$.

Лемма 4. *Системы $\{y_n^0(x)\}$ и $\{z_n^0(x)\}$ полны в $L_2[0,1]$, и $(y_n^0, z_n^0) = 1$.*

Доказательство. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$ и ортогональна $\{y_n^0(x)\}$. Тогда

$$(f, y_n^0) = \int_0^1 f(x)\overline{s(x)}e^{-2\pi nix}dx = 0,$$

откуда в силу полноты тригонометрической системы $\{e^{2\pi nix}\}$ получаем $f(x)\overline{s(x)} \equiv 0$ п.в. Отсюда следует: $f(x) \equiv 0$ п.в., что и доказывает полноту. Аналогичное доказательство для $\{z_n^0(x)\}$. Равенство $(y_n^0, z_n^0) = 1$ очевидно. □

Теорема 1. *Если $q_1(x) = 0$, $q_2(x) \in C[0,1]$, $\varphi(x) \in C^1[0,1]$ и удовлетворяет условиям (6), то классическое решение задачи (1)–(2) существует и имеет вид:*

$$u_0(x,t) = s(x)f_0(x+t)e^{at}, \tag{7}$$

где $f_0(x) \in C^1(-\infty;+\infty)$ — периодическая с периодом 1 функция, причем $f_0(x) = \varphi(x)s^{-1}(x)$ при $x \in [0,1]$, a и $s(x)$ из леммы 1.

Доказательство. Согласно методу Фурье решением задачи является формальный ряд:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 t}.$$

Подставляя в начальное условие (2), с учетом леммы 4, находим $c_n = (\varphi, z_n^0)$. Таким образом, при $x \in [0,1]$ имеем:

$$u(x,0) = s(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi, z_n^0) e^{2\pi n i x}. \tag{8}$$

Ряд в (8) определен при всех x. Обозначим его сумму через $f_0(x)$: $f_0(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi, z_n^0) e^{2\pi n i x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Очевидно, что $f_0(x)$ — периодическая функция с периодом 1. Так как

$$(\varphi, z_n^0) = \left(\varphi, (\overline{s(x)})^{-1} e^{2\pi n i x}\right) = \left(\varphi(x) s^{-1}(x), e^{2\pi n i x}\right),$$

и функция $\varphi(x)s^{-1}(x) \in D_{L_0}$ (из того, что $s(0) = s(1) = 1$), то нетрудно показать, что этот ряд равномерно сходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, а при $x \in [0,1]$ в силу полноты тригонометрической системы, его сумма равна $\varphi_1(x) = \varphi(x)/s(x)$. Таким образом, $f_0(x) = \varphi_1(x)$, при $x \in [0,1]$, а на остальной части всей числовой оси $f_0(x)$ определяется периодическим продолжением.

Исследуем гладкость $f_0(x)$. Из вышесказанного следует непрерывная дифференцируемость $f_0(x)$ всюду кроме точек $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Достаточно проверить, что $f_0(0-0) = f_0(0+0)$, $f_0'(0-0) = f_0'(0+0)$. Первое соотношение легко следует из периодичности $f_0(x)$, условий (6) и $s(0) = s(1) = 1$. Далее, при $x \in [0,1]$ имеем $f_0'(x) = \varphi_1{}'(x) = [\varphi'(x) - \varphi(x)(a - q_2(x))]/s(x)$. Поэтому

$$f_0'(0-0) = f_0'(1-0) = \varphi_1{}'(1) = \varphi'(1) - \varphi(1)(a - q_2(1)),$$

$$f_0'(0+0) = \varphi_1{}'(0) = \varphi'(0) - \varphi(0)(a - q_2(0)),$$

и равенство $f_0'(0-0) = f_0'(0+0)$ следует из (6). Следовательно, $f_0(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$.

Преобразуя формальный ряд, теперь его можно просуммировать:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{2\pi nix}) s(x) e^{at} e^{2\pi ni(x+t)} = s(x) e^{at} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{2\pi nix}) e^{2\pi ni(x+t)},$$

откуда получаем (7). Непосредственной проверкой можно убедиться, что (7) удовлетворяет уравнению (1) при $q_1(x) \equiv 0$ и условиям (2). □

§ 2. Асимптотика собственных значений и собственных функций оператора L

Получим теперь асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора L. Так же как в [10] решение спектральной задачи (4) сводится к системе Дирака, а именно справедлива:

Лемма 5. *Число λ является собственным значением, а $y(x)$ собственной функцией краевой задачи (4) тогда и только тогда, когда $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$ (T — знак транспонирования) является ненулевым решением системы:*

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \lambda D u(x), \tag{9}$$

где $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} q_2(x) & q_1(x) \\ -q_1(1-x) & -q_2(1-x) \end{pmatrix}$ *с краевыми условиями*

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(1/2) = u_2(1/2). \tag{10}$$

Сделаем замену

$$u_1(x) = h_1(x) z_1(x), \quad u_2(x) = h_2(x) z_2(x), \tag{11}$$

где $h_1(x) = e^{-\int_0^x q_2(t)dt}$, $h_2(x) = e^{-\int_0^x q_2(1-t)dt}$. Т.е $U(x) = H(x)Z(x)$, где $H(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) & 0 \\ 0 & h_2(x) \end{pmatrix}$.

Тогда первое уравнение системы (9) примет вид:

$h_1'(x)z_1(x) + h_1(x)z_1'(x) + q_2(x)h_1(x)z_1(x) + q_1(x)h_2(x)z_1(x) = \lambda h_1(x)z_1(x)$,

$z_1(x)(h_1'(x) + q_2(x)h_1(x)) + h_1(x)z_1'(x) + q_1(x)h_2(x)z_2(x) = \lambda h_1(x)z_1(x)$,

откуда

$h_1'(x) + q_2(x)h_1(x) = 0$, $h_1(x) = e^{-\int_0^x q_2(t)dt}$.

Таким образом, обозначив $q_1(x)\frac{h_2(x)}{h_1(x)}$ за $p_1(x)$, имеем:

$$z_1'(x) + p_1(x)z_2(x) = \lambda z_1(x) \tag{12}$$

Аналогично второе уравнение системы $u_2'(x) - q_1(1-x)u_1(x) -$

$- q_2(1-x)u_2(x) = \lambda z_2(x)$ примет вид:

$h_2'(x)z_2(x) + h_2(x)z_2'(x) - q_1(1-x)h_1(x)z_1(x) -$

$- q_2(1-x)h_2(x)z_2(x) = \lambda h_2(x)z_2(x)$,

$z_2(x)(h_2'(x) - q_2(1-x)h_2(x)) + h_2(x)u_2'(x) - q_1(1-x)h_1(x)z_1(x) = -\lambda h_2(x)z_2(x)$,

$h_2'(x) - q_2(1-x)h_2(x) = 0$, $h_2(x) = e^{\int_0^x q_2(1-t)dt}$.

Таким образом, обозначив $-q_1(1-x)\frac{h_1(x)}{h_2(x)}$ за $p_2(x)$, имеем:

$$z_2'(x) + p_2(x)z_1(x) = -\lambda z_2(x) \tag{13}$$

Таким образом, система (9) сводится к системе Дирака:

$$z'(x) + P(x)z(x) = \lambda D z(x), \tag{14}$$

где $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_1(x) \\ p_2(x) & 0 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(1, -1)$, $p_1(x) = \frac{q_1(x)h_2(x)}{h_1(x)}$, $p_2(x) = \frac{q_1(1-x)h_1(x)}{h_2(x)}$.

Уточненные асимптотические формулы для общего решения системы

(14) в случае $p_k \in C^1[0,1]$ приводятся, например в [10] (см. также [14]). Из [10, Теорема 4] и (11) получаем:

Лемма 6. *Если* $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, $q_j(x) \in C^1[0,1]$, *то для общего решения уравнения* (9) *справедлива асимптотическая формула:*

$$u(x,\lambda) = H(x)Z(x,\lambda)e^{\lambda Dx}c,$$

где $H(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) & 0 \\ 0 & h_2(x) \end{pmatrix}$, $Z(x,\lambda) = (z_{ij}(x,\lambda))_{i,j=1,2}$, $c = (c_1,c_2)^T$ — *произвольный вектор и*

$$\begin{aligned}
z_{11}(x,\lambda) &= 1 + \tfrac{1}{2\lambda}\int_0^x p_1(t)p_2(t)\,dt + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right),\\
z_{12}(x,\lambda) &= \tfrac{1}{2\lambda}\left(p_2(x) - p_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int_x^1 e^{2\lambda(x-t)}p_2'(t)\,dt\right) + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right),\\
z_{21}(x,\lambda) &= -\tfrac{1}{2\lambda}\left(p_1(x) - p_1(0)e^{-2\lambda x} - \int_0^x e^{-2\lambda(x-t)}p_1'(t)\,dt\right) + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right),\\
z_{22}(x,\lambda) &= 1 - \tfrac{1}{2\lambda}\int_0^x p_1(t)p_2(t)\,dt + O\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right).
\end{aligned}$$

Из леммы 6 и условий (10) получаем следующее уравнение для собственных значений:

$$\begin{vmatrix} h_1(0)z_{11}(0) - h_2(0)z_{21}(0) & h_1(0)z_{12}(0) - h_2(0)z_{22}(0) \\ [h_1(\frac{1}{2})z_{11}(\frac{1}{2}) - h_2(\frac{1}{2})z_{21}(\frac{1}{2})]e^{\frac{\lambda}{2}} & [h_1(\frac{1}{2})z_{12}(\frac{1}{2}) - h_2(\frac{1}{2})z_{22}(\frac{1}{2})]e^{-\frac{\lambda}{2}} \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

(аргумент λ у z_{ij} для удобства опускаем). Используя «грубую» асимптотику для z_{ij} из леммы 6:

$$\begin{aligned}
z_{11}(x,\lambda) &= 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad z_{12}(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\\
z_{21}(x,\lambda) &= O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad z_{22}(x,\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

получим:

Лемма 7. *Для собственных значений и собственных функций оператора* L *имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = 2\pi n i + a + O(n^{-1}),$$

$$y_n(x) = s(x)e^{2\pi nix} + O(n^{-1}),$$

где a и $s(x)$ из леммы 1, $n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \pm(n_0+2), \ldots$, n_0 — некоторое достаточно большое число.

Аналогично [10, Лемма 12] получаем:

Лемма 8. *При $\lambda = \lambda_n$ для значений функций $z_{ij}(x, \lambda)$ из леммы 6 справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned}
&z_{11}(0) = 1 + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right), && z_{12}(0) = \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{\alpha_n}{n} + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right),\\
&z_{22}(0) = 1 + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right), && z_{21}(0) = O\left(\tfrac{1}{n^2}\right),\\
&z_{11}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + \tfrac{\alpha}{n} + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right), && z_{12}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{\alpha_n}{n} + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right),\\
&z_{22}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + \tfrac{\alpha}{n} + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right), && z_{21}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{\alpha_n}{n} + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

(аргумент λ_n для удобства опускаем). Здесь и всюду далее через α обозначаются различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n такие константы, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Используя теперь в (15) асимптотику из леммы 8, получаем:

Теорема 2. *Для собственных значений оператора L имеют место следующие уточненные асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = 2\pi ni + a + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Теорема 3. *Для собственных функций оператора L имеют место следующие уточненные асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = s(x)e^{2\pi nix} + \psi_{1n}(x) + \psi_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\psi_{1n}(x) = \tfrac{1}{n}\left[b_1(x)e^{-\lambda_n^0 x} + b_2(x)e^{\lambda_n^0 x} + b_3(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 x} + b_4(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 x}\right],$$

$$\psi_{2n}(x) = \tfrac{1}{n}\left[b_5(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 t} q_1'\left(\tfrac{x+t}{2}\right)\,dt + b_6(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 t} q_1'\left(\tfrac{x-t}{2}\right)\,dt\right]$$

($b_k(x)$ некоторые непрерывные функции).

Точный вид функций $b_k(x)$ не важен, достаточно знать, что $b_k(x) \in C[0,1]$.

Доказательство.

Вспомним, что $y_n(x) = z_1(x) = (c_1 z_{11} e^{\lambda_n x} + c_2 z_{12} e^{-\lambda_n x}) s(x)$,

$z_2(x) = (c_1 z_{21} e^{\lambda_n x} + c_2 z_{22} e^{-\lambda_n x}) s(x)$.

Из соотношения $z_1(1/2) = z_2(1/2)$ в лемме 6 имеем:

$c_1 e^{\lambda_n/2}(z_{11}(1/2) - z_{21}(1/2)) + c_2 e^{-\lambda_n/2}(z_{12}(1/2) - z_{22}(1/2)) = 0$,

$c_1(z_{11}(1/2) - z_{21}(1/2)) = c_2(z_{22}(1/2) - z_{12}(1/2)) e^{-\lambda_n}$.

Используя оценки из леммы 3, получаем отсюда связь c_1 через c_2:

$c_1 = c_2(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)) e^{-\lambda_n}$.

Таким образом,

$$y_n(x) = (c_2 z_{11}(1 + \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{\alpha_n}{n} + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right)) e^{\lambda_n x} e^{-\lambda_n} + c_2 z_{12} e^{-\lambda_n x}) s(x). \qquad (16)$$

:

$z_{11} e^{\lambda_n x} = e^{2\pi n i x + \frac{\alpha x}{n} + \frac{\alpha_n x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}(1 + \frac{a(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)) =$

$= e^{2\pi n i x}(1 + \frac{\alpha x}{n} + \frac{\alpha_n x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right))(1 + \frac{a(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)) = e^{2\pi n i x}(1 + \frac{a(x)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}) +$

$+ O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$z_{12} e^{-\lambda_n x} = e^{-2\pi n i x + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}(\frac{a(x)}{n} + \frac{\alpha e^{-2{\lambda_n}^0(1-x)}}{n} + \frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{2{\lambda_n}^0(x-t)} q_2'(t)\,dt +$

$+ O\left(\frac{1}{n^2}\right)) = e^{-2\pi n i x}(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right))(\frac{a(x)}{n} + \frac{\alpha e^{-2{\lambda_n}^0(1-x)}}{n} + \frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{2{\lambda_n}^0(x-t)} q_2'(t)\,dt +$

$+ O\left(\frac{1}{n^2}\right)) = \frac{e^{-2\pi n i x} a(x)}{n} + \frac{\alpha}{n} e^{2\pi n i x} + \frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{{\lambda_n}^0(x-2t)} q_2'(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Далее:

$\int\limits_x^1 e^{{\lambda_n}^0(x-2t)} q_2'(t)\,dt = e^{\lambda x}\int\limits_0^1 e^{-2{\lambda_n}^0 t} q_2'(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{{\lambda_n}^0(x-2t)} q_2'(t)\,dt =$

$= \alpha_n e^{\lambda x} - \int\limits_0^x e^{{\lambda_n}^0(x-2t)} q_2'(t)\,dt.$

Выполним замену $\tau = x - 2t$:

$\int\limits_0^x e^{\lambda_n{}^0(x-2t)}q_2'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} e^{\lambda_n{}^0\tau}q_2'(\frac{x-\tau}{2})\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n{}^0 t}q_2'(\frac{x+t}{2})\,dt +$
$+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n{}^0 t}q_2'(\frac{x-t}{2})\,dt.$
Итак,
$\int\limits_x^1 e^{\lambda_n{}^0(x-2t)}q_2'(t)\,dt = \alpha_n e^{\lambda x} - \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n{}^0 t}q_2'(\frac{x+t}{2})\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n{}^0 t}q_2'(\frac{x-t}{2})\,dt.$
Получаем:

$$z_{11}e^{\lambda_n x} = e^{2\pi nix}(1+\tfrac{a(x)}{n}+\tfrac{\alpha_n}{n}) + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right), \tag{17}$$

$$\begin{aligned} z_{12}e^{-\lambda_n x} = \tfrac{e^{-2\pi nix}a(x)}{n} + \tfrac{\alpha e^{2\pi nix}}{n} + \tfrac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n{}^0 t}q_2'(\tfrac{x+t}{2})\,dt + \\ +\tfrac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n{}^0 t}q_2'(\tfrac{x-t}{2})\,dt + \tfrac{\alpha_n e^{\lambda}x}{n}. \end{aligned} \tag{18}$$

Подставим (17) и (18) в (16) при $c_2 = 1$ и получим утверждение теоремы. □

Замечание. Аналогичным образом получается, что

$\lambda_n^* = -2\pi ni + \overline{a} + O(\frac{1}{n})$,
$z_n(x) = \overline{s(x)}^{-1}e^{2\pi nix} + O(\frac{1}{n})$.

§ 3. Решение задачи (1)–(2)

Согласно методу Фурье формальное решение задачи представим в виде (см. [15]):

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{|n|\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda,$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), $\gamma_n = \left\{\lambda \,\middle|\, |\lambda - 2\pi ni - a| = \delta\right\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, чтобы собственные значения λ_n попадали по одному внутрь γ_n, а $r > 0$ фиксировано и таково, что все собственные значения,

для которых $|n| \le n_0$ попадают в контур $|\lambda| = r$. При этом

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}(R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda = \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)}\,y_n(x)e^{\lambda_n t}.$$

По теореме 3 и замечанию к ней коэффициенты $c_n = (\varphi, z_n)/(y_n, z_n) =$
$= \alpha_n/n$, т.к:

$(y_n, z_n) = (s(x)e^{2\pi nix} + O(\frac{1}{n}), \overline{s(x)}^{-1}e^{2\pi nix} + O(\frac{1}{n})) =$

$= (s(x)e^{2\pi nix}, \overline{s(x)}^{-1}e^{2\pi nix}) + O(\frac{1}{n}) = \int_0^1 s(x)e^{2\pi nix}\frac{1}{\overline{s(x)}}e^{-2\pi nix}dx + O(\frac{1}{n}) =$

$= 1 + O(\frac{1}{n})$.

$\frac{1}{(y_n,z_n)} = \frac{1}{1+O(\frac{1}{n})} = 1 + O(\frac{1}{n})$.

$(\varphi, z_n) = (\varphi, \overline{s(x)}^{-1}e^{2\pi nix} + O(\frac{1}{n})) = (\varphi, \overline{s(x)}^{-1}e^{2\pi nix}) + O(\frac{1}{n}) =$

$= \int_0^1 \varphi(x)\overline{\overline{s(x)}^{-1}}e^{-2\pi nix}dx + O(\frac{1}{n}) = (\varphi_1(x), e^{2\pi nix}) = \alpha_n$ из неравенства Бесселя.

Откуда в силу ограниченности $y_n(x)$ и $e^{\lambda_n t}$ следует равномерная сходимость ряда. Но эта оценка недостаточна для того, чтобы ряд можно было почленно дифференцировать. Следуя схеме работ [9]–[12], классическое решение может быть получено, но при дополнительных ограничениях на значения $q_1(x)$ в точках 0 и 1 (а именно, $q_1(0) = q_1(1)$). Здесь мы снимем такое ограничение, используя приемы из [16], [17]. Пусть вещественное число μ лежит вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n. Положим $g = (L - \mu E)\varphi$. Тогда $\varphi = R_\mu g$, и $g = (L - \lambda E)\varphi + (\lambda - \mu)\varphi$, откуда

$$R_\lambda\varphi(x) = -\frac{\varphi(x)}{\lambda - \mu} + \frac{R_\lambda g(x)}{\lambda - \mu}. \tag{19}$$

Заметим, что $g(0) = g(1)$, т.к:

$g(x) = \varphi'(x) + q_1(x)\varphi(1 - x) + q_2(x)\varphi(x) - \mu\varphi(x)$,

$g(0) = \varphi'(0) + q_1(0)\varphi(1) + q_2(0)\varphi(0) - \mu\varphi(0)$,

$g(1) = \varphi'(1) + q_1(x)\varphi(0) + q_2(1)\varphi(1) - \mu\varphi(1)$,

$g(0) - g(1) = 0$ из (3).

Используя (19) так же как, в [16], [17] для $u(x,t)$ получим следующее представление:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R^0_\lambda g(x)}{\lambda-\mu}e^{\lambda t}d\lambda, \tag{20}$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda g(x) - R^0_\lambda g(x)}{\lambda-\mu}e^{\lambda t}d\lambda, \tag{21}$$

R^0_λ — резольвента оператора L_0.

Используя соотношение, аналогичное (19), для R^0_λ, имеем:
$\frac{R^0_\lambda g(x)}{\lambda-\mu} = \frac{R^0_\mu g(x)}{\lambda-\mu} + R^0_\lambda\widetilde{\varphi}(x)$, где $\widetilde{\varphi}(x) = R^0_\mu g(x)$, откуда

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)R^0_\lambda\widetilde{\varphi}(x)e^{\lambda t}d\lambda,$$

при этом $\widetilde{\varphi}(x)$ удовлетворяет условиям (6). Действительно, так как $\widetilde{\varphi}(x) = R^0_\mu g(x) = (L^0-\mu E)^{-1}g(x) = \int_0^1 G^0(x,t,\mu)g(t)dt$, где $G^0(x,t,\mu)$ функция Грина, и она удовлетворяет краевым условиям по переменной x, то $\widetilde{\varphi}(0) = \widetilde{\varphi}(1)$.
Из $(L^0-\mu E)\widetilde{\varphi}(x) = g(x)$ имеем:
$\widetilde{\varphi}'(x) + q_2(x)\widetilde{\varphi}(x) - \mu\widetilde{\varphi}(x) = g(x)$, а поскольку $g(0) = g(1)$, то:
$\widetilde{\varphi}'(0) + q_2(0)\widetilde{\varphi}(0) - \mu\widetilde{\varphi}(0) = \widetilde{\varphi}'(1) + q_2(1)\widetilde{\varphi}(1) - \mu\widetilde{\varphi}(1)$,
$\widetilde{\varphi}'(0) - \widetilde{\varphi}'(1) + \widetilde{\varphi}(0)(q_2(0) - q_2(1)) = 0$.

Таким образом, $u_0(x,t)$ есть формальный ряд задачи (1)–(2) с $q_1(x) = 0$ и $\widetilde{\varphi}(x) = R^0_\mu g$ вместо $\varphi(x)$ (т.е. эталонной задачи). Согласно теореме 1 этот ряд суммируется и $u_0(x,t)$ определяется формулой (7).

Исследуем теперь сходимость и возможность почленного дифференцирования ряда в (21). Имеем

$$\int\limits_{\gamma_n} \frac{R_\lambda g(x) - R_\lambda^0 g(x)}{\lambda - \mu} e^{\lambda t} d\lambda = \frac{(g(x), z_n)}{(\lambda_n - \mu)(y_n, z_n)}\, y_n(x) e^{\lambda_n t} - \frac{(g(x), z_n^0)}{(\lambda_n^0 - \mu)(y_n^0, z_n^0)}\, y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 t}. \quad (22)$$

Лемма 9. *Для любой функции $g(x) \in L_2[0,1]$ и ψ_{kn}, $k = 1, 2$, из теоремы 3 имеют место соотношения:*

$$(g(x), \psi_{kn}) = \alpha_n / n.$$

Доказательство. Так как $(g(x), b(x) e^{\pm \lambda_n^0 x}) = (\widetilde{g}(x), e^{\pm 2\pi n i x}) = \alpha_n$, где $\widetilde{g}(x) \in L_2[0,1]$, то для ψ_{1n} утверждение леммы очевидно. Далее

$$\left(g(x), b(x) \int\limits_0^x b(x,t) e^{\pm 2\pi n i t} dt \right) = \int\limits_0^1 g(x) \overline{b(x)}\, dx \int\limits_0^x \overline{b(x,t)} e^{\mp 2\pi n i t} dt =$$
$$= \int\limits_0^1 e^{\mp 2\pi n i t}\, dt \int\limits_t^1 \widetilde{g}(x) \overline{b(x,t)} dx = \alpha_n$$

(здесь $b(x)$, $b(x,t)$ некоторые непрерывные функции, $\widetilde{g}(x) \in L_2[0,1]$). Отсюда следует утверждение леммы и для ψ_{2n}. □

Лемма 10. *Имеет место соотношение:*

$$\frac{(g, z_n)}{(\lambda_n - \mu)(y_n, z_n)}\, y_n(x) e^{\lambda_n t} = \frac{(g, z_n^0)}{(\lambda_n^0 - \mu)(y_n^0, z_n^0)}\, y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 t} + \Omega_n(x,t), \quad (23)$$

при этом при $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$, где $A > 0$ и любое, справедливы оценки:

$$\Omega_n(x,t) = \frac{\alpha_n}{n^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Omega_n(x,t) = \frac{\alpha_n}{n}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Omega_n(x,t) = \frac{\alpha_n}{n}. \quad (24)$$

Доказательство. Из теоремы 3 получаем (23), где

$\Omega_n(x,t) = (\lambda_n^0)^{-1} e^{\lambda_n^0 t}((g, z_n)[\psi_{1n}(x) + \psi_{2n}(x) + O(1/n) y_n^0(x)] +$

$+ (g, \psi_{1n})(g, \psi_{2n}) y_n^0(x)) + O(1/n^3).$

Отсюда и из леммы 9, учитывая, что $(g, z_n) = \alpha_n$, следуют оценки (24).

□

Из (21), (22) и леммы 10 получаем

Лемма 11. *Ряд в* (21) *и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по* x *и* t*, равномерно сходятся по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [-A, A]$*, где* $A > 0$ *и любое.*

Теорема 4. *Если* $q_k(x)$ *комплекснозначные функции,* $q_k(x) \in C^1[0,1]$*,* $\varphi(x) \in C^1[0,1]$*, и* (3)*, то классическое решение задачи (1)-(2) существует и имеет вид:*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ *задается формулой* (7) *из теоремы 1 при замене* φ *на* $\widetilde{\varphi} = R^0_\mu g$*,* $g = L\varphi - \mu\varphi$*,* $u_1(x,t)$ *определена по формуле (21).*

Доказательство. По теореме 1 и лемме 11 $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по обеим переменным. $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2).
А именно $u(0,t) = u(1,t)$ и $u(x,0) = \varphi(x)$.
$u_0(0,t) = u_0(1,t)$ верно, поскольку:
$s(0)f_0(t)e^{at} = s(1)f_0(1+t)e^{at}$ из $s(0) = s(1)$ и $f_0(t) = f_0(1+t)$ по теореме 1.
$u_1(0,t) = u_1(1,t)$ из $R_\lambda g(0) - R^0_\lambda g(0) = R_\lambda g(1) - R^0_\lambda g(1)$, которое выполнено из того, что $g(0) = g(1)$.
Итак, $u(0,t) = u(1,t)$.
Теперь покажем, что $u(x,0) = \varphi(x)$.
$u_0(x,0) = s(x)f_0(x) = s(x)\overline{\varphi}(x)s^{-1}(x) = \overline{\varphi}(x)$.
$u_1(x,0) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda g(x)}{\lambda-\mu}d\lambda - (-\frac{1}{2\pi i})\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R^0_\lambda g(x)}{\lambda-\mu}d\lambda.$

Из (19) и аналогичного соотношения для $R^0_\lambda g(x)$, получаем

$$u_1(x,0) = -\tfrac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) R_\lambda\varphi(x)d\lambda -$$
$$-(-\tfrac{1}{2\pi i})\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) R^0_\lambda\overline{\varphi}(x)d\lambda.$$

Т.к $\varphi \in D(L)$, $\overline{\varphi} \in D(L_0)$, то:

$u_1(x,0) = \varphi(x) - \overline{\varphi}(x)$,

$u(x,0) = u_0(x,0) + u_1(x,0) = \varphi(x)$.

Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Обозначим через Du следующее дифференциальное выражение

$$Du = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

В силу леммы 11 ряд $u_1(x,t)$ можно почленно дифференцировать. Поэтому, дифференцируя ряд

$u_1(x,t) = -\tfrac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) \frac{R_\lambda g(x) - R^0_\lambda g(x)}{\lambda-\mu} e^{\lambda t}d\lambda,$

по x и t получим:

$$u'_{1t} = -\tfrac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) \frac{R_\lambda g(x) - R^0_\lambda g(x)}{\lambda-\mu}\lambda e^{\lambda t}d\lambda = \lambda u_1(x,t).$$

$$u'_{1x}(x,t) = -\tfrac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) \frac{(R_\lambda g(x))'_x - (R^0_\lambda g(x))'_x}{\lambda-\mu} e^{\lambda t}d\lambda,$$

Замена: $v = R_\lambda g(x)$, $w = R^0_\lambda g(x)$. Выясним, чему будут равняться $v'(x)$ и $w'(x)$.

$v = L - \lambda E^{-1} g(x)$,

$Lv - \lambda v = g(x)$,

$v'(x) = -q_1(x)v(1-x) - q_2(x)v(x) + \lambda v(x) + g(x)$.

Аналогично $w'(x) = -q_2(x)w(x) + \lambda w(x) + g(x)$.

Тогда $(R_\lambda g(x))'_x - (R^0_\lambda g(x))'_x = -q_1(x)v(1-x) - q_2(x)(v(x)+w(x)) +$

$+\lambda(v(x)-w(x))$.

И u'_{1x} перепишется в виде: $u'_{1x}(x,t) = -q_1(x) -$

$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda g(1-x)}{\lambda-\mu}e^{\lambda t}d\lambda - q_2(x)u_1(x,t) + \lambda u_1(x,t).$

$u'_{1x} = -q_1(x) - \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda g(1-x)}{\lambda-\mu}e^{\lambda t}d\lambda - q_2(x)u_1(x,t) + \lambda u_1(x,t).$

Тогда

$$Du_1 = u'_{1t} - u'_{1x} = q_1(x) - \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda g(1-x)}{\lambda-\mu}e^{\lambda t}d\lambda + q_2(x)u_1(x,t).$$

Далее

$Du_0 - u'_{0t} - u'_{0x} = q_2(x)u_0(x,t)$, так как $u_0(x,t)$ удовлетворяет эталонной задаче.

$Du = Du_0 + Du_1 = q_2(x)(u_0+u_1) + q_1(x) - \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{R_\lambda g(1-x)}{\lambda-\mu}e^{\lambda t}d\lambda,$

$\frac{R_\lambda g(1-x)}{\lambda-\mu} = R_\lambda\varphi(1-x)$, $R_\lambda\varphi(1-x) = u(1-x,t)$.

Т.е $Du = q_1(x)u(1-x,t) + q_2(x)u(x,t)$.

Теорема доказана. □

Результаты работы опубликованы в [18], [19], [20].

Список литературы

[1] Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях / А.П. Хромов // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, № 6. – С. 932–949.

[2] Андреев А.А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом / А.А. Андреев // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 1126–1128.

[3] Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 414, № 4. — С. 1309–1312.

[4] Бурлуцкая М.Ш. Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Матем. заметки. — 2011 — Т. 90, № 1 — С. 22–33.

[5] Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 15–17.

[6] Kritskov L.V. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution / L.V. Kritskov, A.M. Sarsenbi // Differential Equations. — 2015. — Vol. 51, № 8. — P. 984–990.

[7] Baskakov A.G. Spectral analysis of a differential operator with an involution / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, E.Yu. Romanova // J. Evolut. Equat. — 2017. — V. 17. — P. 669–684.

[8] Владыкина В.Е., Шкаликов А.А. Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // ДАН. - 2019. - Т. 484, № 1. - С. 12-17.

[9] Бурлуцкая М.Ш. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Доклады Академии наук. — 2010. — Т. 435, № 2. — С. 151–154.

[10] Бурлуцкая М.Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 12. — С. 2233-2246.

[11] Бурлуцкая М.Ш. О смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 3–12.

[12] Бурлуцкая М.Ш. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, вып. 1. — С. 10–20.

[13] Баскаков А.Г. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов / А.Г. Баскаков, Н.Б. Ускова // Уфимск. матем. журн. — 2018. — Т. 10, № 3, С. 11–34.

[14] Бурлуцкая М.Ш. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. — 2011. — № 2. — С. 64–72.

[15] Вагабов А.И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов / А.И. Вагабов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского госуниверситета, 1994. — 160 с.

[16] Бурлуцкая М.Ш. Резольвентный подход для волнового уравнения / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 51–63.

[17] Бурлуцкая М.Ш. Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом / М.Ш. Бурлуцкая // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 3. — С. 380–390.

[18] Стерликова Д.В. Об операторах с инволюцией /Бирюкова Е.И., Стерликова Д.В.//Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции: Воронежская математическая школа «Понтрягинские чтения–XXVIII». – Воронеж, 2017. — С. 41–42

[19] Стерликова Д.В. Спектральная задача для оператора с инволюцией /Стерликова Д.В.// Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения. Третий международный молодежный симпозиум– Воронеж, 2017. – С. 73-75.

[20] Стерликова Д.В. Об асимптотических формулах для собственных значений и функций одного оператора с инволюцией /Стерликова Д.В.//Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2018». – Воронеж, 2018. – С. 320–321.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Бибиной Арины Владимировны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Стационарная модель глобальной электрической цепи» является: упрощение граничного условия третьего рода, что сопротивление не зависит от углов, позволило решить задачу точно аналитически, не делая дополнительных приближений (формулы (69), (71), (80), (81)).

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- Был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google по следующим словам: стационарная модель глобальной электрической цепи, ионосферный потенциал. Результаты поисков не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Натальей Андреевной Денисовой, доцентом кафедры прикладной математики института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского»

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанным выше специалистом следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоялась в 2018 году.

 Бибина Арина Владимировна
31 мая 2021 г. Нижний Новгород, Россия

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра: Прикладной математики

Направление подготовки: «Математика»
Магистерская программа: «Фундаментальная математика и приложения»

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема:
«Стационарная модель глобальной электрической цепи»

Выполнила:
студентка группы 381602-1м
Бибина Арина Владимировна

_____
подпись

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной математики
Денисова Наталья Андреевна

_____
подпись

Нижний Новгород
2018

Содержание

Введение…….....3
Основные уравнения глобальной электрической цепи. Система уравнений, соответствующая стационарной задаче……..4
Вид уравнения с экспоненциальной электрической проводимостью….....7
Постановка задачи...……...……..……...10
Решение задачи……12
Выводы……....…….....27
Список литературы…….....28

1204

Введение

Глобальная электрическая цепь - это система электрических токов, возникающая в атмосфере и пронизывающая нижнюю атмосферу, ионосферу и магнитосферу. Согласно современным представлениям основным источником электрического поля в тропосфере и стратосфере являются грозовые облака, действующие в экваториальной зоне земного шара. Глобальная цепь связывает воедино области грозы и хорошей погоды и непосредственно отражает как состояние климатической системы Земли, так и влияние факторов космического окружения. В исследованиях атмосферного электричества концепция глобальной электрической цепи является основополагающей.

Наибольшее количество работ по моделированию глобальной электрической цепи посвящено изучению стационарных моделей.

В настоящей работе производится разбор статьи Hays P.B., Roble R.G. «A quasi-static model of global atmospheric electricity» и рассматривается стационарная модельная задача о распределении потенциала электрического поля, создаваемого точечным источником тока в неоднородной среде с экспоненциально возрастающей проводимостью. Приведенная в работе математическая формулировка задачи содержит граничные условия отличные от стандартных условий, используемых в классической математической физике и граничное условие третьего рода с переменным коэффициентом. Для сформулированной стационарной задачи получены приближенные формулы для потенциала электрического поля в атмосфере.

Основные уравнения глобальной электрической цепи. Система уравнений, соответствующая стационарной задаче.

Основные уравнения, используемые для математического моделирования глобальной электрической цепи – это уравнения Максвелла. Стационарной задаче соответствует следующая система

$$\begin{cases} rot\vec{H}(x) = \dfrac{4\pi}{c}(\sigma(x)\vec{E}(x) + \overrightarrow{J^{\text{ст.}}}(x)) \\ rot\vec{E}(x) = 0, \end{cases}$$

где $\vec{H}(x)$ – вектор напряжённости магнитного поля, $\vec{E}(x)$ – вектор напряжённости электрического поля, $\sigma(x)$ – электропроводимость среды, $\overrightarrow{J^{\text{ст.}}}(x)$ – плотность внешнего электрического тока.

Поскольку электрическое поле потенциально, то можно ввести потенциал электрического поля Φ, который связан с напряжённостью электрического поля следующим соотношением

$$\vec{E} = -grad\Phi = -\nabla\Phi.$$

Используя это соотношение, получим уравнение для определения потенциала электрического поля в стационарном случае

$$div(\sigma grad\Phi) = div\overrightarrow{J^{\text{ст.}}}. \qquad (1)$$

Учитывая формулу векторного анализа:

$$div(\sigma grad\Phi) = \sigma\Delta\Phi + (\nabla\sigma, \nabla\Phi),$$

уравнение (1) перепишем в сферических координатах (r, θ, φ).

Для этого воспользуемся известными формулами для градиента и лапласиана в сферических координатах ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi$)

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}; \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}; \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right),$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$

$$(\nabla\sigma, \nabla\Phi) = \frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}.$$

Подставляя эти формулы в уравнение (1), получим

$$\sigma\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+$$
$$+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=div\overrightarrow{J^{\text{ст.}}}. \qquad (2)$$

Введём новую независимую переменную $\mu = cos\theta$ и пересчитаем производные

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\theta}=-\sqrt{(1-\mu^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu},$$

$$sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-(1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)=-\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)\frac{d\mu}{d\theta}=\sqrt{(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right).$$

Тогда имеем

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right],$$

$$(\nabla\sigma,\nabla\Phi)=\frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}(1-\mu^2)\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}.$$

Умножая (2) на r^2, деля на σ и группируя соответствующие слагаемые в скобках, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\sigma}(1-\mu^2)\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sigma(1-\mu^2)}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)=\frac{r^2}{\sigma}div\overrightarrow{J^{\text{ст.}}}.$$

Таким образом, уравнение (2) принимает следующий вид

$$r^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)=\frac{r^2}{\sigma}div\overrightarrow{J^{\text{ст.}}},$$

$$\text{где } div\overrightarrow{J^{\text{ст.}}}=-\frac{I_l}{r_l^2}\delta(r-r_l)\delta(\mu-\mu_l)\delta(\varphi-\varphi_l), \qquad (3)$$

где I_l – ток, действующий в грозовой момент (r_l,μ_l,φ_l).

Сократив обе части равенства (3) на r^2, получим

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]=\frac{1}{\sigma}div\overrightarrow{J^{\text{ст.}}},$$

где $div\overrightarrow{J^{\text{ст.}}}=-\frac{I_l}{r_l^2}\delta(r-r_l)\delta(\mu-\mu_l)\delta(\varphi-\varphi_l).$ (3′)

Вид уравнения с экспоненциальной электрической проводимостью

Далее в статье рассматривается случай, когда проводимость изменяется экспоненциально и имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 F(\mu, \varphi) e^{2\alpha_0 (r - r_0)},$$

где σ_0-справочная проводимость, $F(\mu, \varphi)$- мало изменяющаяся функция, α_0-константа ($\alpha_0 \approx (0{,}2 - 0{,}3)\text{км}^{-1}$).

В уравнении (3′) введём новую независимую переменную $\sigma = \sigma_0 F(\mu, \varphi) e^{2\alpha_0 (r - r_0)}$, где $r_0 = 6371$ км – радиус Земли.

Пересчитаем производные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{dr}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\frac{d^2\sigma}{dr^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{dr}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\frac{d^2\sigma}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dr} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dr}\right)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} =$$
$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{dr}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\left(\frac{d^2\sigma}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\sigma}{dr} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dr}\right)^2\right).$$

Учитывая явный вид переменной σ, и, вычисляя выражение, стоящее в скобках, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 4\alpha_0^2 \sigma_0^2 e^{4\alpha_0 (r - r_0)} F^2(\mu, \varphi)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} +$$

$$+F(\mu, \varphi)\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\left(4\alpha_0^2 \sigma_0 e^{2\alpha_0 (r - r_0)} + \frac{2}{r} 2\alpha_0 \sigma_0 e^{2\alpha_0 (r - r_0)} + \frac{1}{\sigma_0 e^{2\alpha_0 (r - r_0)}} 4\alpha_0^2 \sigma_0^2 e^{4\alpha_0 (r - r_0)}\right) =$$

$$= 4\alpha_0^2 \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\left(2 + \frac{1}{\alpha_0 r}\right)\right). \qquad (4)$$

Коэффициент при первой производной $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$: $\frac{1}{\alpha_0 r} \ll 2$, если $r > r_0$, поэтому последним слагаемым формулы (4) в дальнейшем пренебрегаем.

Пересчитаем производные по переменным μ и φ в (3′)

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1 - \mu^2)\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right) = \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1 - \mu^2)\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right)\sigma + (1 - \mu^2)\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\frac{\partial \sigma}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\sigma\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$

Тогда второе слагаемое в правой части уравнения (3′) примет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\mu^2)}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}+\frac{1}{(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)\right]. \qquad (5)$$

Подставим в (5) явный вид переменной σ

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{(1-\mu^2)}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\sigma\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{(1-\mu^2)\sigma_0F'_\mu(\mu,\varphi)e^{2\alpha_0r}}{\sigma_0F(\mu,\varphi)e^{2\alpha_0r}}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}+\frac{1}{(1-\mu^2)}\left(\frac{\sigma_0F'_\varphi(\mu,\varphi)e^{2\alpha_0r}}{\sigma_0F(\mu,\varphi)e^{2\alpha_0r}}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)\right]=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+(1-\mu^2)\frac{F'_\mu(\mu,\varphi)}{F(\mu,\varphi)}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{F'_\varphi(\mu,\varphi)}{F(\mu,\varphi)}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right].$$

В силу того, что в экспоненциальном представлении проводимости $\sigma=$ $=\sigma_0F(\mu,\varphi)e^{2\alpha_0(r-r_0)}$ функция $F(\mu,\varphi)$ - мало изменяющаяся функция, причём такая, что $\left|\frac{F'_\mu(\mu,\varphi)}{F(\mu,\varphi)}\right|\ll 1$ и $\left|\frac{F'_\varphi(\mu,\varphi)}{F(\mu,\varphi)}\right|\ll 1$, то слагаемыми, содержащими эти коэффициенты, пренебрегаем.

Таким образом, уравнение (3′) примет вид

$$4\alpha_0^2\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]=$$
$$=-\frac{1}{r_l^2\sigma_l}I_l\delta(r-r_l)\delta(\mu-\mu_l)\delta(\varphi-\varphi_l). \qquad (6)$$

Рассмотрим интервал $\sigma_1<\sigma<\sigma_m$, где $\sigma_m=\sigma_0F(\mu,\varphi)e^{2\alpha_0(r_m-r_0)}$, соответствующий интервалу $r_1<r<r_m$, где $r_1=(r_0+10)$ км, $r_m=(r_0+$ $+90)$ км. В этом интервале функцию $\frac{1}{r^2}$ можно заменить на константу $\frac{1}{r_0^2}$.

При этом уравнение (6), учитывая формулу

1210

$$\delta(r-r_l) = \delta\left(\frac{1}{2\alpha_0}\ln\frac{\sigma}{\sigma_0 F(\mu,\varphi)} - \frac{1}{2\alpha_0}\ln\frac{\sigma_l}{\sigma_0 F(\mu,\varphi)}\right) = 2\alpha_0\sigma_l\delta(\sigma-\sigma_l),$$

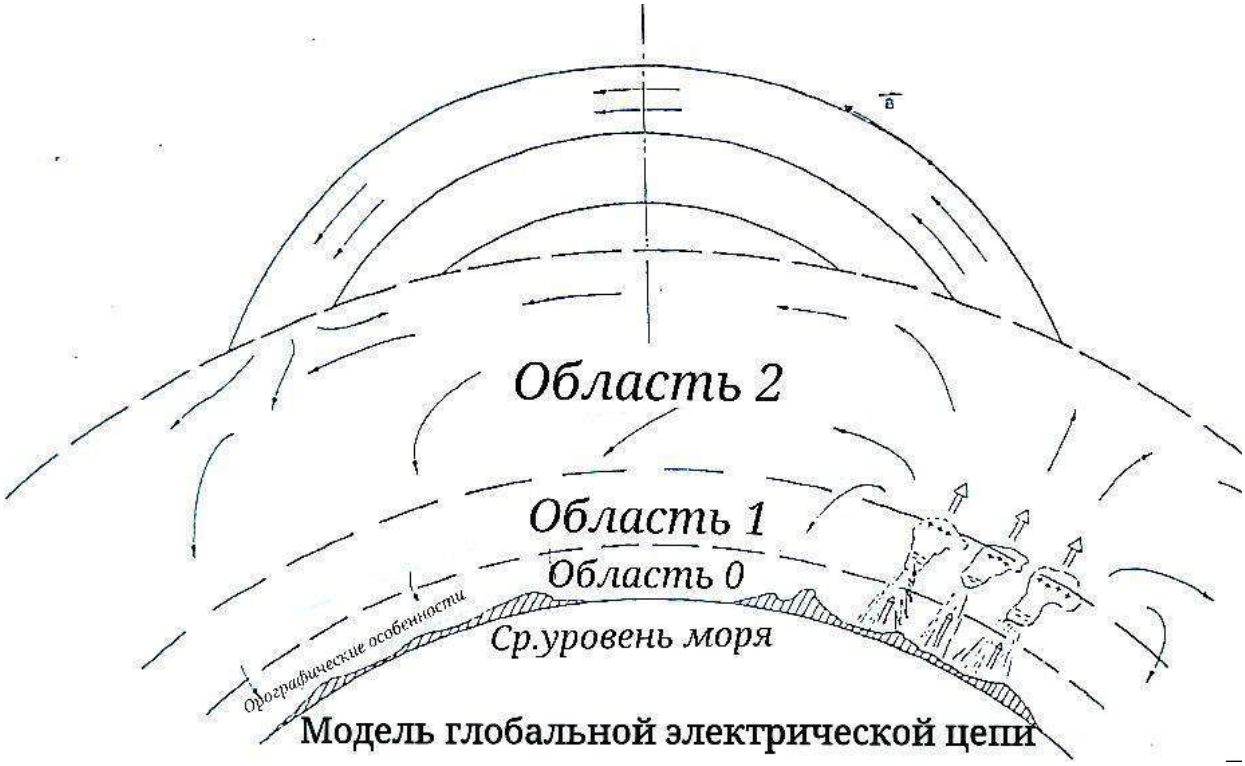
примет вид

$$4\alpha_0^2\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)\right) + \frac{1}{r_0^2}\Delta_{\mu,\varphi}\Phi = -\frac{2\alpha_0}{r_l^2}I_l\delta(\sigma-\sigma_l)\delta(\mu-\mu_l)\delta(\varphi-\varphi_l), \qquad (6')$$

где $\Delta_{\mu,\varphi}\Phi = \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$.

Постановка задачи

Геометрическая модель глобальной электрической цепи представляет собой атмосферу, разбитую на четыре области.



Область 0 – область тропосферы, в которой учитываются орографические особенности Земли, $h_0 \approx 8 - 10$ км.

Области 1 и 2 сферически симметричны.

Область 1 – верхняя тропосфера, ограниченная сферами радиусов r_1 и r_2, где

$r_1 = r_0 + h_1$, $h_1 \approx 10 - 12$ км, $r_2 = r_0 + h_2$, $h_2 \approx 20 - 50$ км. На верхней границе области 1 расположены токовые грозовые источники.

Область 2 – стратосфера и мезосфера над областью грозы, ограниченная сферами радиусов r_2 и r_m, $r_m = r_0 + h_m$, $h_m \approx 60 - 90$ км.

Выше этих областей расположены ионосфера, магнитосфера.

Начально-краевую задачу будем рассматривать в области Ω, представляющую объединение областей 1 и 2. Граница области Ω в новых переменных записывается в виде $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_m$, где $\sigma_1 = \sigma_0 e^{2\alpha_0 h_1}$, $\sigma_m = \sigma_0 e^{2\alpha_0 h_m}$ - усреднённая по высоте электрическая проводимость Педерсона, соответствующая нижней границе магнитосферы.

Будем предполагать, что источник тока находится на поверхности $\sigma = \sigma_2$.

1212

Задача заключается в отыскании электрического потенциала Φ, удовлетворяющего уравнению (7)

$$4\alpha_0^2 \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2 \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right) + \frac{1}{r_0^2}\Delta_{\mu,\varphi}\Phi = -\frac{2\alpha_0}{r_2^2} I_2 \delta(\sigma-\sigma_2)\delta(\mu-\mu_2)\delta(\varphi-\varphi_2), \qquad (7)$$

в области $\sigma_1 < \sigma < \sigma_m$, $-1 < \mu < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$,

и граничным условиям:

на верхней границе области $\sigma = \sigma_m$

$$\Phi(\sigma_m, \mu, \varphi) = \Phi(\sigma_m, -\mu, \varphi), \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}(\sigma_m, \mu, \varphi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}(\sigma_m, -\mu, \varphi), \qquad (9)$$

на нижней границе области $\sigma = \sigma_1$

$$\Phi(\sigma_1, \mu, \varphi) - 2\alpha_0 \Delta R(\mu, \varphi)\sigma_1^2 \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}(\sigma_1, \mu, \varphi) = 0, \qquad (10)$$

и условиям, связанным с переходом к сферическим координатам

$$\left|\Phi|_{\mu=-1}\right| < \infty, \left|\Phi|_{\mu=1}\right| < \infty, \Phi(\sigma, \mu, \varphi) = \Phi(\sigma, \mu, \varphi + 2\pi).$$

Здесь I_2 – ток, источник которого находится на границе областей 1 и 2.

Условия (8)-(9) означают, что электрические токи текут вдоль силовых линий магнитного поля (вдоль силовых трубок магнитного поля) и силовые линии геомагнитного поля являются эквипотенциальными.

Для решения поставленной задачи будем использовать сферические функции.

1213

Решение задачи

Решение уравнения (7) будем искать в виде ряда:

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi) = R_{00}^{(1)}(\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(R_{nk}^{(1)}(\sigma)Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi) + R_{nk}^{(2)}(\sigma)Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right), \quad (11)$$

где $Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)$, $Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)$ – сферические функции:

$$Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi) = P_n^{(k)}(\mu)\cos k\varphi,$$

$$Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi) = P_n^{(k)}(\mu)\sin k\varphi,$$

а $R_{nk}^{(1)}(\sigma)$ и $R_{nk}^{(2)}(\sigma)$ – неопределённые коэффициенты.

Разложим функцию, стоящую в правой части уравнения (7) в ряд по сферическим функциям:

$$-\frac{2\alpha_0}{r_2^2}I_2\delta(\sigma-\sigma_2)\delta(\mu-\mu_2)\delta(\varphi-\varphi_2) = -\frac{2\alpha_0}{r_2^2}\delta(\sigma-\sigma_2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(Q_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi) + Q_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right),$$

где

$$Q_{nk}^{(1)} = \frac{I_2\int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\,\delta(\mu-\mu_2)\delta(\varphi-\varphi_2)Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)}{\left\|Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)\right\|^2} = \frac{I_2Y_{nk}^{(1)}(\mu_2,\varphi_2)}{\left\|Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)\right\|^2},$$

$$Q_{nk}^{(2)} = \frac{I_2\int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\,\delta(\mu-\mu_2)\delta(\varphi-\varphi_2)Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)}{\left\|Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right\|^2} = \frac{I_2Y_{nk}^{(2)}(\mu_2,\varphi_2)}{\left\|Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right\|^2}.$$

$$\left\|Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)\right\|^2 = \left\|Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right\|^2 = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, k\neq 0,$$

$$\left\|Y_{00}^{(1)}(\mu,\varphi)\right\|^2 = 4\pi.$$

Подставляя ряд (11) в уравнение (7), получим

1214

$$4\alpha_0^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial R_{nk}^{(1)}(\sigma)}{\partial\sigma}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial R_{nk}^{(1)}(\sigma)}{\partial\sigma}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}R_{nk}^{(1)}(\sigma)\Delta_{\mu,\varphi}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+\frac{1}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}R_{nk}^{(2)}(\sigma)\,\Delta_{\mu,\varphi}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)$$
$$=-\frac{2\alpha_0}{r_2^2}\delta(\sigma-\sigma_2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(Q_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+Q_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right). \qquad (12)$$

В силу того, что сферические функции удовлетворяют тождеству

$$\Delta_{\mu,\varphi}Y_{nk}^{(i)}(\mu,\varphi)=\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial Y_{nk}^{(i)}}{\partial\mu}+\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial^2Y_{nk}^{(i)}}{\partial\varphi^2}=-\lambda_nY_{nk}^{(i)}, \qquad (13)$$

где $\lambda_n=n(n+1)$, $i=1,2$,

равенство (12) преобразуется к виду

$$4\alpha_0^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial R_{nk}^{(1)}(\sigma)}{\partial\sigma}\right)+Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial R_{nk}^{(2)}(\sigma)}{\partial\sigma}\right)\right]\right)$$
$$-\frac{1}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[R_{nk}^{(1)}(\sigma)n(n+1)Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+R_{nk}^{(2)}(\sigma)n(n+1)Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right]=$$
$$=-\frac{2\alpha_0}{r_2^2}\delta(\sigma-\sigma_2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(Q_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+Q_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right). \qquad (14)$$

Разделив обе части выражения (14) на $4\alpha_0^2$ и приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых функциях, получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial R_{nk}^{(1)}}{\partial\sigma}\right)-\frac{n(n+1)}{4\alpha_0^2r_0^2}R_{nk}^{(1)}=-\tilde{Q}_{nk}^{(1)}\delta(\sigma-\sigma_2) \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial R_{nk}^{(2)}}{\partial\sigma}\right)-\frac{n(n+1)}{4\alpha_0^2r_0^2}R_{nk}^{(2)}=-\tilde{Q}_{nk}^{(2)}\delta(\sigma-\sigma_2)$$

или

$$\sigma^2R_{nk}^{(1)\prime\prime}+2\sigma R_{nk}^{(1)\prime}-\frac{n(n+1)}{4\alpha_0^2r_0^2}R_{nk}^{(1)}=-\tilde{Q}_{nk}^{(1)}\delta(\sigma-\sigma_2) \qquad (15')$$

$$\sigma^2R_{nk}^{(2)\prime\prime}+2\sigma R_{nk}^{(2)\prime}-\frac{n(n+1)}{4\alpha_0^2r_0^2}R_{nk}^{(2)}=-\tilde{Q}_{nk}^{(2)}\delta(\sigma-\sigma_2),$$

где $\tilde{Q}_{nk}^{(1)}=\frac{Q_{nk}^{(1)}}{2\alpha_0r_2^2}$, а $\tilde{Q}_{nk}^{(2)}=\frac{Q_{nk}^{(2)}}{2\alpha_0r_2^2}$.

Так как уравнения для $R_{nk}^{(1)}$ и $R_{nk}^{(2)}$ отличаются только значениями констант $\tilde{Q}_{nk}^{(1)}$ и $\tilde{Q}_{nk}^{(2)}$, стоящих в правой части уравнения, то отбросим верхний индекс и будем решать следующее уравнение

$$\sigma^2 R_{nk}'' + 2\sigma R_{nk}' - \frac{n(n+1)}{4\alpha_0^2 r_0^2} R_{nk} = -\tilde{Q}_{nk}\delta(\sigma - \sigma_2) \tag{16}$$

Уравнение (16) рассмотрим в двух случаях $n = 0$ и $n \neq 0$.

Решение уравнения (16) при $n \neq 0$ приведено в бакалаврской работе [2] и имеет вид

$$R_{nk}(\sigma) = A_{nk}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} + B_{nk}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}} + \frac{\tilde{Q}_{nk}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\theta(\sigma - \sigma_2)\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} -$$

$$-\frac{\tilde{Q}_{nk}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\theta(\sigma - \sigma_2)\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}}, \tag{17}$$

где $\xi_n = \sqrt{1 + \frac{n(n+1)}{\alpha_0^2 r_0^2}}$, $\theta(\sigma - \sigma_2)$ – функция Хевисайда.

При $n = 0$ решение уравнения (16) имеет вид

$$R_{00}^{(1)}(\sigma) = \frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma} + B_{00}^{(1)} + \frac{\tilde{Q}_{00}^{(1)}}{\sigma}\theta(\sigma - \sigma_2) - \frac{\tilde{Q}_{00}^{(1)}}{\sigma_2}\theta(\sigma - \sigma_2). \tag{18}$$

Сначала рассмотрим эти решения в области 2, где $\sigma > \sigma_2$.

Учитывая определение функции Хевисайда, в области 2 решение $R_{nk}(\sigma)$ запишется в следующем виде

$$R_{nk}(\sigma) = A_{nk}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} + B_{nk}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}} + \frac{\tilde{Q}_{nk}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} - \frac{\tilde{Q}_{nk}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}} =$$

$$= \sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(A_{nk} + \frac{\tilde{Q}_{nk}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\right) + \sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\left(B_{nk} - \frac{\tilde{Q}_{nk}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\right), \tag{19}$$

$$R_{00}^{(1)}(\sigma) = \frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma} + B_{00}^{(1)} + \frac{\tilde{Q}_{00}^{(1)}}{\sigma} - \frac{\tilde{Q}_{00}^{(1)}}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma}\left(A_{00}^{(1)} + \tilde{Q}_{00}^{(1)}\right) + B_{00}^{(1)} - \frac{\tilde{Q}_{00}^{(1)}}{\sigma_2}. \tag{20}$$

Переобозначим

$$A_{nk} + \frac{\tilde{Q}_{nk}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}} = \widetilde{A_{nk}}, \tag{21}$$

$$B_{nk} - \frac{\tilde{Q}_{nk}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1-\xi_n}{2}} = \widetilde{B_{nk}}, \tag{22}$$

$$A_{00}^{(1)} + \widetilde{Q_{00}^{(1)}} = \widetilde{A_{00}^{(1)}}, \tag{23}$$

$$B_{00}^{(1)} - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2} = \widetilde{B_{00}^{(1)}}. \tag{24}$$

Тогда (19) и (20) примут вид соответственно

$$R_{nk}(\sigma) = \widetilde{A_{nk}}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} + \widetilde{B_{nk}}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}}, \tag{25}$$

$$R_{00}^{(1)}(\sigma) = \frac{\widetilde{A_{00}^{(1)}}}{\sigma} + \widetilde{B_{00}^{(1)}}. \tag{26}$$

Подстановка ряда (11) в граничные условия (8) и (9) приводит к условиям на функцию $R_{nk}(\sigma)$

$R'_{nk}(\sigma_m) = 0$, когда $(n+k)$ принимает чётные значения,

$R_{nk}(\sigma_m) = 0$, когда $(n+k)$ принимает нечётные значения.

Подставляя (25), (26) в эти условия, получим связь между коэффициентами $\widetilde{A_{nk}}$ и $\widetilde{B_{nk}}$

$$\widetilde{B_{nk}} = \eta^{\pm}\widetilde{A_{nk}}, \text{ где } \eta^{+} = \frac{\xi_n+1}{\xi_n-1}{\sigma_m}^{-\xi_n}, (n+k) \text{ принимает чётные значения,}$$
$$\eta^{-} = -{\sigma_m}^{-\xi_n}, \ (n+k) \text{ принимает нечётные значения,} \tag{27}$$

$\widetilde{A_{00}^{(1)}} = 0.$

В силу того, что $\widetilde{A_{00}^{(1)}} = 0$, имеем

$$R_{00}^{(1)}(\sigma) = \widetilde{B_{00}^{(1)}} = B_{00}^{(1)} - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2},$$

$$A_{00}^{(1)} = -\widetilde{Q_{00}^{(1)}}. \tag{28}$$

В области 1, где $\sigma < \sigma_2$, учитывая определение функции Хевисайда, решение $R_{nk}(\sigma)$ запишется в виде:

$$R_{nk}(\sigma) = A_{nk}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} + B_{nk}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}}, \tag{29}$$

$$R_{00}^{(1)}(\sigma) = \frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma} + B_{00}^{(1)} = -\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma} + B_{00}^{(1)}. \quad (30)$$

Подставим ряд (11) в граничное условие (10)

$$\Phi(\sigma_1, \mu, \varphi) - 2\alpha_0 \Delta R(\mu, \varphi)\sigma_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(\sigma_1, \mu, \varphi) = 0. \quad (10)$$

Получим:

$$R_{00}^{(1)}(\sigma_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(R_{nk}^{(1)}(\sigma_1)Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi) + R_{nk}^{(2)}(\sigma_1)Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right) -$$

$$-2\alpha_0 \Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1^2\left(R_{00}^{(1)'}(\sigma_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(R_{nk}^{(1)'}(\sigma_1)Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi) + R_{nk}^{(2)'}(\sigma_1)Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right)\right) = 0.$$

Так как выражения для $R_{nk}^{(1)}$ и $R_{nk}^{(2)}$ аналогичны, отбросим верхний индекс и выпишем явный вид $R_{nk}(\sigma_1)$ и $R'_{nk}(\sigma_1)$

$$R_{nk}(\sigma_1) = A_{nk}\sigma_1^{\frac{-1-\xi_n}{2}} + B_{nk}\sigma_1^{\frac{-1+\xi_n}{2}} = \sigma_1^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(A_{nk} + B_{nk}\sigma_1^{\xi_n}\right). \quad (31)$$

Учитывая, что

$$R'_{nk}(\sigma) = \sigma^{\frac{-3-\xi_n}{2}}\left[\left(\frac{-1-\xi_n}{2}\right)A_{nk} + \left(\frac{-1+\xi_n}{2}\right)\sigma^{\xi_n}B_{nk}\right],$$

получим

$$R'_{nk}(\sigma_1) = \sigma_1^{\frac{-3-\xi_n}{2}}\left[\left(\frac{-1-\xi_n}{2}\right)A_{nk} + \left(\frac{-1+\xi_n}{2}\right)\sigma_1^{\xi_n}B_{nk}\right], \quad (32)$$

$$R_{00}^{(1)'}(\sigma_1) = -\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1^2}. \quad (33)$$

Таким образом, учитывая (31), (32) и (33), имеем

$$\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1}(1 + 2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1) + B_{00}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(A_{nk}^{(1)} + B_{nk}^{(1)}\sigma_1^{\xi_n}\right)\sigma_1^{\frac{-1-\xi_n}{2}} -\right.$$

$$-2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1^2\left(\left(\frac{-1-\xi_n}{2}\right)A_{nk}^{(1)} + \left(\frac{-1+\xi_n}{2}\right)\sigma_1^{\xi_n}B_{nk}^{(1)}\right)\sigma_1^{\frac{-3-\xi_n}{2}}\Big]Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(A_{nk}^{(2)} + B_{nk}^{(2)}\sigma_1^{\xi_n}\right)\sigma_1^{\frac{-1-\xi_n}{2}} - 2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1^2\left(\left(\frac{-1-\xi_n}{2}\right)A_{nk}^{(2)} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{-1+\xi_n}{2}\right)\sigma_1^{\xi_n}B_{nk}^{(2)}\right)\sigma_1^{\frac{-3-\xi_n}{2}}\right]Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi) = 0. \quad (34)$$

Приводя подобные слагаемые в (34), получим

$$\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1}(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)+B_{00}^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big[(1+\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1(\xi_n+1))\sigma_1^{\frac{-1-\xi_n}{2}}A_{nk}^{(1)}+$$
$$+(1-\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1(\xi_n-1))\sigma_1^{\frac{-1+\xi_n}{2}}B_{nk}^{(1)}\Big]Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big[(1+\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1(\xi_n+$$
$$+1))\sigma_1^{\frac{-1-\xi_n}{2}}A_{nk}^{(2)}+(1-\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1(\xi_n-1))\sigma_1^{\frac{-1+\xi_n}{2}}B_{nk}^{(2)}\Big]Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)=0. \qquad (35)$$

Так как радиус Земли достаточно большой, то для $n<100$ считаем $\xi_n\approx 1$. Тогда, в силу того, что выполняется (27), коэффициенты $\widetilde{B_{nk}}$ считаем малыми при $n\neq 0$ и $k\neq 0$. Следовательно, учитывая (22), $B_{nk}=\frac{\tilde{Q}_{nk}}{\sigma_2}$.

Учитывая данные предположения, выражение (35) примет вид

$$\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1}(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)+B_{00}^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big[(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1){\sigma_1}^{-1}A_{nk}^{(1)}+$$
$$+\frac{\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}}{\sigma_2}\Big]Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big[(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1){\sigma_1}^{-1}A_{nk}^{(2)}+\frac{\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}}{\sigma_2}\Big]Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)=0.$$

В полученном выражении вынесем величины, не зависящие от n и k, за знак суммирования и поделим на величину $(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)$. В результате получим

$$\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1}+\frac{1}{(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)}B_{00}^{(1)}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_2(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_2(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)=0. \qquad (36)$$

В силу того, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)=\delta(\mu-\mu_2)\delta(\varphi-\varphi_2)-\widetilde{Q_{00}^{(1)}},$$

выражение (36) примет вид

$$\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1}+\frac{1}{(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)}B_{00}^{(1)}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)+\frac{\delta(\mu-\mu_2)\delta(\varphi-\varphi_2)}{\sigma_2(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)}-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)}=0.$$

По свойству δ-функции $\varphi(x)\delta(x-x_0)=\varphi(x_0)\delta(x-x_0)$ имеем

$$\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1}+G(\mu,\varphi)B_{00}^{(1)}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)+\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\delta(\mu-\mu_2)\delta(\varphi-\varphi_2)-G(\mu,\varphi)\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}=0,$$

где

$$G(\mu,\varphi)=\frac{1}{(1+2\alpha_0\Delta R(\mu,\varphi)\sigma_1)}=$$
$$=g_{00}^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(g_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+g_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right) \qquad (37)$$

Подставляя в полученное выражение явный вид функции $G(\mu,\varphi)$ и представление δ-функции $\delta(\mu-\mu_2)\delta(\varphi-\varphi_2)$ в виде ряда по сферическим функциям, получим

$$\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1}+B_{00}^{(1)}\left(g_{00}^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(g_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+g_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)+\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+$$
$$+\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)+\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{00}^{(1)}}-$$
$$-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}\left(g_{00}^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(g_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+g_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right)\right)=0. \qquad (38)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в (38), получим соотношения

$$\frac{A_{00}^{(1)}}{\sigma_1}+B_{00}^{(1)}g_{00}^{(1)}+\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{00}^{(1)}}-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}g_{00}^{(1)}=0, \qquad (39)$$

$$B_{00}^{(1)}g_{nk}^{(1)}+\frac{1}{\sigma_1}A_{nk}^{(1)}+\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}g_{nk}^{(1)}=0, \qquad (40)$$

$$B_{00}^{(1)}g_{nk}^{(2)}+\frac{1}{\sigma_1}A_{nk}^{(2)}+\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}g_{nk}^{(2)}=0. \qquad (41)$$

Выразим из (39) коэффициент $A_{00}^{(1)}$:

$$A_{00}^{(1)}=\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}g_{00}^{(1)}\sigma_1-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{00}^{(1)}}\sigma_1-B_{00}^{(1)}g_{00}^{(1)}\sigma_1. \qquad (42)$$

Подставляя в (42) выраженный из (24) коэффициент $B_{00}^{(1)}$, получим

$$A_{00}^{(1)}=\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}g_{00}^{(1)}\sigma_1-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{00}^{(1)}}\sigma_1-g_{00}^{(1)}\sigma_1\widetilde{B_{00}^{(1)}}-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}g_{00}^{(1)}\sigma_1=$$

$$= -\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{00}^{(1)}}\sigma_1 - g_{00}^{(1)}\sigma_1\widetilde{B_{00}^{(1)}}. \quad (43)$$

Учитывая (28), имеем

$$-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{00}^{(1)}}\sigma_1 - g_{00}^{(1)}\sigma_1\widetilde{B_{00}^{(1)}} = -\widetilde{Q_{00}^{(1)}}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{B_{00}^{(1)}} = \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{g_{00}^{(1)}\sigma_1}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right). \quad (44)$$

Используя (24) и формулы (40) и (41), найдем коэффициенты $A_{nk}^{(1)}$ и $A_{nk}^{(2)}$

$$A_{nk}^{(1)} = -\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}\sigma_1 - \widetilde{B_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(1)}\sigma_1, \quad (45)$$

$$A_{nk}^{(2)} = -\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}\sigma_1 - \widetilde{B_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(2)}\sigma_1. \quad (46)$$

Учитывая явный вид коэффициента $\widetilde{B_{00}^{(1)}}$ (формула (44)), для коэффициентов $A_{nk}^{(1)}$ и $A_{nk}^{(2)}$ получим выражения

$$A_{nk}^{(1)} = -\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(1)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right), \quad (47)$$

$$A_{nk}^{(2)} = -\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(2)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right). \quad (48)$$

В соответствии с формулой (21), коэффициенты $\widetilde{A_{nk}^{(1)}}$ и $\widetilde{A_{nk}^{(2)}}$ имеют вид

$$\widetilde{A_{nk}^{(1)}} = -\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(1)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}},$$

$$\widetilde{A_{nk}^{(2)}} = -\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(2)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}.$$

Или

$$\widetilde{A_{nk}^{(i)}} = -\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(i)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}, \text{ где } i = 1,2.$$

Подставим найденные коэффициенты в решение $R_{nk}(\sigma)$ в области 2, где $\sigma > \sigma_2$. Для этого формулу (25) перепишем, принимая во внимание (27),

$$R_{nk}^{(i)}(\sigma) = \widetilde{A_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} + \widetilde{B_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}} = \widetilde{A_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} + \frac{\xi_n+1}{\xi_n-1}\sigma_m{}^{-\xi_n}\widetilde{A_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}} =$$

$$= \widetilde{A_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1 + \frac{\xi_n+1}{\xi_n-1}\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^{\xi_n}\right) =$$

$$= \left(-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(i)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}}{\xi_n}\sigma_2{}^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\right)\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1 +\right.$$

$$\left. + \frac{\xi_n+1}{\xi_n-1}\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^{\xi_n}\right), \text{ если } (n+k) \text{ принимает чётные значения,} \quad (49)$$

$$R_{nk}^{(i)}(\sigma) = \widetilde{A_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} + \widetilde{B_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}} = \widetilde{A_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}} - \sigma_m{}^{-\xi_n}\widetilde{A_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}} =$$

$$= \widetilde{A_{nk}^{(i)}}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^{\xi_n}\right) =$$

$$= \left(-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(i)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}}{\xi_n}\sigma_2{}^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\right)\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^{\xi_n}\right),$$

если $(n+k)$ принимает нечётные значения, (50)

$$R_{00}^{(1)}(\sigma) = \widetilde{B_{00}^{(1)}} = \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{g_{00}^{(1)}\sigma_1}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right). \quad (51)$$

Коэффициент $\widetilde{B_{00}^{(1)}}$ называется ионосферным потенциалом и обозначается Φ_∞.

Используя это обозначение, решение задачи в области 2, где $\sigma > \sigma_2$ имеет вид

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi) = \Phi_\infty +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(i)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}}{\xi_n}\sigma_2{}^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\right)\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1 + \eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)}{\sigma_2}\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}\sigma_1 - \frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}g_{nk}^{(i)}}{g_{00}^{(1)}}\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right) + \frac{\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}}{\xi_n}\sigma_2{}^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\right)\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1 + \eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi). \quad (52)$$

Выразим через ионосферный потенциал Φ_∞ выражение $\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right)$, используя (51),

$$\left(1 - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \frac{\Phi_\infty g_{00}^{(1)}\sigma_1}{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}. \quad (53)$$

1222

Подставляя в (52) явный вид сферических функций $Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)$, $Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)$ и коэффициентов $\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}$, $\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}$ и учитывая (53), получим

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_\infty+$$

$$+\frac{I_2}{2\alpha_0 r_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n\sqrt{\sigma\sigma_2}}-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}}{\sigma_2}\right)\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)\frac{P_n^{(k)}(\mu)P_n^{(k)}(\mu_2)(\cos k\varphi\cos k\varphi_2+\sin k\varphi\sin k\varphi_2)}{\|Y_{nk}(\mu,\varphi)\|^2}-$$

$$-\sigma_1\Phi_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)P_n^{(k)}(\mu)\left(g_{nk}^{(1)}\cos k\varphi+g_{nk}^{(2)}\sin k\varphi\right). \qquad (54)$$

Учитывая тригонометрическую формулу косинуса разности двух углов, получим

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_\infty+$$

$$+\frac{I_2}{2\alpha_0 r_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n\sqrt{\sigma\sigma_2}}-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}}{\sigma_2}\right)\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)\frac{P_n^{(k)}(\mu)P_n^{(k)}(\mu_2)\cos k(\varphi-\varphi_2)}{\|Y_{nk}(\mu,\varphi)\|^2}-$$

$$-\sigma_1\Phi_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)P_n^{(k)}(\mu)\left(g_{nk}^{(1)}\cos k\varphi+g_{nk}^{(2)}\sin k\varphi\right).. \qquad (55)$$

В выражении (55) вынесем множители, не зависящие от k, за знак суммирования по k и воспользуемся теоремой сложения для присоединённых функций Лежандра.

Теорема

Пусть даны две точки x и x' со сферическими координатами соответственно (r,θ,φ) и (r',θ',φ') и пусть γ – угол между радиус-векторами этих точек. Тогда полином Лежандра -го порядка, зависящий от угла γ, выражается через произведения сферических функций, зависящих от μ,φ и μ',φ':

$$P_n(\cos\gamma)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\cos\theta)P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k(\varphi-\varphi'),$$

где $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$

Эту формулу можно обобщить в зависимости от того, по каким индексам идет суммирование. С учетом введенных ранее обозначений, получим

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\|Y_{nk}(\mu,\varphi)\|^2}P_n^{(k)}(\mu)\,P_n^{(k)}\left(\mu_2\right)\cos k\left(\varphi-\varphi_2\right)=\frac{2n+1}{8\pi}\left(P_n\left(\cos\gamma\right)+P_n\left(\cos\gamma_1\right)\right), \qquad (56)$$

1223

если в суммировании по k используются только такие k, при которых числа $(n+k)$ принимают чётные значения,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\|Y_{nk}(\mu,\varphi)\|^2} P_n^{(k)}(\mu)\, P_n^{(k)}(\mu_2) \cos k(\varphi-\varphi_2) = \frac{2n+1}{8\pi}\Big(P_n(\cos\gamma) - P_n(\cos\gamma_1)\Big), \quad (57)$$

если в суммировании по k используются только такие k, при которых числа $(n+k)$ принимают нечётные значения. Здесь

$$\cos\gamma = \mu\mu_2 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_2^2}\cos(\varphi-\varphi_2),$$

$$\cos\gamma_1 = -\mu\mu_2 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_2^2}\cos(\varphi-\varphi_2),$$

где γ – угол между вектором, направленным в точку наблюдения, и вектором, направленным в центр грозового образования, γ_1 – угол между вектором, направленным в точку наблюдения, и вектором, направленным в точку, сопряжённую точке расположения центра источника.

После применения вышеуказанной теоремы, получим выражение для найденного решения

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi) = \Phi_\infty + \frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n\sqrt{\sigma\sigma_2}} - \frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}}{\sigma_2}\right)(2n+1)\big(C_n(\sigma)P_n(\cos\gamma) +$$

$$+D_n(\sigma)P_n(\cos\gamma_1)\big) - \sigma_1\Phi_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}P_n^{(k)}(\mu)(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n})\Big(g_{nk}^{(1)}\cos k\varphi +$$

$$+g_{nk}^{(2)}\sin k\varphi\Big), \quad (58)$$

где $$C_n(\sigma) = 1 + \frac{1}{\xi_n - 1}\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^{\xi_n}, \quad (59)$$

$$D_n(\sigma) = \frac{\xi_n}{\xi_n - 1}\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^{\xi_n}, \quad (60)$$

$\eta^+ = \frac{\xi_n+1}{\xi_n-1}{\sigma_m}^{-\xi_n}$, $(n+k)$ принимает чётные значения,

$\eta^- = -{\sigma_m}^{-\xi_n}$, $(n+k)$ принимает нечётные значения.

Также подставим найденные коэффициенты в решение $R_{nk}(\sigma)$ в области 1, где $\sigma < \sigma_2$. Для этого формулу (29) перепишем, принимая во внимание (21), (22) и (27),

$$R_{nk}^{(i)}(\sigma)=A_{nk}^{(i)}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}+B_{nk}^{(i)}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}}=A_{nk}^{(i)}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}+\left(\eta^{\pm}\left(A_{nk}^{(i)}+\frac{\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\right)\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}}=A_{nk}^{(i)}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)+\frac{\widetilde{Q_{nk}^{(i)}}}{\xi_n}\sigma_2^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\sigma^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma_2^{\xi_n}\right),$$

$i=1,2.$ (61)

$$R_{00}^{(1)}(\sigma)=-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma}+B_{00}^{(1)}=-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma}+\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{g_{00}^{(1)}\sigma_1}\left(1-\frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right)+\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}.$$ (62)

Используя формулу (53), решение $R_{00}^{(1)}(\sigma)$ примет вид

$$R_{00}^{(1)}(\sigma)=-\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma}+\Phi_{\infty}+\frac{\widetilde{Q_{00}^{(1)}}}{\sigma_2}=\Phi_{\infty}+\widetilde{Q_{00}^{(1)}}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma}\right),$$ (63)

Тогда решение задачи в области 1, где $\sigma<\sigma_2$, запишется в виде

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_{\infty}+\widetilde{Q_{00}^{(1)}}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[A_{nk}^{(1)}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n\sqrt{\sigma_2\sigma}}\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma_2^{\xi_n}\right)\right]Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[A_{nk}^{(2)}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1++\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n\sqrt{\sigma_2\sigma}}\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma_2^{\xi_n}\right)\right]Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi).$$ (64)

Подставляя в (64) явный вид сферических функций $Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)$, $Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)$, коэффициентов $\widetilde{Q_{00}^{(1)}}$, $\widetilde{Q_{nk}^{(1)}}$, $\widetilde{Q_{nk}^{(2)}}$ и вынося за знаки суммирования по n и k множители, не зависящие от них, получим

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_{\infty}+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma}\right)-$$

$$-\frac{I_2G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{2\alpha_0 r_2^2\sigma_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)\frac{P_n^{(k)}(\mu_2)P_n^{(k)}(\mu)(\cos k\varphi_2\cos k\varphi+\sin k\varphi_2\sin k\varphi)}{\|Y_{nk}(\mu,\varphi)\|^2}-$$

$$-\sigma_1\Phi_{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)P_n^{(k)}(\mu)\left(g_{nk}^{(1)}\cos k\varphi+g_{nk}^{(2)}\sin k\varphi\right)+$$

$$+\frac{I_2}{2\alpha_0 r_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n\sqrt{\sigma_2\sigma}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma_2{}^{\xi_n}\right)\frac{P_n^{(k)}(\mu_2)P_n^{(k)}(\mu)(\cos k\varphi_2\cos k\varphi+\sin k\varphi_2\sin k\varphi)}{\|Y_{nk}(\mu,\varphi)\|^2}.$$ (65)

Учитывая тригонометрическую формулу косинуса разности двух углов и теорему сложения для присоединённых функций Лежандра, получим

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_\infty+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma}\right)-$$

$$-\sigma_1\Phi_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)P_n^{(k)}(\mu)\left(g_{nk}^{(1)}\cos k\varphi+g_{nk}^{(2)}\sin k\varphi\right)+ \quad (66)$$

$$+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n\sqrt{\sigma_2\sigma}}\left(1+\eta^{\pm}{\sigma_2}^{\xi_n}\right)-\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\left(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}\right)\frac{G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right)(2n+1)P_n(\cos\gamma).$$

Множитель $\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n}$ можно представить в виде

$\eta^{+}\sigma^{\xi_n}=\frac{\xi_n+1}{\xi_n-1}\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^{\xi_n}$, $(n+k)$ принимает чётные значения,

$\eta^{-}\sigma^{\xi_n}=-\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^{\xi_n}$, $(n+k)$ принимает нечётные значения.

Так как в области 1 $\sigma<\sigma_2$ и $\frac{\sigma}{\sigma_m}\approx 0$, то решение в данной области можно упростить

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_\infty+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma}\right)-\sigma_1\Phi_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}P_n^{(k)}(\mu)\left(g_{nk}^{(1)}\cos k\varphi+g_{nk}^{(2)}\sin k\varphi\right)+$$

$$+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2\sqrt{\sigma_2\sigma}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n}\left(1-\frac{\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\xi_n G(\mu_2,\varphi_2)\sigma_1}{\sigma^{\xi_n}}\right)(2n+1)P_n(\cos\gamma). \quad (67)$$

Таким образом, решение поставленной задачи найдено с некоторыми приближениями. В области 1, где $\sigma<\sigma_2$, оно записывается в виде ряда (67), в области 2, где $\sigma>\sigma_2$, в виде ряда (58).

Рассмотрим два частных случая, когда сопротивление $\Delta R=const$ и когда сопротивление ΔR зависит только от угла θ.

Пусть $\Delta R=const$. Все коэффициенты разложения (37), кроме первого, обращаются в ноль. Учитывая, что $g_{00}^{(1)}$ совпадает с $G(\mu_2,\varphi_2)$, сумма первых двух слагаемых формулы (67) можно представить в виде

$$\Phi_\infty+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma}\right)=\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma}+2\alpha_0\Delta R\right). \quad (68)$$

Тогда решение в области 1, где $\sigma<\sigma_2$, имеет вид

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma}+2\alpha_0\Delta R\right)+$$

$$+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2\sqrt{\sigma_2\sigma}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n}\left(1-\frac{\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\xi_n\sigma_1}{(1+2\alpha_0\Delta R\sigma_1)\sigma^{\xi_n}}\right)(2n+1)P_n(\cos\gamma). \quad (69)$$

В области 2, где $\sigma > \sigma_2$,

$$\Phi_\infty = \frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_2}+2\alpha_0\Delta R\right), \quad (70)$$

и решение (58) запишется в виде

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi) = \Phi_\infty +$$

$$+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2\sqrt{\sigma\sigma_2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n}\left(1-\frac{\sigma_1\sigma_2^{\frac{-1-\xi_n}{2}}}{(1+2\alpha_0\Delta R\sigma_1)}\right)(2n+1)\left(C_n(\sigma)P_n(\cos\gamma)++D_n(\sigma)P_n(\cos\gamma_1)\right), \quad (71)$$

где коэффициенты $C_n(\sigma)$ и $D_n(\sigma)$ определяются по формулам (59), (60) соответственно.

В случае, когда сопротивление ΔR зависит только от угла θ, при разложении функции $G(\mu)$ в ряд по сферическим функциям

$$G(\mu) = \frac{1}{1+2\alpha_0\Delta R(\mu)\sigma_1} = g_{00}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(g_{nk}^{(1)}Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi) + g_{nk}^{(2)}Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right), \quad (72)$$

все коэффициенты кроме $g_{n0}^{(1)}$ оказываются равными нулю.

$$g_{nk}^{(1)} = \frac{\int_0^{2\pi}\cos k\varphi d\varphi\int_{-1}^{1}\frac{P_n^{(k)}(\mu)d\mu}{(1+2\alpha_0\Delta R(\mu)\sigma_1)}}{\left\|Y_{nk}^{(1)}(\mu,\varphi)\right\|^2} = \begin{cases} 0, \text{при } k\neq 0 \\ \widetilde{g_n^{(1)}}, \text{при } k = 0 \end{cases}, \quad (73)$$

$$g_{nk}^{(2)} = \frac{\int_0^{2\pi}\sin k\varphi d\varphi\int_{-1}^{1}\frac{P_n^{(k)}(\mu)d\mu}{(1+2\alpha_0\Delta R(\mu)\sigma_1)}}{\left\|Y_{nk}^{(2)}(\mu,\varphi)\right\|^2} = 0, \quad (74)$$

$$g_{00}^{(1)} = \frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{(1+2\alpha_0\Delta R(\mu)\sigma_1)}}{4\pi} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{(1+2\alpha_0\Delta R(\mu)\sigma_1)} = \widetilde{g_0}. \quad (75)$$

Учитывая формулы (73)-(75), ряд (72) является разложением функции $G(\mu)$ по полиномам Лежандра

$$G(\mu) = \frac{1}{1+2\alpha_0\Delta R(\mu)\sigma_1} = \widetilde{g_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{g_n^{(1)}}P_n(\mu), \quad (76)$$

Решение в области 1, где $\sigma < \sigma_2$, принимает вид

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_\infty+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma}\right)-\sigma_1\Phi_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\widetilde{g_n^{(1)}}P_n(\mu)+$$

$$+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2\sqrt{\sigma_2\sigma}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n}\left(1-\frac{\sigma_2^{\frac{-1+\xi_n}{2}}\xi_n G(\mu_2)\sigma_1}{\sigma^{\xi_n}}\right)(2n+1)P_n(\cos\gamma), \qquad (77)$$

где $\Phi_\infty=\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2\sigma_1\widetilde{g_0}}\left(1-\frac{G(\mu_2)\sigma_1}{\sigma_2}\right).$ (78)

Решение в области 2, где $\sigma>\sigma_2$, имеет вид

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_\infty+$$

$$+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)^{\frac{\xi_n}{2}}}{\xi_n\sqrt{\sigma\sigma_2}}-\frac{G(\mu_2)\sigma_1\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}}{\sigma_2}\right)(2n+1)\left(C_n(\sigma)P_n(\cos\gamma)+D_n(\sigma)P_n(\cos\gamma_1)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\widetilde{g_0}}-\frac{G(\mu_2)\sigma_1}{\widetilde{g_0}\sigma_2}\right)\sigma^{\frac{-1-\xi_n}{2}}\widetilde{g_n^{(1)}}P_n(\mu)(1+\eta^{\pm}\sigma^{\xi_n})\right]. \qquad (79)$$

Учитывая, что радиус Земли достаточно большой, для $n<100$ считаем $\xi_n\approx 1$.

Тогда решение в области 1, где $\sigma<\sigma_2$, будет иметь вид

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_\infty\left(1-\frac{\sigma_1(G(\mu)-\widetilde{g_0})}{\sigma}\right)+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma}\right)+$$

$$+\frac{I_2}{8\pi\alpha_0 r_2^2\sigma_2}\left(1-\frac{G(\mu_2)\sigma_1}{\sigma}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\gamma). \qquad (80)$$

Решение в области 2, где $\sigma>\sigma_2$, принимает вид

$$\Phi(\sigma,\mu,\varphi)=\Phi_\infty\left(1-\frac{\sigma_1(G(\mu)-\widetilde{g_0})}{\sigma}\right)+\Phi_\infty\frac{\sigma_1\widetilde{g_0}}{\sigma}\sum_{n=1}^{N}(2n+1)P_n(\cos\gamma). \qquad (81)$$

Выводы

1. Получены приближенные формулы для потенциала электрического поля в атмосфере в стационарном случае.
2. Упрощение граничного условия третьего рода, что сопротивление не зависит от углов, позволило решить задачу точно аналитически, не делая дополнительных приближений.

Список литературы

[1] Hays P.B., Roble R.G. Quasi-static model of global atmospheric electricity I. The Lower atmosphere. Journal of geophysical research, 1979, vol. 84, NO A7, p. 3291-3305.

[2] Бибина А.В. Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра математики на тему «Стационарная модель глобальной электрической цепи», Нижний Новгород, 2016

[3] Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир 1965

[4] Морозов В.Н. Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учётом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ. РГГМУ.-СПб, 2011, 253 с.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики//М., 1966 г. 724 стр., с илл.

1230

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
Веденина Александра
Владимировича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Fast converging Chernoff approximations» являются: Теорема 3, доказательство Теоремы 3, оценка скорости сходимости функции Чернова к решению (на стр. 25-31), модифицированная функция Чернова с обоснованием и оценкой скорости сходимости (на стр. 31-33).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Иваном Дмитриевичем Ремизовым, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального Исследовательского Университета «Высшая Школа Экономики».
- Проведено выступление на научном семинаре научно-учебной группы «Эволюционные полугруппы и их приложения» (руководитель семинара доцент кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального Исследовательского Университета «Высшая Школа Экономики» Иван Дмитриевич Ремизов).

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 16.06.2021. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Веденин Александр
Владимирович

3 июня 2021 г.
Нижний Новгород, Россия

FEDERAL STATE EDUCATIONAL INSTITUTION
HIGHER PROFESSIONAL EDUCATIONAL
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
"HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS"
NIZHNY NOVGOROD BRANCH
Faculty of Mathematics, Informatics and Computer Science

Alexandr Vedenin

FAST CONVERGING CHERNOFF APPROXIMATIONS

Master Thesis
Field of study 01.04.01 Mathematics
Educational Programme Mathematics

Reviewer:
Boris Volkov, Ph.D.
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
Moscow Institute of Physics and Technology

Scientific advisor:
Ivan Remizov, Ph.D.
Associate Professor

Consultant:
Oleg Galkin, Ph.D.
Associate Professor

Nizhny Novgorod, Russia
May 2021

Contents

1 Introduction **1**

2 Preliminaries **3**

2.1 C_0-semigroups 3

2.2 Abstract Cauchy problem for evolution equation in Banach space 4

2.3 Cauchy problem for partial differential equations of evolution type 5

2.4 Connection of abstract Cauchy problem with Cauchy problem for PDE 5

2.5 Setting of the problem that is solved in the paper 7

3 Main result **7**

3.1 Approach proposed 7

3.2 Derivation of a formula for Chernoff approximations 9

3.3 Main theorem 10

3.4 Verification of the formula for $S(t)$ by symbolic computation 18

3.5 Estimate for speed of convergence 25

3.6 New formula for improved results 31

3.7 Verification of the new formula for $S(t)$ by symbolic computation 34

References **39**

1 Introduction

Theory and practice of solving partial differential equations numerically is an old branch of applied mathematics. Finding solution with appropriate accuracy is extremely important in almost all areas of sophisticated contemporary engineering, experimental and theoretical physics and chemistry; in particular, in construction of materials, projecting of buildings and devices. The literature on this topic is abundant: almost every large publishing house has in its portfolio a book called Numerical methods for partial differential equations, see [7, 12, 16, 22]. And all this plentifulness grows from the fact that it is difficult and important to solve partial differential equations, and there is no numerical method which is good enough for all useful equations in all possible conditions.

At the present time we know of a relatively small number of situations where a short formula expresses the solution of a partial differential equation with variable coefficients in terms of these coefficients and initial/boundary conditions. However, with the use of Chernoff's theorem (see original paper by Paul Chernoff [5], textbook [6] or Theorem 2 below) it is possible to write such formulas for approximations to the solution. This fact gives birth to a new branch of numerical methods which are neither grid-based nor Galerkin, nor Monte-Carlo, nor iterative, but something

in between and at the same time something apart, with the rich flavour of functional analysis. There is a very good recent overview [3] describing the results and history of the method of Chernoff approximations. Employing this method we construct a sequence of functions (Chernoff approximations) which converges (uniformly in $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, t_0]$ for arbitrary $t_0 > 0$) to the exact solution of the Cauchy problem for diffusion-type second order parabolic equation given by

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = a(x)u''_{xx}(t,x) + b(x)u'_x(t,x) + c(x)u(t,x) \stackrel{denote}{=} (Hu(t,\cdot))(x), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

Here $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $u\colon [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, and functions $a, b, c, u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are bounded and uniformly continuous. We also assume that $a(x) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$, and first and second derivatives of a, b, c are bounded and uniformly continuous as functions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

This paper is dedicated to deriving a formula presented in Theorem 3 that gives the solution of (1) in terms of a, b, c, u_0 assuming that the second order differential operator H is an infinitesimal generator of the C_0-semigroup $\left(e^{tH}\right)_{t\geq 0}$ (later we will explain meaning of these words in the Preliminaries section). This assumption is standard in studies of class of evolution equations that the examined equation belongs to. According to general theory of C_0-semigroups [6] this assumption implies that the solution of the Cauchy problem (1) exists, is bounded and uniformly continuous with respect to x for each t, depends on u_0 continuously, and can be represented in a form $u(t,x) = \left(e^{tH}u_0\right)(x)$, we will discuss this in more words below in Theorem 1. The last equality means that if one knows e^{tH} for each $t > 0$ then (1) is solved (in the appropriate sense) for each u_0. We apply the Chernoff theorem to a specially constructed family of linear bounded operators $(S(t))_{t\geq 0}$ defined as proper Riemann integrals of functions containing a, b, c. This allows us to express e^{tH} in terms of a, b, c, reaching the proposed goal. The aim of the paper do not include detailed discussion of the problem of finding the class of functions in which the solution to (1) is unique under certain assumptions on functions a, b, c, u_0, but we keep in mind that for a heat equation there are known unbounded solutions. To have high speed of convergence of our approximations we ask additionally that initial condition u_0 has bounded uniformly continuous derivatives up to order 4.

For (1) there are known Chernoff approximations for the solution in terms of shift operators [18, 21] and in terms of improper Riemann integral operators [4] but they are difficult to use in practice, meanwhile our approximations are better designed for real-world applications.

An important question is how fast the error decreases in the approximation expression $e^{tH}u_0 \approx S(t/n)^n u_0$ provided by the Chernoff theorem as n tends to infinity. For a particular case of Schrödinger equation this question was discussed in [15], but generally this issue is not well developed at the present moment. It was mentioned in [28] that the speed of convergence depends sufficiently on the initial condition, and for some semigroups there are Chernoff functions providing arbitrary slow convergence of approximations. The notion of approximation subspace was proposed in [28] to study this issue, and some numerical experiments were performed recently in

1234

[17].

There is a recent improvement [30] in direction of research where the convergence is studied in operator norm hence convergence is uniform with respect to initial condition from unit sphere in $\mathcal{F}$, but examples from [17, 28] show that in general situation we should not expect such nice convergence properties.

See also research [1, 9, 10] (and references therein) in a more general setting than Chernoff's theorem. The same question arises for the Trotter product formula $e^{A+B} = \lim_{n\to\infty}(e^{A/n}e^{B/n})^n$ which we do not use but which is a particular case of Chernoff's theorem for operator-valued Chernoff function $G(t) = e^{tA}e^{tB}$, see [13, 14, 29].

The main result of the present paper is Theorem 3.

2 Preliminaries

We employ extensively the language and methods of functional analysis and C_0-semigroup theory, information on these topics can be found e.g. in classic textbooks [2, 6, 11]. This list is not exhaustive but each of these books is sufficient to understand well all the contents of the paper. Nevertheless, in this section we recall some basic definitions and facts to fix the notation, make the paper self-contained, and highlight the ideas that we will use. All information that is given in Preliminaries section without references is available in [2, 6, 11], the best choice is probably [6].

2.1 C_0-semigroups

Let $\mathcal{F}$ be a real Banach space. Let $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ be a set of all bounded linear operators in $\mathcal{F}$. Suppose we have a mapping $V\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, i.e., $V(t)$ is a bounded linear operator $V(t)\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ for each $t \geq 0$. The mapping V is called a *C_0-semigroup*, or *a strongly continuous one-parameter semigroup*, if it satisfies the following conditions:

1) $V(0)$ is the identity operator I, i.e., for each $\varphi \in \mathcal{F}$ we have $V(0)\varphi = \varphi$;

2) V maps the addition of numbers in $[0,+\infty)$ into a composition of operators in $\mathscr{L}(\mathcal{F})$, i.e., for all $t \geq 0$ and all $s \geq 0$ we have $V(t+s) = V(t) \circ V(s)$, where $(A \circ B)(\varphi) = A(B(\varphi)) = AB\varphi$;

3) V is continuous with respect to the strong operator topology in $\mathscr{L}(\mathcal{F})$, i.e., for all $\varphi \in \mathcal{F}$ function $t \longmapsto V(t)\varphi$ is continuous as a mapping from $[0,+\infty)$ to $\mathcal{F}$.

It is known that if $(V(t))_{t\geq 0}$ is a C_0-semigroup in Banach space $\mathcal{F}$ then the set

$$\left\{\varphi \in \mathcal{F} : \exists \lim_{t\to+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}\right\} \stackrel{denote}{=} D(L)$$

is a dense linear subspace in $\mathcal{F}$. The operator L defined on the domain $D(L)$ by the equality

$$L\varphi = \lim_{t\to+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}$$

1235

is called *an infinitesimal generator* (or just *generator* for short) of the C_0-semigroup $(V(t))_{t\geq 0}$. The generator $(L, D(L))$ is a closed linear operator that defines the C_0-semigroup $(V(t))_{t\geq 0}$ uniquely, and notation $V(t) = e^{tL}$ is used. If L is a bounded operator and $D(L) = \mathcal{F}$, then e^{tL} is indeed the exponent defined by the power series $e^{tL} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k L^k}{k!}$ converging with respect to the norm topology in $\mathscr{L}(\mathcal{F})$. In most interesting cases the generator is an unbounded differential operator, e.g., Laplacian Δ is the generator of a multidimensional heat semigroup, and operator H is the generator of semigroup providing solutions to (1) in the sense that will be explained below.

2.2 Abstract Cauchy problem for evolution equation in Banach space

One of the reasons for the study of C_0-semigroups is their connection with differential equations. We will start from the so-called abstract Cauchy problem (2) and then explain how it is related to (1). Consider Banach space $\mathcal{F}$, vector $u_0 \in \mathcal{F}$, linear operator $L\colon D(L) \to \mathcal{F}$ with domain $D(L) \subset \mathcal{F}$, and state the following abstract Cauchy problem: find function $U\colon [0, +\infty) \to \mathcal{F}$ such that

$$\begin{cases} U'(t) = LU(t) \text{ for } t \geq 0, \\ U(0) = u_0. \end{cases} \tag{2}$$

Equality $U'(t) = LU(t)$ is called linear evolution equation in $\mathcal{F}$ with operator L. Function U is called a strong solution to (2) iff U has continuous derivative with respect to norm in $\mathcal{F}$, $U(t) \in D(L)$ for all $t \geq 0$ and (2) holds. Function U is called a mild solution to (2) iff U is continuous with respect to norm in $\mathcal{F}$, and for all $t \geq 0$ we have $\int_0^t U(s)ds \in D(L)$ and $U(t) = u_0 + L\int_0^t U(s)ds$.

In elementary example provided by one-dimensional Banach space $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ we have $D(L) = \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}$, and L is a real number which also can be considered as an operator of multiplication by L. Then (2) is a standard ordinary differential equation which is separable and known to have solution $U(t) = e^{tL}u_0$ both in mild and strong sense which is easy to check by direct computation. It is beautiful and amazing that in case of infinite-dimensional space $\mathcal{F}$ this fact holds true (with some technical details added) and even the formula $U(t) = e^{tL}u_0$ continues to work properly. The following statement gives exact meaning to this emotional comment.

Theorem 1. (Proposition 6.2 in [6], p. 145) *If $\mathcal{F}$ is a Banach space and $(L, D(L))$ is the generator of C_0-semigroup $(e^{tL})_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$ then:*

1. For all $u_0 \in D(L)$ there exists unique strong solution to (2) given by the formula $U(t) = e^{tL}u_0$;

2. For all $u_0 \in \mathcal{F}$ there exists unique mild solution to (2) given by the formula $U(t) = e^{tL}u_0$.

Clearly each strong solution is also a mild solution, but not vice versa. Recall also that e^{tL} is a linear bounded operator, so for each $t \geq 0$ solution $U(t)$ depends on u_0 linearly and continuously with respect to norm in $\mathcal{F}$.

1236

Now let us explain how initial-value problems similar to (1) and even more general are related with (2).

2.3 Cauchy problem for partial differential equations of evolution type

In general situation, if Q is a set (in (1) we have $Q = \mathbb{R}$), then the function $u\colon [0, +\infty) \times Q \to \mathbb{R}$, $u\colon (t, x) \longmapsto u(t, x)$ of two variables (t, x) can be considered as a function $U\colon t \longmapsto [x \longmapsto u(t, x)] = u(t, \cdot)$ of one variable t with values in the space of real-valued functions of variable x. Let $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^Q$ be a space of (not necessarily all) real-valued functions on Q. Suppose that $\mathcal{F}$ is a Banach space with respect to some appropriate norm, and $(L, D(L))$ is a closed densely defined linear operator in $\mathcal{F}$. If $U(t) = u(t, \cdot) \in \mathcal{F}$ for all $t \geq 0$ then one can define $Lu(t, x) = (Lu(t, \cdot))(x) = (LU(t))(x)$. With these definitions it is clear that the Cauchy problem

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Lu(t, x) \text{ for } t \geq 0, x \in Q \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ for } x \in Q \end{cases} \tag{3}$$

is exactly (2) with the only one difference: derivative $u'_t(t, x)$ in (3) above is taken in $\mathbb{R}$ pointwise for each $x \in Q$, meanwhile in (2) the derivative $U'(t)$ is taken with respect to norm in $\mathcal{F}$:

$$u'_t(t, x) = p(t, x) \iff \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t, x)}{\varepsilon} - p(t, x) \right| = 0 \text{ for all } x \in Q,$$

$$U'(t) = P(t) \iff \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \frac{U(t + \varepsilon) - U(t)}{\varepsilon} - P(t) \right\| = 0.$$

If there exists a C_0-semigroup $(e^{tL})_{t \geq 0}$ then thanks to Theorem 1 Cauchy problem (2) has unique strong solution for each $u_0 \in D(L)$ and unique mild solution for each $u_0 \in \mathcal{F}$. If one selects appropriate definition of solution to (3) that meets the above-mentioned difference in understanding the time derivative. Then solution to (3) is made of solution to (2), i.e., function $u(t, x) = (U(t))(x) = (e^{tL} u_0)(x)$ solves (3) in the appropriate sense.

Setting (3) is very general because the role of L can be played, e.g., by arbitrary differential operator with derivatives of any order and coefficients that depend on x but do not depend on t. This covers the case (1) in particular. Also L may be a pseudo-differential operator. If $L = -i\mathcal{H}$, where $\mathcal{H}$ is the Hamiltonian of a quantum system then (3) is a Schrödinger equation. Variable x can run over $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, manifold, ramified surface, or subset in these spaces. Also x may belong to infinite-dimensional space, examples can be found in [3].

2.4 Connection of abstract Cauchy problem with Cauchy problem for PDE

Now it is time to introduce the case which we study in the paper. In our consideration $Q = \mathbb{R}$, and $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$ is the space of all bounded and uniformly continuous real-valued functions that

are defined on $\mathbb{R}$. We consider $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$ with the uniform norm $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. It is easy to check that $UC_b(\mathbb{R})$ is a closed subset of the space $C_b(\mathbb{R})$ of all bounded real-valued functions defined on $\mathbb{R}$. It is a standard fact that $C_b(\mathbb{R})$ is a Banach space with respect to uniform norm, so our $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$ is also a Banach space. We also will use notation

$$UC_b^n(\mathbb{R}) = \{f \in UC_b(\mathbb{R}) \mid f', f'', \dots, f^{(n)} \in UC_b(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R}) \text{ and } C_b^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} UC_b^n(\mathbb{R}).$$

It is proved in [21] that $C_b^\infty(\mathbb{R})$ is dense in $UC_b(\mathbb{R})$. In our consideration $L = H$, i.e.,

$$(Lf)(x) = (Hf)(x) = a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x)$$

for each point $x \in \mathbb{R}$ and each function $f \in UC_b^\infty(\mathbb{R})$. The domain $D(L) = D(H)$ is defined via the following assumption.

Assumption 1. *We assume that operator H defined above on the set $C_b^\infty(\mathbb{R})$ is closable and its closure $(H, D(H))$ generates a C_0-semigroup $(e^{tH})_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$ endowed with the uniform norm $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. In other words: $(H, D(H))$ is a closed linear operator that generates a C_0-semigroup, and $C_b^\infty(\mathbb{R})$ is a core for $(H, D(H))$.*

This assumption is a condition on properties of function a, b, c and usually is not very restrictive. For example, it holds for the case $a(x) \equiv 1, b(x) \equiv c(x) \equiv 0$ when (1) is the heat equation. Also it holds for $a, b, c \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ where $c(x) \leq 0$ and there exists such $\varepsilon_0 > 0$ that $a(x) \geq \varepsilon_0$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Domain of the operator which is a closure of some other operator is usually difficult to express explicitly, but at least we know that $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset D(L)$. In practice of solving (1) the set $D(L)$ is not important because the solution to (1) is given by $u(t, x) = (e^{tL}u_0)(x)$, and, independently of how big the set $D(L)$ is, e^{tL} is a linear bounded operator defined everywhere on $\mathcal{F}$. So, with the use of Theorem 1, we see that important thing is that C_0-semigroup $(e^{tL})_{t\geq 0}$ exists because it gives the solution to (2) hence the solution to (1).

The last thing that we need to discuss here is the time derivative. Suppose that $U(t)$ is the mild or the strong solution of (1) in $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$; what does this mean for u defined as $u(t, x) = (U(t))(x)$?

For the mild solution of (1) it is required that $U(t)$ is continuous in t, which means that $u(t, x)$ is continuous in t uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}$. Also $U(t) = u(t, \cdot) \in \mathcal{F}$ which means that $u(t, x)$ is bounded and uniformly continuous in x for each $t \geq 0$. Condition $U(t) = u_0 + H\int_0^t U(s)ds$ can means that the integral $\int_0^t u(s, x)ds$ exists uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}$ and $[x \longmapsto \int_0^t u(s, x)ds] \in D(H)$ where $D(H)$ is defined in the assumption 1.

Suppose now that $U(t)$ is the strong solution of (1). Suppose that we have some function $p(t) \in \mathcal{F}$, i.e. $p(t, x)$ is bounded and uniformly continuous in x for each $t \geq 0$, and $p(t) = U'(t)$. This means that $0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\| \frac{U(t+\varepsilon)-U(t)}{\varepsilon} - p(t) \right\| = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{u(t+\varepsilon,x)-u(t,x)}{\varepsilon} - p(t, x) \right|$, so $(U'(t))(x) = u_t'(t, x) = p(t, x)$ exists for each fixed $x \in \mathbb{R}$, and, moreover function $u_t'(t, x)$ is bounded and uniformly continuous in x for each $t \geq 0$. The limit expression above means exactly

1238

that $u(t,x)$ is differentiable in t uniformly in $x \in \mathbb{R}$. Finally, it follows from the definition of a strong solution, that $U'(t)$ is continuous in the norm of $\mathcal{F}$, so for each $t \geq 0$ we have $0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \|U'(t+\varepsilon) - U'(t)\| = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u'_t(t+\varepsilon, x) - u'_t(t,x)|$ which means exactly that $u'_t(t,x)$ is continuous in t uniformly in $x \in \mathbb{R}$ for each $t \geq 0$.

Now we have introduced everything which is needed to define the solution of (1) which we are eager to find approximately via Chernoff approximations.

2.5 Setting of the problem that is solved in the paper

Problem 1. For the Cauchy problem

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = a(x)u''_{xx}(t,x) + b(x)u'_x(t,x) + c(x)u(t,x) \stackrel{denoted}{=} (Hu(t,\cdot))(x), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

we wish to find:

1. Mild solution, i.e. function $u(t,x)$ which for each $t \geq 0$ is: bounded, uniformly continuous in x, continuous in t uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}$, and satisfies $u(t,x) = u_0(x) + \left(a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x} + c(x)\right)\int_0^t u(s,x)ds$ where the integral exists uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}$, and $[x \longmapsto \int_0^t u(s,x)ds] \in D(H)$ where $D(H)$ is defined in the assumption 1.

2. Strong solution, i.e. function $u(t,x)$ which for each $t \geq 0$ is: bounded, uniformly continuous in x, continuous and differentiable in t uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}$. Moreover $u'_t(t,x)$ is continuous in t for each $t \geq 0$ uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}$, $[x \longmapsto u(t,x)] \in D(H)$ where $D(H)$ is defined in the assumption 1, and $u'_t(t,x) = \left(a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x} + c(x)\right)u(t,x)dx$ holds.

The main aim of the paper is the following. In terms of linear bounded operators $S(t)$ introduced in Theorem 3 below, we will construct a sequence of functions $u_n(t,x) = (S(t/n)^n u_0)(x)$ which for each $t \geq 0$ and each $n = 1, 2, 3, \ldots$ are: bounded, uniformly continuous in x, continuous in t uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}$. For each $t_0 > 0$ sequence $u_n(t,x)$ satisfies

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,t_0]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(t,x) - u(t,x)| = 0$$

where $u(t,x)$ is the strong solution of (1) for all $u_0 \in D(H)$, and $u(t,x)$ is the mild solution of (1) for all $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$.

We also expect that $\sup_{t \in [0,t_0]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(t,x) - u(t,x)| = o(1/n)$ as $n \to \infty$ at least for all $u_0 \in C_b^7(\mathbb{R})$. This expectation is based on the very natural Conjecture 1 described below.

3 Main result

3.1 Approach proposed

To reach the aim of the paper we use the method of Chernoff approximation [3]. Let us explain what it is.

1239

Definition 1. (First introduced in [20]) *Let us say that G is Chernoff-tangent to L iff the following conditions of Chernoff tangency (CT) hold:*

(CT0). Let $\mathcal{F}$ be a Banach space, and $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ be a space of all linear bounded operators in $\mathcal{F}$. Suppose that we have an operator-valued function $G\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, or, using other words, we have a family $(G(t))_{t\geq 0}$ of linear bounded operators in $\mathcal{F}$. Closed linear operator $L\colon D(L) \to \mathcal{F}$ is defined on the linear subspace $D(L) \subset \mathcal{F}$ which is dense in $\mathcal{F}$.

(CT1). Function G is continuous at 0 in the strong operator topology in $\mathscr{L}(\mathcal{F})$, i.e. $\lim_{t\to 0} \|G(t)f - G(0)f\| = 0$ for each $f \in \mathcal{F}$.

(CT2). $G(0) = I$, i. e. $G(0)f = f$ for each $f \in \mathcal{F}$.

(CT3). There exists such a linear subspace $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ that it is dense in $\mathcal{F}$ and for each $f \in \mathcal{D}$ there exists a limit $\lim_{t\to 0}(G(t)f - f)/t$; let us denote the value of this limit as $G'(0)f$.

(CT4). Closure of the operator $(G'(0), \mathcal{D})$ exists and is equal to $(L, D(L))$.

The condition of Chernoff tangency means that $G(t)f = f + tLf + o(t)$ as $t \to 0$ for all f from the space which is a core for $(L, D(L))$. However, division of (CT) into (CT0)-(CT1) helps to check these subconditions separately because they are usually proved by methods of different nature. With the notion of Chernoff tangency the classic Chernoff theorem can be stated in the following form.

Theorem 2. (P. R. Chernoff, 1968; cf. original paper [5], theorem 5.2 in [6] and theorem 10.7.21 in [2].)

In the notation of the above definition suppose that L and G satisfy:

(E). There exists a C_0-semigroup $(e^{tL})_{t\geq 0}$ and its generator is $(L, Dom(L))$.

(CT). The function G is Chernoff-tangent to operator $(L, Dom(L))$.

(N). There exists $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ for all $t \geq 0$.

Then for each $f \in \mathcal{F}$ and each $T > 0$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,t_0]} \left\| G(t/n)^n f - e^{tL} f \right\| = 0, \tag{4}$$

where $G(t/n)^n$ is a composition of n copies of linear bounded operator $G(t/n)$.

If G is Chernoff-tangent to L, then the expression $G(t/n)^n f$ is called a Chernoff approximation expression for $e^{tL}f$, and $G(t/n)^n u_0$ is called a Chernoff formal solution for Cauchy problem $[U'(t) = LU(t); U(0) = u_0]$. If, moreveover, (4) holds, then G is called a Chernoff function for operator L, and G is called Chernoff-equivalent to C_0-semigroup $(e^{tL})_{t\geq 0}$; in this case $U(t) = \lim_{n\to\infty} G(t/n)^n u_0 = e^{tL} u_0$ is the solution of this Cauchy problem due to Theorem 1.

The Chernoff theorem (and definitions derived from it) admit two equivalent wordings: with unbounded time and with arbitrary small time. The first is provided above. The second arises when Chernoff function in (CT) is defined not for all $t \geq 0$, but only for $t \in [0, \delta)$ for fixed small $\delta > 0$. The condition (N) in the second case is substituted by the following condition (N'):

(N') *There exists $\omega_1 > 0$ such that $\|G(t)\| \leq 1 + \omega_1 t$ for all $t \in [0, \delta)$.*

1240

This wording is motivated by the fact that the value of t/n in Chernoff approximation expression $G(t/n)^n f$ becomes arbitrary small as $n \to \infty$ while $t \in [0, t_0]$. This is also in line with the condition (CT3) which itself uses $G(t)$ defined only for small values of $t > 0$.

One may ask why finding Chernoff function for operator L is simpler than finding e^{tL} using some other method? Why one should use Chernoff's theorem? The first reason is that there are no standard methods of finding e^{tL} for most interesting operators L with variable coefficients, so usually we can only refer to solving the Cauchy problem (3) for each $u_0 \in \mathcal{F}$. The second reason is that Chernoff function G may not have semigroup composition property, i.e. $G(t_1+t_2)$ is allowed to be not equal to $G(t_1)G(t_2)$), which gives us some freedom in writing the formula for G. With this freedom, sometimes it is possible to define $G(t)$ by a short formula containing variable coefficients of operator L as parameters. It is exactly what we do in the paper.

The definition of Chernoff equivalence goes back to 2002's definiton by O.G. Smolyanov [24], who since 2000's papers [27, 26, 25] systematically applies Chernoff's theorem to solving Cauchy problem for linear evolution equations, see overviews [23, 3] and recent papers coauthored by O.G.Smolyanov.

Notion of Chernoff tangency can be supported with the following conjecture which shows the way of construction of better Chernoff functions, which provide faster convergence of Chernoff approximations. It is also possible to define Chernoff tangency of k-th order, but we will not do it here because it is not needed for our main result (Theorem 3).

Conjecture 1. (Simplification of conjecture 2 in [19].) *Let $(e^{tL})_{t\geq 0}$ be a C_0-semigroup in a Banach space $\mathcal{F}$ with generator $(L, D(L))$, and G be a Chernoff function for operator L satisfying condition (N) or (N'). Moreover, assume number $t_0 \geq 0$ is given, and suppose that for all $t \in [0, t_0]$ we have function f from the domain of operator L^4. Then (maybe under some other technical assumptions) there exists a number $C \geq 0$ such that for all $t \in [0, t_0)$ and all $n \in \mathbb{N}$ the following inequality $\left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f + \frac{t^2}{2n} e^{tL}(L^2 - G''(0))f \right\| \leq \frac{C}{n^2}$ is valid.*

This conjecture means that, on good initial conditions f, if $G'(0) = L$ then the speed of convergence is in Chernoff's theorem is of order $1/n$, and if additionally $G''(0) = L^2$ then the speed is of order $1/n^2$. If $\frac{d^k}{dt^k} G(t)\big|_{t=0} = \frac{d^k}{dt^k} e^{tL}\big|_{t=0} = L^k$ for all $k = 1, 2, \ldots, p$ then we can expect the speed of convergence of order $1/n^p$. Numerical experiments [17] show that speed of convergence $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ is also possible. Anyway, it is clear, that Chernoff function G satisfying Conjecture 1 is at least not worse that Chernoff function that satisfies only Chernoff's theorem.

3.2 Derivation of a formula for Chernoff approximations

Now for each $t \geq 0$ we will construct linear operator $S(t)$ which meets conditions of Conjecture 1. We will use this result in the proof of the main Theorem 3.

1241

3.3 Main theorem

Definition 2. *Quasi-Feynman formula is an equality where in the left hand side there is a function defined by this equality, and in the right hand side there is an expression which contains multiple integrals of arbitrary high multiplicity.*

This notion was introduced in [20] in contrast with the notion of Feynman formula which allows only one integral of multiplicity tending to infinity in the right hand side, see first appearance of this notion and discussion in [20, 3].

The following Theorem 3 is the main result of the present paper. It proposes Chernoff function $S(t)$ which provides Chernoff approximations to solutions of (1). The solution is given in the form $u(t,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(t,x)$ where Chernoff approximations $u_n(t,x)$ are defined by $u_n(t,x) = (S(t/n)^n u_0)(x)$. The operator $S(t)$ that we introduce is of integral nature, so representation

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} (S(t/n)^n u_0)(x)$$

is a quasi-Feynman formula in sense of Definition 2 because it contains n-tuple integrals and n tends to infinity. Moreover these integrals are over the cube $[-1,1]^n$ which is a bounded set, so they can be treated as proper Riemann integrals, which is very useful in practice for numerical computation of the integrals. As one can find from [3] it is the first concrete example of such kind.

Theorem 3. *For all numbers $x \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$, all functions $a, b, c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that*

$$a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', f \in UC_b(\mathbb{R}) \text{ and } a(x) > 0$$

denote

$$(S(t)f)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1 + c(x)t\Big) f\Big(x + (6a(x)t)^{\frac{1}{2}} y + b(x)t\Big) dy +$$
$$+ \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4\Big) f(x + yt^{\frac{1}{4}}) dy, \quad (5)$$

where

$$\beta_0(t,x) = \frac{225}{256}\Big(a(x)c''(x)+b(x)c'(x)+c(x)^2\Big)t^2 - \frac{525}{64}\Big(a(x)a''(x)+2a(x)b'(x)+b(x)a'(x)\Big)t^{3/2} + \frac{567}{16}a(x)^2 t,$$

$$\beta_1(t,x) = \frac{75}{16}\Big(a(x)b''(x) + 2a(x)c'(x) + b(x)b'(x)\Big)t^{7/4} - \frac{315}{4}a(x)a'(x)t^{5/4},$$

$$\beta_2(t,x) = -\frac{525}{128}\Big(a(x)c''(x)+b(x)c'(x)+c(x)^2\Big)t^2 + \frac{2205}{32}\Big(a(x)a''(x)+2a(x)b'(x)+b(x)a'(x)\Big)t^{3/2} - \frac{2835}{8}a(x)^2 t,$$

$$\beta_3(t,x) = -\frac{105}{16}\Big(a(x)b''(x) + 2a(x)c'(x) + b(x)b'(x)\Big)t^{7/4} + \frac{525}{4}a(x)a'(x)t^{5/4},$$

$$\beta_4(t,x) = \frac{945}{256}\Big(a(x)c''(x)+b(x)c'(x)+c(x)^2\Big)t^2 - \frac{4725}{64}\Big(a(x)a''(x)+2a(x)b'(x)+b(x)a'(x)\Big)t^{3/2} + \frac{6615}{16}a(x)^2 t.$$

For all $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ and all $x \in \mathbb{R}$ denote

$$(H\varphi)(x) = a(x)\varphi(x)'' + b(x)\varphi(x)' + c(x)\varphi(x). \quad (6)$$

1242

Suppose that the space $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$ *is endowed with the uniform norm* $\|f\| = sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. *Suppose that* $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset D(H) \subset UC_b(\mathbb{R})$, *and operator* $(H, D(H))$ *generates* C_0*-semigroup* $(e^{tH})_{t\geq 0}$ *in* $UC_b(\mathbb{R})$, *where* H *is defined by (6) for all* $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, *and on* $D(H)\setminus C_b^\infty(\mathbb{R})$ *operator* H *defined by the procedure of closure of operator* $(H, C_b^\infty(\mathbb{R}))$ *in Banach space* $UC_b(\mathbb{R})$. *Then:*

1. $S(t)$ *is a linear bounded operator in Banach space* $UC_b(\mathbb{R})$ *for each* $t \geq 0$.

2. $S(t) = I + tH + \frac{1}{2}(tH)^2 + o(t^2)$ *for* $t \to +0$ *on* $C_b^\infty(\mathbb{R})$, *i.e.*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \left\| S(t)f - f - tHf - \frac{1}{2}t^2H^2f \right\| = 0 \text{ for each } f \in C_b^\infty(\mathbb{R}).$$

3. $S(t)$ *and* $(H, D(H))$ *satisfy all the conditions of the Chernoff theorem (Theorem 2). In other words:* S *is a Chernoff function for* H.

4. For each $t_0 > 0$ *and each* $f \in UC_b(\mathbb{R})$ *we have* $e^{tH}f = \lim_{n\to\infty} S(t/n)^n f$ *uniformly in* $t \in [0, t_0]$, *i.e.* $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,t_0]} \|e^{tH}f - S(t/n)^n f\| = 0$. *Here* $S(t/n)$ *is obtained via substitution of* t *with* t/n *in (5), and* $S(t/n)^n$ *is a composition of* n *copies of linear bounded operator* $S(t/n)$.

5. For the following Cauchy problem

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = a(x)u''_{xx}(t,x) + b(x)u'_x(t,x) + c(x)u(t,x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

the solution $u(t,x) = (e^{tH}u_0)(x)$ *exists in sense of Problem 1, i.e.* $u(t,x)$ *is the mild solution of (1) for all* $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$, *and* $u(t,x)$ *is the strong solution of (1) for all* $u_0 \in D(H)$.

6. Solution $u(t,x)$ *can be represented as the limit of Chernoff approximations* $u(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty} S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0(x)$, *where the limit exists uniformly in* $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, t_0]$ *for all* $t_0 > 0$, *i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,t_0]} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - u_n(t,x)| = 0 \text{ where } u_n(t,x) = (S(t/n)^n u_0)(x).$$

Remark. Before giving a proof to Theorem 3 let us demonstrate for $n = 1, 2$ how equality $u_n(t,x) = (S(t/n)^n u_0)(x)$ looks when $S(t)$ is written explicitly in terms of a, b, c. These formulas are corollaries of (5) only, without any use of Theorem 3:

$$u_1(t,x) = (S(t)u_0)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1 + c(x)t\Big)u_0\Big(x + (6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y + b(x)t\Big)dy + \\ + \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4\Big)u_0(x + yt^{\frac{1}{4}})dy,$$

$$u_2(t,x) = \Big(S\Big(\frac{t}{2}\Big)^2 u_0\Big)(x) = \Big(S\Big(\frac{t}{2}\Big)S\Big(\frac{t}{2}\Big)u_0\Big)(x) = \\ = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1 + c(x)\frac{t}{2}\Big)\Big(S\Big(\frac{t}{2}\Big)u_0\Big)\Big(x + \Big(6a(x)\frac{t}{2}\Big)^{1/2}y + b(x)\frac{t}{2}\Big)dy + \\ + \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0\Big(\frac{t}{2},x\Big) + \beta_1\Big(\frac{t}{2},x\Big)y + \beta_2\Big(\frac{t}{2},x\Big)y^2 + \beta_3\Big(\frac{t}{2},x\Big)y^3 + \beta_4\Big(\frac{t}{2},x\Big)y^4\Big)\Big(S\Big(\frac{t}{2}\Big)u_0\Big)\Big(x + y\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1/4}\Big)dy =$$

1243

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k_1\Big(\frac{t}{2},x\Big)^2 f\Big(x+y_1\Big(6a(x)\frac{t}{2}\Big)^{1/2}+b(x)\Big(\frac{t}{2}\Big)+$$
$$+ y_2 a\Big(x+y_1\Big(6a(x)\frac{t}{2}\Big)^{1/2}+b(x)\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)+b\Big(x+y_1\Big(6a(x)\frac{t}{2}\Big)^{1/2}+b(x)\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)\frac{t}{2}\Big)dy_1dy_2+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k_1\Big(\frac{t}{2},x\Big)k_2\Big(y_1,\frac{t}{2},x\Big)f\Big(x+y_2\Big(6a(x)\frac{t}{2}\Big)^{1/2}+b(x)\Big(\frac{t}{2}\Big)+y_1\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1/4}\Big)dy_1dy_2+$$
$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k_1\Big(\frac{t}{2},x\Big)k_2\Big(y_2,\frac{t}{2},x\Big)f\Big(x+y_2\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1/4}+y_1\Big(6a(x+y_2\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1/4}\Big)\frac{t}{2}\Big)^{1/2}+b\Big(x+y_2\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1/4}\Big)\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)dy_1dy_2+$$
$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k_2\Big(y_1,\frac{t}{2},x\Big)k_2\Big(y_2,\frac{t}{2},x\Big)f\Big(x+(y_1+y_2)\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1/4}\Big)dy_1dy_2,$$

where

$$k_1(t,x)=\frac{1}{2}(1+c(x)t),$$
$$k_2(y,t,x)=\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4.$$

Generally, if we have constructed $u_n(t,x)$ then we can calculate $u_{n+1}(t,x)$ recursively:

$$u_{n+1}(t,x)=\Big(S\Big(\frac{t}{n+1}\Big)^{n+1}u_0\Big)(x)=\Big(S\Big(\frac{t}{n+1}\Big)S\Big(\frac{t}{n+1}\Big)^{n}u_0\Big)(x)=\Big(S\Big(\frac{t}{n+1}\Big)u_n\Big(\frac{tn}{n+1},\cdot\Big)\Big)(x).$$

Proof of Theorem 3.

1. It is a standard fact that $C_b(\mathbb{R})$ is a Banach space with respect to uniform norm. Uniform limit of uniformly continuous bounded functions is a uniformly continuous bounded function, so $UC_b(\mathbb{R})$ is a closed subspace in complete space $C_b(\mathbb{R})$, so $UC_b(\mathbb{R})$ is itself a complete normed space, i.e. a Banach space. In (5) under the integral signs there are only bounded continuous functions, so Riemann integrals exist, and it is clear that $S(t)$ for each $t\geq 0$ is a linear bounded operator in $C_b(\mathbb{R})$ with respect to the uniform norm $\|f\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. Moreover, functions under the integral signs are uniformly continuous, so after integration in y we again obtain uniformly continuous functions due to results on elementary Riemann integration, so $UC_b(\mathbb{R})$ is invariant with respect to $S(t)$ hence $S(t)$ can be considered as operator in $UC_b(\mathbb{R})$. Item 1 is proved.

2. We will not just formally prove item 2, but also show the way that we followed when constructing (5) in such a way that item 2 will be true. Probably this is the most interesting part of the paper. The reasoning is long, so we divide it into steps 1-8.

Step 1. We use the Taylor expansion for the first term and represent the residual terms in the Lagrange form. Then we group the terms in powers of t. This is important, because terms with

powers of t equal to 3 or higher we can define as $o(t^2)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+c(x)t)f\left(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\right)dy=(1+c(x)t)f(x)+(1+c(x)t)b(x)f'(x)t+$$
$$+(1+c(x)t)\left(a(x)t+\frac{1}{2}(b(x))^2t^2\right)f''(x)+(1+c(x)t)\left((a(x)b(x)t^2+\frac{1}{6}(b(x))^3t^3\right)f'''(x)+$$
$$+(1+c(x)t)\left(\frac{3}{10}(a(x))^2t^2+\frac{1}{2}a(x)(b(x))^2t^3+\frac{1}{24}(b(x))^4t^4\right)f^{(4)}(x))+$$
$$\frac{1}{240}(1+c(x)t)\int_{-1}^{1}\left(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\right)^5f^{(5)}(\xi_1(t,x,y))dy=$$

$$=f(x)+t\Big(a(x)f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)f(x)\Big)+$$
$$+\frac{t^2}{2}\Big(2b(x)c(x)f'(x)+\Big(b(x)^2+2a(x)c(x)\Big)f''(x)+2a(x)b(x)f'''(x)+\frac{3}{5}a(x)^2f^{(4)}(x)\Big)+$$
$$+t^3\Big(\frac{1}{2}b(x)^2c(x)f''(x)+\Big(\frac{1}{6}b(x)^3+a(x)b(x)c(x)\Big)f'''(x)+\Big(\frac{1}{2}a(x)b(x)^2+\frac{3}{10}a(x)^2c(x)\Big)f^{(4)}(x)\Big)+$$
$$+t^4\Big(\frac{1}{6}b(x)^3c(x)f'''(x)+\Big(\frac{1}{24}b(x)^4+\frac{1}{2}a(x)b(x)^2c(x)\Big)f^{(4)}(x)\Big)+$$
$$\frac{t^5}{24}b(x)^4c(x)f^{(4)}(x)+$$
$$+\frac{1}{240}(1+c(x)t)\int_{-1}^{1}\left(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\right)^5f^{(5)}(\xi_1)=$$

$$=f(x)+t(Hf)(x)+$$
$$+\frac{t^2}{2}\Big(2b(x)c(x)f'(x)+\Big(b(x)^2+2a(x)c(x)\Big)f''(x)+2a(x)b(x)f'''(x)+\frac{3}{5}a(x)^2f^{(4)}(x)\Big)+$$
$$+o(t^2)$$

Recall that Hf is expressed as follows:

$$Hf=af''+bf'+cf$$

$$(Hf)(x)=a(x)f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)f(x)$$

Step 2. For convenience, we denote

$\big(2b(x)c(x)f'(x)+((b(x))^2+2a(x)c(x))\,f''(x)+2a(x)b(x)f'''(x)+\frac{3}{5}f^{(4)}(x)\big)$ as $(Mf)(x)$. We get that

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+c(x)t)f\left(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\right)dy=f(x)+t(Hf)(x)+\frac{t^2}{2}(Mf)(x)+o(t^2)$$

So we get the condition on β:

$$\int_{-1}^{1}(\beta_0+\beta_1y+\beta_2y^2+\beta_3y^3+\beta_4y^4)f(x+yt^{\frac{1}{4}})=\frac{t^2}{2}\Big((H^2f)(x)-(Mf)(x)\Big)+o(t^2)$$

1245

because $(S(t)f)(x)$ can be expressed by the following formula:

$$(S(t)f)(x) = f(x) + t(Hf)(x) + \frac{t^2}{2}(H^2f)(x) + o(t^2) =$$

$$= f(x) + t(Hf)(x) + \frac{t^2}{2}(Mf)(x) + \frac{t^2}{2}\Big((H^2f)(x) - (Mf)(x)\Big) + o(t^2)$$

Step 3. Recall the following formulas for, Hf and H^2f

$$Hf = af'' + bf' + cf$$

$$H^2f = aaf^{(4)} + (2aa' + 2ab)f''' + (aa'' + 2ab' + 2ac + ba' + bb)f'' + (ab'' + 2ac' + bb' + 2bc)f' + (ac'' + bc' + cc)f$$

Step 4. We will write down $\frac{t^2}{2}(H^2f - Mf)$ and group its terms by derivatives $f(x)$.

$$\frac{t^2}{2}(H^2f - Mf) = \frac{t^2}{2}aaf^{(4)} + \frac{t^2}{2}(2aa' + 2ab)f''' + \frac{t^2}{2}(aa'' + 2ab' + 2ac + ba' + bb)f'' +$$
$$+ \frac{t^2}{2}(ab'' + 2ac' + bb' + 2bc)f' + \frac{t^2}{2}(ac'' + bc' + cc)f -$$
$$- \frac{t^2}{2}\left(2bcf' + (bb + 2ac)\,f''(x) + 2abf''' + \frac{3}{5}aaf^{(4)}\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2}(ac'' + bc' + cc)f + \frac{t^2}{2}(ab'' + 2ac' + bb')f' + \frac{t^2}{2}(aa'' + 2ab' + ba')f'' + \frac{t^2}{2}(2aa')f''' + \frac{t^2}{2}\frac{2}{5}aaf^{(4)}$$

Step 5. We will rewrite $\frac{t^2}{2}((Hf)(x) - (Mf)(x))$ in a new form:

$$\frac{t^2}{2}((Hf)(x) - (Mf)(x)) = f(x) + \alpha_0 f(x) + \alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f''(x) + \alpha_3 f'''(x) + \alpha_0 f^{(4)}(x) + o(t^2)$$

$$\alpha_0 = \frac{t^2}{2}(ac'' + bc' + cc)$$

$$\alpha_1 = \frac{t^2}{2}(ab'' + 2ac' + bb')$$

$$\alpha_2 = \frac{t^2}{2}(aa'' + 2ab' + ba')$$

$$\alpha_3 = \frac{t^2}{2}(2aa')$$

$$\alpha_4 = \frac{t^2}{2}\frac{2}{5}aa$$

Step 6. We represent $\frac{t^2}{2}(Hf - Mf)$ as an integral. The subinteral expression is the product of a polynomial in the new variable y and $f(x + yt^{1/4})$:

$$\frac{t^2}{2}(Hf - Mf) = \alpha_0 f(x) + \alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f''(x) + \alpha_3 f'''(x) + \alpha_4 f^{(4)}(x) + o(t^2) =$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4\right) f(x + y)dy$$

1246

Step 7. We will find the relationship between the coefficients α and β
decompose $f(x+yt^{1/4})$ by Taylor's formula. Thus, we obtain the following system of equations:

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} (\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4) dy$$

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{1} (\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4) y t^{1/4} dy$$

$$\alpha_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} (\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4) y^2 t^{2/4} dy$$

$$\alpha_3 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{6} (\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4) y^3 t^{3/4} dy$$

$$\alpha_4 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{24} (\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4) y^4 t^{4/4} dy$$

we express the integrals and reduce this system of equations to the linear:

$$\alpha_0 = 2\beta_0 + \frac{2}{3}\beta_2 + \frac{2}{5}\beta_4$$

$$\alpha_1 = t^{1/4} \left(\frac{2}{3}\beta_1 + \frac{2}{5}\beta_3 \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{t^{2/4}}{2} \left(\frac{2}{3}\beta_0 + \frac{2}{5}\beta_2 + \frac{2}{7}\beta_4 \right)$$

$$\alpha_3 = \frac{t^{3/4}}{6} \left(\frac{2}{5}\beta_1 + \frac{2}{7}\beta_3 \right)$$

$$\alpha_4 = \frac{t^{3/4}}{24} \left(\frac{2}{5}\beta_0 + \frac{2}{7}\beta_2 + \frac{2}{9}\beta_4 \right)$$

Step 8. Denote $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$.
Let α and β be connected by matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} \cdot 2 & 0 & \frac{1}{0!} \cdot \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{0!} \cdot \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{t^{1/4}}{1!} \cdot \frac{2}{3} & 0 & \frac{t^{1/4}}{1!} \cdot \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{t^{2/4}}{2!} \cdot \frac{2}{3} & 0 & \frac{t^{2/4}}{2!} \cdot \frac{2}{5} & 0 & \frac{t^{2/4}}{2!} \cdot \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{t^{3/4}}{3!} \cdot \frac{2}{5} & 0 & \frac{t^{3/4}}{3!} \cdot \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{t^{4/4}}{4!} \cdot \frac{2}{5} & 0 & \frac{t^{4/4}}{4!} \cdot \frac{2}{7} & 0 & \frac{t^{4/4}}{4!} \cdot \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{5}{128} \begin{pmatrix} \frac{0!}{1} \cdot 45 & 0 & -\frac{2!}{t^{2/4}} \cdot 210 & 0 & \frac{4!}{t^{4/4}} \cdot 189 \\ 0 & \frac{1!}{t^{1/4}} \cdot 240 & 0 & -\frac{3!}{t^{3/4}} \cdot 336 & 0 \\ -\frac{0!}{1} \cdot 210 & 0 & \frac{2!}{t^{2/4}} \cdot 1764 & 0 & -\frac{3!}{t^{3/4}} \cdot 1890 \\ 0 & -\frac{1!}{t^{1/4}} \cdot 336 & 0 & \frac{3!}{t^{3/4}} \cdot 560 & 0 \\ \frac{0!}{1} \cdot 189 & 0 & -\frac{2!}{t^{2/4}} \cdot 1890 & 0 & \frac{3!}{t^{3/4}} \cdot 2205 \end{pmatrix}$$

1247

$$\det A = \frac{1024t^{5/2}}{2344190625},\ \det A^{-1} = \frac{2344190625}{1024t^{5/2}}.$$

We have

$$A\beta = \alpha$$

$$\beta = A^{-1}\alpha$$

If $t \neq 0$, then determinants of matrices A, A^{-1} exist and are not equal to zero.

$$\beta_0 = \frac{5}{128}\left(45\frac{0!}{t^0}\alpha_0 - 210\frac{2!}{t^{2/4}}\alpha_2 + 189\frac{4!}{t^{2/4}}\alpha_4\right) =$$
$$= \frac{225}{128t^0}\frac{t^2}{2}(ac'' + bc' + cc) - \frac{525}{32t^{2/4}}\frac{t^2}{2}(aa'' + 2ab' + ba') + \frac{2835}{16}\frac{2}{5t^{4/4}}\frac{t^2}{2}aa =$$
$$= \frac{225}{256}t^2(ac'' + bc' + cc) - \frac{525}{64}t^{3/2}(aa'' + 2ab' + ba') + \frac{567}{16}taa$$

$$\beta_1 = \frac{5}{128}\left(240\frac{1!}{t^{1/4}}\alpha_1 - 336\frac{3!}{t^{3/4}}\alpha_3\right) = \frac{75}{8t^{1/4}}\frac{t^2}{2}(ab'' + 2ac' + bb') - \frac{315}{4t^{3/4}}\frac{t^2}{2}(2aa') =$$
$$= \frac{75}{16}t^{7/4}(ab'' + 2ac' + bb') - \frac{315}{4}t^{5/4}aa'$$

$$\beta_2 = \frac{5}{128}\left(-210\frac{0!}{t^0}\alpha_0 + 1764\frac{2!}{t^{2/4}}\alpha_2 - 1890\frac{4!}{t^{2/4}}\alpha_4\right) =$$
$$= -\frac{525}{64t^0}\frac{t^2}{2}(ac'' + bc' + cc) + \frac{2205}{16t^{2/4}}\frac{t^2}{2}(aa'' + 2ab' + ba') - \frac{14175}{8}\frac{2}{5t^{4/4}}\frac{t^2}{2}aa =$$
$$= -\frac{525}{128}t^2(ac'' + bc' + cc) + \frac{2205}{32}t^{3/2}(aa'' + 2ab' + ba') - \frac{2835}{8}taa$$

$$\beta_3 = \frac{5}{128}\left(-336\frac{1!}{t^{1/4}}\alpha_1 + 560\frac{3!}{t^{3/4}}\alpha_3\right) = -\frac{105}{8t^{1/4}}\frac{t^2}{2}(ab'' + 2ac' + bb') + \frac{525}{4t^{3/4}}\frac{t^2}{2}(2aa') =$$
$$= -\frac{105}{16}t^{7/4}(ab'' + 2ac' + bb') + \frac{525}{4}t^{5/4}aa'$$

$$\beta_4 = \frac{5}{128}\left(45\frac{0!}{t^0}\alpha_0 - 210\frac{2!}{t^{2/4}}\alpha_2 + 189\frac{4!}{t^{2/4}}\alpha_4\right) =$$
$$= \frac{945}{128t^0}\frac{t^2}{2}(ac'' + bc' + cc) - \frac{4725}{32t^{2/4}}\frac{t^2}{2}(aa'' + 2ab' + ba') + \frac{33075}{16}\frac{2}{5t^{4/4}}\frac{t^2}{2}aa =$$
$$= \frac{945}{256}t^2(ac'' + bc' + cc) - \frac{4725}{64}t^{3/2}(aa'' + 2ab' + ba') + \frac{6615}{16}taa$$

Item 2 is now proved.

3. Let us check all the conditions of the Chernoff theorem (Theorem 2): (E), (CT) and (N').

1248

Condition (E) is assumed in the conditions of Theorem 3. Now let us check (CT0)-(CT4).

The first part of condition (CT0) is proved in item 1. It is assumed in conditions of Theorem 3 that $(H, D(H))$ generates a C_0-semigroup so $(H, D(H))$ is densely defined and closed because generators of C_0-semigroups possess these properties due to general theory of C_0-semigroups [6]. Condition (CT0) is proved.

Let us prove (CT1), i.e. let us show that $\lim_{t\to 0}\|S(t)f - f\| = 0$ for each $f \in UC_b(\mathbb{R})$. Indeed:

$$\lim_{t\to 0}\|S(t)f - f\| = \lim_{t\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left| \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+c(x)t)f(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t)dy + \right.$$
$$\left. + \int_{-1}^{1}(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4)f(x+yt^{\frac{1}{4}})dy - f(x)\right| \leq$$
$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t)-2f(x)|dy +$$
$$+\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(t\cdot\int_{-1}^{1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|c(x)|\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t)|dy\right) +$$
$$+\lim_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4|\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+yt^{\frac{1}{4}})|dy.$$

Let us explain why all three limits above are equal to zero. In the first limit the integrand tends to zero uniformly in $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0,1]$ because functions f and $s \longmapsto s^{\frac{1}{2}}$ are uniformly continuous and functions a, b are bounded. In the second limit the integrand do not exceed $\|c\| \cdot \|f\|$. In the third limit we have $\lim_{t\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\beta_i(t,x)| = 0$ due to formulas defining β_i in the assumptions of Theorem 3 and the fact that functions a, b, c and their derivatives are bounded because they all belong to the space $UC_b(\mathbb{R})$. We have proved (CT1).

(CT2) follows from the definition of $S(t)$. We set $t = 0$ in (5) and obtain $(S(0)f)(x) = f(x)$.

To prove (CT3) we select $\mathcal{D} = C_b^\infty(\mathbb{R})$ in Definition 1. It is proved in [21] that $C_b^\infty(\mathbb{R})$ is dense in $UC_b(\mathbb{R})$. We only need to prove that $\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\|S(t)f - f - tHf\| = 0$ for all $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. But this condition is even weaker than the fact that we have proved in item 2. Therefore, (CT3) is proved.

Condition (CT4) is assumed in the conditions of Theorem 3. So, S is Chernoff-tangent to H, because all conditions (CT0)-(CT4) hold.

Now let us prove condition (N'). For arbitrary $f \in UC_b(\mathbb{R})$ and arbitrary $t \in [0,1]$ the following estimates hold:

$$\|S(t)f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left| \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+c(x)t)f(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t)dy+\right.$$
$$\left. + \int_{-1}^{1}(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4)f(x+yt^{\frac{1}{4}})dy\right| \leq$$

1249

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+c(x)t)f(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t)dy\right|+$$
$$+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{-1}^{1}(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4)f(x+yt^{\frac{1}{4}})dy\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t)|dy+\frac{1}{2}t\int_{-1}^{1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|c(x)|\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t)|dy+$$
$$+\sum_{k=0}^{4}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{-1}^{1}\beta_k(t,x)f(x+yt^{\frac{1}{4}})y^k dy\right|\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\|f\|\int_{-1}^{1}dy+\frac{1}{2}t\|c\|\|f\|\int_{-1}^{1}dy+\|f\|\sum_{k=0}^{4}\|\beta_k(t,\cdot)\|\int_{-1}^{1}|y^k|dy=$$
$$=\|f\|\left(1+t\|c\|+\sum_{k=0}^{4}\|\beta_k(t,\cdot)\|\int_{-1}^{1}|y^k|dy\right)\leq(1+\omega t)\|f\|,$$

so for appropriate constant $\omega>0$ we have $\|S(t)\|\leq 1+\omega t$ for all $t\in[0,1]$, hence (N') is true. We will explain how number ω is obtained, but will not give exact formula for ω because it is lengthy and useless (only existence of $\omega<+\infty$ is needed for the Chernoff theorem).

Indeed, condition $t\in[0,1]$ implies $t^\mu\leq t$ for all $\mu\geq 1$. In definition of β_k (see formulas below formula (5)) the term t^μ appears only with $\mu\geq 1$, and is multiplied by bounded functions of variable x (see the very beginning of conditions of Theorem 3). This implies that there exist constants ω_k such that $\|\beta_k(t,\cdot)\|\leq\omega_k t$ for all $t\in[0,1]$. With the estimate $\|S(t)f\|\leq\|f\|\left(1+t\|c\|+\sum_{k=0}^{4}\|\beta_k(t,\cdot)\|\int_{-1}^{1}|y^k|dy\right)$ that we proved above it is easy (but actually not needed) to write formula that expresses ω in terms of norms of functions a,b,c and their derivatives up to order 2. Condition (N') is now proved. Item 3 is now proved.

4. Statement follows from item 3 and Chernoff's theorem (Theorem 2).

5. Statement follows from condition (E) that is assumed and Theorem 1 joined with notions from Problem 1.

6. Statement follows from item 4 and item 5. Theorem 3 is now proved. □

3.4 Verification of the formula for $S(t)$ by symbolic computation

As can be seen in the text above, many concrete number coefficients were obtained via rather lengthy calculations, which potentially leaves space for mistake to occur. In order to prove that the formula presented in (5) is correct and indeed has the expansion in t as we state in item 2 of Theorem 5, we wrote a program on Wolfram Language. We show the code (input) and the result (output), so everyone can check and become sure that we found correct number values of coefficients. We present several screenshots and comments to them.

For brevity, we omit argument x below in functions a,b,c and their derivatives, i.e. we write $a,a',a'',b,b',b'',c,c',c''$ instead of $a(x),a'(x),a''(x),b(x),b'(x),b''(x),c(x),c'(x),c''(x)$. This omit-

ting is justifiable because, first, only derivatives of function f are calculated symbolically, and second, x is constant when we expand f via Taylor's formula (assuming $t \to 0$) and integrate in y. However, we keep x in argument of function f and it is not possible to omit it.

There will be some white spaces below because we wish our screenshots be of appropriate (readable) size and followed by the comments on the same page.

1251

First, we write β_0, ..., β_4, see Wolfram input and output below:

```
In[1]:= Indexed[β, "0"] =
          {beta0 = 225 / 256 * (ac'' + bc' + c^2) t^2 -
             525 / 64 * (aa'' + 2 ab' + ba') t^(3 / 2) + 567 / 16 * a^2 t}
```

Out[1]= $\beta_0 ==$

$$\left\{\frac{567\,a^2\,t}{16} - \frac{525}{64}\,t^{3/2}\,(2\,ab' + ba' + aa'') + \frac{225}{256}\,t^2\,\left(c^2 + bc' + ac''\right)\right\}$$

```
In[2]:= Indexed[β, "1"] =
          {beta1 = 75 / 16 * (ab'' + 2 ac' + bb') t^(7 / 4) -
             315 / 4 * aa' t^{5 / 4}}
```

Out[2]= $\beta_1 == \left\{\left\{-\frac{315}{4}\,t^{5/4}\,aa' + \frac{75}{16}\,t^{7/4}\,(2\,ac' + bb' + ab'')\right\}\right\}$

```
In[3]:= Indexed[β, "2"] =
          {beta2 = -525 / 128 * (ac'' + bc' + c^2) t^2 +
             2205 / 32 * (aa'' + 2 ab' + ba') t^(3 / 2) - 2835 / 8 * a^2 t}
```

Out[3]= $\beta_2 == \left\{-\frac{2835\,a^2\,t}{8} + \right.$

$$\left.\frac{2205}{32}\,t^{3/2}\,(2\,ab' + ba' + aa'') - \frac{525}{128}\,t^2\,\left(c^2 + bc' + ac''\right)\right\}$$

```
In[4]:= Indexed[β, "3"] =
          {beta3 = -105 / 16 * (ab'' + 2 ac' + bb') t^(7 / 4) +
             525 / 4 * aa' t^{5 / 4}}
```

Out[4]= $\beta_3 == \left\{\left\{\frac{525}{4}\,t^{5/4}\,aa' - \frac{105}{16}\,t^{7/4}\,(2\,ac' + bb' + ab'')\right\}\right\}$

```
In[5]:= Indexed[β, "4"] =
          {beta4 = 945 / 256 * (ac'' + bc' + c^2) t^2 -
             4725 / 64 * (aa'' + 2 ab' + ba') t^(3 / 2) + 6615 / 16 * a^2 t}
```

Out[5]= $\beta_4 ==$

$$\left\{\frac{6615\,a^2\,t}{16} - \frac{4725}{64}\,t^{3/2}\,(2\,ab' + ba' + aa'') + \frac{945}{256}\,t^2\,\left(c^2 + bc' + ac''\right)\right\}$$

1252

We use symbol W to denote the Taylor expansion of the function $x \mapsto f(x+(6a(x)t)^{1/2}y+b(x)t)$ at the point x up to the 6th derivative, assuming that number $y \in [-1,1]$ is fixed and $t \to 0$, which gives us that $(6a(x)t)^{1/2}y + b(x)t \to 0$. The residual terms with derivatives with powers greater than 6 we can represent in the Lagrange's form for $f \in C_b^7(\mathbb{R})$. They appear to be $o(t^{5/2})$ as $t \to 0$, so they all can be ignored in the expansion.

Then, we integrate $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1+c(x)t\Big) f\Big(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\Big)dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1+c(x)t\Big) W dy + o(t^{5/2})$ and denote this integral as G_1.

```
In[6]:= "W" =
        {W = Normal[Series[f[x + w], {w, 0, 6}]] /.
           w → y * (6 * a * t) ^ (1 / 2) + b * t}
```

$$\text{Out[6]= } W == \Big\{f[x] + \left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right) f'[x] + \frac{1}{2}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^2 f''[x] + \frac{1}{6}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^3 f^{(3)}[x] + \frac{1}{24}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{120}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{720}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^6 f^{(6)}[x]\Big\}$$

```
In[7]:= Indexed[G, "1"] =
        {G1 = Expand[Integrate[(1 / 2) * (1 + c * t) * W, {y, -1, 1}]]}
```

$$\text{Out[7]= } G_1 == \Big\{f[x] + c\,t\,f[x] + b\,t\,f'[x] + b\,c\,t^2 f'[x] + a\,t\,f''[x] + \frac{1}{2}b^2 t^2 f''[x] + a\,c\,t^2 f''[x] + \frac{1}{2}b^2 c\,t^3 f''[x] + a\,b\,t^2 f^{(3)}[x] + \frac{1}{6}b^3 t^3 f^{(3)}[x] + a\,b\,c\,t^3 f^{(3)}[x] + \frac{1}{6}b^3 c\,t^4 f^{(3)}[x] + \frac{3}{10}a^2 t^2 f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2 t^3 f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2 c\,t^3 f^{(4)}[x] + \frac{1}{24}b^4 t^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2 c\,t^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{24}b^4 c\,t^5 f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2 b\,t^3 f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3 t^4 f^{(5)}[x] + \frac{3}{10}a^2 b\,c\,t^4 f^{(5)}[x] + \frac{1}{120}b^5 t^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3 c\,t^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{120}b^5 c\,t^6 f^{(5)}[x] + \frac{3}{70}a^3 t^3 f^{(6)}[x] + \frac{3}{20}a^2 b^2 t^4 f^{(6)}[x] + \frac{3}{70}a^3 c\,t^4 f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4 t^5 f^{(6)}[x] + \frac{3}{20}a^2 b^2 c\,t^5 f^{(6)}[x] + \frac{1}{720}b^6 t^6 f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4 c\,t^6 f^{(6)}[x] + \frac{1}{720}b^6 c\,t^7 f^{(6)}[x]\Big\}$$

1253

The Taylor expansion of the function $f(x+yt^{1/4})$ at the point x to the 6th derivative of notation V. This expansion contains the term $t^{5/2}$. Power 5/2 is the minimum power greater than 2 in decomposition

Then, we integrate $\int_{-1}^{1}\left(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4\right)f(x+yt^{\frac{1}{4}})dy =$ $= \int_{-1}^{1}\left(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4\right)Vdy+o(t^{5/2})$. We denote this integral G_2.

In[8]:=
```
"V" =
 {V = Normal[Series[f[x + v], {v, 0, 6}]] /. v → y * t^(1 / 4)}
```

Out[8]= $$V = \left\{f[x] + t^{1/4}\, y\, f'[x] + \frac{1}{2}\sqrt{t}\, y^2\, f''[x] + \frac{1}{6}\, t^{3/4}\, y^3\, f^{(3)}[x] + \frac{1}{24}\, t\, y^4\, f^{(4)}[x] + \frac{1}{120}\, t^{5/4}\, y^5\, f^{(5)}[x] + \frac{1}{720}\, t^{3/2}\, y^6\, f^{(6)}[x]\right\}$$

In[9]:=
```
Indexed[G, "2"] =
 {G2 =
   Expand[
    Integrate[
     (beta0 + beta1 * y + beta2 * y^2 + beta3 * y^3 + beta4 * y^4) *
      V, {y, -1, 1}]]}
```

Out[9]= $$G_2 = \left\{\left\{\frac{1}{2}\, c^2\, t^2\, f[x] + \frac{1}{2}\, t^2\, f[x]\, bc' + \frac{1}{2}\, t^2\, f[x]\, ac'' + t^2\, ac'\, f'[x] + \frac{1}{2}\, t^2\, bb'\, f'[x] + \frac{1}{2}\, t^2\, ab''\, f'[x] + t^2\, ab'\, f''[x] + \frac{1}{2}\, t^2\, ba'\, f''[x] + \frac{1}{2}\, t^2\, aa''\, f''[x] + t^2\, aa'\, f^{(3)}[x] + \frac{1}{5}\, a^2\, t^2\, f^{(4)}[x] + \frac{1}{18}\, t^{5/2}\, aa'\, f^{(5)}[x] - \frac{1}{504}\, t^3\, ac'\, f^{(5)}[x] - \frac{t^3\, bb'\, f^{(5)}[x]}{1008} - \frac{t^3\, ab''\, f^{(5)}[x]}{1008} + \frac{1}{110}\, a^2\, t^{5/2}\, f^{(6)}[x] + \frac{c^2\, t^{7/2}\, f^{(6)}[x]}{66\,528} - \frac{1}{792}\, t^3\, ab'\, f^{(6)}[x] - \frac{t^3\, ba'\, f^{(6)}[x]}{1584} + \frac{t^{7/2}\, bc'\, f^{(6)}[x]}{66\,528} - \frac{t^3\, aa''\, f^{(6)}[x]}{1584} + \frac{t^{7/2}\, ac''\, f^{(6)}[x]}{66\,528}\right\}\right\}$$

1254

Add the resulting integrals. We denote the result as S_1.

In[10]:=

```
Indexed[S, "1"] = {S1 = Expand[G1 + G2]}
```

Out[10]=

$$S_1 = \left\{\left\{f[x] + c\,t\,f[x] + \frac{1}{2}c^2\,t^2\,f[x] + \frac{1}{2}t^2\,f[x]\,bc' + \frac{1}{2}t^2\,f[x]\,ac'' + b\,t\,f'[x] + b\,c\,t^2\,f'[x] + t^2\,ac'\,f'[x] + \frac{1}{2}t^2\,bb'\,f'[x] + \frac{1}{2}t^2\,ab''\,f'[x] + a\,t\,f''[x] + \frac{1}{2}b^2\,t^2\,f''[x] + a\,c\,t^2\,f''[x] + \frac{1}{2}b^2\,c\,t^3\,f''[x] + t^2\,ab'\,f''[x] + \frac{1}{2}t^2\,ba'\,f''[x] + \frac{1}{2}t^2\,aa''\,f''[x] + a\,b\,t^2\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{6}b^3\,t^3\,f^{(3)}[x] + a\,b\,c\,t^3\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{6}b^3\,c\,t^4\,f^{(3)}[x] + t^2\,aa'\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{2}a^2\,t^2\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2\,t^3\,f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,c\,t^3\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{24}b^4\,t^4\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2\,c\,t^4\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{24}b^4\,c\,t^5\,f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,b\,t^3\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3\,t^4\,f^{(5)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,b\,c\,t^4\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{120}b^5\,t^5\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3\,c\,t^5\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{120}b^5\,c\,t^6\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{18}t^{5/2}\,aa'\,f^{(5)}[x] - \frac{1}{504}t^3\,ac'\,f^{(5)}[x] - \frac{t^3\,bb'\,f^{(5)}[x]}{1008} - \frac{t^3\,ab''\,f^{(5)}[x]}{1008} + \frac{1}{110}a^2\,t^{5/2}\,f^{(6)}[x] + \frac{3}{70}a^3\,t^3\,f^{(6)}[x] + \frac{c^2\,t^{7/2}\,f^{(6)}[x]}{66\,528} + \frac{3}{20}a^2\,b^2\,t^4\,f^{(6)}[x] + \frac{3}{70}a^3\,c\,t^4\,f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4\,t^5\,f^{(6)}[x] + \frac{3}{20}a^2\,b^2\,c\,t^5\,f^{(6)}[x] + \frac{1}{720}b^6\,t^6\,f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4\,c\,t^6\,f^{(6)}[x] + \frac{1}{720}b^6\,c\,t^7\,f^{(6)}[x] - \frac{1}{792}t^3\,ab'\,f^{(6)}[x] - \frac{t^3\,ba'\,f^{(6)}[x]}{1584} + \frac{t^{7/2}\,bc'\,f^{(6)}[x]}{66\,528} - \frac{t^3\,aa''\,f^{(6)}[x]}{1584} + \frac{t^{7/2}\,ac''\,f^{(6)}[x]}{66\,528}\right\}\right\}$$

1255

We group the terms of this expression in powers of t and denote S_2

In[11]:= **Indexed[S, "2"] = {S2 = Collect[S1, t]}**

Out[11]=

$$
\begin{aligned}
S_2 \to \Big\{\Big\{ & f[x] + t\,(c\,f[x] + b\,f'[x] + a\,f''[x]) + \\
& t^2\left(\frac{1}{2}c^2 f[x] + \frac{1}{2} f[x]\,bc' + \frac{1}{2} f[x]\,ac'' + b\,c\,f'[x] + \right. \\
& \quad ac'\,f'[x] + \frac{1}{2} bb'\,f'[x] + \frac{1}{2} ab''\,f'[x] + \frac{1}{2} b^2 f''[x] + \\
& \quad a\,c\,f''[x] + ab'\,f''[x] + \frac{1}{2} ba'\,f''[x] + \frac{1}{2} aa''\,f''[x] + \\
& \quad \left. a\,b\,f^{(3)}[x] + aa'\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{2} a^2 f^{(4)}[x]\right) + \\
& \frac{1}{720} b^6\,c\,t^7 f^{(6)}[x] + t^{5/2}\left(\frac{1}{18} aa'\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{110} a^2 f^{(6)}[x]\right) + \\
& t^4\left(\frac{1}{6} b^3\,c\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{24} b^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{2} a\,b^2\,c\,f^{(4)}[x] + \right. \\
& \quad \frac{1}{6} a\,b^3 f^{(5)}[x] + \frac{3}{10} a^2\,b\,c\,f^{(5)}[x] + \\
& \quad \left. \frac{3}{20} a^2\,b^2 f^{(6)}[x] + \frac{3}{70} a^3\,c\,f^{(6)}[x]\right) + \\
& t^5\left(\frac{1}{24} b^4\,c\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{120} b^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{6} a\,b^3\,c\,f^{(5)}[x] + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{24} a\,b^4 f^{(6)}[x] + \frac{3}{20} a^2\,b^2\,c\,f^{(6)}[x]\right) + \\
& t^6\left(\frac{1}{120} b^5\,c\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{720} b^6 f^{(6)}[x] + \frac{1}{24} a\,b^4\,c\,f^{(6)}[x]\right) + \\
& t^3\left(\frac{1}{2} b^2\,c\,f''[x] + \frac{1}{6} b^3 f^{(3)}[x] + a\,b\,c\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{2} a\,b^2 f^{(4)}[x] + \right. \\
& \quad \frac{3}{10} a^2\,c\,f^{(4)}[x] + \frac{3}{10} a^2\,b\,f^{(5)}[x] - \frac{1}{504} ac'\,f^{(5)}[x] - \\
& \quad \frac{bb'\,f^{(5)}[x]}{1008} - \frac{ab''\,f^{(5)}[x]}{1008} + \frac{3}{70} a^3 f^{(6)}[x] - \\
& \quad \left. \frac{1}{792} ab'\,f^{(6)}[x] - \frac{ba'\,f^{(6)}[x]}{1584} - \frac{aa''\,f^{(6)}[x]}{1584}\right) + \\
& t^{7/2}\left(\frac{c^2\,f^{(6)}[x]}{66\,528} + \frac{bc'\,f^{(6)}[x]}{66\,528} + \frac{ac''\,f^{(6)}[x]}{66\,528}\right)\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

So, above is presented the so-called 'computer-assisted proof' of the following fact:

Proposition 1. *For all $f \in UC_b^8(\mathbb{R})$, $S(t)$ defined by (5), under assumptions of Theorem 3 for $t \to +0$ we have*

$$(S(t)f)(x) = f(x) + t(Hf)(x) + \frac{t^2}{2}(H^2 f)(x) + \Big(\frac{1}{18}a(x)a'(x)f^{(5)}(x) + \frac{1}{110}a(x)^2 f^{(6)}(x)\Big)t^{5/2} + o(t^{5/2})$$

uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}$.

This is an improvement of item 2 of Theorem 3 because the term $o(t^2)$ which appears in item 2 of Theorem 3 is now represented as $\Big(\frac{1}{18}a(x)a'(x)f^{(5)}(x) + \frac{1}{110}a(x)^2 f^{(6)}(x)\Big)t^{5/2} + o(t^{5/2})$. It means that we found that the difference between e^{tH} and $S(t)$ has leading term of order $t^{5/2}$.

In the nearest future we plan to prove a general theorem on the speed of convergence of Chernoff approximations which will give exact meaning to Conjecture 1. With this theorem the number 5/2 will be used in rigorous estimate of the speed of convergence of Chernoff approximations provided by Theorem 3.

1256

3.5 Estimate for speed of convergence

Theorem 4. (Theorem 4.1. in [8]) *Suppose that*

1. *Number $T > 0$ is given, and C_0-semigroup $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ with generator $(A, D(A))$ in Banach space $\mathcal{F}$ satisfies for some $M_1 \geq 1$ and $w \geq 0$ the condition $\|e^{tA}\| \leqslant M_1 e^{wt}$ for all $t \in [0, T]$.*

2. *There is a mapping $S\colon (0, T] \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, i.e. $S(t)\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ is a linear bounded operator for each $t \in (0, T]$. There exists some constant $M_2 \geq 1$ that $\|S(t)^k\| \leqslant M_2 e^{kwt}$ for all $t \in (0, T]$ and all $k = 1, 2, 3, \dots$*

3. *Numbers $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ and $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$ are fixed. There is a $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$-invariant subspace $\mathcal{D} \subset D(A^{m+p}) \subset \mathcal{F}$ (i.e. $(e^{tA})(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ for any $t \geq 0$, for example $\mathcal{D} = D(A^{m+p})$ is well suited).*

4. *There exist such functions $K_j\colon (0, T] \to [0, +\infty)$, $j = 0, 1, \dots, m + p$ that for all $t \in (0, T]$ and all $f \in \mathcal{D}$ we have*

$$\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k f}{k!} \right\| \leqslant t^{m+1} \sum_{j=0}^{m+p} K_j(t) \|A^j f\|. \tag{1}$$

Then:

1. *For all $t > 0$, all integer $n \geq t/T$ and all $f \in \mathcal{D}$ we have*

$$\|S(t/n)^n f - e^{tA} f\| \leq \frac{M_1 M_2 t^{m+1} e^{wt}}{n^m} \sum_{j=0}^{m+p} C_j(t/n) \|A^j f\|, \tag{2}$$

   where $C_{m+1}(t) = K_{m+1}(t)e^{-wt} + M_1/(m + 1)!$ and $C_j(t) = K_j(t)e^{-wt}$ for $j \neq m + 1$.

2. *If $\mathcal{D}$ is dense in $\mathcal{F}$ and for all $j = 0, 1, \dots, m + p$ we have $K_j(t) = o(t^{-m})$ when $t \to +0$, then for all $g \in \mathcal{F}$ and $\mathcal{T} > 0$ the following equality is true:*

$$\lim_{\mathcal{T}/T \leq n \to \infty} \sup_{t \in (0, \mathcal{T}]} \left\| S(t/n)^n g - e^{tA} g \right\| = 0. \tag{3}$$

Theorem 5. (Theorem 5.1. in [8]) *Suppose $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, the functions $a, b, c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are differentiable $2\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ times and the inequality $\inf_{x\in\mathbb{R}} |a(x)| > 0$ holds. Suppose, in addition, the operator L maps each doubly differentiable function $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to the function $Lu = au'' + bu' + cu$. Then there are nonnegative constants $C_0, C_1, \dots, C_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$, such that for any $2\lfloor (n + 1)/2 \rfloor$ times differentiable function $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the following inequality is true:*

$$\|v^{(n)}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C_k \|L^k v\|. \tag{4}$$

1257

Suppose $f \in UC_b^8(\mathbb{R})$, $a, b, c \in UC_b^6(\mathbb{R})$, $\inf_{x\in\mathbb{R}} a(x) > 0$. We use the Taylor expansion for the first to the 6th derivative and second terms to the 7th derivative and represent the residual terms in the Lagrange form. Then we group the terms in powers of t.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1 + c(x)t\Big) f\Big(x + (6a(x)t)^{\frac{1}{2}} y + b(x)t\Big) dy = f(x) + t(Hf)(x) + \frac{t^2}{2}(Mf)(x) +$$
$$+ \Big(\frac{1}{6}b(x)^3 t^3 + a(x)b(x)c(x)t^3 + \frac{1}{6}b(x)^3 c(x)t^4\Big) f^{(3)}(x) +$$
$$+ \Big(\frac{1}{2}a(x)b(x)^2 t^3 + \frac{3}{10}a(x)^2 c(x)t^3 + \frac{1}{24}b(x)^4 t^4 + \frac{1}{2}a(x)b(x)^2 c(x)t^4 + \frac{1}{24}b(x)^4 c(x)t^5\Big) f^{(4)}(x)$$
$$+\Big(\frac{3}{10}a(x)^2 b t^3 + \frac{1}{6}a(x)b(x)^3 t^4 + \frac{3}{10}a(x)^2 b(x)c(x)t^4 + \frac{1}{120}b(x)^5 t^5 + \frac{1}{6}a(x)b(x)^3 c(x)t^5 + \frac{1}{120}b(x)^5 c(x)t^6\Big) f^{(5)}(x) +$$
$$+ \frac{1}{1440}(1 + c(x)t) \int_{-1}^{1} \Big(6a(x)t)^{\frac{1}{2}} y + b(x)t\Big)^6 f^{(6)}(\xi_1) dy$$

$$\int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4\Big) f(x + yt^{\frac{1}{4}}) dy =$$
$$= \frac{t^2}{2}\Big((H^2 f)(x) - (Mf)(x)\Big) + \Big(\beta_0(t,x)t^{5/4}\int_{-1}^{1} y^5 dy + \beta_1(t,x)t^{5/4}\int_{-1}^{1} y^6 dy + \beta_2(t,x)t^{5/4}\int_{-1}^{1} y^7 dy +$$
$$+ \beta_3(t,x)t^{5/4}\int_{-1}^{1} y^8 dy + \beta_4(t,x)t^{5/4}\int_{-1}^{1} y^9 dy\Big) f^{(5)}(x) +$$
$$+ \Big(\beta_0(t,x)t^{6/4}\int_{-1}^{1} y^6 dy + \beta_1(t,x)t^{6/4}\int_{-1}^{1} y^7 dy + \beta_2(t,x)t^{6/4}\int_{-1}^{1} y^8 dy +$$
$$+ \beta_3(t,x)t^{6/4}\int_{-1}^{1} y^9 dy + \beta_4(t,x)t^{6/4}\int_{-1}^{1} y^{10} dy\Big) f^{(6)}(x) +$$
$$+ \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4\Big) y^7 t^{7/4} f^{(7)}(\xi_2) dy =$$
$$= \frac{t^2}{2}\Big((H^2 f)(x) - (Mf)(x)\Big) + \Big(\frac{1}{18}a(x)a'(x)t^{5/2} - \frac{1}{1008}\Big(a(x)b''(x) + 2a(x)c'(x) + b(x)b'(x)\Big)t^3\Big) f^{(5)}(x) +$$
$$+\Big(\frac{1}{110}a(x)^2 t^{5/2} + \frac{1}{1584}\big(a(x)a''(x) + 2a(x)b'(x) + a'(x)b(x)\big) + \frac{1}{66528}\big(a(x)c''(x) + b(x)c'(x) + c(x)^2\big)\Big) f^{(6)}(x) +$$
$$+ \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4\Big) y^7 t^{7/4} f^{(7)}(\xi_2) dy$$

1258

We add the first and second terms. So, we get $(S(t)f)(x)$ in the following form:

$$(S(t)f)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1+c(x)t\Big) f\Big(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\Big)dy+$$
$$+\int_{-1}^{1}\Big(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4\Big)f(x+yt^{\frac{1}{4}})dy=$$
$$=f(x)+t(Hf)(x)+\frac{t^2}{2}(H^2f)(x)+$$
$$+\Big(\frac{1}{6}b(x)^3t^3+a(x)b(x)c(x)t^3+\frac{1}{6}b(x)^3c(x)t^4\Big)f^{(3)}(x)+$$
$$+\Big(\frac{1}{2}a(x)b(x)^2t^3+\frac{3}{10}a(x)^2c(x)t^3+\frac{1}{24}b(x)^4t^4+\frac{1}{2}a(x)b(x)^2c(x)t^4+\frac{1}{24}b(x)^4c(x)t^5\Big)f^{(4)}(x)$$
$$+\Big(\frac{3}{10}a(x)^2bt^3+\frac{1}{6}a(x)b(x)^3t^4+\frac{3}{10}a(x)^2b(x)c(x)t^4+\frac{1}{120}b(x)^5t^5+\frac{1}{6}a(x)b(x)^3c(x)t^5+\frac{1}{120}b(x)^5c(x)t^6\Big)f^{(5)}(x)+$$
$$+\frac{1}{1440}(1+c(x)t)\int_{-1}^{1}\Big(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\Big)^6 f^{(6)}(\xi_1)dy+$$
$$+\Big(\frac{1}{18}a(x)a'(x)t^{5/2}-\frac{1}{1008}\Big(a(x)b''(x)+2a(x)c'(x)+b(x)b'(x)\Big)t^3\Big)f^{(5)}(x)+$$
$$+\Big(\frac{1}{110}a(x)^2t^{5/2}+\frac{1}{1584}\big(a(x)a''(x)+2a(x)b'(x)+a'(x)b(x)\big)+\frac{1}{66528}\big(a(x)c''(x)+b(x)c'(x)+c(x)^2\big)\Big)f^{(6)}(x)+$$
$$+\int_{-1}^{1}\Big(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4\Big)y^7t^{7/4}f^{(7)}(\xi_2)dy=$$
$$=f(x)+t(Hf)(x)+\frac{t^2}{2}(H^2f)(x)+\left(\frac{1}{18}a(x)a'(x)f^{(5)}(x)+\frac{1}{110}a(x)^2f^{(6)}(x)\right)t^{5/2}+P(x)t^{11/4}+Q(x,t),$$

where $P(x)$ is functions that are homogeneous polynomials of the functions a, b, c and their derivatives of order to 2 and derivatives of function f of order no higher than 7. $Q(x,t)$ is the sum of such polynomials that are multiplied by t in power 3 and greater than 3. So, $P(x) \in UC_b(\mathbb{R})$ and $P(x)t^{11/4} = o(t^{5/2})$, $Q(x,t) = o(t^{5/2})$

Then we will estimate remainder of the fifth and sixth derivative. We also use the following facts: the modulus of the sum (product) of functions is not greater than the sum (product) of the modulus of these functions, the supremum of the sum (product) of the values of functions is not greater than the sum (product) of the supremums of the values of these functions.

$$\left\|S(t)f - f - tHf - \frac{t^2}{2}H^2f\right\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(S(t)f)(x) - f(x) - t(Hf)(x) - \frac{t^2}{2}(H^2f)(x)\right| =$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(\frac{1}{18}a(x)a'(x)f^{(5)}(x)+\frac{1}{110}a(x)^2f^{(6)}(x)\right)t^{5/2}+P(x)t^{11/4}+Q(x,t)\right| \le$$
$$\le \Big(\frac{1}{18}\|a\|\|a'\|\|f^{(5)}\|+\frac{1}{110}\|a\|^2\|f^{(6)}\|\Big)t^{5/2}+\|P(x)\|t^{11/4}+\|Q(x,t)\|.$$

1259

We estimate the norm of the fifth derivative as the sum of the norms of the powers of the generator: $\|f^{(5)}\| \leq \sum_{k=0}^{3} C_{k5}\|H^k f\|$, and $\|f^{(6)}\| \leq \sum_{k=0}^{3} C_{k6}\|H^k f\|$, where $C_{k5}, C_{k6} \in \mathbb{R}$ (by Theorem 5). We also give precise estimates for the first four derivatives. It will be seen that it is difficult to estimate the derivative with order greater than 5. However, we concretely estimate the power t/n.

We can also estimate $\|P(x)\|t^{11/4}$ and $\|Q(x,t)\|$ the products of the sum of the norms of the power of the generator working on f and t in power $11/4$ or more. since these use the 7th derivative, their estimate includes the 4th power of the generator. Therefore, we use in the estimation such conditions on functions a, b, c as $a, b, c \in UC_b^6(\mathbb{R})$.

1) estimate of the first derivative:

$$\|f'\| \leq \frac{\|f\|}{h} + h\|f''\| \leq \frac{\|f\|}{h} + h\left\|\frac{1}{a}\right\|\|af''\| \leq \frac{\|f\|}{h} + h\left\|\frac{1}{a}\right\|\|Hf\| + h\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\|\|f'\| + h\left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\|f\|$$

$$\left(1 - h\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\|\right)\|f'\| \leq h\left\|\frac{1}{a}\right\|\|Hf\| + \left(\frac{1}{h} + h\left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\right)\|f\|$$

$$h = \frac{1}{2\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\|}$$

$$\|f'\| \leq \frac{1}{\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\|}\|Hf\| + \left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\| + \frac{\|c\|}{\|b\|}\right)\|f\|$$

2) estimate of the second derivative:

$$\|f''\| \leq \left\|\frac{1}{a}\right\|\|Hf\| + \left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\|\|f'\| + \left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\|f\| \leq \left(\left\|\frac{1}{a}\right\| + 1\right)\|Hf\| + \left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|^2\|b\|^2 + 2\left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\right)\|f\|$$

3) estimate of the third derivative:

$$\|f^{(3)}\| \leq \frac{\|f''\|}{h} + h\|f^{(4)}\| \leq \frac{\|f''\|}{h} + h\left\|\frac{1}{a}\right\|^2\|H^2 f\| + h\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \cdot 2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)\|f^{(3)}\| +$$

$$+h\left\|\frac{1}{a}\right\|^2(\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2)\|f''\| +$$

$$+h\left\|\frac{1}{a}\right\|^2(\|a\|\|b''\| + 2\|a\|\|c'\| + \|b\|\|b'\| + 2\|b\|\|c\|)\|f'\| + h\left\|\frac{1}{a}\right\|^2(\|a\|\|c''\| + \|b\|\|c'\| + \|c\|^2)\|f\|$$

$$h = \frac{1}{2\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \cdot 2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)} = \frac{1}{4\left\|\frac{1}{a}\right\|^2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}$$

1260

$$\|f^{(3)}\| \leq \frac{1}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\|H^2 f\| + \left(8\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 (\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|) + \right.$$

$$\left. + \frac{\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2)}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\right)\|f''\| +$$

$$+ \frac{\|a\|\|b''\| + 2\|a\|\|c'\| + \|b\|\|b'\| + 2\|b\|\|c\|}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\|f'\| + \frac{\|a\|\|c''\| + \|b\|\|c'\| + \|c\|^2}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\|f\|.$$

$$\|f^{(3)}\| \leq \frac{1}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\|\|H^2 f\| + \left(\left(8\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 (\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)\right)\left(\left\|\frac{1}{a}\right\| + 1\right) + \right.$$

$$\left(\frac{\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2)}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\right)\left(\left\|\frac{1}{a}\right\| + 1\right) +$$

$$\left. + \frac{\|a\|\|b''\| + 2\|a\|\|c'\| + \|b\|\|b'\| + 2\|b\|\|c\|}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)} \cdot \frac{1}{\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\|}\right)\|Hf\| +$$

$$+\left(\left(8\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 (\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)\right)\left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \|b\|^2 + 2\left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2)}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\right)\left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \|b\|^2 + 2\left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\right) +$$

$$\left. + \frac{\|a\|\|b''\| + 2\|a\|\|c'\| + \|b\|\|b'\| + 2\|b\|\|c\|}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\| + \frac{\|c\|}{\|b\|}\right) + \frac{\|a\|\|c''\| + \|b\|\|c'\| + \|c\|^2}{2(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)}\right)\|f\|$$

4) estimate of the fourth derivative:

$$\|f^{(4)}\| \le \left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \|H^2 f\| + \left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \cdot 2\big(\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)\|\big)\|f^{(3)}\| +$$

$$+ \left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \big(\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2\big)\|f''\| +$$

$$+ \left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \big(\|a\|\|b''\| + 2\|a\|\|c'\| + \|b\|\|b'\| + 2\|b\|\|c\|\big)\|f'\| + \left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \big(\|a\|\|c''\| + \|b\|\|c'\| + \|c\|^2\big)\|f\|.$$

$$\|f^{(4)}\| \le \left(\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 + 1\right)\|L^2 f\| + \left(\left(16\left\|\frac{1}{a}\right\|^4 (\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)^2\right)\left(\left\|\frac{1}{a}\right\| + 1\right) +\right.$$

$$\big(\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2\big)\left(\left\|\frac{1}{a}\right\| + 1\right)\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 +$$

$$+\big(\|a\|\|b''\| + 2\|a\|\|c'\| + \|b\|\|b'\| + 2\|b\|\|c\|\big)\cdot\frac{1}{\|b\|}\cdot\left\|\frac{1}{a}\right\| +$$

$$+\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \big(\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2\big)\left(\left\|\frac{1}{a}\right\| + 1\right) +$$

$$\left.+\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \left(\frac{\|a\|\|b''\| + 2\|a\|\|c'\| + \|b\|\|b'\| + 2\|b\|\|c\|\|}{\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\|}\right)\right)\|Hf\| +$$

$$+\left(\left(16\left\|\frac{1}{a}\right\|^4 (\|a\|\|a'\| + \|a\|\|b\|)^2\right)\left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|^2\|b\|^2 + 2\left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\right) +\right.$$

$$+\big(\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2\big)\left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|^2\|b\|^2 + 2\left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\right) +$$

$$+\big(\|a\|\|b''\|+2\|a\|\|c'\|+\|b\|\|b'\|+2\|b\|\|c\|\big)\left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|\|b\| + \frac{\|c\|}{\|b\|}\right)+\big(\|a\|\|c''\|+\|b\|\|c'\|+\|c\|^2\big)\left(\left\|\frac{1}{a}\right\|^2+1\right)+$$

$$+\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \big(\|a\|\|a''\| + 2\|a\|\|b'\| + 2\|a\|\|c\| + \|b\|\|a'\| + \|b\|^2\big)\left(4\left\|\frac{1}{a}\right\|^2\|b\|^2 + 2\left\|\frac{1}{a}\right\|\|c\|\right)$$

$$\left.+\left\|\frac{1}{a}\right\|^2 \big(\|a\|\|b''\| + 2\|a\|\|c'\| + \|b\|\|b'\| + 2\|b\|\|c\|\big)\frac{\|c\|}{\|b\|}\right)\|f\|$$

1262

So,

$$\left\|S(t)f - f - tHf - \frac{t^2}{2}H^2 f\right\| \le \Big(\frac{1}{18}\|a\|\|a'\|\|f^{(5)}\| + \frac{1}{110}\|a\|^2\|f^{(6)}\|\Big)t^{5/2} + \|P(x)\|t^{11/4} + \|Q(x,t)\| =$$

$$= \Big(\frac{1}{18}\|a\|\|a'\|\|f^{(5)}\| + \frac{1}{110}\|a\|^2\|f^{(6)}\|\Big)t^{5/2} + o(t^{5/2})$$

Then,

$$\left\|S(t/n)^n f - e^{tH} f\right\| \le \frac{M_1 M_2 t^3 e^{wt}}{n^2}\sum_{j=0}^{3} C_k(t/n)\|H^k f\| + o\left(\frac{t^{5/2}}{n^{5/2}}\right),$$

where $M_1 = M_2 = 1$ (because $\|e^{TH}\| \le M_1\|e^{wt}\| = 1 \cdot \|e^{wt}\|$ and $S(t) \le M_2\|e^{wt}\| = 1 \cdot \|e^{wt}\|$),

$$C_k(t/n) = \big(\frac{1}{18}\|a\|\|a'\|C_{k5} + \frac{1}{110}\|a\|^2 C_{k6}\big)\frac{t^{5/2-3}}{n^{5/2-3}} = \big(\frac{1}{18}\|a\|\|a'\|C_{k5} + \frac{1}{110}\|a\|^2 C_{k6}\big)\frac{t^{-1/2}}{n^{-1/2}}$$

So, we got the following result (by Theorem 4):

$$\left\|S(t/n)^n f - e^{tH} f\right\| \le Ce^{wt}\frac{t^{5/2}}{n^{3/2}} + o\left(\frac{t^{5/2}}{n^{5/2}}\right),$$

where $C \in \mathbb{R}$.

3.6 New formula for improved results

We see that the satisfaction of the condition $S(t) = I + tL = \frac{t^2}{2}L^2 + o(t^2)$ some improvement in the speed of Chernoff approximations. However, we can get a higher speed with a slight modification of new formula. Then, we show the formula, a way to modify it and an estimate of the speed of convergence.

further we consider the following notation: β_0 - β_4 and constant C take on new values and α_0 - α_4 retain their.

Also use the Taylor expansion for second terms to the 8th derivative and represent the residual terms in the Lagrange form.

$$(S(t)f)(x) = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\Big(1 + c(x)t\Big)f\Big(x + (6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y + b(x)t\Big)dy +$$

$$+\int_{-1}^{1}\Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4 + \beta_5(t,x)y^5 + \beta_6(t,x)y^6\Big)f(x + yt^{\frac{1}{4}})dy$$

where

$$\beta_0(t,x) = \frac{1225}{1024}\Big(a(x)c''(x) + b(x)c'(x) + c(x)^2\Big)t^2 - \frac{11025}{512}\Big(a(x)a''(x) + 2a(x)b'(x) + b(x)a'(x)\Big)t^{3/2} + \frac{14553}{64}a(x)^2 t,$$

1263

$$\beta_1(t,x)=\frac{3675}{256}\Big(a(x)b''(x)+2a(x)c'(x)+b(x)b'(x)\Big)t^{7/4}-\frac{19845}{32}a(x)a'(x)t^{5/4},$$

$$\beta_2(t,x)=-\frac{11025}{1024}\Big(a(x)c''(x)+b(x)c'(x)+c(x)^2\Big)t^2+$$
$$+\frac{178605}{512}\Big(a(x)a''(x)+2a(x)b'(x)+b(x)a'(x)\Big)t^{3/2}-\frac{280665}{64}a(x)^2t,$$

$$\beta_3(t,x)=-\frac{6615}{128}\Big(a(x)b''(x)+2a(x)c'(x)+b(x)b'(x)\Big)t^{7/4}+\frac{42525}{16}a(x)a'(x)t^{5/4},$$

$$\beta_4(t,x)=\frac{24255}{1024}\Big(a(x)c''(x)+b(x)c'(x)+c(x)^2\Big)t^2-$$
$$-\frac{467775}{512}\Big(a(x)a''(x)+2a(x)b'(x)+b(x)a'(x)\Big)t^{3/2}+\frac{800415}{64}a(x)^2t.$$

$$\beta_5(t,x)=\frac{10395}{256}\Big(a(x)b''(x)+2a(x)c'(x)+b(x)b'(x)\Big)t^{7/4}-\frac{72765}{32}a(x)a'(x)t^{5/4},$$

$$\beta_6(t,x)=-\frac{15015}{1024}\Big(a(x)c''(x)+b(x)c'(x)+c(x)^2\Big)t^2+$$
$$+\frac{315315}{512}\Big(a(x)a''(x)+2a(x)b'(x)+b(x)a'(x)\Big)t^{3/2}-\frac{567567}{64}a(x)^2t.$$

We got this formula from the following considerations. We see that the first term $\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\Big(1+c(x)t\Big)f\Big(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\Big)dy$ is the same as from the original formula. We know that it is equal to $I+tH+\frac{t^2}{2}Mf+O(t^3)$.

We represent the second term in the following form:

$$\int_{-1}^{1}\Big(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4+\beta_5(t,x)y^5+\beta_6(t,x)y^6\Big)f(x+yt^{\frac{1}{4}})=$$
$$=\alpha_0f(x)+\alpha_1f'(x)+\alpha_2f''(x)+\alpha_3f'''(x)+\alpha_4f^{(4)}(x)+\alpha_5f^{(5)}(x)+\alpha_6f^{(6)}(x)+o(t^3)$$

so that

$$\alpha_0f(x)+\alpha_1f'(x)+\alpha_2f''(x)+\alpha_3f'''(x)+\alpha_4f^{(4)}(x)=\frac{t^2}{2}((H^2f)(x)-(Mf)(x)$$

and $\alpha_5=\alpha_6=0$

So, we get a linear system of equations between α and β:

$$\alpha_0=\int_{-1}^{1}\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4+\beta_5(t,x)y^5+\beta_6(t,x)y^6$$

$$\alpha_1=\int_{-1}^{1}\Big(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4+\beta_5(t,x)y^5+\beta_6(t,x)y^6\Big)\cdot yt^{1/4}$$

$$\alpha_2=\int_{-1}^{1}\Big(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4+\beta_5(t,x)y^5+\beta_6(t,x)y^6\Big)\cdot y^2t^{2/4}$$

1264

$$\alpha_3 = \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4 + \beta_5(t,x)y^5 + \beta_6(t,x)y^6\Big) \cdot y^3 t^{3/4}$$

$$\alpha_4 = \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4 + \beta_5(t,x)y^5 + \beta_6(t,x)y^6\Big) \cdot y^4 t^{4/4}$$

$$\alpha_5 = \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4 + \beta_5(t,x)y^5 + \beta_6(t,x)y^6\Big) \cdot y^5 t^{5/4}$$

$$\alpha_6 = \int_{-1}^{1} \Big(\beta_0(t,x) + \beta_1(t,x)y + \beta_2(t,x)y^2 + \beta_3(t,x)y^3 + \beta_4(t,x)y^4 + \beta_5(t,x)y^5 + \beta_6(t,x)y^6\Big) \cdot y^6 t^{6/4}$$

The solution is as follows:

$$\beta_0(t,x) = \frac{1225}{1024}\Big(a(x)c''(x)+b(x)c'(x)+c(x)^2\Big)t^2 - \frac{11025}{512}\Big(a(x)a''(x)+2a(x)b'(x)+b(x)a'(x)\Big)t^{3/2} + \frac{14553}{64}a(x)^2 t,$$

$$\beta_1(t,x) = \frac{3675}{256}\Big(a(x)b''(x) + 2a(x)c'(x) + b(x)b'(x)\Big)t^{7/4} - \frac{19845}{32}a(x)a'(x)t^{5/4},$$

$$\beta_2(t,x) = -\frac{11025}{1024}\Big(a(x)c''(x) + b(x)c'(x) + c(x)^2\Big)t^2 + \\ + \frac{178605}{512}\Big(a(x)a''(x) + 2a(x)b'(x) + b(x)a'(x)\Big)t^{3/2} - \frac{280665}{64}a(x)^2 t,$$

$$\beta_3(t,x) = -\frac{6615}{128}\Big(a(x)b''(x) + 2a(x)c'(x) + b(x)b'(x)\Big)t^{7/4} + \frac{42525}{16}a(x)a'(x)t^{5/4},$$

$$\beta_4(t,x) = \frac{24255}{1024}\Big(a(x)c''(x) + b(x)c'(x) + c(x)^2\Big)t^2 - \\ - \frac{467775}{512}\Big(a(x)a''(x) + 2a(x)b'(x) + b(x)a'(x)\Big)t^{3/2} + \frac{800415}{64}a(x)^2 t.$$

$$\beta_5(t,x) = \frac{10395}{256}\Big(a(x)b''(x) + 2a(x)c'(x) + b(x)b'(x)\Big)t^{7/4} - \frac{72765}{32}a(x)a'(x)t^{5/4},$$

$$\beta_6(t,x) = -\frac{15015}{1024}\Big(a(x)c''(x) + b(x)c'(x) + c(x)^2\Big)t^2 + \\ + \frac{315315}{512}\Big(a(x)a''(x) + 2a(x)b'(x) + b(x)a'(x)\Big)t^{3/2} - \frac{567567}{64}a(x)^2 t.$$

$$(S(t)f)(x) = f(x) + t(Hf)(x) + \frac{t^2}{2}(H^2 f)(x) + U(x)t^3 + o(t^3),$$

when we use the Taylor expansion for second terms to the 8th derivative and represent the residual terms in the Lagrange form, where $U(x)$ - is functions that are homogeneous polynomials of the functions a, b, c and their derivatives of order to 2 and derivatives of function f of order no more than 8.

So, we got the following result:

$$\left\| S(t/n)^n f - e^{tH} f \right\| \le C e^{wt} \frac{t^3}{n^2} + 0\left(\frac{t^3}{n^2}\right),$$

where $C \in \mathbb{R}$.

1265

3.7 Verification of the new formula for $S(t)$ by symbolic computation

First, we write β_0, ..., β_4, see Wolfram input and output below:

```
In[1]:= Indexed[β, "0"] ==
  {beta0 = 1225 / 1024 * (ac'' + bc' + c^2) t^2 - 11025 / 512 * (aa'' + 2 ab' + ba') t^(3 / 2) +
     14553 / 64 * a^2 t}
```

$$\text{Out[1]= } \beta_0 == \left\{\frac{14\,553\, a^2\, t}{64} - \frac{11\,025}{512}\, t^{3/2}\, (2\, ab' + ba' + aa'') + \frac{1225\, t^2\, \left(c^2 + bc' + ac''\right)}{1024}\right\}$$

```
In[2]:= Indexed[β, "1"] == {beta1 = 3675 / 256 * (ab'' + 2 ac' + bb') t^(7 / 4) - 19845 / 32 * aa' t^{5 / 4}}
```

$$\text{Out[2]= } \beta_1 == \left\{\left\{-\frac{19\,845}{32}\, t^{5/4}\, aa' + \frac{3675}{256}\, t^{7/4}\, (2\, ac' + bb' + ab'')\right\}\right\}$$

```
In[3]:= Indexed[β, "2"] ==
  {beta2 = -11025 / 1024 * (ac'' + bc' + c^2) t^2 + 178605 / 512 * (aa'' + 2 ab' + ba') t^(3 / 2) -
     280665 / 64 * a^2 t}
```

$$\text{Out[3]= } \beta_2 == \left\{-\frac{280\,665\, a^2\, t}{64} + \frac{178\,605}{512}\, t^{3/2}\, (2\, ab' + ba' + aa'') - \frac{11\,025\, t^2\, \left(c^2 + bc' + ac''\right)}{1024}\right\}$$

```
In[4]:= Indexed[β, "3"] ==
  {beta3 = -6615 / 128 * (ab'' + 2 ac' + bb') t^(7 / 4) + 42525 / 16 * aa' t^{5 / 4}}
```

$$\text{Out[4]= } \beta_3 == \left\{\left\{\frac{42\,525}{16}\, t^{5/4}\, aa' - \frac{6615}{128}\, t^{7/4}\, (2\, ac' + bb' + ab'')\right\}\right\}$$

```
In[5]:= Indexed[β, "4"] ==
  {beta4 = 24255 / 1024 * (ac'' + bc' + c^2) t^2 - 467775 / 512 * (aa'' + 2 ab' + ba') t^(3 / 2) +
     800415 / 64 * a^2 t}
```

$$\text{Out[5]= } \beta_4 == \left\{\frac{800\,415\, a^2\, t}{64} - \frac{467\,775}{512}\, t^{3/2}\, (2\, ab' + ba' + aa'') + \frac{24\,255\, t^2\, \left(c^2 + bc' + ac''\right)}{1024}\right\}$$

```
In[6]:= Indexed[β, "5"] ==
  {beta5 = 10395 / 256 * (ab'' + 2 ac' + bb') t^(7 / 4) - 72765 / 32 * aa' t^{5 / 4}}
```

$$\text{Out[6]= } \beta_5 == \left\{\left\{-\frac{72\,765}{32}\, t^{5/4}\, aa' + \frac{10\,395}{256}\, t^{7/4}\, (2\, ac' + bb' + ab'')\right\}\right\}$$

```
In[7]:= Indexed[β, "6"] ==
  {beta6 = -15015 / 1024 * (ac'' + bc' + c^2) t^2 + 315315 / 512 * (aa'' + 2 ab' + ba') t^(3 / 2) -
     567567 / 64 * a^2 t}
```

$$\text{Out[7]= } \beta_6 == \left\{-\frac{567\,567\, a^2\, t}{64} + \frac{315\,315}{512}\, t^{3/2}\, (2\, ab' + ba' + aa'') - \frac{15\,015\, t^2\, \left(c^2 + bc' + ac''\right)}{1024}\right\}$$

1266

We use symbol W to denote the Taylor expansion of the function $x \mapsto f(x+(6a(x)t)^{1/2}y+b(x)t)$ at the point x up to the 6th derivative.

Then, we integrate $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1+c(x)t\Big) f\Big(x+(6a(x)t)^{\frac{1}{2}}y+b(x)t\Big)dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(1+c(x)t\Big) W dy+o(t^{5/2})$ and denote this integral as G_1.

```
In[8]:= "W" ==
        {W = Normal[Series[f[x + w], {w, 0, 6}]] /.
           w → y * (6 * a * t) ^ (1 / 2) + b * t}
```

$$\text{Out[8]= } W == \Big\{f[x] + \left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right) f'[x] + \frac{1}{2}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^2 f''[x] + \frac{1}{6}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^3 f^{(3)}[x] + \frac{1}{24}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{120}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{720}\left(b\,t + \sqrt{6}\,\sqrt{a\,t}\,y\right)^6 f^{(6)}[x]\Big\}$$

```
In[9]:= Indexed[G,
         "1"] ==
        {G1 = Expand[Integrate[(1 / 2) * (1 + c * t) * W, {y, -1, 1}]]}
```

$$\text{Out[9]= } G_1 == \Big\{f[x] + c\,t\,f[x] + b\,t\,f'[x] + b\,c\,t^2 f'[x] + a\,t\,f''[x] + \frac{1}{2}b^2 t^2 f''[x] + a\,c\,t^2 f''[x] + \frac{1}{2}b^2 c\,t^3 f''[x] + a\,b\,t^2 f^{(3)}[x] + \frac{1}{6}b^3 t^3 f^{(3)}[x] + a\,b\,c\,t^3 f^{(3)}[x] + \frac{1}{6}b^3 c\,t^4 f^{(3)}[x] + \frac{3}{10}a^2 t^2 f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2 t^3 f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2 c\,t^3 f^{(4)}[x] + \frac{1}{24}b^4 t^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2 c\,t^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{24}b^4 c\,t^5 f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2 b\,t^3 f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3 t^4 f^{(5)}[x] + \frac{3}{10}a^2 b\,c\,t^4 f^{(5)}[x] + \frac{1}{120}b^5 t^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3 c\,t^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{120}b^5 c\,t^6 f^{(5)}[x] + \frac{3}{70}a^3 t^3 f^{(6)}[x] + \frac{3}{20}a^2 b^2 t^4 f^{(6)}[x] + \frac{3}{70}a^3 c\,t^4 f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4 t^5 f^{(6)}[x] + \frac{3}{20}a^2 b^2 c\,t^5 f^{(6)}[x] + \frac{1}{720}b^6 t^6 f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4 c\,t^6 f^{(6)}[x] + \frac{1}{720}b^6 c\,t^7 f^{(6)}[x]\Big\}$$

1267

The Taylor expansion of the function $f(x+yt^{1/4})$ at the point x to the 7th derivative of notation V.

Then, we integrate $\int_{-1}^{1}\left(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4\right)f(x+yt^{\frac{1}{4}})dy =$
$=\int_{-1}^{1}\left(\beta_0(t,x)+\beta_1(t,x)y+\beta_2(t,x)y^2+\beta_3(t,x)y^3+\beta_4(t,x)y^4\right)Vdy+o(t^{5/2})$. We denote this integral G_2.

```
In[10]:= "V" ==
  {V = Normal[Series[f[x + v], {v, 0, 7}]] /.
    v → y * t^(1 / 4)}
```

$$\text{Out[10]= } V == \left\{f[x] + t^{1/4}\, y\, f'[x] + \frac{1}{2}\sqrt{t}\, y^2 f''[x] + \frac{1}{6}t^{3/4} y^3 f^{(3)}[x] + \frac{1}{24} t\, y^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{120} t^{5/4} y^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{720} t^{3/2} y^6 f^{(6)}[x] + \frac{t^{7/4} y^7 f^{(7)}[x]}{5040}\right\}$$

```
In[11]:= Indexed[G, "2"] ==
  {G2 =
    Expand[
     Integrate[
      (beta0 + beta1 * y + beta2 * y^2 + beta3 * y^3 +
         beta4 * y^4 + beta5 * y^5 + beta6 * y^6) * V,
      {y, -1, 1}]]}
```

$$\text{Out[11]= } G_2 == \left\{\left\{\frac{1}{2}c^2 t^2 f[x] + \frac{1}{2}t^2 f[x]\, bc' + \frac{1}{2}t^2 f[x]\, ac'' + t^2 ac'\, f'[x] + \frac{1}{2}t^2 bb'\, f'[x] + \frac{1}{2}t^2 ab''\, f'[x] + t^2 ab'\, f''[x] + \frac{1}{2}t^2 ba'\, f''[x] + \frac{1}{2}t^2 aa''\, f''[x] + t^2 aa'\, f^{(3)}[x] + \frac{1}{5}a^2 t^2 f^{(4)}[x] - \frac{t^3 aa'\, f^{(7)}[x]}{1144} + \frac{t^{7/2} ac'\, f^{(7)}[x]}{61776} + \frac{t^{7/2} bb'\, f^{(7)}[x]}{123552} + \frac{t^{7/2} ab''\, f^{(7)}[x]}{123552}\right\}\right\}$$

1268

Add the resulting integrals. We denote the result as S_1.

```
In[12]:= Indexed[S, "1"] == {S1 = Expand[G1 + G2]}
```

Out[12]= $S_1 ==$

$$\left\{\left\{f[x] + c\,t\,f[x] + \frac{1}{2}c^2\,t^2\,f[x] + \frac{1}{2}t^2\,f[x]\,bc' + \frac{1}{2}t^2\,f[x]\,ac'' + b\,t\,f'[x] + b\,c\,t^2\,f'[x] + t^2\,ac'\,f'[x] + \frac{1}{2}t^2\,bb'\,f'[x] + \frac{1}{2}t^2\,ab''\,f'[x] + a\,t\,f''[x] + \frac{1}{2}b^2\,t^2\,f''[x] + a\,c\,t^2\,f''[x] + \frac{1}{2}b^2\,c\,t^3\,f''[x] + t^2\,ab'\,f''[x] + \frac{1}{2}t^2\,ba'\,f''[x] + \frac{1}{2}t^2\,aa''\,f''[x] + a\,b\,t^2\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{6}b^3\,t^3\,f^{(3)}[x] + a\,b\,c\,t^3\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{6}b^3\,c\,t^4\,f^{(3)}[x] + t^2\,aa'\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{2}a^2\,t^2\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2\,t^3\,f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,c\,t^3\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{24}b^4\,t^4\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2\,c\,t^4\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{24}b^4\,c\,t^5\,f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,b\,t^3\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3\,t^4\,f^{(5)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,b\,c\,t^4\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{120}b^5\,t^5\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3\,c\,t^5\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{120}b^5\,c\,t^6\,f^{(5)}[x] + \frac{3}{70}a^3\,t^3\,f^{(6)}[x] + \frac{3}{20}a^2\,b^2\,t^4\,f^{(6)}[x] + \frac{3}{70}a^3\,c\,t^4\,f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4\,t^5\,f^{(6)}[x] + \frac{3}{20}a^2\,b^2\,c\,t^5\,f^{(6)}[x] + \frac{1}{720}b^6\,t^6\,f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4\,c\,t^6\,f^{(6)}[x] + \frac{1}{720}b^6\,c\,t^7\,f^{(6)}[x] - \frac{t^3\,aa'\,f^{(7)}[x]}{1144} + \frac{t^{7/2}\,ac'\,f^{(7)}[x]}{61776} + \frac{t^{7/2}\,bb'\,f^{(7)}[x]}{123552} + \frac{t^{7/2}\,ab''\,f^{(7)}[x]}{123552}\right\}\right\}$$

1269

We group the terms of this expression in powers of t and denote S_2

In[13]:= `Indexed[S, "2"] == {S2 = Collect[S1, t]}`

Out[13]=

$$S_2 == \left\{\left\{f[x] + t\,(c\,f[x] + b\,f'[x] + a\,f''[x]) + t^2\left(\frac{1}{2}c^2 f[x] + \frac{1}{2}f[x]\,bc' + \frac{1}{2}f[x]\,ac'' + b\,c\,f'[x] + ac'\,f'[x] + \frac{1}{2}bb'\,f'[x] + \frac{1}{2}ab''\,f'[x] + \frac{1}{2}b^2 f''[x] + a\,c\,f''[x] + ab'\,f''[x] + \frac{1}{2}ba'\,f''[x] + \frac{1}{2}aa''\,f''[x] + a\,b\,f^{(3)}[x] + aa'\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{2}a^2 f^{(4)}[x]\right) + \frac{1}{720}b^6\,c\,t^7 f^{(6)}[x] + t^4\left(\frac{1}{6}b^3\,c\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{24}b^4 f^{(4)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2\,c\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3 f^{(5)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,b\,c\,f^{(5)}[x] + \frac{3}{20}a^2 b^2 f^{(6)}[x] + \frac{3}{70}a^3\,c\,f^{(6)}[x]\right) + t^5\left(\frac{1}{24}b^4\,c\,f^{(4)}[x] + \frac{1}{120}b^5 f^{(5)}[x] + \frac{1}{6}a\,b^3\,c\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4 f^{(6)}[x] + \frac{3}{20}a^2 b^2\,c\,f^{(6)}[x]\right) + t^6\left(\frac{1}{120}b^5\,c\,f^{(5)}[x] + \frac{1}{720}b^6 f^{(6)}[x] + \frac{1}{24}a\,b^4\,c\,f^{(6)}[x]\right) + t^3\left(\frac{1}{2}b^2\,c\,f''[x] + \frac{1}{6}b^3 f^{(3)}[x] + a\,b\,c\,f^{(3)}[x] + \frac{1}{2}a\,b^2 f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,c\,f^{(4)}[x] + \frac{3}{10}a^2\,b\,f^{(5)}[x] + \frac{3}{70}a^3 f^{(6)}[x] - \frac{aa'\,f^{(7)}[x]}{1144}\right) + t^{7/2}\left(\frac{ac'\,f^{(7)}[x]}{61\,776} + \frac{bb'\,f^{(7)}[x]}{123\,552} + \frac{ab''\,f^{(7)}[x]}{123\,552}\right)\right\}\right\}$$

the formula takes the following form in program:

$$(S(t)f)(x) = f(x) + t(Hf)(x) + \frac{t^2}{2}(H^2 f)(x) + R(x)t^3 + o(t^3),$$

where $R(x)$ - is functions that are homogeneous polynomials of the functions a, b, c and their derivatives of order to 2 and derivatives of function f of order from 2 to 7.

It follows from the new formula that the minimum power of t at the remainder is 3

Conclusion

In the thesis we considered initial value problem for a class of diffusion-type parabolic second order partial differential equation on the real line. For this Cauchy problem we constructed a sequence of Chernoff approximations (indexed by positive integer parameter n) that converge to the solution of the Cauchy problem uniformly as n tends to infinity.

The approximations are presented in terms of so-called Chernoff function and we managed to construct such a Chernoff function that gives the speed of convergence not worse than constant divided by n squared for some class of sufficiently smooth initial conditions and coefficients of the equation. The work is interesting because the construction of fast converging approximations

1270

to the solution of the Cauchy problem for a parabolic partial differential equation with variable coefficients is reduced to relatively simple methods of linear algebra and real analysis. Therefore, it is possible to create an algorithm for finding higher-order approximations and automate this process. Thus, this formula and its generalizations and modifications, can be useful in numerical methods.

The research presented contains long explicit calculations in some of the proofs of theorems. To show that we has made no mistake in algerbraic calculations we wrote a program on Wolfram Language that provides the same expressions via symbolic computations. The text of the program and results of its work are provided in the thesis. This can be considered as a computer-assisted-proof of the fact that our Chernoff function indeed has the properties that we state.

Acknowledgements

Author are thankful to Prof. Ivan Remizov for statement of the problem and relevant support on all stages of the research, and also to Prof. Oleg Galkin for fruitful discussions on the issues raised during the work.

References

[1] C. Batty, A. Gomilko, Yu. Tomilov. A Besov algebra calculus for generators of operator semigroups and related norm-estimates. // Mathematische Annalen (2019) online open access paper https://doi.org/10.1007/s00208-019-01924-2

[2] V.I. Bogachev, O.G. Smolyanov O.G. Real and Functional Analysis. — Springer. 2020. 586 p.

[3] Ya.A. Butko. The Method of Chernoff Approximation. // In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M., Tomilov Y. (eds) Semigroups of Operators — Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2020. V. 325. P. 19-46.

[4] Ya.A. Butko, M. Grothaus, O.G. Smolyanov. Lagrangian Feynman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains. // Infinite Dimansional Analyasis, Quantum Probability and Related Topics, vol. 13, No. 3 (2010), 377-392.

[5] Paul R. Chernoff. Note on product formulas for operator semigroups. // J. Functional Analysis 2:2 (1968), 238-242.

[6] Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — Springer-Verlag. New York. 2000. 609 p.

[7] G. Evans, J. Blackledge, P. Yardley. Numerical Methods for Partial Differential Equations. — Springer, 2000.

[8] O.E. Galkin, I.D. Remizov. Upper and lower estimates for rate of convergence in Chernoff's product formula for semigroups of operators. // arXiv 2021

[9] A.Gomilko, S.Kosowicz, Yu.Tomilov. A general approach to approximation theory of operator semigroups// Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 127 (2019) 216-267

[10] A. Gomilko, Yu. Tomilov. On convergence rates in approximation theory for operator semigroups. //Journal of Functional Analysis 266:5 (2014), 3040-3082

[11] E. Hille, R.S. Phillips. Functional Analysis and Semi-groups. — American Mathematical Society. 1996. 819 p.

[12] S. Mazumder. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Finite Difference and Finite Volume Methods. // Academic Press, 2016

[13] Hagen Neidhardt, Artur Stephan and Valentin A. Zagrebnov. Remarks on the operator-norm convergence of the Trotter product formula. // Integral Equations and Operator Theory, 90:15 (2018).

[14] Hagen Neidhardt, Artur Stephan, Valentin A. Zagrebnov. Operator-Norm Convergence of the Trotter Product Formula on Hilbert and Banach Spaces: A Short Survey. // Current Research in Nonlinear Analysis, pp 229-247 (2018).

[15] Yu.N. Orlov, V.Zh. Sakbaev, O.G. Smolyanov. Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian.// Theoretical and Mathematical Physics 172, 987–1000 (2012)

[16] Daniele Antonio Di Pietro, Alexandre Ern, Luca Formaggia (Eds.). Numerical Methods for PDEs. State of the Art Techniques. — Springer 2018.

[17] P.S. Prudnikov. Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation// arXiv 2020

[18] I.D. Remizov. Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example). // Applied Mathematics and Computaton 328 (2018), 243-246.

[19] I. D. Remizov. On estimation of error in approximations provided by chernoff's product formula.// International Conference 'ShilnikovWorkshop-2018' dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934-2011), book of abstracts, 38-41, 2018.

1272

[20] I.D. Remizov. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation. // Journal of Functional Analysis 270:12 (2016), 4540-4557.

[21] I.D. Remizov. Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients.// Journal of Mathematical Physics, 60:7 (2019), 071505

[22] V. Ruas. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An Introduction. — Wiley, 2016. 300 p.

[23] O.G. Smolyanov. Feynman formulae for evolutionary equations. // Trends in Stochastic Analysis, London Mathematical Society Lecture Notes Series 353, 2009.

[24] O.G. Smolyanov, A.G. Tokarev, A. Truman. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula. // J. Math. Phys. 43, 10 (2002) 5161-5171.

[25] O. G. Smolyanov, A. Truman. Feynman Formulas for Solutions of the Schrödinger Equation on Compact Riemannian Manifolds. // Math. Notes, 68:5 (2000), 668-671

[26] O.G. Smolyanov, H.v. Weizsäcker, and O. Wittich. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions. // Stochastic processes, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honour of S. Albeverio, volume 29 of Can. Math. Soc. Conf. Proc., pages 589–602. Am. Math. Soc., 2000.

[27] O.G. Smolyanov, H.v. Weizšacker, O. Wittich. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures. // Doklady Math. 2000. V. 61. P. 230-234.

[28] A.V. Vedenin, V.S. Voevodkin, V.D. Galkin, E.Yu. Karatetskaya, I.D. Remizov. Speed of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of Evolution Equations// Mathematical Notes 108(3) 451-456 (2020)

[29] V.A.Zagrebnov. Comments on the Chernoff $\sqrt{n}$-lemma. // In book [Series of Congress Reports: Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics, The Pavel Exner Anniversary Volume. Jaroslav Dittrich, Hynek Kovařík, Ari Laptev (eds). European Mathematical Society, 2017] pp. 564-573, 2017.

[30] V.A. Zagrebnov. Notes on the Chernoff product formula.// Journal of Functional Analysis 279:7 (2020) 108696

1273

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Григорьевой Елены Игоревны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Достаточные условия сходимости ряда Фурье по собственным функциям оператора с инволюцией на графе» являются: Леммы 2-6, Теоремы 2,3.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 сентября 2018 года по 31 мая 2020 года мной были изучены работы [1-8], [12-19], и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При этом в работах [1-8], [12-19] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Бурлуцкой Марией Шаукатовной, доцентом кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета.
- Состоялось участие в Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2018», а также была опубликована работа [11] в сборнике материалов конференции.

Таким образом, по результатам изучения указанных работ, а также обсуждений с указанным выше специалистом следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоялась 4 июля 2020 года. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  Григорьева Елена Игоревна

31 мая 2021 года
Воронеж, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО "ВГУ")

Математический факультет

Кафедра математического анализа

Достаточные условия сходимости ряда Фурье по собственным функциям оператора с инволюцией на графе

Магистерская работа

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Программа – Математический анализ и приложения

Зав.кафедрой _____ д.ф.-м.н., проф. А.Д. Баев _._.20_

Студент _____ Е.И. Бирюкова

Руководитель _____ к.ф.-м.н., доц. М.Ш. Бурлуцкая

Воронеж 2020

Содержание

Введение **3**

§ 1. Постановка задачи **4**

§ 2. Формула для резольвенты оператора L **5**

§ 3. Исследование резольвенты **11**

§ 4. Аналог теоремы Жордана-Дирихле **18**

1276

Введение

Наряду с изучением различных свойств уравнений с отклоняющимся аргументом важное значение имеет рассмотрение их отдельных классов, например, функционально-дифференциальных уравнений с инволюцией. Операторы и уравнения с различными видами инволюций активно рассматривались в работах И.Я. Винера, Г.С. Литвинчука, С.С. Платонова, А.П. Хромова, М.Ш. Бурлуцкой, А.Г. Баскакова и др. Инволютивным отклонением, или инволюцией, называют преобразование, которое является обратным самому себе, то есть функция называется инволюцией, если $\nu^2 = \nu(\nu(x)) = x$ для всякого x из области определения функции ν. Существуют разные виды инволюций, например: $\nu(x) = -x$, $\nu(x) = \frac{1}{x}$. На отрезке $[0, 1]$ таким преобразованием является инволюция $\nu(x) = 1 - x$. Далее будем рассматривать такой случай. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией имеет следующий общий вид:

$$Ly = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), x \in [0,1]. \qquad (1)$$

Такие операторы и различные задачи, в которых они возникают, активно изучаются, например, при исследовании геометрических задач, таких как задача Бернулли и Эйлера о взаимных траекториях, при исследовании смешанных задач для уравнений в частных производных, а также при изучении разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора $Af = \int\limits_0^1 A(x,t)f(t)dt$, ядро $A(x,t)$ которого имеет разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$.

В последнее время большое развитие получила теория дифференциальных уравнений, в частности, уравнений с инволюцией, на геометриче-

1277

ских графах. Простейший граф состоит из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю [15, 16].

В данной работе будет исследоваться вопрос о сходимости разложений некоторой функции в ряд Фурье по собственным функциям оператора с инволюцией, заданного на таком простейшем геометрическом графе. Для многих функций достаточными условиями разложимости ее по собственным функциям некоторого оператора являются условия, которые часто называют условиями Жордана-Дирихле: функция непрерывна, имеет ограниченную вариацию и удовлетворяет краевым условиям. Будет получен аналог этого результата для изучаемого оператора.

§ 1. Постановка задачи

Пусть Г — геометрический граф, состоящий из двух ребер γ_1 и γ_2, и γ_2 образует цикл-петлю. Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0, 1]$, зададим на Г оператор как оператор в пространстве вектор-функций:

$$Ly = \big(y_1'(1-x), y_2'(x)\big)^T, y = (y_1, y_2)^T, x \in [0,1] \tag{2}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) \tag{3}$$

(T — знак транспонирования). Считаем, что область определения D_L оператора L включает вектор-функции с непрерывно-дифференцируемыми компонентами, удовлетворяющими условиям (3) (условие непрерывности в узле графа). Оператор L относится к классу функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ и является невозмущенным для операторов более общего вида, задаваемых дифференциальным выражением вида (1).

Целью работы является получение условий, при которых ряд Фурье

по собственным и присоединенным функциям(с.п.ф.) оператора L равномерно сходится к заданной функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ при $x \in [0, 1]$. Рассмотрим уравнение на собственные значения некоторого оператора L: $Ly = \lambda y$, где λ — спектральный параметр. Если оператор $L - \lambda E$ обратим, то выражение $(L - \lambda E)^{-1}$ называется резольвентой оператора L. Для решения задачи удобно использовать представление $S_r(f, x)$ через контурные интегралы от резольвенты, а именно

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda f)(x) d\lambda. \tag{4}$$

Использование метода контурного интегрирования резольвенты позволяет исследовать сходимость ряда по собственным функциям (что важно во многих спектральных задачах), не производя трудоемкое построение собственных функций и их асимптотик.

§ 2. Формула для резольвенты оператора L

Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L, (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор). Для $y = R_\lambda f$, где $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ из (2) и (3) имеем следующую краевую задачу:

$$y_1'(1 - x) = \lambda y_1(x) + f_1(x) \tag{5}$$

$$y_2'(x) = \lambda y_2(x) + f_2(x) \tag{6}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1). \tag{7}$$

Эта задача сводится к задаче в пространстве вектор-функций с большим числом компонент.

Теорема 1. *Если λ таково, что резольвента R_λ оператора L существует и $y_1(x) = (R_\lambda f)_1$, $y_2(x) = (R_\lambda f)_2$, то вектор-функция $z(x) =$*

$\big(z_1(x), z_2(x), z_3(x)\big)^T$, *где* $z_1(x) = y_1(x)$, $z_2(x) = y_1(1-x), z_3(x) = y_2(x)$, *является решением краевой задачи*

$$Bz'(x) - \lambda z(x) = F(x) \tag{8}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \tag{9}$$

с $F(x) = \big(f_1(x), f_1(1-x), f_2(x)\big)^T$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Обратно, если $z(x)$ *удовлетворяет (8), (9) и задача (8), (9) невырождена, то* R_λ *существует и* $(R_\lambda f)_1(x) = z_1(x)$, $(R_\lambda f)_2(x) = z_3(x)$, *где* z_1 *и* z_3 *— первая и третья компоненты решения* $z(x) = R_\lambda F$, *системы (8), (9).*

Доказательство. Пусть $z_1(x) = y_1(x)$, $z_2(x) = y_1(1-x)$, $z_3(x) = y_2(x)$, следовательно $y_1'(1-x) = -z_2'(x)$, $y_2'(x) = z_3'(x)$. Тогда заменив x на $1-x$ в (5) и рассматривая полученное уравнение вместе с (5) и (6) получаем следующую систему относительно функций $z_k(x)$, $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} -z_2'(x) &= \lambda z_1(x) + f_1(x), \\ z_1'(x) &= \lambda z_3(x) + f_2(x), \\ z_3' &= \lambda z_3(x) + f_2(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Введя вектор $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x))^T$, $z'(x) = (z_1'(x), z_2'(x), z_3'(x))^T$ получим систему (8). Так как $y_1(0) = z_1(0)$, $y_2(0) = z_3(0)$, $y_2(1) = z_3(1)$,

то из (7) получаем условия для вектор-функции $z(x)$:

$$z_1(0) - z_3(0) = 0$$

$$z_3(0) - z_3(1) = 0$$

$$z_2(1) - z_3(0) = 0.$$

Отсюда получаем (9).

Обратно, пусть $z(x)$ удовлетворяет (8)—(9). Система (8) в координатной записи имеет вид (10). Меняя в (10) в первом и втором уравнениях x на $1 - x$ и полагая $u_1(x) = z_2(1 - x)$, $u_2(x) = z_1(1 - x)$, $u_3(x) = z_3(x)$ получим:

$$u_1'(x) - \lambda u_2(x) = f_1(1 - x),$$

$$-u_2'(x) - \lambda u_1(x) = f_1(x),$$

$$u_3'(x) - \lambda u_3(x) = f_2(x).$$

Отсюда следует, что $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$ также является решением уравнения (8). Так как $z_1(0) = u_2(1)$, $z_3(0) = u_3(0)$, $z_3(1) = u_3(1)$, $z_2(1) = u_1(0)$, то

$$u_2(1) - u_3(0) = 0,$$

$$u_3(0) - u_3(1) = 0,$$

$$u_1(0) - u_3(0) = 0,$$

то есть $u(x)$ удовлетворяет краевым условиям (9). Таким образом, $u(x)$ — решение краевой задачи (8) — (9). А в силу ее невырожденности $u_(x) \equiv z(x)$, откуда

$$z_2(x) = z_1(1 - x). \tag{11}$$

В силу $-z_2'(x) = z_1'(1 - x)$ первое уравнение в (10) переходит в

$$z_1'(1 - x) - \lambda z_1(x) = f_1(x).$$

Из (11) имеем $z_1(0) = z_3(0) = z_3(1)$. Таким образом, $(z_1(x), z_3(x))^T$ является решением краевой задачи (5)-(7), причем, единственным в силу невырожденности задачи (8) — (9). Отсюда следует, что оператор $L-\lambda E$ обратим, и следовательно, $(R_\lambda f)_1(x) = z_1(x)$, $(R_\lambda f)_2(x) = z_3(x)$. $\square$

Положим $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $B\Gamma = \Gamma D^{-1}$, где $D^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выполнив в (8), (9) замену $z(x) = \Gamma u(x)$. получим следующую задачу для $u(x)$:

$$u'(x) - \mu D_1 u(x) = \Phi(x) \tag{12}$$

$$U_0(u) = M_0 \Gamma u(0) + M_1 \Gamma u(1) = 0, \tag{13}$$

где $\mu = -i\lambda$, $D_1 = diag(1, -1, i)$, $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$.

Лемма 1. *Если μ таково, что матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu))$, где $V(x,\mu) = \operatorname{diag}\left(e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{i\mu x}\right)$, обратима, то краевая задача (12), (13) однозначно разрешима при любой $\Phi(x)$ с компонентами из $L[0,1]$, и ее решение $u(x) = u(x,\mu)$ имеет вид:*

$$u(x,\mu) = R_{0\mu}\Phi(x) = -V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu\Phi) + g_\mu\Phi(x), \tag{14}$$

где $g_\mu\Phi(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)\Phi(t)\,dt$, $U_0(g_\mu\Phi) = \int\limits_0^1 U_{0x}(g(x,t,\mu))\Phi(t)\,dt$,

(U_{0x} означает, что U_0 применяется к g по переменной x),

$g(x,t,\mu) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\mu), g_2(x,t,\mu), g_3(x,t,\mu))$,

$g_k(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)\exp\{\omega_k\mu(x-t)\}$, *при* $\operatorname{Re}\mu\omega_k \geq 0$,

$g_k(x,t,\mu) = \varepsilon(x,t)\exp\{\omega_k\mu(x-t)\}$, *при* $\operatorname{Re}\mu\omega_k \le 0$,

$\varepsilon(x,t) = 1$, *если* $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, *если* $x < t$, $\omega_1 = 1, \omega_2 = -1, \omega_3 = i$.

Доказательство. Из (12) пользуясь тем, что $u'(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x), \\ u_3'(x) \end{pmatrix}$,

$D_1u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ -u_2(x) \\ iu_3(x) \end{pmatrix}$, $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix}$, получаем систему:

$$\begin{cases} u_1'(x) - \mu u_1(x) = \Phi_1(x), \\ u_2'(x) + \mu u_2(x) = \Phi_2(x), \\ u_3'(x) - i\mu u_3(x) = \Phi_3(x). \end{cases}$$

Используя метод вариации произвольной постоянной, получим общее решение последней системы:

$$u_1(x) = e^{\mu x}c_1 + \int_0^x e^{\mu(x-t)}\Phi_1(t)dt, \tag{15}$$

$$u_2(x) = e^{-\mu x}c_2 + \int_0^x e^{-\mu(x-t)}\Phi_2(t)dt, \tag{16}$$

$$u_3(x) = e^{i\mu x}c_3 + \int_0^x e^{i\mu(x-t)}\Phi_3(t)dt, \tag{17}$$

где c_1,c_2, c_2 — произвольные константы. При исследовании контурного интеграла в (4) важно, чтобы резольвента оператора была ограничена. В формулах (15) - (17) экспонента в подинтегральном слагаемом неограниченно растет в случае положительного показателя, т.е. в зависимости от знака $\operatorname{Re}\mu$ и $\operatorname{Im}\mu$(так как $|e^{\mu(x-t)}| = e^{\operatorname{Re}\mu(x-t)}$ и $|e^{i\mu(x-t)}| = e^{-\operatorname{Im}\mu(x-t)}$).

Поэтому в зависимости от знака $\operatorname{Re}\mu$ и $\operatorname{Im}\mu$ мы преобразуем эти интегралы так, чтобы избежать рост резольвенты. Пусть $\operatorname{Re}\mu \geq 0$. Тогда в (15) применим преобразование $\int\limits_0^1 = \int\limits_0^1 - \int\limits_x^1$, в результате которого

$$u_1(x) = e^{\mu x}c_1 - \int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\Phi_1(t)dt,$$

где через c_1 переобозначена константа $c_1 + \int\limits_0^1 e^{-\mu t}\Phi_1(t)dt$. Далее будем обозначать произвольные константы одними и теми же буквами. Аналогичные преобразования будут в случае $\operatorname{Re}\mu \leq 0$ для выражения (16) и в случае $\operatorname{Im}\mu \leq 0$ для (17). Для записи решения в векторной форме пользуемся матричными функциями $V(x,\mu)$ и
$g(x,t,\mu) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\mu), g_2(x,t,\mu), g_3(x,t,\mu))$, где при $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, используя функцию $\varepsilon(x,t)$

$$g_1(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)e^{\mu(x-t)},$$

$$g_2(x,t,\mu) = \varepsilon(t,x)e^{-\mu(x-t)}.$$

В случае $\operatorname{Re}\mu \leq 0$ получаем

$$g_1(x,t,\mu) = \varepsilon(t,x)e^{\mu(x-t)},$$

$$g_2(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)e^{-\mu(x-t)}.$$

При $\operatorname{Im}\mu \geq 0$ будет

$$g_3(x,t,\mu) = \varepsilon(t,x)e^{i\mu(x-t)},$$

а при $\operatorname{Im}\mu \leq 0$ получим

$$g_3(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)e^{i\mu(x-t)}.$$

Таким образом, общее решение (12) имеет вид:

$$u(x,\mu) = V(x,\mu)c + \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)\Phi(t)dt, \tag{18}$$

где $c = (c_1, c_2, c_3)$. Далее, используя (18) и краевое условие (13), получим

$$U_0(u) = U_0(V(x,\mu))c + \int\limits_0^1 U_0(g(x,t,\mu))\Phi(t)dt = 0,$$

откуда, используя веденные обозначения, найдем:

$$c = -\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu\Phi).$$

Подставив константу c в (18), получим утверждение леммы. $\square$

Таким образом, $z(x) = \Gamma u(x,\mu) = \Gamma R_{0\mu}\Phi(x)$, и тем самым по теореме 1

$$[R_\lambda f]_1 = [\Gamma R_{0\mu}\Phi]_1, [R_\lambda f]_2 = [\Gamma R_{0\mu}\Phi]_3 \tag{19}$$

где $[\ ]_k$ означает k-ю компоненту вектора.

§ 3. Исследование резольвенты

Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_k(x) \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$ (непрерывные функции ограниченной вариации) и удовлетворяет условиям

$$f_1(0) = f_2(0) = f_2(1). \tag{20}$$

Исследуем компоненты решения в (14) при условии $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\operatorname{Im}\mu \geq 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Лемма 2. *При* $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\operatorname{Im}\mu \geq 0$ *имеет место формула:*

$$g_\mu\Phi(x) = \frac{1}{\mu}\left\{G_1(x) + G_2(x,\mu) + G_3(x,\mu)\right\},$$

где

$$G_1(x) = (-\Phi_1(x), \Phi_2(x), i\Phi_3(x))^T,$$

$$G_2(x,\mu) = \left(e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1), -e^{-\mu x}\Phi_2(0), -ie^{i\mu x}\Phi_3(0)\right)^T,$$

$$G_3(x,\mu) = \left(-\int_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t), -\int_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t), -i\int_0^x e^{i\mu(x-t)}\,d\Phi_3(t)\right)^T.$$

Доказательство. Имеем, используя интегрирование по частям:

$$(g_\mu\Phi(x))_1 = \int_0^1 g_1(x,t,\mu)\Phi_1(t)\,dt = -\int_x^1 e^{\mu(x-t)}\Phi_1(t)\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{\mu}\left[e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1) - \Phi_1(x) - \int_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t)\right],$$

$$(g_\mu\Phi(x))_2 = \int_0^1 g_2(x,t,\mu)\Phi_2(t)\,dt = \int_0^x e^{-\mu(x-t)}\Phi_2(t)\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{\mu}\left[\Phi_2(x) - e^{-\mu x}\Phi_2(0) - \int_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\right],$$

$$(g_\mu\Phi(x))_3 = \int_0^1 g_3(x,t,\mu)\Phi_1(t)\,dt = \int_0^x e^{i\mu(x-t)}\Phi_3(t)\,dt =$$

$$= \tfrac{i}{\mu}\left[\Phi_3(x) - e^{i\mu x}\Phi_3(0) - \int_0^x e^{i\mu(x-t)}\,d\Phi_3(t)\right],$$

откуда следует утверждение леммы. □

Так как в (12) $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$, $F(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x))^T$, то очевидно утверждение

Лемма 3. *Для компонент вектора* $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x))^T$ *в* (12) *имеют место формулы*

$$\Phi_1(x) = \tfrac{1}{2}\left[-if_1(x) + f_1(1-x)\right],$$

$$\Phi_2(x) = \tfrac{1}{2}\left[-f_1(x) + if_1(1-x)\right],$$

$$\Phi_3(x) = f_2(x).$$

Отсюда и из (20) имеем

Следствие 1. *Для функций* $\Phi_k(x)$ *справедливы соотношения:*

$$\Phi_2(x) = -\Phi_1(1-x), \Phi_1(1) = -\Phi_2(0),$$
$$\Phi_1(0) = \tfrac{1}{2}(-if_1(0) + f_1(1)), \quad \Phi_2(0) = \tfrac{1}{2}(-f_1(0) + if_1(1)),$$
$$\Phi_1(1) = \tfrac{1}{2}(-if_1(1) + f_1(0)), \quad \Phi_2(1) = \tfrac{1}{2}(-f_1(1) + if_1(0)),$$
$$\Phi_3(0) = f_2(0), \quad \Phi_3(1) = f_2(1).$$

Лемма 4. *При* $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\operatorname{Im}\mu \geq 0$ *для компонент* $U_0(g_\mu\Phi)$ *имеют место соотношения*

$$U_0(G_1) = (0,0,0)^T,$$
$$U_0(G_2) = (i - e^{-\mu}) \begin{pmatrix} \Phi_2(0) \\ 0 \\ \Phi_2(0) \end{pmatrix} + i\Phi_3(0) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\mu} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Доказательство. Имеем

$$M_0\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_1\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Учитывая (20) и соотношения из следствия 1 получим:

$$U_0(G_1) = M_0\Gamma G_1(0) + M_1\Gamma G_1(1) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Phi_1(0) \\ \Phi_2(0) \\ i\Phi_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Phi_1(1) \\ \Phi_2(1) \\ i\Phi_3(1) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, из (22) и формулы для G_2 получаем

$$U_0(G_2) = M_0\Gamma G_2(0) + M_1\Gamma G_2(1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\mu}\Phi_1(1) \\ -\Phi_2(0) \\ -i\Phi_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(1) \\ -e^{-\mu}\Phi_2(0) \\ -ie^{i\mu}\Phi_3(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\mu}\Phi_1(1) + i\Phi_2(0) + i\Phi_3(0) \\ -i\Phi_3(0) \\ i\Phi_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\mu}\Phi_3(0) \\ -i\Phi_1(1) - e^{-\mu}\Phi_2(0) \end{pmatrix}.$$

Пользуясь тем, что $\Phi_1(1) = -\Phi_2(0)$, имеем:

$$\begin{pmatrix} -e^{-\mu}\Phi_2(0) + i\Phi_2(0) + i\Phi_3(0) \\ -i\Phi_3(0) + ie^{i\mu}\Phi_3(0) \\ i\Phi_3(0) + i\Phi_2(0) - e^{-\mu}\Phi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2(0)(i - e^{-\mu}) + i\Phi_3(0) \\ i\Phi_3(0)(e^{i\mu} - 1) \\ \Phi_2(0)(i - e^{-\mu}) + i\Phi_3(0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем второе соотношение в (21).

Лемма 5. *Имеет место формула:*

$$\Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} e^{-\mu}(e^{i\mu} - 1) & -i - e^{-\mu} & -i(1 - e^{i\mu}) \\ ie^{\mu}(e^{i\mu} - 1) & -1 - ie^{\mu} & e^{i\mu} - 1 \\ 0 & -e^{\mu} - e^{-\mu} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\delta_0(\mu) = det\Delta_0(\mu) = -(1 - e^{i\mu})(e^{\mu} + e^{-\mu})$.

Доказательство. Имеем

$$\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu)) = M_0\Gamma V(0,\mu) + M_1\Gamma V(1,\mu) =$$

$$= M_0\Gamma + M_1\Gamma\,\mathrm{diag}(e^{\mu}, e^{-\mu}, e^{i\mu}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 - e^{i\mu} \\ -ie^{\mu} & e^{-\mu} & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получается явное выражение для $\delta_0(\mu)$. Вычисляя алгебраические дополнения, получим утверждение леммы. $\square$

Из леммы 5 сразу следует

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu) =$$
$$= \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} e^{\mu(x-1)}(e^{i\mu}-1) & e^{\mu x}(-i-e^{-\mu}) & e^{\mu x} i(e^{i\mu}-1) \\ ie^{\mu(1-x)}(e^{i\mu}-1) & e^{-\mu x}(-1-ie^{\mu}) & e^{-\mu x}(e^{i\mu}-1) \\ 0 & -e^{i\mu x}(e^{\mu}+e^{-\mu}) & 0 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Лемма 6. *Имеют место соотношения*

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\,(G_1) = (0,0,0)^T,$$
$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\,(G_2) = \begin{pmatrix} -\Phi_2(0)e^{\mu(x-1)} \\ -\Phi_2(0)e^{-\mu x} \\ -i\Phi_3(0)e^{i\mu x} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу леммы 4 первое соотношение очевидно. Для второго соотношения из леммы 4 и (23), учитывая вид $\delta_0(\mu)$, получим:

$$V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\,(G_2) =$$
$$= \frac{(i-e^{-\mu})(e^{i\mu}-1)}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} \Phi_2(0)(e^{\mu(x-1)}) + ie^{\mu x}) \\ \Phi_2(0)(ie^{\mu(1-x)} + e^{-\mu x}) \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+\frac{i\Phi_3(0)(e^{i\mu}-1)}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} e^{\mu(x-1)} + e^{\mu x}(-i-e^{-\mu}) + ie^{\mu x} \\ ie^{\mu(1-x)} + e^{-\mu x}(-1-ie^{\mu}) + e^{-\mu x} \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \Phi_2(0) \begin{pmatrix} -e^{\mu(x-1)}) \\ -e^{-\mu x}) \\ 0 \end{pmatrix} + i\Phi_3(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{i\mu x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Phi_2(0)e^{\mu(x-1)} \\ -\Phi_2(0)e^{-\mu x} \\ -i\Phi_3(0)e^{i\mu x} \end{pmatrix}. \square$$

Теорема 2. *Если* $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\operatorname{Im}\mu \geq 0$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_k \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$ *и* $f_1(0) = f_2(0) = f_2(1)$, *то*

$$y_1 = [R_\lambda f]_1 = [\Gamma R_{0\mu}\Phi(x)]_1 = -\frac{f_1(x)}{\lambda} - \\ -\frac{1}{\mu}\left(-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t) + i\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\right) - \\ -\frac{1}{\mu}\left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\begin{pmatrix}\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t)\\ \int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\\ i\int\limits_0^x e^{i\mu(x-t)}\,d\Phi_3(t)\end{pmatrix}\right]_1, \tag{24}$$

$$y_2 = [R_\lambda f]_3 = [\Gamma R_{0\mu}\Phi(x)]_3 = \\ = -\frac{f_2(x)}{\lambda} - \frac{i}{\mu}\int\limits_0^x e^{i\mu(x-t)}\,d\Phi_3(t) - \\ -\frac{1}{\mu}\left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\begin{pmatrix}\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t)\\ \int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\\ i\int\limits_0^x e^{i\mu(x-t)}\,d\Phi_3(t)\end{pmatrix}\right]_3. \tag{25}$$

Доказательство. Имеем в силу (14)

$$[R_\lambda f]_1 = [\Gamma R_{0\mu}\Phi]_1 = \left[\Gamma(g_\mu\Phi(x) - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu\Phi))\right]_1,$$

$$[R_\lambda f]_3 = [\Gamma R_{0\mu}\Phi]_3 = \left[\Gamma(g_\mu\Phi(x) - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu\Phi))\right]_3.$$

Из лемм 2 и 3 получаем:

$$[\Gamma G_1(x)]_1 = -\Phi_1(x) - i\Phi_2(x) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[-if_1(x) + f_1(1-x)\right] - \tfrac{i}{2}\left[-f_1(x) + if_1(1-x)\right] = if_1(x),$$
$$\frac{if_1(x)}{\mu} = -\frac{f_1(x)}{\lambda}.$$

$$[\Gamma G_1(x)]_3 = i\Phi_3(x) = if_2(x)\ ,$$
$$\frac{if_2(x)}{\mu} = -\frac{f_2(x)}{\lambda}.$$

$$[\Gamma G_2(x,\mu)]_1 = e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1) + ie^{-\mu x}\Phi_2(0)$$
$$[\Gamma G_2(x,\mu)]_3 = -ie^{i\mu x}\Phi_3(0).$$

$$[\Gamma G_3(x,\mu)]_1 = \left(-\int_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t) + i\int_0^x e^{-\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\right)\ ,$$
$$[\Gamma G_3(x,\mu)]_3 = \int_0^x e^{i\mu(x-t)}\,d\Phi_3(t)\ .$$

Далее, по лемме 6

$$\left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\left(G_1\right)\right]_1 = \left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\left(G_1\right)\right]_3 = 0,$$
$$\left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\left(G_2\right)\right]_1 = e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1) + ie^{-\mu x}\Phi_2(0)$$

$$\left[\Gamma V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0\left(G_2\right)\right]_3 = ie^{i\mu x}\Phi_3(0).$$

Из этих соотношений следует утверждение леммы. □

§ 4. Аналог теоремы Жордана-Дирихле

Для получения основного результата потребуется следующее утверждение.

Лемма 7. *Если* $\varphi(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ *то при* $\operatorname{Re}\mu \geq 0$

$$\int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) = O(e^{\mu x} e^{-\mu\delta}) + o_\delta(1) e^{\mu x}, \tag{26}$$

$$\int_x^1 e^{-\mu t} d\varphi(t) = O(e^{-\mu x} e^{-\mu\delta}) + o_\delta(1) e^{-\mu x}, \tag{27}$$

а при $\operatorname{Im}\mu \geq 0$

$$\int_0^x e^{-i\mu t} d\varphi(t) = O(e^{-i\mu x} e^{-i\mu\delta}) + o_\delta(1) e^{-i\mu x}, \tag{28}$$

где $o_\delta(1) \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *равномерно по* $x \in [0,1]$, $O(\cdot)$ *не зависит от* δ.

Доказательство. В силу непрерывности φ функция $\bigvee_0^x(\varphi) = \int_0^x |d\varphi(x)|$ также непрерывна на отрезке $[0,1]$ (см. [12], стр. 110) и, следовательно, равномерно непрерывна на нем и $\bigvee_x^{x+\delta}(\varphi) = o_\delta(1)$ для любого $x \in [0,1]$.

Если $x \geq \delta$, то

$$\Big|\int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t)\Big| = \Big|\int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t) + \int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t)\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t)\Big| + \Big|\int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t)\Big|. \tag{29}$$

Рассмотрим первый интеграл в (29). Пользуясь тем, что $|e^{\mu t}| = e^{Re\mu t} \leq e^{Re\mu(x-\delta)} = |e^{\mu(x-\delta)}|$, получаем:

$$\Big|\int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t)\Big| \leq \int_0^{x-\delta} |e^{\mu t}||d\varphi(t)| \leq \int_0^{x-\delta} |e^{\mu(x-\delta)}||d\varphi(t)| =$$

$$= |e^{\mu(x-\delta)}| \int_0^{x-\delta} |d\varphi(t)| \le |e^{\mu(x-\delta)}| \bigvee_0^1(\varphi).$$

Рассмотрим второй интеграл в (29). Пользуясь тем, что $|e^{\mu t}| = e^{Re\mu t} \le e^{Re\mu x} = |e^{\mu x}|$, получаем:

$$\Big| \int_{x-\delta}^{x} e^{\mu t} d\varphi(t) \Big| \le \int_{x-\delta}^{x} |e^{\mu t}||d\varphi(t)| \le |e^{\mu x}| \int_{x-\delta}^{x} |d\varphi(t)| =$$

$$= |e^{\mu x}| \bigvee_{x-\delta}^{x}(\varphi) = |e^{\mu x}| o_\delta(1).$$

Если $x \le \delta$, то

$$\Big| \int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) \Big| \le \int_0^x |e^{\mu t}||d\varphi(t)| \le \int_0^x |e^{\mu x}||d\varphi(t)| =$$

$$= |e^{\mu x}| \int_0^x |d\varphi(t)| \le |e^{\mu x}| \int_0^\delta |d\varphi(t)| = |e^{\mu x}| \bigvee_0^\delta(\varphi).$$

Отсюда и из двух предыдущих оценок следует равенство (26). Оценка (27) получается из (26) с помощью замены переменной $t = 1 - \tau$. В левой части равенства будет

$$\int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) = e^{\mu} \int_{1-x}^{1} e^{-\mu\tau} d\varphi(\tau).$$

Заменив $1 - x$ на y, получим в правой части

$$O(e^{\mu x} e^{-\mu\delta}) + o_\delta(1) e^{\mu x} = O(e^{\mu(1-y)} e^{-\mu\delta}) + o_\delta(1) e^{\mu(1-y)} =$$

$$= e^{\mu} O(e^{-\mu y} e^{-\mu\delta}) + o(1) e^{\mu} e^{-\mu y}.$$

Отсюда и из предыдущего равенства получаем оценку (27). Соотношение (28) получается из (26) с помощью замены $-i\mu = \lambda$. $\square$

Теорема 3. *Если вектор-функция* $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ *такова, что* $f_k(x) \in C[0,1] \bigcap V[0,1]$ *и* $f_1(0) = f_2(0) = f_2(1)$, *то имеет место формула:*

$$\lim_{r\to\infty} ||f(x) - S_r(f,x)|| = 0,$$

где $S_r(x)$ *— частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* L, *включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям* λ_k, *для которых* $\lambda_k \le r$, $||u|| = \max\limits_{k=1,2}\max\limits_{0\le x\le 1}|u_k(x)|$,

Доказательство. Воспользуемся представлением частичной суммы ряда Фурье через контурный интеграл от резольвенты:

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda f)(x)d\lambda.$$

По теореме 2 для первой компоненты, пользуясь интегральной формулой Коши $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{d\lambda}{\lambda} = 1$, получим:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(-\frac{f_1(x)}{\lambda})d\lambda = \frac{f_1(x)}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{d\lambda}{\lambda} = f_1(x). \tag{30}$$

Аналогично для второй компоненты:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(-\frac{f_2(x)}{\lambda})d\lambda = f_2(x). \tag{31}$$

Отсюда имеем:

$$[S_r(f,x)]_1 = f_1(x) + I_1 + I_2 + I_3, \tag{32}$$

где $I_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\frac{1}{\mu}\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_1(t)\right)d\lambda,$

$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\frac{i}{\mu}\int\limits_0^x e^{\mu(x-t)}\,d\Phi_2(t)\right)d\lambda,$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(\frac{i}{\mu} [\Gamma V(x,\mu)\Delta)^{-1}(\mu) U_0(G_3)]_1 \right) d\lambda.$$

Аналогично

$$[S_r(f,x)]_1 = f_2(x) + J_1 + J_2, \tag{33}$$

где $J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{i}{\mu} \int\limits_0^x e^{i\mu(x-t)}\, d\Phi_3(t) d\lambda,$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(\frac{i}{\mu} [\Gamma V(x,\mu)\Delta)^{-1}(\mu) U_0(G_3)]_3 \right) d\lambda.$$

Рассмотрим отдельно каждый из интегралов I_1,I_2, I_3.

Пользуясь тем, что $\mu = -i\lambda$ исследуем

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \Big(-\frac{1}{\mu} \int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) \Big) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ Re\mu \geq 0}} \frac{1}{\lambda} \left(\int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) d\lambda + \int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ Re\mu \leq 0}} \int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) d\lambda \right) \right).$$

Оценим первый интеграл в I_1 по модулю, используя оценки из леммы 7 и обозначая константы одной и той же буквой c :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ Re\mu \geq 0}} \frac{1}{\lambda} e^{\mu x} \int_x^1 e^{-\mu t} d\Phi_1(t) d\lambda \right| \leq$$

$$\leq c \int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ Re\mu \geq 0}} \frac{1}{|\lambda|} |e^{\mu x}| \left| \int_x^1 e^{-\mu t} d\Phi_1(t) \right| |d\lambda| \leq$$

$$\leq c \int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ Re\mu \geq 0}} \frac{1}{r} |e^{\mu x}| \left(|e^{-\mu x}||e^{-\mu\delta}| + o_\delta(1)|e^{-\mu x}| \right) |d\lambda| =$$

$$= \frac{c}{r} \left(\int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ Re\mu \geq 0}} |e^{-\mu\delta}||d\lambda| + o_\delta(1) \int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ Re\mu \geq 0}} |d\lambda| \right) \leq$$

$$\leq \frac{c}{r}\left(\int\limits_{\substack{|\lambda|=r\\ Re\mu\geq 0}} |e^{-\mu\delta}||d\lambda| + o_\delta(1)\right) \tag{34}$$

Интеграл в первом слагаемом ограничен. Докажем это. Так как $\mu = -i\lambda$ и $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, то $Im\lambda \geq 0$. Выполняя замену $\lambda = re^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0,\pi]$, получим:

$$\int\limits_{\substack{|\lambda|=r\\ Re\mu\geq 0}} |e^{-\mu\delta}||d\lambda| = \int\limits_{\substack{|\lambda|=r\\ Re\mu\geq 0}} |e^{-Re\mu\delta}|d\lambda| = r\int\limits_0^\pi e^{-rsin\varphi\delta}d\varphi.$$

Разобьем последний интеграл на два и сделаем замену $\tau = \pi - \varphi$:

$$r\int\limits_0^\pi e^{-rsin\varphi\delta}d\varphi = r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rsin\varphi\delta}d\varphi + r\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-rsin(\pi-\varphi)\delta}d\varphi =$$

$$= r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rsin\varphi\delta}d\varphi + r\int\limits_{\frac{\pi}{2})}^{0} e^{-rsin\tau\delta}(-d\tau) = 2r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rsin\varphi\delta}d\varphi.$$

При $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$ справедлива оценка $sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$, тогда, сделав замену $\xi = r\varphi c$, получим:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rsin\varphi\delta}d\varphi \leq r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rc\phi\delta}d\varphi = \frac{1}{c}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rc\varphi\delta}d(r\varphi c) =$$

$$= \frac{1}{c}\int\limits_0^{\frac{\pi rc}{2}} e^{-\xi\delta}d\xi \leq \frac{1}{c}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi\delta}d\xi \leq c.$$

Отсюда и из (34) следует, что

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{|\lambda|=r\\ Re\mu\geq 0}} \frac{1}{\lambda}e^{\mu x}\int\limits_x^1 e^{-\mu t)}d\Phi_1(t)d\lambda\right| \leq \frac{c}{r} + c\varepsilon.$$

В силу аналогичных оценок при $Re\mu \leq 0$ и произвольности ε следует, что $I_1 \to 0$ при $r \to \infty$. Пользуясь леммой 7 такую же оценку получаем

для I_2, а из-за того, что $V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu) = (1)$, — и для I_3. Аналогичные оценки проводятся для J_1, J_2. Отсюда,из (30) и из (31) следует, что $S_r(f,x) = f(x) + o(1)$. $\square$

Результаты работы опубликованы в [9]–[11].

Список литературы

[1] Бурлуцкая М.Ш. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2011, № 2, С. 64-72

[2] Бурлуцкая М.Ш. Теорема Жордана-Дирихле для функционально-дифференциального оператора с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2013. Т.13., вып. 3. С. 9-14.

[3] Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для фнкционально-дифференциальных операторов//Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. вып.4 С.3-10.

[4] Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Докл. РАН. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 15–17.

[5] Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // Докл. РАН. – 2007. – Т. 414, № 4. – С. 1309–1312.

[6] Винер И. Я. Дифференциальные уравнения с инволюциями / И. Я. Винер // Дифференц. уравнения/ —- 1969. —- Т. 5, № 6. —- С. 1131–1137.

[7] Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. : Физика. Математика . — Воронеж, 2010 . — № 2. — С. 26-33.

[8] Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011, том 51, № 12, С. 2233–2246

[9] Бирюкова Е.И. Об операторах с инволюцией // Современные методы теории краевых задач: Материалы Международной конференции Воронежская математическая школа «Понтрягинские чтения» —- XXVIII. – Воронеж, 2017. —- С. 41-42

[10] Бирюкова Е.И. О резольвенте одного функционально – дифференциального оператора инволюцией // Третий международный молодежный симпозиум «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения». – Воронеж, 2017. – С. 20-22.

[11] Бирюкова Е.И.О краевой задаче для резольвенты функционально-дифференциального оператора с инволютивным отклонением // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2018». – Воронеж, 2018. – С. 160-163.

[12] Дьяченко М.И. Мера и интеграл / М.И. Дьяченко, П.Л. Ульянов. — М.: Факториал, 1998. — 160 с.

[13] Wiener J. Generalized solutions of functional-differential equations / J. Wiener. — World Scientific. — 1993. — 410 p.

[14] Платонов С.С. Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов / С.С. Платонов // Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Сер. мат. — 2004. — Вып. 11. — С. 15–35.

[15] Бурлуцкая М. Ш. О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Диффер. уравн. — 2007. — Т. 43, № 12. — С. 1597–1605.

[16] Бурлуцкая М.Ш. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций одного класса функционально-дифференциальных операторов на графе / М.Ш. Бурлуцкая // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 763–771.

[17] Kritskov L.V. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution / L.V. Kritskov, A.M. Sarsenbi // Differential Equations. — 2015. — Vol. 51, № 8. — P. 984–990.

[18] Baskakov A.G. Spectral analysis of a differential operator with an involution / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, E.Yu. Romanova // J. Evolut. Equat. — 2017. — V. 17. — P. 669–684.

[19] Расулов М.Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений / М.Л. Расулов. — М.: Наука, 1964. — 464 с.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Кравченко Александра Андреевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Исследование сложности аппроксимации случайных полей большой параметрической размерности» являются: Доказательство леммы 3 и доказательство теорем 5, 7, 10, 12, 14 и 15.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 сентября 2019 г. по 01 мая 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: аппроксимация случайных полей, approximation of random fields. В выдаче поисковиков было исследовано 21 статья, 3 монографии, 3 книги и 1 диссертация (список см. в Разделе 6 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [10], [17] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Была проведена серия консультаций с моим научным руководителем Хартовым Алексеем Андреевичем, доцентом факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО.
- Проведена переписка с профессором факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО Поповым Игорем Юрьевичем.
- Проведено выступление на Конгрессе молодых ученых Университета ИТМО.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работу участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоялась 10.06.2020. На Смотр представлен итоговый текст работы.

Кравченко Александр Андреевич
31 мая 2021 г.
Санкт-Петербург, Россия

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

“Национальный исследовательский университет ИТМО”

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Автор Кравченко Александр Андреевич _____
(Фамилия, Имя, Отчество) (Подпись)

Направление подготовки (специальность)_____
(код, наименование)
01.04.02 Прикладная математика

Квалификация _____Магистр
(бакалавр, магистр, инженер)*

Руководитель Хартов А.А., к.физ-мат.н., доцент _____
(Фамилия, И., О., ученое звание, степень) (Подпись)

Санкт-Петербург, 2020 г.

1301

Обучающийся_____Кравченко Александр Андреевич_____
(ФИО полностью)

Группа___R42951_____Факультет/институт/кластер_____СУиР_____

Направленность (профиль), специализация _Математическое моделирование_____
_____

Консультант (ы):

а) _____ _____
(Фамилия, И., О., ученое звание, степень) (Подпись)

б) _____ _____
(Фамилия, И., О., ученое звание, степень) (Подпись)

ВКР принята “____”_____20 ____г.

Оригинальность ВКР _____%

ВКР выполнена с оценкой _____

Дата защиты “____”_____20 ____г.

Секретарь ГЭК __Фалеева Мария Петровна_____ _____
(ФИО) (подпись)

Листов хранения _____

Демонстрационных материалов/Чертежей хранения _____

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО"

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОП

__Попов И.Ю.__ _____

(Фамилия, И.О.) (подпись)

«____» «_____» 2020_ г.

З А Д А Н И Е
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ

Обучающийся_____Кравченко Александр Андреевич_____

(ФИО полностью)

Группа____R42951____**Факультет/институт/кластер**____СУиР_____

Квалификация _____Магистр_____

(магистр, инженер, бакалавр)**

Направление подготовки _____01.04.02_____

(код, название направления подготовки)

Направленность (профиль) образовательной программы

_____Математическое моделирование_____

Специализация _____Математическое моделирование и информационные технологии___

Тема ВКР __«Исследование сложности аппроксимации случайных полей большой параметрической размерности»_____

Руководитель__Хартов Алексей Андреевич, к.физ-мат.н., доцент, факультет систем управления и робототехники, Университет ИТМО_____

(ФИО полностью, место работы, должность, ученая степень, ученое звание)

2 Срок сдачи студентом законченной работы до «__20_» «___мая____» 2020_ г.

3 Техническое задание и исходные данные к работе Получить оценки сложности аппроксимации для различных видов случайных полей большой параметрической размерности. Исходные данные: литература, посвящённая случайным полям, результаты других авторов, методические указания написания ВКР.

1303

4 Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов)

Введение

1 Основы теории многопараметрических задач аппроксимации

2 Интегрированные процессы

3 Оценка сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений

4 Оценка сложности аппроксимации тензорной степени

5 Заключение

5 Перечень графического материала (с указанием обязательного материала)

Формулы; презентация проделанной работы в LaTeX

6 Исходные материалы и пособия

A.A. Khartov, Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements, Journal of Complexity 31, 835–866.

N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, Regular variation.

E. Novak, I. H. Sloan, J. F. Traub, H. Wozniakowski, Essays on the Complexity ′ of Continuous Problems, EMS, Zurich.

E. Novak, H. Wozniakowski, ′ Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information, EMS Tracts Math. 6, EMS, Zurich.

E. Novak, H. Wozniakowski, ′ Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals, EMS Tracts Math. 12, EMS, Zurich

E. Novak, H. Wozniakowski, ′ Tractability of Multivariate Problems. Volume III: Standard Information for Operators, EMS Tracts Math. 18, EMS, Zurich

J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Wozniakowski, ′ Information, Uncertainty, Complexity,Addison-Wasley, Reading MA.

J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H.Wozniakowski, ′ Information-Based Complexity, Academic Press, New York.

J. F. Traub, H. Wozniakowski, ′ A general theory of optimal algorithms, Academic Press, NewYork.

M. A. Lifshits , E. V. Tulyakova . Curse of dimensionality in approximation of random field, probability and mathematical statistics, Vol. 26, Fasc. 1, 97–112.

7 Дата выдачи задания «_21_» «____января___ ___» 2020_ г.

Руководитель ВКР_Хартов А.А._ _____
(подпись)

Задание принял к исполнению_Кравченко А.А._____ «____» «_____» 2020_ г.
(подпись)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО"

АННОТАЦИЯ

ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Обучающийся Кравченко Александр Андреевич
(ФИО)

Наименование темы ВКР: «Исследование сложности аппроксимации случайных полей большой параметрической размерности»

Наименование организации, где выполнена ВКР Университет ИТМО

ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1 Цель исследования Нахождение оценок сложности аппроксимации для различных случайных полей большой параметрической размерности

2 Задачи, решаемые в ВКР Для последовательности тензорных степеней ищутся необходимые и достаточные условия для существования некоторой оценки сложности аппроксимации при широких условиях на собственные числа ковариационного оператора случайного процесса и для последовательности тензорных произведений интегрированного эйлеровского процесса ищется асимптотика сложности аппроксимации при широких условиях на собственные числа ковариационного оператора процесса

3 Число источников, использованных при составлении обзора 19

4 Полное число источников, использованных в работе 28

5 В том числе источников по годам

Отечественных			**Иностранных**		
Последние 5 лет	От 5 до 10 лет	Более 10 лет	Последние 5 лет	От 5 до 10 лет	Более 10 лет
	1	1	3	8	15

6 Использование информационных ресурсов Internet Нет
(Да, нет, число ссылок в списке литературы)

7 Использование современных пакетов компьютерных программ и технологий (Указать, какие именно, и в каком разделе работы)

Пакеты компьютерных программ и технологий	**Раздел работы**

8 Краткая характеристика полученных результатов Были найдены необходимые и достаточные условия для существования некоторой оценки сложности аппроксимации тензорной степени при широких условиях на собственные числа и приведены конкретные примеры случайных процессов; была найдена асимптотика сложности аппроксимации тензорных произведений интегрированного эйлеровского процесса при широких условиях на собственные числа

9 Полученные гранты, при выполнении работы _____
(Название гранта)

10 Наличие публикаций и выступлений на конференциях по теме выпускной работы___Да__
(Да, нет)

а) 1. Кравченко, А.А. Аппроксимация случайных полей, зависящих от большого числа параметров/ Сборник работ// - 2019. - С. 327-364 - Режим доступа:_____ https://nnov.hse.ru/data/2019/06/14/1486230103/Sbornik_VKR_matematikov_2019_bez_otsenok_ver3.pdf

2. Кравченко А.А. Аппроксимация случайных полей, зависящих от большого числа_____ параметров // Сборник тезисов докладов конгресса молодых ученых. Электронное издание. — Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2019.
(Библиографическое описание публикаций)

б) 1. Кравченко, А.А. Аппроксимация случайных полей, зависящих от большого числа параметров // VIII конгресс молодых учёных, 2019 год._____
(Библиографическое описание выступлений на конференциях)

Обучающийся__Кравченко Александр Андреевич_ _____
(ФИО) (подпись)

Руководитель ВКР_Хартов Алексей Андреевич_____
(ФИО) (подпись)

“_____” _____2020_г.

Содержание

Введение **5**

1 Основы теории многопараметрических задач аппроксимации **9**

1.1 Теория информационной сложности 9

1.2 Сложность аппроксимации 11

1.3 Трактабильность 15

1.4 Асимптотический анализ 17

1.5 Тензорные поля 19

1.6 Примеры случайных полей тензорного типа 20

2 Интегрированные процессы **24**

2.1 Определение интегрированного винеровского процесса 24

2.2 Результаты для интегрированного винеровского процесса 25

2.3 Определение интегрированного эйлеровского процесса 26

2.4 Результаты для интегрированного эйлеровского процесса 27

3 Оценка сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений **30**

3.1 Случай предельнопостоянной последовательности r_j 30

3.2 Критерий ограниченности сложности аппроксимации 33

3.3 Случай $r_j \to \infty$ 35

3.3.1 Теоретические основы 35

3.3.2 Первый случай 37

3.3.3 Второй случай 42

4 Оценка сложности аппроксимации тензорной степени **49**

4.1 Полученные результаты 49

4.2 Примеры 59

5 Заключение **64**

1307

Введение

Рассмотрим случайное поле $Y(t), t \in T$, имеющее траектории в некотором нормированном пространстве $(Q, \|\cdot\|_Q)$, где T — некоторое параметрическое множество. Теоретический и практический интерес представляет аппроксимация поля Y полями конечного ранга:

$$\widetilde{Y}^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} l_k(Y)\psi_k(t), \quad t \in T,\, n \in \mathbb{N},$$

где $l_k(Y)$ — значения линейных функционалов от Y, ψ_k — элементы пространства Q. Интерес для исследования представляет следующий вопрос. Какое следует выбирать n для того, чтобы ошибка аппроксимации не превосходила заданное значение? Для того чтобы формализовать постановку данной задачи, вводится величина, которая называется *сложностью аппроксимации в среднем* (далее мы будем называть её просто *сложность аппроксимации*).

$$n^Y(\varepsilon) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N} : \inf_{\widetilde{Y}^{(n)}} \mathbb{E}\,\|Y - \widetilde{Y}^{(n)}\|_Q^2 \leqslant \varepsilon^2 \mathbb{E}\,\|Y\|_Q^2\bigr\}, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где ε называется *порогом ошибки*.

Задачи, связанные с рассмотренными выше объектами, возникли на основе *теории информационной сложности*. Основополагающими в данной науке являются монографии [7] -[9].

В настоящее время являются актуальными так называемые многопараметрические задачи. В рамках таких задач рассматриваются аппроксимации различных объектов, которые зависят от большого числа параметров. Это необходимо принимать во внимание в процессе их решения. В фундаментальной работе Новака и Х. Вожняковского, состоящей из трёх томов, которая называется «Tractability of Multivariate Problems» [4]-[6], собрана основная теоретическая информация по задачам данного типа.

В данной работе рассматривается многопараметрическая задача аппроксимации случайного поля $Y(t)$, $t \in T$. То есть такая задача, при которой размерность параметрического множества T велика. С точки зрения формального подхода к задаче, это значит следующее. Для того чтобы учитывать при аппроксимации параметрическую размерность случайного поля, нужно рассмат-

1308

ривать не одно поле $Y(t)$, $t \in T$, а некоторую последовательность случайных полей $Y_d(t)$, $t \in T_d, d \in \mathbb{N}$, где T_d — параметрическое множество для Y_d. При этом каждое Y_d имеет траектории в некотором нормированном пространстве $(Q_d, \|\cdot\|_{Q_d})$, $d \in \mathbb{N}$.

Из такого подхода следует, что сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$, $d \in \mathbb{N}$, необходимо рассматривать как функцию от двух переменных (порога ошибки и размерности параметрического множества) и изучать характер её роста по ним.

В такой общей постановке задача не может быть решена без дополнительной конкретизации. Мы сосредоточимся на случае, когда каждое Y_d имеет траектории в пространстве $L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Характер роста $n^{Y_d}(\varepsilon)$ здесь будет зависеть от ковариационной структуры последовательности случайных полей Y_d.

При изучении оценок сложности аппроксимации в рамках такой постановки задачи активно используется понятие *трактабильности*. Суть данного подхода заключается следующем. Сначала выбирается некая мажоранта, а далее ищутся условия на ковариационные параметры последовательности случайных полей, при которых данная мажоранта является оценкой для сложности аппроксимации. В качестве ковариационных параметров, как правило, рассматриваются собственные числа ковариационного оператора случайного поля. Для наглядности приведём несколько определений из теории трактабильности.

Последовательность случайных полей мы будем называть *W-трактабильной*, если сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ растёт медленнее экспоненты как по d, так и по ε^{-1}. В противном случае мы будем называть последовательность случайных полей *нетрактабильной*. Для трактабильных последовательностей существует определённая классификация по характеру роста $n^{Y_d}(\varepsilon)$. Например, последовательность случайных полей называется *P-трактабильной*, если сложность аппроксимации растёт не быстрее, чем полином от d и ε^{-1} с некоторыми показателями.

В данной работе для решения одной и задач будет рассмотрен похожий метод. Как и при изучении трактабильности, будут искаться необходимые и достаточные условия на ковариационные параметры последовательности случайных полей для реализации некоторой оценки на сложность аппроксимации.

1309

Также имеет место следующий подход к решению поставленной задачи. осуществлять оценку сложности аппроксимации асимптотически, фиксируя один из двух параметров. При $\varepsilon \to 0$ и фиксированном $d \in \mathbb{N}$ мы фактически имеем немногопараметрическую задачу. В данном случае хорошо известна техника получения оценок $n^{Y_d}(\varepsilon)$. Например, довольно обширные результаты представлены в статье Лифшица М.А. и Туляковой Е.В. [10].

Интересной асимптотической задачей является рассмотрение $n^{Y_d}(\varepsilon)$ при сколь угодно малом, но фиксированном ε и $d \to \infty$. В настоящее время она активно изучается для разных типов случайных полей (см. [15] - [17]).

В данной работе для решения одной из задач будет использоваться асимптотический анализ при фиксированном ε и $d \to \infty$.

Особый интерес при изучении многопараметрических задач представляют случайные поля *тензорного типа* как естественные многопараметрические аналоги случайных процессов. Ковариация таких полей конструируется как произведение ковариаций неких случайных процессов. Если ковариации процессов одинаковы и совпадают с ковариацией некоторого процесса X, то случайное поле называется *тензорной степенью* случайного процесса X. Данный класс довольно обширен и включает большинство широко использующихся в различных областях математики и физики процессов. В частности, самыми известными его представителями являются *броуновский лист* (тензорная степень винеровского процесса) и *броуновская подушка* (тензорная степень броуновского моста). В качестве примера тензорного произведения можно привести случайные поля, построенные на *интегрированных эйлеровских* и *интегрированных винеровских* процессах. Исследования сложности аппроксимации таких полей являются основной частью представленной работы. Определим более конкретно рассматриваемые в данной работе задачи.

В данной магистерской работе решаются следующие задачи:

1) Рассматривается последовательность тензорных степеней Y_d, $d \in \mathbb{N}$, случайного процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$. Далее для данной последовательности случайных полей ищутся необходимые и достаточные условия для существования некоторой оценки сложности аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$, при широких условиях на собственные числа ковариационного оператора процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$. Далее приводятся примеры процессов, которые

1310

удовлетворяют поставленным условиям.

2) Рассматривается последовательность тензорных произведений $\mathbb{E}_d$, $d \in \mathbb{N}$, интегрированного эйлеровского процесса $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$. Далее для данной последовательности случайных полей ищется асимптотика сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$, при широких условиях на собственные числа ковариационного оператора процесса $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$ и при различном поведении последовательности при $j \to \infty$.

Наконец, приведём краткий структурный обзор работы.

В первой главе приводится общая теория информационной сложности, лежащая в основе проведённых исследований, вводится определение сложности аппроксимации и рассматриваются подходы к её оценке, подробно раскрывается понятие трактабильности и асимптотического анализа, приводится подробное описание случайных полей тензорного типа и описываются различные представители такого вида случайных полей.

Во второй главе рассматриваются интегрированные процессы, приводится их определение и интересные свойства. Далее рассматриваются результаты исследования сложности аппроксимации последовательности случайных полей, построенных на основе интегрированных процессов.

В третьей главе формулируется и доказывается ряд теорем об оценке сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений, в основе которых лежит интегрированный эйлеровский процесс.

Наконец, в четвёртой главе доказывается теорема об оценке сложности аппроксимации для произвольной последовательности тензорных степеней и приводятся примеры, удовлетворяющие данной оценке.

В заключении в общем виде перечислены основные результаты, которые были достигнуты в данной магистерской работе. В конце работы представлен список используемой литературы.

1311

1 Основы теории многопараметрических задач аппроксимации

В этой главе рассказывается об основных понятиях и достижениях теории информационной сложности на основе монографий [3] - [6], вводится понятие сложности аппроксимации в общем случае и в случае гильбертова пространства и приводится обзор различных подходов к её изучению, включающих в себя понятия трактабильности и асимптотического анализа. Также приводится формальное определение тензорного произведения случайных процессов и приводятся наиболее важные и интересные представители данного класса случайных полей и описываются характеристики их ковариационного оператора.

1.1 Теория информационной сложности

Рассмотрим общую задачу. Пусть Q и H — это нормированные пространства функций, которые действуют из подмножества $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$. Задача состоит в том, чтобы для любой такой функции $f \in Q$, не превышая некоторого *порога ошибки* ε, решить задачу аппроксимации Sf некоторого оператора $S : Q \to H$ с помощью конечного числа значений функционалов от данной функции. Оператор S называется *оператором решения*. Приведём два примера оператора решения. В качестве оператора решения можно рассматривать многомерный интеграл.

$$Sf = \int\limits_{[0,1]^d} f(x)dx, \quad d \in \mathbb{N}.$$

В данном случае Q — подпространство $L_1([0,1]^d)$,$d \in N$, а $H = \mathbb{R}$. В качестве второго примера оператора решения можно рассматривать оператор вложения. При этом разумно выбрать $Q = C([0,1]^d)$, $d \in N$, а $H = L_2([0,1]^d)$,$d \in N$.

Востребованность и важность приближённого вычисления Sf обусловлена тем, что в реальных задачах, которые встречаются различных научных областях, пространство Q имеет бесконечную размерность. Это влечёт за собой следующую проблему. Функция f не может быть напрямую рассчитана на компьютере. Для формализации задачи вводится следующее понятие. Под $I_n(f)$

1312

будем понимать конечную информацию о $f \in Q$. То есть такой конечный набор действительных чисел, что:

$$I_n(f) := (y_1(f), y_2(f), \ldots, y_n(f)) \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $y_i(f)$ представляют собой значения некоторых функционалов от f. Вычисление значений $y_i(f)$ называется *информационной операцией*.

С точки зрения вышеизложенных терминов задача аппроксимации значений S в пределах ε представляет собой поиск информации $I_n : Q \to \mathbb{R}^n$ с соответствующим $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ и отображения $\mathcal{A}_n : \mathbb{R}^n \to H$, при которых значения оператора $\widetilde{\mathbf{S}}_n := \mathcal{A}_n \circ I_n$ отличаются от значений S не больше, чем на ε, в терминах некоторой метрики.

Оператор $\widetilde{\mathbf{S}}_n$ называется *аппроксимацией ранга* n оператора S, а отображение $\mathcal{A}_n$ – алгоритмом аппроксимации $\widetilde{\mathbf{S}}_n$. Минимальный ранг $n = n(\varepsilon)$ носит название *информационной сложности*. Данная величина является центральным понятием, которое изучается в *теории информационной сложности*. Главные аспекты данной теории изложены в монографиях [7]-[9].

Рассмотрим более подробно задачу, связанную с информационными операциями при приближённых вычислениях оператора решения S. Предположим, что у нас есть функция $f \in Q$. Пусть $\widetilde{\mathbf{S}}_{n_{inf}} = \mathcal{A}_{n_{inf}} \circ I_{n_{inf}}$ — аппроксимация оператора S в пределах ε с соответствующим рангом $n_{inf} = n_{inf}(\varepsilon) \geqslant n(\varepsilon)$, где $n(\varepsilon)$ — информационная сложность.

В рамках данной модели для аппроксимации Sf, $f \in Q$ необходимо совершить n_{inf} информационных операций. После их осуществления будет получен вектор $I_{n_{inf}}(f)$. Для получения значения $\mathcal{A}_{n_{inf}} \circ I_{n_{inf}}(f)$ необходимо совершить n_{ari} арифметических операций и n_{com} операций сравнения. Таким образом, *полная стоимость* вычислений имеет вид

$$n_{total} = k_{inf} n_{inf} + k_{ar} n_{ar} + k_{com} n_{com},$$

где коэффициенты k_{inf}, k_{ar}, k_{com} несут смысл стоимости одной из соответсвующих операций. $k_{inf} n_{inf}$ называется *информационной стоимостью*, а $k_{ar} n_{ar} + k_{com} n_{com}$ *— комбинаторной стоимостью*.

В большинстве реальных задач комбинаторной стоимостью можно прене-

1313

бречь, так как её расчёт, как правило, занимает сильно меньше времени, чем для информационной стоимости, и не требует больших объёмов памяти. Это является причиной важности изучения информационной стоимости, ведь она вносит определяющий фактор в общую вычислительную сложность той или иной практической задачи. Более подробный анализ представлен в монографии [4].

1.2 Сложность аппроксимации

Давайте более формально подойдём к определению понятия информационной сложности. Есть несколько подходов, приводящих к различным постановкам. В рамках данной работы мы рассмотрим подход *в среднем*.

Информационная сложность называется *сложностью аппроксимации в среднем* (в дальнейшем будем назвать её просто сложностью аппроксимации) оператора S при заданном пороге ошибки. Существуют достаточно много результатов и по другим постановкам задачи аппроксимации. С ним, а также их теоретическими аспектами, можно ознакомиться в книгах [4] и [5].

Перед тем как дать строгое определение данной величине, введём несколько вспомогательных обозначений. Рассмотрим сепарабельное банахово пространство Q, элементами которого являются функции, определённые на некотором измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Также введём сепарабельное гильбертово пространство H, имеющее норму $\|\cdot\|_H$. Зададим гауссовскую меру μ с нулевым средним на борелевских подмножествах пространства Q. Положим, что

$$e(S,\mu) := \left(\int\limits_Q \|Sf\|_H^2 \mu(df) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Рассмотрим $\mathbf{I}_n$. Пусть это семейство всех возможных отображений $I_n : Q \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, в рамках *стандартной информации*. А за $\mathbf{A}_n$ — семейство всех измеримых отображений $\mathcal{A}_n : \mathbb{R}^n \to H$. В дальнейшем будем осуществлять аппроксимацию S операторами $\widetilde{S}_n$ из следующего семейства:

$$\widetilde{\mathbf{S}}_n := \{\mathcal{A}_n \circ I_n : I_n \in \mathbf{I}_n, \mathcal{A}_n \in \mathbf{A}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Далее введём ряд определений, которые будут основными объектами исследования в представленной работе. *Сложностью аппроксимации* оператора S при пороге ошибки $\varepsilon \in (0,1)$ называется следующая величина:

$$n(\varepsilon) := \min\{n \in \mathbb{N} : \exists \widetilde{S}_n \in \widetilde{\mathbf{S}}_n \;\; e(\widetilde{S}_n) \leqslant \varepsilon e(S,\mu)\},$$

где

$$e(\widetilde{S}_n) := \left(\int\limits_Q \|Sf - \widetilde{S}_n f\|_H^2 \mu(df) \right)^{\frac{1}{2}}$$

представляет из себя ошибку в среднем для $\widetilde{S}_n$.

В данной работе будет рассматриваться решение поставленных задач с помощью *оптимальных конечноранговых аппроксимаций*. Они играют важную роль в данной области математики. Конкретный вид данных оптимальных конечноранговых аппроксимаций также зависит от постановки задачи. Мы приведём определения этого термина:

Оптимальной n-ранговой аппроксимацией для S называется $\widetilde{S}_n \in \widetilde{\mathbf{S}}_n$, для которого выполняется формула

$$e(\widetilde{S}_n) = \inf_{I_n' \in \mathbf{I}_n} \inf_{\mathcal{A}_n' \in \mathbf{A}_n} e(\mathcal{A}_n' \circ I_n').$$

В таком случае, при условии разрешимости задачи, получаем:

$$n(\varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : e(\widetilde{S}_n^{)} \leqslant \varepsilon e(S,\mu)\}, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{1}$$

Делая дальнейшие выводы из выражения (1), констатируем, что для нахождения $n(\varepsilon)$ необходимо исследовать последовательности оптимальных конечноранговых аппроксимаций операторов $(\widetilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Это ведёт к тому, что для дальнейшего решения задачи нужна дополнительная информация о структуре оператора S. В нашей работе мы сосредоточимся на линейном случае, который очень часто встречается в различных задачах. Особый интерес для исследования представляет изучение многопараметрического случая.

В данной работе мы сосредоточимся на многопараметрическом случае.

1315

С точки зрения формального подхода к решению задачи, это означает, что мы будем рассматривать последовательности случайных полей Y_d, $t \in T_d$, $d \in \mathbb{N}$, имеющих траектории в нормированных пространствах $(Q_d, \|\cdot\|_{Q_d})$, $d \in \mathbb{N}$. То есть в многопараметрическом случае мы предполагаем, что размерность множества T_d велика. Исходя из этого, для каждого случайного поля Y_d мы рассматриваем сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1), d \in \mathbb{N}$, которая зависит от двух переменных.

В представленной работе рассматривается случай гильбертова пространства, так как в общей постановке не могут быть получены какие-то конкретные результаты.

Сформулируем определение сложности аппроксимации в случае, когда каждое случайное поле имеет траектории в $L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность случайных полей $Y_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, с траекториями в пространствах $L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Предполагаем, что каждое Y_d имеет нулевое среднее и $\mathbb{E}\,||Y_d||^2_{2,d} < \infty$, $d \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_{2,d}$ является нормой в пространстве $L_2([0,1]^d)$.

При данной постановке задачи мы можем рассматривать $\mathcal{K}^{Y_d}$ – ковариационный оператор случайного поля Y_d. Для этого объекта верно следующее:

$$(f, \mathcal{K}^{Y_d} g) = cov((f, Y_d), (g, Y_d)), \qquad f, g \in L_2([0,1]^d).$$

$\mathcal{K}^{Y_d}$ – это интегральный оператор, в качестве ядра которого выступает ковариационная функция. То есть

$$\mathcal{K}^{Y_d}(f(t)) = \int_0^1 K^{Y_d}(t,s) f(s) ds, \quad s, t \in [0,1]^d,$$

где $K^{Y_d}(t,s) = cov(Y_d(t), Y_d(s)), t, s \in [0,1]^d$ — ковариация случайного поля Y_d. Предполагается, что она всегда непрерывна.

Известно, что для любого случайного поля Y_d справедливо *разложение Кархунена-Лоэва*:

$$Y_d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{Y_d})^{1/2} \xi_k^{Y_d} \psi_k^{Y_d}(t), \quad t \in [0,1]^d, \tag{2}$$

1316

где $(\xi_k^{Y_d})_{k\in\mathbb{N}}$ — это независимые случайные величины, удовлетворяющие нормальному закону, со средним 0 и дисперсией 1, $(\lambda_k^{Y_d})_{k\in\mathbb{N}}$ — это невозрастающая последовательность собственных чисел и $(\psi_k^{Y_d})_{k\in\mathbb{N}}$ — это соответствующая последовательность собственных функций оператора $\mathcal{K}^{Y_d}$ поля Y_d с конечным следом

$$\Lambda^{Y_d} := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{Y_d}.$$

Рассмотрим частичные суммы данного разложения:

$$Y_d^{(n)}(t) := \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{Y_d})^{1/2}\, \xi_k^{Y_d}\, \psi_k^{Y_d}(t), \quad t \in [0,1]^d. \tag{3}$$

Данное выражение (см. [11], стр. 51) – это оптимальная n-ранговая аппроксимация для Y_d в $L_2([0,1]^d)$. То есть верна формула:

$$\inf_{\widetilde{Y}_d^{(n)}} \mathbb{E}\,\|Y_d - \widetilde{Y}_d^{(n)}\|_{2,d}^2 = \mathbb{E}\,\|Y_d - Y_d^{(n)}\|_{2,d}^2.$$

Исходя из этого, выражение для сложности аппроксимации в случае пространства $L_2([0,1]^d)$ приобретает вид:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \;=\; \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\,\|Y_d - Y_d^{(n)}\|_{2,d}^2 \leqslant \varepsilon^2\, \mathbb{E}\,\|Y_d\|_{2,d}^2\Big\}$$

для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$. Выражение $\mathbb{E}\,\|Y_d - Y_d^{(n)}\|_{2,d}^2$ следует понимать как среднеквадратичную ошибку аппроксимации.

Для постулирования условий на последовательности случайных полей очень полезным является спектральное выражение для сложности аппроксимации. Исходя из (2) и (3), имеем:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \;=\; \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{Y_d} \leqslant \varepsilon^2\, \Lambda^{Y_d}\Big\} \tag{4}$$

$$\;=\; \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{Y_d} \geqslant (1-\varepsilon^2)\, \Lambda^{Y_d}\Big\}. \tag{5}$$

Данные выражения можно написать в немного иной (чуть более удобном для

1317

исследования) виде:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{Y_d} \leqslant \varepsilon^2\Big\} \tag{6}$$

$$= \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k^{Y_d} \geqslant (1-\varepsilon^2)\Big\}, \tag{7}$$

где

$$\overline{\lambda}_k^{Y_d} := \frac{\lambda_k^{Y_d}}{\Lambda^{Y_d}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

следует понимать как нормированные собственные числа ковариационного оператора, который соответствует Y_d.

Существует несколько методов изучения сложности аппроксимации, в рамках который получено много важных и актуальных результатов. Далее мы рассмотрим подходы, основанные на теории трактабильности и асимптотическом анализе. Эти подходы являются основными в данной области, стоящей на стыке теории вероятностей и теории информации.

1.3 Трактабильность

Рассмотрим теорию трактабильности и полученные в её рамках результаты. Данный подход является довольно распространённым в задачах оценки сложности аппроксимации. Приведем основные типы трактабильности для последовательностей случайных полей $Y_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих вышеперечисленным условиям. Трактабильность изучается не только для постановки задачи в среднем, но и в других случаях. Например, теория по трактабильности для задач с вероятностной постановкой представлена в следующей монографии ([5], стр. 298-300).

Последовательность случайных полей Y_d, $d \in \mathbb{N}$ называется *W-трактабильной*, если

$$\lim_{d+\varepsilon^{-1}\to\infty} \frac{\ln_+ n^{X_d}(\varepsilon)}{d+\varepsilon^{-1}} = 0.$$

В классе W-трактабильных последовательностей случайных полей выделяют ряд подклассов. Последовательность случайных полей Y_d, $d \in \mathbb{N}$, называется

1318

QP-трактабильной, если $\exists\, C > 0$, $s \geqslant 0$:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant C\, \exp\bigl\{s(1 + \ln \varepsilon^{-1}) \ln_+ d\bigr\}, \quad d \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in (0,1).$$

Последовательность случайных полей Y_d, $d \in \mathbb{N}$, называется *P-трактабильной*, если $\exists\, C > 0$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$:

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant C\, d^r \varepsilon^{-s}, \quad d \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in (0,1).$$

Если последовательность не принадлежит к классу W-трактабильных последовательностей, то её называют нетрактабильной. Например, если $n^{X_d}(\varepsilon)$ растёт экспоненциально по d или быстрее, то говорят, что она имеет *проклятие размерности*. Мы привели основные и самые важные классы трактабильности, но существуют и представляют интерес для учёных и другие их представители.

Теперь, когда мы привели примеры различных классов трактабильности, рассмотрим в общих чертах алгоритм, по которому происходят исследования в рамках данной концепции. В теории трактабильности для получения оценок на сложность аппроксимации, как правило, ищут необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности случайных полей к тому или иному классу трактабильности. Поведение сложности аппроксимации для конкретного класса трактабильности обычно хорошо исследовано, поэтому этого достаточно для решения поставленной аппроксимационной задачи.

Приведём некоторые результаты, полученные данным методом, в виде критериев. Нижепредставленные результаты были достигнуты в работах [4], [18] - [20].

Для W-трактабильности достаточно

$$\exists\, \tau \in (0,1)\ :\ \lim_{d\to\infty} \frac{1}{d} \ln\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\lambda}_k^{Y_d})^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = 0.$$

Для QP-трактабильность необходимо и достаточно

$$\exists\, \gamma \in (0,1)\ :\ \sup_{d\in\mathbb{N}} \Bigl\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\lambda}_k^{Y_d})^{1-\frac{\gamma}{\ln_+ d}} \Bigr\} < \infty.$$

1319

Для P-трактабильности необходимо и достаточно

$$\exists\, \tau \in (0,1), \exists\, r \geqslant 0 \,:\, \sup_{d\in\mathbb{N}}\Big\{\frac{1}{d^r}\sum_{k=1}^{\infty}(\overline{\lambda}_k^{Y_d})^{\tau}\Big\} < \infty.$$

1.4 Асимптотический анализ

Рассмотрим теорию асимптотического анализа и полученные на её основе результаты. Данный подход, как и теория трактабильности, является довольно распространённым в задачах оценки сложности аппроксимации. Есть немалое число работ, связанных с методом асимптотического анализа. Для исследования оценки сложности аппроксимации данным методом предлагается фиксировать один из параметров (порог ошибки или размерность параметрического множества). То есть существует два направления исследований в теории асимптотического анализа.

В первом случае рассматривается $\varepsilon \to 0$ и фиксированное $d \in \mathbb{N}$. В рамках такой постановки задачи хорошо изучена методика оценки сложности аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$. В качестве примера работа, основанных на таком подходе, можно рассматривать результаты Лифшица М.А. и Туляковой Е.В из статьи [10].

Во втором случае сложность аппроксимации $n^{Y_d}(\varepsilon)$ рассматривается при фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$. В настоящее время такой подход активно используется для исследования различных типов случайных полей. В частности, обширные результаты представлены в следующих статьях: [1], [15] - [17], [25]. Сформулируем теорему:

Теорема 1 *Пусть $(a_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $(b_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность, для которой верно следующее:*

$$\lim_{d\to\infty} b_d = \infty.$$

Рассмотрим невозрастающую функция $q : (0,1) \to \mathbb{R}$ и функцию распределения $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to [0,1]$. Если для любого $\varepsilon \in (0,1)$ выполняется $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$,

1320

то эквивалентны следующие утверждения:

$$(1)\quad \forall x \in \boldsymbol{C}(\mathcal{L}) \quad F_d(x) \to \mathcal{L}(x), \quad d \to \infty;$$
$$(2)\quad \forall \varepsilon \in \boldsymbol{C}(q) \quad \ln n^{Y_d}(\varepsilon) = a_d + q(\varepsilon) b_d + o(b_d), \quad d \to \infty,$$

где $F_d(x)$ *определяется следующей формулой:*

$$F_d(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{Y_d} \mathbb{1}\left(\frac{|\ln \bar{\lambda}_k^{Y_d}| - a_d}{b_d} \leqslant x \right),$$

где $x \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}$.

Эта теорема является очень важной в теории асимптотического анализа, так как лежит в основе практически всех результатов для $n^{Y_d}(\varepsilon)$ для различных типов случайных полей Y_d. Она активно используется для получения оценок для различных случайных полей конкретного вида. В том числе она использована и в данной работе.

1321

1.5 Тензорные поля

Существует довольно много различных случайных полей, которые обладают тем или иными характеристиками и используются в различных областях науки, но особый интерес для исследования представляют так называемые случайные поля тензорного типа как естественные многопараметрические аналоги случайных процессов. Они представляют собой довольно обширный класс и часто применяются для решения разного рода теоретических и практических задач. Приведём определение.

Пусть $X_1(t), \ldots, X_d(t)$, $t \in [0,1]$, — случайные процессы с траекториями в $L_2([0,1])$, с нулевыми средними и непрерывными ковариациями $K^{X_1}(s,t), \ldots, K^{X_d}(s,t)$, $s,t \in [0,1]$.

Тогда Y_d называется *тензорным произведением* случайных процессов $X_1, \ldots, X_d$ (сокращённо записывается как $Y_d = \otimes_{j=1}^{d} X_j$), если оно имеет ковариацию

$$K^{Y_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} K^{X_j}(t_j, s_j), \quad s,t \in [0,1]^d.$$

Часто на практике выделяются подкласс тензорных произведений, составленных на основе случайных процессов с равными ковариациями. Другими словами, если $K^{X_1} = \ldots = K^{X_d}$, то Y_d называется *тензорной степенью* X_1 (сокращённо записывается как $Y_d = X_1^{\otimes d}$). Случайные поля из данного подкласса часто встречаются в различных задачах математики и физики.

Собственные числа и векторы тензорного произведения Y_d имеют следующую мультипликативную структуру:

$$\prod_{j=1}^{d} \lambda_{k_j}^{X_j}, \quad \prod_{j=1}^{d} \psi_{k_j}^{X_j}, \quad k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}.$$

где $(\lambda_k^{X_j}, \psi_k^{X_j})_{k \in \mathbb{N}}$ — собственные числа и векторы ковариационной функции X_j. Данный вид структуры является довольно удобным для проведения различного рода исследований в рассматриваемой области знаний. В данной работе представлены результаты как для тензорных степеней, так и для тензорных

1322

произведений.

1.6 Примеры случайных полей тензорного типа

Теперь перейдём к описанию примеров. Для удобства сначала будем описывать случайный процесс, а затем случайное поле, являющееся его многопараметрическим аналогом. При этом будем указывать их важные свойства и различные применения.

Винеровский процесс $W(t), t \in [0,1]$ — это гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией:

$$K^W(s,t) = \min\{s,t\}.$$

Для случайного процесса $K^W(t,s)$ известен вид собственных чисел (см. [21]):

$$\lambda_k^W = \frac{1}{\pi^2\,(k-\frac{1}{2})^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На его основе можно построить случайное поле, которое называется *броуновским листом* $W_d = W^{\otimes d}$. Данное случайное поле имеет следующую ковариацию:

$$K^{W_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \min\{t_j, s_j\}, \quad t,s \in [0,1]^d.$$

Броуновский лист играет заметную роль в теории вероятностей. Он активно применяется для решения задача, связанные с дифференциальными стохастическими уравнениями (см.[11]), а также является центральным объектом в исчислении Ито для многопараметрического случая (см.[12], [13]).

Броуновский мост $B(t)$, $t \in [0,1]$ — это гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией:

$$K^B(s,t) = \min\{s,t\} - st, \quad t,s \in [0,1]^d.$$

1323

Для случайного процесса $K^B(t,s)$ известен вид собственных чисел (см. [10]):

$$\lambda_k^B = \frac{1}{\pi^2\, k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На его основе можно построить случайное поле, которое называется *броуновской подушкой* $B_d = B^{\otimes d}$. Данное случайное поле имеет следующую ковариацию:

$$K^{B_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \left(\min\{t_j, s_j\} - t_j s_j\right), \quad t, s \in [0,1]^d.$$

Броуновская подушка является важным объектом в различных научных исследованиях. Так, оно активно используется в статистике. Например, для моделирования эмпирического процесса (см. [22]).

Дробное броуновское движение — это гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией:

$$K^{fBm}(t,s) = \frac{1}{2}(t^\gamma + s^\gamma + |t-s|^\gamma), \quad \gamma \in (0,2), t, s \in [0,1].$$

Частым случаем данного процесса является уже рассмотренный винеровский процесс. Для его получения необходимо взять параметр $\gamma = 1$. В данном случае структура собственных чисел имеет уже показанный вид. При остальных значениях параметра γ из допустимого интервала аналитическое выражение собственных чисел не может быть приведено в явном виде. Поэтому в качестве оценки их поведения укажем их асимптотику при $k \to \infty$, которая известна (см. [23]).

$$\lambda_k^{fBm} \sim \frac{\Gamma(1+\gamma)\, \sin\frac{\pi\gamma}{2}}{(\pi\, k)^{1+\gamma}}.$$

На основе дробного броуновского движения можно построить *тензорную степень дробного броуновского движения* $B_d = B^{\otimes d}$. Данное случайное поле

1324

имеет следующую ковариацию:

$$K^{fBm_d}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1}{2}(s_j^\gamma + t_j^\gamma + |s_j - t_j|^\gamma) \right), \quad t, s \in [0,1]^d, \gamma \in (0,2).$$

Рассмотренное нами случайное поле имеет теоретические и практические применения в различных областях физики. Ознакомиться со свойствами и применениями этого случайного поля можно в [26].

Существуют методики центрирования и интегрирования различных случайных процессов с целью получения новых объектов для исследования. Рассмотрим два характерных примера.

В качестве примера центрированного процесса приведём *центрированный винеровский процесс*. Он конструируется на основе стандартного винеровского процесса следующим образом:

$$W^c(t) := W(t) - \int_0^1 W(u)du$$

и имеет следующую ковариацию:

$$K^{W^c}(t,s) = \min\{s,t\} + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) - s - t + \frac{1}{3}, \quad t, s \in [0,1].$$

Для случайного процесса $K^{W^c}(t,s)$ известен вид собственных чисел (см. [27]):

$$\lambda_k^{W^c} = \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В качестве примера интегрированного процесса приведём *интегрированный винеровский процесс*. Он конструируется на основе стандартного винеровского процесса следующим образом:

$$\overline{W}(t) := \int_0^t W(u)du$$

1325

и имеет следующую ковариацию:

$$K^{\overline{W}}(t,s) = \frac{1}{2}st\ \min\{t,s\} - \frac{1}{6}(\min\{t,s\})^3, \quad t,s \in [0,1].$$

Для случайного процесса $K^{\overline{W}}(t,s)$ известен вид собственных чисел (см. [27]):

$$\lambda_k^{\overline{W}} = \frac{1}{m_k^4}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $m_1 < m_2 < \ldots$ — это решения трансцендентного уравнения:

$$\cos x \cdot \cosh x + 1 = 0.$$

К сожалению, данный вид собственный чисел затруднительно использовать для решения рассматриваемых в работе задач, но далее будут представлены различные оценки собственных чисел интегрированного винеровского процесса, которые имеют более удобный для использования в исследованиях вид.

Достаточно подробно данные случайные процессы описываются в статьях [27], [28]. На основе представленных объектов можно строить случайных поля и осуществлять их изучение.

Случайные поля, построенные на основе различных интегрированных процессах, являются интересными объектами для изучения. Далее мы подробно рассмотрим самые важные и интересные их них и приведём результаты по исследованию их сложности аппроксимации.

2 Интегрированные процессы

В данной главе будут подробно рассмотрены следующие два процесса: r-раз интегрированный винеровский процесс и r-раз интегрированный эйлеровский процесс вместе с подробным описанием различных их особенностей и свойств. А также будут приведены асимптотические результаты по оценке сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений данных процессов при различных условиях на их ковариационную структуру.

2.1 Определение интегрированного винеровского процесса

Будем назвать гауссовский случайный процесс $W_r(t)$, $t \in [0,1]$, $r \in \mathbb{N}_0$, *r-раз интегрированным винеровским процессом*, если $W_0 = W$ (винеровский процесс), а для $r > 0$ верна следующая рекуррентная интегральная формула:

$$W_r(t) = \int_0^t W_{r-1}(u)du,$$

где r — это параметр гладкости процесса. Случайный процесс W_r имеет следующую ковариацию:

$$K^{W_r}(t,s) = \int_0^{\min\{t,s\}} \frac{(t-u)^r}{r!}\frac{(s-u)^r}{r!}du, \quad t,s \in [0,1].$$

Построим случайное поле на основе r-раз интегрированного винеровского процесса. Рассмотрим последовательность интегрированных винеровских процессов $W_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$, с корреляционными функциями $\mathcal{K}^{W_r}$, $j \in \mathbb{N}$, соответственно. Под $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ будем понимать неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел. Рассмотрим последовательность случайных полей $\mathbb{W}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, с нулевыми средними и ковариацией вида

$$\mathcal{K}^{\mathbb{W}_r}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}^{W_{r_j}}(t_j,s_j), \quad t,s \in [0,1]^d, d \in \mathbb{N}.$$

Каждый процесс $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, рассматривается как случайный элемент E_{r_j}

1327

пространства $L_2(0,1)$. Случайное поле $\mathbb{W}_d$ будем называть *многопараметрическим r-раз интегрированным винеровским процессом*.

Явный вид собственных чисел, отвечающих $K^{W_{r_j}}(t,s)$, неизвестен, но существует следующая асимптотика при больших значениях индекса k (см.[24]):

$$\lambda_k^{W_{r_j}} = \frac{1}{(\pi(k-\frac{1}{2}))^{2r_j+2}} + O(k^{-2r_j+3}), \quad k \to \infty. \tag{8}$$

2.2 Результаты для интегрированного винеровского процесса

Приведём ряд результатов по оценке сложности аппроксимации многопараметрического r-раз интегрированного винеровского процесса. Для начала сформулируем теорему первого и второго собственных чисел последовательности рассматриваемых процессов из статьи [14]. Именно эти собственные числа играют основную роль, поэтому важными являются нижепредставленные оценки на них.

Теорема 2 *Пусть W_{r_j} — последовательность r-раз интегрированных винеровских процессов. Тогда верны следующие асимптотические оценки:*

$$\begin{aligned} \lambda_1^{W_{r_j}} &= \frac{1}{(r_j!)^2}\left(\frac{1}{(2r_j+2)(2r_j+1)} + O(r_j^{-4})\right), \\ \lambda_2^{W_{r_j}} &= \Theta\left(\frac{1}{(r_j!)^2 r_j^4}\right). \end{aligned}$$

Теперь сформулируем теорему из статьи [14], связанную с применением трактабильности для оценки сложности аппроксимации рассматриваемой последовательности случайных полей.

Теорема 3 *Рассмотрим последовательность случайных полей $\mathbb{W}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, построенную на основе последовательности r-раз интегрированных винеровских процессов $W_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$. $\mathbb{W}_d(t)$ является W-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{j\to\infty} r_j = \infty.$$

1328

$\mathbb{W}_d(t)$ *является QP-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln_+ d} \sum_{k=1}^{d} (1+r_j)^{-2} \ln_+ r_j < \infty,$$

где $\ln_+ 0 := 0$ *и* $\ln_+ x := \max\{1, \ln x\}$ *для* $x > 0$. $\mathbb{W}_d(t)$ *является P-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{j\to\infty} \inf \frac{r_j}{j^s} > 0,$$

для некоторого $s > \frac{1}{2}$.

Данная теорема активно используется при исследование сложности аппроксимации последовательности случайных полей $\mathbb{W}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$.

2.3 Определение интегрированного эйлеровского процесса

Будем называть гауссовский процесс $E_r(t), t \in [0,1]$, имеющий нулевое среднее и ковариацию вида

$$\mathcal{K}^{E_r}(t,s) := \int_{[0,1]^r} \min\{t, x_1\} \min\{x_1, x_2\} \dots \min\{x_r, s\} dx_1 \dots dx_r,$$

где $t, s \in [0,1]$ и $r \in \mathbb{N}$, *r-раз интегрированным эйлеровским процессом*. Данный процесс связан с винеровским случайным процессом формулой

$$E_r(t) = (-1)^{a_1+\dots+a_r} \int_{a_r}^{t} \int_{a_{r-1}}^{t_{r-1}} \dots \int_{0}^{t_2} \int_{0}^{t_1} W(s) ds dt_1 \dots dt_{r-1}, \quad t \in [0,1],$$

где $a_{2k-1} := 1$, $a_{2k} := 0$, $k \in \mathbb{N}$. Для любых $s, t \in [0,1]$ верно:

$$\mathcal{K}^{E_r}(t,s) = (-1)^{r+1} \frac{2^{2r}}{(2r+1)!} \left(\mathbf{E}_{2r+1}\big(\frac{1}{2}|s-t|\big) - \mathbf{E}_{2r+1}\big(\frac{1}{2}|s+t|\big) \right),$$

1329

где $\mathbf{E}_n$ — это n-ая степень полинома Эйлера, которая может быть найдена как коэффициент производящей функции:

$$\frac{2e^{xt}}{e^x+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{E}_r(x)\frac{t^r}{r!} \quad \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

Благодаря данному свойству, процесс и получил своё название.

Теперь построим случайное поле на основе r-раз интегрированного эйлеровского процесса. Рассмотрим последовательность интегрированных эйлеровских процессов $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$, с корреляционными функциями $\mathcal{K}^{E_r}$, $j \in \mathbb{N}$, соответственно. Под $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ будем понимать неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел. Рассмотрим последовательность случайных полей $\mathbb{E}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, с нулевыми средними и ковариациями вида

$$\mathcal{K}^{\mathbb{E}_r}(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}^{E_{r_j}}(t_j, s_j), \quad t, s \in [0,1]^d, d \in \mathbb{N}.$$

Каждый процесс $E_{r_j}(t), t \in [0,1]$, рассматривается как случайный элемент E_{r_j} пространства $L_2(0,1)$. $\mathbb{E}_d$ будем называть *многопараметрическим r-раз интегрированным эйлеровским процессом*. Для случайного процесса $K^{E_{r_j}}(t,s)$ известен вид собственных пар $K^{E_{r_j}}$.

$$\lambda_k^{E_{r_j}} = \frac{1}{\left(\pi(k-\frac{1}{2})\right)^{2r_j+2}}, \quad \psi_k^{E_{r_j}}(t) = \sqrt{2}\sin\left(\pi(k-\frac{1}{2})t\right),$$

где $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$.

2.4 Результаты для интегрированного эйлеровского процесса

Приведём ряд результатов по оценке сложности аппроксимации многопараметрического r-раз интегрированного винеровского процесса. Сформулируем теорему из статьи [14], связанную с применением трактабильности для оценки сложности аппроксимации рассматриваемой последовательности случайных

полей.

Теорема 4 *Рассмотрим последовательность случайных полей* $\mathbb{E}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, *построенную на основе последовательности* r*-раз интегрированных эйлеровских процессов* $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$. $\mathbb{E}_d(t)$ *является W-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{j\to\infty} r_j = \infty.$$

Интересным является тот факт, про при невыполнение вышеприведённого условия мы сталкиваемся с проклятием размерности. $\mathbb{E}_d(t)$ *является QP-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln_+ d} \sum_{k=1}^{d} (1 + r_j) 3^{-2r_j} < \infty,$$

где $\ln_+ d := \max\{1, \ln d\}$. $\mathbb{E}_d(t)$ *является P-трактабильной тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2\tau r_j} < \infty$$

для некоторого $\tau \in (0,1)$.

Представленная теорема активно используется при исследование сложности аппроксимации последовательности случайных полей $\mathbb{E}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$. Далее сформулируем теорему из диссертации [25] об исследовании сложности аппроксимации методом асимптотического анализа.

Пусть выполняется следующее условие на собственные числа последовательности случайных процессов $E_{r_j}(t)$:

$$\frac{\lambda_2^{Er_j}}{\lambda_1^{Er_j}} = 3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j(\ln j)^p}, \quad j \to \infty, \tag{9}$$

где $c > 0$, $p \in \mathbb{R}$. Особо интересен случай, когда условие (9) выполняется для $p = 1$. Он был подробно рассмотрен А. Хартовым в статье [1]. Был получен

1331

следующий результат:

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon) = D_c^{-1}(1-\varepsilon^2)\ln d + o(\ln d), \quad d \to \infty, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где D_c — это функция распределения Дикмана со степенью свёртки c.

Как мы видим, рассматриваемый объект активно изучается в различных работах.

3 Оценка сложности аппроксимации последовательности тензорных произведений

В данной главе будет представлен ряд теорем об оценке асимптотики сложности аппроксимации для последовательности случайных полей, построенных на последовательности r-раз интегрированных эйлеровских процессов при различных условиях на структуру собственный чисел данных случайных процессов и на структуру самой последовательности.

3.1 Случай предельнопостоянной последовательности r_j

Рассмотрим последовательность случайных полей $\mathbb{E}_d(t), t \in [0,1]^d, d \in \mathbb{N}$, основанных на последовательности $E_{r_j}(t), t \in [0,1]$, r-раз интегрированных эйлеровских процессов. Напомним, что под r_j мы понимаем неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел. В первом параграфе данной главы изучим случай, когда предел данной последовательности конечен. Для составления оценок при таких условиях нам будут полезны нижепредставленные леммы о сходимости случайных величин:

Лемма 1 *Если* $X_n \xrightarrow{D} X$ *и* $Y_n \to 0$, *то* $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

Лемма 2 *Если* $X_n \xrightarrow{D} X$ *и* $Y_n \to 1$, *то* $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{D} X$.

Сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 5 *Если* $r_j = r < \infty$, *начиная с некоторого* $j = j_0$, *тогда при всех достаточно больших значениях* d:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\mathbb{E}_d}}{\Lambda^{\mathbb{E}_d}} \mathbb{1}\left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda_k^{\mathbb{E}_d}}{\Lambda^{\mathbb{E}_d}}\right) - a_d}{b_d} \leqslant x \right) \to \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

где

$$a_d = c_1 d \tag{11}$$

$$b_d = \sqrt{(c_2 - c_1^2)d}, \tag{12}$$

1333

а константы c_1 и c_2 определяются следующими формулами:

$$c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} -\ln\left(\frac{\lambda_k^{E_{r_{j_0}}}}{\Lambda^{E_{r_{j_0}}}}\right)\frac{\lambda_k^{E_{r_{j_0}}}}{\Lambda^{E_{r_{j_0}}}}$$
$$c_2 = \sum_{k=1}^{\infty} -\ln^2\left(\frac{\lambda_k^{E_{r_{j_0}}}}{\Lambda^{E_{r_{j_0}}}}\right)\frac{\lambda_k^{E_{r_{j_0}}}}{\Lambda^{E_{r_{j_0}}}}$$

Доказательство теоремы 5. Построим на некотором случайном пространстве независимые случайные величины $\hat{U}_j$ со следующим распределением:

$$\mathbb{P}\left(\hat{U}_j = -\ln\Big(\frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}}\Big)\right) = \frac{\frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}}}{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^{2r_j+2}}}, \quad k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

Так как с некоторого $j = j_0$ мы имеем $r_j = r < \infty$, то случайные величины $\hat{U}_{j_0-1+n}, n \in \mathbb{N}$ одинаково распределены. Следовательно, для них справедлива центральная предельная теорема:

$$\frac{\sum\limits_{j=j_0}^{d}\big(\hat{U}_j - (d-j_0)\mathbb{E}\,\hat{U}_{j_0}\big)}{\sqrt{d-j_0}\sqrt{\mathbf{Var}\,\hat{U}_{j_0}}} \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Верно, что $\frac{\sqrt{d-j_0}}{\sqrt{d}} \to 1$. Следовательно, по лемме 2

$$\frac{\sum\limits_{j=j_0+1}^{d}(\hat{U}_j - \mathbb{E}\,\hat{U}_j)}{\sqrt{d}\sqrt{\mathbf{Var}\,\hat{U}_j}} \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Мы знаем, что $\frac{\sum\limits_{j=0}^{j_0}(\hat{U}_j - \mathbb{E}\,\hat{U}_j)}{\sqrt{d}\sqrt{\mathbf{Var}\,\hat{U}_j}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Следовательно, по лемме 1

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{d}(\hat{U}_j - \mathbb{E}\,\hat{U}_j)}{\sqrt{d}\sqrt{\mathbf{Var}\,\hat{U}_j}} \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

1334

Отсюда заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\mathbb{E}_d}}{\Lambda^{\mathbb{E}_d}} \mathbb{1}\left(\frac{\ln(\frac{\lambda_k^{\mathbb{E}_d}}{\Lambda^{\mathbb{E}_d}} - a_d)}{b_d} \leqslant x \right) \to \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

где a_d и b_d определяются соответственно из (11) и (12). Теорема доказана. $\square$

Для того чтобы использовать выражение, справедливость которого доказана выше, для нахождения асимптотики сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$, необходимо привести следующую теорему из статьи [1].

Теорема 6 *Пусть $(a_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — некая последовательность, а $(b_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — положительная последовательность, для которой верно, что $b_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть $q : (0,1) \to \mathbb{R}$ — невозрастающая функция, и функция распределения G удовлетворяет уравнению $q(\varepsilon) = G^{-1}(1-\varepsilon^2)$ для всех $\varepsilon \in C(q)$. Тогда для асимптотики*

$$\ln n^{X_d}(\varepsilon) = a_d + q(\varepsilon)(1-\varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \to \infty, \varepsilon \in C(q)$$

необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$\lim_{d\to\infty} G^{X_d}_{a_d,b_d} = G(x), \quad x \in C(q)$$

Сформулируем и докажем теорему об асимптотике сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ для случая, когда последовательность r_j имеет конечный предел.

Теорема 7 *Если $r_j = r < \infty$, начиная с некоторого $j = j_0$, тогда при всех достаточно больших значениях d:*

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \to \infty$$

где a_d и b_d определяются соответственно из (11) *и* (12)*, а $\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ — квантиль нормального закона.*

Доказательство теоремы 7. Справедливость данной теоремы следует из теоремы 6, если в качестве функции G рассматривать Φ. $\square$

1335

3.2 Критерий ограниченности сложности аппроксимации

Перейдём к следующему случаю. Мы также будем рассматривать последовательность случайных полей $\mathbb{E}_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, основанных на последовательности $E_{r_j}(t)$, $t \in [0,1]$, r-раз интегрированных эйлеровских процессов, но теперь исследование сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ будет проводиться при условии, что последовательность $r_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Для начала найдём критерии ограниченности и неограниченности $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$. Для решения данной задачи приведём две теоремы из статьи [1]. Первая теорема позволяет получить условие неограниченности сложности аппроксимации.

Теорема 8 *Рассмотрим последовательность случайных процессов X_j, $j \in \mathbb{N}$ и построим на её основе последовательность случайных полей Y_d. В таком случае эквивалентны условия:*

$$(1)\quad \lim_{d\to\infty} n^{Y_d}(\varepsilon) = \infty, \quad \varepsilon \in (0,1);$$
$$(2)\quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{X_j} = \infty.$$

Вторая теорема, в свою очередь, позволяет получить условие ограниченности сложности аппроксимации.

Теорема 9 *Рассмотрим последовательность случайных процессов X_j, $j \in \mathbb{N}$ и построим на её основе последовательность случайных полей Y_d. В таком случае эквивалентны условия:*

$$(1)\quad \sup_{d\in\mathbb{N}} n^{X_d}(\varepsilon) < \infty, \quad \varepsilon \in (0,1);$$
$$(2)\quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \bar{\lambda}_k^{X_j} < \infty.$$

Теперь докажем теорему, которая позволит нам найти требуемый критерий для $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$. В целях лаконичности изложения мы можем объединить условия ограниченности и неограниченности в один критерий.

1336

Теорема 10 *1) Нижепредставленные условия эквивалентны.*

$$(1)\ \lim_{d\to\infty} n^{X_d}(\varepsilon) = \infty, \quad \varepsilon \in (0,1);$$
$$(2)\ \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2} = \infty.$$

2) Нижепредставленные условия эквивалентны.

$$(1)\ \sup_{d\in\mathbb{N}} n^{X_d}(\varepsilon) < \infty, \quad \varepsilon \in (0,1);$$
$$(2)\ \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2} < \infty.$$

Доказательство теоремы 10. Исходя из теорем 8 и 9 и вида собственных чисел r-раз интегрированного эйлеровского процесса, представленных в предыдущей главе, рассмотрим поведение ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{E_{r_j}}$$

Для начала произведём оценку ряда сверху.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{E_{r_j}} &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \\ &\leqslant \left(1+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{3}{2k-1}\right)^2\right)\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2} \\ &\leqslant C_1\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2}.\end{aligned}$$

Далее произведём оценку ряда снизу.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{E_{r_j}} &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \\ &\geqslant C_2\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2}.\end{aligned}$$

1337

Из вышеприведённых вычислений и теорем 8 и 9 заключаем, что поведение сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ зависит от поведения ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2}$, что влечёт за собой выполнение теоремы. Теорема доказана. $\square$

Мы видим, что ограниченность или неограниченность сложности аппроксимации $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ зависит от поведения ряда, составленного из нормированных вторых собственных чисел последовательности r-раз интегрированного эйлеровского процесс. Далее мы будем активно использовать этот факт, накладывая некоторые естественные условия на поведение данных собственных чисел. Нам будет особенно интересен случай при которой, сложность аппроксимации неограничена. Именно такая ситуация исследуется с помощью асимптотического анализа.

3.3 Случай $r_j \to \infty$

3.3.1 Теоретические основы

Для оценки сложности аппроксимации рассматриваемой последовательности случайных полей мы будем использовать нижепредставленную теорему из статьи [1].

Теорема 11 *Пусть $(a_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — это некоторая последовательность, а $(b_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — это положительная последовательность, для которой верно, что $b_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть G — саморазложимая функция распределения с триплетом (γ, σ^2, L), где $L(x) = 0, x < 0$. Предположим, что невозрастающая функция $q : (0,1) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $q(\varepsilon) = G^{-1}(1-\varepsilon^2)$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$, и верно, что*

$$\lim_{d\to\infty} \max_{j=1,\dots,d} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} \mathbb{1}\left(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} < e^{-\tau b_d}\right) = 0, \quad \tau > 0. \tag{13}$$

В таком случае для асимптотики

$$\ln n^{X_d}(\varepsilon) = a_d + q(\varepsilon) b_d + o(b_d), \quad d \to \infty, \varepsilon \in (0,1)$$

1338

необходимо и достаточно:

$$\text{(A)}\quad \lim_{d\to\infty}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{N}\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}\mathbb{1}\Big(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} < e^{-\tau b_d}\Big) = -L(x), \quad x>0, \tau>0; \tag{14}$$

$$\text{(B)}\quad \lim_{d\to\infty}\frac{1}{b_d}\Big(\sum_{j=1}^{d} M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - a_d\Big) = \gamma + \int_0^{\tau}\frac{x^3 dL(x)}{1+x^2}$$

$$-\int_{\tau}^{\infty}\frac{x dL(x)}{1+x^2}, \quad \tau>0; \tag{15}$$

$$\text{(C)}\quad \lim_{\tau\to 0}\overline{\lim_{d\to\infty}}\frac{1}{b_d^2}\sum_{j=1}^{d}\Big(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - \big(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\big)^2\Big)$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\underline{\lim_{d\to\infty}}\frac{1}{b_d^2}\sum_{j=1}^{d}\Big(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - \big(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\big)^2\Big) = \sigma^2, \quad \tau>0, \tag{16}$$

где

$$M_{p,N}^{X_{1,j}}(x) = \sum_{k=1}^{N} |\ln\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}|\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}}\mathbb{1}(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} \geqslant e^{-x}), \quad x\geqslant 0, p\in\{1,2\},$$

а $N=\infty$ или $N\in\mathbb{N}$, для которого выполняется следующее выражение:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} < \infty. \tag{17}$$

Для начала удостоверимся, что условий теоремы 11 выполняются для рассматриваемой нами последовательности случайных процессов. Рассмотрим след, соответствующий последовательности r-раз интегрированных эйлеровских процессов E_{r_j}:

$$\Lambda^{E_{r_j}} = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{E_{r_j}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi(k-\frac{1}{2}))^{2r_j+2}} = \frac{1}{\omega_{r_j}}(\frac{2}{\pi})^{2r_j+2},$$

1339

где $\omega_{r_j} = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \right)^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. При $j \to \infty$ мы имеем

$$\overline{\lambda}_1^{E_{r_j}} = \omega_{r_j} \to 1. \tag{18}$$

На основе данных выкладок можно заключить, что условие (13) выполняется. Остальные условия теоремы 11 выполняются автоматически на основе той теоретической модели, что была рассмотрена в предыдущей главе.

Теперь будем искать асимптотику $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ при некоторых предположениях на структуру ковариационного оператора E_{r_j}. Как было показано в теореме 10, поведение сложности аппроксимации зависит от ряда, составленного из вторых нормированных чисел последовательности r-раз интегрированных эйлеровских процессов. Исходя из этого, мы будем решать задачу при следующих естественных спектральных условиях:

$$3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j^{\alpha}(\ln j)^p}, \quad c > 0, \alpha \in (0,1], p \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

Случай $p > 1$ и $\alpha = 1$ рассматривать не имеет смысла, так как он соответствует ограниченной сложности аппроксимации по теореме 10. Случай $p = 1$, $\alpha = 1$ исследован в статье [1]. Был получен следующий результат:

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon) = D_c^{-1}(1-\varepsilon^2)\ln d + o(\ln d), \quad d \to \infty, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где D_c — это функция распределения Дикмана со степенью свёртки c.

Разделим исследование $n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)$ на два случая: $\alpha = 1$ и $\alpha \in (0,1)$.

3.3.2 Первый случай

Сформулируем и докажем теорему для первого случая.

Теорема 12 *Пусть для последовательности интегрированных эйлеровских процессов E_{r_j}, $j \in \mathbb{N}$ верно следующее условие:*

$$\overline{\lambda}_2^{E_{r_j}} = 3^{-2r_j-2} \sim \frac{c}{j(\ln j)^p}, \quad c > 0,\ p \neq 1.$$

Пусть $\mathbb{E}_d$, $d \in \mathbb{N}$, — последовательность тензорных произведений $E_{r_j}(t)$, $t \in$

1340

$[0,1]^d$, *тогда верна следующая асимптотика для сложности аппроксимации:*

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon) = a_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)b_d + o(b_d), \quad d \to \infty,$$

где $a_d = \frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}}$, $b_d = \frac{\sqrt{c}(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}$,
$\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ — *квантиль нормального закона.*

Можно показать, что $a_d \sim (\ln d)^{2-p}$

Доказательство теоремы 12. Начнём доказательство с нахождения достаточного числа собственных чисел N, руководствуясь условием (17) из теоремы 11. Для этого проведём оценку выражения

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=3}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{E_{r_j}}$$

при $d \to \infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=3}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{E_{r_j}} &= \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \\ &\leqslant C_1\sum_{j=1}^{d}5^{-2r_j-2},\end{aligned}$$

где $C_1 = 1 + \sum\limits_{k=4}^{\infty}(\frac{5}{2k-1})^2 < \infty$. Исходя из условия (19), имеем:

$$5^{-2r_j-2} \sim \frac{1}{\left(\frac{j}{c}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln 5}{\ln 3}}}.$$

Так как ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{j}{c}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln 5}{\ln 3}}}$$

сходится, то и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}5^{-2r_j-2}$$

1341

сходится.

Принимая во внимание условие (17) из теоремы 11 и условие (18), нам достаточно рассмотреть $N = 2$. Пусть

$$b_d = \frac{\sqrt{c}(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}.$$

Для любого $\tau > 0$ и при всех достаточно больших d верно, что

$$\frac{j(\ln \frac{j}{c})^p}{c} \leqslant \frac{d(\ln \frac{d}{c})^p}{c} = \exp\{\ln \frac{d}{c} + p \ln \ln \frac{d}{c}\} \leqslant \exp\{\frac{\tau\sqrt{c}(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}\}. \qquad (20)$$

Для доказательства теоремы нам необходимо и достаточно проверить выполнение условий (14) - (16) из теоремы 11 при условии $G = \Phi$ с триплетом $(0, 1, 0)$. Руководствуясь структурой триплета, будем сразу записывать требуемый вид условий, а затем выражать их в терминах j, руководствуясь сходимостью, показанной выше. Проверим выполнение условия (A):

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} \mathbb{1}(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} < e^{-\tau b_d}) = 0, \quad \tau > 0.$$

Переписывая в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{c}{j(\ln \frac{j}{c})^p} \mathbb{1}\left(\frac{j(\ln \frac{j}{c})^p}{c} > \exp\left\{\frac{\tau c(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}\right\}\right).$$

В силу условия (20) индикатор данного выражения обращается в нуль. Следовательно, условие (A) выполняется. Проверим выполнение условия (B):

$$\lim_{d\to\infty} \frac{1}{b_d}\left(\sum_{j=1}^{d} M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - a_d\right) = 0, \quad \tau > 0;$$

Переписывая $M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)$ в терминах r_j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}} \mathbb{1}\left(\frac{j(\ln \frac{j}{c})^p}{c} \leqslant \exp\left\{\frac{\tau c(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}\right\}\right).$$

1342

В силу условия (20) индикатор данного выражения обращается в единицу. Пусть

$$a_d = \frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}}.$$

Ничего более точного при условии (19) про a_d сказать невозможно. Чтобы лучше узнать поведение a_d, необходимо уточнить асимптотику. Видим, что

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\sqrt{3-p}}{\sqrt{c}(\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}} - \frac{\ln 3^{2r_j+2}}{3^{2r_j+2}} \right) = 0.$$

Следовательно, условие (B) выполняется. Проверим выполнение условия (C). Для удобства разобьём данное условие на два, каждое из которых должно выполняться.

$$\lim_{\tau\to 0} \overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^{d} \left(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - \left(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) \right)^2 \right) = 1;$$

$$\lim_{\tau\to 0} \underline{\lim_{d\to\infty}} \frac{1}{b_d^2} \sum_{j=1}^{d} \left(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) - \left(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) \right)^2 \right) = 1.$$

В первую очередь оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{d} \left(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d) \right)^2.$$

Переписывая его в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(\ln(\frac{j}{c}(\ln \frac{j}{c})^p))^2}{(\frac{j}{c})^2 (\ln \frac{j}{c})^{2p}} \mathbb{1}\left(\frac{j(\ln \frac{j}{c})^p}{c} \leqslant \exp\left\{ \frac{\tau c (\ln \frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}} \right\} \right).$$

В силу условия (20) индикатор данного выражения обращается в единицу. Кроме того, верно следующее:

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(\ln(\frac{j}{c}(\ln \frac{j}{c})^p))^2}{(\frac{j}{c})^2 (\ln \frac{j}{c})^{2p}} \sim \sum_{j=c_j}^{d} \frac{1}{(\frac{j}{c})^2 (\ln \frac{j}{c})^{p-2}},$$

где $c_j = \lceil c \rceil + 1$. Такой ряд сходится. Обозначим число, к которому он сходится,

1343

за E_{2_1}. Далее оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{d} M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d).$$

Переписывая его в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(\ln(\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p))^2}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p} \mathbb{1}\left(\frac{j(\ln\frac{j}{c})^p}{c} \leqslant \exp\left\{\frac{\tau c(\ln\frac{d}{c})^{\frac{3-p}{2}}}{\sqrt{3-p}}\right\}\right).$$

В силу условия (20) индикатор данного выражения обращается в единицу. Кроме того, верно следующее:

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{(\ln(\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p))^2}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^p} \sim \sum_{j=c_j}^{d} \frac{1}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^{p-2}},$$

где $c_j = \lceil c \rceil + 1$. Проведём дальнейшую оценку с учётом этой эквивалентности. Для начала проведём оценку сверху:

$$\begin{aligned}\sum_{j=c_j}^{d} \frac{1}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^{p-2}} &\leqslant c\int_{c_j-1}^{d} \frac{(\ln\frac{x}{c})^{2-p} d(\frac{x}{c})}{\frac{x}{c}} \\ &= \frac{c(\ln\frac{d}{c})^{3-p}}{3-p} - \frac{c(\ln\frac{c_j-1}{c})^{3-p}}{3-p}.\end{aligned}$$

Далее проведём оценку снизу:

$$\begin{aligned}\sum_{j=c_j}^{d} \frac{1}{\frac{j}{c}(\ln\frac{j}{c})^{p-2}} &\geqslant c\int_{c_j}^{d} \frac{(\ln\frac{x}{c})^{2-p} d(\frac{x}{c})}{\frac{x}{c}} \\ &= \frac{c(\ln\frac{d}{c})^{3-p}}{3-p} - \frac{c(\ln\frac{c_j}{c})^{3-p}}{3-p}.\end{aligned}$$

Видим, что

$$\lim_{d\to\infty} \frac{3-p}{c\ln\frac{d}{c}}\left(\frac{c(\ln\frac{d}{c})^{3-p}}{3-p} - \frac{c(\ln\frac{c_j-1}{c})^{3-p}}{3-p} - E_{2_1}\right) = 1,$$

1344

а также

$$\lim_{d\to\infty}\frac{3-p}{c\ln\frac{d}{c}}\left(\frac{c(\ln\frac{d}{c})^{3-p}}{3-p}-\frac{c(\ln\frac{c_j}{c})^{3-p}}{3-p}-E_{2_1}\right)=1,$$

Из данных вычислений следует, что условие (C) выполняется. Резюмируя, мы доказали, выполняются условия (14) - (16) из теоремы 11 для случая, когда $G=\Phi$. Так как ранее мы показали, что остальные условия выполняются для рассматриваемой нами последовательности случайных процессов, то теорема доказана. $\square$

3.3.3 Второй случай

Прежде чем перейти к следующему случаю, сформулируем теорему из статьи [2]. Она поможет нам в составлении доказательства.

Теорема 13 *Пусть l — медленно растущая функция, локально ограниченная на $[X,\infty]$, и $\alpha>-1$, тогда при $d\to\infty$*

$$\int_X^d t^\alpha l(t)dt\sim\frac{d^{\alpha+1}l(d)}{\alpha+1}.$$

Теперь сформулируем и докажем теорему для случая $\alpha\in(0,1)$. Данный случай также предполагает, что $r_j\to\infty$ при $j\to\infty$

Теорема 14 *Пусть для последовательности интегрированных эйлеровских процессов E_{r_j} верно следующее условие:*

$$\bar{\lambda}_2^{E_{r_j}}\sim\frac{c}{j^\alpha(\ln j)^p},\quad c>0,\alpha\in(0,1),p\in\mathbb{R}.$$

Пусть $\mathbb{E}_d$, $d\in\mathbb{N}$, — последовательность тензорных произведений $E_{r_j}(t)$, $t\in[0,1]^d$, тогда

$$\ln n^{\mathbb{E}_d}(\varepsilon)=a_d+\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)b_d+o(b_d),\quad d\to\infty,$$

где $a_d=\sum\limits_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}$, $b_d=c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}$, $c_\alpha=\sqrt{\frac{c\ln(2N_\alpha-1)}{\ln 3}}\alpha$, $N_\alpha=$

1345

$\lfloor \frac{e^{\frac{\ln 3}{\alpha}}+1}{2} \rfloor$, $\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ — *квантиль нормального закона.*

Можно показать, что $a_d \sim d^{1-\alpha}(\ln d)^{1-p}$

Доказательство теоремы 14. Начнём доказательство с нахождения достаточного числа собственных чисел N, руководствуясь условием (17) из теоремы 11. Для этого проведём оценку выражения

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=N}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{E_{r_j}}$$

при $d \to \infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=N}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{E_{r_j}} &= \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2r_j+2}} \\ &\leqslant C_N\sum_{j=1}^{d}(2N-1)^{-2r_j-2},\end{aligned}$$

где константа $C_N = 1 + \sum\limits_{k=2N-2}^{\infty}(\frac{2N-2}{2k-1})^2 < \infty$. Принимая во внимание условие (19), имеем:

$$(2N-1)^{-2r_j-2} \sim \frac{1}{\left((\frac{j}{c})^{\alpha}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2N-1)}{\ln 3}}}.$$

Так как ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left((\frac{j}{c})^{\alpha}\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2N-1)}{\ln 3}}}$$

сходится при $N > \frac{e^{\frac{\ln 3}{\alpha}}+1}{2}$, то и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2N-1)^{-2r_j-2}$$

сходится при $N > \frac{e^{\frac{\ln 3}{\alpha}}+1}{2}$.

Принимая во внимание условие (17) из теоремы 11 и условие (18), нам

1346

достаточно рассмотреть $N = N_\alpha$, где $N_\alpha = \lfloor \frac{e^{\frac{\ln 3}{\alpha}}+1}{2} \rfloor$. Пусть

$$b_d = c_\alpha \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\ln \frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}},$$

где $c_\alpha = \sqrt{\frac{c \ln(2N_\alpha - 1)}{\ln 3}}\alpha$. Для любого $\tau > 0$ и при всех достаточно больших d верно, что

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha \ln^p \frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}} &\leqslant \left(\left(\frac{d}{c}\right)^\alpha \ln^p \frac{d}{c}\right)^{\frac{\ln(2N_\alpha-1)}{\ln 3}} \\
&= \exp\left\{\frac{\ln(2N_\alpha - 1)}{\ln 3}\left(\alpha \ln \frac{d}{c} + p \ln\ln \frac{d}{c}\right)\right\} \\
&\leqslant \exp\left\{\tau c_\alpha \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\ln \frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Для доказательства теоремы нам необходимо и достаточно проверить выполнение условий (14) - (16) из теоремы 11 при условии $G = \Phi$ с триплетом $(0, 1, 0)$. Руководствуясь структурой триплета, будем сразу записывать требуемый вид условий, а затем выражать их в терминах j, руководствуясь сходимостью, показанной выше. Проверим выполнение условия (A):

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} \mathbb{1}(\overline{\lambda}_k^{X_{1,j}} < e^{-\tau b_d}) = 0, \quad \tau > 0.$$

Переписывая в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=2}^{N_\alpha} \frac{1}{\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha \ln^p \frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}} \mathbb{1}\left(\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha \ln^p \frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}} > \exp\left\{\tau c_\alpha \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\ln \frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}\right).$$

В силу условия (21) индикатор данного выражения для всех k обращается в нуль. Следовательно, условие (A) выполняется. Проверим выполнение условия

1347

(B):

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{b_d}\left(\sum_{j=1}^{d}M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-a_d\right)=0,\quad \tau>0;$$

Переписывая $M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)$ в терминах r_j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\mathbb{1}\left(\left(\left(\frac{j}{c}\right)^{\alpha}\ln^{p}\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}\leqslant\exp\left\{\tau c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}\right).$$

В силу условия (21) индикатор данного выражения для всех k обращается в единицу. Пусть

$$a_d=\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}.$$

Ничего более точного при условии (19) про a_d сказать невозможно. Чтобы лучше узнать поведение a_d, необходимо уточнить асимптотику. Видим, что

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}}\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}-\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{(3^{2r_j+2})^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\right)=0.$$

Исходя из этого, условие (B) выполняется. Проверим выполнение условия (C). Для удобства разобьём данное условие на два, каждое из которых должно выполняться. Первое условие имеет вид:

$$\lim_{\tau\to 0}\overline{\lim_{d\to\infty}}\frac{1}{b_d^2}\sum_{j=1}^{d}\left(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-\left(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\right)^2\right)=1.$$

Второе условие выглядит имеет вид:

$$\lim_{\tau\to 0}\underline{\lim_{d\to\infty}}\frac{1}{b_d^2}\sum_{j=1}^{d}\left(M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)-\left(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\right)^2\right)=1.$$

1348

В первую очередь оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{d}\left(M_{1,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d)\right)^2.$$

Переписывая его в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln^2\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{2\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\mathbb{1}\left(\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}\leqslant\exp\left\{\tau c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}\right).$$

В силу условия (21) индикатор данного выражения для всех k обращается в единицу. Для рассматриваемого ряда верно:

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln^2\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{2\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\ \sim\ \sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}},$$

где $c_j=\lceil c\rceil+1$. Проведём дальнейшую оценку с учётом этой эквивалентности. Для оценки интеграла будем использовать теорему 13. Для начала оценим ряд сверху:

$$\begin{aligned}\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}\ &\leqslant\ \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\int\limits_{c_j-1}^{d}\frac{d(\frac{x}{c})}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}\\ &\sim\ \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}.\end{aligned}$$

1349

Далее оценим ряд снизу:

$$\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}} \geqslant \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\int\limits_{c_j}^{d}\frac{d(\frac{x}{c})}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}$$
$$\sim \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}.$$

Далее оценим выражение

$$\sum_{j=1}^{d} M_{2,N}^{X_{1,j}}(\tau b_d).$$

Переписывая его в терминах j, имеем

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln^2\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}\mathbb{1}\left(\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}\leqslant\exp\left\{\tau c_\alpha\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right\}\right).$$

В силу условия (21) индикатор данного выражения для всех k обращается в единицу. Для рассматриваемого ряда верно, что

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\ln^2\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{\left(\left(\frac{j}{c}\right)^\alpha\ln^p\frac{j}{c}\right)^{\frac{\ln(2k-1)}{\ln 3}}} \sim \sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}},$$

где $c_j = \lceil c\rceil + 1$. Проведём дальнейшую оценку с учётом данной эквивалентности. Для оценки интеграла будем использовать теорему 13. Для начала оценим ряд сверху:

$$\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}} \leqslant \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\int\limits_{c_j-1}^{d}\frac{d(\frac{x}{c})}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}$$
$$\sim \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}.$$

Далее оценим ряд снизу:

$$\sum_{j=c_j}^{d}\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{\frac{\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}}{\left(\frac{j}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{j}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}} \geqslant \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\int\limits_{c_j}^{d}\frac{d(\frac{x}{c})}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{x}{c}\right)^{\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}-2}}$$

$$\sim \sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}.$$

Теперь, используя полученные выше оценки на рассматриваемые ряды и предположения о структуре последовательности b_d, проверим, выполняется ли условие (C). Для первой части выражения наблюдаем, что

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{c_\alpha^2\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\alpha}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-p}}\left(\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-\frac{p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\right)=1.$$

Далее для второй части выражения мы наблюдаем, что

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{c_\alpha^2\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\alpha}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-p}}\left(\sum_{k=2}^{N_\alpha}\frac{c\alpha^2\ln(2k-1)}{\ln 3}\frac{\left(\frac{d}{c}\right)^{1-\frac{2\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\left(\ln\frac{d}{c}\right)^{2-\frac{2p\ln(2k-1)}{\ln 3}}}{1-\frac{\alpha\ln(2k-1)}{\ln 3}}\right)=0.$$

Из проведённых выше вычислений непосредственно следует, что условие (C) выполняется. Резюмируя, нами было доказано, что выполняются условия (14) - (16) из теоремы 11 для случая, когда $G=\Phi$. Так как ранее мы показали, что остальные условия теоремы 11 выполняются для рассматриваемой нами последовательности случайных процессов, то можем заключить, что теорема доказана. $\square$

1351

4 Оценка сложности аппроксимации тензорной степени

В данной главе доказываются необходимые и достаточные условия для существования некоторой оценки сложности аппроксимации последовательности тензорной степени при широких условиях на собственные числа ковариационного оператора случайного процесса, на основе которого она конструируется, а также приводятся примеры известных процессов, которые удовлетворяют данным условиям на собственные числа.

4.1 Полученные результаты

Введем величину

$$M(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-u}, \quad u \geqslant 0$$

$M_0 = 1$.

Лемма 3 *Пусть $M(\gamma) < \infty$ при некотором $\gamma > 0$. Тогда для любого такого γ и любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant d \cdot \frac{\ln M(\gamma)}{\gamma} + |\ln \varepsilon^2| \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma}. \tag{22}$$

Доказательство. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$, и $\gamma > 0$, как указано в формулировке леммы. Заметим, что

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}\right)^d = M(\gamma)^d < \infty. \tag{23}$$

Введем величину

$$\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon) := \bar{\lambda}^{Y_d}_{n^{Y_d}(\varepsilon)}. \tag{24}$$

1352

Несложно видеть, что

$$n^{Y_d}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{n^{Y_d}(\varepsilon)} 1 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar{\lambda}_m^{Y_d}\geqslant\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)}} 1 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar{\lambda}_m^{Y_d}\geqslant\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)}} \left(\frac{\bar{\lambda}_m^{Y_d}}{\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)}\right)^{1-\gamma}.$$

Тогда

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{\bar{\lambda}_m^{Y_d}}{\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)}\right)^{1-\gamma} = \bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)^{-1+\gamma} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}. \tag{25}$$

Далее по определению $n^{Y_d}(\varepsilon)$ имеем

$$\varepsilon^2 \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ m\geqslant n^{Y_d}(\varepsilon)}} \bar{\lambda}_m^{Y_d} \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar{\lambda}_m\leqslant\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)}} \bar{\lambda}_m^{Y_d} \leqslant \bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)^{\gamma} \cdot \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ \bar{\lambda}_m\leqslant\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}.$$

Тогда

$$\varepsilon^2 \leqslant \bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)^{\gamma} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\bar{\lambda}^{Y_d}(\varepsilon)^{-1} \leqslant \left(\varepsilon^{-2} \cdot \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}\right)^{1/\gamma}. \tag{26}$$

Применение (26) в (25) дает оценку

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma} \left(\varepsilon^{-2} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\bar{\lambda}_m^{Y_d}\right)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

С учетом (23) имеем

$$n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}\right)^{\frac{d}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k^{1-\gamma}\right)^{\frac{d}{\gamma}} \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}} = M(\gamma)^{\frac{d}{\gamma}} \cdot \varepsilon^{-2\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

Отсюда, логарифмируя получаем нужное неравенство:

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant d \cdot \frac{\ln M(\gamma)}{\gamma} + |\ln \varepsilon^2| \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 15 *Пусть $M(\gamma) < \infty$ при любом $\gamma \in (0, \tau)$ с некоторым $\tau > 0$. Пусть*

$$E := \sum_{k \in \mathbb{N}: \bar{\lambda}_k > 0} |\ln \bar{\lambda}_k| \lambda_k.$$

Тогда для существования константы $C > 0$ такой, что

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon) \leqslant Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau} |\ln \varepsilon^2| + C\sqrt{d |\ln \varepsilon^2|}, \quad d \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{27}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\overline{\lim_{\delta \to 0+}} \left\{ M(\tau - \delta)^{\delta} \right\} < \infty. \tag{28}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство (27). Тогда, в частности, при $d = 1$ имеем

$$\ln n^{Y_1}(\varepsilon) \leqslant E + \tfrac{1-\tau}{\tau} |\ln \varepsilon^2| + C\sqrt{|\ln \varepsilon^2|}, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Определим при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ величину $\bar{\lambda}^{Y_1}(\varepsilon)$ по формуле (24). Воспользуемся следующим неравенством из [1] (с. 840):

$$\left|\ln \bar{\lambda}^{Y_1}(\varepsilon_2)\right| \leqslant \ln n^{Y_1}(\varepsilon_1) - \ln(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2), \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1.$$

Положим и $\varepsilon_1 := \varepsilon$ и $\varepsilon_2 := \varepsilon$ при $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} \left|\ln \bar{\lambda}^{Y_1}(\varepsilon)\right| &\leqslant \ln n^{Y_1}\left(\varepsilon/\sqrt{2}\right) - \ln(\varepsilon^2 - \varepsilon^2/2) \\ &\leqslant E + \tfrac{1-\tau}{\tau} |\ln(\varepsilon^2/2)| + C\sqrt{|\ln(\varepsilon^2/2)|} + |\ln(\varepsilon^2/2)| \\ &= E + \tfrac{1}{\tau}(|\ln \varepsilon^2| + \ln 2) + C\sqrt{|\ln \varepsilon^2| + \ln 2}. \end{aligned}$$

Обозначим за x_ε, $\varepsilon \in (0,1)$, правую часть последнего неравенства. Введем

1354

функцию распределения

$$F(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{\lambda}_k \mathbb{1}(\bar{\lambda}_k \geqslant e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

В работе [1] (с. 841) показано, что

$$\left|\ln \bar{\lambda}^{Y_1}(\varepsilon)\right| = F^{-1}(1-\varepsilon^2) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant 1-\varepsilon^2\right\}, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Тогда имеем $F^{-1}(1-\varepsilon^2) \leqslant x_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$. Отсюда $F(x_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon^2$, $\varepsilon \in (0,1)$, т.е.

$$1 - F(x_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{30}$$

Из равенства

$$x = E + \tfrac{1}{\tau}\left(|\ln \varepsilon^2| + \ln 2\right) + C\sqrt{|\ln \varepsilon^2| + \ln 2}$$

при любом $x \geqslant E$ можно выразить

$$\begin{aligned}\sqrt{|\ln \varepsilon^2| + \ln 2} &= \frac{\tau}{2}\left(\sqrt{C^2 + \tfrac{4}{\tau}(x-E)} - C\right) \\ &= \sqrt{C_\tau^2 + \tau(x-E)} - C_\tau,\end{aligned}$$

где $C_\tau := \tau C/4$. Отсюда имеем

$$|\ln \varepsilon^2| = \left(\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x-E)} - C_\tau\right)^2 - \ln 2.$$

С учетом (30) справедливо

$$1 - F(x) \leqslant \exp\left\{-\left(\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x-E)} - C_\tau\right)^2 + \ln 2\right\}, \quad x \geqslant E.$$

Возведём в квадрат выражение в скобках в экспоненте. Осуществляя это, получаем

$$1 - F(x) \leqslant 2e^{-2C_\tau^2} \exp\left\{-\tau(x-E) + 2C_\tau\sqrt{C_\tau^2 + \tau(x-E)}\right\}, \quad x \geqslant E. \tag{31}$$

Далее рассмотрим $M(\tau - \delta)$ при $\delta \in (0, \tau)$. В соответствии с (29) справед-

1355

ливо представление

$$M(\tau-\delta)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\bar{\lambda}_k^{1-\tau+\delta}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\exp\bigl\{(\tau-\delta)|\ln\bar{\lambda}_k|\bigr\}\bar{\lambda}_k=\int\limits_0^{+\infty}e^{(\tau-\delta)x}\,dF(x).$$

В силу того, что $M(\tau-\delta)<\infty$, имеем

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{x>T}e^{(\tau-\delta)x}\,dF(x)=0.$$

Тогда из следующей оценки

$$\int\limits_{x>T}e^{(\tau-\delta)x}\,dF(x)\geqslant e^{(\tau-\delta)T}\int\limits_{x>T}dF(x)=e^{(\tau-\delta)T}(1-F(T)),\quad T>0.$$

получаем

$$\lim_{T\to\infty}e^{(\tau-\delta)T}(1-F(T))=0.$$

С учетом этого соотношения проинтегрируем $M(\tau-\delta)$ по частям

$$\begin{aligned}M(\tau-\delta)&=-\int\limits_0^{+\infty}e^{(\tau-\delta)x}\,d(1-F(x))\\&=-e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\Big|_0^{+\infty}+(\tau-\delta)\int\limits_0^{+\infty}e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx\\&=1-F(0)+(\tau-\delta)\int\limits_0^{+\infty}e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx.\end{aligned}$$

1356

Далее оценим

$$\begin{aligned} M(\tau-\delta) &= 1-F(0)+(\tau-\delta)\int\limits_0^E e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \\ &\quad +(\tau-\delta)\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \\ &\leqslant 1-F(0)+(\tau-\delta)e^{(\tau-\delta)E}(1-F(0))E+(\tau-\delta)\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx \\ &\leqslant 1+\tau E\cdot e^{\tau E}+\tau\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx. \end{aligned}$$

С помощью (31) и с учетом неравенства $0<\delta<\tau$ произведём оценку последнего интеграла:

$$\begin{aligned} \int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)x}(1-F(x))\,dx &\leqslant e^{\tau E}\int\limits_E^{+\infty} e^{(\tau-\delta)(x-E)}(1-F(x))\,dxx \\ &\leqslant 2e^{\tau E-2C_\tau^2}\int\limits_E^{+\infty}\exp\Big\{-\delta(x-E)+2C_\tau\sqrt{C_\tau^2+\tau(x-E)}\Big\}\,dx \\ &= \tfrac{2}{\tau}\cdot e^{\tau E-2C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}(u-C_\tau^2)+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du \\ &\leqslant \tfrac{2}{\tau}\cdot e^{\tau E-C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du. \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем

$$M(\tau-\delta) \leqslant 1+\tau E\cdot e^{\tau E}+2e^{\tau E-C_\tau^2}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty}\exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u+2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du.$$

Далее оценим последний интеграл. Для удобства разделим его на сумму

1357

двух слагаемых:

$$\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + 2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du = J_1(\tau,\delta) + J_2(\tau,\delta),$$

где

$$J_1(\tau,\delta) := \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + 2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du,$$

$$J_2(\tau,\delta) := \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + 2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du.$$

Оценим первый интеграл:

$$\begin{aligned} J_1(\tau,\delta) &= \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u\big(1-\tfrac{2\tau C_\tau}{\delta\sqrt{u}}\big)\Big\}\,du \\ &\leqslant \int\limits_{\sqrt{u}>\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\big\{-\tfrac{\delta}{2\tau}\,u\big\}\,du \\ &= \frac{2\tau}{\delta}\exp\big\{-\tfrac{8\tau C_\tau^2}{\delta}\big\} \\ &\leqslant \frac{2\tau}{\delta}\,\exp\big\{-8C_\tau^2\big\}. \end{aligned}$$

Оценим второй интеграл:

$$\begin{aligned} J_2(\tau,\delta) &\leqslant \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + \tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\Big\}\,du \\ &= \exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot \int\limits_{C_\tau\leqslant\sqrt{u}\leqslant\frac{4\tau}{\delta}C_\tau} \exp\big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u\big\}\,du \\ &= \exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot\frac{\tau}{\delta}\cdot\Big(\exp\big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,C_\tau^2\big\} - \exp\big\{-\tfrac{16\tau}{\delta}\,C_\tau^2\big\}\Big) \\ &\leqslant \frac{\tau}{\delta}\,\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}. \end{aligned}$$

1358

Исходя из этого, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_\tau^2}^{+\infty} \exp\Big\{-\tfrac{\delta}{\tau}\,u + 2C_\tau\sqrt{u}\Big\}\,du &= J_1(\tau,\delta) + J_2(\tau,\delta)\\ &\leqslant \frac{2\tau}{\delta}\,\exp\big\{-8C_\tau^2\big\} + \frac{\tau}{\delta}\cdot\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\\ &\leqslant \frac{\tau}{\delta}\,\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}\cdot\Big(2\exp\big\{-16C_\tau^2\big\}+1\Big)\\ &\leqslant \frac{3\tau}{\delta}\,\exp\big\{\tfrac{8\tau}{\delta}C_\tau^2\big\}.\end{aligned}$$

В итоге

$$M(\tau-\delta) \leqslant c_{\tau,1} + \frac{c_{\tau,2}}{\delta}\cdot\exp\Big\{\frac{c_{\tau,3}}{\delta}\Big\},$$

где

$$c_{\tau,1} := 1 + \tau E\cdot e^{\tau E},\qquad c_{\tau,2} := 6\tau e^{\tau E - C_\tau^2},\qquad c_{\tau,3} := \exp\big\{8\tau C_\tau^2\big\}.$$

Отсюда несложно видеть, что соотношение (28) выполнено.

Достаточность. Предположим, что выполнено условие (28). Зафиксируем произвольные $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$. Воспользуемся неравенством (22) леммы 3 с

$$\gamma = \gamma_{d,\varepsilon} := \frac{\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}\,\tau}{\sqrt{d}+\sqrt{|\ln\varepsilon^2|}} \in (0,\tau). \tag{32}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\ln n^{Y_d}(\varepsilon) &\leqslant d\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon})}{\gamma_{d,\varepsilon}} + |\ln\varepsilon^2|\cdot\frac{1-\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}}\\ &= Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau}|\ln\varepsilon^2| + d\cdot\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}} + |\ln\varepsilon^2|\cdot\Big(\frac{1}{\gamma_{d,\varepsilon}}-\frac{1}{\tau}\Big)\\ &= Ed + \tfrac{1-\tau}{\tau}|\ln\varepsilon^2| + \sqrt{d\,|\ln\varepsilon^2|}\cdot\big(R(d,\varepsilon)+r(d,\varepsilon)\big),\end{aligned} \tag{33}$$

1359

где

$$R(d,\varepsilon) := \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{|\ln \varepsilon^2|}} \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}}, \quad r(d,\varepsilon) := \frac{\sqrt{|\ln \varepsilon^2|}}{\sqrt{d}} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_{d,\varepsilon}} - \frac{1}{\tau}\right).$$

Сначала рассмотрим $r(d,\varepsilon)$. Сделаем подстановку (32):

$$r(d,\varepsilon) = \frac{\sqrt{|\ln \varepsilon^2|}}{\sqrt{d}} \cdot \left(\frac{\sqrt{d} + \sqrt{|\ln \varepsilon^2|}}{\sqrt{|\ln \varepsilon^2|}\,\tau} - \frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{d} + \sqrt{|\ln \varepsilon^2|}}{\sqrt{d}\,\tau} - \frac{\sqrt{|\ln \varepsilon^2|}}{\sqrt{d}\tau} = \frac{1}{\tau}.$$

Далее рассмотрим $R(d,\varepsilon)$. Представим его в виде:

$$\begin{aligned} R(d,\varepsilon) &= \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{|\ln \varepsilon^2|}} \cdot \gamma_{d,\varepsilon} \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \\ &= \frac{\sqrt{d}\,\tau}{\sqrt{d} + \sqrt{|\ln \varepsilon^2|}} \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \\ &= (\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2}. \end{aligned}$$

Предположим, что $|\ln \varepsilon^2| > d$. Тогда

$$\gamma_{d,\varepsilon} = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{d}{|\ln \varepsilon^2|}} + 1} > \frac{\tau}{2}.$$

В этом случае, с учетом того факта, что $E \geqslant 0$, верна оценка:

$$R(d,\varepsilon) \leqslant (\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon})}{\tau^2/4} = 4(\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \ln M\big(\tau - (\tau - \gamma_{d,\varepsilon})\big).$$

Несложно видеть, что предположение (28) влечет существование константы $B_{\tau,1}$ такой, что $R(d,\varepsilon) \leqslant B_{\tau,1}$ для любых d и ε, удовлетворяющих $|\ln \varepsilon^2| > d$.

Предположим, что $|\ln \varepsilon^2| \leqslant d$. Тогда несложно видеть, что $\gamma_{d,\varepsilon} \in (0, \tau/2]$. Рассмотрим функцию $L(\gamma) := \ln M(\gamma)$ при $\gamma \in (0, \tau/2]$. Заметим, что

$$L(\gamma) = L(0) + L'(0)\gamma + L''(\theta)\,\frac{\gamma^2}{2},$$

1360

при каждом $\gamma \in (0, \tau/2]$ и некоторым $\theta \in (0, \gamma)$. Здесь

$$\begin{aligned} L(0) &= \ln\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k\Big) = \ln 1 = 0, \\ L'(0) &= \ln\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}\Big)'\Big|_{\gamma=0} = \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar\lambda_k| \bar\lambda_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}}\Big|_{\gamma=0} = E, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L''(\theta) &= \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar\lambda_k| \bar\lambda_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}}\right)'\Big|_{\gamma=\theta} \\ &= \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar\lambda_k|^2 \bar\lambda_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}} - \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar\lambda_k| \bar\lambda_k^{1-\gamma}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\gamma}}\right)^2\right)\Big|_{\gamma=\theta} \\ &= \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar\lambda_k|^2 \bar\lambda_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\theta}} - \left(\frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar\lambda_k| \bar\lambda_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\theta}}\right)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $\gamma \in (0, \tau/2]$

$$L''(\theta) \leqslant \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar\lambda_k|^2 \bar\lambda_k^{1-\theta}}{\sum_{k\in\mathbb{N}} \bar\lambda_k^{1-\theta}} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |\ln\bar\lambda_k|^2 \, \bar\lambda_k^{1-\frac{\tau}{2}}.$$

Обозначим за $B_{\tau,2}$ правую часть полученного выше неравенства. Тогда имеем

$$L(\gamma) \leqslant E\gamma + B_{\tau,2}\,\frac{\gamma^2}{2}, \quad \gamma \in (0, \tau/2].$$

Отсюда, в частности, получаем оценку

$$\frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} = \frac{L(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \leqslant \frac{B_{\tau,2}}{2}.$$

Возвращаемся к оценке $R(d,\varepsilon)$ при $|\ln\varepsilon^2| \leqslant d$:

$$R(d,\varepsilon) = (\tau - \gamma_{d,\varepsilon}) \cdot \frac{\ln M(\gamma_{d,\varepsilon}) - E\gamma_{d,\varepsilon}}{\gamma_{d,\varepsilon}^2} \leqslant \frac{\tau B_{\tau,2}}{2}.$$

Следовательно, для любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ имеем $R(d,\varepsilon) \leqslant \max\{B_{\tau,1}, B_{\tau,2}/2\}$.

1361

Тогда

$$R(d,\varepsilon) + r(d,\varepsilon) \leqslant \max\{B_{\tau,1}, B_{\tau,2}/2\} + \frac{1}{\tau}, \quad d \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in (0,1).$$

Полагая за константу C правую часть этого неравенства, из оценки (33) получаем нужное неравенство (27). Теорема доказана. $\square$

4.2 Примеры

Рассмотрим некоторые примеры случайных полей тензорного типа, для которых применима теорема, доказанная в предыдущем параграфе. Для начала для наглядности немного сузим условие (28). В дальнейшем мы покажем, что данного упрощения будет достаточно, чтобы охватить большое количество интересных и важных случайных процессов.

Пусть собственные числа случайного процесса удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{c_1}{(k-a)^{1+r}} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{c_2}{(k-a)^{1+r}}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

где $0 < c_1 \leqslant c_2$, $r > 0$, $a \in [0,1)$. Покажем, что данное условие можно получить из условия (28). Пусть

$$\Lambda_\gamma \ := \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^{1-\gamma},$$

Произведём оценку данного ряда сверху для $\gamma \in (0,\tau)$, $\tau > 0$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_\gamma \ &= \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1-\gamma} \\
&\leqslant \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_2^{1-\gamma}}{(k-a)^{(1+r)(1-\gamma)}} \\
&= \ \frac{c_2^{1-\gamma}}{(1-a)^{(1+r)(1-\gamma)}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_2^{1-\gamma}}{(k-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}
\end{aligned}$$

1362

Далее оценим сумму интегралом:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_2^{1-\gamma}}{(k-a)^{(1+r)(1-\gamma)}} &\leqslant \int\limits_1^{\infty}\frac{c_2^{1-\gamma}\,dx}{(x-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}\\ &= \frac{c_2^{1-\gamma}}{(r-r\gamma-\gamma)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma}}.\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}\Lambda_\gamma &\leqslant \frac{c_2^{1-\gamma}}{(1-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}+\frac{c_2^{1-\gamma}}{(r-r\gamma-\gamma)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma}}\\ &= \frac{c_2^{1-\gamma}(r-r\gamma-\gamma+1-a)}{(r-r\gamma-\gamma)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma+1}}\\ &= \frac{c_2^{1-\gamma}(r-r\gamma-\gamma+1-a)}{(\tau-\gamma)(r+1)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma+1}}.\end{aligned}$$

Оценивая далее, имеем

$$\Lambda_\gamma \leqslant \frac{c_2^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{r-r\gamma-\gamma+1-a}{(r+1)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma+1}} \leqslant \frac{c_2^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{r+1-a}{(r+1)(1-a)^{r+1}}.$$

Теперь произведём оценку данного ряда снизу для $\gamma\in(0,\tau)$, $\tau>0$.

$$\begin{aligned}\Lambda_\gamma &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{1-\gamma}\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_1^{1-\gamma}}{(k-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}\\ &\geqslant \int\limits_1^{\infty}\frac{c_1^{1-\gamma}\,dx}{(x-a)^{(1+r)(1-\gamma)}}\\ &= \frac{c_1^{1-\gamma}}{(r-r\gamma-\gamma)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma}}\\ &= \frac{c_1^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{1}{(r+1)(1-a)^{r-r\gamma-\gamma}}\\ &\geqslant \frac{c_1^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{1}{r+1}.\end{aligned}$$

1363

Резюмируя, мы получили следующую оценку для нашего ряда:

$$\frac{c_1^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{1}{r+1}\leqslant\Lambda_\gamma\leqslant\frac{c_2^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{r+1-a}{(r+1)(1-a)^{r+1}}.$$

Так как $M(\gamma)=\frac{\Lambda_\gamma}{\Lambda}$, следовательно:

$$\frac{c_1^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{1}{(r+1)\Lambda}\leqslant M(\gamma)\leqslant\frac{c_2^{1-\gamma}}{\tau-\gamma}\cdot\frac{r+1-a}{\Lambda(r+1)(1-a)^{r+1}}.$$

Рассмотрим $M(\tau-\delta)^\delta$. Видим, что

$$\lim_{\delta\to0}\left(\frac{c_1^{1-\tau+\delta}}{\delta}\cdot\frac{1}{(r+1)\Lambda}\right)^\delta=1,$$

а также

$$\lim_{\delta\to0}\left(\frac{c_2^{1-\tau+\delta}}{\delta}\cdot\frac{r+1-a}{\Lambda(r+1)(1-a)^{r+1}}\right)^\delta=1.$$

По теореме о сжатой последовательности

$$\lim_{\delta\to0}M(\tau-\delta)^\delta=1.$$

Резюмируя, мы показали, что условие (34) может быть получено из условия (28). Из этого следует, сложность аппроксимации последовательности тензорных степеней Y_d, составленных на основе случайных процессов, для собственных чисел которых верно условие (34), имеет следующую оценку:

$$\ln n^{Y_d}(\varepsilon)\leqslant Ed+\tfrac{1-\tau}{\tau}\,|\ln\varepsilon^2|+C\sqrt{d\,|\ln\varepsilon^2|},\quad d\in\mathbb{N},\quad \varepsilon\in(0,1),C>0.$$

Теперь представим примеры случайных процессов, для которых верно условие (34).

1) Винеровский процесс. Его собственные числа равны:

$$\lambda_k=\frac{1}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2}$$

Данное выражение соответствует условию (34) со следующим значением пара-

1364

метров:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \frac{1}{\pi^2} \\ a &= \frac{1}{2} \\ r &= 1 \end{aligned}$$

2) Броуновский мост. Его собственные числа представляются следующим образом:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$$

Данное выражение соответствует условию (34) со следующим значением параметров:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \frac{1}{\pi^2} \\ a &= 0 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

3) Центрированный винеровский процесс. Его собственные числа представляются следующим образом:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$$

Данное выражение соответствует условию (34) со следующим значением параметров

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \frac{1}{\pi^2} \\ a &= 0 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

4) r-раз интегрированный эйлеровский процесс. Его собственные числа

1365

представляются следующим образом:

$$\lambda_k = \frac{1}{(\pi(k-\frac{1}{2}))^{2r+2}}$$

Данное выражение соответствует условию (34) со следующим значением параметров

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = (\frac{1}{\pi})^{2r+2} \\ a &= \frac{1}{2} \\ r &= 2r+1 \end{aligned}$$

5) r-раз интегрированный винеровский процесс. Используя асимптотику из (8), можно заключить, что существуют такие константы c_1 и c_2, при которых вид его собственных чисел удовлетворяет условию (34) со следующим значением параметров:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ r &= 2r+1 \end{aligned}$$

Как мы видим, условие (34) охватывает очень большое количество полезных и важных случайных процессов и помогает находить сложность аппроксимации последовательностей их тензорных степеней, используя теорему, доказанную в предыдущем параграфе.

1366

5 Заключение

При исследовании сложности аппроксимации случайных полей тензорного типа большой параметрической размерности получены следующие результаты:

1. Найдена асимптотика сложности аппроксимации для тензорного степени интегрированного эйлеровского процесса с широкими условиями на параметры гладкости маргинального процесса.

2. Для широкого класса случайных полей найдены необходимые и достаточные условия на собственные числа ковариационного оператора заданного случайного процесса, при которых верна специальная оценка сложности аппроксимации последовательности тензорных степеней этого процесса. Общий критерий применён к тензорным степеням различных случайных процессов.

1367

Список литературы

[1] A.A. Khartov, *Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements*, Journal of Complexity 31, 2015, 835–866.

[2] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels, *Regular variation*, 1987.

[3] E. Novak, I. H. Sloan, J. F. Traub, H. Woźniakowski, *Essays on the Complexity of Continuous Problems*, EMS, Zürich, 2009

[4] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information*, EMS Tracts Math. 6, EMS, Zürich, 2008.

[5] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals*, EMS Tracts Math. 12, EMS, Zürich, 2010.

[6] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume III: Standard Information for Operators*, EMS Tracts Math. 18, EMS, Zürich, 2012.

[7] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, *Information, Uncertainty, Complexity*,Addison-Wasley, Reading MA, 1983.

[8] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H.Woźniakowski, *Information-Based Complexity*, Academic Press, New York, 1988.

[9] J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Academic Press, NewYork, 1980.

[10] M. A. Lifshits , E. V. Tulyakova . *Curse of dimensionality in approximation of random field*, probability and mathematical statistics, Vol. 26, Fasc. 1, 2006, 97–112.

[11] K. Ritter, *Average-case Analysis of Numerical Problems*, Lecture Notes in Math. No 1733, Springer, Berlin, 2000.

[12] J. B. Walsh, *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics* 1180, Springer-Verlag, New York, 1986, 265—439.

1368

[13] E. Wong, M. Zakai, *Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 29, no. 2, 1974, 109–122.

[14] M.A.Lifshits, A.Papageorgiou, H.Woźniakowski *Tractability of Multi-Parametric Euler and Wiener Integrated Processes*, Probability and Mathematical Statistics 32(1), 2012, 131-165.

[15] M. Lifshits, M. Zani *Approximation of additive random fields based on standard information: Average case and probabilistic settings*, Journal of Complexity, Volume 31, Issue, 2015, 659-674.

[16] M. Lifshits, M. Zani *Approximation complexity of additive random fields*, Journal of Complexity, Volume 24, Issue, 2008, 362-379.

[17] A. A. Khartov, M. Zani *Asymptotic analysis of average case approximation complexity of additive random fields*, Journal of Complexity, 2018, 24-44.

[18] F. J. Hickernell, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, *Tractability of linear multivariate problems in the average case setting*, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods*, Springer, 2008, 461–493.

[19] F. J. Hickernell, H. Woźniakowski, *Integration and approximation in arbitrarydimension*, Adv. Comput. Math., 12, no. 1, 2000, 25–58.

[20] M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowskii, *Average case tractability of nonhomogeneous tensor product problems*, J. Complexity, 28, 2012, no. 5–6, 539–561.

[21] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*. Наука, 1965.

[22] J. R. Blum, J. Kiefer, M. Rosenblatt, *Distribution free tests of independence based on the sample distribution function*, Ann. Math. Statist., 32, no. 2, 1961, 485–498.

[23] J. C. Bronski, *Small ball constants and tight eigenvalue asymptotics for fractional Brownian motions*, J. Theoret. Probab., 16, 2003, 87–100.

1369

[24] F. Gao, J. Hanning and F. Torcaso, *Integrated Brownian motions and exact L2-small balls*, Ann. Probab. 31, 2003, 1320–1337.

[25] А.А.Хартов *Сложность аппроксимации гауссовских случайных полей большой параметрической размерности*, Санкт-Петербург, 2014.

[26] M.A.Lifshits, *Lectures on Gaussian Processes*, Springer, New York, 2012.

[27] L. Beghin, Ya. Nikitin, and E. Orsingher, *Exact small ball constants for some Gaussian processe under the L2-norm*, Journal of Mathematical Sciences (New York), 2005, 128:1, 2493–2502.

[28] G.S. Watson, *Goodnessoft on-fit-tests on a circle*, Biometrika, 48, 1961, 109-114.

1370

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Морозов А.И.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Realization of Morse-Smale Surface Diffeomorphisms with Oriented Heteroclinic» являются: реализация диффеоморфизма Морса-Смейла на поверхности по заданному графу. Так же в работе описан класс допустимых графов, по каждому из которых можно реализовать диффеоморфизм из рассматриваемого класса. Доказана лемма, о возможности восстановления числа седловых, стоковых и источниковых точек из графа.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: реализация диффеоморфизмов Морса-Смейла, Realization of Morse-Smale diffeomorphisms, в выдаче поисковиков было исследовано 14 статьи, 3 монографий, 1 диссертация (список см. в списке литературы выпускной квалификационной работы) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [4], [10], [11] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Починкой Ольгой Витальевной, профессором кафедры фундаментальной математики факультета Информатики, Математики и Компьютерных наук НИУ ВШЭ НН. Так же были проведены консультации с Вячеславом Зигмундовичем Гринесом, профессором кафедры фундаментальной математики факультета Информатики, Математики и Компьютерных наук НИУ ВШЭ НН
- Проведено выступление на научном семинаре Международной Лаборатории Динамических систем и Приложений НИУ ВШЭ НН.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя

обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится/состоялась 16.06.2021. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  Морозов Андрей Игоревич

05.06.2021
Нижний Новгород, Россия

FEDERAL STATE AUTONOMOUS EDUCATIONAL INSTITUTION
FOR HIGHER EDUCATION
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
Faculty of Mathematics, Informatics and Computer Science

Morozov Andrei Igorevich

REALIZATION OF MORSE-SMALE SURFACE DIFFEOMORPHISMS WITH ORIENTED HETEROCLINICS

Master's Thesis

Field of Study: *01.04.01 «Mathematics»*

Master's Programme «Mathematics»

Reviewer
Assoc. Prof., Cand. of Math. Sc.
Mitryakova Tatiana Mikhailovna

Supervisor
Doc. of Math. Sc.,Prof.
Olga Vitalevna Pochinka
Advisor
Doc. of Math. Sc.,Prof.
Vyacheslav Zigmundovich Grines

Nizhny Novgorod 2021

CONTENTS

p.

CHAPTER 1 Introduction and formulation of results **3**

CHAPTER 2 Auxiliary defenitions and facts **6**

2.1 Smale order 6

2.2 Compatible system of neighbourhoods 6

2.3 Orientability of heteroclinic intersection 9

CHAPTER 3 The scheme of diffeomorphism $f \in G$ **11**

3.1 The scheme of Morse-Smale diffeomorphism on surface with $beh(f) = 1$ 11

3.2 Reducing the scheme of the diffeomorphism $f \in G$ to the canonical form 13

3.3 Reducing the diffeomorphism f to canonical form 20

CHAPTER 4 The graph of a diffeomorphism $f \in G$ **22**

4.1 The definition of the graph 22

4.2 Properties of the graph 24

CHAPTER 5 Realization of diffeomorphisms of the class G (proof of the theorem 1) **33**

REFERENCES 41

Abstract

In this paper, we consider a class of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms defined on an orientable surface. In papers by A.A. Bezdenezhnykh and V.Z. Grines showed that such diffeomorphisms have a finite number of heteroclinic orbits. In addition, the classification problem for such diffeomorphisms is reduced to the problem of distinguishing orientable graphs with substitutions describing the geometry of a heteroclinic intersection. However, such graphs generally do not admit polynomial discriminating algorithms. The main result of my thesis is a part of the classification, namely, a class of admissible graphs has been distinguished, each class of isomorphism of which can be realized by a diffeomorphism of a surface with an orientable heteroclinic. The complete classification is described in a recent paper by D.S. Malishev, A.I.Morozov and O.V. Pochinka. The results obtained are directly related to the realization problem of homotopy classes of homeomorphisms on closed orientable surfaces. In particular, this classification give an approach to constructing a representative in each homotopy class of homeomorphisms of algebraically finite type according to the Nielsen classification, which is an open problem today.

CHAPTER 1

Introduction and formulation of results

Recall that the diffeomorphism $f : M^n \to M^n$, given on a smooth closed(compact, without boundary) connected n-manifold ($n \geq 1$) M^n is called a *Morse-Smale diffeomorphism*, if

1) its non-wandering set Σ_f consists of a finite number of hyperbolic orbits;
2) the manifolds W_p^s, W_q^u intersect transversally for any non-wandering points p, q.

We denote by $MS(M^n)$ the set of such diffeomorphisms.

For orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms f, given on an orientable surface M^2, the notion of an orientable heteroclinic is well defined as the coincidence of orientations given at heteroclinic points by tangent vectors to saddle separatrices. We denote by $G \subset MS(M^2)$ the class of orientation-preserving diffeomorphisms with orientable heteroclinic intersection (see Figure 1.1). Note that diffeomorphisms of class G can be given on any orientable surfaces.

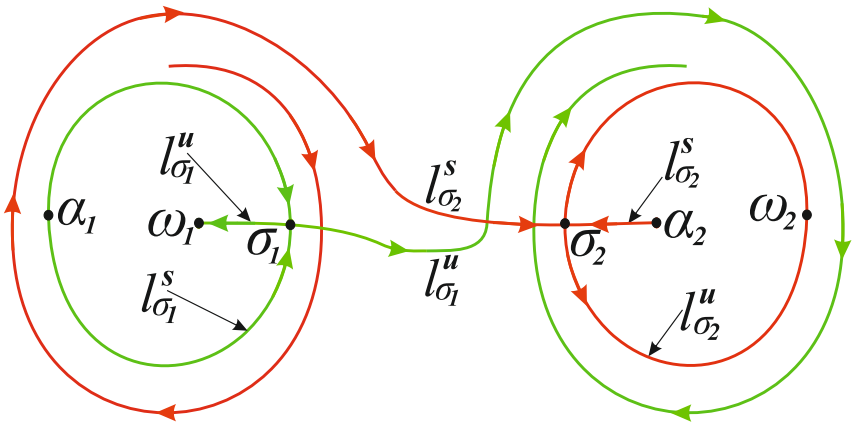


Figure 1.1 — Diffeomorphism from the class G

It was announced by V.Grines and A. Bezdenezhnykh [1] and was proved as the chapter of candidate's dissertation by A.Bezdenezhnykh [2] that any dif-

1376

feomorphism $f \in G$ has a finite number of heteroclinic orbits. This result was also proved in [12] using another methods. This fact allows us to describe the complete topological invariant of the considered diffeomorphisms in the form of a finite graph T_f,the edges and vertices of which correspond to the geometric arrangement on the ambient surface of saddle separatrices (see Figure 1.2) and the automorphism P_f of the grap T_f corresponds to the permutation of these separatrices due to the diffeomorphism f. In the section 4 the notion of isomorphism of graphs (T_f, P_f), $(T_{f'}, P_{f'})$ of diffeomorphisms $f, f' \in G$ is introduced.

Note that a graph, as a complete invariant, has already been constructed and described by V. Grines [4] for the case that includes both non-orientable and orientable heteroclinics, but in the case of an arbitrary (non-orientable) heteroclinic, excepted for the graph, an additional invariant is required – a heteroclinic substitution, which does not allow efficient discrimination algorithms. In the case of an orientable heteroclinic, the substitution is replaced by information about the homotopy type of the projection of the separatrices, which is expressed by a pair of coprime numbers and can be recognized in polynomial time.

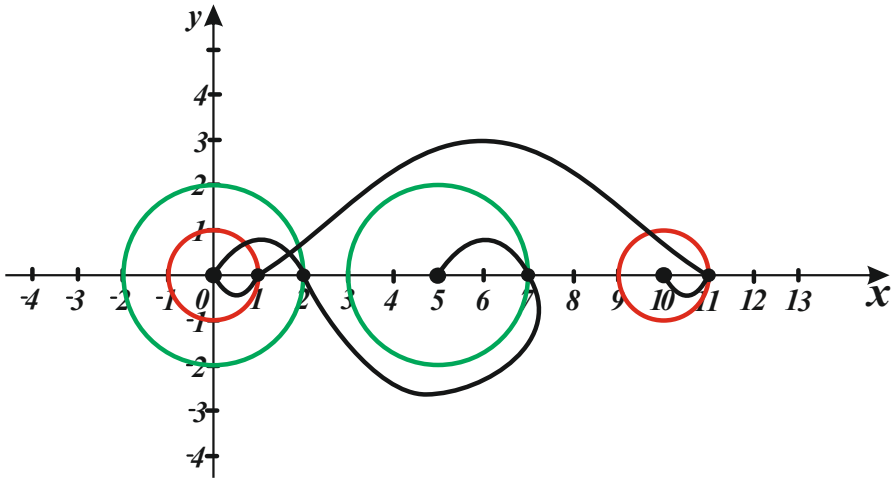


Figure 1.2 — The graph T_f for the diffeomorphism $f \in G$, whose phase portrait is shown in the Figure 1.1

To solve the realization problem, based on the properties of the graph (T_f, P_f), $f \in G$, we distinguished a class of admissible graphs, for which we proved the following result.

Theorem 1. *For any admissible graph (T, P), there exists a diffeomorphism $f \in G$ such that the graph (T, P) and (T_f, P_f) are isomorphic.*

The following results have already been proved in paper [9] by D.S. Malishev, A.I. Morozov and O.V. Pochinka.

Statement 1. *Diffeomorphisms $f, f' \in G$ are topologically conjugate if and only if their graphs (T_f, P_f), $(T_{f'}, P_{f'})$ are isomorphic.*

Statement 2. *There is an efficient algorithm for establishing isomorphism of graphs (T_f, P_f), $(T_{f'}, P_{f'})$.*

CHAPTER 2

Auxiliary defenitions and facts

2.1 Smale order

In the set of periodic orbits of any diffeomorphism $f \in MS(M^n)$ one can introduce a complete order relation, which is an extension of the partial order introduced by S. Smale [15]. Namely, let $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ — be the periodic orbits of the Morse-Smale diffeomorphism f. One can say, that orbits $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ *are in the relation* $\prec$ ($\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$), if

$$W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \emptyset.$$

A sequence of different periodic orbits $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{i_0}, \mathcal{O}_{i_1}, ..., \mathcal{O}_{i_k} = \mathcal{O}_j (k \geqslant 1)$, such that $\mathcal{O}_{i_0} \prec \mathcal{O}_{i_1} \prec \ldots \prec \mathcal{O}_{i_k}$ is called a *chain of length k, connecting periodic orbits* $\mathcal{O}_i$ *and* $\mathcal{O}_j$. Since the non-wandering set is finite, for any diffeomorphism $f \in MS(M^n)$ there is a well-defined number equal to the length of the maximal saddle chain, which is denoted by

$$beh(f).$$

2.2 Compatible system of neighbourhoods

The idea of considering compatible tubular systems for Morse-Smale diffeomorphisms goes back to the works of J. Palis and S. Smale [16], [17]. In this section, we present a modification of this idea for the diffeomorphism $f \in MS(M^2)$.

Let σ – be a saddle periodic point of the diffeomorphism $f \in MS(M^2)$. Let m_σ be the period of the saddle point σ. Recall that the *orientation type* of a saddle point σ is a number ν_σ, equal to $-1\,(+1)$, if the diffeomorphism $f^{m_\sigma}|_{W^u_\sigma}$ changes (preserves) orientation. Denote by $a_{\nu_\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ the diffeomorphism given by the formula

$$a_{\nu_\sigma}(x, y) = \left(\nu_\sigma \cdot \frac{x}{2}, \nu_\sigma \cdot 2y\right).$$

1379

The diffeomorphism $a_{\nu_\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ has a unique fixed saddle point at the origin O with stable manifold $W^s_O = Ox_1$ and unstable manifold $W^u_O = Ox_2$.

Let $\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x_1 x_2| < 1\}$. Note that the set $\mathcal{N}$ is invariant under the canonical diffeomorphism a_{ν_σ}. In a neighborhood $\mathcal{N}$, we define a pair of transversal foliations $\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}^s$ as follows:

$$\mathcal{F}^u = \bigcup_{c_2 \in Ox_2} \{(x_1, x_2) \in \mathcal{N} \ : \ x_2 = c_2\},$$

$$\mathcal{F}^s = \bigcup_{c_1 \in Ox_1} \{(x_1, x_2) \in \mathcal{N} \ : \ x_1 = c_1\}.$$

Note that the set $\mathcal{N}$ is invariant under the canonical diffeomorphism a_ν, which takes the leafs of the foliation $\mathcal{F}^u$ ($\mathcal{F}^s$) to the leafs of the same foliation.

A neighborhood N_σ of a saddle point σ is called *linearizing*, if there exists a homeomorphism $h_\sigma : N_\sigma \to \mathcal{N}$, conjugating diffeomorphism $f^{m_\sigma}|_{N_\sigma}$ with canonical diffeomorphism $a_{\nu_\sigma}|_{\mathcal{N}}$.

The foliations $\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}^s$ are induce by the homeomorphism h_σ^{-1}, f^{m_σ}- invariant foliations F^u_σ, F^s_σ on the linearizing neighborhood N_σ (see Figure 2.1). For any point $x \in N_\sigma$ denote by $F^u_{\sigma,x}$, $F^u_{\sigma,x}$ leaf of foliation F^u_σ, F^s_σ, passing through point x.

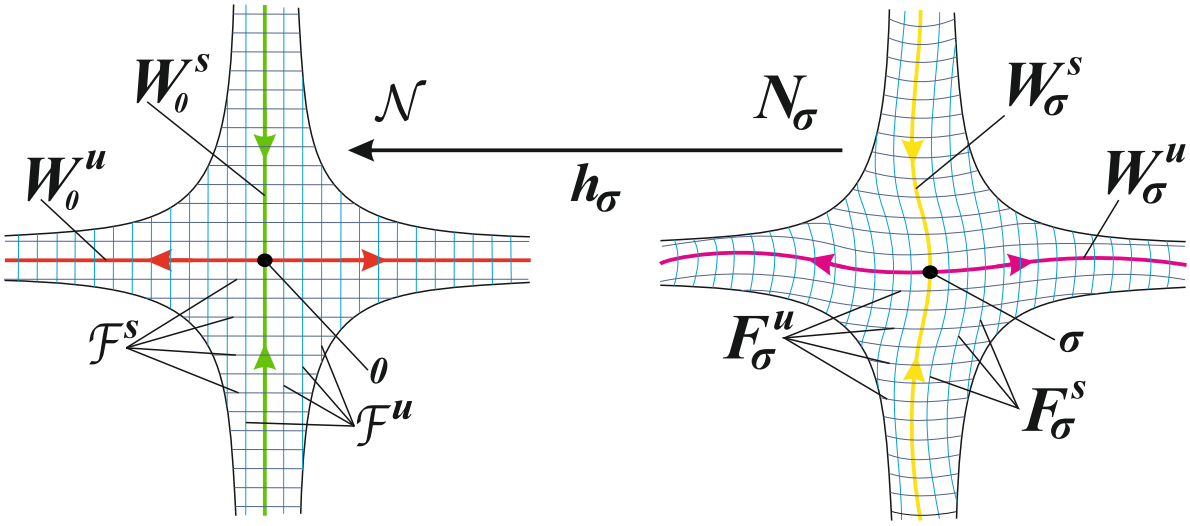


Figure 2.1 — The linearizing neighborhood of the saddle point σ

A neighborhood $N_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup_{k=0}^{m_\sigma - 1} f^k(N_\sigma)$, equipped with the map $h_{\mathcal{O}_\sigma}$, composed of the homeomorphisms $h_\sigma f^{-k} : f^k(N_\sigma) \to \mathcal{N}$, $k = 0, \ldots, m_\sigma - 1$, will be called a *linearizing neighborhood of the orbit* $\mathcal{O}_\sigma$.

A collection N_f of f-invariant linearizing neighborhoods N_σ of all saddle points σ of a diffeomorphism $f \in MS(M^2)$ is called a *compatible system of neighbourhoods* (see Figure 2.2), if the following properties are hold:

- if $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2} = \emptyset$ and $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_2} = \emptyset$ for saddle points σ_1, σ_2, then $N_{\sigma_1} \cap N_{\sigma_2} = \emptyset$;
- if $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2} \neq \emptyset$ for saddle points σ_1, σ_2, then

$$(F^u_{\sigma_1,x} \cap N_{\sigma_2}) \subset F^u_{\sigma_2,x}, \quad (F^s_{\sigma_2,x} \cap N_{\sigma_1}) \subset F^s_{\sigma_1,x},$$

for $x \in (N_{\sigma_1} \cap N_{\sigma_2})$.

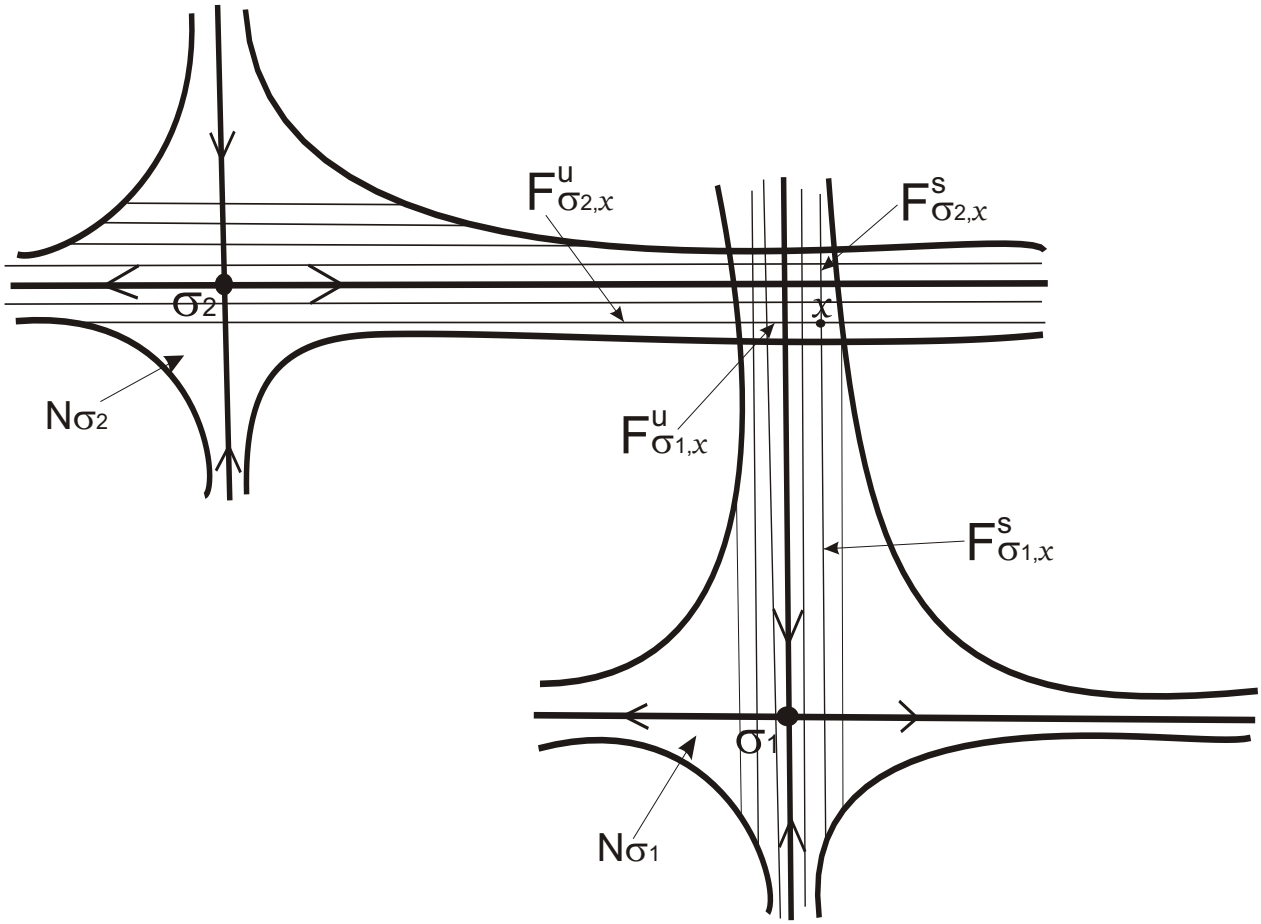


Figure 2.2 — The intersection of linearizing neighborhoods N_{σ_1} and N_{σ_2} of saddle points σ_1 and σ_2

Statement 3 ([3], Theorem 2). *For any diffeomorphism $f \in MS(M^2)$ there is a compatible system of neighborhoods.*

Notice, that in paper [3] the proof similar to the fact is given for dimension 3; it carries over literally to dimension two.

2.3 Orientability of heteroclinic intersection

For orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms f, given on an orientable surface M^2, V.Grines. and A.Bezdenezhnykh[1] introduced the concept of an orientable heteroclinic as follows.

Let σ_i, σ_j be saddle points of difeomorphism f, such that $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j} \neq \emptyset$. For any heteroclinic point $x \in W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ we define an ordered pair of vectors $(\vec{v}^u_x, \vec{v}^s_x)$, where:

- $\vec{v}^u_x$ is the tangent vector to the unstable manifold of the point σ_j at the point x and directed from x to $f^{m^u}(x)$, where m^u is a period of the unstable separatrix containing x;
- $\vec{v}^s_x$ is the tangent vector to the stable manifold of the point σ_i at the point x and directed from x to f^{m^s}, where m^s is the period of the stable separatrix containing x.

Heteroclinic intersection of diffeomorphism f is called *orientable* (see Figure 2.4), if ordered pairs of vectors $(\vec{v}^u_x, \vec{v}^s_x)$ determines the same orientation of the ambient surface M^2 at every heteroclinic point x of the diffeomorphism f. Otherwise, the heteroclinic intersection is called *non-orientable* (see Figure 2.3).

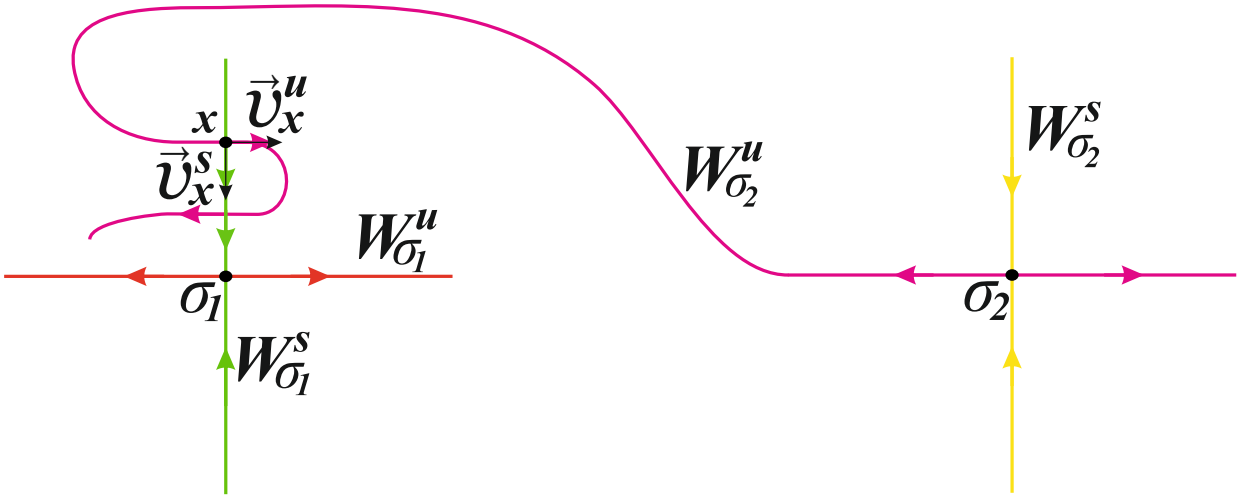


Figure 2.3 — Non-orientable heteroclinic intersection

Everywhere below, $G \subset MS(M^2)$ is the class of orientation-preserving diffeomorphisms with orientable heteroclinic intersections. To construct an effectively distinguishable graph corresponding to the diffeomorphism $f \in G$, we will use the factorization method, which makes it possible to represent the dynamics

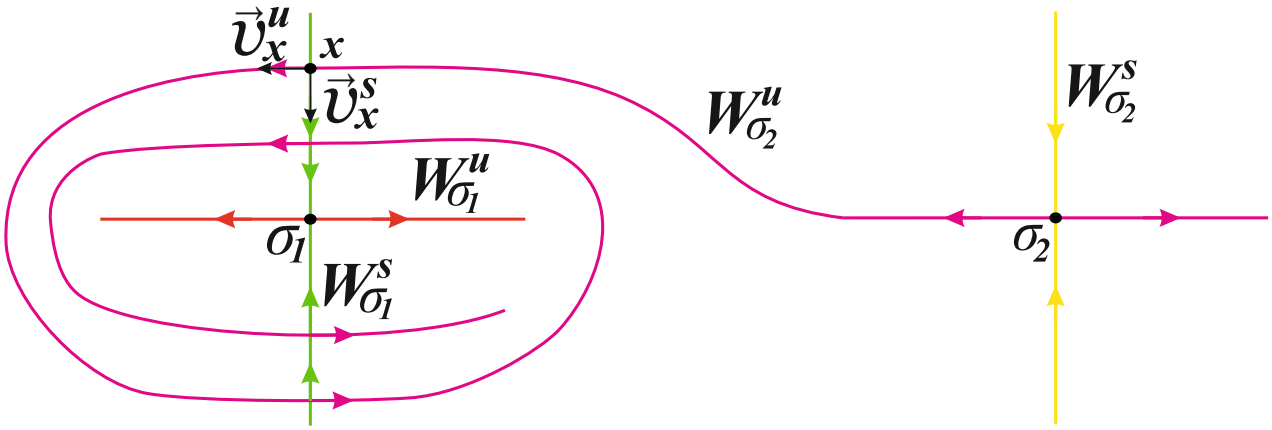


Figure 2.4 — Orientable heteroclinic intersection

of the diffeomorphism in the form of a set of topological objects - the scheme of the diffeomorphism.

CHAPTER 3

The scheme of diffeomorphism $f \in G$

3.1 The scheme of Morse-Smale diffeomorphism on surface with $beh(f) = 1$

Let $f : M^2 \to M^2$ be an orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphism such that $beh(f) = 1$, that is, the diffeomorphism f has a finite number of heteroclinic orbits. Then the set Σ_f of periodic orbits of the diffeomorphism f can be divided into subsets $\Sigma_f^i, i \in \{\omega, s, u, \alpha\}$ as follows:

- Σ_f^ω — is the set of all sink points;
- Σ_f^s — is the set of saddle points, whose unstable manifolds do not contain heteroclinic points;
- Σ_f^u — is the set of all other saddle points;
- Σ_f^α — is the set of all source points.

It follows from the properties of the introduced order $\prec$, that if the orbits $\mathcal{O}_i \in \Sigma_f^i$, $\mathcal{O}_j \in \Sigma_f^j$ are related by the relation $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, then $i < j$.

Let

$$\mathcal{A}_f = \Sigma_f^\omega \cup W^u_{\Sigma_f^s}, \mathcal{R}_f = \Sigma_f^\alpha \cup W^s_{\Sigma_f^u}, V_f = M^2 \setminus (\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f).$$

In the paper [7] it is shown that the sets $\mathcal{A}_f$, $\mathcal{R}_f$ are an attractor and a repeller of the system, respectively. Let

$$\hat{V}_f = V_f / f.$$

According to the paper [5], each connected component of the orbit space $\hat{V}_f$ is homeomorphic to a two-dimensional torus. Denote by $p_f : V_f \to \hat{V}_f$ the natural projection, which is also a covering map for the space $\hat{V}_f$.

We denote by $\hat{V}_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ the connected components of the orbit space $\hat{V}_f$. We set $V_i = p_f^{-1}(\hat{V}_i)$ and denote by $p_i : V_i \to \hat{V}_i$ the natural projection.

1384

The covering p_i induces a non-trivial homomorphism $\eta_i : \pi_1(\hat{V}_i) \to m_i\mathbb{Z}$, which associates $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_i)$ with the number μm_i such that any lifting of the curve $\hat{c}$ connects the point $x \in V_i$ with the point $f^{\mu m_i}(x)$. Put

$$\hat{V}_f = \hat{V}_1 \sqcup \cdots \sqcup \hat{V}_n$$

and denote by η_f the map composed of epimorphisms $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

We introduce the following notations:

- $l^s_\sigma = W^s_\sigma \setminus \sigma$, where $\sigma \in \Sigma^s_f$, similarly $l^u_\sigma = W^u_\sigma \setminus \sigma$, where $\sigma \in \Sigma^u_f$;
- $L^s_f = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma^s_f} l^s_\sigma$ and $L^u_f = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma^u_f} l^u_\sigma$;
- $\hat{l}^s_\sigma = p_f(W^s_\sigma \setminus \sigma)$ and $\hat{l}^u_\sigma = p_f(W^u_\sigma \setminus \sigma)$;
- $\hat{L}^s_f = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma^s_f} \hat{l}^s_\sigma$ and $\hat{L}^u_f = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma^u_f} \hat{l}^u_\sigma$.

From the monograph [6] it follows that the set $\hat{l}^s_\sigma$ ($\hat{l}^u_\sigma$) consists of two connected components (of one connected component), if the saddle point σ has a positive (negative) orientation type. Moreover, each connected component l of this set is a smooth closed curve not homotopic to zero on some torus $\hat{V}_i$ and $\eta_i([l]) = m_\sigma$ ($\eta_i([l]) = 2m_\sigma$).

Definition 1. *The set $\mathcal{S}_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f)$ is called the scheme of the diffeomorphism f (see Figure 3.1).*

Definition 2. *Schemes $\mathcal{S}_f$, $\mathcal{S}_{f'}$ of diffeomorphisms f, f' are called equivalent if there exists a homeomorphism $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$ such that*

- *$\eta_f = \eta_{f'}\hat{\varphi}_*$;*
- *$\hat{\varphi}(\hat{L}^s_f) = \hat{L}^s_{f'}$ and for any point $\sigma \in \Sigma^s_f$ there is a point $\sigma' \in \Sigma^s_{f'}$ such that $\hat{\varphi}(\hat{l}^s_\sigma) = \hat{l}^s_{\sigma'}$;*
- *$\hat{\varphi}(\hat{L}^u_f) = \hat{L}^u_{f'}$ and for any point $\sigma \in \Sigma^u_f$ there is a point $\sigma' \in \Sigma^u_{f'}$ such that $\hat{\varphi}(\hat{l}^u_\sigma) = \hat{l}^u_{\sigma'}$.*

Proposition 1. *[10] In the set of Morse-Smale diffeomorphisms $f : M^2 \to M^2$ with $beh(f) = 1$ and fixed non-wandering points, the equivalence class of the scheme is a complete topological invariant.*

It was shown in the papers [2] and [12] that $beh(f) = 1$ for any diffeomorphism $f \in G$. Thus, the scheme $\mathcal{S}_f$ is well defined for diffeomorphisms of the class G under consideration.

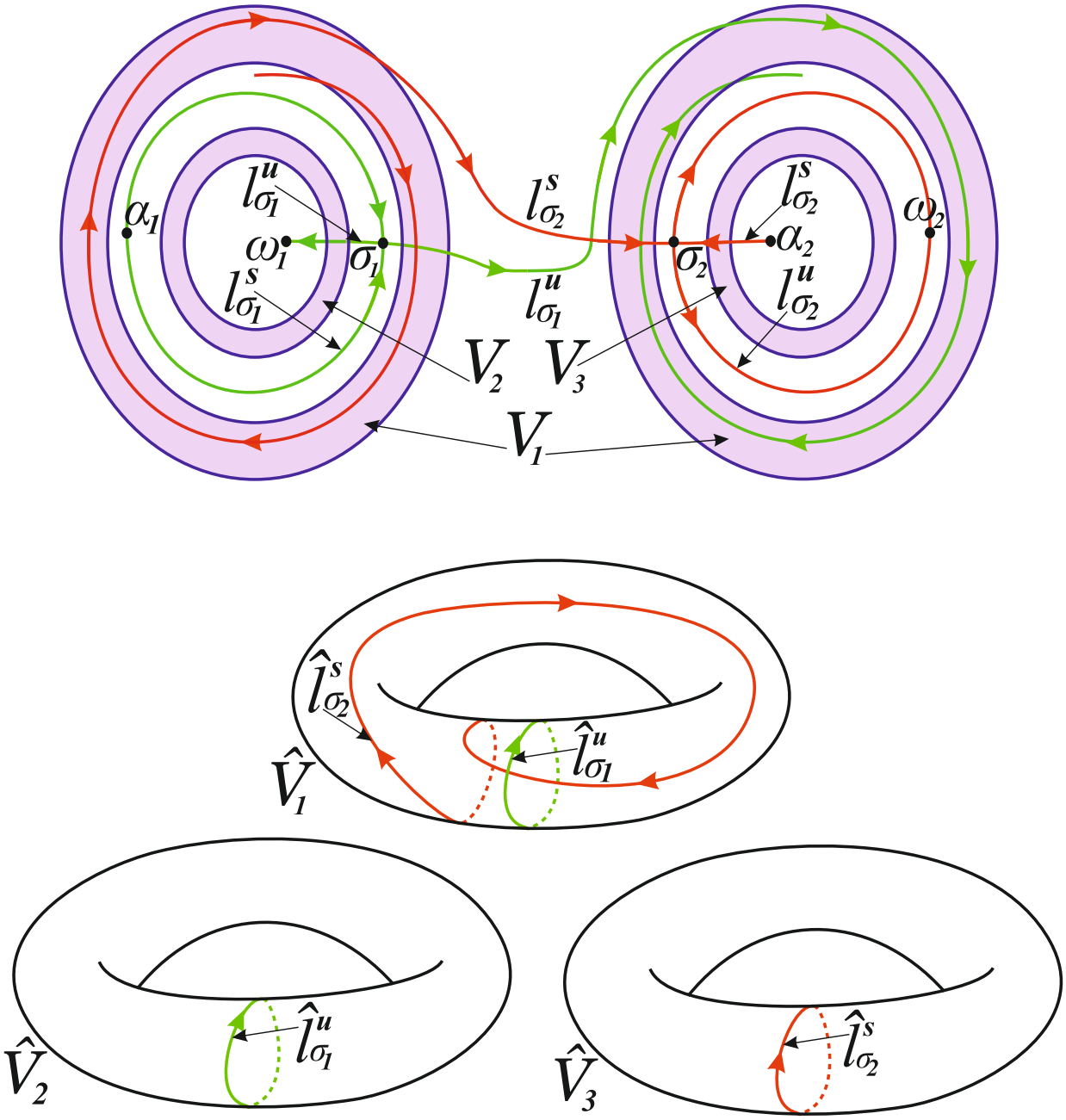


Figure 3.1 — The scheme of diffeomorphism f, given on the sphere $\mathbb{S}^2$

3.2 Reducing the scheme of the diffeomorphism $f \in G$ to the canonical form

Everywhere below $f \in G$. Using the notation of the previous section, denote by $\hat{b}_i$ a closed non-zero homotopic curve on $\hat{V}_i$ such that $\eta_i([\hat{b}_i]) = 0$. We will call such a curve *equator*. We set

$$\hat{\mathcal{V}}_i = (\hat{V}_i, [\hat{b}_i], m_i), \ \hat{\mathcal{V}}_f = \{\hat{\mathcal{V}}_i, i = 1, \dots, n\}.$$

for each $i \in \{1, 2, ..., n\}$ denote $\hat{L}_i^s = \hat{V}_i \cap \hat{L}_f^s$ and $\hat{L}_i^u = \hat{V}_i \cap \hat{L}_f^u$. Thus, the scheme of any diffeomorphism $f \in G$ is a collection of schemes

$$\mathcal{S}_i = (\hat{\mathcal{V}}_i, \hat{\mathcal{L}}_i^s, \hat{\mathcal{L}}_i^u).$$

Let us show that the scheme $\mathcal{S}_i$ can be reduced to the canonical form.

Let's consider the covering of the torus $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$, associated with the representation of the torus as a quotient group by the action of the integer shifts group on $\mathbb{R}^2$. We set

$$a = q(Ox),\ b = q(Oy).$$

Then the curves a, b are generators on the torus with a positive direction of traversal induced by the positive direction of the coordinate axes and homotopy classes $[a] =< 1, 0 >$, $[b] =< 0, 1 >$, respectively. Then the homotopy class $[c]$ of any simple closed curve $c \subset \mathbb{T}^2$ can be described as $[c] =< \mu, \nu >$, $\mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N}$, where μ, ν – is the number of revolutions around the generators a, b, respectively. Moreover, the numbers μ, ν are coprime, that is $(\mu, \nu) = 1$.

Lemma 1. *Let $c \subset \mathbb{T}^2$ a simple closed curve not homotopic to zero on the torus such that $[c] =< \mu, \nu >$. If $\hat{\phi} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – is a homeomorphism such that $\hat{\phi}_*([b]) = [b]$, then the curve $\hat{\phi}(c)$ has a homotopy type $< \mu, \tilde{\nu} >$, where $\tilde{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$. Conversely, for any $\tilde{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$ there exists a unique (up to isotopy) homeomorphism $\hat{\phi} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ such that $\hat{\phi}_*([b]) = [b]$ and the curve $\hat{\phi}(c)$ has a homotopy type $< \mu, \tilde{\nu} >$.*

Proof.

($\Rightarrow$) From the condition $\hat{\phi}_*([b]) = [b]$ it follows that $\hat{\phi}_*$ acts in the fundamental group of the torus by the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, where $n \in \mathbb{Z}$. It is directly verified that in this case the curve $\hat{\phi}(c)$ has a homotopy type $< \mu, \tilde{\nu} >$, where $\tilde{\nu} = n\mu + \nu$.

($\Leftarrow$) From the condition $\tilde{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$ it follows that there is a unique integer n such that $\tilde{\nu} = n\mu + \nu$. we denote by $\bar{\phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ the linear diffeomorphism defined by the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. We set $\hat{\phi} = q\bar{\phi}q^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Then the same matrix defines the action of the induced isomorphism $\hat{\phi}_*$. Whence it follows that the curve $\hat{\phi}(c)$ has homotopy type $< \mu, \tilde{\nu} >$, where $\tilde{\nu} = n\mu + \nu$. □

For $r \in \mathbb{N}$ define on the plane $\mathbb{R}^2$ a family of lines $\Gamma_{r,\mu,\nu}$ as follows:

$$\Gamma_{r,\mu,\nu} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\nu}{\mu}x + \frac{j}{\mu r},\ j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Let $\hat{\Gamma}_{r,\mu,\nu} = q(\Gamma_{r,\mu,\nu})$.

Let $\hat{\phi}_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ a diffeomorphism such that $\hat{\phi}_{i*}([b_i]) = [b]$. Let $\hat{\mathbf{L}}_i^s = \hat{\phi}_i(\hat{L}_i^s)$, $\hat{\mathbf{L}}_i^u = \hat{\phi}_i(\hat{L}_i^u)$. Since the curves in the set $\hat{\mathbf{L}}_i^s$ ($\hat{\mathbf{L}}_i^u$) are pairwise disjoint, then for any curve $\hat{l}_i^s \subset \hat{L}_i^s$ ($\hat{l}_i^u \subset \hat{L}_i^u$) the curve $\hat{\mathbf{l}}_i^s = \hat{\phi}_i(\hat{l}_i^s)$ ($\hat{\mathbf{l}}_i^u = \hat{\phi}_i(\hat{l}_i^u)$) has a homotopy type $< \mu_i^s, \nu_i^s >$ ($< \mu_i^u, \nu_i^u >$), where $\mu_i^s = \eta_i(\hat{l}_i^s)/m_i$ ($\mu_i^u = \eta_i(\hat{l}_i^u)/m_i$) and numbers μ_i^s, ν_i^s (μ_i^u, ν_i^u) are coprime.

Thus, the number μ_i^s (μ_i^u) is uniquely defined by the diffeomorphism f and does not depend on the choice of the diffeomorphism $\hat{\phi}_i$. Moreover, we will consider all curves oriented so that $\mu_i^s \geq 1$ ($\mu_i^u \geq 1$). Moreover, the number ν_i^s (ν_i^u), by virtue of Lemma 1, is defined only up to a term multiple μ_i^s (μ_i^u). Thus, if the set $\hat{L}_i^s$ is not empty, then there exists a diffeomorphism $\hat{\phi}_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ such that $\hat{\phi}_{i*}([b_i]) = [b]$ and a curve $\hat{\mathbf{l}}_i^s$ has a homotopy type $< \mu_i^s, \nu_i^s >$, where $(\mu_i^s, \nu_i^s) = 1$ and $0 \leq \nu_i^s < \mu_i^s$. If the set $\hat{L}_i^u$ is also not empty, then such a diffeomorphism, by Lemma 1, uniquely determines the homotopy type $< \mu_i^u, \nu_i^u >$ of the curve $\hat{\mathbf{l}}_i^u$ in the set $\hat{L}_i^u$, if it is not empty. Moreover, since the sets $\hat{L}_i^s, \hat{L}_i^u$ intersect in an orientable way, then $\frac{\nu_i^s}{\mu_i^s} \neq \frac{\nu_i^u}{\mu_i^u}$. If the set $\hat{L}_i^s$ is empty, then there is a diffeomorphism $\hat{\phi}_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ such that $\hat{\phi}_{i*}([b_i]) = [b]$ and the curve $\hat{\mathbf{l}}_i^u$ has homotopy type $< \mu_i^u, \nu_i^u >$, where $(\mu_i^u, \nu_i^u) = 1$ and $0 \leq \nu_i^u < \mu_i^u$.

Everywhere below, we use the pairs of coprime integers uniquely defined above for the scheme $\mathcal{S}_i$. In addition, we denote by r_i^s, r_i^u the number of connected components of the sets $\hat{L}_i^s, \hat{L}_i^u$, respectively. Let $\hat{\mathbf{L}}_i^s = \hat{\Gamma}_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s}$, if $r_i^s \neq 0$ and $\hat{\mathbf{L}}_i^s = \emptyset$, if $r_i^s = 0$. Similarly, we set $\hat{\mathbf{L}}_i^u = \hat{\Gamma}_{r_i^u,\mu_i^u,\nu_i^u}$, if $r_i^u \neq 0$ and $\hat{\mathbf{L}}_i^u = \emptyset$, if $r_i^u = 0$.

Renumber the curves of the sets $\Gamma_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s} = q^{-1}(\hat{\Gamma}_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s})$, $\Gamma_{r_i^u,\mu_i^u,\nu_i^u} = q^{-1}(\hat{\Gamma}_{r_i^u,\mu_i^u,\nu_i^u})$ as follows from formulas (see Figure 3.2):

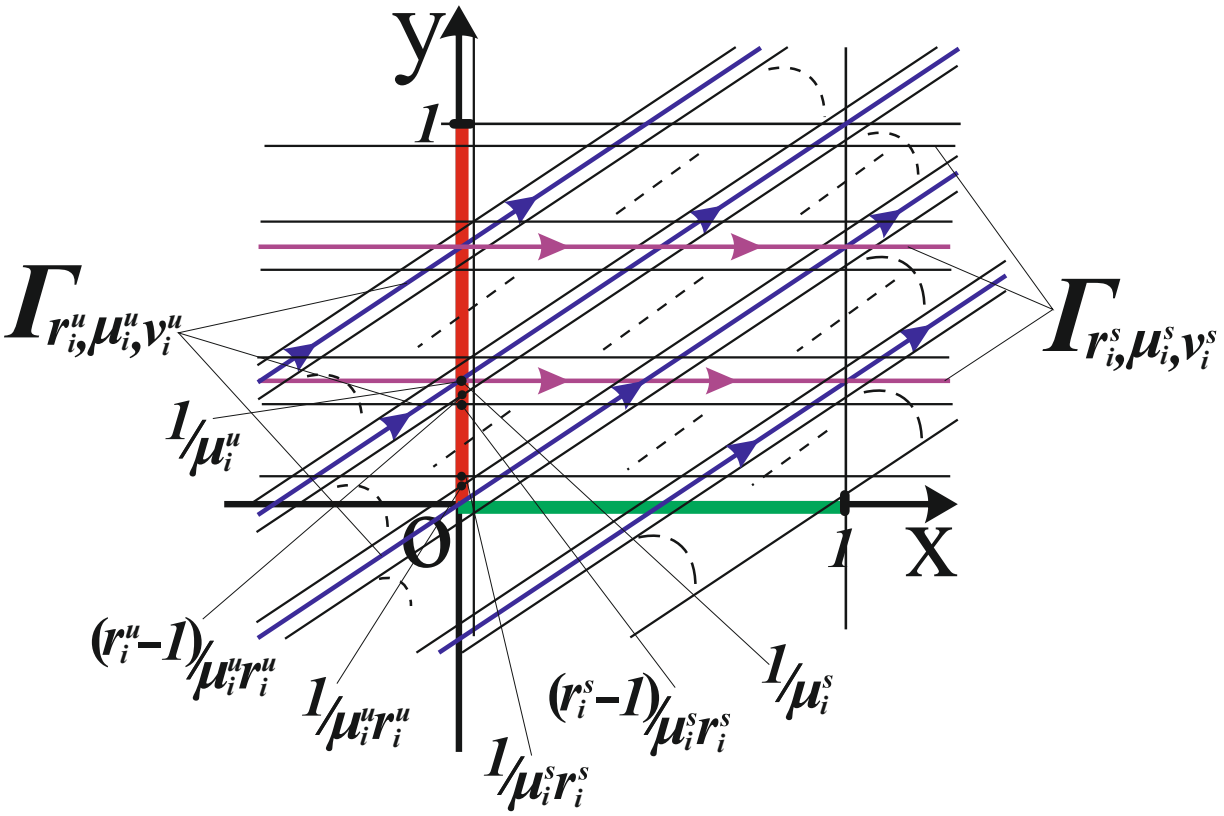


Figure 3.2 — This picture shows an example of the arrangement of the lines of the sets $\Gamma_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s}$ and $\Gamma_{r_i^u,\mu_i^u,\nu_i^u}$ on the plane $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\nu_i^s}{\mu_i^s}x + \frac{j_s}{\mu_i^s r_i^s},\ j_s \in \mathbb{Z}\right\} = \\ = \left\{\gamma_{i,j_s}^s,\ j_s \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\Gamma_{r_i^u,\mu_i^u,\nu_i^u} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\nu_i^u}{\mu_i^u}x + \frac{j_u}{\mu_i^u r_i^u},\ j_u \in \mathbb{Z}\right\}. = \\ \left\{\gamma_{i,j_u}^u,\ j_u \in \mathbb{Z}\right\}$$

The orientability of the heteroclinic intersection allows us to express all information about the heteroclinic intersection (which is a topological invariant) in terms of the homotopy type of curves $\hat{L}_i^s, \hat{L}_i^u$. This is obviously not true in the case of an arbitrary heteroclinic, where, in addition to the homotopy type of curves, the signature of the heteroclic intersection is also a necessary topological invariant.

The main fact that allows us to reduce the classification of the considered diffeomorphisms to a combinatorial problem is the following lemma.

Lemma 2. *There is diffeomorphism* $\hat{\phi}_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ *such that* $\hat{\phi}_{i*}([b_i]) = [b]$ *and* $\hat{\phi}_i(\hat{L}_i^s) = \hat{\mathbf{L}}_i^s$, $\hat{\phi}_i(\hat{L}_i^u) = \hat{\mathbf{L}}_i^u$.

Proof. Let us prove the lemma in the case when both sets $\hat{L}_i^s$, $\hat{L}_i^u$ are not empty (in other cases the proofs are similar). From the above reasoning it follows that there exists a diffeomorphism $\tilde{\phi}_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ such that $\tilde{\phi}_{i*}([b_i]) = [b]$ and all curves in the set $\tilde{L}_i^s = \tilde{\phi}_i(\hat{L}_i^s)$ ($\tilde{L}_i^u = \tilde{\phi}_i(\hat{L}_i^u)$) are of homotopy type $< \mu_i^s, \nu_i^s >$ ($< \mu_i^u, \nu_i^u >$). If $\tilde{L}_i^s = \hat{\mathbf{L}}_i^s$ and $\tilde{L}_i^u = \hat{\mathbf{L}}_i^u$, then we set $\hat{\phi}_i = \tilde{\phi}_i$ and the lemma is proved. Otherwise, we show how to construct a diffeomorphism isotopic to the identity $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ such that $\varphi(\tilde{L}_i^s) = \hat{\mathbf{L}}_i^s$ and $\varphi(\tilde{L}_i^u) = \hat{\mathbf{L}}_i^u$. Then $\hat{\phi}_i = \varphi\tilde{\phi}_i$ and the lemma is proved.

The diffeomorphism φ will be constructed as a composition of the isotopic diffeomorphisms $\varphi_s, \varphi_u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ so that $\varphi = \varphi_u\varphi_s$, $\varphi_s(\tilde{L}_i^s) = \hat{\mathbf{L}}_i^s$, $\varphi_u(\varphi_s(\tilde{L}_i^u)) = \hat{\mathbf{L}}_i^u$ and $\varphi_u(\hat{\mathbf{L}}_i^s) = \hat{\mathbf{L}}_i^s$.

According to Theorem 16 of Chapter 2 [18], any non-zero homotopic curve with homotopy type $< \mu, \nu >$ can be mapped into a curve homotopic to the generator a by some linear torus diffeomorphism. Therefore, in further constructions, without loss of generality, we assume that $\mu_i^s = 1, \nu_i^s = 0$ and, therefore, $\Gamma_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s} = \Gamma_{r_i^s,1,0}$ — is a family of horizontal lines and $\hat{\mathbf{L}}_i^s$ — is a family of circles parallel to the generator a and one of the curves of the sets $\tilde{L}_i^s, \hat{\mathbf{L}}_i^s$ coincides with a.

Step 1. Construction of a diffeomorphism φ_s. Cutting the torus $\mathbb{T}^2$ along the generator a, we obtain the annulus $S^1 \times [0,1]$ and the projection $g : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{T}^2$ such that $g(s,t) = (s, e^{i2\pi t})$. We set

$$g^{-1}(\hat{\mathbf{L}}_i^s) = \left\{ \mathbf{l}_{i,j_s}^s = S^1 \times \left\{ \frac{j_s}{\mu_i^s r_i^s} \right\},\ j_s \in \{0, 1, \dots, \mu_i^s r_i^s\} \right\}.$$
$$g^{-1}(\tilde{L}_i^s) = \left\{ l_{i,j_s}^s,\ j_s \in \{0, 1, \dots, \mu_i^s r_i^s\} \right\},$$

where $l_{i,0}^s = S^1 \times \{0\}$, $l_{i,\mu_i^s r_i^s}^s = S^1 \times \{1\}$ and curves l_{i,j_s}^s, l_{i,j_s+1}^s bound in $S^1 \times [0,1]$ an annulus whose interior does not intersect $g^{-1}(\tilde{L}_i^s)$.

According to Lemma 3 of Chapter 2[18], there exists $\varepsilon_1 > 0$ and a diffeomorphism (in the monograph [18] all the statements are proved in the continuous category, however, by the results of [13], in the case of smooth knots, all statements are valid in the smooth category) $\tilde{\varphi}_1 : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$, identical on $S^1 \times ([0, \varepsilon_1] \cup [1 - \varepsilon_1, 1])$ and such that $\tilde{\varphi}_1(l_{i,1}^s) = \mathbf{l}_{i,1}^s$. We again denote by l_{i,j_s}^s

the images of these curves due to the diffeomorphism $\tilde{\varphi}_1$. By the same arguments, there is $\varepsilon_2 > 0$ and a diffeomorphism $\tilde{\varphi}_2 : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$, identical on $S^1 \times ([0, 1/\mu_i^s r_i^s + \varepsilon_2] \cup [1 - \varepsilon_2, 1])$ and such that $\tilde{\varphi}_2(l_{i,2}^s) = \mathbf{l}_{i,2}^s$. Continuing this process, we obtain the diffeomorphism

$$\tilde{\varphi}_s = \tilde{\varphi}_{\mu_i^s r_i^s - 1} \dots \tilde{\varphi}_1 : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$$

such that $\tilde{\varphi}(g^{-1}(\tilde{L}_i^s)) = g^{-1}(\hat{\mathbf{L}}_i^s)$. By construction, the diffeomorphism

$$\varphi_s = g \tilde{\varphi}_s g^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$$

maps curves of the family $\tilde{L}_i^s$ to curves of the family $\hat{\mathbf{L}}_i^s$ and acts in the fundamental group of the torus by the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. If $n = 0$, then φ_s is the desired diffeomorphism, if $n \neq 0$, then the desired diffeomorphism is obtained by the composition φ_s with a linear diffeomorphism given by the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$.

Step 2. Construction of a diffeomorphism φ_u. After applying the diffeomorphism φ_s we obtain

$$q^{-1}(\varphi_s(\tilde{L}_i^s)) = q^{-1}(\hat{\mathbf{L}}_i^s) = \{\gamma_{i,j_s}^s,\ j_s \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{j_s}{\mu_i^s r_i^s},\ j_s \in \mathbb{Z}\right\}$$

and

$$q^{-1}(\varphi_s(\tilde{L}_i^u)) = \{\rho_{i,j_u}^u,\ j_u \in \mathbb{Z}\}.$$

Without loss of generality, we assume that the family of lines $\{\gamma_{i,j_s}^s,\ j_s \in \mathbb{Z}\}$ contains the axis Ox, the family of curves $\{\rho_{i,j_u}^u,\ j_u \in \mathbb{Z}\}$ contains a curve $\rho_{i,0}^u$, passing through the origin (this can always be achieved by parallel by transferring some point of intersection of the curves to the origin), and all other curves are numbered with integers in the order they intersect the Oy axis.

We set

$$A_{j_u,j_s}^{\gamma} = \gamma_{i,j_u}^u \cap \gamma_{i,j_s}^s,\ \ A_{j_u,j_s}^{\rho} = \rho_{i,j_u}^u \cap \gamma_{i,j_s}^s.$$

For all $j_s \in \{0, \dots, \mu_i^s r_i^s - 1\}$ we denote by $h_{j_s} : [A_{0,j_s}^{\rho}, A_{\mu_i^u r_i^u, j_s}^{\rho}] \to [A_{0,j_s}^{\gamma}, A_{\mu_i^u r_i^u, j_s}^{\gamma}]$ a diffeomorphism such that $h_{j_s}(A_{j_u,j_s}^{\rho}) = A_{j_u,j_s}^{\gamma}$ for all $j_u \in \{0, 1, \dots, \mu_i^u r_i^u\}$ (see Figure 3.3). We extend the diffeomorphism h_{j_s} on $\mathbb{R} \times \{j_s\}$ by the formula $h_{j_s}(x +$

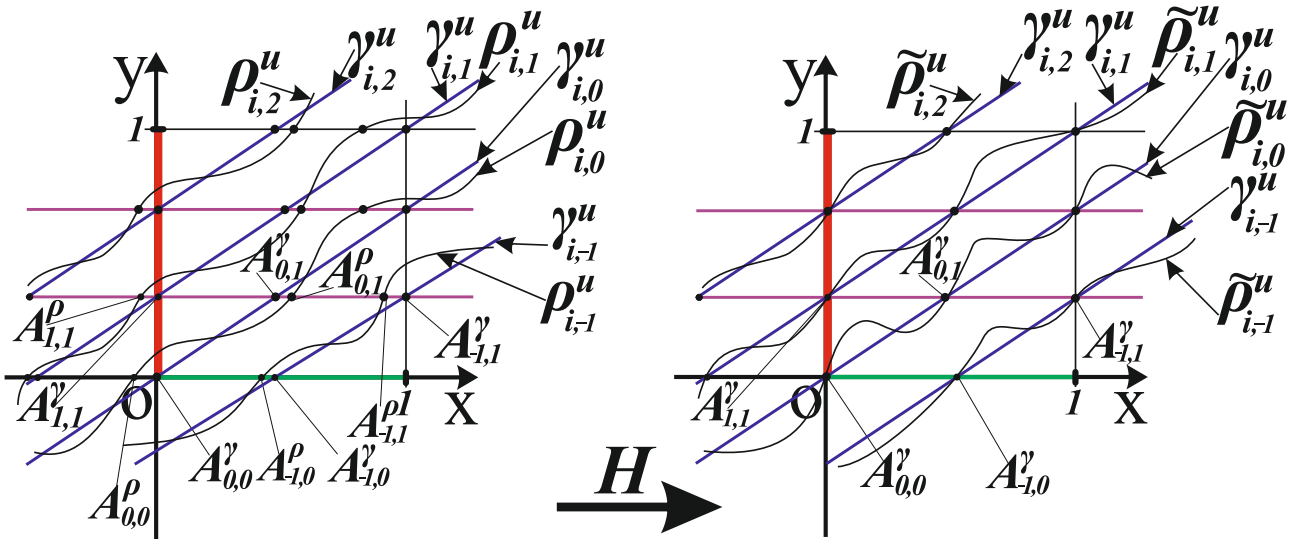


Figure 3.3 — This picture shows how the diffeomorphism H act on $\mathbb{R}^2$

$n) = h_{j_s}(x) + n$ for $x \in [A^{\rho}_{0,j_s}, A^{\rho}_{\mu_i^u r_i^u, j_s})$, $n \in \mathbb{Z}$. We define a diffeomorphism $H_{j_s} : \mathbb{R} \times \left[\frac{2j_s-1}{2\mu_i^s r_i^s}, \frac{2j_s+1}{2\mu_i^s r_i^s}\right] \to \mathbb{R} \times \left[\frac{2j_s-1}{2\mu_i^s r_i^s}, \frac{2j_s+1}{2\mu_i^s r_i^s}\right]$ by the formula :

$$H_{j_s}(x,y) = \left(\left(1 - 2\mu_i^s r_i^s \left| y - \frac{j_s}{\mu_i^s r_i^s}\right|\right) h_{j_s}(x) + \right.$$
$$\left. + 2\mu_i^s r^s \left| y - \frac{j_s}{\mu_i^s r_i^s}\right| x, y \right) \ .$$

Denote by $H : \mathbb{R} \times \left[-\frac{1}{2\mu_i^s r_i^s}, 1 - \frac{1}{2\mu_i^s r_i^s}\right] \to \mathbb{R} \times \left[-\frac{1}{2\mu_i^s r_i^s}, 1 - \frac{1}{2\mu_i^s r_i^s}\right]$ the diffeomorphism composed of the diffeomorphisms $H_0, \ldots, H_{\mu_i^s r_i^s - 1}$. By construction, the diffeomorphism H has the form

$$H(x,y) = (h(x,y), y).$$

We extend the diffeomorphism H to the whole plane $\mathbb{R}^2$ by the formula

$$H(x, y+n) = (h(x, y-n), y+n)$$
$$y \in \left[-\frac{1}{2\mu_i^s r_i^s}, 1 - \frac{1}{2\mu_i^s r_i^s}\right), \ n \in \mathbb{Z}.$$

By construction, the diffeomorphism H commutes with integer shifts of the plane and $H(A^{\rho}_{j_u,j_s}) = A^{\gamma}_{j_u,j_s}$, $H(\gamma^s_{i,j_s}) = \gamma^s_{i,j_s}$. Let $\tilde{\rho}^u_{i,j_u} = H(\rho^u_{i,j_u})$, $j_u \in \mathbb{Z}$.

Denote by P_{j_u,j_s} ($\tilde{P}_{j_u,j_s}$) a compact subset of the plane bordered by lines

$\gamma^u_{i,j_u}, \gamma^u_{i,j_u+1}, \gamma^s_{i,j_s}, \gamma^s_{i,j_s+1}$ (curves $\tilde\rho^u_{i,j_u}, \tilde\rho^u_{i,j_u+1}$ and straight lines $\gamma^s_{i,j_s}, \gamma^s_{i,j_s+1}$). Let

$$I^s_{j_u,j_s} = P_{j_u,j_s} \cap \gamma^s_{i,j_s} = \tilde P_{j_u,j_s} \cap \gamma^s_{i,j_s},$$
$$I^u_{j_u,j_s} = P_{j_u,j_s} \cap \gamma^u_{i,j_u},\ \tilde I^u_{j_u,j_s} = \tilde P_{j_u,j_s} \cap \tilde\rho^u_{i,j_u}.$$

By construction, each of the sets $I^u_{j_u,j_s}$, $\tilde I^u_{j_u,j_s}$ is diffeomorphic to a segment, and their boundaries coincide and consist of points $A^\gamma_{j_u,j_s}$, $A^\gamma_{j_u,j_s+1}$. Therefore, there exists a diffeomorphism $g_{j_u,j_s} : \tilde I^u_{j_u,j_s} \to I^u_{j_u,j_s}$ such that $g_{j_u,j_s}(A^\gamma_{j_u,j_s}) = A^\gamma_{j_u,j_s}$. Moreover, we construct these diffeomorphisms so that the diffeomorphism composed of them commutes with integer shifts of the plane. Define the diffeomorphism $G_{j_u,j_s} : \partial\tilde P_{j_u,j_s} \to \partial P_{j_u,j_s}$ as follows:

$$G_{j_u,j_s}(x,y) = \begin{cases} (x,y), & \forall (x,y) \in I^s_{j_u,j_s} \\ (x,y), & \forall (x,y) \in I^s_{j_u,j_s+1} \\ g_{j_u,j_s}(x,y), & \forall (x,y) \in \tilde I_{j_u,j_s} \\ g_{j_u+1,j_s}(x,y), & \forall (x,y) \in \tilde I_{j_u+1,j_s}. \end{cases}$$

By construction, each of the sets P_{j_u,j_s}, $\tilde P_{j_u,j_s}$ is a two-dimensional disk, therefore the diffeomorphism $G_{j_u,j_s} : \partial\tilde P_{j_u,j_s} \to \partial P_{j_u,j_s}$ can be extended to a diffeomorphism $G_{j_u,j_s} : \tilde P_{j_u,j_s} \to P_{j_u,j_s}$. Moreover, these diffeomorphisms can be constructed so that the diffeomorphism $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ composed of them commutes with integer translations of the plane. By construction $G(\tilde\rho^u_{i,j_u}) = \gamma^u_{i,j_u}$ and $G(\gamma^s_{i,j_s}) = \gamma^s_{i,j_s}$. Then the desired diffeomorphism φ_u is defined by the formula

$$\varphi_u = qGHq^{-1}.$$

□

3.3 Reducing the diffeomorphism f to canonical form

Let $\tilde{\mathbf{V}}_i = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_{m_i}$, $\tilde{\mathbf{V}}_{i,\kappa} = \mathbb{R}^2 \times \{\kappa\}$, $\kappa \in \mathbb{Z}_{m_i}$ and define a diffeomorphism $\tilde{\mathbf{f}}_i : \tilde{\mathbf{V}}_i \to \tilde{\mathbf{V}}_i$ by the formula:

$$\tilde{\mathbf{f}}_i(x,y,\kappa) = \begin{cases} (x,y,\kappa+1), & \kappa \in \{0,...,m_i-2\} \\ (x+1,y,0), & \kappa = m_i - 1 \end{cases}$$

Let's define a diffeomorphism $d_i : \tilde{\mathbf{V}}_i \to \tilde{\mathbf{V}}_i$ by the formula $d_i(x, y, \kappa) = (x, y+1, \kappa)$. Then the cyclic group $D_i = \{d_i^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ acts on $\tilde{\mathbf{V}}_i$ by shifts and the orbit space $\mathbf{V}_i = \tilde{\mathbf{V}}_i / D_i$ is diffeomorphisc to m_i copies $\mathbf{V}_{i,\kappa}$, $\kappa \in \{0, \dots, m_i - 1\}$ of the cylinder $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Denote by $\Delta_i : \tilde{\mathbf{V}}_i \to \mathbf{V}_i$ the natural projection. Since $\tilde{\mathbf{f}}_i d_i = d_i \tilde{\mathbf{f}}_i$, the diffeomorphism $\tilde{\mathbf{f}}_i$ is projected onto $\mathbf{V}_i$ by the formula

$$\mathbf{f}_i = \Delta_i \tilde{\mathbf{f}}_i \Delta_i^{-1} : \mathbf{V}_i \to \mathbf{V}_i.$$

Let's define a projection $q_i : \tilde{\mathbf{V}}_i \to \mathbb{T}^2$ by formula $q_i(x, y, \kappa) = q(x, y)$. Then the diffeomorphism $\hat{\phi}_i : \hat{V}_i \to \mathbb{T}^2$ lifts to the diffeomorphism $\phi_i : V_i \to \mathbf{V}_i$, conjugating the diffeomorphism $\mathbf{f}_i$ with the diffeomorphism $f_i = f|_{V_i}$. Let $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbf{V}_n$ and denote by $\mathbf{f} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a diffeomorphism, composed of diffeomorphisms $\mathbf{f}_i$. Denote by $\Phi_f : V_f \to \mathbf{V}$ a diffeomorphism, composed of diffeomorphisms ϕ_i.

For $i \in \{1, \dots, n\}$, $\kappa \in \{0, ..., m_i - 1\}$, $j_u \in \{0, \dots, r_i^u \mu_i^u - 1\}$ we set $\mathbf{l}^u_{i,\kappa,j_u} = \Delta_i(\gamma^u_{i,j_u} \times \{\kappa\})$. Curves $\mathbf{l}^u_{i,\kappa,j_u}$, $\mathbf{l}^u_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u}$ will be called *paired*, if $\Phi_f^{-1}(\mathbf{l}^u_{i,\kappa,j_u} \cup \mathbf{l}^u_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u}) = W^u_{\sigma^u} \setminus \sigma^u$ for some saddle point $\sigma^u \in \Sigma^u_f$.

Paired curves can be defined similarly $\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s}, \mathbf{l}^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}$ for $i \in \{1, \dots, n\}$, $\kappa \in \{0, ..., m_i - 1\}$, $j_s \in \{0, \dots, r_i^s \mu_s^s - 1\}$.

Note that between the space $\mathbf{V}$, on which the canonical form of the diffeomorphism f is given, and V there is a one-to-one correspondence.

CHAPTER 4

The graph of a diffeomorphism $f \in G$

4.1 The definition of the graph

An ordered pair (B, E) is called a *finite graph* if it satisfies the following conditions: B is non-empty finite set of *vertices*, E is a set of pairs of vertices called *edges*.

A one-to-one mapping P of the graph T onto itself, taking vertices to vertices with preserving the incidence relations, is called a *automorphism of the graph* T. In what follows, we denote by the symbol (T, P) the graph T, equipped with the automorphism P.

Let's construct a graph (T_f, P_f), corresponding to a diffeomorphism f of the class G as follows (see Figure 4.1):

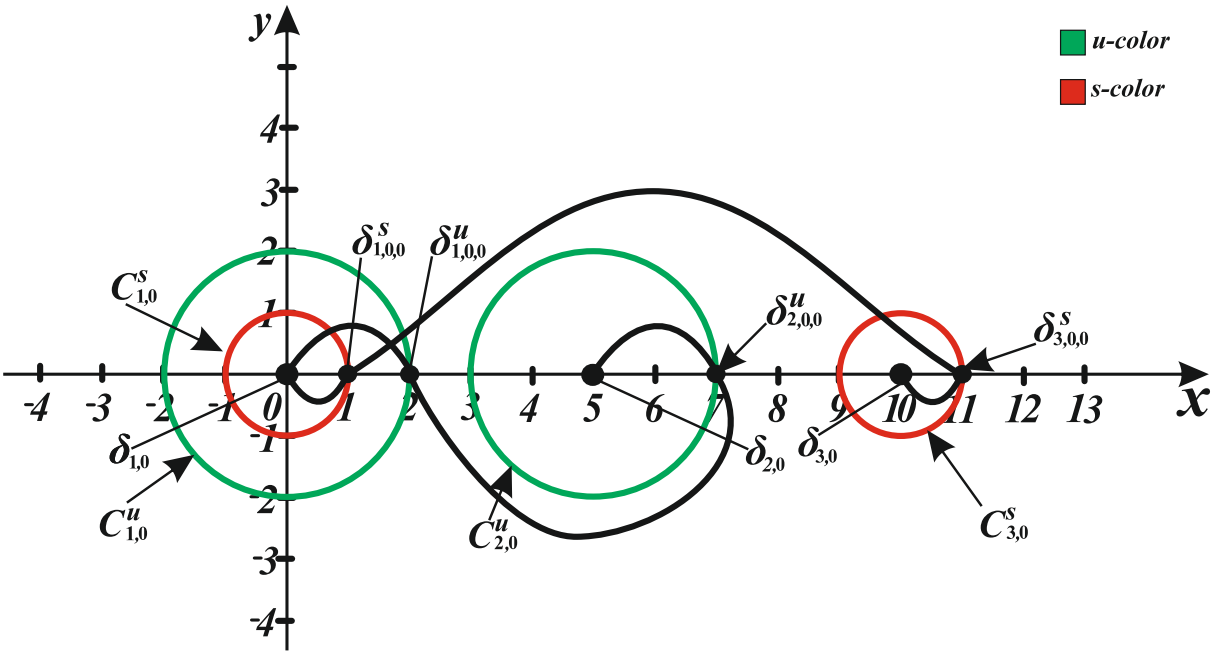


Figure 4.1 — An example of the graph T_f for the diffeomorphism $f \in G$, whose phase portrait is shown in the Figure 3.1.

1395

Geometric component of the graph T_f.

1. Vertices B_f. All vertices B_f of the graph (T_f, P_f) are located on the plane $\mathbb{R}^2$ and are in the following correspondence ζ with the diffeomorphism $\mathbf{f}$.

1.1. For $i \in \{1, \dots, n\}$, $\kappa \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ we place the vertex $\delta_{i,\kappa}$ at the point with coordinates $(5(i-1), 5\kappa)$. Let $\zeta(\mathbf{V}_{i,\kappa}) = \delta_{i,\kappa}$.

1.2. If $r_i^s \neq 0$, then for $j_s \in \{0, ..., r_i^s \mu_i^s - 1\}, \kappa \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ we place vertices δ^s_{i,κ,j_s} on the unit circle $C^s_{i,\kappa}$ centered at $\delta_{i,\kappa}$ so that the point δ^s_{i,κ,j_s} has coordinates

$$\left(cos\left(\frac{2\pi j_s}{r_i^s \mu_i^s}\right) + 5(i-1),\ sin\left(\frac{2\pi j_s}{r_i^s \mu_i^s}\right) + 5\kappa \right).$$

Let $\zeta(\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s}) = \delta^s_{i,\kappa,j_s}$.

1.3. If $r_i^u \neq 0$, then for $j_u \in \{0, \dots, r_i^u \mu_i^u - 1\}, \kappa \in \{0, 1, \dots m_i - 1\}$ we place vertices δ^u_{i,κ,j_u} on the circle $C^u_{i,\kappa}$ of radius 2 centered at $\delta_{i,\kappa}$ so that the point δ^u_{i,κ,j_u} has coordinates

$$\left(2cos\left(\frac{2\pi j_u}{r_i^u \mu_i^u}\right) + 5(i-1),\ 2sin\left(\frac{2\pi j_u}{r_i^u \mu_i^u}\right) + 5\kappa \right).$$

Let $\zeta(\mathbf{l}^u_{i,\kappa,j_u}) = \delta^u_{i,\kappa,j_u}$.

2. Edges E_f.

2.1. We connect each vertex $\delta_{i,\kappa}$ with an edges $(\delta_{i,\kappa}, \delta^s_{i,\kappa,j_s})$ and $(\delta_{i,\kappa}, \delta^u_{i,\kappa,j_u})$ with vertices δ^s_{i,κ,j_s} and δ^u_{i,κ,j_u}, respectively.

2.2. We connect every pair of vertices $\delta^s_{i,\kappa,j_s}, \delta^s_{i,\kappa,j_s+1}$ $(\delta^s_{i,\kappa,r_i^s\mu_i^s} = \delta^s_{i,\kappa,0})$ with an edge (arc of a circle $C^s_{i,\kappa}$) $(\delta^s_{i,\kappa,j_s}, \delta^s_{i,\kappa,j_s+1})$ of color s. Let

$$c^s_{i,\kappa} = \{\delta^s_{i,\kappa,0}, (\delta^s_{i,\kappa,0}, \delta^s_{i,\kappa,1}), \delta^s_{i,\kappa,1}, \dots \\ \dots, (\delta^s_{i,\kappa,r_i^s\mu_i^s-1}, \delta^s_{i,\kappa,0}), \delta^s_{i,\kappa,0}\}.$$

Let's call the cycles $c^s_{i,\kappa}$ *s-cycle.*

2.3. We connect every pair of vertices $\delta^u_{i,\kappa,j_u}, \delta^u_{i,\kappa,j_u+1}$ $(\delta^u_{i,\kappa,r_i^u\mu_i^u} = \delta^u_{i,\kappa,0})$ with an edge (arc of a circle $C^u_{i,\kappa}$) $(\delta^u_{i,\kappa,j_u}, \delta^u_{i,\kappa,j_u+1})$ of color u. Let

$$c^u_{i,\kappa} = \{\delta^u_{i,\kappa,0}, (\delta^u_{i,\kappa,0}, \delta^u_{i,\kappa,1}), \delta^u_{i,\kappa,1}, \dots \\ \dots, (\delta^u_{i,\kappa,r_i^u\mu_i^u-1}, \delta^u_{i,\kappa,0}), \delta^u_{i,\kappa,0}\}.$$

Let's call the cycles $c^u_{i,\kappa}$ *u-cycle*

2.4. We connect vertices $\delta^s_{i,\kappa,j_s} = \zeta(\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s}), \delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u} = \zeta(\mathbf{l}^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s})$, with an edge $(\delta^s_{i,\kappa,j_s}, \delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s})$, if curves $\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s}, \mathbf{l}^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}$ are *paired*. Let's call vertices $\delta^s_{i,\kappa,j_s}, \delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}$ and the incident edge $(\delta^s_{i,\kappa,j_s}, \delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s})$ *paired*.

2.5. We connect vertices $\delta^u_{i,\kappa,j_u} = \zeta(\mathbf{l}^u_{i,\kappa,j_u}), \delta^u_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u} = \zeta(\mathbf{l}^u_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u}))$, with an edge $(\delta^u_{i,\kappa,j_u}, \delta^u_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u})$, if curves $\mathbf{l}^u_{i,\kappa,j_u}, \mathbf{l}^u_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u}$ are *paired*. Let's call vertices $\delta^u_{i,\kappa,j_u}, \delta^u_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u}$ and the incident edge $(\delta^u_{i,\kappa,j_u}, \delta^u_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u})$ *paired*. Note that the image of paired vertices with respect to the automorphism P, is paired vertices.

Set the black color for the edges for which the color was not defined above.

3. The automorphism P_f.

3.1. The action of an automorphism P_f is induced by the diffeomorphism $\mathbf{f}$, by a correspondence ζ by the formula

$$P_f = \zeta \mathbf{f} \zeta^{-1} : B_f \to B_f.$$

Definition 3. *Graphs $(T_f, P_f)\,(T_{f'}, P_{f'})$ of diffeomorphisms $f, f' \in G$ are called isomorphic, if there is an isomorphism ξ, translating vertices and edges of a graph T_f into vertices and edges of a graph $T_{f'}$ with colors preserving and conjugate substitution, that is $P_{f'} = \xi P_f \xi^{-1}$.*

4.2 Properties of the graph

In this section, we describe the properties of the graph (T_f, P_f), which will allow us to distinguish a class of admissible abstract graphs, the implementation of which by diffeomorphisms of the class G is given in the section 5. The Figure 4.2 shows an example of a graph that demonstrates the full range of properties described in Lemma 3 below.

Lemma 3. *Any graph (T_f, P_f) of a diffeomorphism $f \in G$ is connected and has the following properties:*

1) there exists a natural number n such that for every $i \in \{1, \dots, n\}$ a natural number m_i is defined such that every point $\delta_{i,\kappa}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\kappa \in \{0, \dots, m_i - 1\}$ is a vertex of the graph T_f and the restriction P_i of the automorphism P_f to the set of vertices $\{\delta_{i,\kappa}\}$ is of the form

$$P_i(\delta_{i,\kappa}) = \begin{cases} \delta_{i,\kappa+1}, & \kappa \in \{0, ..., m_i - 2\} \\ \delta_{i,0}, & \kappa = m_i - 1 \end{cases};$$

2) for each $i \in \{1, \dots, n\}$ *non-negative integers* r_i^s, r_i^u, $r_i^s + r_i^u \neq 0$ *are defined such that all the vertices* B_f *of the graph* T_f, *other than vertices* $\delta_{i,\kappa}$, *are located on circles* $C_{i,\kappa}^s \cup C_{i,\kappa}^u$, $\kappa \in \{0, \dots, m_i - 1\}$ *so that* $B_f \cap C_{i,\kappa}^s \neq \emptyset$, *if* $r_i^s \neq 0$ *and* $B_f \cap C_{i,\kappa}^u \neq \emptyset$, *if* $r_i^u \neq 0$;

3) if $r_i^s \neq 0$, *then there exists a natural number* μ_i^s *such that*

$$B_f \cap C_{i,\kappa}^s = \{\delta_{i,\kappa,j_s}^s,\ j_s \in \{0, \dots, \mu_i^s r_i^s - 1\}\},$$

with an even number

$$k^s = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu_i^s r_i^s;$$

similarly for $r_i^u \neq 0$;

4) if $r_i^s \neq 0$, *then there exists an integer* ν_i^s *such that* $(\mu_i^s, \nu_i^s) = 1$, *the restriction* P_i^s *of the automorphism* P_f *to the set of vertices* $\{\delta_{i,\kappa,j_s}^s\}$ *with fixed index* i *is periodic with period* $m_i \mu_i^s$ *and has the form*

$$P_i^s(\delta_{i,\kappa,j_s}^s) = \begin{cases} \delta_{i,\kappa+1,j_s}^s, & \kappa \in \{0, ..., m_i - 2\} \\ \delta_{i,0,j_s+\nu_i^s r_i^s \pmod{\mu_i^s r_i^s}}^s, & \kappa = m_i - 1 \end{cases};$$

similarly for $r_i^u \neq 0$, *with* $0 \leq \nu_i^s < \mu_i^s$, *if* $r_i^s \neq 0$; $\frac{\nu_i^s}{\mu_i^s} \neq \frac{\nu_i^u}{\mu_i^u}$, *if* $r_i^s r_i^u \neq 0$; $0 \leq \nu_i^u < \mu_i^u$, *if* $r_i^s = 0$;

5) if $r_i^s \neq 0$, *then the set of vertices* $\{\delta_{i,\kappa,j_s}^s\}$ *is split into pairs* $\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}^s$ *(paired s-vertexes) so that the automorphism* P_f *preserves paired vertices (hence,* $m_i \mu_i^s = m_{\tilde{i}} \mu_{\tilde{i}}^s$*), and if* $(P_i^s)^k(\delta_{i,\kappa,j_s}^s) = \delta_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}^s$ *for some* $k \in \{0, \dots, m_i \mu_i^s - 1\}$, *then* $i = \tilde{i}$, *the number* $m_i \mu_i^s$ *is even and* $k = \frac{m_i \mu_i^s}{2}$; *similarly for* $r_i^u \neq 0$;

6) each vertex $\delta_{i,\kappa}$ *is connected by edges* $(\delta_{i,\kappa}, \delta_{i,\kappa,j_s}^s)$ *and* $(\delta_{i,\kappa}, \delta_{i,\kappa,j_u}^u)$ *with vertices* δ_{i,κ,j_s}^s *and* δ_{i,κ,j_u}^u, *respectively;*

7) each pair of vertices $\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{i,\kappa,j_s+1}^s$ $(\delta_{i,\kappa,r_i^s \mu_i^s}^s = \delta_{i,\kappa,0}^s)$ *is connected by an edge* $(\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{i,\kappa,j_s+1}^s)$ *of color* s *(by the arc of the circle* $C_{i,\kappa}^s$*) so, that they form a s-cycle*

$$c_{i,\kappa}^s = \{\delta_{i,\kappa,0}^s, (\delta_{i,\kappa,0}^s, \delta_{i,\kappa,1}^s), \delta_{i,\kappa,1}^s, \dots \\ \dots, (\delta_{i,\kappa,r_i^s \mu_i^s - 1}^s, \delta_{i,\kappa,0}^s), \delta_{i,\kappa,0}^s\};$$

similarly for pairs of vertices $\delta_{i,\kappa,j_u}^u, \delta_{i,\kappa,j_u+1}^u$ $(\delta_{i,\kappa,r_i^u \mu_i^u}^u = \delta_{i,\kappa,0}^u)$;

8) paired s-vertices δ^s_{i,κ,j_s}, $\delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}$ *are connected by the edge* $(\delta^s_{i,\kappa,j_s}, \delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s})$*; similarly for paired u-vertices.*

Proof. Note that items 1) and 2) follow directly from the definition of the diffeomorphism $\mathbf{f} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ and the space $\mathbf{V}$. Items 6), 7) and 8) immediately follow from the definition of the graph T_f. Let us prove points 3), 4) and 5).

Point 3). Each stable separatrix of a saddle from the set Σ^s_f is uniquely associated with a vertex δ^s_{i,κ,j_s} of the graph T_f. Since each saddle has two stable separatrices, the number of separatrices of the saddles of the set Σ^s_f is even and equal to the number $k^s = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \mu_i^s r_i^s$ of all s-vertex of the graph T_f.

Point 4). The formula $P_i^s(\delta^s_{i,\kappa,j_s}) = \delta^s_{i,\kappa+1,j_s}, \kappa \in \{0, \dots, m_i - 2\}$ is obviously follows from the formula $\tilde{\mathbf{f}}_i(x, y, \kappa) = (x, y, \kappa + 1), \kappa \in \{0, \dots, m_i - 2\}$. To prove the second part of the formula $P_i^s(\delta^s_{i,m_i-1,j_s}) = \delta^s_{i,0,j_s+\nu_i^s r_i^s}$ consider the line $\gamma^s_{i,j_s} \times \{m_i - 1\} \subset \tilde{\mathbf{V}}_{i,m_i-1}$, given by the formula

$$\gamma^s_{i,j_s} \times \{m_i - 1\} =$$

$$= \left\{ (x, y, m_i - 1) \in \mathbb{R}^2 \times \{m_i - 1\} : y = \frac{\nu_i^s}{\mu_i^s} x + \frac{j_s}{\mu_i^s r_i^s} \right\}.$$

Under the action of the diffeomorphism $\tilde{\mathbf{f}}$ the line $\gamma^s_{i,j_s} \times \{m_i - 1\}$ is mapped to the line $\gamma^s_{i,\tilde{j}_s} \times \{0\}$ in the following way:

$$\gamma^s_{i,\tilde{j}_s} \times \{0\} = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} : y = \frac{\nu_i^s}{\mu_i^s} x + \frac{\tilde{j}_s}{\mu_i^s r_i^s} \right\} =$$
$$= \tilde{\mathbf{f}}(\gamma^s_{i,j_s} \times \{m_i - 1\}) =$$
$$= \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} : y = \frac{\nu_i^s}{\mu_i^s}(x + 1) + \frac{j_s}{\mu_i^s r_i^s} \right\}.$$

Then we get $\tilde{j}_s = j_s + \nu_i^s r_i^s$.

The remaining conditions of part 4) follow from Lemma 1 and from the construction of a canonical diffeomorphism.

Point 5). The number $m_i \mu_i^s$ is the period of the stable separatrix corresponding to the vertex δ^s_{i,κ,j_s}. Since both stable separatrices l_1^s, l_2^s of the same saddle point $\sigma \in \Sigma^s_f$ have the same period, then for paired vertices $\delta^s_{i,\kappa,j_s}, \delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}$ equality $m_i \mu_i^s = m_{\tilde{i}} \mu_{\tilde{i}}^s$ must be satisfied. The dynamics in a neighborhood of the point σ

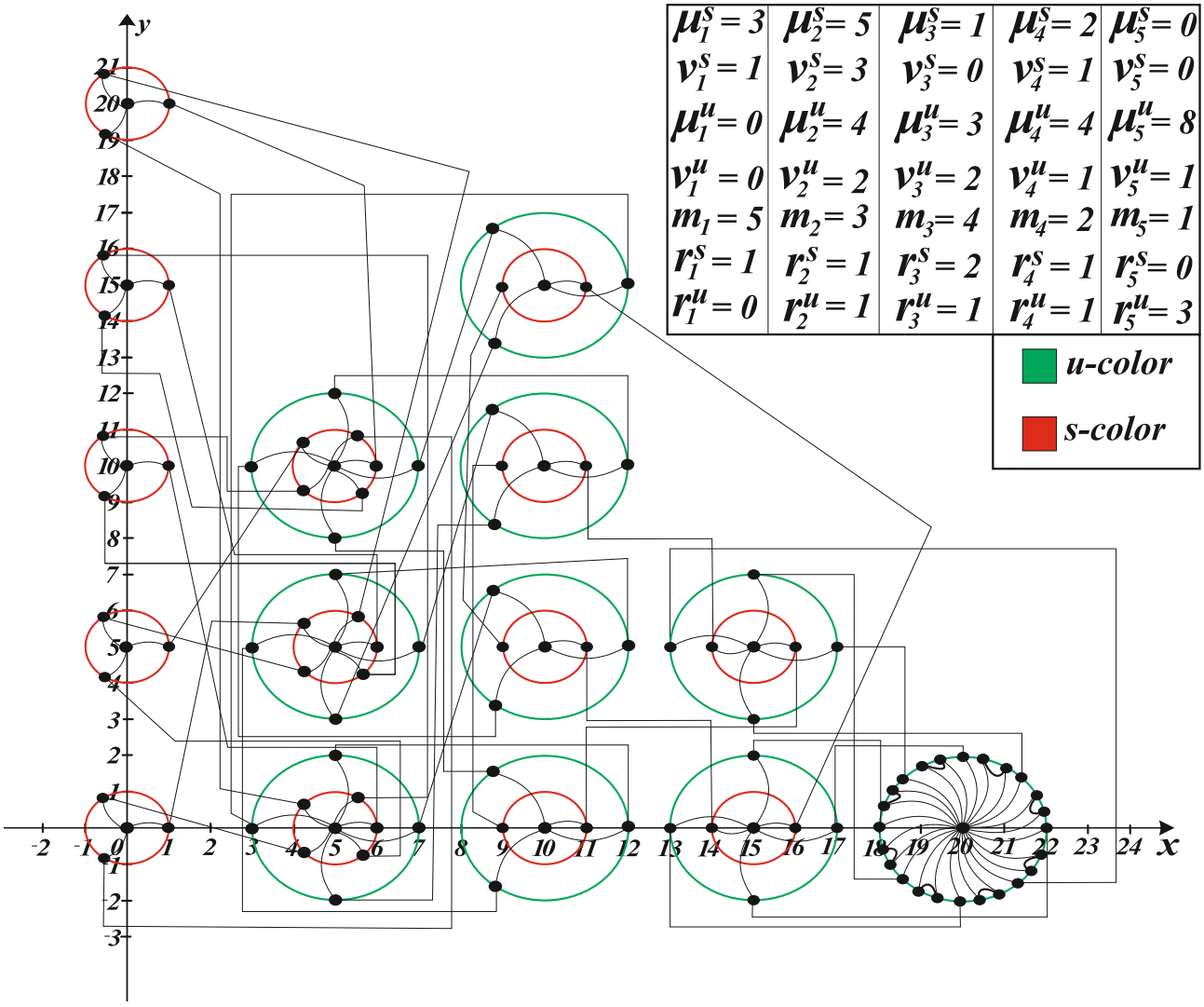


Figure 4.2 — An example of a graph demonstrating the whole range of properties described in Lemma 3. For a given graph $n = 5, k^s = 42, k^u = 56$.

is such that either $f^k(l_1^s) \cap l_2^s = \emptyset$ for all $k \in \mathbb{Z}$ (the case $\nu_\sigma = +1$), or $i = \tilde{i}$, the number $m_i\mu_i^s$ is even, $f^{\frac{m_i\mu_i^s}{2}}(l_1^s) = l_2^s$ and $f^k(l_1^s) \cap l_2^s = \emptyset$ and $k \in \{0, \dots, \frac{m_i\mu_i^s}{2} - 1\}$ (the case $\nu_\sigma = -1$). □

Definition 4. *Any connected graph (T, P), satisfying the properties described in Lemma 3, will be called admissible.*

On Figure 4.2 an example of a graph demonstrating the whole range of properties described in Lemma 3 is drawn.

For an admissible graph (T, P) the number n is the number of columns that the cycles $C_{i,\kappa}^s$ and $C_{i,\kappa}^u$ form. The number m_i is the number of lines in the i-column. If i-column contains s-cycles (red cycles), then there exist co-prime numbers μ_i^s, ν_i^s, $0 \le \nu_i^s < \mu_i^s$ and a natural number r_i^s which uniquely define the

number $\mu_i^s r_i^s$ of vertices on every red cycle and the permutation

$$P_i^s(\delta_{i,\kappa,j_s}^s) = \begin{cases} \delta_{i,\kappa+1,j_s}^s, & \kappa \in \{0,...,m_i-2\} \\ \delta_{i,0,j_s+\nu_i^s r_i^s \pmod{\mu_i^s r_i^s}}^s, & \kappa = m_i - 1 \end{cases}$$

of red vertices in i-column. The number

$$k^s = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu_i^s r_i^s;$$

denotes the total number of vertices on all cycles $C_{i,\kappa}^s$. All red vertices is split into pairs $\delta_{i,\kappa,j_s}^s, \delta_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}^s$ (paired s-vertexes) and this splitting is invariant with respect to P_i^s, $P_{\tilde{i}}^s$.

Absolutely the same situation is with an unstable part of the graph. Herewith, co-prime numbers μ_i^u, ν_i^u (ν_i^u not necessary less than μ_i^u) satisfy the conditions: $\frac{\nu_i^s}{\mu_i^s} \neq \frac{\nu_i^u}{\mu_i^u}$, if $r_i^s r_i^u \neq 0$ and $0 \leq \nu_i^u < \mu_i^u$, if $r_i^s = 0$. The automorphism P composed by the permutations P_i^s, P_i^u along all columns.

For an admissible graph (T, P) we consider the surface M_α, obtained by the union of disks bounded by the circles $C_{i,\kappa}^s$, $r_i^u = 0$, disks bounded by circles $C_{i,\kappa}^u$, $C_{\tilde{i},\tilde{\kappa}}^u$ with the paired u-vertices δ_{i,κ,j_u}^u, $\delta_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_u}^u$, $r_i^s + r_{\tilde{i}}^s \neq 0$ and two-dimensional 1-handles connecting these paired u-vertices (see Figure 4.3). Denote by k^α the number of connected components of the boundary of the surface M_α. In a similar way we construct the surface M_ω and denote by k^ω the number of connected components of its boundary (see Figure 4.4). Note, that in general the surface M_α (M_ω) does not embeddable into a plane as we can see in Figures 4.3, 4.4.

In section5 we realize arbitrary admissible graph (T, P) by a diffeomorphism $f \in G$ such that (T, P) is isomorphic to (T_f, P_f).

The following lemma connects the genus of the supporting surface of the diffeomorphism $f \in G$ with the numerical characteristics of its graph (T_f, P_f).

Lemma 4. *The genus g of the supporting surface for the diffeomorphism $f \in G$ with the graph (T_f, P_f) can be calculated by the formula*

$$2 - 2g = k^\alpha + k^\omega - \frac{1}{2}(k^s + k^u).$$

Proof. Let $f \in G$. Consider the surface M_ω described above for the graph (T_f, P_f). Let us show that the boundary of this surface is embedded in the supporting

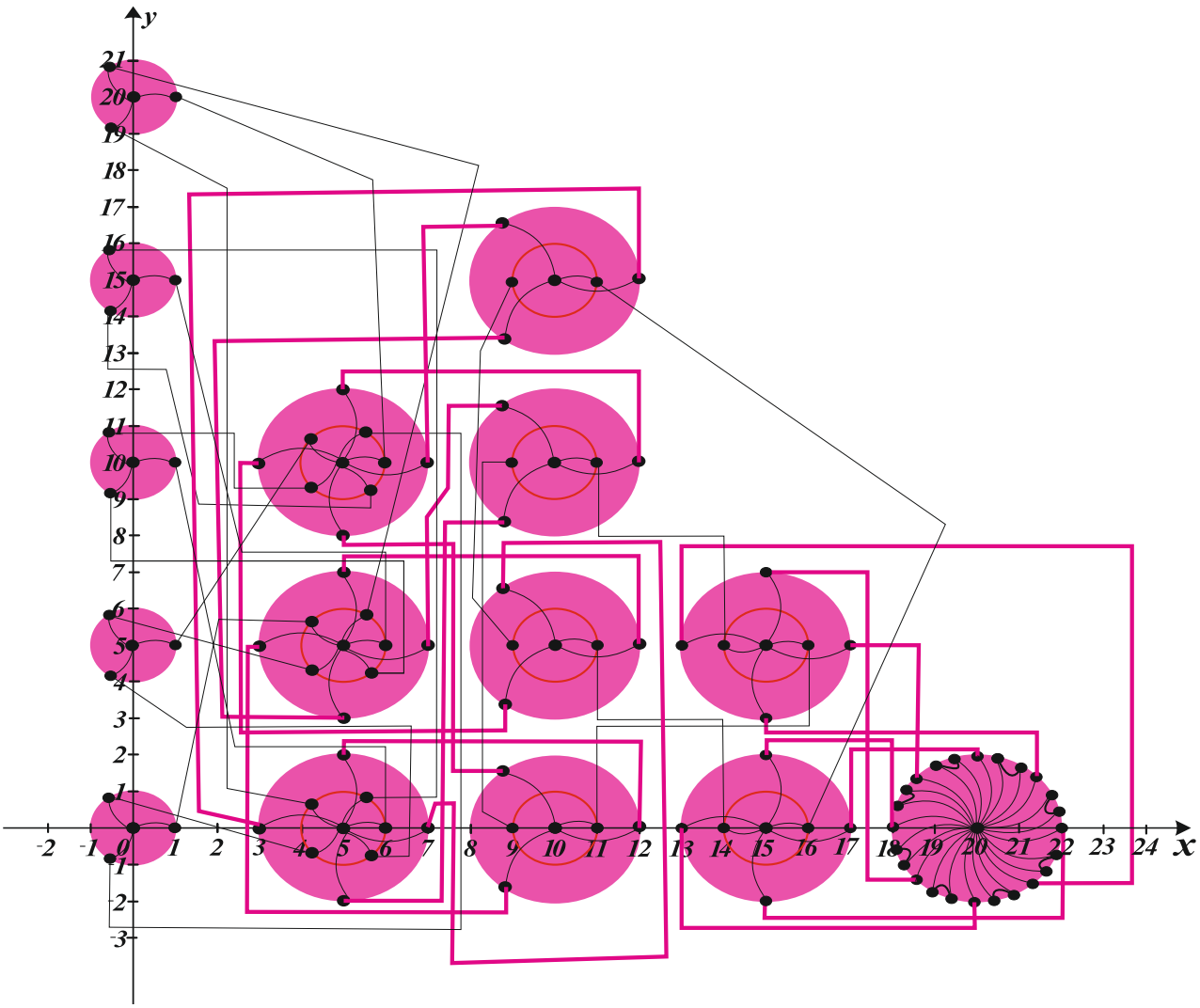


Figure 4.3 — The surface M_α for the graph on the Figure 4.2. Here $k^\alpha = 7$

manifold M^2 of the diffeomorphism f so that each connectivity component of ∂M_ω lies in the basin of some sink of the diffeomorphism f, there are no two components that lie in the same basin, and each sink has at least one component in its basin. Whence it follows that the diffeomorphism f has exactly k^ω sink points.

By construction, the surface M_ω, obtained by the union of disks bounded by the circles $C^u_{i,\kappa}$, $r^s_i = 0$, disks bounded by circles $C^s_{i,\kappa}$, $C^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa}}$ with the paired u-vertices δ^s_{i,κ,j_s}, $\delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}$, $r^u_i + r^u_{\tilde{i}} \neq 0$ and two-dimensional 1-handles connecting these paired s-vertices. We denote by C the union of all the listed circles. Note that this union includes exactly one circle with center $\delta_{i,\kappa}$ for each $i \in \{1, \ldots, n\}$ and each $\kappa \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$. Then each such circle $C_{i,\kappa}$ can be considered as the preimage of generator b on the torus $\mathbb{T}^2$ embedded in the cylinder $\mathbf{V}_{i,\kappa} = \zeta^{-1}(\delta_{i,\kappa})$.

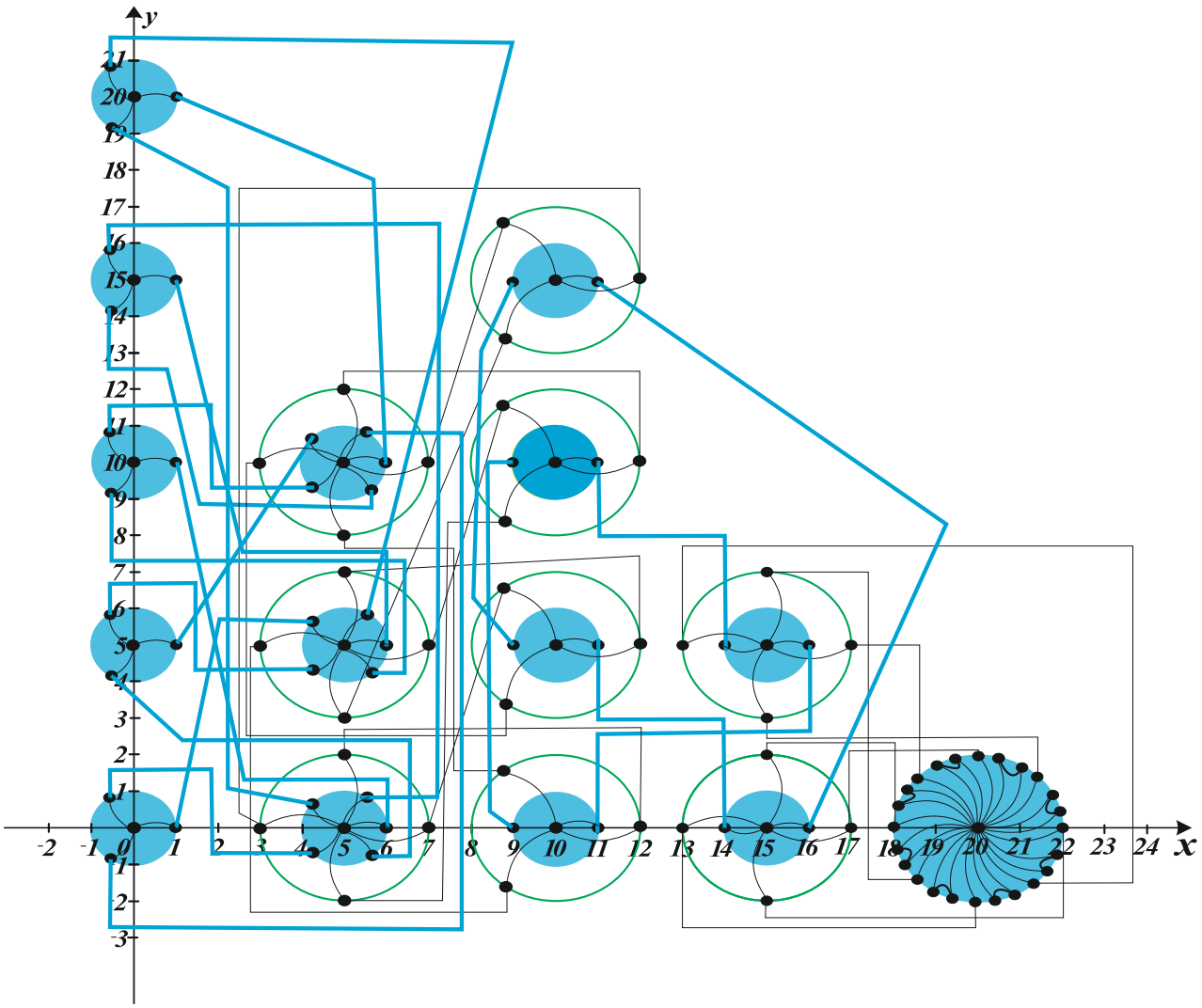


Figure 4.4 — The surface M_ω for the graph in the Figure 4.2. Here $k^\omega = 6$

Therefore, each curve $\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s}$ intersects the curve $C_{i,\kappa}$ at a single point.

By construction of the circles $\Phi_f^{-1}(C)$, they are located on the supporting surface M^2 in such way that they separate the attractor $\mathcal{A}_f$ and the repeller $\mathcal{R}_f$, that is, there exists an attracting neighbourhood $U_{\mathcal{A}_f}$ of the attractor $\mathcal{A}_f$ such that $\partial U_{\mathcal{A}_f} = \Phi_f^{-1}(C)$. In this case, the circles $C^u_{i,\kappa}$, $r^s_i = 0$ are in accordance with the subset D_f of the set $U_{\mathcal{A}_f}$, consisting of attracting disks of isolated sinks of the attractor $\mathcal{A}_f$. The remaining circles correspond to the attracting neighbourhood $U_f = U_{\mathcal{A}_f} \setminus D_f$ of the part $cl\, W^u_{\Sigma^s_f}$ of the attractor $\mathcal{A}_f$ (see Figure 4.5).

By construction, each connected component of the set $U_f \cap W^s_{\Sigma^s_f}$ is in one-to-one correspondence with the s-edge included in M_ω. Then the 1-handle corresponding to this edges are embedded in the supporting surface M^2 as tubular neighborhoods Q_f of the curves $U_f \cap W^s_{\Sigma^s_f}$. Therefore, the connected components of

the set $U_f \setminus Q_f$ are attracting disks of non-isolated sinks of the attractor $\mathcal{A}_f$. Thus, the number of connected components of the boundary of the surface $D_f \sqcup (U_f \setminus Q_f)$ coincides with the number of sinks of the diffeomorphism f. On the other hand, each such component is in one-to-one correspondence with the connected component of the set ∂M_ω. □

As an illustration for the proof of Lemma 4 we describe in more detail how the M_ω surface can be used to find out the number of sinks basins (see Figure 4.5).

To understand how many sinks the diffeomorphism f has, it is necessary to consider the neighbourhood of its attractor $U_\mathcal{A}$. First, let's talk about the $C^u_{2,0}$ cycle. Since the graph does not have an s-cycle centered at the point $\delta_{2,0}$, then on the cylinder $\mathbf{V}_2$, which corresponds to the cycle $C^u_{2,0}$, there will be only one unstable separatrix not participating in the heteroclinic intersection and intersecting a circle $C_{2,0} \subset \mathbf{V}_{2,0}$ at exactly one point. In Figure 4.5 you can see the circle $C_{2,0}$ as, for example, the boundary of the disk D_f and it becomes clear that the separatrix which corresponds to the vertex $\delta^u_{2,0,0}$ must have sink ω_1 in the closure. This is how you can determine the location and quantity of isolated sinks.

Note that the set U_f is not yet a neighborhood of sink points, but in the context of the definition of the attractor it contains stable saddle separatrices. Removing their neighborhoods from the set U_f, we obtain precisely the neighborhoods of the sink points.

To remove a neighborhood of stable saddle separatrices, we have introduced some tubular neighbourhood Q_f of the set $U_f \cap W^s_{\Sigma^s_f}$. Then the boundary of the set $U_f \setminus Q_f$ belongs to basins of non-isolated sinks. Notice that the connected components of the set $U_f \cap W^s_{\Sigma^s_f}$, and, accordingly, Q_f, one-to-one correspondence to the set of 2-dimensional 1-handles of M_ω. Thus, the boundary of the set $D_f \cup (U_f \setminus q_f)$ one-to-one corresponds to the boundary of the set M_ω. Similar reasoning for the surface M_α.

So, for an admissible graph in the Figure 4.1, we obtain $2 - 2g = 2 + 2 - \frac{1}{2}(2 + 2) = 2$ and, therefore, $g = 0$ (see Figure 4.5).

Notice, that for an admissible graph in the Figure 4.2 we get $2 - 2g = 7 + 6 - \frac{1}{2}(42 + 56) = -36$ and, therefore, $g = 19$.

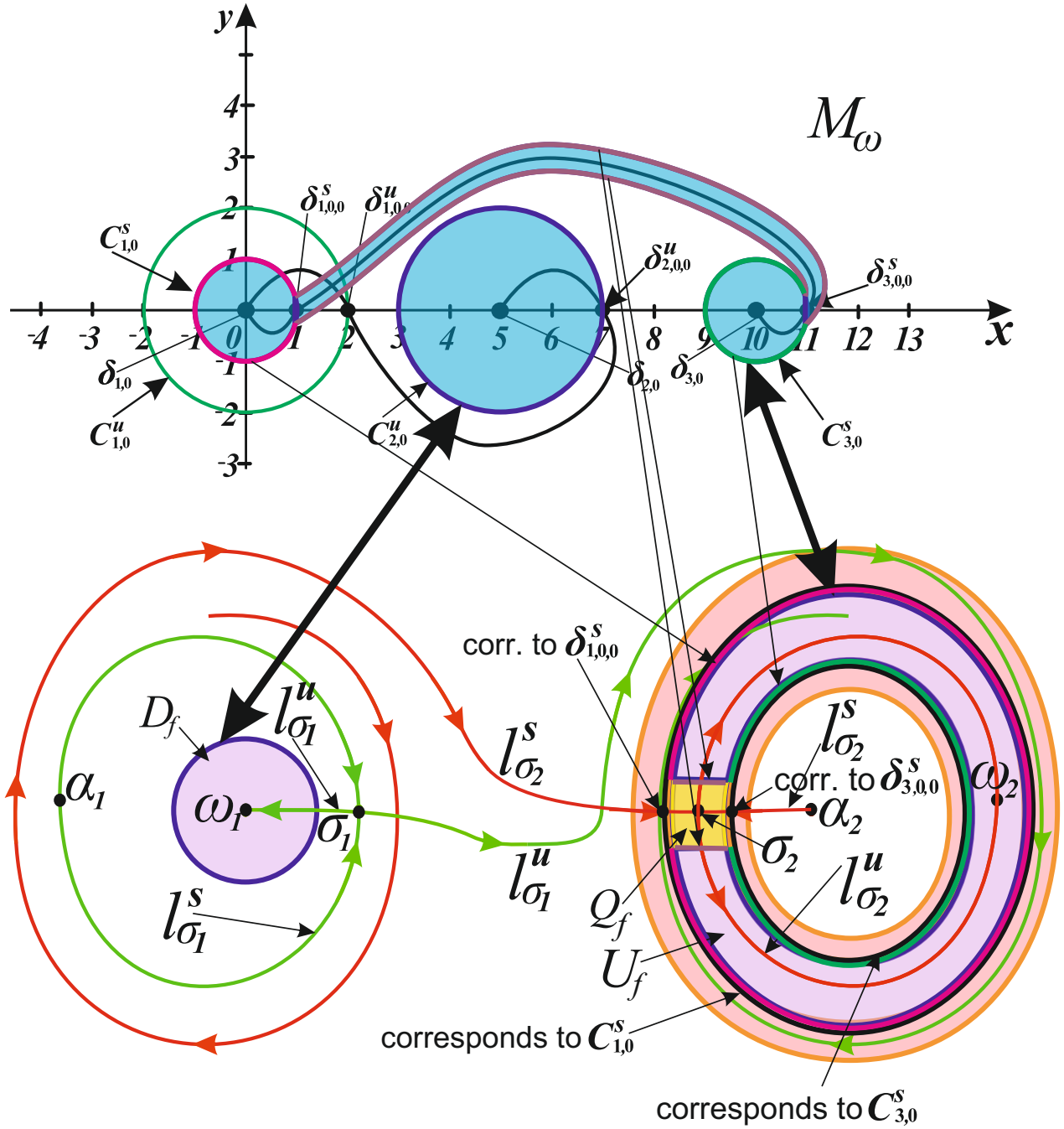


Figure 4.5 — The surface M_ω for the graph in the Figure 4.1 and implication of this surface in $M^2 = \mathbb{S}^2$ with diffeomorphism f from the Figure 3.1. Here $k^\omega = k^\alpha = 2$

CHAPTER 5

Realization of diffeomorphisms of the class G (proof of the theorem 1)

In this section, for any admissible graph (T, P) we construct a diffeomorphism $f \in G$ such that the graphs (T, P) and (T_f, P_f) are isomorphic. We will use the notation introduced in the section 3.3, for the step-by-step realization of the dynamics from graph.

Step 1. Realization of the wandering set. For every vertex $\delta_{i,\kappa}$ we construct spaces $\tilde{\mathbf{V}}_{i,\kappa} = \mathbb{R}^2 \times \{\kappa\}$ and $\mathbf{V}_{i,\kappa} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \{\kappa\}$, the natural projection $\Delta_{i,\kappa} : \tilde{\mathbf{V}}_{i,\kappa} \to \mathbf{V}_{i,\kappa}$, the diffeomorphism $\mathbf{f}_i : \mathbf{V}_i \to \mathbf{V}_i$. By the substitution P_i^s, by virtue of Lemma 3, we recover the numbers r_i^s, μ_i^s, ν_i^s and construct on the space $\tilde{\mathbf{V}}_{i,\kappa}$ the family of lines $\tilde{\Gamma}_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s} \times \{\kappa\}$. We set $\mathbf{L}_i^s = \Delta_i(\tilde{\Gamma}_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s})$ and for every vertex $\delta_{i,\kappa,j_s}^s \in c_{i,\kappa}^s$ we assign a curve $\mathbf{l}_{i,\kappa,j_s}^s = \Delta_{i,\kappa}(\gamma_{i,j_s}^s \times \{\kappa\})$. The curves corresponding to paired vertices will be called paired. We construct similar curves $\mathbf{L}_i^u$ by the substitution P_i^u.

Let $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{V}_n$, $\mathbf{L}^s = \mathbf{L}_1^s \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{L}_n^s$, $\mathbf{L}^u = \mathbf{L}_1^u \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{L}_n^u$, and denote by $\mathbf{f} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ the diffeomorphism composed of diffeomorphisms $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$.

Step 2. Compactification of the space V by invariant manifolds of saddle points. Let $\mathcal{N} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$, $\mathcal{N}^s = \mathcal{N} \setminus Oy$ and $\mathcal{N}^u = \mathcal{N} \setminus Ox$. We define on the set $\mathcal{N} \times \mathbb{Z}_k$ the following diffeomorphisms:

$$a_{k,+}(x, y, \kappa) = \begin{cases} (x, y, \kappa + 1) & \forall \kappa \in \{0, 1, ..., k-1\}, \\ (\frac{x}{2}, 2y, 0) & for \ \ \kappa = k; \end{cases}$$

$$a_{k,-}(x, y, \kappa) = \begin{cases} (x, y, \kappa + 1) & \forall \kappa \in \{0, 1, ..., k-1\}, \\ (-\frac{x}{2}, -2y, 0) & for \ \ \kappa = k. \end{cases}$$

For each line $\gamma_{i,\kappa,j_s}^s \in \tilde{\Gamma}_{r_i^s,\mu_i^s,\nu_i^s}$ we choose a neighbourhood

$$B_{i,\kappa,j_s}^s = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left| y - \left(\frac{\nu_i^s}{\mu_i^s} x - \frac{j_s}{\mu_i^s r_i^s}\right)\right| \leqslant \frac{1}{4\mu_i^s r_i^s}\right\}.$$

1406

For each line $\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s}$ we set $\mathbf{B}^s_{i,\kappa,j_s} = \Delta_i(B^s_{i,j_s} \times \{\kappa\})$ and for paired curves $\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s}$, $\mathbf{l}^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}$ we set $\mathbf{N}^s_{i,\kappa,j_s} = \mathbf{B}^s_{i,\kappa,j_s} \cup \mathbf{B}^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}$. Let $\mathbf{N}^s_{i,j_s} = \bigcup\limits_{\kappa=0}^{m_i-1} \mathbf{N}^s_{i,\kappa,j_s}$.

Next, consider two cases : a) $\delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s} \in \{\delta^s_{i,\kappa,j_s}, P^s_i(\delta^s_{i,\kappa,j_s}), \dots, (P^s_i)^{\mu^s_i m_1 - 1}(\delta^s_{i,\kappa,j_s})\}$, b) $\delta^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s} \notin \{\delta^s_{i,\kappa,j_s}, P^s_i(\delta^s_{i,\kappa,j_s}), \dots, (P^s_i)^{\mu^s_i m_1 - 1}(\delta^s_{i,\kappa,j_s})\}$.

In the case a) we set $k^s_{i,j_s} = \frac{m_i \mu^s_i}{2}$. Due to Lemma 3, $\mathbf{l}^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s} = \mathbf{f}_i^{k^s_i, j_s}(\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s})$. Then the orbit space of the action of the diffeomorphism $\mathbf{f}^{k^s_{i,j_s}}$ on $\mathbf{N}^s_{i,j_s}$ is isomorphic to two dimensional annulus. We set $f_{i,j_s} = a_{k^s_{i,j_s},-}$ and note the orbit space of the action of the diffeomorphism $f^{k^s_{i,j_s}}_{i,j_s}$ on $\mathcal{N}^s$ is also diffeomorphic to the two-dimensional annulus, which entails the existence of a diffeomorphism $\vartheta^s_{i,j_s} : \mathbf{N}^s_{i,j_s} \to \mathcal{N}^s$ such that $\vartheta^s_{i,j_s}(\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s} \cup \mathbf{l}^s_{\tilde{i},\tilde{\kappa},\tilde{j}_s}) = Ox \setminus \{O\}$ and $\mathbf{f}^{k^s_{i,j_s}} \circ \vartheta^s_{i,j_s} = f^{k^s_{i,j_s}}_{i,j_s} \circ \vartheta^s_{i,j_s}$. Moreover, if the set $\mathbf{L}^u_i$ is not empty, then we choose a diffeomorphism ϑ^s_{i,j_s} so that each connected component of the set $\vartheta^s_{i,j_s}(\mathbf{N}^s_{i,j_s} \cap \mathbf{L}^u_i)$ is a leaf of the foliation $\mathcal{F}^u$.

Let $\mathcal{O}_{\mathbf{N}^s_{i,j_s}} = \bigcup\limits_{z=0}^{k^s_{i,j_s}-1} \mathbf{f}^z(\mathbf{N}^s_{i,j_s})$ and extend the diffeomorphism ϑ^s_{i,j_s} to a diffeomorphism $\vartheta^s_{i,j_s} : \mathcal{O}_{\mathbf{N}^s_{i,j_s}} \to \mathcal{N}^s \times \mathbb{Z}_{k^s_{i,j_s}}$ by the formula

$$\vartheta^s_{i,j_s}(x) = f^z_{i,j_s}(\vartheta^s_{i,j_s}(\mathbf{f}^{-z}(x))),\ x \in \mathbf{f}^z(\mathbf{N}^s_{i,j_s}).$$

In the case b) we set $k^s_{i,j_s} = m_i \mu^s_i$. By construction, the orbit space of the action of the diffeomorphism $\mathbf{f}^{k^s_{i,j_s}}$ on $\mathbf{N}^s_{i,j_s}$ is diffeomorphic to a pair of two-dimensional annulus. We set $f_{i,j_s} = a_{k^s_{i,j_s},+}$ and note that the orbit space of the action of the diffeomorphism$f^{k^s_{i,j_s}}_{i,j_s}$ on $\mathcal{N}^s$ is also diffeomorphic to the pair of two-dimensional annulus, which entails the existence of a diffeomorphism $\vartheta^s_{i,j_s} : \mathcal{O}_{\mathbf{N}^s_{i,j_s}} \to \mathcal{N}^s \times \mathbb{Z}_{k^s_{i,j_s}}$, similar to diffeomorphism constructed in point a).

Denote by $\mathbf{N}^s$, $\mathfrak{N}^s$, $\mathfrak{N}_s$ the disjoint union of the sets $\mathcal{O}_{\mathbf{N}^s_{i,j_s}}$, $\mathcal{N}^s \times \mathbb{Z}_{k^s_{i,j_s}}$, $\mathcal{N} \times \mathbb{Z}_{k^s_{i,j_s}}$, respectively, that contains all paired curves. Let $f_s : \mathfrak{N}_s \to \mathfrak{N}_s$ is a diffeomorphism composed of diffeomorphisms f_{i,j_s} and denote by $\vartheta_s : \mathbf{N}^s \to \mathfrak{N}^s$ a diffeomorphism, composed of diffemorphisms ϑ^s_{i,j_s}.

Carrying out a similar construction with all paired u-curves, we obtain the sets $\mathbf{N}^u$, $\mathfrak{N}^u$, $\mathfrak{N}_u$ and diffeomorphisms $f_u : \mathfrak{N}_u \to \mathfrak{N}_u$, $\vartheta_u : \mathbf{N}^u \to \mathfrak{N}^u$.

Denote by $\tilde{\mathcal{W}} = \mathbf{V} \sqcup \mathfrak{N}_s \sqcup \mathfrak{N}_u$ and introduce on the set $\tilde{\mathcal{W}}$ a minimal equivalence relation $\sim$, satisfying the following conditions: $x \sim y$, if $y = \vartheta_s(x)$;

$x \sim y$, if $y = \vartheta_u(x)$. Denote by $\mathcal{W}$ the set of equivalence classes and by $\mathcal{P}_{\mathcal{W}} : \tilde{\mathcal{W}} \to \mathcal{W}$ the natural projection associating the point $x \in \tilde{\mathcal{W}}$ its equivalence class. We set $\mathcal{P}_{\mathbf{V}} = \mathcal{P}_{\mathcal{W}}|_{\mathbf{V}}$, $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s} = \mathcal{P}_W|_{\mathfrak{N}_s}$ and $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u} = \mathcal{P}_{\mathcal{W}}|_{\mathfrak{N}_u}$. By construction the maps $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}, \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}, \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}$ are topological embeddings that induce the structure of a smooth orientable 2-manifold without boundary on the space $\mathcal{W}$. The connectedness of the manifold $\mathcal{W}$ follows from the connectedness of the graph T. Let us show that the space $\mathcal{W}$ is Hausdorff.

Step 3. Proof of the Hausdorff property of the space $\mathcal{W}$ To prove the Hausdorff property of $\mathcal{W}$ it suffices to show that the set $E_{\mathcal{W}} = \{(x, y) \in \tilde{\mathcal{W}} \times \tilde{\mathcal{W}} : \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x) = \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(y)\}$ is closed in $\tilde{\mathcal{W}} \times \tilde{\mathcal{W}}$ (see for example [8]). To do this, it suffices to show that for any sequence $(x_m, y_m) \in E_{\mathcal{W}}$, converging in the space $\tilde{\mathcal{W}} \times \tilde{\mathcal{W}}$ to the point (x, y), it follows that $(x, y) \in E_{\mathcal{W}}$. Without loss of generality, we can assume that all points of the sequence $x_m\,(y_m)$ lie in the same connected component of the set $\tilde{\mathcal{W}}$, as the poin $x\,(y)$ (otherwise, we can proceed to considering a subsequence with this property). Consider six possible cases: 1) $x_m, y_m \in \mathbf{V}$; 2) $x_m, y_m \in \mathfrak{N}^s$; 3) $x_m, y_m \in \mathfrak{N}^u$; 4) $x_m \in \mathbf{V}$, $y_m \in \mathfrak{N}^s$; 5) $x_m \in \mathbf{V}$, $y_m \in \mathfrak{N}^u$; 6) $x_m \in \mathfrak{N}^s$, $y_m \in \mathfrak{N}^u$.

In cases 1); 2) and 3), $x_m = y_m$. Then $x = y$ and, hence, $(x, y) \in E_{\mathcal{W}}$. In the case 4) $x_m \in \mathbf{N}^s$, $y_m \in \mathfrak{N}^s$ and $y_m = \vartheta_s(x_m)$. Since the closure of the set $\mathbf{N}^s$ in $\tilde{\mathcal{W}}$ coincides with the set $\mathbf{N}^s \cup \partial\mathbf{N}^s$, then consider two cases : 4a) $x \in \mathbf{N}^s$; 4b) $x \in \partial\mathbf{N}^s$. In subcase 4a), using the continuity of the map ϑ_s, we obtain the following chain of equalities: $y = \lim\limits_{m\to\infty} y_m = \lim\limits_{m\to\infty} \vartheta_s(x_m) = \vartheta_s(\lim\limits_{m\to\infty}(x_m)) = \vartheta_s(x)$. Thus, $(x, y) \in E_{\mathcal{W}}$. Let us show that case 4b) is impossible. Indeed, if $x \in \partial\mathbf{N}^s$, then $y = \lim\limits_{m\to\infty} y_m = \lim\limits_{m\to\infty} \vartheta_s(x_m)$. We got a contradiction, since the sequence $\{\vartheta_s(x_m)\}$ has no limit in $\mathfrak{N}_s$. Case 5) is similar to case 4).

In the case 6) $x_m \in \mathfrak{N}^s$, $y_m \in \mathfrak{N}^u$ and $\vartheta_s^{-1}(x_m) = \vartheta_u^{-1}(y_m)$. Since the closure of the set $\mathfrak{N}^s$ in $\tilde{\mathcal{W}}$ coincides with $\mathfrak{N}_s$, then two subcases are possible: 6a) $x \in \mathfrak{N}^s$, 6b) $x \in Oy$. In the case 6a), using the continuity of the maps ϑ_s, ϑ_u, we obtain the following chain of equalities $y = \lim\limits_{m\to\infty} y_m = \lim\limits_{m\to\infty} \vartheta_u((\vartheta_u)^{-1}(y_m)) = \lim\limits_{m\to\infty} \vartheta_u((\vartheta_s)^{-1}(x_m)) = \vartheta_u((\vartheta_s)^{-1}(x))$. Let us show that case 6b) is impossible.

Since $x_m \in \mathfrak{N}^s$ and $x \in Oy$, then by Lemma 2.1.1. work [6] there is a subsequence $\{x_{m_j}\}$, a sequence of integers $p_{m_j} \to \infty$ and a point $z \in (Ox \setminus \{0\})$ such that the sequence of points $\{z_{m_j} = f_s^{-p_{m_j}}(x_{m_j})\}$ converges to the point

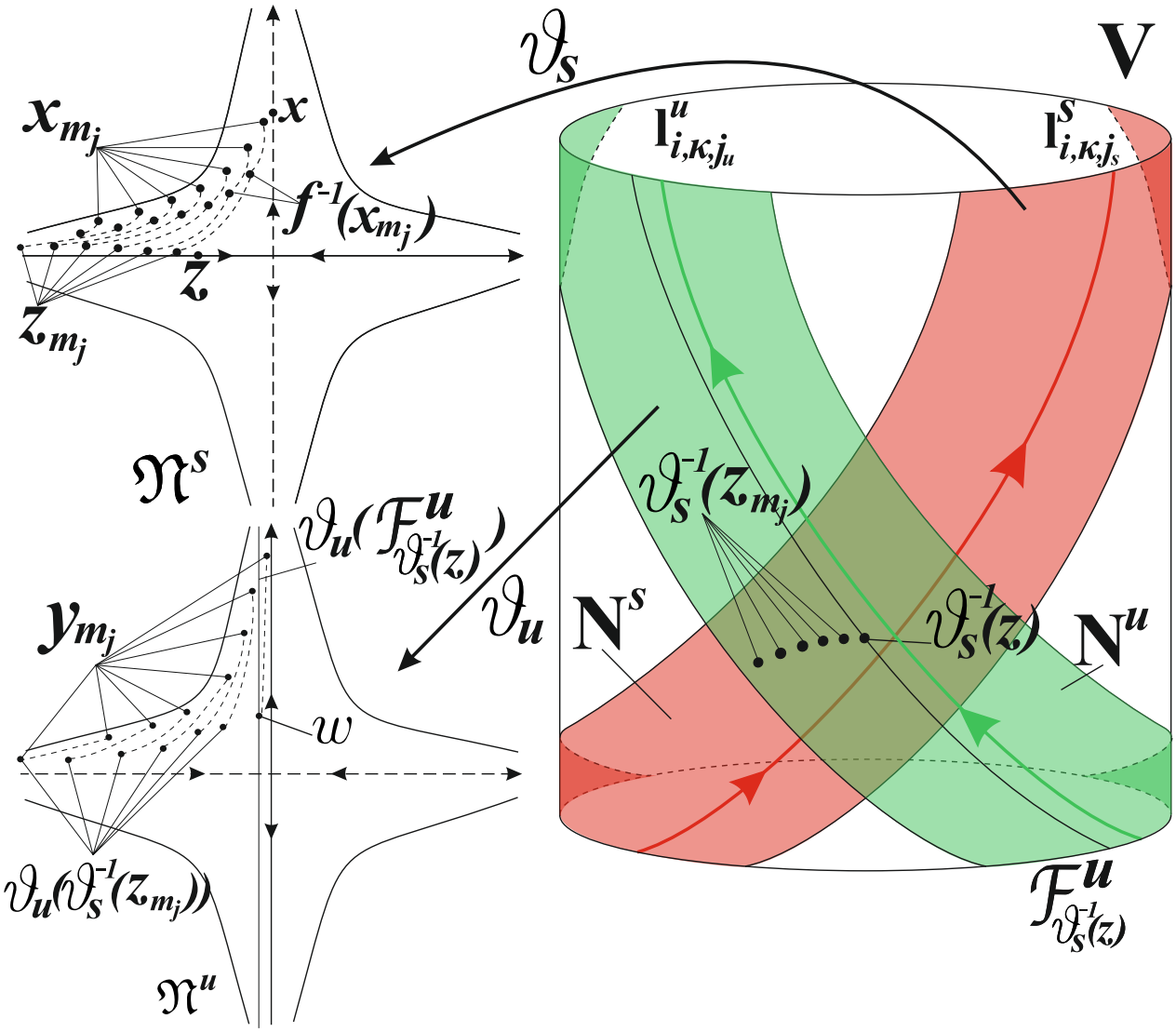


Figure 5.1 — Illustration for case 6b) of step 3.

z (see Figure 5.1). Note that the point $\vartheta_s^{-1}(z)$ is the intersection point of the curve $\mathbf{l}^s_{i,\kappa,j_s}$ and the leaf $\mathcal{F}^u_{\vartheta_s^{-1}(z)}$. Since $y_m = \vartheta_u(\vartheta_s^{-1}(x_m))$, then $y_{m_j} = \vartheta_u(\vartheta_s^{-1}(x_{m_j})) = \vartheta_u(\vartheta_s^{-1}(f_s^{p_{m_j}}(z_{m_j}))$, and the point $w = \vartheta_u(\vartheta_s^{-1}(z))$ belongs to the leaf $\vartheta_u(\mathcal{F}^u_{\vartheta_s^{-1}(z)})$. Since the composition of diffeomorphisms $\vartheta_u \circ \vartheta_s^{-1}$ conjugates the diffeomorphisms $f_s|_{\mathfrak{N}^s}$ and $f_u|_{\mathfrak{N}^u}$, then $y_{m_j} = f_u^{p_{m_j}}(\vartheta_u(\vartheta_s^{-1}(z_{m_j})))$ and $\lim\limits_{j\to\infty} y_{m_j} = \lim\limits_{j\to\infty} f_u^{p_{m_j}}(\vartheta_u(\vartheta_s^{-1}(z_{m_j}))) = \lim\limits_{j\to\infty} f_u^{p_{m_j}}(w)$. Since the sequence $f_u^{p_{m_j}}(w)$ has no limit in $\mathfrak{N}_u$ we got a contradiction.

Step 4. Induction of dynamics on a manifold $\mathcal{W}$. Thus, $\mathcal{W}$ – is a smooth connected orientable 2-manifold without boundary, and the maps $f_{\mathbf{V}} = \mathcal{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{f}\mathcal{P}_{\mathbf{V}}^{-1} : \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}) \to \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V})$, $f_{\mathfrak{N}_s} = \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s} f_s \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}^{-1} : \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(\mathfrak{N}_s) \to \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(\mathfrak{N}_s)$ and $f_{\mathfrak{N}_u} = \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u} f_u \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}^{-1} : \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}(\mathfrak{N}_u) \to \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}(\mathfrak{N}_u)$ are diffeomorphisms. Notice, that$\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{N}^s) = \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(\mathfrak{N}^s)$ and $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{N}^u) = \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}(\mathfrak{N}^u)$. Let us show, that $f_{\mathbf{V}}|_{\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{N}^s)} = f_{\mathfrak{N}_s}|_{\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(\mathfrak{N}^s)}$ and $f_{\mathbf{V}}|_{\mathcal{P}(\mathbf{N}^u)} = f_{\mathfrak{N}_u}|_{\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}(\mathfrak{N}^u)}$. Indeed, it follows from the definition of the gluing map ϑ_s that $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}^{-1}(x) = \vartheta_s^{-1}(\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}^{-1}(x))$ for any point $x \in \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{N}^s)$ and $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(y) = \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(\vartheta_s(y))$ for any point $y \in \mathbf{N}^s$. Then

$$f_{\mathbf{V}}(x) = \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{f}(\mathcal{P}_{\mathbf{V}}^{-1}(x))) = \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(\vartheta_s(\mathbf{f}(\vartheta_s^{-1}(\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}^{-1}(x))))) =$$
$$= \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(f_s(\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}^{-1}(x))) = f_{\mathfrak{N}_s}(x).$$

The coincidence of the maps $f_{\mathbf{V}}|_{\mathcal{P}(\mathbf{N}^u)} = f_{\mathfrak{N}_u}|_{\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}(\mathfrak{N}^u)}$ is proved similarly.

As $\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}), \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(\mathfrak{N}^s)$ and $\mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}(\mathfrak{N}_u)$ are open subsets of the space $\mathcal{W}$ such that $\mathcal{W} = \mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}) \cup \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_s}(\mathfrak{N}^s) \cup \mathcal{P}_{\mathfrak{N}_u}(\mathfrak{N}_u)$. By [14, Theorem 18.3 (The pasting lemma)], that map $f_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, defined by the formula

$$f_{\mathcal{W}}(x) = \begin{cases} f_{\mathbf{V}}(x), x \in (\mathcal{P}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}) \setminus (\mathfrak{N}_s \cup \mathfrak{N}_u)); \\ f_{\mathfrak{N}_s}(x), x \in \mathfrak{N}_s \\ f_{\mathfrak{N}_u}(x), x \in \mathfrak{N}_u, \end{cases}$$

is a diffeomorphism. By construction, the non-wandering set $\Sigma_{f_{\mathcal{W}}}$ of the diffeomorphism $f_{\mathcal{W}}$ consist of k^s saddle points, whose stable separatrices coincide with the set $P_{\mathcal{W}}(\mathbf{L}^s)$ and k^u saddle points whose unstable separatrices coincide with the set $P_{\mathcal{W}}(\mathbf{L}^u)$, we denote these sets of saddle points by Σ^s, Σ^u, respectively.

Step 5. Compactification of the manifold $\mathcal{W}$ by node points.

Let $\mathbf{M}^u = \mathcal{W} \setminus W^u_{\Sigma_{f_{\mathcal{W}}}}$. Denote by $\hat{\mathbf{M}}^u$ the orbit space of the action of the diffeomorphism $f_{\mathcal{W}}$ on $\mathbf{M}^u$ and by $p_{\mathbf{M}^u} : \mathbf{M}^u \to \hat{\mathbf{M}}^u$ the natural projection. Let

us show that the space $\hat{\mathbf{M}}^u$ is a disjoint union of two-dimensional tori.

Denote by $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}/\mathbf{f}$ the orbit space of the action of the diffeomorphism $\mathbf{f}$ on $\mathbf{V}$ and by $\mathbf{p} : \mathbf{V} \to \hat{\mathbf{V}}$ the natural projection. By construction, the manifold $\hat{\mathbf{V}}$ is a disjoint union of n two-dimensional tori $\mathbb{T}^2$. Similarly to [11] it is possible to show that the space $\hat{\mathbf{M}}^u$ is diffeomorphic to the manifold obtained by rearranging the manifold $\hat{\mathbf{V}}$ along the set $\hat{\mathbf{L}}^u = \mathbf{p}(\mathbf{L}^u)$. Due to [11, Lemma 2], the space $\hat{\mathbf{M}}^u$ is also a disjoint union of tori $\hat{\mathbf{M}}^u_1, \dots, \hat{\mathbf{M}}^u_{\kappa_u}$.

Let $\mathbf{M}^u_i = p^{-1}_{\mathbf{M}^u}(\hat{\mathbf{M}}^u_i)$, $i \in \{1, \dots, \kappa_u\}$. Then the manifold $\mathbf{M}^u_i$ is the union of m^u_i copies of the cylinder $\mathbb{R}^2 \setminus O$. For $m \in \mathbb{N}$ consider the linear extension $b_m : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_m$, given by the formula:

$$b_m(x, y, \kappa) = \begin{cases} (x, y, \kappa + 1), \kappa \in \{0, 1, ..., m-1\}; \\ (2x, 2y, 0), \kappa = m; \end{cases}$$

Let $\mathcal{M}_{u,i} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_{m^u_i}$ and $\mathcal{M}_u = \bigcup\limits_{i=1}^{\kappa_u} \mathcal{M}_{u,i}$. Denote by $b_u : \mathcal{M}_u \to \mathcal{M}_u$ a diffeomorphism, composed of diffeomorphisms $b_{m^u_1}, \dots, b_{m^u_{\kappa_u}}$.

Let $\mathcal{M}^u_i = (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_{m^u_i}$. By the construction, the orbit space $\mathcal{M}^u_i / b_{m^u_i}$ is also a two-dimensional tori. Then there exists a diffeomorphism $\theta^u_i : \mathbf{M}^u_i \to \mathcal{M}^u_i$, that conjugate diffeomorphisms $f_{\mathcal{W}}|_{\mathbf{M}^u_i}$ and $b_{m^u_i}|_{\mathcal{M}^u_i}$. Let $\mathcal{M}^u = \bigcup\limits_{i=1}^{\kappa_u} \mathcal{M}^u_i$ and denote by $\theta_u : \mathbf{M}^u \to \mathcal{M}^u$ a diffeomorphism, composed of diffeomorphisms $\theta^u_1, \dots, \theta^u_{\kappa_u}$. By construction, the diffeomorphism θ_u conjugates the diffeomorphisms $f_{\mathcal{W}}|_{\mathbf{M}^u}$ and $b_u|_{\mathcal{M}^u}$.

Carrying out a similar construction with a reconstruction of the manifold $\hat{\mathbf{V}}$ along the set $\hat{\mathbf{L}}^s = \mathbf{p}(\mathbf{L}^s)$, we obtain the sets $\mathbf{M}^s, \mathcal{M}^s, \mathcal{M}_s$ and diffeomorphisms $\theta_s : \mathbf{M}^s \to \mathcal{M}^s$ and $b_s : \mathcal{M}^s \to \mathcal{M}^s$, where diffeomorphism θ_s conjugate diffeomorphisms $f_{\mathcal{W}}|_{\mathbf{M}^s}$ with diffeomorphism $b_s|_{\mathcal{M}^s}$, composed of the linear contraction $b^{-1}_{m^s_1}, \dots, b^{-1}_{m^s_{\kappa_s}}$.

Let $\tilde{M}^2 = \mathcal{W} \sqcup \mathcal{M}_s \sqcup \mathcal{M}_u$ and introduce on the set $\tilde{M}^2$ the minimal equivalence relation $\sim$, satisfying the following conditions: $x \sim y$, if $y = \theta_u(x)$; $x \sim y$, if $y = \theta_s(x)$. Denot by M^2 the set of equivalence classes and by $\mathcal{P}_{M^2} : \tilde{M}^2 \to M^2$ the natural projection. Similarly to Step 3, it is possible to show that the space M^2 is a smooth connected Hausdorff 2-manifold. Similarly to Step 4, one can

show that the map $f : M^2 \to M^2$, given by the formula

$$f(x) = \begin{cases} \mathcal{P}_{M^2} f_{\mathcal{W}} (\mathcal{P}_{M^2}|_{\mathcal{W}})^{-1}(x), x \in \mathcal{P}_{M^2}(\mathcal{W}); \\ \mathcal{P}_{M^2} b_s (\mathcal{P}_{M^2}|_{\mathcal{M}_s})^{-1}(x), x \in \mathcal{P}_{M^2}(\mathcal{M}_s); \\ \mathcal{P}_{M^2} b_u (\mathcal{P}_{M^2}|_{\mathcal{M}_u})^{-1}(x), x \in \mathcal{P}_{M^2}(\mathcal{M}_u), \end{cases}$$

is a diffeomorphism. By the construction, the non-wandering set Σ_f of the diffeomorphism f contains k^s saddle points $\Sigma_f^s = \mathcal{P}_{M^2}(\Sigma^s)$, k^u saddle points $\Sigma_f^u = \mathcal{P}_{M^2}(\Sigma^u)$, $k^\alpha = \sum\limits_{i=1}^{\kappa_s} m_i^s$ sources Σ_f^α and $k^\omega = \sum\limits_{i=1}^{\kappa_u} m_i^u$ sinks Σ_f^ω.

Let us show that the manifold $M^2$is compact and, therefore, the constructed diffeomorphism f belongs to the class G.

To prove the compactness of the manifold M^2 it suffices to show that an arbitrary sequence $\{x_n\} \in M^2$ has a convergent subsequence. In the case when infinitely many members of the sequence $\{x_n\}$ belong to the set Σ_f, this statement is obvious. Consider the case when infinitely many members of the sequence $\{x_n\}$ belong to the set $A = M^2 \setminus \Sigma_f$. We denote by B the compact fundamental domain of restriction of the diffeomorphism f to the set A. Then, for each member x_n of the sequence $\{x_n\}$ there is an integer k_n such that $y_n = f^{k_n}(x_n) \in B$. Without loss of generality, we can assume that the sequence $\{y_n\} = \{f_n^k(x_n)\}$ converges to the point $y \in B$ (this can be achieve by choosing a converging subsequence). There are two possibilities for the sequence $\{k_n\}$:

1) the sequence $\{k_n\}$ is bounded;
2) the sequence $\{k_n\}$ is unbounded.

In the case 1), without loss of generality, we can assume (by choosing a subsequence) that the sequence$\{k_n\}$ converges to some integer k. Then $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{-k}(y_n) = f^{-k}(y)$. Thus, the subsequence of the sequence $\{x_n\}$ converges to the point $f^{-k}(y) \in A$.

In the case 2) we can assume (by choosing a subsequence), that $\{k_n\}$ converges to $\{+\infty\}$ or to $\{-\infty\}$. For definiteness, we set $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$. For the point y the following options are possible:

2a) $y \in W_\alpha^u, \alpha \in \Sigma_f^\alpha$;
2b) $y \in W_\sigma^u, \sigma \in \Sigma_f^u \cup \Sigma_f^s$.

In the case $2a$) we can assume (by choosing a subsequence) that $\{y_n\} \subset W_\alpha^u$,

then $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-k_n}(y_n) = \alpha$. In case $2b$), without loss of generality, we can assume (by choosing a subsequence) that either $\{y_n\} \subset W^u_\sigma$ and then $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f^{-k_n}(y_n) = \sigma$, or there is a sequence $p_n \subset \mathbb{Z}$ and a point $z \in W^s_\sigma$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$ and $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim f^{-p_n}(y_n) = z$. Then $\{x_n\} = \{f^{p_n-k_n}(z_n)\}$ converges to a point belonging to W^s_σ (if $p_n - k_n$ is a bounded sequence), converges to the point α (if $p_n - k_n \to -\infty$) converges to the point σ (if $p_n - k_n \to +\infty$).

Conclusion

The main result of this work is the realization of Morse-Smale diffeomorphisms by given graph. A lemma 1 on reducing a knot on a torus to a special homotopy type with the preservation of the equator is also proved. A lemma 2 is proved on reducing the scheme of a diffeomorphism to the canonical form, which is one of the main tools in the construction of a graph. In Lemma 3, conditions are formulated for an admissible graph by which a diffeomorphism from the indicated class can be realized. Lemma 4 shows the connection between the graph and the genus of the surface. This thesis is solve a part of classification problem and give an approach to constructing a representative in each homotopy class of homeomorphisms of algebraically finite type according to the Nielsen classification, which is an open problem today.

REFERENCES

1. Bezdenezhnykh A. N., Grines V. Z. Diffeomorphisms with orientable heteroclinic sets on two-dimensional manifolds //Methods of the qualitative theory of dynamical equations. Gorky. – 1985. – C. 139-152.
2. Bezdenezhnich, A. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with an orientable heteroclinic set on two-dimensional manifolds.// Gorky Order of the Red Banner Labor of the State University. N.I. Lobachevsky. - 1985.
3. Bonatti C. et al. Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds //Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2019. – T. 39. – №. 9. – C. 2403-2432.
4. Grines V. Z. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces //Mathematical Notes. – 1993. – T. 54. – №. 3. – C. 881-889.
5. Grines V. Z., Pochinka O. V., Van Strien S. On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli //Moscow Mathematical Journal. -2016. - V. 16. - №.4. - 727-749.
6. Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V. Dynamical systems on 2-and 3-manifolds. – Cham : Springer, 2016. – T. 46.
7. Grines V. Z. et al. Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – T. 271. – №. 1. – C. 103-124.
8. Kosniewski, Ch. Basic course in algebraic topology// M.: Mir. - 1983. - V. 304.
9. Malyshev D., Morozov A., Pochinka O. Combinatorial invariant for Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – T. 31. – №. 2. – C. 023119.
10. Mitryakova T. M., Pochinka O. V. Necessary and sufficient conditions for the topological conjugacy of surface diffeomorphisms with a finite number

of orbits of heteroclinic tangency //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – Т. 270. – №. 1. – С. 194-215.

11. Mitryakova T. M., Pochinka O. V. Realization of cascades on surfaces with finitely many moduli of topological conjugacy //Mathematical Notes. – 2013. – Т. 93. – №. 5. – С. 890-905.
12. Morozov A., Pochinka O. Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic //Journal of Dynamical and Control Systems. – 2020. – С. 1-11.
13. Munkres J. et al. Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms //Bulletin of the American Mathematical Society. – 1959. – Т. 65. – №. 5. – С. 332-334.
14. Munkres J. R. Topology. 2nd //PHI learning private limited. – 2000.
15. Smale S. et al. Differentiable dynamical systems //Bulletin of the American mathematical Society. – 1967. – Т. 73. – №. 6. – С. 747-817.
16. Palis J. On morse-smale dynamical systems //Topology. – 1969. – Т. 8. – №. 4. – С. 385-404.
17. Palis J., Smale S. Structural stability theorems //The Collected Papers of Stephen Smale: Volume 2. – 2000. – С. 739-747.
18. Rolfsen D. Knots and links, volume 7 of Mathematics Lecture Series //Publish or Perish Inc., Houston, TX. – 1990.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Пантелеевой Полины Юрьевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Многопрыжковые траектории сингулярно возмущённых систем с бифуркацией типа «вилка» являются: Определение 3.1, Предложения 3.1 и 4.1 вместе с доказательствами.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Произведён поиск в интернете по рассматриваемой тематике;
- Проведена серия консультаций с научным руководителем, доцентом кафедры высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ, Алексеем Валентиновичем Ивановым;
- Сделан доклад на конференции "Days on Diffraction 2021".

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 14 июня 2021 года. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись: Пантелеева Полина Юрьевна
1 июня 2021 г.
Санкт-Петербург, Россия

ПанП.

Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики



Пантелеева Полина Юрьевна

Выпускная квалификационная работа

Многопрыжковые траектории сингулярно возмущённых систем с бифуркацией типа «вилка»

Уровень образования: магистратура
Направление 03.04.02 «Физика»
Основная образовательная программа ВМ.5511.2019 «Физика»

Научный руководитель:
доцент кафедры высшей математики и математической физики, к.ф.-м.н.
Иванов Алексей Валентинович

Рецензент:
учёный секретарь ПОМИ РАН,
к.ф.-м.н.
Михайлов Виктор Сергеевич

Санкт-Петербург
2021 г.

1417

Содержание

Введение **1**

1. Об инвариантных многообразиях **5**

2. Асимптотики решений **11**

2.1. Асимптотики решений вблизи положения равновесия (0,0) 11

2.2. Асимптотики в окрестности точки поворота 11

2.3. Вывод асимптотик для области с сепаратрисой 17

3. Построение гомоклинических решений **23**

4. Трансверсальность гомоклинических решений **28**

4.1. Трансверсальность 28

Заключение **32**

Список литературы **33**

Введение

Настоящая работа посвящена вопросу существования трансверсальных траекторий гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = \varphi(\varepsilon t)x - 2x^3, \end{cases} \tag{0.1}$$

а также построению асимптотик её решений определённого сорта. Здесь φ — периодическая C^2-функция, имеющая два простых нуля на периоде, а $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр.

Системы такого типа возникают во многих областях физики ([9], [11]). В частности, они описывают движение заряженных частиц в нейтральном слое магнитосферного хвоста Земли [2]. Одним из основных методов, применяемых для исследования заряженных частиц в магнитном поле, является теория адиабатических инвариантов.

Для сохранения адиабатических инвариантов в задаче о движении заряженных частиц в магнитном поле Земли необходимо выполнение условий ограниченности изменения магнитного поля во времени и пространстве [2]. Характерный период квазипериодических движений должен быть много меньше характерного времени изменения магнитного поля, а масштаб пространственной вариации магнитного поля должен быть значительно больше пространственного масштаба, связанного с периодическим движением. Эти условия выполняются в случае сильных магнитных полей. Однако, если рассматривать движение частиц в области с очень слабым магнитным полем, как в нашем случае, применить эту теорию в неизменном виде не удается. В этом случае, как оказалось [2], можно построить аналогичную теорию. Для этого в качестве малого параметра в задаче выбирают отношение масштаба пространственной вариации магнитного поля к ларморовскому радиусу частицы (в противоположность случаю сильных магнитных полей, где в качестве малого параметра берётся обратное отношение). Соответствующие этому случаю инварианты называют квазиадиабатическими [2]. В роли такого квазиадиабатического инварианта выступает действие. Квазиадиабатическое приближение даёт возможность представить движение заряженных частиц как кусочно-регулярное: на границах между областями регулярного движения инвариант испытывает скачок, в самих же областях он постоянен. Величина такого скачка зависит от малого параметра и фазы быстрого движения при переходе из одной регулярной области в другую. При этом, скачки квазиадиабатического инварианта очень чувствительны к значению быстрой фазы, что приводит к тому, что траектории с близкими начальными условиями расходятся в фазовом пространстве на временах порядка $O\left(\varepsilon^{-1}\right)$. Тем не менее, такой подход не позволяет проанализировать поведение траекторий на бесконечных временах.

Вводя медленное время $\tau = \varepsilon t$ систему (0.1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = \varphi(\tau)x - 2x^3 \\ \dot{\tau} = \varepsilon \end{cases} \tag{0.2}$$

1419

Системы такого вида называют быстро-медленными. Переменные (x, y) являются быстрыми переменными, а τ — медленной. Перепишем систему (0.2) в терминах производной по τ.

$$\begin{cases} \varepsilon x' = p \\ \varepsilon p' = \varphi(\tau)x - 2x^3 \\ \tau' = 1 \end{cases} \tag{0.3}$$

При $\varepsilon > 0$ системы (0.2) и (0.3) эквивалентны, однако при $\varepsilon = 0$ получаются так называемые "быстрая"

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = \varphi(\tau)x - 2x^3, \\ \dot{\tau} = 0 \end{cases} \tag{0.4}$$

и "медленная"

$$\begin{cases} 0 = p, \\ 0 = \varphi(\tau)x - 2x^3, \\ \tau' = 1, \end{cases} \tag{0.5}$$

системы.

Поскольку динамика медленных переменных в "быстрой" системе тривиальна, система (0.4) представляет семейство уравнений, параметризованное значениями медленной переменной. Классическая теория возмущений показывает, что при достаточно малых ε "быстрая" система описывает поведение системы (0.2) с точностью $O(\varepsilon)$ на временах t порядка $O(1)$.

В свою очередь система (0.5) представляет собой систему уравнений со связями и хорошо описывает поведение системы (0.2), но лишь на множестве

$$\Gamma = \{(x, p) \in \mathbb{R}^2 \,:\, p = 0, \varphi(\tau)x - 2x^3 = 0\},$$

которое называется "медленным" многообразием.

Заметим, что сечение "медленного" многообразия Γ плоскостью $\tau = const$ в этом случае состоит либо из одной точки $(x, y) = (0, 0)$ при $\varphi(\tau) \leq 0$, либо из трех точек $(x, y) = (0, 0), (\pm\sqrt{\varphi(\tau)/2}, 0)$ при $\varphi(\tau) > 0$. В точке τ_* такой, что $\varphi(\tau_*) = 0$, а $\varphi'(\tau_*) > 0$ ($\varphi'(\tau_*) < 0$), происходит перестройка фазового портрета "быстрой" системы, при которой из одного устойчивого положения равновесия рождается три: два устойчивых и одно неустойчивое (или наоборот, в случае $\varphi'(\tau_*) < 0$). В таких случаях говорят, что произошла бифуркация типа "вилка".

Основным инструментом при исследовании быстро-медленных систем являются методы теории сингулярных возмущений [7]. Однако, наличие нулей у функции φ приводит к тому, что в фазовом пространстве "замороженной" системы (т. е. системы, для которой τ считается постоянным) при значениях τ, соответствующих нулям φ, происходят бифуркации. Это

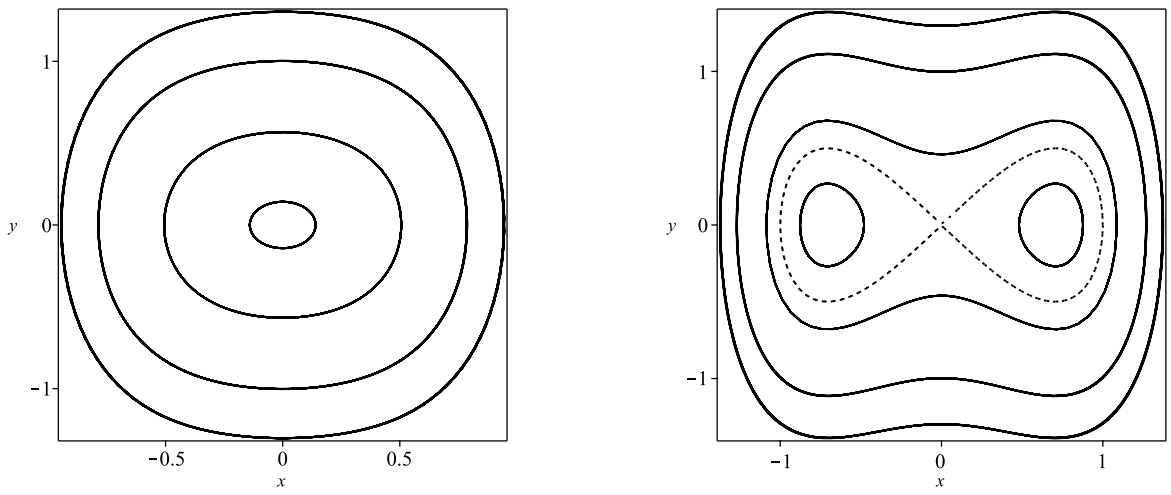


Рис. 1. Фазовый портрет системы (0.4) в плоскости (x, y) в случае $\varphi(\tau) < 0$ (слева) и $\varphi(\tau) > 0$ (справа).

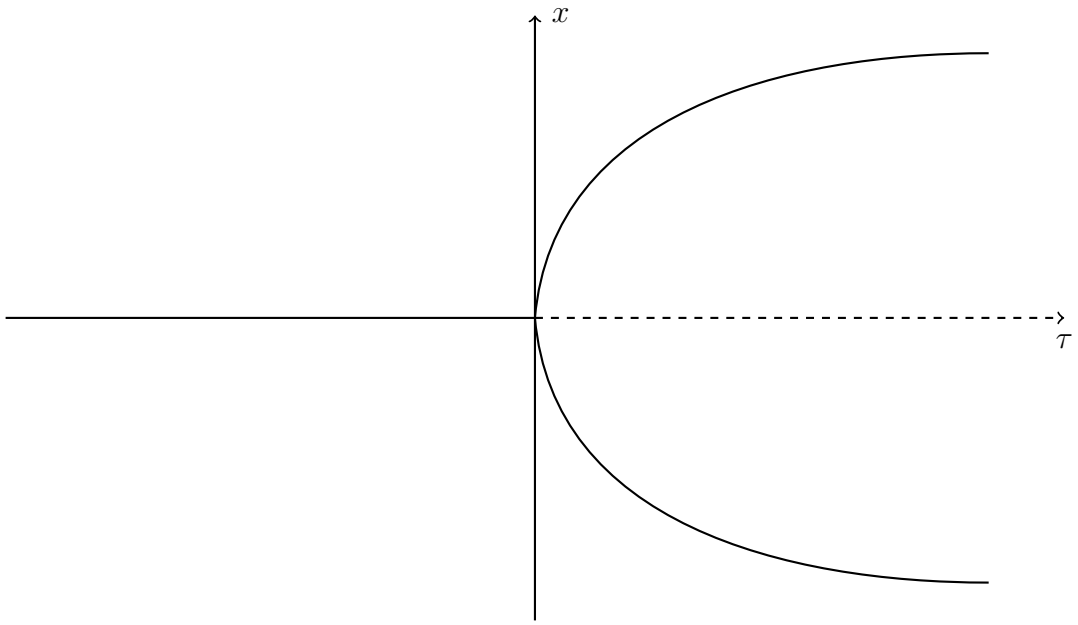


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки τ_*. Ось абсцисс соответствует переменной τ, ось ординат — x-координате положения равновесия системы. Сплошная линия соответствует устойчивым положениям равновесия, а пунктирная линия — неустойчивому положению равновесия.

приводит к тому, что "медленное" многообразие Γ имеет особенности. Наличие таких особенностей не позволяет применять результаты теории сингулярных возмущений на достаточно больших интервалах времени.

Представленная работа имеет следующую структуру. В главе 1 введены основные понятия, проведён анализ устойчивости положения равновесия $(x, p) = (0, 0)$. В главе 2 представлен вывод асимптотик решений задачи Коши для системы (0.2) в областях различного типа: в области без сепаратрисы "замороженной" системы, в окрестности точек бифуркации и в об-

1421

ласти, содержащей сепаратрису "замороженной" системы. В главе 3 доказано существование вращающихся гомоклинических траекторий. В главе 4 получены условия трансверсальности вращающихся гомоклинических траекторий.

1. Об инвариантных многообразиях

Определение. *Рассмотрим уравнение $\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, F — C^r-гладкое векторное поле. Говорят, что компактное, C^r-гладкое, связное многообразие с краем $M \in \mathbb{R}^n$ инвариантно назад (вперёд) относительно потока θ_t, порождённого системой $\dot{x} = F(x)$, если для всякого $p \in M$ поток $\theta_t(p) \in M$ при $t \leq 0$ ($t \geq 0$) и для всякого $p \in \partial M$ поле $-F(p)$ ($F(p)$) направлено внутрь M.*
Говорят, что многообразие M инвариантно, если оно инвариантно вперёд и назад.

Определение. *Компактное, C^r-гладкое, связное многообразие с краем M является локально инвариантным относительно потока θ_t, если для всякого $p \in M \backslash \partial M$ найдётся интервал (t_1, t_2) с $t_1 < 0$ и $t_2 > 0$ такой, что для любого $t \in (t_1, t_2)$ $\theta_t(p) \in M$.*

Определение. *Инвариантное множество Γ называется гиперболическим, если для всякого $x_0 \in \Gamma$*

$$T_{x_0}M = T_{x_0}\Gamma \oplus E^u_{x_0} \oplus E^s_{x_0}$$

$$\forall v \in E^s_{x_0},\ (T_{x_0}\theta_t)v \in E^s_{\theta_t(x_0)}\ \ \|(T_{x_0}\theta_t)v\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|v\|,\ t \geq 0$$

$$\forall v \in E^u_{x_0},\ (T_{x_0}\theta_t)v \in E^u_{\theta_t(x_0)}\ \ \|(T_{x_0}\theta_t)v\| \leq e^{\lambda_2 t}\|v\|,\ t \leq 0$$

где $\lambda_{1,2}$ — положительные постоянные.

Теорема (Адамар-Перрон)**.** *Если Γ — инвариантное гиперболическое множество, то существуют инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия, определяемые следующим образом:*

$$W^s(\Gamma) = \{x :\ \mathrm{dist}(\theta_t(x), \Gamma) \to 0,\ t \to \infty\}$$
$$W^u(\Gamma) = \{x :\ \mathrm{dist}(\theta_t(x), \Gamma) \to 0,\ t \to -\infty\}$$

Определение. *Пусть Γ_1, Γ_2 — два инвариантных гиперболических множества, $W^{s,u}(\Gamma_{1,2})$ — соответствующие им устойчивое и неустойчивое многообразия. Тогда точка $x_0 \in W^u(\Gamma_1) \cap W^s(\Gamma_2)$ называется гомоклинической, если $\Gamma_1 = \Gamma_2$, и гетероклинической, если $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Соответствующие траектории $\theta_t(x_0) \in W^u(\Gamma_1) \cap W^s(\Gamma_2)$ называют двояко-асимптотическими.*

Определение. *Гомоклиническая (гетероклиническая) точка x_0 называется трансверсальной, если*

$$T_{x_0}M = T_{x_0}W^s(\Gamma_1) + T_{x_0}W^u(\Gamma_2)$$

Одним из классических результатов теории сингулярных возмущений является следующая теорема.

Теорема (Феничель, [7]). *Локально инвариантные гиперболические множества сохраняются при малом возмущении.*

В случае системы (0.4) роль такого гиперболического инвариантного многообразия с краем играет множество $\hat{M}_0 = \{(x, p, \tau) \in \mathbb{R}^2 \times [\tau_1, \tau_2] : \ x = p = 0\}$, где τ_1, τ_2 такие, что $\varphi(\tau) > 0$ при $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Заметим, что множество $\hat{M}_0$ является для системы (0.4) не только локально инвариантным, но и глобально инвариантным. Однако, следует отметить, что для многообразий с краем теорема Феничеля гарантирует сохранение после возмущения лишь локально инвариантных множеств. Т. е. в том случае, когда до возмущения многообразие с краем было глобально инвариантно, после можно гарантировать лишь локальную инвариантность. Таким образом, применяя теорему Феничеля к множеству $\hat{M}_0$ получим, что при достаточно малых значениях ε система (0.2) обладает локально инвариантным гиперболическим множеством $\hat{M}_\varepsilon$, лежащим в ε-окрестности $\hat{M}_0$. Отметим также, что в общем случае вопрос существования глобально инвариантных множеств требует отдельного рассмотрения и является нетривиальной задачей.

В нашем случае рассмотрим множество $M_\varepsilon = \{(x, p, \tau) \in \mathbb{R}^3 : \ x = p = 0\}$. Заметим, что сечение M_ε плоскостью $\tau = const$ совпадает с положением равновесия системы (0.2), а потому M_ε является глобально инвариантным множеством для системы (0.2). Исследуем вопрос о гиперболичности множества M_ε при малых значениях параметра ε.

Для этого рассмотрим уравнение эквивалентное линеаризации системы (0.1) в окрестности положения равновесия $(x, p) = (0, 0)$:

$$\varepsilon^2 x'' - \varphi(\tau) x = 0, \tag{1.1}$$

где $'$ означает производную по τ. В дальнейшем нули функции φ будем называть точками поворота.

Построим фундаментальные системы решений уравнения (1.1) на разных интервалах изменения параметра τ. Согласно теории ВКБ вдали от точек поворота можно выбрать фундаментальную систему решений $\{u_1, u_2\}$ так, что их асимптотики будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= \varphi(\tau)^{-1/4} e^{\mu S(\tau_0, \tau)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \\ u_2(\tau) &= \varphi(\tau)^{-1/4} e^{-\mu S(\tau_0, \tau)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

при $\varphi(\tau) > 0$ и

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= \varphi(\tau)^{-1/4} \cos \mu S(\tau_0, \tau) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \\ u_2(\tau) &= \varphi(\tau)^{-1/4} \sin \mu S(\tau_0, \tau) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

при $\varphi(\tau) < 0$. Здесь мы использовали обозначения $\mu = \varepsilon^{-1}$,

$$S(a, b) = \int_a^b \sqrt{|\varphi(t)|}\, \mathrm{d}t.$$

В окрестности же точки поворота уравнение (1.1) близко к уравнению Эйри. В качестве линейно независимых решений выберем функции, выражающиеся через функции Эйри U и V так:

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= \varphi(\tau)^{-1/4} U(\mu S(\tau_0, \tau)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu^{2/3}}\right)\right) \\ u_2(\tau) &= \varphi(\tau)^{-1/4} V(\mu S(\tau_0, \tau)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu^{2/3}}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Отметим, что асимптотики функций U и V вдали от точки поворота имеют следующий вид:

$$U(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^s, & s > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(s + \frac{\pi}{4}\right), & s < 0 \end{cases}$$

$$V(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-s}, & s > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(s + \frac{\pi}{4}\right), & s < 0 \end{cases}$$

Заметим, что если $x(\tau)$ является решением, то и $x(\tau + T)$ тоже является решением. Тогда для анализа устойчивости положения равновесия $(x, p) = (0, 0)$ системы (0.2) при $\varepsilon > 0$, достаточно исследовать свойства отображения за период (отображение Пуанкаре) $\Phi(\tau)$ для уравнения (1.1):

$$\Phi(\tau) : \begin{pmatrix} x(\tau) \\ x'(\tau) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x(\tau + T) \\ x'(\tau + T) \end{pmatrix}$$

Для построения асимптотики отображения Пуанкаре введём новые переменные:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}(\tau) \\ \hat{u}'(\tau) \end{pmatrix} = \Xi(\tau) \begin{pmatrix} u(\tau) \\ u'(\tau) \end{pmatrix}, \quad \Xi(\tau) = \begin{pmatrix} |\varphi(\tau)|^{1/4} & 0 \\ 0 & |\varphi(\tau)|^{-1/4} \end{pmatrix}, \quad \tau \neq \tau_{1,2}. \tag{1.5}$$

В силу периодичности функции $\varphi(\tau)$ отображение $\Phi(\tau)$ может быть представлено в виде композиции

$$\Phi(\tau) = \Xi^{-1}(\tau) \circ \Phi_2 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Xi(\tau), \tag{1.6}$$

где

$$\Phi_0 : \begin{pmatrix} \hat{u}(\tau) \\ \hat{u}'(\tau) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \hat{u}(\tau_1 - \delta) \\ \hat{u}'(\tau_1 - \delta) \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 : \begin{pmatrix} \hat{u}(\tau_1 - \delta) \\ \hat{u}'(\tau_1 - \delta) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \hat{u}(\tau_2 - \delta) \\ \hat{u}'(\tau_2 - \delta) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_2 : \begin{pmatrix} \hat{u}(\tau_2 - \delta) \\ \hat{u}'(\tau_2 - \delta) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \hat{u}(\tau + T) \\ \hat{u}'(\tau + T) \end{pmatrix}.$$

Следуя [8], введём обозначения:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad Z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Пусть τ такое, что $\varphi(\tau) > 0$. Тогда [8]

$$\Phi_0 = R\left(\frac{\pi}{4}\right) Z\left(\mu S_0\right) R\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(1 + O(\mu^{-1})\right), \;\; S_0 = \int\limits_{\tau}^{\tau_1-\delta} |\varphi(s)|^{1/2} ds$$

$$\Phi_1 = R\left(\mu(S_1 + S_1^+) + \frac{\pi}{4})\right) Z\left(\mu S_1^- + \frac{1}{2}\ln(2)\right) R\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(1 + O(\mu^{-1})\right),$$

$$S_1^- = \int\limits_{\tau_1-\delta}^{\tau_1} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s, \; S_1^+ = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_1+\delta} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s, \; S_1 = \int\limits_{\tau_1+\delta}^{\tau_2-\delta} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s$$

$$\Phi_2 = R\left(\frac{\pi}{4}\right) Z\left(\mu(S_2 + S_2^+) + \frac{1}{2}\ln(2)\right) R\left(\mu S_2^- - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + O(\mu^{-1})\right),$$

$$S_2^- = \int\limits_{\tau_2-\delta}^{\tau_2} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s, \; S_2^+ = \int\limits_{\tau_2}^{\tau_2+\delta} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s, \; S_2 = \int\limits_{\tau_2+\delta}^{\tau+T} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s$$

В случае $\varphi(\tau) < 0$ отображение Пуанкаре имеет аналогичную конструкцию с той лишь разницей, что аргументы матриц R и Z в определении $\Phi_k, \; k = 0, 1, 2$ будут соответствовать переходу из области вращения в область гиперболического движения и обратно.

Заметим, что матрицы $R, \; Z$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R(\alpha_1 + \alpha_2) = R(\alpha_1)R(\alpha_2), \;\; Z(\alpha_1 + \alpha_2) = Z(\alpha_1)Z(\alpha_2).$$

Пользуясь этими свойствами и приведёнными выше преобразованиями, а также учитывая, что след отображения Пуанкаре не зависит от τ ([8]), получаем выражение (см. работу [3]):

$$Tr\Phi(\tau) = 2\cosh\varepsilon^{-1}S(\tau_1, \tau_2)\cos\varepsilon^{-1}S(\tau_2, \tau_1 + T)\left(1 + O(\varepsilon)\right). \tag{1.8}$$

Можно заметить, что условие

$$|Tr\Phi(\tau)| > 2 \tag{1.9}$$

гарантирует неустойчивость положения равновесия (в случае гамильтоновых систем оно будет гиперболическим). Решая это неравенство приходим к следующему утверждению [3].

Предложение 1.1. *Существует достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого положительного $\varepsilon \in \mathcal{E}_h = (0, \varepsilon_0) \setminus \mathcal{E}_e$,*

$$\mathcal{E}_e = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^{-1} S(\tau_1, \tau_2) - r', \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^{-1} S(\tau_1, \tau_2) + r''\right],$$

где r' и r'' — положительные константы порядка $O\left(e^{-\hat{\gamma}\pi k}\right)$, $\hat{\gamma} = (S(0, \tau_1) + S(\tau_2, T))/S(\tau_1, \tau_2)$ положение равновесия для системы является гиперболическим.

Применяя теорему Адамара-Перрона [3], получаем

1425

Предложение 1.2. *Для любого $\varepsilon \in \mathcal{E}_h$ множество M_ε является инвариантным гиперболическим множеством системы (0.2). В трехмерном расширенном фазовом пространстве множество M_ε обладает двумерными устойчивым $W^s(M_\varepsilon)$ и неустойчивым $W^u(M_\varepsilon)$ многообразиями. Причем, пересечения локальных устойчивого и неустойчивого многообразий $W^{s,u}_{loc}(M_\varepsilon)$ с плоскостью $\tau = const$ экспоненциально близки к устойчивому и неустойчивому направлениям $E^{s,u}(\tau)$ отображения Пуанкаре $\Phi(\tau)$ соответственно.*

Опишем подпространства $E^{s,u}(\tau)$ для тех τ, для которых $\varphi(\tau) > 0$, т. е. для тех τ, для которых существует сепаратриса "замороженной" системы.

Как было отмечено ранее, отображение Пуанкаре имеет вид

$$\Phi(\tau) = \Xi^{-1}(\tau) \circ \Phi_2 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Xi(\tau) = \Xi^{-1}(\tau) \circ R\left(\frac{\pi}{4}\right) \circ Z(\alpha_1) \circ R(\beta) \circ Z(\alpha_2) \circ R\left(-\frac{\pi}{4}\right) \circ \Xi(\tau),$$

где

$$\alpha_1 = \mu \int\limits_{\tau_2}^{\tau+T} |\varphi(s)|^{1/2} \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\ln(2), \quad \alpha_2 = \mu \int\limits_{\tau}^{\tau_1} |\varphi(s)|^{1/2} \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\beta = \mu \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\varphi(s)|^{1/2} \mathrm{d}s.$$

Найдем тангенс угла наклона $\tan(\widetilde{\theta}_\pm)$ собственных подпространств отображения

$$M = Z(\alpha_1) \circ R(\beta) \circ Z(\alpha_2).$$

С учётом теоремы Флоке-Ляпунова, получаем

$$\mathrm{tg}(\widetilde{\theta}_+) = -e^{-2\alpha_1} \mathrm{tg}(\beta)\,(1 + O(\varepsilon))\,, \quad \mathrm{tg}(\widetilde{\theta}_-) = -e^{2\alpha_2} \mathrm{ctg}(\beta)\,(1 + O(\varepsilon))\,.$$

Тогда тангенс угла наклона $\mathrm{tg}(\theta_\pm)$ собственных подпространств отображения $\Phi(\tau)$ имеет вид:

$$\mathrm{tg}(\theta_\pm) = |\varphi(\tau)|^{1/2} \frac{1 + \mathrm{tg}\,\widetilde{\theta}_\pm}{1 - \mathrm{tg}\,\widetilde{\theta}_\pm},$$

Если параметр ε достаточно мал и удовлетворяет условию

$$|\cos\beta| > e^{-A/\varepsilon} \tag{1.10}$$

для некоторой положительной константы $A < \min\{S(\tau, \tau_1), S(\tau_2, \tau + T)\}$, что эквивалентно

$$\varepsilon \notin \mathcal{E}_{exp} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^{-1} S(\tau_1, \tau_2) - \hat{r}', \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^{-1} S(\tau_1, \tau_2) + \hat{r}'' \right], \tag{1.11}$$

где $\hat{r}'$ и $\hat{r}''$ — положительные константы порядка $O\left(e^{-\pi k A / S(\tau_1,\tau_2)}\right)$, то значение $\mathrm{tg}(\widetilde{\theta}_+)$ экспоненциально близко к нулю, а значение $\mathrm{tg}(\widetilde{\theta}_-)$ – к $\pm\infty$ в зависимости от знака $\mathrm{tg}(\beta)$. Следовательно, значение $\mathrm{tg}(\theta_\pm)$ экспоненциально близко к $\pm|\varphi(\tau)|^{1/2}$.

1426

Рассмотрим теперь линеаризованные уравнения в окрестности положения равновесия $(x, y) = (0, 0)$ "замороженной" системы в случае $\varphi > 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varphi(\tau)x \end{cases} \Leftrightarrow \dot{z} = Az, \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varphi(\tau) & 0 \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что в силу того, что $\varphi(\tau) > 0$ матрица A является гиперболической, а собственные устойчивое и неустойчивое подпространства $\tilde{E}^{s,u}(\tau)$ этой системы натянуты на вектора $(1, \pm|\varphi(\tau)|^{1/2})^{tr}$. Таким образом, тангенс угла наклона $\mathrm{tg}(\hat{\theta}_\pm)$ устойчивого и неустойчивого подпространств "замороженной" системы равны

$$\mathrm{tg}(\hat{\theta}_\pm) = \pm|\varphi(\tau)|^{1/2}$$

Учитывая предложение 1.2, заключаем, что для тех τ для которых $\varphi(\tau) > 0$, пересечения локальных устойчивого и неустойчивого многообразий $W^{s,u}_{loc}(M_\varepsilon)$ с плоскостью $\tau = const$ экспоненциально близки к устойчивому и неустойчивому направлениям $\tilde{E}^{s,u}(\tau)$ "замороженной" системы, соответственно.

Опишем теперь подпространства $E^{s,u}(\tau)$ в случае $\varphi < 0$. Отображение Пуанкаре будет иметь вид

$$\Phi(\tau) = \Xi^{-1}(\tau) \circ R^{-1}(\gamma) \circ R\left(\frac{\pi}{4}\right) \circ R(\alpha) \circ Z(\beta) \circ R\left(-\frac{\pi}{4}\right) \circ R(\gamma) \circ \Xi(\tau),$$

где

$$R(\gamma) : \begin{pmatrix} x(\tau) \\ x'(\tau) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(\tau_1) \\ x'(\tau_1) \end{pmatrix}$$

и

$$\alpha = \mu \int\limits_{\tau_2}^{\tau_1+T} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s, \quad \beta = \mu \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s + \ln 2, \quad \gamma = \mu \int\limits_{\tau}^{\tau_1} |\varphi(s)|^{1/2}\mathrm{d}s$$

Положим

$$N = R(\alpha) \circ Z(\beta).$$

Тогда тангенс угла наклона собственных подпространств N имеет вид

$$\mathrm{tg}\,\theta^N_\pm = \frac{\mathrm{sh}\,\beta\cos\alpha \pm \sqrt{\mathrm{ch}^2\,\beta\cos^2\alpha - 1}}{e^\beta \sin\alpha}$$

и при больших значениях μ равен

$$\mathrm{tg}\,\theta^N_+ = \mathrm{ctg}\,\alpha(1 - e^{-2\beta}\cos^{-2}\alpha + O(e^{-4\beta}\cos^{-4}\alpha)), \quad \mathrm{tg}\,\theta^N_- = e^{-2\beta}\,\mathrm{tg}\,\alpha(1 + O(e^{-2\beta}\cos^{-2}\alpha)).$$

Следовательно, угол наклона собственных подпространств отображения Пуанкаре Φ выглядит как

$$\mathrm{tg}\,\theta^{u,s} = |\varphi(\tau)|^{1/2}\frac{\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\left(\theta^N_\pm + \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\left(\theta^N_\pm + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

В качестве дополнительного замечания отметим, что в области тех значений параметра τ, для которых $\varphi(\tau) < 0$, устойчивое и неустойчивое направления $E^{s,u}(\tau)$ отображения Пуанкаре $\Phi(\tau)$ вращаются с частотой порядка $O(\varepsilon^{-1})$.

1427

2. Асимптотики решений

Эта глава посвящена построению асимптотик решений системы (0.2) в различных областях расширенного фазового пространства. Мы выделим три области $\mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, 3$ следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1([a,b]) &= \left\{\tau \in [a,b] : \varphi(\tau) < 0 \ \forall\, \tau \in [a,b],\ x^2 + p^2 < \varepsilon^{2/3(1-\sigma)}\right\}, \\ \mathcal{D}_2 &= \left\{|\tau - \tau_*| < C\varepsilon^{2/3} : \varphi(\tau_*) = 0,\ x^2 + p^2 < \varepsilon^{2/3(1-\sigma)}\right\}, \\ \mathcal{D}_3([a,b]) &= \left\{\tau \in [a,b] : \varphi(\tau) < 0 \ \forall\, \tau \in [a,b],\ (x,p) \in \bigcup_{\tau\in[a,b]} Int(L_{sep}(\tau))\right\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где C - положительная константа, $0 < \sigma < 1$, $Int(L_{sep}(\tau))$ - внутренность сепаратрисы "замороженной" системы на уровне τ. Нетрудно видеть, что область $\mathcal{D}_1$ соответствует движениям в окрестности положения равновесия $(x, p) = (0, 0)$ при тех значениях τ, при которых это положение является устойчивым для "замороженной" системы. Область $\mathcal{D}_2$ соответствует движениям в окрестности особой точки "медленного" многообразия. В свою очередь, область $\mathcal{D}_3$ соответствует движениям внутри сепаратрисы "замороженной" системы.

2.1. Асимптотики решений вблизи положения равновесия (0,0)

Рассмотрим область $\mathcal{D}_1$. В этой области уравнение (0.1) с точностью до кубических слагаемых близко к линейному. Используя формулы (1.3) можно показать, что асимптотика решений (0.1), лежащих в $\mathcal{D}_1$, имеет следующий вид

$$x(\tau) = \varphi(\tau)^{-1/4}\left[A\cos\left(\varepsilon^{-1}S(\tau^0,\tau)\right) + B\sin\left(\varepsilon^{-1}S(\tau^0,\tau)\right)\right](1 + O(\varepsilon^{2/3(1-\sigma)}))$$

$$p(\tau) = \varphi^{1/4}(\tau)\left[-A\sin\left(\varepsilon^{-1}S(\tau^0,\tau)\right) + B\cos\left(\varepsilon^{-1}S(\tau^0,\tau)\right)\right](1 + O(\varepsilon^{2/3(1-\sigma)})),$$

$$S(a,b) = \int_a^b \sqrt{|\varphi(\xi)|}\mathrm{d}\xi, \quad A, B = const$$

Заметим, что A и B — константы порядка $O(\varepsilon^{1/3(1-\sigma)})$.

2.2. Асимптотики в окрестности точки поворота

Для описания движения системы (0.1) в окрестности точки поворота τ_* представим функцию φ используя формулу Тейлора:

$$\varphi(\tau) = \varphi(\tau_*) + \varphi'(\tau_*)(\tau - \tau_*) + O((\tau - \tau_*)^2).$$

Сделаем замену переменных $s = \left(\varepsilon|\varphi'(\tau_*)|\right)^{1/3}(t - t_*)$, где $t_* = \varepsilon^{-1}\tau_*$ и будем рассматривать систему (0.1) на интервале $|\tau - \tau_*| \le \delta$, что равносильно $|s| \le |\varphi'(\tau_*)|^{1/3}\delta\varepsilon^{-2/3}$. Кроме того, перейдём от x к $v = \left(\varepsilon|\varphi'(\tau_*)|\right)^{-1/3}x$. Тогда эквивалентное системе (0.1) уравнение

$$\ddot{x} = \varphi(\varepsilon t)x - 2x^3$$

примет вид

$$\frac{d^2v}{ds^2} = sv - 2v^3 + O(\varepsilon^{2/3}s^2v).$$

Положив $\varepsilon = 0$, получим модельное уравнение

$$\frac{d^2v}{ds^2} = sv - 2v^3, \tag{2.2}$$

описывающее динамику системы (0.1) в окрестности точки бифуркации на интервалах изменения переменной s порядка $O(\varepsilon^{-2/3(1-\sigma)})$ при произвольной константе $\sigma > 0$ [9], что соответствует интервалу изменения параметра $\tau - \tau_*$ порядка $O(\varepsilon^{2/3\sigma})$. При этом следует отметить, что модельное уравнение не содержит малого параметра ε.

Заметим, что уравнение (2.2) является вторым уравнением Пенлеве. В работе [1] с помощью метода обратной задачи была получена связь асимптотик решений уравнения Пенлеве при $s \to \pm\infty$:

$$v(s) = \sqrt{2I_-}(-s)^{1/4}\sin\left(\frac{2}{3}(-s)^{3/2} + \frac{3}{2}I_-\ln(-s) - \phi_-\right), \tag{2.3}$$

$$v'(s) = -(2I_-)^{1/2}(-s)^{1/4}\cos\left(\frac{2}{3}(-s)^{3/2} + \frac{3}{2}I_-\ln(-s) - \phi_-\right)$$

при $s \to -\infty$, и

$$v(s) = \pm\sqrt{\frac{s}{2}} \pm \sqrt{2I_+}(2s)^{-1/4}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}s^{3/2} - 3I_+\ln(s) + \phi_+\right), \tag{2.4}$$

$$v'(s) = \mp(2I_+)^{1/2}(2s)^{1/4}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}s^{3/2} - 3I_+\ln(s) + \phi_+\right)$$

при $s \to \infty$. Здесь (I_-, ϕ_-) и (I_+, ϕ_+) — переменные действие-угол, характеризующие решения в пределе $s \to \pm\infty$. Параметры $(I_\pm, \phi_\pm)$ постоянны и связаны следующим образом:

$$I_+ = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+|p|^2}{2|Im(p)|}, \tag{2.5}$$

$$\phi_+ = -\frac{\pi}{4} + 7I_+\ln 2 - \arg\Gamma(2iI_+) - \arg(1+p^2), \tag{2.6}$$

$$p = (exp(2\pi I_-) - 1)^{1/2} \times exp\left(3iI_-\ln 2 - \frac{\pi}{4}i - i\arg(\Gamma(iI_-)) - i\phi_-\right), \tag{2.7}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция и $\arg(\cdot)$ — аргумент комплексного числа.

Мы будем рассматривать случай $I \gg 1$, тогда формулы связи могут быть переписаны в более простом виде. Действительно, положим

$$s_\pm = \pm\eta_*^{2/3}\varepsilon^{-2/3}, \;\; \eta_* = \delta^{3/2}|\varphi(\tau_*)|^{1/2}$$

и введём новые углы

$$\theta_- = \frac{3}{2}I_-\ln(-s_-) + \phi_-, \;\; \theta_+ = -3I_+\ln(s_+) + \phi_+$$

Также заметим, что гамма-функция при больших чисто мнимых значениях аргумента имеет вид

$$\Gamma(iy) = re^{i\theta}, \quad y \gg 1$$
$$r = \sqrt{\frac{2\pi}{y}} e^{-(\pi/2)y}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{4} + y(\ln(y) - 1) - \frac{1}{12y} + O\left(\frac{1}{y^3}\right)$$

Наконец, наложим требование

$$\ln|2\sin\psi| < \varepsilon^{-\kappa}, \;\; 0 < \kappa < \sigma. \tag{2.8}$$

Мы обсудим условие (2.8) в конце данного параграфа.

Тогда можно получить следующие асимптотические выражения:

$$I_+ = \frac{1}{2} I_- - \frac{1}{2\pi} \ln|2\sin\psi| + O\left(e^{-2\pi I_-}\right), \tag{2.9}$$

$$\theta_+ = 2\theta_- + I_-(\ln(I_-) - 1) - 3I_- \ln(\eta_* \varepsilon^{-1}) + \\ + \left(\ln(I_-) - 1 + \ln(\eta_* \varepsilon^{-1}) - \frac{7}{2}\ln 2\right) \ln|2\sin\psi| - \frac{5}{2}\ln(2) I_- + O\left((I_-)^{-1} |2\sin\psi|\right), \tag{2.10}$$

где

$$\psi = I_- \left(3\ln 2 + 1 - \ln I_- - \ln(|\varphi'|^{-1} \varepsilon^{-\sigma})\right) - \theta_- + O(\varepsilon). \tag{2.11}$$

Вернёмся к старым переменным x, p. Используя формулы связи получим асимптотики решений (0.1) на уровне $\tau = \tau_* - \delta$ (до точки поворота):

$$x = (2I_-)^{1/2} |\varphi'(\tau_*)|^{1/4} \delta^{-1/4} \varepsilon^{1/2} \sin\left(\frac{2}{3}|\varphi'(\tau_*)|^{1/2} \delta^{3/2} \varepsilon^{-1} + \frac{3}{2} I_- \ln\left(|\varphi'(\tau_*)|^{1/3} \delta \varepsilon^{-2/3}\right) - \phi_-\right)$$

$$p = -(2I_-)^{1/2} |\varphi'(\tau_*)|^{3/4} \delta^{1/4} \varepsilon^{1/2} \cos\left(\frac{2}{3}|\varphi'(\tau_*)|^{1/2} \delta^{3/2} \varepsilon^{-1} + \frac{3}{2} I_- \ln\left(|\varphi'(\tau_*)|^{1/3} \delta \varepsilon^{-2/3}\right) - \phi_-\right)$$

и на уровне $\tau = \tau_* + \delta$ (после точки поворота)

$$x = 2^{-1/2} |\varphi'(\tau_*)|^{1/2} \delta^{1/2} + (2I_+)^{1/2} 2^{-1/4} |\varphi'(\tau_*)|^{1/4} \delta^{-1/4} \varepsilon^{1/2} \times \\ \times \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}|\varphi'(\tau_*)|^{1/2} \delta^{3/2} \varepsilon^{-1} - 3I_+ \ln\left(|\varphi'(\tau_*)|^{1/3} \delta \varepsilon^{-2/3}\right) + \phi_+\right)$$

$$p = -(2I_+)^{1/2} 2^{1/4} |\varphi'(\tau_*)|^{3/4} \varepsilon^{1/2} \delta^{1/4} \times \\ \times \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}|\varphi'(\tau_*)|^{1/2} \delta^{3/2} \varepsilon^{-1} - 3I_+ \ln\left(|\varphi'(\tau_*)|^{1/3} \delta \varepsilon^{-2/3}\right) + \phi_+\right)$$

1430

Приведённые выше формулы справедливы при условии

$$\delta\varepsilon^{-2/3} \gg 1 \Leftrightarrow \delta \gg \varepsilon^{2/3},$$

поскольку (2.3, 2.4) имеют место, когда $|s| \to \infty$.

Для упрощения вычислений будем рассматривать $I_\pm = O(\varepsilon^{-(\sigma-\nu)})$ и $\delta = O(\varepsilon^{\frac{2}{3}(1-\sigma)})$, где $0 < \sigma < 1$, $0 < \nu < \sigma$. В этом случае потребуем, чтобы κ из условия (2.8) удовлетворяло оценке $0 < \kappa < \sigma - \nu$.

Сделаем масштабное преобразование $I_\pm = J_\pm \delta^{3/2} |\varphi'(\tau_*)|^{1/2} \varepsilon^{\nu-1}$, где

$$\delta = \varepsilon^{\frac{2}{3}(1-\sigma)} |\varphi'(\tau_*)|^{-1}.$$

Пусть J_- — значение новой переменной действия на уровне $\tau_* - \delta$, J_+ — на уровне $\tau_* + \delta$. Тогда в терминах $J_\pm$ асимптотики решений принимают вид

$$x = 2^{\frac{1}{2}} J_-^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{3}(1-\sigma)+\frac{\nu}{2}} \times \\ \times \sin\left(\frac{2}{3}|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\sigma} + \frac{3}{2}J_-\varepsilon^{-\sigma+\nu}|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{1}{2}}\ln(|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{2}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}\sigma}) - \phi_-\right),$$

$$p = -2^{\frac{1}{2}} J_-^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{2}{3}(1-\sigma)+\frac{\nu}{2}} \times \\ \times \cos\left(\frac{2}{3}|\varphi'(\tau_*)|^{-1/2}\varepsilon^{-\sigma} + \frac{3}{2}J_-\varepsilon^{-\sigma+\nu}|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{1}{2}}\ln(|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{2}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}\sigma}) - \phi_-\right),$$

при $\tau = \tau_* - \delta$ и

$$x = 2^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{3}(1-\sigma)} + 2^{\frac{1}{4}} J_+^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{3}(1-\sigma)+\frac{\nu}{2}} \times \\ \times \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\sigma} - 3J_+\varepsilon^{-\sigma+\nu}|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{1}{2}}\ln(|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{2}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}\sigma}) + \phi_+\right), \quad (2.12)$$

$$p = -2^{\frac{3}{4}} J_+^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{2}{3}(1-\sigma)+\frac{\nu}{2}} \times \\ \times \sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\sigma} - 3J_+\varepsilon^{-\sigma+\nu}|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{1}{2}}\ln(|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{2}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}\sigma}) + \phi_+\right), \quad (2.13)$$

при $\tau = \tau_* + \delta$.

Значения действия до и после точки поворота связаны как

$$J_+ = \frac{1}{2}J_- - \frac{1}{2\pi}|\varphi'(\tau_*)|^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{(\sigma-\nu)}\ln|2\sin\psi| + O\left(\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}e^{\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}}\right), \quad (2.14)$$

где

$$\psi = J_-|\varphi'(\tau_*)|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}\left[3\ln 2 + 1 - \ln J_- + \frac{3}{2}\ln|\varphi'(\tau_*)| - (\sigma-\nu)\ln\varepsilon^{-1}\right] - \phi_- \quad (2.15)$$

Подставляя формулы в выражение для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 - \varphi(\varepsilon t)x^2 + x^4\right)$$

получаем выражения для значений энергий на уровне $\tau = \tau_* - \delta$

$$H_- = J_- \varepsilon^{\frac{4}{3}(1-\sigma)+\nu} + O\left(\varepsilon^{\frac{4}{3}(1-\sigma)+2\nu}\right), \tag{2.16}$$

и на уровне $\tau_* + \delta$

$$H_+ = -\frac{1}{8}\varepsilon^{\frac{4}{3}(1-\sigma)} + J_+ 2^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{4}{3}(1-\sigma)+\nu} + O\left(\varepsilon^{\frac{4}{3}(1-\sigma)+\frac{3}{2}\nu}\right) \tag{2.17}$$

Рассмотрим наложенное ранее условие (2.8)

$$\ln|2\sin\psi| < \varepsilon^{-\kappa}, \quad 0 < \kappa < \sigma - \nu,$$

что эквивалентно

$$|2\sin\psi| > e^{-\varepsilon^{-\kappa}}, \quad 0 < \kappa < \sigma - \nu.$$

Используя асимптотику (2.11), исследуем вопрос при каких значениях параметра ε это условие выполняется.

Выражая ψ из последней формулы, получаем для достаточно малых ε

$$\psi \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-e^{-\varepsilon^{-\kappa}} + \pi k; e^{-\varepsilon^{-\kappa}} + \pi k\right]. \tag{2.18}$$

Каждому отрезку в парвой части (2.11) соответствует отрезок на оси ε. Подставляя выражение ψ из (2.15), запишем уравнение на центр отрезка:

$$|\varphi'(\tau_*)|^{-1} J_- \varepsilon^{\nu-\sigma}(3\ln 2 + 1 - \ln J_- + \frac{3}{2}\ln|\varphi'(\tau_*)| - (\sigma-\nu)\ln\varepsilon^{-1}) = \phi_- - \pi k \tag{2.19}$$

Обозначим решение этого уравнения относительно параметра ε через ε_k и определим

$$C(J) = |\varphi'(\tau_*)|^{-3/2} e^{-3\ln 2 - 1} J, \quad D = \frac{\pi}{8e|\varphi'(\tau_*)|^{1/2}}. \tag{2.20}$$

Тогда уравнение (2.19) можно переписать в следующем виде:

$$z\ln z = D(k - \phi_-/\pi),$$

где $z = C(J_-)\varepsilon^{-\beta^{-1}}, \beta = \sigma - \nu$.

Чтобы обратить зависимость при больших k, положим $z = D(k - \phi_-/\pi)\hat{z}$ и перепишем уравнение

$$\hat{z}(\ln\hat{z} + \ln(D(k-\phi_-/\pi))) = 1 \Rightarrow \hat{z}\left(1 + \frac{\ln\hat{z}}{\ln(D(k-\phi_-/\pi))}\right) = \frac{1}{\ln(D(k-\phi_-/\pi))}.$$

Следовательно

$$\hat{z} = \frac{1}{\ln(D(k-\phi_-/\pi))} + O\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right) \Rightarrow z_k = \frac{D(k-\phi_-/\pi)}{\ln\left[D(k-\phi_-/\pi)\right]}\left(1 + O\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right)\right).$$

Возвращаясь к переменной ε_k, получаем

$$\varepsilon_k = C^\beta(J_-)\frac{\ln^\beta\left[D(k-\phi_-/\pi)\right]}{\left[D(k-\phi_-/\pi)\right]^\beta}\left(1 + O\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right)\right).$$

1432

Определим теперь полуширину интервала с центром ε_k. Положим $\varepsilon = \varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k$ и разложим выражения для концов отрезков (2.18) по ε в точке ε_k, тогда условия на $\Delta\varepsilon_k$ будут иметь вид:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta\varepsilon_k \le \dfrac{e^{-\varepsilon_k^{-\kappa}}}{J_-|\varphi'(\tau_*)|^{-1}\varepsilon_k^{\nu-\sigma-1}(\sigma-\nu)\ln\varepsilon_k^{-1}} \\ \Delta\varepsilon_k \ge -\dfrac{e^{-\varepsilon_k^{-\kappa}}}{J_-|\varphi'(\tau_*)|^{-1}\varepsilon_k^{\nu-\sigma-1}(\sigma-\nu)\ln\varepsilon_k^{-1}}. \end{array}\right. \tag{2.21}$$

Заметим, что

$$\Delta\varepsilon_k = O\left((\ln\varepsilon_k^{-1})^{-1}\varepsilon_k^{\sigma-\nu+1}e^{-\varepsilon_k^{-\kappa}}\right).$$

Тогда

$$\frac{\Delta\varepsilon_k}{\varepsilon_k} = O\left((\ln\varepsilon_k^{-1})^{-1}\varepsilon_k^{\sigma-\nu}e^{-\varepsilon_k^{-\kappa}}\right) = O\left(\frac{1}{k}exp\left(-(\ln k)^{-\kappa/(\sigma-\nu)}k^{\kappa/(\sigma-\nu)}\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$D = z_{k+1}\ln z_{k+1} - z_k\ln z_k = \Delta z_k\left(\ln z_k + 1 + O\left(\frac{\Delta z_k}{z_k}\right)\right),$$

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Следовательно,

$$\Delta z_k = \frac{D}{\ln z_k + 1}\left(1 + O\left(\frac{1}{z_k^2\ln^2 z_k}\right)\right).$$

Принимая во внимание, что $\beta > 1$ и

$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} = C^\beta(J_-)\left(\frac{1}{z_k^\beta} - \frac{1}{z_{k+1}^\beta}\right) \le \frac{\beta C^\beta(J_-)}{z_k^{\beta+1}}\Delta z_k,$$

получаем

$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} = O\left(\frac{\ln^\beta k}{k^{\beta+1}}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} = O(k^{-1}).$$

Тогда

$$\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\Delta\varepsilon_k} = O\left(exp\left((\ln k)^{-\kappa/(\sigma-\nu)}k^{\kappa/(\sigma-\nu)}\right)\right). \tag{2.22}$$

Из формулы (2.22) следует, что отрезки $[\varepsilon_k - \Delta\varepsilon_k; \varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k]$ имеют малую меру по сравнению с $[\varepsilon_{k+1}; \varepsilon_k]$.

Определим множество $\mathcal{E}_1(J_-)$

$$\mathcal{E}_1(J_-) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\varepsilon_k - \frac{e^{-\varepsilon_k^{-\kappa}}}{J_-|\varphi'(\tau_*)|^{-1}\varepsilon_k^{\nu-\sigma-1}(\sigma-\nu)\ln\varepsilon_k^{-1}}; \varepsilon_k + \frac{e^{-\varepsilon_k^{-\kappa}}}{J_-|\varphi'(\tau_*)|^{-1}\varepsilon_k^{\nu-\sigma-1}(\sigma-\nu)\ln\varepsilon_k^{-1}}\right].$$

Тогда в терминах параметра ε условие (2.8) выполняется для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0) \setminus \mathcal{E}_1(J_-)$ при достаточно малом ε_0. Кроме того, мера Лебега множества $(0,\varepsilon_0) \cap \mathcal{E}_1(J_-)$ допускает при достаточно малом ε_0 следующую оценку

$$leb((0,\varepsilon_0) \cap \mathcal{E}_1(J_-)) \le \sum_{k=k_0}^{\infty} e^{-\varepsilon_k^{-\kappa}} = O(e^{-\varepsilon_0^{-\kappa}}) = O(e^{-k_0^{\sigma_0}}), \tag{2.23}$$

где k_0 такое, что $\varepsilon_{k_0} \le \varepsilon_0$ и $0 < \sigma_0 < \kappa/(\sigma-\nu)$.

1433

2.3. Вывод асимптотик для области с сепаратрисой

Рассмотрим теперь область $\mathcal{D}_3$. Пусть переменная τ принадлежит интервалу, на котором "замороженная" система обладает сепаратрисой и получим асимптотики решений, лежащих в области с сепаратрисой "замороженной" системы и вращающихся внутри одной из петель.

Для получения асимптотик решений системы (0.2) с гамильтонианом

$$H(x,p,\tau)=\frac{p^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\varphi(\tau)x^2-x^4\right)=\frac{p^2}{2}+V(x,\tau) \tag{2.24}$$

в области с сепаратрисой, воспользуемся методом, описанным в работе Доброхотова и Миненкова [6].

Рассмотрим "замороженную" (быструю) систему

$$\begin{cases}\dot{x}=p,\\ \dot{p}=\varphi(\tau)x-2x^3,\\ \dot{\tau}=0,\end{cases} \tag{2.25}$$

с начальными данными (x^0,p^0,τ^0). Такая система интегрируема в квадратурах, её траектории периодические (за исключением траекторий, лежащих на сепаратрисе). Из выражения для гамильтониана получаем

$$p=\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\varphi x^2-x^4+2H}. \tag{2.26}$$

Введём параметры

$$x_\pm^2(\tau)=\frac{\varphi(\tau)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varphi(\tau)}{2}\right)^2+2H}$$

Заметим, что $x_\pm$ удовлетворяют уравнению $\varphi x^2-x^4+2H=0$.

При отрицательных значениях энергии "замороженной" системы на уровне энергии лежат две замкнутые траектории. Фиксируем одну их них выбором функций $x_\pm>0$.

Проинтегрируем уравнение (2.26)

$$t-t_0=\int\limits_{x_+}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-x_-^2)(x_+^2-x^2)}}-\underbrace{\int\limits_{x_+}^{x_0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-x_-^2)(x_+^2-x^2)}}}_{-\beta(x_0)}=[x_+^2-x^2=y^2]=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{x_+^2-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(x_+^2-x_-^2-y^2)(x_+^2-y^2)}}+\beta(x_0)=\frac{1}{x_+}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{x_+^2-x^2}{x_+^2-x_-^2}}}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)\left(1-\frac{x_+^2-x_-^2}{x_+^2}s^2\right)}}+$$

$$+\beta(x_0)=\frac{1}{x_+}F\left(\sqrt{\frac{x_+^2-x^2}{x_+^2-x_-^2}},\frac{\sqrt{x_+^2-x_-^2}}{x_+}\right)+\beta(x_0),$$

где $F(u,k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k. Выразим отсюда x. Используя свойства эллиптических интегралов, получаем

$$\mathrm{sn}[(t-t_0-\beta(x_0))x_+,\sqrt{m}]=\sqrt{\frac{x_+^2-x^2}{x_+^2-x_-^2}},$$

где

$$m=\frac{x_+^2-x_-^2}{x_+^2}.$$

Заметим, что величина m зависит только от значений энергии и уровня τ_0

$$m=\frac{2\sqrt{\varphi^2(\tau^0)+8H}}{\varphi(\tau^0)+\sqrt{\varphi^2(\tau^0)+8H}},\quad H=H(x^0,p^0,\tau^0)$$

и постоянна на траекториях "замороженной" системы.

Тогда

$$x=\sqrt{x_+^2-(x_+^2-x_-^2)\mathrm{sn}^2[(t-t_0-\beta(x_0))x_+,\sqrt{m}]}=x_+\mathrm{dn}[(t-t_0-\beta(x_0))x_+,\sqrt{m}],$$

Введём частоту

$$\Omega=\frac{2\pi}{T},$$

где

$$T=\oint\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2(E-V(z,\tau))}}=2\int\limits_{x_-}^{x_+}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-x_-^2)(x_+^2-x^2)}}=2\frac{K(\sqrt{m})}{x_+(\sqrt{m},\tau)}$$

и $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Положим

$$\theta=\theta_0+\Omega t,\quad \theta_0=-\frac{\pi}{K(\sqrt{m})}(t_0+\beta(x_0))x_+. \tag{2.27}$$

Таким образом, решения "замороженной" системы имеют вид

$$\begin{cases}x(t)=x_+(m,\tau)\mathrm{dn}\left(\frac{K(\sqrt{m})}{\pi}\theta(t),\sqrt{m}\right)\\ p(t)=(x_-^2(m,\tau)-x_+^2(m,\tau))\mathrm{sn}\left(\frac{K(\sqrt{m})}{\pi}\theta(t),\sqrt{m}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{K(\sqrt{m})}{\pi}\theta(t),\sqrt{m}\right)\end{cases} \tag{2.28}$$

Определим функции X и P следующим образом:

$$\begin{cases}X(\theta,m,\tau)=x_+(m,\tau)\mathrm{dn}\left(\frac{K(\sqrt{m})}{\pi}\theta,\sqrt{m}\right)\\ P(\theta,m,\tau)=(x_-^2(m,\tau)-x_+^2(m,\tau))\mathrm{sn}\left(\frac{K(\sqrt{m})}{\pi}\theta,\sqrt{m}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{K(\sqrt{m})}{\pi}\theta,\sqrt{m}\right)\end{cases} \tag{2.29}$$

Отметим, что, поскольку функция $\mathrm{dn}(u,k)$ является $2K(k)$-периодической по u, функции $X(\theta,m,\tau)$ и $P(\theta,m,\tau)$ являются 2π-периодические по θ. Тогда решения могут быть представлены как

$$\begin{cases}x=X(\Omega(m,\tau)t+\theta_0,m,\tau)\\ p=P(\Omega(m,\tau)t+\theta_0,m,\tau).\end{cases} \tag{2.30}$$

1435

Преобразуя (2.27) и используя (2.28), получаем выражение для θ_0 через начальное данное x_0 и величину m:

$$x_0 = x_+ \mathrm{dn}\left(\frac{K}{\pi}\theta_0, \sqrt{m}\right) \Rightarrow \frac{x_0}{x_+} = \mathrm{dn}\left(\frac{K}{\pi}\theta_0, \sqrt{m}\right) = \sqrt{1 - m\mathrm{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}\theta_0, \sqrt{m}\right)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{K}{\pi}\theta_0, \sqrt{m}\right) = \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{x_+^2}} \Rightarrow F\left(\frac{\sqrt{x_+^2 - x_0^2}}{\sqrt{m}x_+}, \sqrt{m}\right) = \frac{K}{\pi}\theta_0$$

Окончательно имеем

$$\theta_0 = \frac{\pi}{K(\sqrt{m})} F\left(\sqrt{\frac{x_+^2 - x_0^2}{x_+^2 - x_-^2}}, \sqrt{m}\right) \tag{2.31}$$

Энергия "замороженной" системы имеет вид

$$H = -\frac{\varphi^2(\tau^0)}{2}\frac{1-m}{2-m}.$$

Эту энергию можно представить как

$$H(P, X) = \frac{P^2}{2} + V(X, \tau) = \frac{1}{2}\left(\Omega\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2 + V(X, \tau)$$

Заметим, учитывая (2.27), что функций X и P удовлетворяют условиям

$$X(\theta, m, \tau)\big|_{\theta=0} = x^+, \quad P(\theta, m, \tau)\big|_{\theta=0} = 0.$$

Кроме того, функция $X(\theta, m, \tau)$ является чётной по переменной θ, а функция $P(\theta, m, \tau)$ — нечётной, что значительно упрощает дальнейшие вычисления.

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = \varphi(\tau)x - 2x^3, \\ \dot{\tau} = \varepsilon. \end{cases} \tag{2.32}$$

Перейдём в задаче (2.32) с начальными данными (x^0, p^0, τ^0) от переменных (x, p, τ) к (m, θ, τ) с помощью замены переменных:

$$x = X(\theta, m, \tau), \quad p = P(\theta, m, \tau).$$

Благодаря такой замене появляется возможность разделить переменные на быстрые и медленные, а затем применить метод усреднений, чтобы построить асимптотику решения данной задачи Коши.

Введём обозначение для частных производных:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = A_z$$

1436

Соответствующую первым двум уравнениям (2.32) гамильтонову систему можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} P_m & P_\theta \\ X_m & X_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot m \\ \dot\theta \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} P_\tau \\ X_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_x \\ P \end{pmatrix}.$$

Выражая $\dot m$ и $\dot\theta$, получим:

$$\Delta = P_m X_\theta - X_m P_\theta = P_m \frac{1}{\Omega} H_P + X_H \frac{1}{\Omega} H_x = \frac{1}{\Omega}(P_m H_P + X_m H_X) = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial H}{\partial m}$$

$$\begin{pmatrix} \dot m \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \Omega(m,\tau) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_\theta & -P_\theta \\ -X_m & P_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -V_x - \varepsilon P_\tau \\ P - \varepsilon X_\tau \end{pmatrix} =$$

$$= \Omega(m,\tau) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -PP_\theta - V_X X_\theta - \varepsilon(X_\theta P_\tau - X_\tau P_\theta) \\ X_m V_X + P_m P - \varepsilon(X_\tau P_m - X_m P_\tau) \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$-PP_\theta - V_X X_\theta = 0,$$
$$X_m V_X + P_m P = \frac{\partial H}{\partial m}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot m \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \Omega(m,\tau) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\varepsilon(X_\theta P_\tau - X_\tau P_\theta) \\ \frac{\partial H}{\partial m} - \varepsilon(X_\tau P_m - X_m P_\tau) \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Введём функции

$$f_1(m,\theta,\tau) = \Omega(m,\tau) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}^{-1} (-X_\theta P_\tau + X_\tau P_\theta),$$
$$f_2(m,\theta,\tau) = \Omega(m,\tau) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}^{-1} (-X_\tau P_m + X_m P_\tau).$$

При этом система (2.33) перепишется в виде

$$\dot m = \varepsilon f_1(m,\theta,\tau)$$
$$\dot\theta = \Omega(m,\tau) + \varepsilon f_2(m,\theta,\tau)$$
$$\dot\tau = \varepsilon$$

Отметим, что переменные (m,τ) медленные, а θ — быстрая. Метод усреднений [10] гарантирует существование близкой к тождественной замены переменных $(\mathcal{M},\psi)$ такой, что

$$m = \mathcal{M} + \varepsilon q_1(\mathcal{M},\psi,\tau,\varepsilon)$$
$$\theta = \psi + \varepsilon q_2(\mathcal{M},\psi,\tau,\varepsilon),$$

где функции $\mathcal{M}$ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathcal{M}} = \varepsilon F_1(\mathcal{M},\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$$
$$\dot\psi = \Omega(\mathcal{M},\tau) + \varepsilon F_2(\mathcal{M},\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$$

1437

с константой $C > 0$. С точностью до квадратичных по ε членов эти уравнения не содержат в правой части переменную ψ . Для того, чтобы найти $q_{1,2}$ и $F_{1,2}$, перепишем уравнения (2.33) в терминах новых переменных

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon q_{1\mathcal{M}} & \varepsilon q_{1\psi} \\ \varepsilon q_{2\mathcal{M}} & 1+\varepsilon q_{2\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{M}} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \varepsilon^2 \begin{pmatrix} q_{1\tau} \\ q_{2\tau} \end{pmatrix}$$

Введём следующее обозначение:

$$Q := \begin{pmatrix} q_{1\mathcal{M}} & q_{1\psi} \\ q_{2\mathcal{M}} & q_{2\psi} \end{pmatrix}$$

Поскольку

$$(I + \varepsilon Q)^{-1} = I - \varepsilon Q + \varepsilon^2 Q^2 + O(\varepsilon^3),$$

то

$$\begin{pmatrix} \varepsilon F_1 \\ \Omega + \varepsilon F_2 \end{pmatrix} = (I - \varepsilon Q + \varepsilon^2 Q^2) \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \end{pmatrix} + \varepsilon (I - \varepsilon Q) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \varepsilon^2 \begin{pmatrix} q_{1\tau} \\ q_{2\tau} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3) \tag{2.34}$$

Представим функции $q_{1,2}$ и $F_{1,2}$ в виде:

$$\begin{aligned} q_1(\mathcal{M}, \psi, \tau, \varepsilon) &= \hat{q}_1(\mathcal{M}, \psi, \tau) + O(\varepsilon) \\ q_2(\mathcal{M}, \psi, \tau, \varepsilon) &= \hat{q}_2(\mathcal{M}, \psi, \tau) + O(\varepsilon) \\ F_1(\mathcal{M}, \tau, \varepsilon) &= \hat{F}_1(\mathcal{M}, \tau) + O(\varepsilon) \\ F_2(\mathcal{M}, \tau, \varepsilon) &= \hat{F}_2(\mathcal{M}, \tau) + O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{2.35}$$

Подставляя (2.35) в (2.34) и сравнивая коэффициенты при ε^1, получаем

$$\hat{F}_1 = f_1 - \Omega(m, \theta)\hat{q}_{1\psi} \tag{2.36}$$

$$\hat{F}_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial m}\hat{q}_1 + f_2 - \Omega \hat{q}_{2\psi}, \tag{2.37}$$

где $\hat{q}_{1,2\psi}$ — частные производные по ψ. Заметим, что $F_{1,2}$ от ψ не зависят. Введём обозначение:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathcal{M}, \psi, \tau) \mathrm{d}\psi$$

и усредним систему по переменной ψ. При этом слагаемые с $\hat{q}_{1,2\psi}$ исчезнут в силу периодичности функций $q_{1,2}$. Уравнения (2.36) и (2.37) после усреднения примут вид

$$\hat{F}_1(\mathcal{M}, \tau) = \langle f_1 \rangle \tag{2.38}$$

$$\hat{F}_2(\mathcal{M}, \tau) = \frac{\partial \Omega}{\partial m}\langle \hat{q}_1 \rangle + \langle f_2 \rangle \tag{2.39}$$

Заметим, что функции X_θ, P, P_m, P_τ — нечётные по переменной θ, а P_θ, X, X_τ, X_m — чётные. Отсюда следует, что функция f_1 — чётная, а функция f_2 — нечётная. Выразим $\hat{q}_1$ из уравнения (2.36)

$$\hat{q}_1(\mathcal{M}, \psi, \tau, \varepsilon) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\psi} (f_1 - \hat{F}_1) \mathrm{d}\psi + C.$$

1438

Если положить константу интегрирования C равной нулю, то функция $\hat{q}_1$ — нечётная по ψ, а значит из (2.39) следует, что $\hat{F}_2 = 0$.

$$\langle f_1 \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \left(\frac{\partial H}{\partial m} \right)^{-1} \int_0^{2\pi} (P_\theta X_\tau - X_\theta P_\tau) \mathrm{d}\theta = 0$$

Получим формулу для $\hat{q}_1$.

$$\Omega \hat{q}_1(m, \theta, \tau) = \int_0^\theta (f_1 - \hat{F}_1) \mathrm{d}\theta = \int_0^\theta \Omega \left(\frac{\partial H}{\partial m} \right)^{-1} [P_\theta X_\tau - X_\theta P_\tau] \mathrm{d}\theta,$$

при этом, производная $\frac{\partial H}{\partial m}$, а также функции $P_\theta, X_\tau, X_\theta, P_\tau$ вычисляются в точке (m^0, θ, τ).

Заметим, что

$$X_\theta = \frac{1}{\Omega} P, \quad P_\theta = -\frac{1}{\Omega} V_X(X, \tau),$$

кроме того,

$$H_\tau = P P_\tau + V_X X_\tau + V_\tau.$$

Тогда

$$P_\theta X_\tau - X_\theta P_\tau = -\frac{1}{\Omega}(V_X X_\tau + P P_\tau) = -\frac{1}{\Omega}(H_\tau - V_\tau) = -\frac{1}{\Omega}(\langle V_\tau \rangle - V_\tau)$$

Следовательно,

$$\hat{q}_1(m, \theta, \tau, \varepsilon) = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial m} \right)^{-1} \int_0^\theta (-V_\tau + \langle V_\tau \rangle) \mathrm{d}\theta.$$

В случае системы (2.32) потенциал имеет вид $V = -\frac{1}{2}(\varphi x^2 - x^4)$, тогда

$$V_\tau = -\frac{1}{2} x^2 \varphi'_\tau.$$

Продолжим вычисления $\hat{q}_1$.

$$\begin{aligned}
\langle V_\tau \rangle = -\frac{1}{2\pi} \frac{\varphi'_\tau}{2} \int_0^{2\pi} x^2 \mathrm{d}\theta = -\frac{\varphi'_\tau x_+^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{dn}^2 \left(\frac{K(\sqrt{m^0})}{\pi} \theta \right) \mathrm{d}\theta = -\frac{\varphi'_\tau x_+^2}{4K(\sqrt{m^0})} \int_0^{2K} \mathrm{dn}^2(\tilde{\theta}) \mathrm{d}\tilde{\theta} = \\
= -\frac{\varphi'_\tau x_+^2}{4K(\sqrt{m^0})} \left(\int_0^K \mathrm{dn}^2(\theta) \mathrm{d}\theta + \int_K^{2K} \mathrm{dn}^2(\theta) \mathrm{d}\theta \right) = -\frac{\varphi'_\tau x_+^2}{2K(\sqrt{m^0})} \int_0^K \mathrm{dn}^2(\theta) \mathrm{d}\theta = \\
= -\frac{\varphi'_\tau x_+^2}{2K(\sqrt{m^0})} E(1, \sqrt{m^0}),
\end{aligned}$$

где $E(u, k)$ — эллиптический интеграл второго рода и

$$m^0 = \frac{2\sqrt{\varphi^2(\tau^0) + 8H}}{\varphi(\tau^0) + \sqrt{\varphi^2(\tau^0) + 8H}}, \quad H = H(x^0, p^0, \tau_0)$$

Принимая во внимание

$$\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{\varphi^2(\tau)}{2(2-m)^2},$$

окончательно имеем

$$\hat{q}_1 = \frac{1}{\Omega}\frac{2(2-m)^2}{\varphi^2(\tau)}\int\limits_0^\theta(-V_\tau + \langle V_\tau\rangle)\mathrm{d}\theta = \\ = \frac{1}{\Omega}\frac{2(2-m)^2}{\varphi^2(\tau)}\frac{\varphi'_\tau x_+^2}{2K}\left(E\left(\mathrm{sn}\left(\frac{K\theta}{\pi},\sqrt{m^0}\right),\sqrt{m^0}\right)\pi - E(\sqrt{m^0})\theta\right) = \\ = \frac{1}{\Omega}\frac{2(2-m)^2}{\varphi^2(\tau)}\frac{\varphi'_\tau x_+^2\pi}{2K}\mathrm{zn}\left(\frac{K\theta}{\pi},\sqrt{m^0}\right),$$

где $\mathrm{zn}(u,k)$ — дзета-функция Якоби.

Теперь по начальным данным для переменных (x,p) получим начальные данные для (m,θ).

$$m\big|_{\tau=\tau_0} = m^0(x^0,p^0), \quad \theta\big|_{\tau=\tau_0} = \theta^0(x^0,p^0)$$
$$\mathcal{M}^0 = m^0 - \varepsilon\hat{q}_1(m^0,\theta^0,\tau_0) + O(\varepsilon^2),$$

Положим

$$\Omega_0 = \Omega\big|_{\tau=\tau_0}.$$

Тогда можно выписать асимптотику m

$$m(m^0,\tau,\tau^0) = m^0 - \varepsilon\frac{1}{\Omega_0}\frac{2(2-m^0)^2}{\varphi^2(\tau^0)}\frac{\varphi'(\tau^0)x_+^2(\tau^0)\pi}{2K(\sqrt{m^0})}\mathrm{zn}\left(\frac{K(\sqrt{m^0})\theta_0}{\pi},\sqrt{m^0}\right) + \\ + \varepsilon\frac{1}{\Omega}\frac{2(2-m^0)^2}{\varphi^2(\tau)}\frac{\varphi'(\tau)x_+^2(\tau)\pi}{2K(\sqrt{m^0})}\mathrm{zn}\left(\frac{K(\sqrt{m^0})\theta}{\pi},\sqrt{m^0}\right) + O(\varepsilon^2), \quad (2.40)$$

а также формулу для угла θ:

$$\theta(m,\tau) = \theta_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau^0}^{\tau}\Omega(m(s),s)\mathrm{d}s + O(\varepsilon), \\ \theta_0 = \frac{\pi}{K(\sqrt{m^0})}F\left(\sqrt{\frac{x_+^2(m^0,\tau_0)-x_0^2}{x_+^2(m^0,\tau_0)-x_-^2(m^0,\tau_0)}},\sqrt{m^0}\right). \quad (2.41)$$

При этом решение задачи Коши (2.32) с начальными данными (x^0,p^0,τ^0) может быть представлено в виде

$$\begin{cases} x = x_+(m,\tau)\mathrm{dn}\left(\frac{K}{\pi}\theta,\sqrt{m}\right) \\ p = (x_-^2(m,\tau)-x_+^2(m,\tau))\mathrm{sn}\left(\frac{K}{\pi}\theta,\sqrt{m}\right)\mathrm{cn}\left(\frac{K}{\pi}\theta,\sqrt{m}\right) \end{cases}$$

где функции m и θ определяются формулами (2.40) и (2.41) соответственно.

3. Построение гомоклинических решений

Данная глава посвящена построению решений системы (0.1), лежащих в трансверсальном пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий инвариантного множества $M_\varepsilon =$

1440

$\{(x,p,\tau) \in \mathbb{R}^3 : x = p = 0\}$. Такие решения при $t \to \pm\infty$ стремятся к положению равновесия $(x,p) = (0,0)$. Мы будем интересоваться траекториями определенного типа. Для описания этого типа, зафиксируем две последовательные точки бифуркации $\tau_1, \tau_2, \tau_1 < \tau_2$ такие, что на интервале (τ_1, τ_2) функция φ принимает положительные значения. Это приводит к тому, что при $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ существует сепаратриса "замороженной" системы. Будем строить такие гомоклинические решения, которые до первой бифуркации и после второй находятся в малой окрестности положения равновесия, а именно в областях типа $\mathcal{D}_1$, отвечающих интервалам $(-\infty, \tau_1 - \delta^u]$ и $[\tau_2 + \delta^s, +\infty)$. В окрестности точки бифуркации τ_1 решения выходят из окрестности положения равновесия, попадая внутрь одной из петель "замороженной" сепаратрисы, где они вращаются вокруг устойчивого положения равновесия "замороженной" системы. Затем решения снова возвращаются в окрестность положения равновесия при прохождении бифуркации в момент $\tau = \tau_2$. Будем называть такие решения вращающимися гомоклиническими решениями и дадим более строгое определение:

Определение 3.1. *Пусть τ_1, τ_2 — точки бифуркации системы (0.1), интервал (τ_1, τ_2) содержит сепаратрису "замороженной" системы. Рассмотрим положительные числа $\delta^{u,s} \ll 1$. Будем называть вращающимися гомоклиническими решениями с параметрами $\tau_1, \tau_2, \delta^u, \delta^s$ такие гомоклинические решения $(x(\tau), p(\tau))$ системы (2.32), которые удовлетворяют следующим условиям*

$$
\begin{aligned}
(x(\tau), p(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_1((-\infty, \tau_1 - \delta^u]), \quad \tau \in (-\infty, \tau_1 - \delta^u], \\
(x(\tau), p(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_2([\tau_1 - \delta^u, \tau_1 + \delta^u]), \quad \tau \in [\tau_1 - \delta^u, \tau_1 + \delta^u], \\
(x(\tau), p(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_3([\tau_1 + \delta^u, \tau_2 - \delta^s]), \quad \tau \in [\tau_1 + \delta^u, \tau_2 - \delta^s], \\
(x(\tau), p(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_2([\tau_2 - \delta^s, \tau_2 + \delta^s]), \quad \tau \in [\tau_2 - \delta^s, \tau_2 + \delta^s], \\
(x(\tau), p(\tau), \tau) \in \mathcal{D}_1([\tau_2 + \delta^s, +\infty)), \quad \tau \in [\tau_2 + \delta^s, +\infty).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим интервал $[\tau, \tau + T]$, содержащий два нуля τ_1, τ_2 функции $\varphi(\tau)$. Пусть при $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ существует сепаратриса "замороженной" системы. Выберем такую точку τ_0 в области с сепаратрисой, что $\tau_1 + \delta < \tau_0 < \tau_2 - \delta$.

В окрестности положения равновесия системы (0.2) неустойчивое многообразие W^u_{loc} экспоненциально близко к неустойчивому подпространству E^u. Сечение E^u плоскостью $\tau = const$ представляет собой прямую. Следовательно, для точки, лежащей на W^u_{loc}, связь функций x и p является "почти линейной". Для точки на устойчивом многообразии ситуация аналогична.

Заметим, что если в качестве начального данного берется точка на неустойчивом многообразии $W^u(M_\varepsilon)$, то при продолжении решения на $-\infty$ траектория будет стремиться к инвариантному множеству M_ε. Аналогично, если начальное данное лежит на устойчивом многообразии $W^s(M_\varepsilon)$, то к инвариантному множеству траектория будет стремится при $t \to +\infty$.

Введём следующие обозначения: окрестности точек поворота $\tau_{1,2}$ будем соответственно обозначать $(\tau_1 - \delta^u, \tau_1 + \delta^u)$ и $(\tau_2 - \delta^s, \tau_2 + \delta^s)$. Энергия в области с сепаратрисой в зависимости

от уровня ($\tau = \tau_1 + \delta^u$ или $\tau = \tau_2 - \delta^s$) будет обозначаться $H_+^{u,s}$. Энергия на уровнях $\tau_1 - \delta^u$ и $\tau_2 + \delta^s$ соответственно H_-^u и H_-^s. Точно так же в зависимости от уровня будем обозначать действие $J_\pm^{u,s}$.

Возьмём точку на неустойчивом многообразии на уровне $\tau_1 - \delta^u$ в малой окрестности положения равновесия и продолжим траекторию внутрь области с сепаратрисой до уровня τ_0. Аналогично, возьмём точку на устойчивом многообразии на уровне $\tau_2 + \delta^s$ и продолжим решение до уровня τ_0. Приравнивая полученные таким способом выражения для решений, найдём условие пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий, что будет означать существование гомоклинических траекторий указанного типа.

Обозначим решение в окрестности точек поворота через x_1, в области с сепаратрисой через x_2. Поскольку переменная J_- зависит только от x, p, τ, а функции p и x связаны, т.к. обе лежат на устойчивом (неустойчивом) многообразии, то можно получить выражение $J_-^{u,s} = J_-^{u,s}(x_1)$. Обращая эту функцию, получим зависимость $x_1(J_-^{u,s})$ и $p_1(J_-^{u,s})$. Взяв функции x_1, p_1 в качестве начальных данных на следующем интервале, придём к решению в области с сепаратрисой $x_2(J_-^{u,s})$, $p_2(J_-^{u,s})$.

Будем исследовать пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий на уровне $\tau = \tau_0$. Условие пересечения можно записать в виде равенства решений, параметризованных действием:

$$x_2(J_-^u) = x_2(J_-^s) \tag{3.1}$$

$$p_2(J_-^u) = p_2(J_-^s) \tag{3.2}$$

Будем искать $J_-^{u,s}$ в виде $J_-^{u,s} = J_0 + \Delta J^{u,s}$, где $\Delta J^{u,s} = o(1)$. Разложим равенства (3.1) и (3.2) по J в точке $J = J_0$, а затем покажем разрешимость полученной системы относительно переменных J_0, $\Delta J^{u,s}$.

Используя асимптотические формулы для решений системы (0.1) из главы 2, получаем уравнения на равенство решений $x(\tau)$ и $\dot{x}(\tau)$ на уровне $\tau = \tau_0$ имеют вид

$$x_+(m(\tau_1+\delta),\tau_0)\mathrm{dn}\left(\frac{K(m(\tau_1+\delta))}{\pi}\theta_0(\tau_1+\delta) + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\tau_1+\delta}^{\tau_0}\Omega(m,\tau)\mathrm{d}\tau\right) =$$
$$= x_+(m(\tau_2-\delta),\tau_0)\mathrm{dn}\left(\frac{K(m(\tau_2-\delta))}{\pi}\theta_0(\tau_2-\delta) + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\tau_2-\delta}^{\tau_0}\Omega(m,\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{3.3}$$

$$(x_-^2(\tau_1+\delta) - x_+^2(\tau_1+\delta))\mathrm{sn}\left(\frac{K(m(\tau_1+\delta))}{\pi}\theta^u\right)\mathrm{cn}\left(\frac{K(m(\tau_1+\delta))}{\pi}\theta^u\right) =$$
$$= (x_-^2(\tau_2-\delta) - x_+^2(\tau_2-\delta))\mathrm{sn}\left(\frac{K(m(\tau_2-\delta))}{\pi}\theta^u\right)\mathrm{cn}\left(\frac{K(m(\tau_2-\delta))}{\pi}\theta^s\right) \tag{3.4}$$

1442

Здесь

$$m(m_0,\tau,\hat\tau) = m_0 - \varepsilon\frac{(2-m_0)^2}{\varphi^2(\hat\tau)}\frac{\varphi'(\hat\tau)x_+^2(\hat\tau)\pi}{K(m_0)}\mathrm{zn}\left(\frac{K(m_0)}{\pi}\theta_0,\sqrt{m_0}\right) + \\ + \varepsilon\frac{(2-m_0)^2}{\varphi^2(\tau)}\frac{\varphi'(\tau)x_+^2(\tau)\pi}{K(m_0)}\mathrm{zn}\left(\frac{K(m_0)}{\pi}\theta,\sqrt{m_0}\right) + O(\varepsilon^2), \quad (3.5)$$

$$\theta = \frac{K(\hat\tau)}{\pi}\theta_0(\hat\tau) + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\hat\tau}^{\tau_0}\Omega(m,\tau)\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon),$$

где $\hat\tau = \tau_1 + \delta^u, \tau_2 - \delta^s$.

Зафиксируем $\delta^{u,s}$ следующим образом

$$\delta^u = |\varphi'(\tau_1)|^{-1}\varepsilon^{\frac{2}{3}(1-\sigma)}, \quad \delta^s = |\varphi'(\tau_2)|^{-1}\varepsilon^{\frac{2}{3}(1-\sigma)}. \quad (3.6)$$

Заметим, что параметры δ_u и δ_s выбраны так, что с точностью до слагаемых порядка $O(\delta_{u,s}^2)$ выполняется равенство

$$\varphi(\tau_1+\delta_u) = \varphi(\tau_2-\delta_s).$$

Отсюда следует равенство функций $m_0(\tau_1+\delta_u)$ и $m_0(\tau_2-\delta_s)$ и, поскольку

$$x_+(m,\tau) = \sqrt{\frac{\varphi(\tau)}{2-m}},$$

то

$$x_+(m_0(\tau_1+\delta_u),\tau_0) = x_+(m_0(\tau_2-\delta_s),\tau_0).$$

Следовательно, из (3.3) получаем

$$\theta_0(\tau_1+\delta^u) + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\tau_1+\delta^u}^{\tau_0}\Omega(H_+^u,\tau)\mathrm{d}\tau = \theta_0(\tau_2-\delta^s) + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\tau_2-\delta^s}^{\tau_0}\Omega(H_+^s,\tau)\mathrm{d}\tau + 2\pi M, \quad (3.7)$$

где $M\in\mathbb{Z}$, $M = O(\varepsilon^{-1})$.

Разложим Ω по J в точке J_0:

$$\Omega(H_+^u) = \Omega(H_+^u(J_0)) + \left.\frac{\partial\Omega}{\partial J^u}\right|_{J^u=J_0}\Delta J^u + O((\Delta J^u)^2),$$
$$\Omega(H_+^s) = \Omega(H_-^s(J_0)) + \left.\frac{\partial\Omega}{\partial J^s}\right|_{J^s=J_0}\Delta J^s + O((\Delta J^s)^2),$$

подставим в (3.7) и введём обозначение

$$A(J_0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{\tau_1+\delta^u}^{\tau_2-\delta^s}\Omega(J_0,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Тогда уравнение (3.7) может быть записано в виде системы

$$[A(J_0)] = M, \qquad (3.8)$$

$$\theta_0(J_0, \tau_1 + \delta^u) + \Delta J^u \int\limits_{\tau_1+\delta^u}^{\tau_0} \left.\frac{\partial\Omega}{\partial J}\right|_{J_0} \mathrm{d}\tau = \theta_0(J_0, \tau_2 - \delta^s) + \Delta J^s \int\limits_{\tau_2-\delta^s}^{\tau_0} \left.\frac{\partial\Omega}{\partial J}\right|_{J_0} \mathrm{d}\tau + \{A(J_0)\}, \qquad (3.9)$$

где $A(J_0) = [A(J_0)] + \{A(J_0)\}$. Здесь квадратными скобками обозначена целая часть числа, фигурными — дробная.

Функция Ω связана с переменной m формулой:

$$\Omega(m, \tau) = \frac{\pi\sqrt{\varphi(\tau)}}{K(\sqrt{m})\sqrt{2-m}},$$

Асимптотика для m, получающаяся подстановкой энергии (2.17) в формулу для m и разложением по ε, имеет вид

$$m = 2^{\frac{7}{4}} J_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}\nu}).$$

Тогда формулу (3.8) можно переписать в виде

$$\left[\frac{1}{2\varepsilon K(\sqrt{m})\sqrt{2 - 2^{\frac{7}{4}} J_0^{1/2} \varepsilon^{\frac{\nu}{2}}}} \int\limits_{\tau_1+\delta^u}^{\tau_2-\delta^s} \sqrt{\varphi(s)}\mathrm{d}s\right] = M \qquad (3.10)$$

Заметим, что число M соответствует числу оборотов траектории вокруг положения равновесия в одной из петель сепаратрисы на отрезке $[\tau_1 + \delta^u, \tau_2 - \delta^s]$ по τ.

Теперь найдём производную $\partial\Omega/\partial J$ в точке $J = J_0$

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial J}\right|_{J_0} = \left.\frac{\partial\Omega}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial J}\right|_{J_0} = \\ = \frac{2^{-1/4}\pi\sqrt{\varphi(\tau)}}{K(\sqrt{m})\sqrt{2-m}} \left[(2-m)^{-1} - \frac{1}{K(\sqrt{m})}\left(\frac{E(\sqrt{m})}{m(1-m)} - \frac{K(\sqrt{m})}{m}\right)\right] J_0^{-1/2}\varepsilon^{\nu/2} \qquad (3.11)$$

Отметим, что данная производная не обращается в нуль, поскольку

$$(2-m)^{-1} - \frac{1}{K(\sqrt{m})}\left(\frac{E(\sqrt{m})}{m(1-m)} - \frac{K(\sqrt{m})}{m}\right) = \frac{m(C(\sqrt{m}) - D(\sqrt{m}))}{K(\sqrt{m})(2-m)(1-m)} \neq 0,$$

где

$$C(\sqrt{m}) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\psi\cos^2\psi}{(\sqrt{1 - m\sin^2\psi})^3}\mathrm{d}\psi, \quad D(\sqrt{m}) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\psi}{\sqrt{1 - m\sin^2\psi}}\mathrm{d}\psi.$$

Уравнения (3.9) и (3.11) дают одно из уравнений на $\Delta J^{u,s}$. Получим второе уравнение.

Условие равенства функций $m(J_+^u, \tau_1 + \delta_u)$ и $m(J_+^s, \tau_2 - \delta_s)$ на уровне $\tau = \tau_0$ эквивалентно условию равенства соответствующих энергий (2.17). Решая уравнение $H_+^u = H_+^s$, и считая $J_-^{u,s} = J_0 + \Delta J^{u,s}$, получаем

$$\Delta J^u - \frac{1}{\pi}|\varphi'(\tau_1)|^{-1/2}\varepsilon^{\sigma-\nu}\ln|2\sin\psi_u(J_0)| = \Delta J^s - \frac{1}{\pi}|\varphi(\tau_2)|^{-1/2}\varepsilon^{\sigma-\nu}\ln|2\sin\psi_s(J_0)| \qquad (3.12)$$

Тогда решение системы (3.9), (3.12) можно записать в виде

$$\Delta J^u = \Delta J^s - \frac{1}{\pi}\left(|\varphi'(\tau_2)|^{-1/2}\ln|2\sin\psi_s(J_0)| - |\varphi'(\tau_1)|^{-1/2}\ln|2\sin\psi_u(J_0)|\right)\varepsilon^{\sigma-\nu} \tag{3.13}$$

$$\Delta J^s = \Bigg((\theta_0(\tau_2-\delta_s)-\theta_0(\tau_1+\delta_u))\varepsilon^{-4/3(1-\sigma)-\nu} + \left\{\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{\tau_1+\delta^u}^{\tau_2-\delta^s}\Omega(J_0,\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\varepsilon^{-4/3(1-\sigma)-\nu} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\varepsilon^{\sigma-\nu}\left(|\varphi'(\tau_2)|^{-1/2}\ln|2\sin\psi_s(J_0)| - |\varphi'(\tau_1)|^{-1/2}\ln|2\sin\psi_u(J_0)|\right)\Bigg)\Bigg/\int\limits_{\tau_1+\delta^u}^{\tau_2-\delta^s}\frac{\partial\Omega}{\partial J}\mathrm{d}\tau\Bigg|_{J_0} \tag{3.14}$$

Заметим, что в силу (3.11) интеграл

$$\int\limits_{\tau_1+\delta^u}^{\tau_2-\delta^s}\frac{\partial\Omega}{\partial J}\mathrm{d}\tau\Bigg|_{J_0} \neq 0$$

отличен от нуля.

Предложение 3.1. *Пусть τ_1,τ_2 — точки бифуркации системы (0.1) такие, что $\varphi(\tau)>0$ для всех $\tau\in(\tau_1,\tau_2)$. Пусть константы J_0,ν,σ,κ удовлетворяют соотношениям $c_1<J_0<c_2$, $0<\nu<\sigma<1$, $0<\kappa<\sigma-\nu$. Тогда существует достаточно малое $\varepsilon_0>0$ такое, что при всех $\varepsilon\in\mathcal{E}=\mathcal{E}_h\setminus\mathcal{E}_1(J_0)$ существует вращающееся гомоклиническое решение с параметрами $(\tau_1,\tau_2,\delta^u,\delta^s)$ системы (0.1), где*

$$\delta^u = |\varphi'(\tau_1)|^{-1}\varepsilon^{\frac{2}{3}(1-\sigma)},\quad \delta^s = |\varphi'(\tau_2)|^{-1}\varepsilon^{\frac{2}{3}(1-\sigma)}.$$

Это гомоклиническое решение совершает

$$M = \left[\frac{1}{2\varepsilon K(\sqrt{m})\sqrt{2-2^{7/4}J_0^{1/2}\varepsilon^{\nu/2}}}\int\limits_{\tau_1+\delta^u}^{\tau_2-\delta^s}\sqrt{\varphi(s)}\mathrm{d}s\right]$$

оборотов вокруг устойчивого положения равновесия "замороженной" системы на интервале $(\tau_1+\delta^u,\tau_2-\delta^s)$.

4. Трансверсальность гомоклинических решений

4.1. Трансверсальность

В данном параграфе мы исследуем вопрос о трансверсальности полученных гомоклинических решений. Чтобы понять, при каких условиях многообразия $W^s(M_\varepsilon)$ и $W^u(M_\varepsilon)$ пересекаются трансверсально, продифференцируем функции $m^{s,u}(J_-,\tau_0),\theta^{s,u}(J_-,\tau_0)$ и покажем, что векторы $(m^s_{J_-}(J_-,\tau_0),\theta^s_{J_-}(J_-,\tau_0))$ и $(m^u_{J_-}(J_-,\tau_0),\theta^u_{J_-}(J_-,\tau_0))$, вычисленные в точке $J_-=J_0$, неколлинеарны.

Условие трансверсальности пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{dm^u}{dJ_-}\frac{d\theta^s}{dJ_-} - \frac{dm^s}{dJ_-}\frac{d\theta^u}{dJ_-} \neq 0. \tag{4.1}$$

Из (2.41) следует, что производная от θ выглядит как

$$\frac{d\theta^{u,s}}{dJ_-^{u,s}} = \left(\frac{\partial\theta_0^{u,s}}{\partial m^0} + \varepsilon^{-1}\int\limits_{\hat\tau^{u,s}}^{\tau_0}\frac{\partial\Omega}{\partial m^0}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial m^0}{\partial H_+^{u,s}}\left(\frac{\partial H_+^{u,s}}{\partial J_+^{u,s}}\frac{\partial J_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}} + \frac{\partial H_+^{u,s}}{\partial \phi_+^{u,s}}\frac{\partial \phi_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}}\right) + \frac{\partial\theta_0^{u,s}}{\partial x_0^{u,s}}\frac{\partial x_0^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}},$$

где $\hat\tau^u = \tau_1 + \delta^u$, $\hat\tau^s = \tau_2 - \delta^s$, m^0 — главный член асимптотического разложения функций m^u, m^s.

Заметим, что θ зависит от J_- через функцию m^0 и начальное данное x_0. В качестве начального данного выступает функция x, заданная формулой (2.12). Дифференцируя θ_0 (2.31) по x_0 и затем x_0 по J_-, получаем следующую оценку

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial J_-} = O\left(\varepsilon^{\nu/2+1/3(1-\sigma)+\nu-\sigma}\ln\varepsilon^{-1}(1+\ln\varepsilon^{-1}\operatorname{ctg}\psi)\right).$$

Вычисляя производную θ_0 по m^0 замечаем, что она порядка единицы. Функция m^0 зависит от действия J_- через энергию H_+. Используя формулы (2.12) и (2.26) для x и p, получим выражение для энергии

$$H_+^{u,s} = 2^{\frac12}J_+^{u,s}\varepsilon^{\nu+\frac43(1-\sigma)} - \frac18\varepsilon^{\frac43(1-\sigma)} + 2^{\frac54}(J_+^{u,s})^{\frac32}\varepsilon^{\frac32\nu+\frac43(1-\sigma)}\cos^3[\Phi_+^{u,s}(J_+^{u,s},\phi_+^{u,s})] + \\ + (J_+^{u,s})^2\varepsilon^{2\nu+\frac43(1-\sigma)}\cos^4[\Phi_+^{u,s}(J_+^{u,s},\phi_+^{u,s})], \tag{4.2}$$

где

$$\Phi_+^{u,s}(J_+^{u,s},\phi_+^{u,s}) = \frac{2\sqrt2}{3}|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-\sigma} - 2J_+|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-1}) + \phi_+^{u,s}.$$

Переменные действие-угол J_+ и ϕ_+ зависят от действия J_-. Вычисляя производные $\partial H_+/\partial J_+$, $\partial H_+/\partial\phi_+$, а также учитывая, что

$$\frac{\partial J_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}} = \frac12 - \frac{1}{2\pi}(3\ln2 - \ln J_-^{u,s} - \ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}))\operatorname{ctg}\psi^{u,s},$$

$$\frac{\partial\phi_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}} = |\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{\nu-\sigma}\Bigg[-\frac{1}{2\pi}\Bigg(\ln^2\left(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}J_-^{u,s}\right) + \\ + \frac52\ln2\ln\left(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}J_-^{u,s}\right) - \frac{21}{2}\ln^2 2\Bigg)\operatorname{ctg}\psi^{u,s} + \ln\left(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}J_-^{u,s}\right) - \frac52\ln2\Bigg],$$

приходим к оценкам

$$\frac{\partial\theta_0^{u,s}}{\partial m^0}\frac{\partial m^0}{\partial H_+^{u,s}}\left(\frac{\partial H_+^{u,s}}{\partial J_+^{u,s}}\frac{\partial J_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}} + \frac{\partial H_+^{u,s}}{\partial\phi_+^{u,s}}\frac{\partial\phi_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}}\right) = O\left(\varepsilon^{\nu}\ln\varepsilon^{-1}(1+\ln\varepsilon^{-1}\operatorname{ctg}\psi)\right),$$

$$\varepsilon^{-1}\int\limits_{\hat\tau}^{\tau_0}\frac{\partial\Omega}{\partial m^0}\mathrm{d}s\frac{\partial m^0}{\partial H_+^{u,s}}\left(\frac{\partial H_+^{u,s}}{\partial J_+^{u,s}}\frac{\partial J_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}} + \frac{\partial H_+^{u,s}}{\partial\phi_+^{u,s}}\frac{\partial\phi_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}}\right) = O\left(\varepsilon^{\nu-1}\ln\varepsilon^{-1}(1+\ln\varepsilon^{-1}\operatorname{ctg}\psi)\right).$$

Тогда в выражении для θ_{J_-} главным слагаемым будет

$$\varepsilon^{-1}\int\limits_{\hat\tau^{u,s}}^{\tau_0}\frac{\partial\Omega}{\partial m^0}\mathrm{d}s\frac{\partial m^0}{\partial H_+^{u,s}}\left(\frac{\partial H_+^{u,s}}{\partial J_+^{u,s}}\frac{\partial J_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}}+\frac{\partial H_+^{u,s}}{\partial \phi_+^{u,s}}\frac{\partial \phi_+^{u,s}}{\partial J_-^{u,s}}\right). \tag{4.3}$$

С учётом того, что при $J_- = J_0$ старшие слагаемые в асимптотике функций $m^u_{J_-}$ и $m^s_{J_-}$ совпадают, условие (4.1) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{dm^0}{dJ_-}\right)^2\int\limits_{\hat\tau^u}^{\hat\tau^s}\frac{\partial\Omega}{\partial m^0}\mathrm{d}s\neq 0. \tag{4.4}$$

Кроме того, принимая во внимание, что интеграл в (4.4) отличен от нуля, условие трансверсальности при достаточно малых ε записывается, как

$$\frac{dm^0}{dJ_-}\neq 0. \tag{4.5}$$

Зафиксируем главный член асимптотики $m^0_{J_-}$, накладывая условие $3\nu > 2\sigma$. Тогда

$$\frac{dm^0}{dJ_-^{u,s}} = 2^{5/2}\varepsilon^\nu\Bigg(1-\frac{1}{\pi}\left(3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)})\right)\operatorname{ctg}\psi^{u,s}+ \\ +O\left(\varepsilon^{\frac{3\nu-2\sigma}{2}}\ln\varepsilon^{-1}(1+\ln\varepsilon\operatorname{ctg}\psi)\right)\Bigg). \tag{4.6}$$

Получим из (4.5) и (4.6) условие на $\operatorname{ctg}\psi$:

$$\left(1-\frac{1}{\pi}(3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)})\operatorname{ctg}\psi\right)^2\gg\varepsilon^{3/2\nu-\sigma}\ln\varepsilon^{-1}(1+\ln\varepsilon^{-1}\operatorname{ctg}\psi)^2 \tag{4.7}$$

Решая квадратное неравенство (4.7), получаем

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}\psi > \dfrac{3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}+(1-\sigma+\nu)\ln^{3/2}(\varepsilon^{-1})\varepsilon^{(3\nu-2\sigma)/4}}{\frac{1}{\pi}(3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)})^2} \\ \operatorname{ctg}\psi < \dfrac{3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}-(1-\sigma+\nu)\ln^{3/2}(\varepsilon^{-1})\varepsilon^{(3\nu-2\sigma)/4}}{\frac{1}{\pi}(3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)})^2}\end{array}\right. \tag{4.8}$$

Отсюда находим значения ψ, для которых трансверсальность не гарантируется (при достаточно малых ε):

$$\psi\in\Bigg[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}}-\frac{(1-\sigma+\nu)\pi}{(\sigma-\nu)^2}\ln^{-7/2}(\varepsilon^{-1})\varepsilon^{(3\nu-2\sigma)/4}+\pi k; \\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}}+\frac{(1-\sigma+\nu)\pi}{(\sigma-\nu)^2}\ln^{-7/2}(\varepsilon^{-1})\varepsilon^{(3\nu-2\sigma)/4}+\pi k\Bigg] \tag{4.9}$$

Отрезку (4.9) соответствует отрезок переменной ε. Запишем уравнение на центр этого отрезка, подставляя значение ψ из (2.15):

$$|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}J_0\varepsilon^{\nu-\sigma}\left(3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1}\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}\right)= \\ =\phi_-+\frac{\pi}{2}+\pi k-\frac{\pi}{3\ln 2-\ln J_-^{u,s}-\ln(|\varphi'(\hat\tau^{u,s})|^{-1})\varepsilon^{-(\sigma-\nu)}} \tag{4.10}$$

1447

Обозначим решение этого уравнения относительно параметра ε через $\hat{\varepsilon}_k$.

Проводя вычисления аналогичные тем, что были сделаны при получении множества $\mathcal{E}_1(J_-)$, получаем

$$\hat{\varepsilon}_k = C^\beta(J_-)\frac{\ln^\beta\left[D(k+1/2-\phi_-/\pi)\right]}{\left[D(k+1/2-\phi_-/\pi)\right]^\beta}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right)\right), \tag{4.11}$$

где $C(J), D$ определяются формулой (2.20).

Чтобы оценить полуширину отрезка, положим $\varepsilon = \hat{\varepsilon}_k + \Delta\varepsilon_k$ и разложим выражения для концов отрезка (4.9) по ε в точке $\hat{\varepsilon}_k$, тогда условия на $\Delta\hat{\varepsilon}_k$ будут иметь вид:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta\hat{\varepsilon}_k \le -\dfrac{(1-\sigma+\nu)\pi\ln^{-7/2}(\hat{\varepsilon}_k^{-1})\hat{\varepsilon}_k^{(3\nu-2\sigma)/4}}{(\sigma-\nu)^3|\varphi'(\hat{\tau})|^{-1}J_0\hat{\varepsilon}_k^{\nu-\sigma-1}(3\ln 2+1-\ln J_0+\nu\ln\hat{\varepsilon}_k^{-1})} \\ \Delta\hat{\varepsilon}_k \ge \dfrac{(1-\sigma+\nu)\pi\ln^{-7/2}(\hat{\varepsilon}_k^{-1})\hat{\varepsilon}_k^{(3\nu-2\sigma)/4}}{(\sigma-\nu)^3|\varphi'(\hat{\tau})|^{-1}J_0\hat{\varepsilon}_k^{\nu-\sigma-1}(3\ln 2+1-\ln J_0+\nu\ln\hat{\varepsilon}_k^{-1})}. \end{array}\right. \tag{4.12}$$

Заметим, что

$$\Delta\hat{\varepsilon}_k = O\left(\ln^{-\frac{3}{2}}(\varepsilon_k^{-1})\varepsilon_k^{1+\frac{\sigma}{4}+\frac{(\sigma-\nu)}{4}}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta\hat{\varepsilon}_k}{\hat{\varepsilon}_k} = O\left(\ln^{-\frac{3}{2}}(\hat{\varepsilon}_k^{-1})\hat{\varepsilon}_k^{\frac{\sigma}{4}+\frac{(\sigma-\nu)}{4}}\right) = O\left((\ln k)^{-\frac{5}{4}+\frac{\sigma}{4(\sigma-\nu)}}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{\sigma}{4(\sigma-\nu)}}\right).$$

Повторяя вычисления, проведенные для множества $\mathcal{E}_1(J_0)$ (см. стр. 15-16), можно показать, что

$$\hat{\varepsilon}_k - \hat{\varepsilon}_{k+1} = O\left(\frac{\ln^\beta k}{k^{\beta+1}}\right),$$

где $\beta = (\sigma-\eta)^{-1}$.

Таким образом,

$$\frac{\hat{\varepsilon}_{k+1}-\hat{\varepsilon}_k}{\hat{\varepsilon}_k} = O(k^{-1}),$$

и мы приходим к следующей оценке

$$\frac{\hat{\varepsilon}_k - \hat{\varepsilon}_{k+1}}{\Delta\hat{\varepsilon}_k} = O\left((\ln k)^{\frac{5}{4}-\frac{\sigma}{4(\sigma-\nu)}}k^{\frac{3\nu-2\sigma}{4(\sigma-\nu)}}\right). \tag{4.13}$$

Из формулы (4.13) следует, что при условии $3\nu > 2\sigma$ отрезки $[\varepsilon_k - \Delta\varepsilon_k; \varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k]$ имеют малую меру, по сравнению с $[\varepsilon_{k+1}; \varepsilon_k]$.

Заметим также, что точно такое же условие было введено при выводе асимптотик производных $m_{J_-}^{u,s}$.

Определим множество $\mathcal{E}_2(J_0)$

$$\mathcal{E}_2(J_0) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\hat{\varepsilon}_k - \frac{(1-\sigma+\nu)\pi\ln^{-7/2}(\hat{\varepsilon}_k^{-1})\hat{\varepsilon}_k^{(3\nu-2\sigma)/4}}{(\sigma-\nu)^3|\varphi'(\hat{\tau})|^{-1}J_0\hat{\varepsilon}_k^{\nu-\sigma-1}(3\ln 2+1-\ln J_0+\nu\ln\hat{\varepsilon}_k^{-1})};\right.$$
$$\left.\hat{\varepsilon}_k + \frac{(1-\sigma+\nu)\pi\ln^{-7/2}(\hat{\varepsilon}_k^{-1})\hat{\varepsilon}_k^{(3\nu-2\sigma)/4}}{(\sigma-\nu)^3|\varphi'(\hat{\tau})|^{-1}J_0\hat{\varepsilon}_k^{\nu-\sigma-1}(3\ln 2+1-\ln J_0+\nu\ln\hat{\varepsilon}_k^{-1})}\right],$$

где $\hat{\varepsilon}_k$ является решением (4.10) и удовлетворяет (4.11).

Тогда справедливо следующее предложение.

1448

Предложение 4.1. *Пусть* $\tau_1, \tau_2, J_0, \nu, \sigma, \kappa, \delta^u, \delta^s, \varepsilon$ *удовлетворяют условиям Предложения 3.1, а* $(x_h(\tau), p_h(\tau))$ *— вращающееся гомоклиническое решение с параметрами* $(\tau_1, \tau_2, \delta^u, \delta^s)$*, существование которого следует из Предложения 3.1. Если дополнительно параметры* σ, ν *удовлетворяют условию*

$$3\nu > 2\sigma,$$

а $\varepsilon \in \mathcal{E} = \mathcal{E}_h \setminus (\mathcal{E}_1(J_0) \cup \mathcal{E}_2(J_0))$*, то вращающееся гомоклиническое решение* $(x_h(\tau), p_h(\tau))$ *трансверсально.*

Заключение

В представленной работе исследуется гамильтонова система с периодическим гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 - \varphi(\varepsilon t)x^2 + x^4\right),$$

медленно меняющимся со временем. Наличие простых нулей функции φ приводит к тому, что система проходит через каскад бифуркаций типа "вилка", при которой из одного устойчивого положения равновесия рождается два устойчивых и одно неустойчивое положения равновесия.

С помощью ВКБ-метода было показано, что последовательность бифуркаций приводит к тому, что положение равновесия $(x, p) = (0, 0)$ является преимущественно гиперболическим. В частности, показано, что оно является гиперболическим для всех значений параметра ε, за исключением множества экспоненциально малой меры.

Кроме того, с помощью ряда асимптотических методов получены асимптотики решений задачи Коши для системы (0.2) в областях различного типа: в области без сепаратрисы "замороженной" системы, в окрестности точек бифуркации и в области, содержащей сепаратрису "замороженной" системы.

Основным результатом работы является доказательство предложений 3.1 и 4.1 о существовании трансверсальных вращающихся гомоклинических решений системы (0.2).

1449

Список литературы

[1] Итс А.Р., Капаев А.А. Метод изомонодромных деформаций и формулы связи для второго трансцендента Пенлеве. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1987. — Том 51, вып. 4 — С. 878–892.

[2] Зелёный Л.М., Нейштадт А.И. и др. Квазиадиабатическое описание динамики заряженных частиц в космической плазме. — Успехи физических наук, 2013. — Том 183, №4. — С. 365-415.

[3] Пантелеева П.Ю., Дипломная работа "Двояко-асимптотические траектории адиабатически возмущенных систем с бифуркацией типа "вилка", СПбГУ, 2019.

[4] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.

[5] Coppel W.A., Dichotomies in Stability Theory, Lecture Notes in Math., vol. 629, New York: Springer, 1978.

[6] Dobrokhotov, S.Y., Minenkov, D.S. On various averaging methods for a nonlinear oscillator with slow time-dependent potential and a nonconservative perturbation. Regul.& Chaot. Dyn. 15, 285–299 (2010).

[7] Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations / J. Differential Equations, V.31, 1979, pp.53-98.

[8] Ivanov A.V.,Connecting orbits near the adiabatic limit of Lagrangian systems with turning points., Reg. & Chaotic Dyn., vol. 22, No. 5, 2017, pp. 479 - 501.

[9] Maree G.J.M. Slow passage through a pitchfork bifurcation. / SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 56, No. 3 (Jun., 1996), pp. 889-918

[10] Neishtadt, A.I., The Separation of Motions in Systems with Rapidly Rotating Phase, Prikl. Mat. Mekh., 1984, vol. 48, no. 2, pp. 197–205 [J. Appl. Math. Mech., 1984, vol. 48, no. 2, 133–139].

[11] Vainstein D.L., Zelenyi L.M., Neishtadt A.I., Savenkov B. V. Jumps in an Adiabatic Invariant with Small Initial Values / Plasma Physics Reports, V. 25, No. 4, 1999, pp. 299–303.

1450

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Прудникова Павла Сергеевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в представленной мною на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Speed of convergence of Chernoff approximations» являются: Теоремы 5–6, 11, 13–14; Предложения 7–8, 12; Рисунки 1–24.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 февраля 2020 г. по 01 апреля 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org, Research Gate по следующим ключевым словам: скорость сходимости в теореме Чернова, convergence speed of Chernoff approximations, оценка скорости сходимости аппроксимаций Чернова, convergence rates for operator semigroups, convergence of the Chernoff formula, rapidly converging Chernoff approximations. В выдаче поисковиков было исследовано 24 статьи, 1 тезис докладов, 3 монографии, 3 препринтов, 1 диссертация (список см. References к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [7], [10-12], [25] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Ремизовым Иваном Дмитриевичем, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального исследовательского университета Высшей школы экономики.
- Проведена серия консультаций с Галкиным Олегом Евгеньевичем, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального исследовательского университета Высшей школы экономики.
- Проведены выступления (16.03.2020, 13.05.2020, 27.05.2020, 24.08.2020, 10.03.2021) на семинаре научно-учебной группы «Эволюционные уравнения и операторные полугруппы» Национального исследовательского университета Высшей школы экономики (руководитель семинара: старший научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений Ремизов Иван Дмитриевич).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в

результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоится 16.06.2021. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  / Прудников Павел Сергеевич
29 мая 2021 г. Нижний Новгород, Россия

FEDERAL STATE EDUCATIONAL INSTITUTION
HIGHER PROFESSIONAL EDUCATIONAL
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
Faculty of Mathematics, Informatics and Computer Science

Prudnikov Pavel

SPEED OF CONVERGENCE OF CHERNOFF APPROXIMATIONS

Master's Thesis
Field of study: 01.04.01 Mathematics
Master's Programme "Mathematics"

Reviewer
Ph. D., Assistant Prof.
Moscow Institute of Physics and Technology
B. O. Volkov

Scientific supervisor
Ph. D., Associate Prof.
I. D. Remizov

Nizhny Novgorod 2021

1453

Contents

1 Introduction **2**

2 Preliminaries **3**
2.1 C_0-semigroups and Chernoff's theorem 3
2.2 Conjectures on convergence speed for Chernoff approximations 5

3 Exact formulae and estimates for convergence speed **6**
3.1 Transport equation 6
3.2 Heat equation 9

4 Numerical experiments on model examples **14**
4.1 Transport equation 14
4.2 Heat equation 21

1454

1 Introduction

The Chernoff theorem [3] is an effective tool of functional analysis which allows to construct approximations to C_0-semigroups that, in turn, provide solutions to some evolution equations (e.g., heat equation, parabolic equation with variable coefficients, Schrödinger equation, etc.); standard textbooks on the topic are [5, 13, 8]. If one finds so-called operator-valued Chernoff function then Chernoff's theorem generates a sequence of functions, also referred to as Chernoff approximations, that converges to the solution of a Cauchy problem for the evolution equation. In many cases constructing Chernoff function is the only method that allows to express the solution in terms of both variable coefficients of the equation and the chosen initial condition.

At the time the subject area has a decent amount of data on different methods to construct Chernoff functions. For instance, the members of Smolyanov's group implemented the use of integral operators to find the solutions to parabolic equations in a plethora of cases during the last 15 years (refer to pioneering papers [23, 22], overview [24, 2] and some other results [21, 4, 26, 17, 16]). The solutions obtained in the above mentioned studies were represented in the form of Feynman formula, i.e., as a limit of multiple integral when multiplicity goes to infinity. In turn, Schrödinger equation also belongs to the class of evolution equations, and the use of the same technique allows to represent the solution in the form of Feynman and quasi-Feynman integral formulas as well, see [20, 14, 15, 18, 9].

When dealing with expressions provided by the Chernoff theorem, one might be interested in obtaining the estimate for the rate of decay of approximation error as n tends to infinity. Some results regarding this topic were already proposed for the case of Schrödinger equation in [12]. Similarly, the question of convergence speed arises for the Trotter product formula $e^{A+B} = \lim_{n\to\infty}(e^{A/n}e^{B/n})^n$ which we do not exploit in current paper but which is a particular exemplar of Chernoff's theorem for $G(t) = e^{tA}e^{tB}$ (see recent papers [10, 11, 27]). In a less specific setting, other than within the framework of Chernoff's theorem, one may refer to the results presented in [6, 1, 7].

Nevertheless, this area is not well studied at the present time in general. Starting from [25] members of I.D. Remizov's group examine the problem systematically. So, this paper is dedicated to the analysis of the convergence speed for some set of initial conditions and Chernoff functions. We suggest few analytic and computational methods in order to obtain the information on the order of approximation subspaces to which the examined model examples belong to as well as demonstrate the dependence of the order of the approximation on the choice of the initial condition. It is also shown on the model example that if the initial condition does not belong to the domain of the generator of the corresponding C_0-semigroup then the convergence speed can be slower than the one attained on the functions from the domain.

Conducting this study implies the use of basic methods of infinite-dimensional functional analysis and operator semigroups, as well as the use of Matlab software under student license in order to perform numerical experiments and visualise the results.

2 Preliminaries

2.1 C_0-semigroups and Chernoff's theorem

This section is solely dedicated to the introduction of basic concepts that will be used throughout the rest of the paper. During the paper we will work with the system of equations given by

Definition 1. Let X be an infinite set, and $\mathcal{F}$ be a Banach space of all number-valued functions on X. Moreover, assume having $\mathrm{dom}(L) \subset \mathcal{F}$ and a closed linear operator $L\colon \mathrm{dom}(L) \to \mathcal{F}$. Then the system of equations

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

where $x \in X$, $u_0 \in \mathcal{F}$, and $u(t,\cdot) \in \mathcal{F}$ for all $t \geq 0$, is called a Cauchy problem for the evolution equation.

Remark. In case of existence of the C_0-semigroup $(G(t))_{t\geq 0}$ with the generator $(L, \mathrm{dom}(L))$ the solution of (1) exists and is given by the equality $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$ for all $t \geq 0$ and $x \in X$.

Definition 2. If $u_0 \in \mathrm{dom}(L)$ then $u(t,\cdot) \in \mathrm{dom}(L)$ for all $t \geq 0$ and u is called a classical solution.

Remark. For an arbitrary $u_0 \in \mathcal{F}$ the solution of (1) exists only as a solution of the corresponding integral equation $u(t,\cdot) = L\int_0^t u(s,\cdot)ds + u_0$.

After defining a Cauchy problem, it appears necessary to provide a common definition of a C_0-semigroup [5].

Definition 3. Let $\mathcal{F}$ be a Banach space, and $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ be a space of all linear bounded operators in $\mathcal{F}$. Let a mapping $V\colon [0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$ also be given, i.e., for a fixed $t \geq 0$ we have $V(t)$ being a linear bounded operator. Then V is called a C_0-semigroup, or the same as strongly continuous one-parametric semigroup of linear bounded operators, if the following conditions hold:

1. $V(0) = I$, i.e., for all $\varphi \in \mathcal{F}$ we have $V(0)\varphi = \varphi$;
2. under the action of V the addition in $[0,+\infty)$ is mapped to the composition in $\mathscr{L}(\mathcal{F})$, i.e., for all $t, s \geq 0$ we have $V(t+s) = V(t) \circ V(s)$, where $\circ$ denotes the composition of operators such that $(A \circ B)(\varphi) = A(B(\varphi))$ for all $\varphi \in \mathcal{F}$;
3. V is continuous in $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ endowed with the strong operator topology, i.e., for all $\varphi \in \mathcal{F}$ a mapping $t \mapsto V(t)\varphi$ is continuous on $[0,+\infty)$.

The concept of a C_0-semigroup is closely related to the notion of its generator [5]. So, we propose the following

Definition 4. Let $(V(t))_{t\geq 0}$ be a C_0-semigroup on a Banach space $\mathcal{F}$. Then the linear operator L defined as

$$L\varphi = \lim_{t\to+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \tag{2}$$

on a linear subspace

$$\mathrm{dom}(L) = \left\{ \varphi \in \mathcal{F} \mid \exists \lim_{t\to+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \subset \mathcal{F} \tag{3}$$

is called an infinitesimal generator of a C_0-semigroup $(V(t))_{t\geq 0}$. We also say that operator $L\colon \mathrm{dom}(L) \to \mathcal{F}$ generates a C_0-semigroup and denote $V(t) = e^{tL}$.

1456

Definition 5. Let $\mathrm{dom}(L) \subset \mathcal{F}$, and $L\colon\ \mathrm{dom}(L) \to \mathcal{F}$ be a linear operator. Then L is called

- *closed* if its graph $\Gamma_L = \{(x, Lx) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid x \in \mathrm{dom}(L)\}$ is a closed subset in space $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ endowed with the norm $\|\cdot\|_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}}$ given by $\|(x, y)\|_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} = \|x\|_{\mathcal{F}} + \|y\|_{\mathcal{F}}$ for all $x, y \in \mathcal{F}$;
- *closable* (or admitting closure) if the closure of its graph $\overline{\Gamma_L}$ in space $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ with the norm $\|\cdot\|_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}}$ is a graph of some operator $(\overline{L}, \mathrm{dom}(\overline{L}))$, meaning $\Gamma_{\overline{L}} = \overline{\Gamma_L}$.

Remark. If operator $\overline{L}$ exists then it is a linear closed operator extending operator L, i.e., $\mathrm{dom}(L) \subset \mathrm{dom}(\overline{L})$, and $L|_{\mathrm{dom}(L)} = \overline{L}|_{\mathrm{dom}(L)}$.

The next set of definitions is provided in the wording of I.D. Remizov [19].

Definition 6. Let $\mathcal{F}$ be a Banach space, and $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ be a space of all linear bounded operators in $\mathcal{F}$. Let a mapping $G\colon [0, +\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, or the same as a family of linear bounded operators $(G(t))_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$, also be given. Moreover, assume $\mathrm{dom}(L)$ is dense in $\mathcal{F}$ and a linear operator $L\colon\ \mathrm{dom}(L) \to \mathcal{F}$ is closed. Then function G is called *Chernoff tangent* to operator L if the following conditions are satisfied:

(CT1). function G is strongly continuous, or the same as continuous in $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ endowed with the strong operator topology, i.e., the mapping $t \mapsto G(t)f$ is continuous on $[0, +\infty)$ for all $f \in \mathcal{F}$;

(CT2). $G(0) = I$, i.e., for all $f \in \mathcal{F}$ we have $G(0)f = f$;

(CT3). there exists a dense linear subspace $D \subset \mathcal{F}$ such that for all $f \in D$ we have

$$\lim_{t\to+0}(G(t)\varphi - \varphi)/t \stackrel{denote}{=} G'(0)f \in \mathcal{F};$$

(CT4). the closure of operator $(G'(0), D)$ exists and is equal to $(L, \mathrm{dom}(L))$.

Remark. Conditions (CT3) and (CT4) together mean that there exists a core D for L.

Classical wording of the next theorem can be found in [3, 5]. Based on the notion of Chernoff tangency we provide

Theorem 1 (The Chernoff theorem)**.** Let $\mathcal{F}$ be a Banach space, and $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ be a space of all linear bounded operators in $\mathcal{F}$. Let a mapping $G\colon [0, +\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, or the same as a family of linear bounded operators $(G(t))_{t\geq 0}$ in $\mathcal{F}$, also be given. Moreover, assume having a closed linear operator $L\colon\ \mathrm{dom}(L) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Suppose that the following conditions are met:

(E). there exists a C_0-semigroup $(e^{tL})_{t\geq 0}$ with generator $(L, \mathrm{dom}(L))$;

(CT). function G is Chernoff tangent to operator L;

(N). there exists number $\omega \in \mathbb{R}$ such that $\|G(t)\| \leq e^{\omega t}$ for all $t \geq 0$.

Then for each $f \in \mathcal{F}$ we have $(G(t/n))^n f \xrightarrow{n\to\infty} e^{tL}f$ uniformly in $t \in [0, T]$ for any fixed $T \geq 0$, i.e., for each $f \in \mathcal{F}$ and each $T \geq 0$ we get

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f \right\| = 0. \tag{4}$$

Definition 7. If the above conditions hold then G is called a Chernoff function for L.

1457

2.2 Conjectures on convergence speed for Chernoff approximations

During the analysis of the rate of convergence both for the transport and heat equations, our aim is to check the validity of the following conjectures for several model examples of initial conditions.

Conjecture 1 (I. Remizov, 2018)**.** Let $(e^{tL})_{t\geq 0}$ be a C_0-semigroup in a Banach space $\mathcal{F}$ with generator $(L, \mathrm{dom}(L))$, and G be a Chernoff function for operator L. Moreover, assume $t_0 \geq 0$ and $f \in \mathcal{F}$ are given, and suppose that for all $t \in [0, t_0]$ we have $f \in \mathrm{dom}(G'(t)) \cap \mathrm{dom}(G''(t))$ and functions $t \mapsto G'(t)f$ and $t \mapsto G''(t)f$ are continuous. Then there exists a number $C \geq 0$ such that for all $t \in [0, t_0)$ and all $n \in \mathbb{N}$ the estimate $\left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f \right\| \leq \frac{C}{n}$ holds.

Conjecture 2 (I. Remizov, 2018)**.** Let $(e^{tL})_{t\geq 0}$ be a C_0-semigroup in a Banach space $\mathcal{F}$ with generator $(L, \mathrm{dom}(L))$, and G be a Chernoff function for operator L. Moreover, assume number $t_0 \geq 0$ and $f \in \mathcal{F}$ are given, and suppose that for all $t \in [0, t_0]$ we have function f being from the intersection of the domains of $G'(t)$, $G''(t)$, $G'''(t)$, $G''''(t)$, $G'(t)G''(t)$, $G'(t)^2G''(t)$, $G''(t)^2$, having that each of these operators is continuous for all $t \in [0, t_0]$. Then there exists a number $C \geq 0$ such that for all $t \in [0, t_0)$ and all $n \in \mathbb{N}$ the following inequality is valid:

$$\left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f + \frac{t^2}{2n} e^{tL}(L^2 - G''(0))f \right\| \leq \frac{C}{n^2}.$$

For the further convenience of the interpretation of numerical studies we provide the definition of an approximation subspace proposed in [25].

Definition 8. Let $\tau \subset [0, +\infty) = \mathbb{R}^+$, and map $\psi \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be such that $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$. Then the set $A^{\tau}_{\psi} = \{f \in \mathcal{F} \mid \sup_{t\in\tau} \left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f \right\| = O(\psi(n)) \text{ as } n \to \infty\}$ is called an approximation subspace of order ψ.

Remark. The approximation subspace A^{τ}_{ψ} is indeed a linear subspace of $\mathcal{F}$.

Hence, we now state the previous Conjecture 2 in the new wording in

Conjecture 3. Let $(e^{tL})_{t\geq 0}$ be a C_0-semigroup in a Banach space $\mathcal{F}$ with generator $(L, \mathrm{dom}(L))$, and G be a Chernoff function for operator L. More than that, assume number $t_0 \geq 0$ is given, and denote the intersection of the domains of $G'(t)$, $G''(t)$, $G'''(t)$, $G''''(t)$, $G'(t)G''(t)$, $G'(t)^2G''(t)$, $G''(t)^2$ for all $t \in [0, t_0]$ as $D(t_0)$. Assume that $D(t_0)$ is dense in $\mathcal{F}$ and each of these operators are continuous in t on all vectors from $D(t_0)$ for each $t \in [0, t_0]$. Then function G has a dense approximation subspace $A^{[0,t_0)}_{\zeta}$ of order $\zeta(n) = \frac{1}{n^2}$, and this subspace is a subset of $D(t_0)$.

Despite the fact that only fast converging approximations have a practical value for the research as a whole, it is worth mentioning that Chernoff functions can be likewise constructed in a way to provide an arbitrary slow convergence rate. This result is presented in the next

Proposition 2 (I. Remizov et al., 2019)**.** The convergence speed in the Chernoff theorem can be arbitrary slow. That is, if a function $w \colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ such that $\lim_{x\to+\infty} w(x) = 0$ is given then there exist such $X, \mathcal{F}, L, e^{tL}, G, f$ for which the equality $w(n/t) = O(\left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n f - e^{tL} f \right\|)$ holds for all $t \geq 0$ when $n \to \infty$.

1458

3 Exact formulae and estimates for convergence speed

During this section we will propose the results on the approximation speed for some model initial conditions and both one-dimensional transport and heat equations.

3.1 Transport equation

As a preliminary we will commence with the notion of the translation semigroup that gives the solution for one-dimensional transport equation. The examined system of equations is stated in

Definition 9. The system of equations defined as

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = u'_x(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{5}$$

where $x \in \mathbb{R}$, $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$ for all $t \geq 0$, is called a Cauchy problem for the first order partial differential equation on the real line, also referred to as the transport equation.

Remark. The solution of the system (5) and, hence, the corresponding C_0-semigroup is given by the formula $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = u_0(x+t)$. This C_0-semigroup is called the translation semigroup.

First, let us verify that the generator of the translation semigroup is indeed the differentiation operator.

Theorem 3. Let $(G(t))_{t\geq 0}$ be the C_0-semigroup given by the formula $(G(t)f)(x) = f(x+t)$ for $f \in UC_b(\mathbb{R})$ and $t \geq 0$. Then its generator is differentiation operator $L = \frac{d}{dx}$, and its domain $\mathrm{dom}(L)$ is

$$UC_b^1(\mathbb{R}) \overset{denote}{=} \{f \in UC_b(\mathbb{R}) \mid f' \in UC_b(\mathbb{R})\}.$$

Proof. Using Definition 4 of the generator of a C_0-semigroup we get

$$\mathrm{dom}(L) = \left\{ f \in UC_b(\mathbb{R}) \mid \lim_{t\to+0} \left\| \frac{G(t)f - f}{t} - Lf \right\| = 0 \right\}, \tag{6}$$

where $\|\cdot\|$ denotes the standard supremum norm in $UC_b(\mathbb{R})$. Applying the definition of the C_0-semigroup, we obtain

$$\lim_{t\to+0} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x) \right| = 0. \tag{7}$$

Now, let us show that f' is uniformly continuous. Take a sequence $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ and $t_n \geq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then it follows that $\frac{f(x+t_n)-f(x)}{t_n} \xrightarrow{n\to\infty} f'(x)$ uniformly in $UC_b(\mathbb{R})$ norm for some $x \in \mathbb{R}$. Since functions given by the formula $\frac{f(x+t_n)-f(x)}{t_n}$ are uniformly continuous for all $n \in \mathbb{N}$, by Weierstrass theorem f' is also uniformly continuous.
Next, we will show that f' is bounded. By the definition of uniform continuity we have that

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N \; \forall x \in \mathbb{R} \implies \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+t_n) - f(x)}{t_n} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

So we get $|f'(x)| < \left| \frac{f(x+t_n)-f(x)}{t_n} \right| + \varepsilon$. Take $\varepsilon_0 = 1$ then f' is bounded.

1459

Finally, let us show that if $f' \in UC_b(\mathbb{R})$ then $\lim_{t\to-0}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-f'(x)\right|=0$. For all $t<0$ we have

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-f'(x)\right| &= \left|\frac{f(x-|t|)-f(x)}{-|t|}-f'(x)\right| \\ &= \left|\frac{f(x)-f(x-|t|)}{|t|}-f'(x)\right| \\ &\le \left|\frac{f((x-|t|)+|t|)-f(x-|t|)}{|t|}-f'(x-|t|)\right|+\left|f'(x-|t|)-f'(x)\right|.\end{aligned}$$

For small $|t|$ the former term is small due to (7), and the latter one due to f' being uniformly continuous. So, we get that

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=f'(x)=\lim_{t\to-0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}.$$

Hence, if the limit given by (6) exists, meaning $f\in\mathrm{dom}(L)$, then $f\in UC_b^1(\mathbb{R})$. On the other hand, if $f\in UC_b^1(\mathbb{R})$ then by mean value theorem

$$\left|\frac{f(x+t_n)-f(x)}{t_n}-f'(x)\right|=|f'(x+\theta)-f'(x)|<\varepsilon \text{ for } |t|<\delta \text{ and } 0<\theta<t_n,$$

i.e., $f\in\mathrm{dom}(L)$. So, we proved that L is generator of this semigroup and $\mathrm{dom}(L)=UC_b^1(\mathbb{R})$. □

Prior to the numerical studies we will find the composition degree of some Chernoff functions G for an arbitrary initial condition $u_0\in UC_b(\mathbb{R})$.

Proposition 4. Let G be the Chernoff function such that for all $f\in UC_b(\mathbb{R})$ we have

$$(G(t)f)(x)=f(x+t+at^{k+1}) \tag{8}$$

for some fixed $a,k>0$. Then its n-th composition degree is given by the formula

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x)=u_0\left(x+t+\frac{at^{k+1}}{n^k}\right). \tag{9}$$

Proof. By the definition of Chernoff function we get

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x)=u_0\left(x+n\left(\frac{t}{n}+a\left(\frac{t}{n}\right)^{k+1}\right)\right)=u_0\left(x+t+\frac{at^{k+1}}{n^k}\right)$$

for all $x\in\mathbb{R}$ and $t\ge 0$. □

Analysis of convergence speed for $u_0=[x\to\sin(x)]$

Now, let us check the convergence speed for $u_0=[x\mapsto\sin(x)]$ and Chernoff function (8), the prototype of which was proposed in [25]. The main result of this paragraph is presented in the following

1460

Theorem 5. Let $(e^{tL})_{t\geq 0}$ be the translation semigroup on the real line, and G be the Chernoff function (8) for some fixed $a, k > 0$. Then function $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ belongs to the approximation subspace of order $\frac{1}{n^k}$, and the error is given by the formula

$$\left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0 - e^{tL}u_0 \right\| = 2\left|\sin(at^{k+1}/2n^k)\right|.$$

Proof. Denote $\xi(n) = \left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0 - e^{tL}u_0 \right\|$ and $\tau = at^{k+1}/n^k$. Applying the definition of a supremum norm in $UC_b(\mathbb{R})$ and using (4), we get

$$\begin{aligned}
\xi(n) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin(x+t+\tau) - \sin(x+t)\right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(\sin(x)\cos(t+\tau) + \cos(x)\sin(t+\tau)) - (\sin(x)\cos(t) + \cos(x)\sin(t))\right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(\cos(t+\tau) - \cos(t))\sin(x) + (\sin(t+\tau) - \sin(t))\cos(x)\right|.
\end{aligned}$$

The above supremum can be found based on the following assumption: as sin and cos are bounded functions then the value of the supremum is reached in an extremum of the internal function. Let us now find an extreme point. We have that

$$(\cos(t+\tau) - \cos(t))\cos(x) - (\sin(t+\tau) - \sin(t))\sin(x) = 0,$$

and

$$\tan(x) = \frac{\cos(t+\tau) - \cos(t)}{\sin(t+\tau) - \sin(t)} = \frac{-2\sin(t+\tau)\sin(\tau)}{2\cos(t+\tau)\sin(\tau)} = \tan(-(t+\tau)),$$

thus meaning that the extremum is reached at the point $x = -(t+\tau)$ regardless of the period of tan. So, we get

$$\begin{aligned}
\xi(n) &= \left|(\sin(t+\tau) - \sin(t))\cos(t+\tau) - (\cos(t+\tau) - \cos(t))\sin(t+\tau)\right| \\
&= \left|2\cos(t+\tau)\cos(t+\tau)\sin(\tau) + 2\sin(t+\tau)\sin(t+\tau)\sin(\tau)\right| \\
&= 2\left|(\cos^2(t+\tau) + \sin^2(t+\tau))\sin(\tau)\right| \\
&= 2\left|\sin(\tau)\right|.
\end{aligned}$$

Now, using Taylor expansion $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + O(z^5)$ when $z \to 0$, we finally get

$$\left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0 - e^{tL}u_0 \right\| = 2\sin(\tau) = \frac{at^{k+1}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \text{ when } n \to \infty,$$

which proves that $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ belongs to an approximation subspace of order $\frac{1}{n^k}$. □

Analysis of slow converging approximations for $u_0 = [x \to \sin(x)]$

At last, we will generalize Theorem 5 for an arbitrary function $w\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Theorem 6. Let $(e^{tL})_{t\geq 0}$ be the translation semigroup on the real line, and G be the Chernoff function such that for all $f \in UC_b(\mathbb{R})$ we have

$$(G(t)f)(x) = f(x + t + t\cdot w(1/t)), \tag{10}$$

where $w\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that $\lim_{n\to\infty} w(n) = 0$. Then function $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ belongs to the approximation subspace of order w, and the error is given by the formula

$$\left\| \left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0 - e^{tL}u_0 \right\| = 2\left|\sin(t/2\cdot w(n/t))\right|.$$

1461

Proof. Similarly to Proposition 4 we first obtain n-th composition degree for Chernoff function G. We get

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x) = u_0\left(x + n\left(\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\cdot w(n/t)\right)\right) = u_0\left(x + t + w(n/t)t\right). \tag{11}$$

It now suffices to set $\tau = t \cdot w(n/t)$ and use the same technique as of Theorem 5. Hence, since $w(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, we have

$$\xi(n) = 2\left|\sin(t/2 \cdot w(n/t))\right| = \left|t \cdot w(n/t) + o\left(w^2(n)\right)\right| \text{ as } n \to \infty,$$

which proves that $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ belongs to an approximation subspace of order w. □

Later in Section 4 we will check the convergence speed attained for the slow converging Chernoff function G given by (10) with $w(t) = \frac{1}{t^\gamma}$ for different values of $0 < \gamma < 1$ applied to approximate the solution for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$.

3.2 Heat equation

The next differential equation we are going to analyse is the heat equation. Now, we will state the corresponding Cauchy problem and give an explicit formula for the solution in a form of a C_0-semigroup.

Definition 10. The system of equations defined the following way

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(t,x) = a^2 u''_{xx}(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{12}$$

where $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, and $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$ for all $t \geq 0$, is called a Cauchy problem for the heat equation on the real line with constant coefficient of thermal conductivity.

Remark. The solution of the system (12), and, hence, the corresponding C_0-semigroup, is given by the Poisson integral

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y)u_0(y)dy, \tag{13}$$

where

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right). \tag{14}$$

We will analyse the performance of approximations for the following three Chernoff functions:

$$\left(G(t)u_0\right)(x) = \frac{1}{4}u_0(x + 2a\sqrt{t}) + \frac{1}{4}u_0(x - 2a\sqrt{t}) + \frac{1}{2}u_0(x) \tag{15}$$

proposed by I. Remizov in [19],

$$(G(t)u_0)(x) = \frac{1}{6}u_0(x + a\sqrt{6t}) + \frac{1}{6}u_0(x - a\sqrt{6t}) + \frac{2}{3}u_0(x) \tag{16}$$

proposed by A. Vedenin in [25], and

$$(G(t)u_0)(x) = \frac{1}{30}u_0(x+a\sqrt{12t}) + \frac{1}{30}u_0(x-a\sqrt{12t}) + \frac{3}{10}u_0(x+a\sqrt{2t}) + \frac{3}{10}u_0(x-a\sqrt{2t}) + \frac{1}{3}u_0(x) \tag{17}$$

also proposed by A. Vedenin in oral communication to the author of the present paper in 2020. To simplify the complexity of computational algorithms one might need a general formula for the n-th composition degree for the above Chernoff functions. So we present the following

1462

Proposition 7. Let G be the Chernoff function given by (15) for all $f \in UC_b(\mathbb{R})$ and fixed $a > 0$. Then its n-th composition degree is given by the formula

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x) = \frac{1}{4^n}\sum_{p=-n}^{n} \alpha_{p,n} u_0(x + 2ap\sqrt{t/n}), \tag{18}$$

where for each $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \{-n, \ldots, n\}$ coefficients $\alpha_{p,n}$ are defined as

$$\alpha_{p,n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-|p|}{2}\right]} C_k^n C_{n-k}^{k+|p|} 2^{n-|p|-2k}.$$

Proof. Consider $G(t) = \frac{1}{4}(S_{2a\sqrt{t}} + S_{-2a\sqrt{t}} + 2I)$ for all $t > 0$, where I is an identity operator and S_τ is a shift operator given by $(S_\tau f)(x) = f(x + \tau)$ for some $\tau \in \mathbb{R}$. It then yields that

$$\begin{aligned} G(t)_{t/n}^n &= \frac{1}{4^n}(S_{2a\sqrt{t/n}} + S_{-2a\sqrt{t/n}} + 2I)^n \\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{0\le k+m\le n} S_{2a\sqrt{t/n}}^k S_{-2a\sqrt{t/n}}^m 2^{n-k-m}\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} \\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{0\le k+m\le n} S_{2a(k-m)\sqrt{t/n}} 2^{n-k-m}\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!}. \end{aligned}$$

Now, set $k - m = p$ with $-n \le p \le n$. We obtain

$$\begin{aligned} G(t)_{t/n}^n &= \frac{1}{4^n}\sum_{p=-n}^{n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-|p|}{2}\right]} C_n^k C_{n-k}^{k+|p|} 2^{n-|p|-2k} S_{2ap\sqrt{t/n}} \\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{p=-n}^{n} \alpha_{p,n} S_{2ap\sqrt{t/n}}, \end{aligned}$$

where $\alpha_{p,n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-|p|}{2}\right]} C_k^n C_{n-k}^{k+|p|} 2^{n-|p|-2k}$. □

Similarly, one may derive the next

Proposition 8. Let G be the Chernoff function given by (16) for all $f \in UC_b(\mathbb{R})$ and fixed $a > 0$. Then its n-th composition degree is given by the formula

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x) = \frac{1}{6^n}\sum_{p=-n}^{n} \beta_{p,n} u_0(x + ap\sqrt{6t/n}), \tag{19}$$

where for each $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \{-n, \ldots, n\}$ coefficients $\beta_{p,n}$ are defined as

$$\beta_{p,n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-|p|}{2}\right]} C_k^n C_{n-k}^{k+|p|} 4^{n-|p|-2k}.$$

1463

Analysis of convergence rate for the initial condition $u_0(x) = [x \to \sin(x)]$

Let us now find the solution of the above Cauchy problem (12) for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$.

Theorem 9. Suppose $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$. Then the solution of the system (12) with initial condition u_0 is given by the formula $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = e^{-a^2t}\sin(x)$.

Proof. Using (13) and substituting $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$, we get

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\sin(y)dy.$$

Now, let us apply the following identity $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. So, we obtain

$$u(t,x) = \frac{1}{2i}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\exp(iy)dy - \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\exp(-iy)dy\right).$$

The former integral now takes the form

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-(x+2a^2ti))^2 - (x+2a^2ti)^2 + x^2}{4a^2t}\right)dy &= \exp\left(-\frac{-(x+2a^2ti)^2+x^2}{4a^2t}\right)\\ &= \exp\left(ix - a^2t\right).\end{aligned}$$

Similarly, the latter integral is equal to $\exp(-ix - a^2t)$, i.e., the solution can now be expressed as

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = e^{-a^2t}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = e^{-a^2t}\sin(x). \tag{20}$$

So, we found the solution of the Cauchy problem given by (12) for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$. □

Prior to analysing the convergence rate for Chernoff function (15) and $u_0 = [x \to \sin(x)]$ let us compute its n-th composition degree.

Proposition 10. Let G be the Chernoff function given by (15) for all $f \in UC_b(\mathbb{R})$ and fixed $a > 0$. Then its n-th composition degree for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ has the form

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x) = \left(\cos\left(a\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\right)^{2n}\sin(x). \tag{21}$$

Proof. Substituting the initial condition into (15), we get

$$\begin{aligned}(G(t)u_0)(x) &= \frac{1}{4}\sin(x+2a\sqrt{t}) + \frac{1}{4}\sin(x-2a\sqrt{t}) + \frac{1}{2}\sin(x)\\ &= \left(\frac{1+\cos(2a\sqrt{t})}{2}\right)\sin(x)\\ &= \cos^2(a\sqrt{t})\sin(x).\end{aligned}$$

So, for all $t \geq 0$ operator $G(t)$ is a function multiplication operator, meaning its n-th composition degree has the following form

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x) = \left(\cos\left(a\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\right)^{2n} u_0(x) = \left(\cos\left(a\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\right)^{2n}\sin(x)$$

for all $t \geq 0$ and $x \in \mathbb{R}$. □

1464

Finally, let us find the convergence speed for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ and the above derived Chernoff function (21). The main result of this subsection is presented in the next

Theorem 11. Let $(e^{tL})_{t\geq 0}$ be the heat C_0-semigroup, and G be the Chernoff function given by (15) for all $f \in UC_b(\mathbb{R})$ and fixed $a > 0$. Then function $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ belongs to the approximation subspace of order $\frac{1}{n}$.

Proof. Applying the definition of a standard norm in $UC_b(\mathbb{R})$, we get

$$\begin{aligned}\left\|\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0 - e^{tL}u_0\right\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(\cos\left(a\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\right)^{2n}\sin(x) - e^{-a^2t}\sin(x)\right| \\ &= \left|\left(\cos\left(a\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\right)^{2n} - e^{-a^2t}\right| \sup_{x\in\mathbb{R}}|\sin(x)|\,.\end{aligned}$$

Now, let us exploit the following Taylor expansions:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + O(z^4),$$

and

$$\ln(1+z)^\alpha = z - \frac{z^2}{2!} + O(z^4),$$

and

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + O(z^3)$$

when $z \to 0$. So, we have

$$\begin{aligned}\left\|\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0 - e^{tL}u_0\right\| &= \left|e^{2n\ln\left(\cos\left(a\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\right)} - e^{-a^2t}\right| \\ &= \left|-\frac{a^4t^2}{6n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right|, \text{ when } n \to \infty.\end{aligned}$$

This proves that $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ belongs to the approximation subspace of order $\frac{1}{n}$. □

Similarly, applying the same technique as of Theorem 11 one may propose the next series of results containing the estimates of the convergence rate for Chernoff functions (16) and (17), starting with

Proposition 12. Let G be the Chernoff function given by (16) (respectively (17)) for all $f \in UC_b(\mathbb{R})$ and fixed $a > 0$. Then its n-th composition degree for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ is given by

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x) = \frac{1}{3^n}\left(2 + \cos\left(a\sqrt{\frac{6t}{n}}\right)\right)^n \sin(x) \tag{22}$$

respectively

$$\left(\left(G\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\right)(x) = \frac{1}{15^n}\left(5 + \cos\left(a\sqrt{\frac{12t}{n}}\right) + 9\cos\left(a\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right)^n \sin(x). \tag{23}$$

Theorem 13. Let $(e^{tL})_{t\geq 0}$ be the heat C_0-semigroup, and G be the Chernoff function given by (16) (respectively (17)) for all $f \in UC_b(\mathbb{R})$ and fixed $a > 0$. Then function $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ belongs to the approximation subspace of order $\frac{1}{n^2}$ and $\frac{1}{n^3}$ respectively.

1465

Finding the exact solution for the initial condition $u_0 = [x \to \exp(-|x|)]$

Here we will find the solution of the Cauchy problem given by (12) for $u_0 = [x \mapsto e^{-|x|}]$.

Theorem 14. Suppose $u_0 = [x \mapsto e^{-|x|}]$. Then the solution of the system (12) with initial condition u_0 and $a = 1$ is given by the formula

$$u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x) = e^{t-x}\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\right) + e^{t+x}\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right), \tag{24}$$

where

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-y^2}dy. \tag{25}$$

Proof. First, let us plug the formula giving the initial condition into the solution defined in (13) and (14). We have

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}u_0(y)dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}e^{-|y|}dy. \end{aligned}$$

Now, change the variables within the integral by denoting $x - y = 2z\sqrt{t}$. It then yields that $y = x - 2z\sqrt{t}$ and $dy = 2\sqrt{t}dz$. So,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}e^{-|x-2z\sqrt{t}|}2\sqrt{t}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-(z^2-2z\sqrt{t}+x)}dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-(z^2+2z\sqrt{t}-x)}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-(z-\sqrt{t})^2+t-x}dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-(z+\sqrt{t})^2+t+x}dz. \end{aligned}$$

Now, set $z - t = w$ and $z + t = w$ for the former respectively latter integral. Hence, we obtain

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{t-x}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}} e^{-w^2}dw + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{t+x}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-w^2}dw \\ &= e^{t-x}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-w^2}dw\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{t+x}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-w^2}dw \\ &= e^{t-x}\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\right) + e^{t+x}\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right). \end{aligned}$$

Besides, as $\operatorname{erfc}(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$, then for each $t > 0$ one has $u(t,x) \sim e^{t-x}$ as $x \to +\infty$ and, moreover, $u(t,x) \sim e^{t-|x|}$ as $x \to \infty$. □

As analysing the convergence speed for the obtained solution is technically a sophisticated task, we will present only the numerical estimates of the norm decay later on. Even though it is not a rigorous proof, it gives hope that one can obtain a formal reasoning.

1466

4 Numerical experiments on model examples

This chapter is devoted to the results of numerical experiments performed for the previously analysed initial conditions $u_0 = [x \to \sin(x)]$ and $u_0 = [x \to \exp(-|x|)$, and different Cauchy problems (5) and (10).

4.1 Transport equation

Convergence speed for $u_0 = [x \to \sin(x)]$

First, we will analyse the convergence speed for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$.

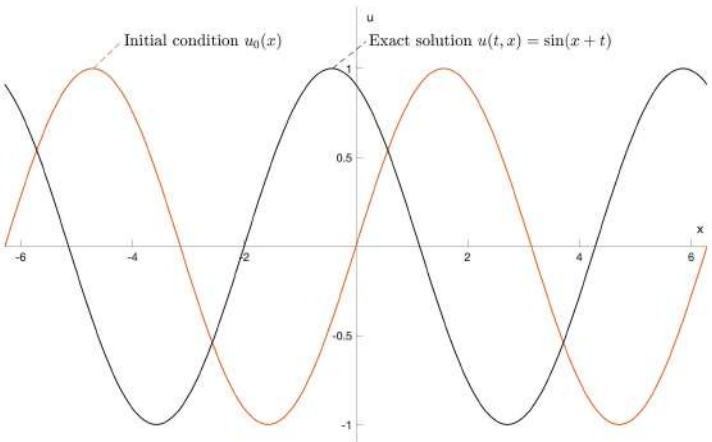


Figure 1: Graphs of initial condition and solution of the transport equation ($t = 2$)

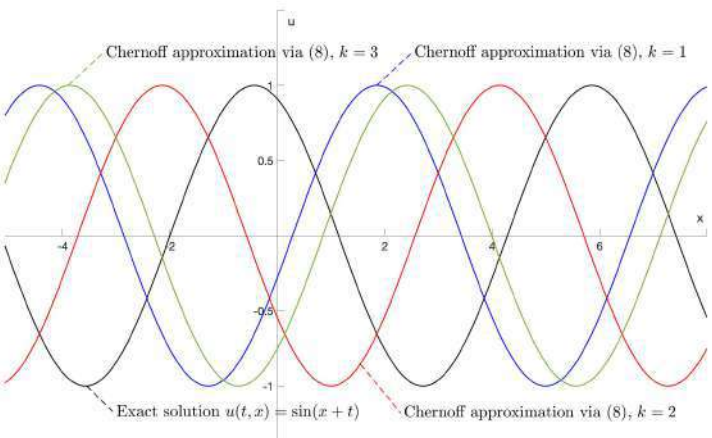


Figure 2: Graphs of approximations to the solution of the transport equation ($t = 2$, $n = 1$)

1467

As the initial condition as well as the Chernoff approximations have period equal to 2π, the uniform norm in $UC_b(\mathbb{R})$ is reached on the interval of this period. Note that the domain of the graphs presented below varies significantly and is chosen in favor of visual clarity.
So, Figure 1 containes the graphs of the initial condition and the corresponding solution for $t = 2$. Whereas, Figures 2 and 3 represent some examples of Chernoff approximations with $t = 2$ and composition degree $n = 1$ and $n = 5$ respectively.

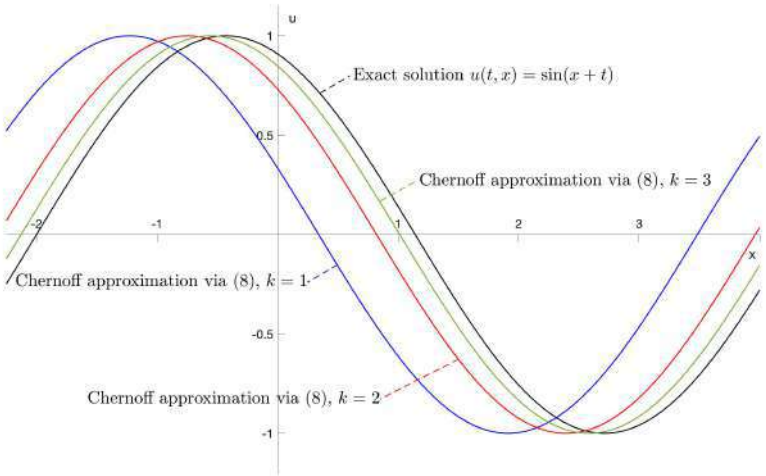


Figure 3: Graphs of approximations to the solution of the transport equation ($t = 2$, $n = 5$)

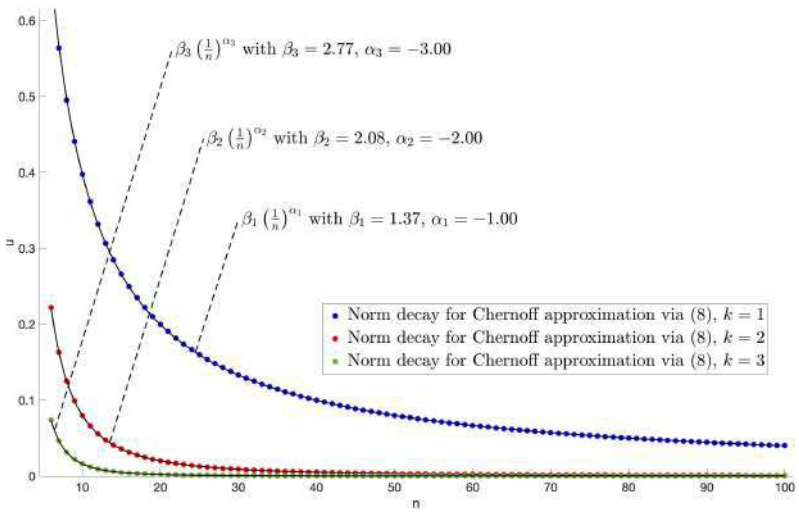


Figure 4: Graphs of estimates of the convergence speed ($t = 1$)

Figure 4 represents the graphs of convergence rate, i.e., the decay in the norm of the difference of the Chernoff approximations and the corresponding solution depending on the growth of composition degree.

1468

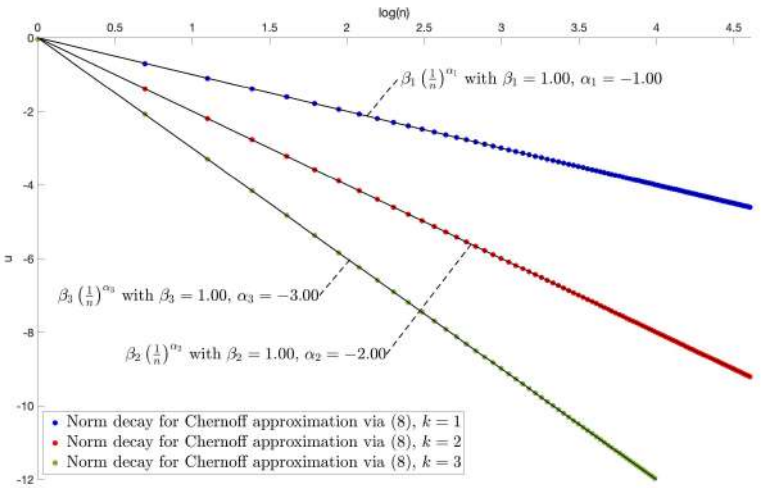


Figure 5: Graphs of estimates of the convergence speed in log-log scale ($t = 1$)

Apart from that, the above series of figures illustrates the results of a non-linear regression applied to analyse the order of approximation subspaces to which the examined initial condition belongs to. So, Figures 4 and 5 using both standard and log-log scale represent the convergence rate and the corresponding obtained regression results for Chernoff functions from Theorem 5.

Convergence speed for $u_0 = [x \to \exp(-|x|)]$

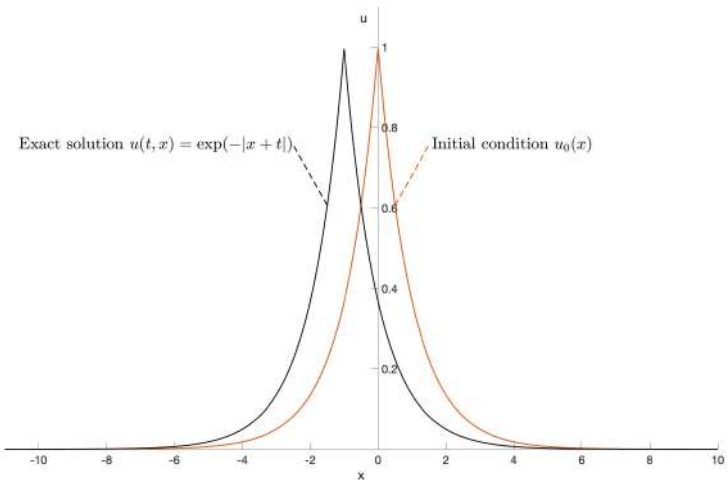


Figure 6: Graphs of initial condition and solution of the transport equation ($t = 1$)

Second, we will analyse the convergence rate for $u_0 = [x \mapsto e^{-|x|}]$. The graphs of the initial condition and examined solution for $t = 1$ are shown in Figure 6.

1469

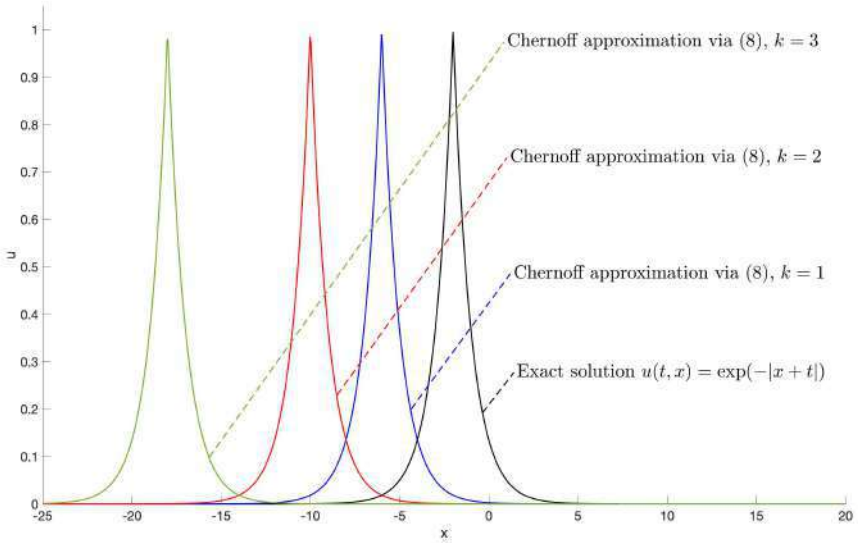


Figure 7: Graphs of approximations to the solution of the transport equation ($t = 2$, $n = 1$)

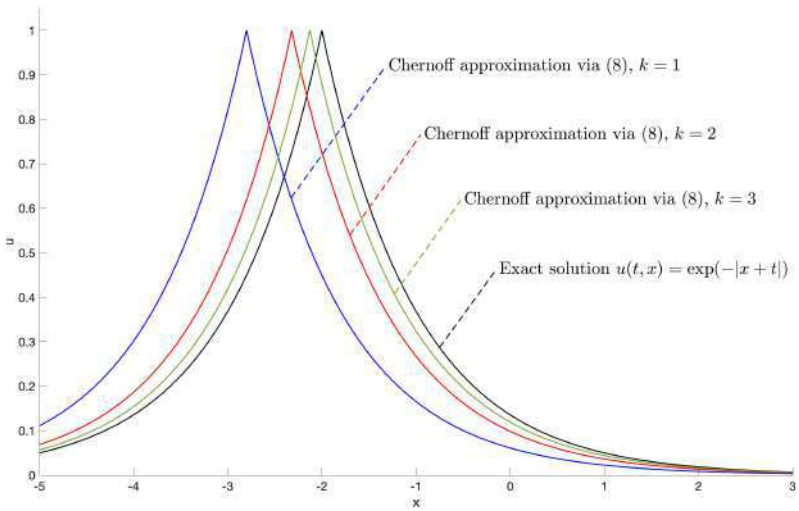


Figure 8: Graphs of approximations to the solution of the transport equation ($t = 2$, $n = 5$)

Figures 7 and 8 represent some model examples of Chernoff approximations based on the initial condition $u_0 = [x \mapsto e^{-|x|}]$ for $t = 2$ with composition degree $n = 1$ and $n = 5$ respectively.
As the initial condition and the Chernoff approximations are decaying outside of some segment, we assume that the value of the uniform norm of the difference is reached on the interval of correctly selected length (e.g., $[-5, 5]$). So, Figure 9 provides a graph of convergence rate, i.e., the decay of the norm of the difference depending on the growth of composition degree.

1470

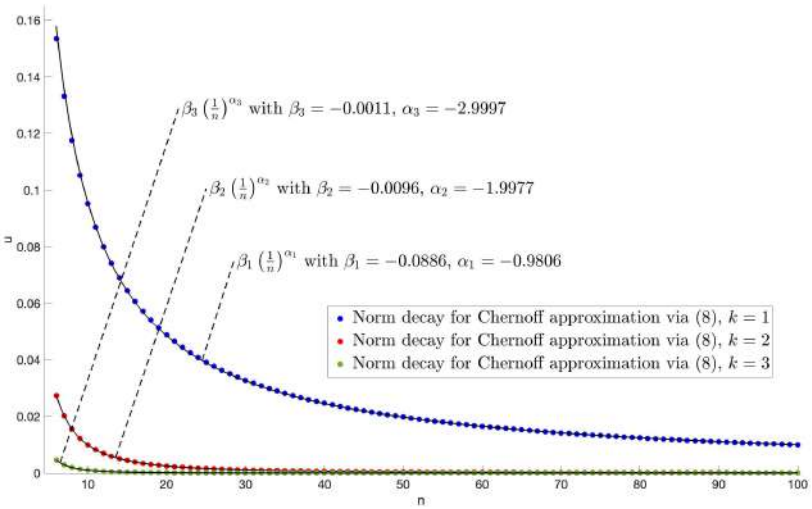


Figure 9: Graphs of estimates of the convergence speed ($t = 1$)

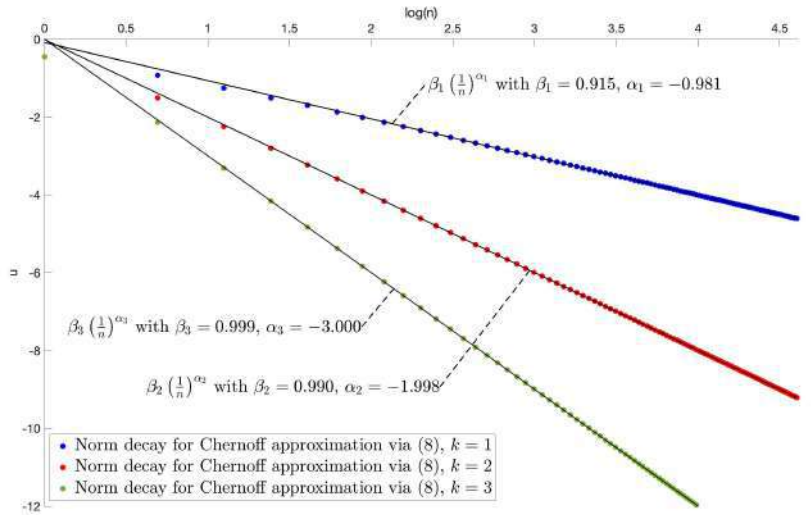


Figure 10: Graphs of estimates of the convergence speed in log-log scale ($t = 1$)

More than that, Figures 9 and 10, using both standard and log-log scale, illustrate the results of a non-linear regression applied to analyse the approximation subspaces to which the examined initial condition belongs to for Chernoff functions from Theorem 5.

Numerical demonstration of slow convergence for $u_0 = [x \to \sin(x)]$

Third, we will analyse the convergence rate for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ and Chernoff function G (10) given in Theorem 6 with $w(t) = \frac{1}{t^\gamma}$ for $\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, and $\gamma = \frac{1}{6}$.

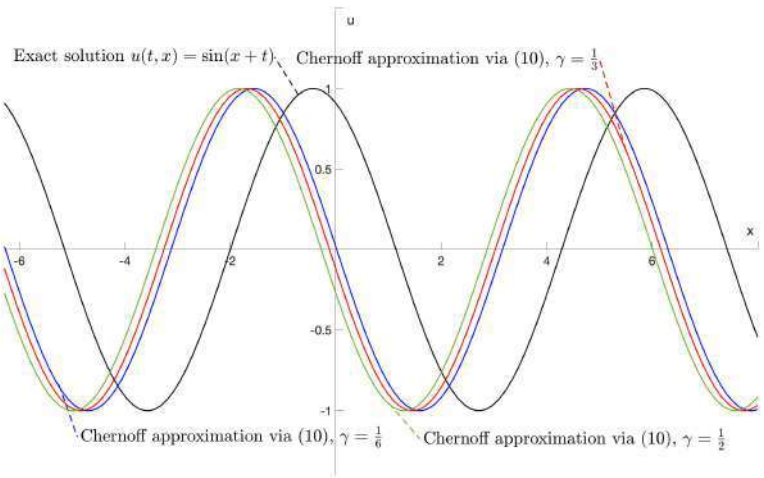


Figure 11: Graphs of approximations to the solution of the transport equation ($t = 2$, $n = 1$)

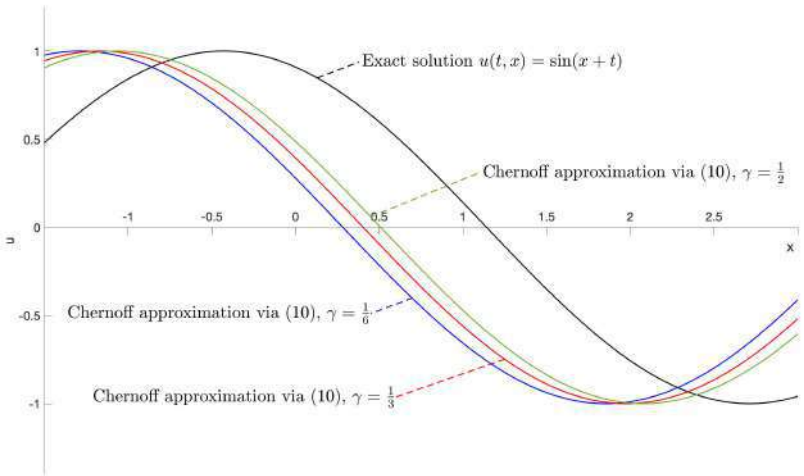


Figure 12: Graphs of approximations to the solution of the transport equation ($t = 2$, $n = 5$)

Figures 11 and 12 demonstrate some common examples of Chernoff approximations for the initial condition $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ and $t = 2$ with composition degree $n = 1$ and $n = 5$ respectively.
Here, we will again exploit the periodic nature of the solution and the Chernoff approximations and suggest that the uniform norm is reached on the properly selected interval. So, Figure 13 provides a graph of convergence rate when $t = 2$.
Apart from that, the below series of figures also illustrates the order of approximation subspaces to which the examined initial condition belongs to. Thus, Figures 13 and 14, using both standard and log-log scale, represent the convergence rate and the corresponding obtained regression results for Chernoff functions from Theorem 6 with $\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, and $\gamma = \frac{1}{6}$.

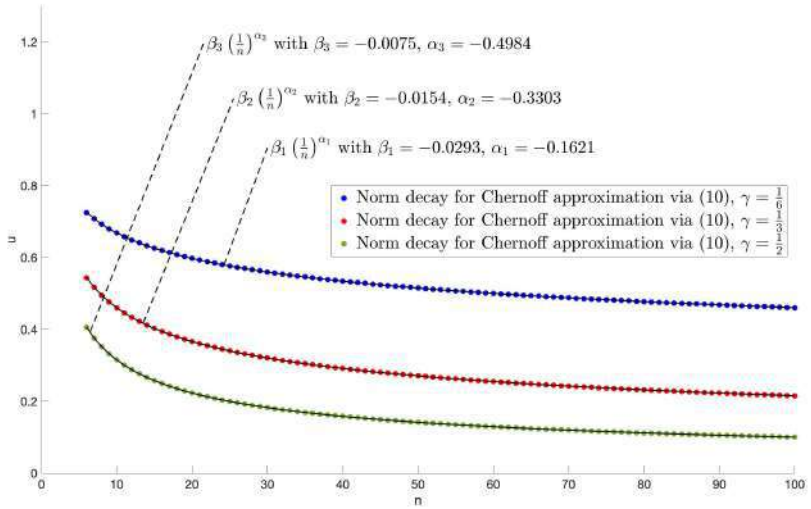


Figure 13: Graphs of estimates of the convergence speed ($t = 1$)

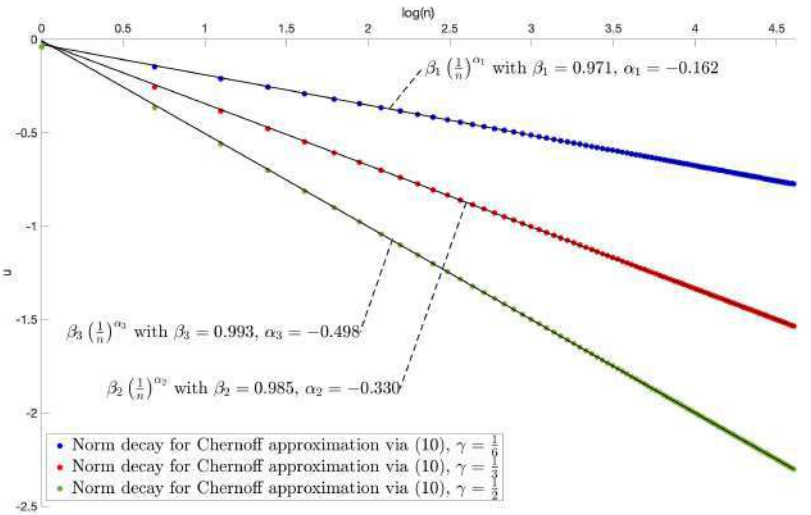


Figure 14: Graphs of estimates of the convergence speed with log-log scale ($t = 1$)

One can clearly notice that, independent of the considered initial value of the equation, all of the approximations performed as if the examined model function belonged to the domain of generator, i.e., even $u_0 = [x \to \exp(-|x|)] \notin UC_b^1(\mathbb{R})$ belongs to the higher order approximation subspaces. We will examine later in this chapter that for the heat equation this is not the case already.

1473

4.2 Heat equation

Convergence speed for $u_0 = [x \to \sin(x)]$

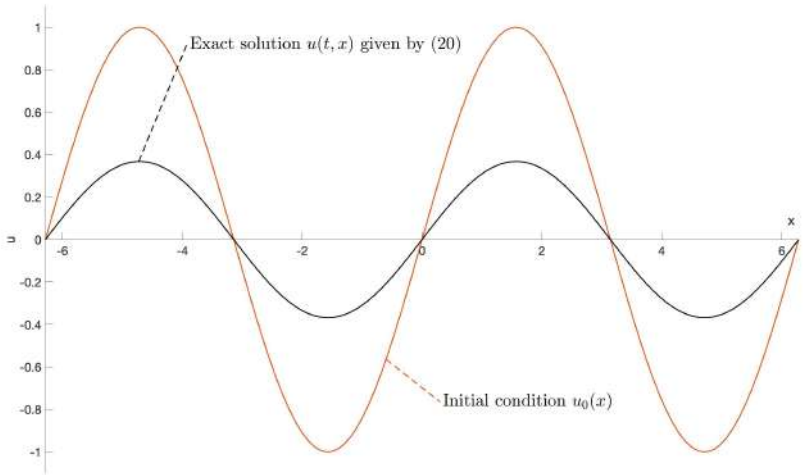


Figure 15: Graphs of initial condition and solution of the heat equation ($t = 1$)

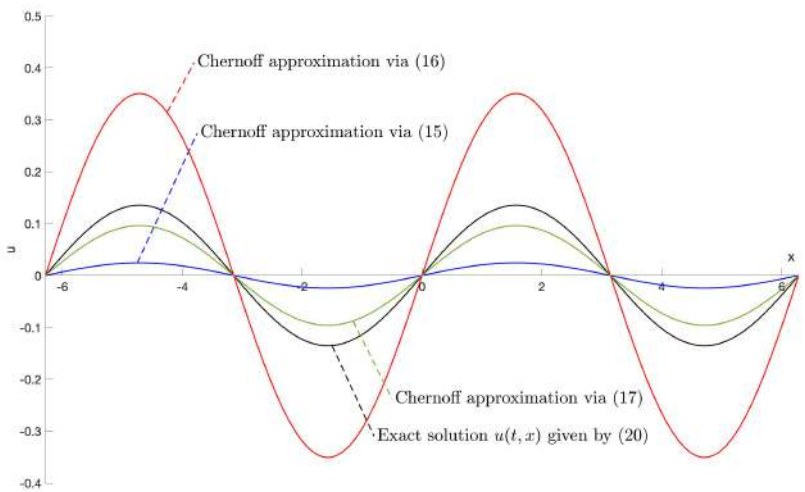


Figure 16: Graphs of approximations to the solution of the heat equation ($t = 2$, $n = 1$)

Here, we will analyse the convergence speed of Chernoff approximations defined by (15), (16), and (17) for $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ to the exact solution given by (20).
The graphs of the initial condition and investigated solution for $t = 1$ are shown in Figure 15.

1474

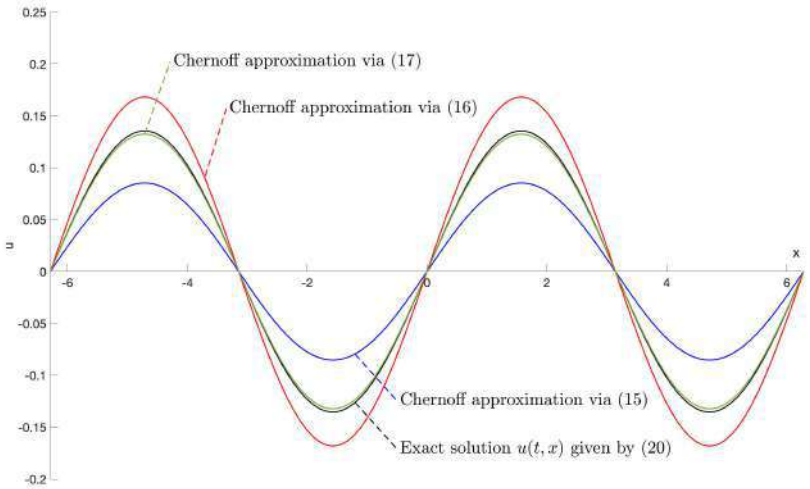


Figure 17: Graphs of approximations to the solution of the heat equation ($t = 2$, $n = 2$)

Whereas, Figures 16 and 17 represent some model examples of Chernoff approximations for the initial condition $u_0 = [x \mapsto \sin(x)]$ and $t = 2$ with composition degree $n = 1$ and $n = 2$ respectively. Exploiting one more time the periodic nature of the initial condition and the Chernoff approximations, we state that the uniform norm in $UC_b(\mathbb{R})$ is reached on the interval of the proper period, e.g., $[0, 2\pi]$.

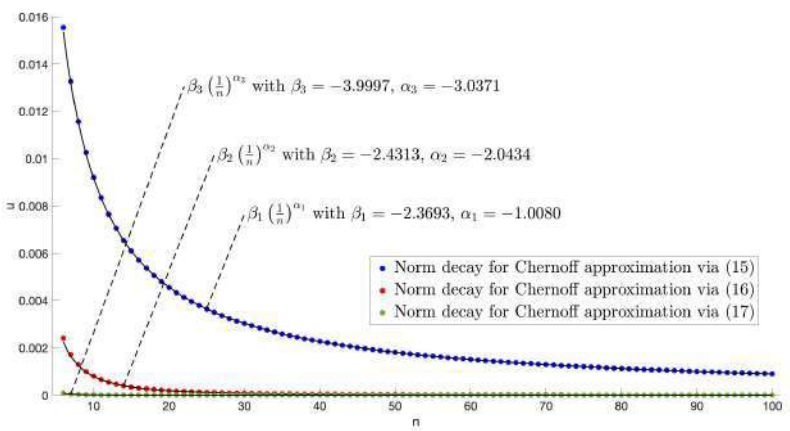


Figure 18: Graphs of estimates of the convergence speed ($t = 2$)

1475

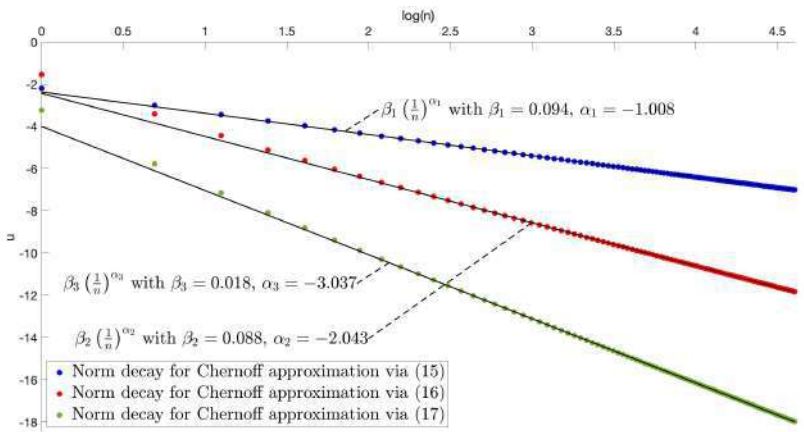


Figure 19: Graphs of estimates of the convergence speed with log-log scale ($t = 2$)

Figures 18 and 19, using both standard and logarithmic scale, represent the convergence rate and the corresponding obtained regression results for Chernoff functions from Theorem 11 and Proposition 13 for $t = 2$. Hence, one we can state that the results of numerical experiments confirmed the estimates obtained in Section 3.

Convergence speed for $u_0 = [x \to \exp(-|x|)]$

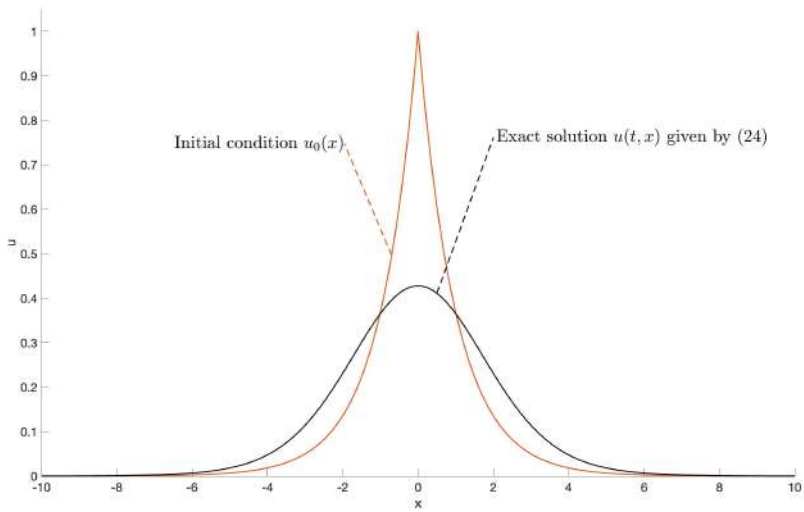


Figure 20: Graphs of initial condition and solution of the heat equation ($t = 1$)

Here, we will analyse the convergence rate for the initial condition $u_0 = [x \mapsto e^{-|x|}]$. The graphs of the initial condition and solution given by the C_0-semigroup for $t = 1$ are shown in Figure 20.

1476

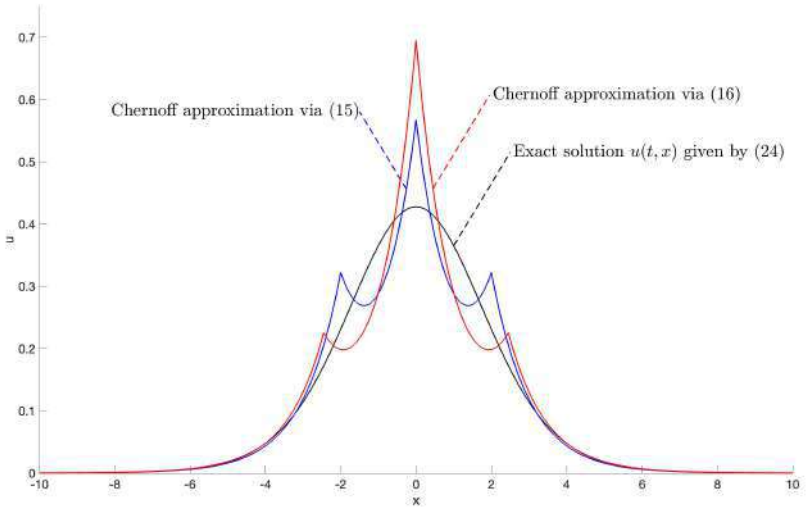


Figure 21: Graphs of approximations to the solution of the heat equation ($t = 1$, $n = 1$)

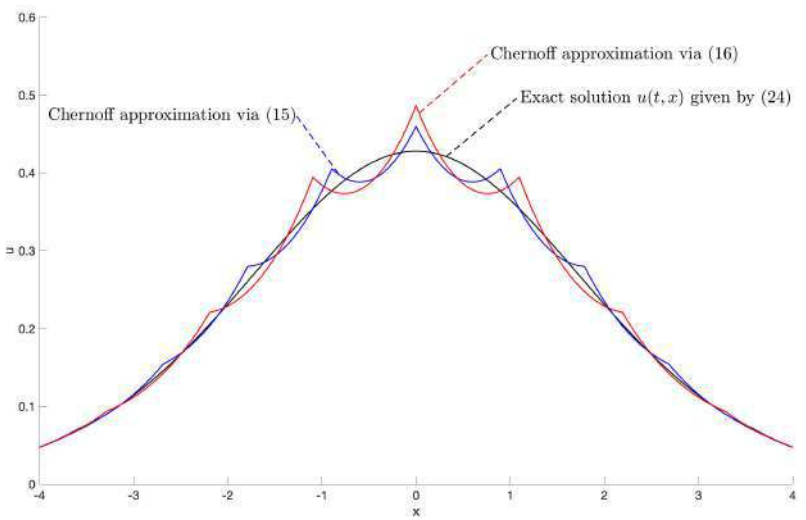


Figure 22: Graphs of approximations to the solution of the heat equation ($t = 1$, $n = 5$)

Figures 21 and 22 demonstrate two model examples of Chernoff approximations for the initial condition $u_0 = [x \mapsto e^{-|x|}]$ and $t = 1$ with composition degree $n = 1$ and $n = 5$ respectively.

1477

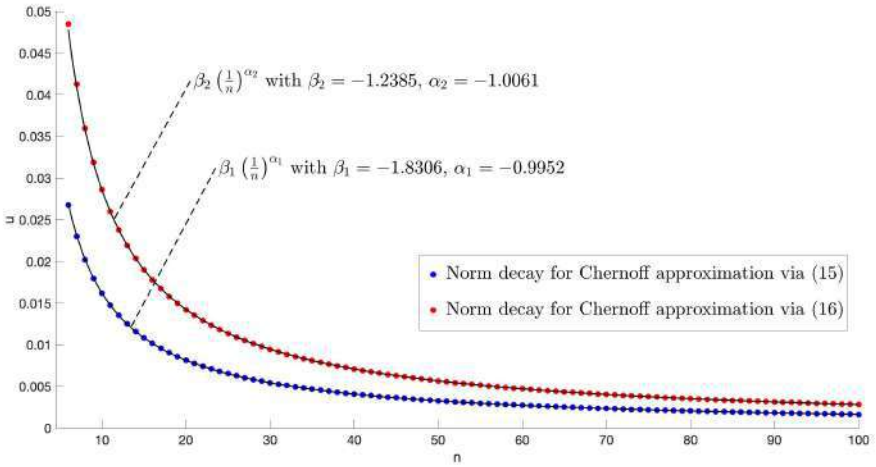


Figure 23: Graphs of estimates of the convergence speed ($t = 1$)

Let us once again refer to the decaying property of the initial condition and the Chernoff approximations. We propose that the standard norm in $UC_b(\mathbb{R})$ is reached on the appropriately defined interval (e.g., $[-5, 5]$). So, Figure 23 contains two graphs of convergence rate for $t = 1$.

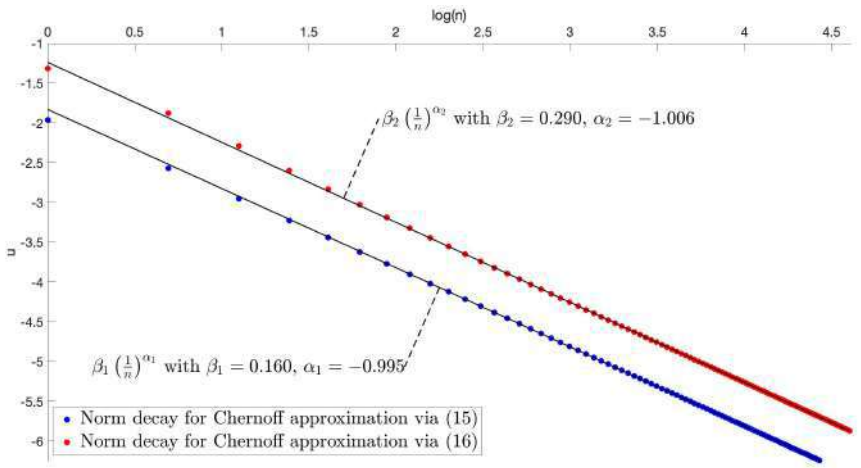


Figure 24: Graphs of estimates of the convergence speed with log-log scale ($t = 1$)

The above series of figures illustrates the results of a non-linear regression applied to analyse the approximation subspaces to which the examined initial condition belongs to. So, Figures 23 and 24, using both standard and logarithmic scale, represent the convergence rate and the corresponding obtained regression results for the heat equation.
One can easily derive now that the behaviour of the Chernoff approximations depends on the choice of initial condition, e.g., for $u_0 = [x \to \exp(-|x|)]$ we have it belonging to the approximation subspaces of the same order $\frac{1}{n}$ when applying expressions via different Chernoff functions (15), (16), and (17).

Acknowledgements. The author would like to express deep gratitude to his scientific supervisor

1478

I.D. Remizov for the problem setting and attention to the research, and to O.E. Galkin, and other members of research group 'Evolution semigroups and their applications' for useful critiques.

References

[1] Charles Batty, Alexander Gomilko, and Yuri Tomilov. "A Besov algebra calculus for generators of operator semigroups and related norm-estimates". In: *Math. Ann.* (Nov. 2019), pp. 1–71.

[2] Yana A. Butko. "The Method of Chernoff Approximation". In: *Semigroups of Operators – Theory and Applications*. Ed. by Jacek Banasiak, Adam Bobrowski, Mirosław Lachowicz, and Yuri Tomilov. Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 19–46.

[3] Paul R Chernoff. "Note on product formulas for operator semigroups". In: *Journal of Functional Analysis* 2.2 (1968), pp. 238–242.

[4] Viktoryia Dubravina. "Feynman formulas for solutions of evolution equations on ramified surfaces". In: *Russian Journal of Mathematical Physics* 21 (Apr. 2014), pp. 285–288.

[5] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Vol. 194. Springer Science & Business Media, 1999.

[6] A. Gomilko, S. Kosowicz, and Yu. Tomilov. *A general approach to approximation theory of operator semigroups*. 2018. arXiv: `1801.06749 [math.FA]`.

[7] Alexander Gomilko and Yuri Tomilov. "On convergence rates in approximation theory for operator semigroups". In: *Journal of Functional Analysis* 266.5 (2014), pp. 3040–3082.

[8] Einar Hille and Ralph Saul Phillips. *Functional analysis and semi-groups*. Vol. 31. American Mathematical Soc., 1996.

[9] Sonia Mazzucchi, Valter Moretti, Ivan Remizov, and Oleg Smolyanov. *Feynman type formulas for Feller semigroups in Riemannian manifolds*. 2020. arXiv: `2002.06606 [math.FA]`.

[10] Hagen Neidhardt, Artur Stephan, and Valentin A. Zagrebnov. "Operator-Norm Convergence of the Trotter Product Formula on Hilbert and Banach Spaces: A Short Survey". In: *Springer Optimization and Its Applications* (2018), pp. 229–247.

[11] Hagen Neidhardt, Artur Stephan, and Valentin A. Zagrebnov. "Remarks on the Operator-Norm Convergence of the Trotter Product Formula". In: *Integral Equations Operator Theory* 90.2 (Mar. 2018), pp. 15–14.

[12] Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, and O. G. Smolyanov. "Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian". In: *Theor. Math. Phys.* 172.1 (July 2012), pp. 987–1000.

[13] Amnon Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.

[14] Ivan Remizov. "Feynman and quasi-Feynman formulas for evolution equations". In: *Doklady Mathematics* 96 (Sept. 2017), pp. 433–437.

[15] Ivan Remizov. "Formulas that Represent Cauchy Problem Solution for Momentum and Position Schrödinger Equation". In: *Potential Analysis* 52 (Mar. 2020), pp. 1–32.

[16] Ivan Remizov. "New method for constructing Chernoff functions". In: *Differential Equations* 53 (Apr. 2017), pp. 566–570.

[17] Ivan Remizov. “Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients”. In: *Journal of Mathematical Physics* 60 (Oct. 2017).

[18] Ivan Remizov and M. Starodubtseva. “Quasi-Feynman Formulas providing Solutions of Multidimensional Schrödinger Equations with Unbounded Potential”. In: *Mathematical Notes* 104 (Nov. 2018), pp. 767–772.

[19] Ivan D. Remizov. “Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example)”. In: *Applied Mathematics and Computation* 328 (2018), pp. 243–246.

[20] Ivan D. Remizov. “Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation”. In: *Journal of Functional Analysis* 270.12 (2016), pp. 4540–4557.

[21] O. Smolyanov and N. Shamarov. “Feynman formulas and path integrals for evolution equations with the vladimirov operator”. In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 265 (July 2009), pp. 217–228.

[22] O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, and A. Truman. “Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula”. In: *Journal of Mathematical Physics* 43.10 (2002), pp. 5161–5171.

[23] O. G. Smolyanov, H. v. Weizsäcker, and O. Wittich. “Chernoff’s Theorem and the Construction of Semigroups”. In: *Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics*. Ed. by Mimmo Iannelli and Günter Lumer. Basel: Birkhäuser Basel, 2003, pp. 349–358.

[24] Oleg G Smolyanov. “Feynman formulae for evolutionary equations”. In: *Trends in Stochastic Analysis* 353 (2009), pp. 283–302.

[25] A. V. Vedenin, V. S. Voevodkin, V. D. Galkin, E. Yu. Karatetskaya, and I. D. Remizov. “Speed of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of Evolution Equations”. In: *Math. Notes* 108.3 (Oct. 2020), pp. 451–456.

[26] Alexander V. Vedenin and Ivan D. Remizov. “Rapidly Converging Chernoff Approximations to Solution of Parabolic Differential Equation on the Real Line”. In: *arXiv* (Dec. 2020).

[27] Valentin A. Zagrebnov. “Notes on the Chernoff product formula”. In: *Journal of Functional Analysis* 279.7 (2020).

1480

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Пучковой Натальи Дмитриевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр магистерской диссертации под названием «О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4» являются:

1. Выделение класса кривых, подлежащих исследованию (см. главу 3);
2. Перечисление допустимых схем и запреты их реализуемости кривыми рассматриваемого класса (глава 5 и приложение Г);
3. Построение некоторых кривых рассматриваемого класса (глава 4 и приложение А).

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- Ознакомление с результатами на близкую тему по практически исчерпывающему списку работ по топологии распадающихся алгебраических кривых к статье Борисов И.М., Полотовский Г.М. «О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8» (2020, в печати) и по статье Горская В.А, Полотовский Г.М. «О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости» (Журнал СВМО. 2020. Т.22, №1. С.24-37).
- Консультации с моим научным руководителем Звониловым Виктором Ивановичем и соруководителем Полотовским Григорием Михайловичем.

Подтверждаю, что являюсь автором представляемой на Смотр выпускной квалификационной работы и прошу принять её для участия в Смотре.

Защита работы состоится 15.06.2021. На Смотр представлен текст работы.



Подпись

Пучкова Наталья Дмитриевна 29 мая 2021 г. Нижний Новгород, Россия

Отзыв

на магистерскую диссертацию студентки группы №3818902м института ИТММ
Пучковой Натальи Дмитриевны

Тема работы:

«О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4»

Перед Н.Д. Пучковой была поставлена задача изучения плоских проективных вещественных алгебраических кривых степени 8, являющихся объединением двух неособых кривых степени 4 с максимальным числом ветвей при условии, что все точки пересечения лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой, причем их число максимально. Кроме того, чтобы сделать задачу обозримой, дополнительно были наложены некоторые условия комбинаторного характера.

Актуальность этой задачи определяется тем, что она входит в круг вопросов, затрагиваемых первой частью известной 16-й проблемы Гильберта.

Для указанного выше класса кривых степени 8 найден список всех топологических моделей расположений, удовлетворяющих следствиям теоремы Безу и известным ограничениям на топологию как неособых, так и распадающихся кривых. Затем для каждой модели полученного списка решался вопрос реализации их кривыми степени 8. Для доказательства невозможности такой реализации применялись известные средства, основанные на теории кос и зацеплений.

В процессе выполнения магистерской диссертации получены следующий результат:

- хотя получить полную топологическую классификацию не удалось, доказано, что любая кривая рассматриваемого класса имеет комбинаторный тип, описываемый одной из 21 перестановки. В каждом комбинаторном типе имеется порядка ста топологических расположений, львиную долю которых удалось запретить; построено 5 расположений, а вопрос о реализуемости 7 расположений остаётся открытым.

Полученный результат является новым, т.к. кривые этого класса ранее не рассматривались.

По результатам своей работы Пучкова сделала доклад на конференции «Дискретная геометрия и геометрия чисел, арифметическая и алгебраическая геометрии» в Туле 19.05.2021.

Задание на магистерской диссертации выполнено полностью. Результаты магистерской диссертации после дальнейших исследований могут быть опубликованы в виде научной статьи.

В процессе выполнения магистерской диссертации Пучкова проявила достаточную математическую подготовку и способности самостоятельно решать поставленные руководителем задачи.

Считаю, что магистерская диссертация Н.Д. Пучковой соответствует требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам по направлению подготовки «математика», и заслуживает оценки «отлично»**.**

Научный руководитель
доцент кафедры алгебры, геометрии
и дискретной математики



В.И. Звонилов

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра: Алгебры, геометрии и дискретной математики

Направление подготовки: «Математика»
Магистерская программа: «Фундаментальная математика и приложения»

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема:
«О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4»

Выполнила:
студентка группы 381902м
Пучкова Наталья Дмитриевна

_____
(подпись)

Научный руководитель:
доцент, к.ф.-м.н.
Звонилов Виктор Иванович

_____
(подпись)

Нижний Новгород
2020

Содержание

1 Постановка задачи **3**

2 Предварительные сведения **3**

3 Пересечение типа «змея, обвивающаяся вокруг овала» **7**

4 Построение некоторых кривых **8**

5 Запреты для перестановки (1,2,3,4,5,6,8,7) **9**
5.1 Запреты с помощью теоремы Брюзотти 9
5.2 Запреты с помощью с помощью теории кос и зацеплений 11

6 Результаты **14**

Список литературы **15**

ПРИЛОЖЕНИЯ **16**

1484

1 Постановка задачи

Задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта. На данный момент известна классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

Эта работа посвящена исследованию такого взаимного расположения двух кривых степени 4 с максимальным числом ветвей, что все точки пересечения лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой, причем их число максимально. Далее в работе вводится определенный тип пересечения ветвей, рассмотрением которого ограничимся ввиду большого числа всех подлежащих исследованию взаимных расположений пересекающихся ветвей.

Рассматриваются следующие этапы решения задачи:

1. Перечисление топологических моделей, удовлетворяющих известным ограничениям на топологию неособых кривых.
2. Запреты допустимых в силу п. 1 моделей:
   - с помощью следствий теорем Безу и Брюзотти;
   - с помощью метода Оревкова.
3. Построение некоторых существующих взаимных расположений кривых.

2 Предварительные сведения

Определение 1. Действительная алгебраическая кривая C_m степени m в проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ задается уравнением $C_m(x_0, x_1, x_2) \equiv \sum_{\alpha+\beta+\gamma=m} A_{\alpha\beta} x_0^\gamma x_1^\alpha x_2^\beta = 0$, где m – фиксированное натуральное число; α, β, γ – целые неотрицательные числа; $A_{\alpha\beta}$ – действительные коэффициенты; $(x_0 : x_1 : x_2)$ – координаты точки в $\mathbb{R}P^2$.

Кривая называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в ноль в $\mathbb{R}P^2$.

Определение 2. Если многочлен C_m можно представить в виде произведения двух многочленов C_{m-k} и C_k: $C_m = C_{m-k} \cdot C_k$, то говорят, что кривая C_m распадается на кривые C_{m-k} и C_k.

В своей работе я буду исследовать расположение распадающихся кривых вида $C_8 = C_4 \cdot \widetilde{C_4}$ в вещественной проективной плоскости.

Можно выделить четные и нечетные ветви неособой кривой.

Овал, или четная ветвь, делит проективную плоскость на две части: диск и лист Мебиуса. На рис. 1 изображена четная ветвь, где в качестве модели проективной плоскости рассматривается круг с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности. Закрашенная часть – это диск, не закрашенная – лист Мебиуса. Если мы возьмем точку A в одной части и B в другой и попытаемся построить путь из A в B, то мы неминуемо пересечем эту ветвь. В таком случае говорят, что овал расположен в проективной плоскости двусторонне.

Нечетная ветвь не делит проективную плоскость на части, то есть расположена в $\mathbb{R}P^2$ односторонне. В данном случае если мы возьмем точки M и K локально по разные стороны от кривой, есть возможность построить путь без пересечения ветви, см. рис. 2.

В 1876 году А. Харнак доказал теорему о числе компонент связности («кусков») неособой кривой.

Теорема Харнака. Пусть N — число ветвей неособой кривой степени m. Тогда $N \leqslant \dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, и эта оценка точная для любого m (см. [1]).

1485

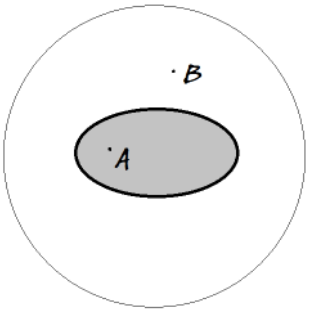
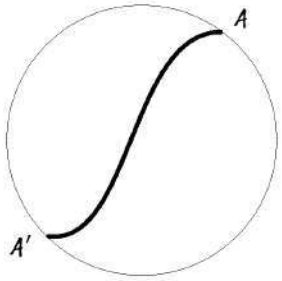


Рис. 1. Чётная ветвь



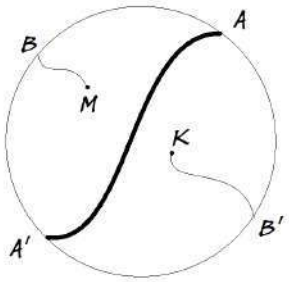


Рис. 2. Нечетная ветвь. Точки A и A', B и B' отождествлены

Определение 3. Если кривая состоит из наибольшего возможного числа ветвей $M = \dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, то она называется M-кривой.

Модель M-кривой степени 4 изображена на рис. 3.

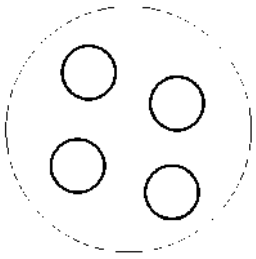


Рис. 3. M-кривая степени 4.

Определение 4. Назовём моделью расположения типа (1) – (4) (в дальнейшем для краткости – просто модель) набор восьми топологических окружностей, которые вложены в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне и которые ведут себя с точки зрения числа и расположения общих точек так, как две кривые степени 4 при следующих условиях:

1. Эти две кривые являются M-кривыми.
2. Все точки пересечения лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой.
3. Точек пересечения максимальное число, т. е. $4 \cdot 4 = 16$.
4. Точки пересечения попарно различны.

Наша цель – выяснить, когда модель может быть реализована как объединение двух M-кривых степени 4, а когда нет. В этом нам поможет следующая теорема.

Теорема Безу. Если кривые степеней m и n не имеют общих компонент, то они имеют не более mn общих точек (см. [1]).

Запрещать некоторые логические возможности (модели) нам помогает также следующая теорема о независимости возмущений простых двойных точек.

Теорема Брюзотти. Пусть вещественная алгебраическая кривая не имеет кратных компонент и все её особые точки – простые двойные. Тогда с помощью малых изменений коэффициентов этой кривой можно получить вещественную кривую той же степени, которая

1) в окрестности изолированной точки может иметь один из видов A, B или C первой строки рис. 4 по нашему выбору.
2) в окрестности трансверсального пересечения ветвей может иметь один из видов A, B или C второй строки рис. 4 по нашему выбору.

Следуя Гудкову (см. [1]), введем следующее соглашение: запись вида $\dfrac{k}{1}l$ описывает такое

1486

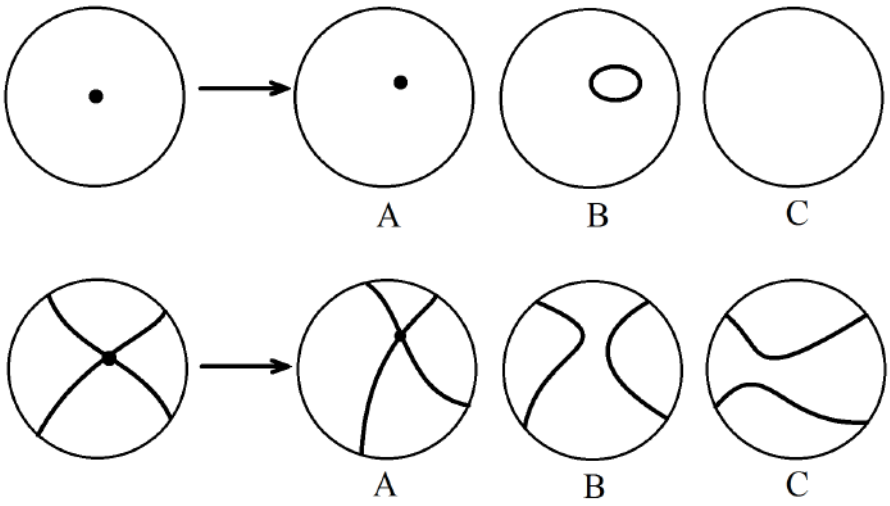


Рис. 4

взаимное расположение овалов, что $k + l$ овалов лежат вне друг друга и еще один овал (главный), охватывает k из этих овалов (внутренних) и оставляет вне l овалов (внешних).

Д. Гильберт ввёл понятие «гнезда веса s».

Определение 5. Кривая C_m имеет гнездо веса s, если у этой кривой существует s овалов, вложенных последовательно друг в друга.

Таким образом, можно сказать, что пустой овал является гнездом веса 1.

Известно, что теорема Безу допускает только следующие схемы расположения овалов неособой кривой степени 8:

1) α овалов вне друг друга, $0 \leqslant \alpha \leqslant 22$ (т. е. α отдельных гнёзд веса 1);
2) один овал с непустой внутренней областью («непустой овал»), внутри и вне которого расположены остальные овалы вне друг друга («одно гнездо веса 2»);
3) два непустых овала вне друг друга, внутри и вне которых лежат ещё сколько-то овалов вне друг друга («два гнезда веса 2»);
4) аналогично случаю 3) – три гнезда веса 2;
5) три «концентрических» овала и ещё сколько-то овалов вне друг друга, расположенных в компонентах дополнения к этим трём овалам, отличных от внутренности самого внутреннего овала из этих трёх («гнездо веса 3»);
6) четыре овала, образующие одно гнездо веса 4;
7) восемь овалов, образующих четыре отдельных гнезда веса 2.

Известно также ([2]), что M–кривая степени 8 может иметь только одну из схем вида 2) – 5) из перечисленных выше.

В [2] приведён список всех незапрещённых схем M–кривых степени 8, содержащий 83 схемы, реализованные M–кривыми степени 8, и ещё 6 схем, реализуемость которых M–кривыми степени 8 в настоящее время неизвестна.

Идея запрета с помощью теоремы Брюзотти заключается в следующем: устранить особенности так, чтобы получилась схема степени 8, не входящая в приведенный список.

Кроме того, будем пытаться запрещать схемы расположения рассматриваемых распадающихся кривых степени 8 с помощью метода, который предложил С.Ю. Оревков, см. [3]. В этом методе исследуемому расположению в соответствие ставится коса. Далее приведём необходимые сведения для понимания метода Оревкова.

Определение 6. Коса из n нитей – это график гладкой n-значной комплекснозначной функции, определённой на отрезке $[0; 1]$, значения которой в каждой точке попарно различны, а в точках $t = 0$ и $t = 1$ имеют попарно различные вещественные части.

1487

Для того, чтобы наглядно задать косу, представим ее плоской диаграммой. Спроектируем нити косы (компоненты связности графика) на какую-нибудь плоскость. При этом должны выполняться следующие условия:

1) проекции нитей не касаются друг друга ни в какой точке;
2) ни в какую точку плоскости не попадают проекции трёх и более различных нитей;
3) все перекрестки расположены на разной высоте.

Можно определить операцию произведения на множестве кос с одним и тем же количеством нитей n. Эта операция, заключается в последовательном «склеивании» кос (соединении левых концов нитей второй косы с правыми концами нитей первой). Легко показать, что множество кос из n нитей с таким произведением образует группу кос из n нитей, которая обозначается B_n.

Группу кос из n нитей можно задать набором образующих и соотношений между образующими. В качестве образующих можно выбрать элементарные косы σ_i и σ_i^{-1}, $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, изображённые на рис. 5.

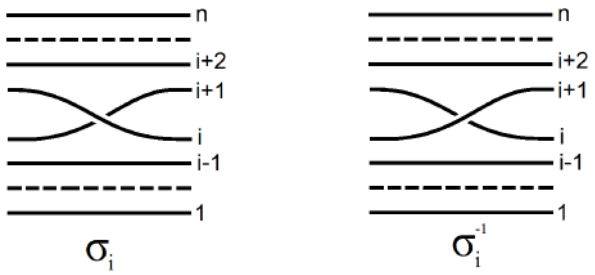


Рис. 5

В методе Оревкова каждой простой плоской алгебраической кривой степени n и пучку прямых на вещественной проективной плоскости, в некотором определённом смысле максимально расположенному относительно кривой, ставится в соответствие коса из n нитей, которая получается возмущением двойных точек пересечения множества комплексных точек кривой с комплексификацией пучка прямых. Подробности см. в [3], с.793.

Определение 7. Коса из n нитей, определяемая словом $\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\ldots\sigma_{k_r}$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$, называется положительной.

Определение 8. Коса из n нитей, определяемая словом

$$w_1\sigma_{k_1}w_1^{-1}w_2\sigma_{k_2}w_2^{-1}\ldots w_r\sigma_{k_r}w_r^{-1},$$

где $r \in \mathbb{N}$, $w_i \in B_n, i \in \{1,\ldots,r\}$, называется квазиположительной.

Известно, что если коса, соответствующая исследуемому расположению, не является квазиположительной, то такое расположение не реализуется кривой степени n. В качестве проверки на квазиположительность используется следующее неравенство.

Неравенство Мурасуги-Тристрама. Если коса $b \in B_m$ квазиположительна, то для её замыкания выполняется неравенство

$$\eta = |\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leqslant 0,$$

где $\sigma(b) = \sigma(L) = \sigma(V + V^T)$ – сигнатура;
$n(b) = n(L) = 1 + n(V + V^T)$ – дефект; V – матрица Зейферта;
L – замыкание косы $b = \prod \sigma_i^{k_i}$;
$e(b) = \Sigma k_i$ – сумма всех показателей степеней в разложении косы b по образующим группы кос B_m. $e(b)$ называется алгебраической степенью косы b.

Подробнее опишем применение этого неравенства для конкретного расположения позже.

Если данным методом исследуемое расположение распадающихся кривых не запретится, будем проверять условие Фокса-Милнора.

Условие Фокса-Милнора. Пусть $b \in B_n$ – квазиположительная коса из n нитей. Если $e(b) = n - 1$, то должен существовать многочлен $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ такой, что для зацепления L многочлен Александера $\Delta_L(t) = f(t)f(t^{-1})$. Если алгебраическая степень косы меньше $n-1$, то должно выполняться равенство $\Delta_L(t) = 0$.

Утверждение 1. Чтобы многочлен Александера удовлетворял условию Фокса-Милнора, необходимо, чтобы $\Delta_L(-1)$ было квадратом целого числа.

Утверждение 1. Если в разложении многочлена на неприводимые множители есть симметричный многочлен в нечетной степени, то $\Delta_L(t)$ не представляется в виде $\Delta_L(t) = f(t)f(t^{-1})$.

Для применения метода к исследуемым схемам кривых в этой работе используются программа М. Гущина, осуществляющая проверку выполнения неравенства Мурасуги-Тристрама, и программа И. Борисова, осуществляющая проверку выполнения условия Фокса-Милнора.

3 Пересечение типа «змея, обвивающаяся вокруг овала»

Введем тип пересечения ветвей, который назовём «змея, обвивающаяся вокруг овала» (рассмотрением пересечений этого типа ограничимся ввиду большого числа всех подлежащих исследованию взаимных расположений пересекающихся ветвей).

Определение 9. Пусть имеем овал и пересекающуюся с ним в 8 точках незамкнутую дугу без самопересечений, которую будем называть образующей дугой. Рассмотрим границу ε-окрестности этой дуги с таким малым ε, что эта граница пересекает овал в 16 попарно различных точках. Эта граница, которую будем называть "змеёй", будет овалом второй кривой, а такое взаимное расположение двух овалов – пересечением ветвей типа «змея, обвивающаяся вокруг овала».

В введённом типе пересечения ветвей "змею" будем считать овалом первой кривой (кривой с номером 1), а овал, вокруг которого она обвивается, – овалом второй кривой (кривой с номером 2). Оставшиеся три овала кривой номер 1 и три овала кривой номер 2, на которых нет точек пересечения, называются свободными. Так как рассматриваем M–кривые четвёртой степени, то овалы кривой с одним номером лежат вне друг друга.

Занумеруем на овале кривой с номером 2 подряд 8 точек – точек пересечения овала со "змеёй". Тогда можно рассматривать перестановки 8-го порядка и тем самым перебирать все возможные взаимные расположения рассматриваемого типа.

Будем рассматривать только такие расположения, что

1) объединение пересекающихся овалов лежит в конечной части аффинной плоскости (т.е. не пересекает граничную окружность модели проективной плоскости);
2) дуга, соединяющая первые две точки пересечения, соответствующие первым двум числам из перестановки, лежит внутри овала с номером 2;
3) хотя бы один конец образующей дуги лежит в неориентируемой компоненте дополнения к модели кривой (овала, вокруг которого обвивается змея).

Нетрудно заметить, что для каждого расположения, отвечающего перестановке со вторым элементом 2, найдётся симметричное расположение, которому отвечает перестановка со вторым элементом 8. Применяя аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что достаточно рассмотреть только перестановки со вторым элементом, значение которого $\leqslant 5$, см. рис. 6.

Если двум перестановкам соответствуют гомеоморфные расположения кривых, то оставим из них ту, которая встречается раньше в лексикографическом порядке.

Сначала с помощью устранения точек пересечения докажем, что расположения, отвечающие некоторым перестановкам, не могут быть реализованы кривой степени 8: если при некотором устранении точек пересечения (такие устранения независимы в силу теоремы Брюзот-

ти – см., например, [1]) получаем неособую кривую с таким расположением ветвей, которое не может быть реализовано неособой кривой степени 8 в силу известных фактов о топологии таких кривых, то и исходное расположение нереализуемо кривой степени 8. Например, кривая рис. 8, получаемая устранением точек пересечения на рис.7, имеет гнездо веса 3 и гнездо веса 2 с различными внешними овалами, поэтому расположение рис. 7 не может быть реализовано кривой степени 8.

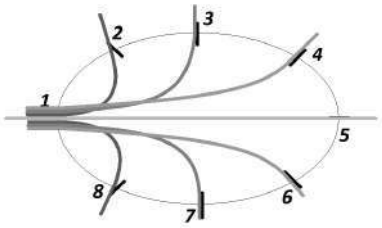


Рис. 6

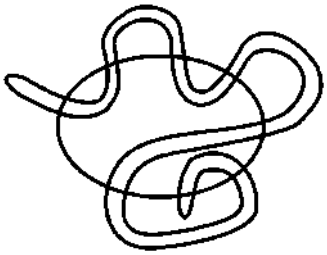


Рис. 7



Рис. 8

После применения описанного приёма для дальнейшего исследования остаётся следующая 21 перестановка:

1. $(1,2,3,4,5,6,7,8)$
2. $(1,2,3,4,5,6,8,7)$
3. $(1,2,3,4,5,8,7,6)$
4. $(1,2,3,4,6,7,8,5)$
5. $(1,2,3,4,7,6,5,8)$
6. $(1,2,3,4,8,7,6,5)$
7. $(1,2,3,6,5,4,7,8)$
8. $(1,2,3,6,5,4,8,7)$
9. $(1,2,3,6,7,8,5,4)$
10. $(1,2,3,8,7,4,5,6)$
11. $(1,2,4,5,6,7,8,3)$
12. $(1,2,5,6,7,4,3,8)$
13. $(1,2,6,5,4,7,8,3)$
14. $(1,2,6,7,8,5,4,3)$
15. $(1,2,7,6,5,4,3,8)$
16. $(1,2,8,7,6,5,4,3)$
17. $(1,4,3,2,6,7,8,5)$
18. $(1,4,3,2,7,6,5,8)$
19. $(1,4,3,2,8,7,6,5)$
20. $(1,4,5,6,7,8,2,3)$
21. $(1,4,5,8,7,6,2,3)$

4 Построение некоторых кривых

Д. Гильберт построил взаимное расположение кривых степени 2 и 4, представленное на рис. 9, где кривая степени 2 нарисована жирнее, чем кривая степени 4.

Покажем на примере данного взаимного расположения, каким образом мы будем доказывать существование некоторых взаимных расположений двух кривых степени 4.

Проведем 2 прямые l_1 и l_2, см. рис. 10. Рассмотрим кривую степени 2, которая определяется уравнением $\widetilde{C_2} = C_2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0$. Для ε достаточно малого по абсолютной величине и подходящего знака она будет лежать близко к исходной кривой C_2 и пересекать ее в точках r_1, r_2, r_3, r_4 (видно из уравнения). Получим расположение кривых как на рис. 11.

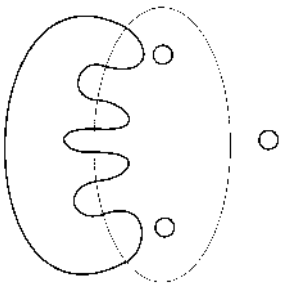


Рис. 9

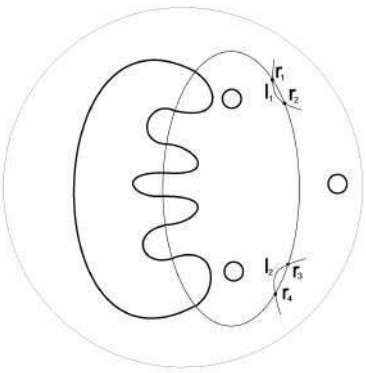


Рис. 10

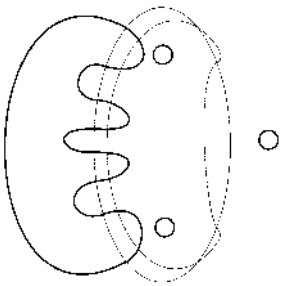


Рис. 11

Теперь с помощью малых изменений коэффициентов мы можем добиться возмущения простых двойных точек кривой $C_2 \cdot \widetilde{C_2} = 0$, как на рис. 12. Уравнение возмущённой кривой можно записать следующим образом: $\widetilde{C_4} = C_2 \cdot \widetilde{C_2} + \varepsilon_1 D_4 = 0$ для ε_1 достаточно малого по абсолютной величине и подходящего знака, где D_4 – какая-нибудь кривая степени 4 без действительных точек.

Итак, мы получили взаимное расположение двух кривых степени 4. Если мы изобразим овал, выделенный более жирно, выпуклым, то получим рис. 13. Это пересечение двух кривых степени 4. Из рисунка видно, что оно отвечает перестановке с номером 1: (1,2,3,4,5,6,7,8).

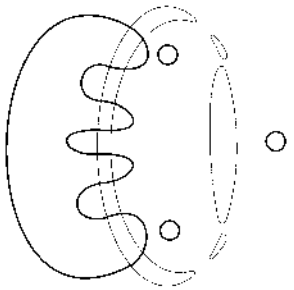


Рис. 12

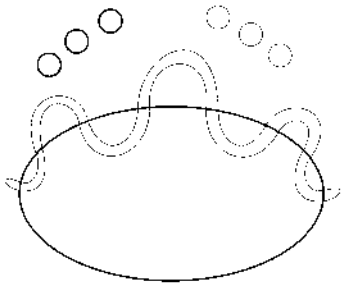


Рис. 13

Аналогично с помощью удвоения кривой степени 2 в расположениях кривых степени 2 и степени 4, построенных Д. Гильбертом и Г.М. Полотовским (см. [3]), реализованы конкретные расположения для некоторых других перестановок, см. приложение А.

5 Запреты для перестановки (1,2,3,4,5,6,8,7)

5.1 Запреты с помощью теоремы Брюзотти

Найдем допустимые известными ограничениями расположения свободных овалов для конкретного взаимного расположения пересекающихся ветвей. Возьмем, например, перестановку (1,2,3,4,5,6,8,7), см. рис. 14.

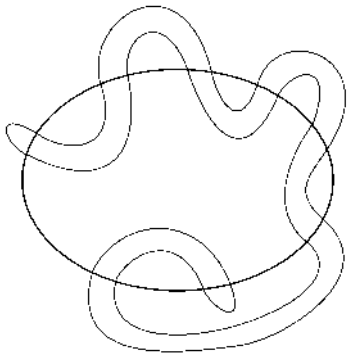


Рис. 14

Распределим сначала отдельно овалы кривой с каждым номером (т.е. каждой кривой-сомножителя), затем исключим из полученных моделей недопустимые с помощью теоремы Брюзотти.

1491

Найдем сначала все возможные области для расположения овалов кривой с номером 1. Эти овалы должны располагаться вне друг друга и вне змеи.

Дополнение к нарисованным (пересекающимся) овалам до проективной плоскости вне змеи состоит из 9 областей. Пронумеруем эти области номерами от 1 до 9, см. рис. 15.

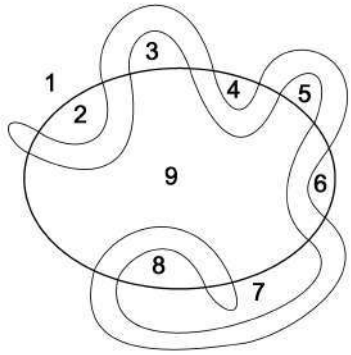


Рис. 15

Будем смотреть, допустимо ли добавление хотя бы одного овала в пронумерованную область. Для взаимного расположения на рис. 15 невозможным является добавление хотя бы одного овала в области с номерами 2, 3, 4, 6, 7 и 8 (см. рис. 16 – 21; например, на рис. 16 образовались гнёзда веса 2 и веса 3, чего не может быть у кривой степени 8 – см.выше).

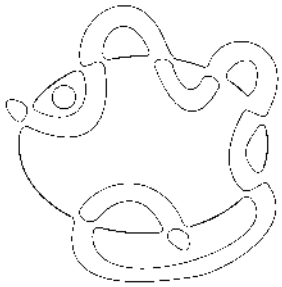


Рис. 16

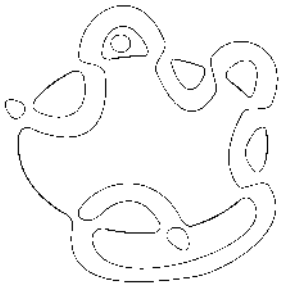


Рис. 17

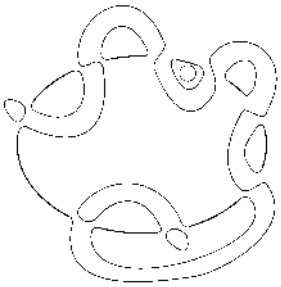


Рис. 18

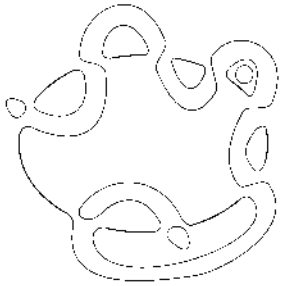


Рис. 19

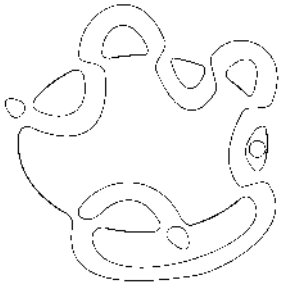


Рис. 20

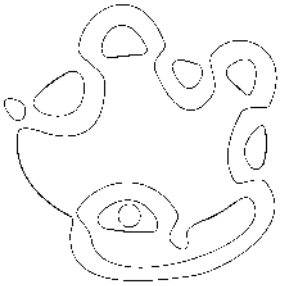


Рис. 21

Аналогично найдем все возможные области для расположения овалов кривой с номером 2.

Снова имеются 9 областей, в которых могут располагаться уже овалы кривой с номером 2. Пронумеруем эти области номерами от 1 до 9, см. рис. 22. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что здесь не может быть даже по одному овалу в областях 2, 3, 4, 5, 6 и 9.

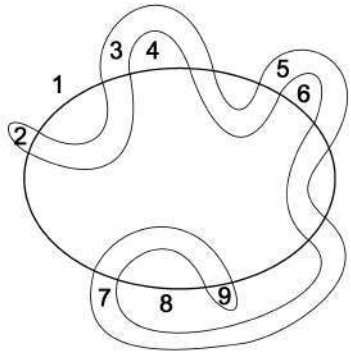


Рис. 22

Чтобы получить полную картину, нам нужно объединить результаты. Снова обратимся к взаимному расположению пересекающихся ветвей. Пронумеруем области, в которых может быть хотя бы один овал любого номера, как на рис. 23.

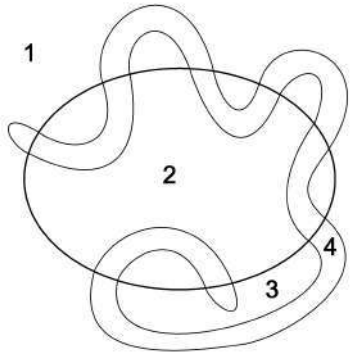


Рис. 23

Заполним таблицу всевозможных допустимых распределений шести свободных овалов в областях 1 - 4 рис. 23. Обозначать количество овалов кривой 1 и кривой 2 будем числами с индексами 1 и 2 соответственно. Тогда после запрета расположений с помощью теоремы Брюзотти у нас получится таблица в приложении Б.

5.2 Запреты с помощью с помощью теории кос и зацеплений

Применим метод, упомянутый в первой главе.

Изобразим исследуемое взаимное пересечение так, как показано на рис. 24 (здесь "змея" изображена бледнее).

Возьмем точку P в проективной плоскости, не лежащую на кривой, такую, чтобы каждая прямая пучка прямых с центром в точке P пересекала бы нашу кривую не менее, чем в $n-2=8-2=6$ точках, и нашлась бы максимальная прямая l_M, которая пересекала бы эту кривую в $n=8$ точках, см. рис. 24. Разрежем модель $\mathbb{R}P^2$ по этой максимальной прямой l_M и склеим половинки по частям граничной окружности, учитывая отождествление диаметрально противоположных точек, см. рис. 25. Таким образом, l_M будет новой «бесконечно удаленной прямой», то есть будет изображаться границей круга на новой модели.

Изобразим рис. 25 в виде «развёртки» (у С.Ю. Оревкова – "послойное расположение"), изображенной на рис. 26 (здесь точка P – «бесконечно удаленная на оси OY»).

Эту развёртку можно закодировать с помощью так называемого X-кода, двигаясь слева направо и используя символы $\subset_k, \supset_k, x_k$, $k \in \{1,2,\ldots,7\}$ для кодировки расположения

1493

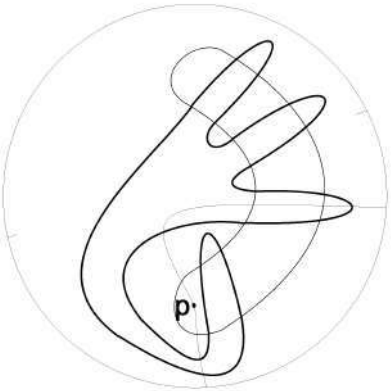


Рис. 24

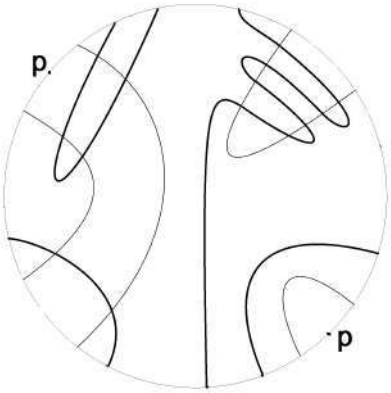


Рис. 25

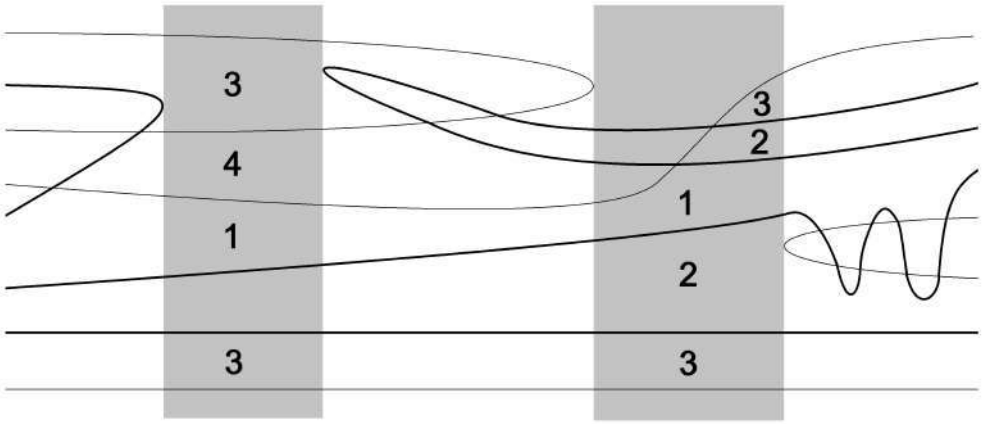


Рис. 26

кривой в окрестности критических прямых пучка (тех прямых, которые касаются кривой или проходят через двойную точку кривой), см. рис. 27. Символ o_k заменяет последовательность символов $(_k)_k$ и отвечает расположению свободного овала в полосе над $(k-1)$-й линией ("в k-м слое"), считая снизу.

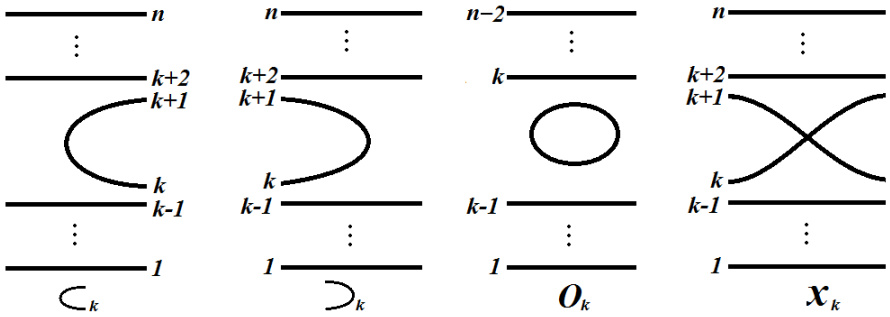


Рис. 27

Тогда нашу развёртку можно описать следующим X-кодом:

$$x_3x_4x_2x_3 \supset_4 \ldots x_4 \ldots x_5 \ldots \subset_4 x_3x_2x_4x_1x_3x_2 \supset_3 \ldots \subset_4 x_5x_4x_4x_5,$$

где вместо многоточия надо вставить символы o_k, $k \in \{2, \ldots, 6\}$ показывающие расположения свободных овалов. Овалы распределяются по областям в соответствии со случаями, перечисленными в таблице в приложении Б.

В закрашенных на рис. 26 вертикальных полосах где-то должны располагаться 6 свободных овалов, которые при движении прямой пучка (вертикальной прямой на рис. 26) пересекаются поочерёдно (в силу теоремы Безу). Число овалов в k-ой снизу горизонтальной полосе будем обозначать строчной латинской буквой с индексом k (a_k, b_k и т. д.). Сумма значений всех этих параметров с индексами равна 6, перечисление всех возможных разбиений числа 6 в сумму неотрицательных значений этих параметров производит программа М. Гущина, число свободных овалов (в данном случае 6) указывается в виде входного параметра программы.

Результаты выполнения программы представлены в таблице в приложении В, где Х-код записан в том виде, в каком требуется в программе (индексы пишутся без опускания на полстроки; в квадратных скобках число свободных овалов). В первом столбике указаны номера строк в таблице приложения Б.

Для некоторых значений параметров Х-кода из второй строки этой таблицы неравенство Мурасуги-Тристрама выполняется ($\eta = 0$). Эти значения параметров и соответствующие им числа овалов в областях на исходной модели рис. 23 приведены в таблице 1 ниже. В первой колонке таблицы указан номер в таблице расположения овалов, во второй – значения параметров в таблице из приложения В.

Таблица 1

№	Значения параметров	Запрет условием Фокса-Милнора
39	$b=1, h=1$	Не запрещено
	$d=1, h=1$	Запрещено
	$f=1, h=1$	Запрещено
	$b=1, j=1$	Запрещено
	$d=1, j=1$	Запрещено
	$f=1, j=1$	Запрещено
	$b=1, l=1$	Запрещено
	$d=1, l=1$	Запрещено
	$f=1, l=1$	Запрещено
76	$b=1, c=1, f=1$	Не запрещено
	$c=1, d=1, f=1$	Запрещено
	$b=1, e=1, f=1$	Не запрещено
	$d=1, e=1, f=1$	Запрещено
	$b=1, c=1, h=1$	Запрещено
	$c=1, d=1, h=1$	Запрещено
	$b=1, e=1, h=1$	Не запрещено
	$d=1, e=1, h=1$	Запрещено
	$b=1, c=1, j=1$	Запрещено
	$c=1, d=1, j=1$	Запрещено
	$b=1, e=1, j=1$	Не запрещено
	$d=1, e=1, j=1$	Запрещено
84	$b=1, c=2, f=2$	Не запрещено
87	$c=1, d=2, f=2$	Запрещено
94	$b=1, c=2, d=3$	Не запрещено

Таким образом, не удалось запретить 4 расположения для перестановки с номером 2 (см. рис. 28 – 31). Вопрос об их реализуемости остаётся открытым.

Аналогичным образом исследовались другие перестановки.

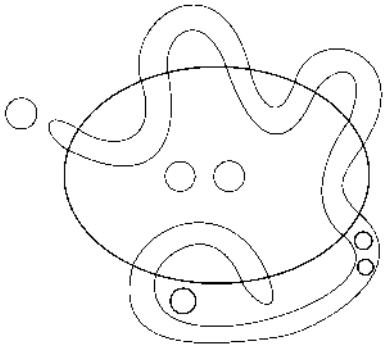


Рис. 28

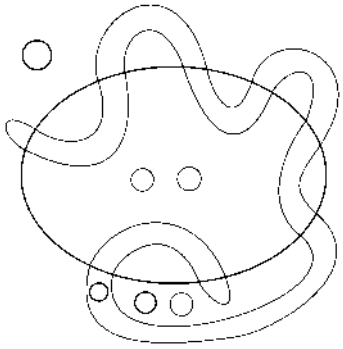


Рис. 29

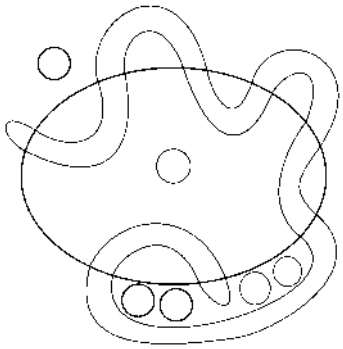


Рис. 30

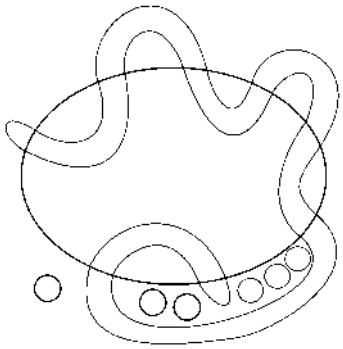


Рис. 31

6 Результаты

При решении задачи исследования взаимного расположения двух M-кривых степени 4 рассмотрен тип пересечения ветвей, названный «змея, обвивающаяся вокруг овала». Сводка результатов для всех 21 перестановок списка в конце раздела 3 приведена в приложении Г. Отметим, что максимальный пучок удалось найти для 18 перестановок. В этих случаях в совокупности построено 5 расположений и вопрос о реализуемости 7 расположений остаётся открытым. Построено также 6 расположений для тех случаев, когда максимальный пучок не был найден.

Список литературы

[1] Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Том 29. №4(178). С. 3–79.

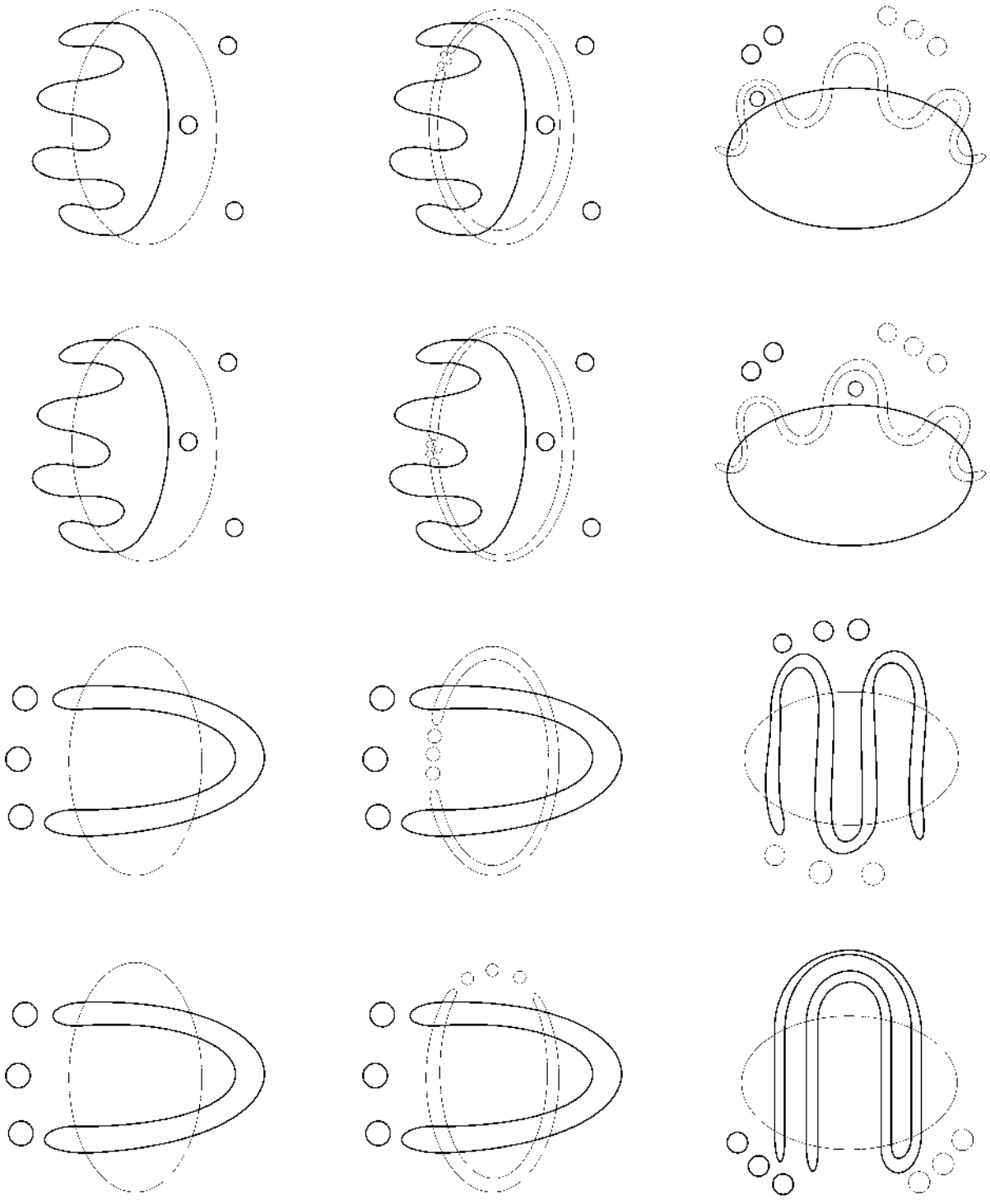
[2] Orevkov S.Yu. Classification flexible M-curves of degree 8 up to isotopy // GAFA, Geom. funct. anal. 2002. V.12. №4. C. 723-755.

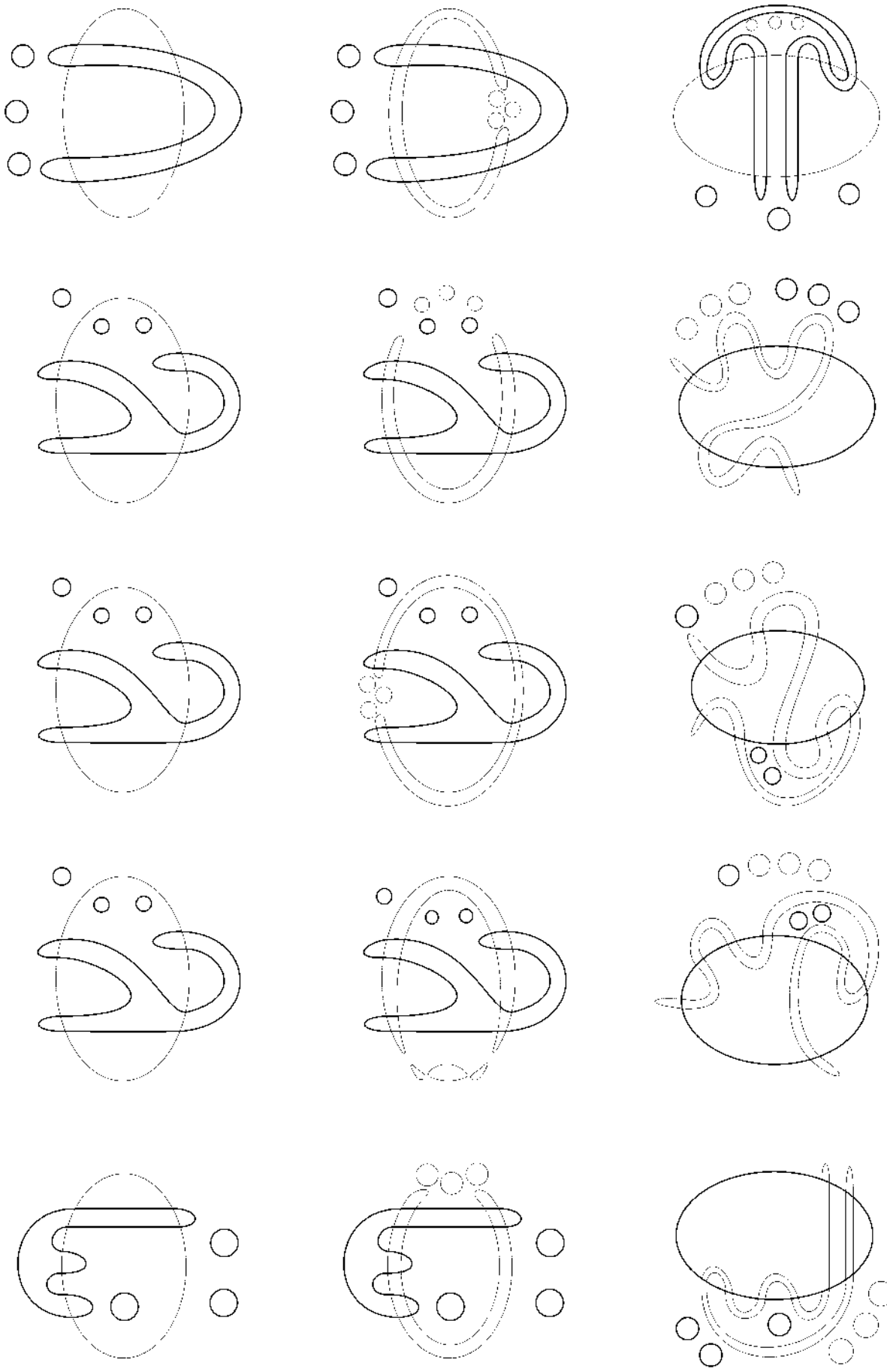
[3] Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. 1999. Том 38. Vol.4. P. 779—810.

[4] Полотовский Г. М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // Докл. АН СССР. 1977. Том 236. Вып. 3. С.548–551.

1497

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Построения





1499

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Список всех возможных расположений шести овалов по девяти областям для перестановки (1,2,3,4,5,6,8,7)

№	1	2	3	4
1	$3_1 3_2$			
2	$3_1 2_2$		1_2	
3	$3_1 2_2$			1_2
4	$3_1 1_2$		2_2	
5	$3_1 1_2$			2_2
6	$3_1 1_2$		1_2	1_2
7	3_1		3_2	
8	3_1		2_2	1_2
9	3_1		1_2	2_2
10	3_1			3_2
11	$2_1 3_2$	1_1		
12	$2_1 2_2$	1_1	1_2	
13	$2_1 2_2$	1_1		1_2
14	$2_1 1_2$	1_1	2_2	
15	$2_1 1_2$	1_1		2_2
16	$2_1 1_2$	1_1	1_2	1_2
17	2_1	1_1	3_2	
18	2_1	1_1	2_2	1_2
19	2_1	1_1	1_2	2_2
20	2_1	1_1		3_2
21	$2_1 3_2$		1_1	
22	$2_1 2_2$		$1_1 1_2$	
23	$2_1 2_2$		1_1	1_2
24	$2_1 1_2$		$1_1 2_2$	
25	$2_1 1_2$		1_1	2_2
26	$2_1 1_2$		$1_1 1_2$	1_2
27	2_1		$1_1 3_2$	
28	2_1		$1_1 2_2$	1_2
29	2_1		$1_1 1_2$	2_2
30	2_1		1_1	3_2
31	$1_1 3_2$	2_1		
32	$1_1 2_2$	2_1	1_2	
33	$1_1 2_2$	2_1		1_2
34	$1_1 1_2$	2_1	2_2	
35	$1_1 1_2$	2_1		2_2
36	$1_1 1_2$	2_1	1_2	1_2
37	1_1	2_1	3_2	
38	1_1	2_1	2_2	1_2
39	1_1	2_1	1_2	2_2
40	1_1	2_1		3_2

№	1	2	3	4
41	$1_1 3_2$		2_1	
42	$1_1 2_2$		$2_1 1_2$	
43	$1_1 2_2$		2_1	1_2
44	$1_1 1_2$		$2_1 2_2$	
45	$1_1 1_2$		2_1	2_2
46	$1_1 1_2$		$2_1 1_2$	1_2
47	1_1		$2_1 3_2$	
48	1_1		$2_1 2_2$	1_2
49	1_1		$2_1 1_2$	2_2
50	1_1		2_1	3_2
51	$1_1 3_2$	1_1	1_1	
52	$1_1 2_2$	1_1	$1_1 1_2$	
53	$1_1 2_2$	1_1	1_1	1_2
54	$1_1 1_2$	1_1	$1_1 2_2$	
55	$1_1 1_2$	1_1	1_1	2_2
56	$1_1 1_2$	1_1	$1_1 1_2$	1_2
57	1_1	1_1	$1_1 3_2$	
58	1_1	1_1	$1_1 2_2$	1_2
59	1_1	1_1	$1_1 1_2$	2_2
60	1_1	1_1	1_1	3_2
61	3_2	3_1		
62	2_2	3_1	1_2	
63	2_2	3_1		1_2
64	1_2	3_1	2_2	
65	1_2	3_1		2_2
66	1_2	3_1	1_2	1_2
67		3_1	3_2	
68		3_1	2_2	1_2
69		3_1	1_2	2_2
70		3_1		3_2
71	3_2	2_1	1_1	
72	2_2	2_1	$1_1 1_2$	
73	2_2	2_1	1_1	1_2
74	1_2	2_1	$1_1 2_2$	
75	1_2	2_1	1_1	2_2
76	1_2	2_1	$1_1 1_2$	1_2
77		2_1	$1_1 3_2$	
78		2_1	$1_1 2_2$	1_2
79		2_1	$1_1 1_2$	2_2
80		2_1	1_1	3_2

№	1	2	3	4
81	3_2	1_1	2_1	
82	2_2	1_1	$2_1 1_2$	
83	2_2	1_1	2_1	1_2
84	1_2	1_1	$2_1 2_2$	
85	1_2	1_1	2_1	2_2
86	1_2	1_1	$2_1 1_2$	1_2
87		1_1	$2_1 3_2$	
88		1_1	$2_1 2_2$	1_2
89		1_1	$2_1 1_2$	2_2
90		1_1	2_1	3_2
91	3_2		3_1	
92	2_2		$3_1 1_2$	
93	2_2		3_1	1_2
94	1_2		$3_1 2_2$	
95	1_2		3_1	2_2
96	1_2		$3_1 1_2$	1_2
97			$3_1 3_2$	
98			$3_1 2_2$	1_2
99			$3_1 1_2$	2_2
100			3_1	3_2

1500

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Список X-кодов для перестановки (1,2,3,4,5,6,8,7) и результат работы программы, осуществляющей проверку выполнения неравенства Мурасуги-Тристрама

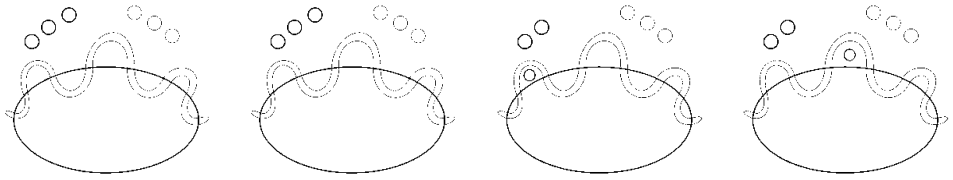
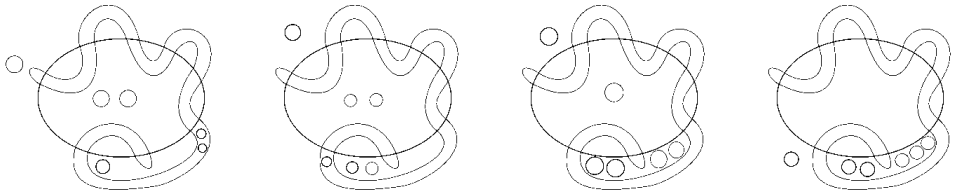
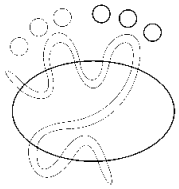
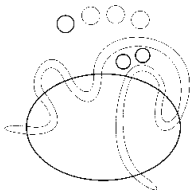
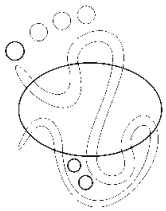
Таблица 6. Все X-коды для перестановки $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)$

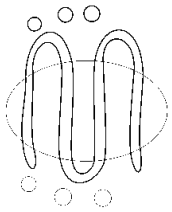
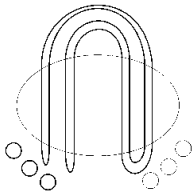
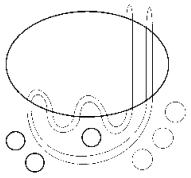
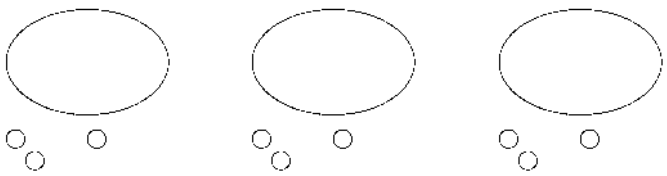
№	X-код	η
1, 2, 4, 7, 21, 22, 24, 27, 41, 42, 44, 47, 91, 92, 94, 97	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d2e4f6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [6]	0;2;4
3, 6, 8, 23, 26, 28, 43, 46, 48, 93, 96, 98	x4x5)6a2b4c6o5d4e6(6x5x6)7x4x5f2g4h6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	2;4
5, 9, 25, 29, 45, 49, 95, 99	x4x5)6a2b4c6o5d4e6o5f4g6(6x5x6)7x4x5h2i4j6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [4]	2;4
10, 30, 50, 100	x4x5)6a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6(6x5x6)7x4x5j2k4l6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	2
11, 12, 14, 17, 51, 52, 54, 57, 81, 82, 84, 87	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d2e4o3f2g4h6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5] x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d4e6o5f2g4h6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	0;2;4 2;4
13, 16, 18, 53, 56, 58, 83, 86, 88	x4x5)6a2b4c6o5d4e6(6x5x6)7x4x5f2g4o3h2i4j6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [4] x4x5)6a2b4c6o5d4e6(6x5x6)7x4x5f4g6o5h2i4j6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [4]	2;4 2;4
15, 19, 55, 59, 85, 89	x4x5)6a2b4c6o5d2e4f6o5g4h6(6x5x6)7x4x5i2j4k6o3l2m4(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3] x4x5)6a2b4c6o5d2e4f6o5g4h6(6x5x6)7x4x5i2j4k6o5l4m6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	2 2;4
20, 60, 90	x4x5)6a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6(6x5x6)7x4x5j2k4o3l2m4n6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2] x4x5)6a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6(6x5x6)7x4x5j4k6o5l2m4n6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2]	2 2;4

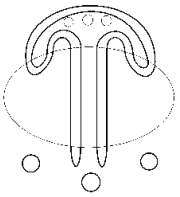
1501

31, 32, 34,	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d2e4o3f2g4o3h2i4j6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [4]	0;2;4
37, 71, 72,	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d2e4f6o3o5g2h4i6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [4]	2;4
74, 77	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d4e6o5f4g6o5h2i4j6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [4]	2;4
33, 36, 38,	x4x5)6a2b4c6o5d4e6(6x5x6)7x4x5f2g4o3h2i4o3j2k4l6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	0;2
73, 76, 78	x4x5)6a2b4c6o5d4e6(6x5x6)7x4x5f2g4h6o3o5i2j4k6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	2;4
	x4x5)6a2b4c6o5d4e6(6x5x6)7x4x5f4g6o5h4i6o5j2k4l6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	2;4
35, 39, 75,	x4x5)6a2b4c6o5d4e6o5f4g6(6x5x6)7x4x5h2i4o3j2k4o3l2m4n6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2]	0;2
79	x4x5)6a2b4c6o5d4e6o5f4g6(6x5x6)7x4x5h2i4j6o3o5k2l4m6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2]	2;4
	x4x5)6a2b4c6o5d4e6o5f4g6(6x5x6)7x4x5h4i6o5j4k6o5l2m4n6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2]	2;4
40, 65	x4x5)6a3b5o4c3d5(6x5x6)7e3f5x4x5g5(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	2;4
	x4x5)6a3b5(6x5x6)7c3d5o4e3f5x4x5g5(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	2;4
	x4x5)6a3b5(6x5x6)7c5x4x5d3e5o4f3g5(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	2;4
61, 62, 64,	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d2e4o3f2g4o3h2i4o3j2k4l6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	0;2;4
67	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d2e4o3f2g4h6o3o5i2j4k6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	2;4
	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d4e6o5f2g4h6o3o5i2j4k6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	2;4
	x4x5)6a2b4c6(6x5x6)7x4x5d6e4o5f6g4o5h6i4o5j2k4l6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [3]	2;4
63, 66, 68	x4x5)6a2b4c6o5m4n6(6x5x6)7x4x5d2e4o3f2g4o3h2i4o3j2k4l6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2]	0;2
	x4x5)6a2b4c6o5l4m6(6x5x6)7x4x5d2e4o3f2g4h6o3o5i2j4k6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2]	2;4
	x4x5)6a2b4c6o5l4m6(6x5x6)7x4x5d4e6o5f2g4h6o3o5i2j4k6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2]	2;4
	x4x5)6a2b4c6o5m4n6(6x5x6)7x4x5d6e4o5f6g4o5h6i4o5j2k4l6(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [2]	2;4
69, 80	x4x5)6o2a5(6x5x6)7x4x5b3c5(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	2;4
	x4x5)6a5o6b5(6x5x6)7x4x5c3d5(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	2;4
	x4x5)6a5(6x5x6)7x4x5b3o2c3d5(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	2;4
	x4x5)6a5(6x5x6)7x4x5b5o6c3d5(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [5]	2;4
70	x4x5)6a5(6x5x6)7x4x5b3c5(3x4x3x3x4x4x3x3x4 [6]	2

ПРИЛОЖЕНИЕ Г
Краткая сводка результатов

№	Перестановка	Результат исследования
1	12345678	Не удалось найти максимальный пучок. Построены: 
2	12345687	Не запрещены: 
3	12345876	Не удалось найти максимальный пучок. Построено: 
4	12346785	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
5	12347658	Построено:  Все остальные расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
6	12348765	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
7	12365478	Построено:  Все остальные расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.

№	Перестановка	Результат исследования
8	12365487	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
9	12367854	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
10	12387456	Не удалось найти максимальный пучок. Построено: 
11	12456783	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
12	12567438	Построено:  Все остальные расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
13	12654783	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
14	12678543	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
15	12765438	Построено:  Вопрос о реализуемости открыт: 
16	12876543	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
17	14326785	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.

№	Перестановка	Результат исследования
18	14327658	Построено:  Все остальные расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
19	14328765	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
20	14567823	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.
21	14587623	Все расположения шести свободных овалов запрещены неравенством Мурасуги-Тристрама.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Савониной Надежды Александровны

Заявление о новизне

Количественная оценка процента метилирования ДНК в опухолевых клетках имеет решающее значение для диагностики онкологических заболеваний. Однако такие измерения подвержены различным экспериментальным погрешностям. Смещение полимеразной цепной реакции (ПЦР) приводит к неравному извлечению метилированных и неметилированных групп как на стадии подготовки образца, так в процессах считывания. Поэтому требуется коррекция получаемых экспериментальных измерений, на основе заранее подготовленных калибровочных данных генов ДНК. Ранее в нескольких работах было показано, что неплохую аппроксимацию дает гипербола, проходящая через точки (0, 0) и (100, 100). В работах Moskalev EA, Zavgorodnij MG, Majorova SP, et al. «Correction of PCR-bias in quantitative DNA methylation studies by means of cubic polynomial regression. Nucleic Acids Res. 2011;39:e77» и Москалев Е.А., Завгородний М.Г., Майорова С.П., Лебедев И.Н. «Устранение экспериментальных отклонений при количественном анализе профилей метилирования ДНК посредством высокопроизводительного бисульфитного секвенирования и гибридизации на олигонуклеотидных ДНК-чипах. Медицинская генетика. 2016;15(11):9-16» обосновано, что для ряда генов калибровочные данные хорошо аппроксимирует гипербола, проходящая через начальную и конечную точки, а для остальных генов – кубическая парабола. Естественно предположить, что более точную аппроксимацию дает линейная комбинация гиперболы со свободными концами и кубический полином.

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее – работа) под названием «Создание программного комплекса исправления искаженных данных» являются: Разработка алгоритма вычисления параметров комбинированной функции (гипербола + кубический полином) на основе реальных калибровочных данных, полученных из онкоцентра в Германии; Подготовлено полностью отлаженное программное приложение, позволяющее исправлять искаженные экспериментальные данные метилирования генов ДНК.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период работы над магистерской диссертацией с 01 сентября 2018 г. по 15 июля 2020 г. мною был произведён анализ методов аппроксимаций и подходов к исправление искаженных данных, изложенных в учебной и научной литературе. Выше мною обоснована актуальность и практическая значимость тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Завгородним Михаилом Григорьевичем, доцентом кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета.
- Проведена серия консультаций (по переписке) со специалистами в области диагностики онкозаболеваний в Германии и России (Evgeny A. Moskalev и Jorg D. Hoheisel – Functional Genome Analysis, Deutsches Krebsforschungszentrum, Im Neuenheimer Feld 580, 69120 Heidelberg, Germany; Иван А. Воробьев – Функциональная морфология гемобластозов, Национальный гематологический научный центр Российской академии медицинских наук, Новозыковский проезд, 4а, 125167 Москва, и др.).

• Проведены выступления на научной сессии Воронежского государственного университета в 2019 г. и 2020 г.

Таким образом, по результатам работы с учебной и научной литературой, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым и важным для практического использования.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоялась 26.06.2020 г. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  Савонина Надежда Александровна

29 мая 2021 г. Воронеж, Россия

ОТЗЫВ

научного руководителя о магистерской диссертации студентки 2 курса магистратуры Савониной Надежды Александровны, обучающейся на математическом факультете Воронежского государственного университета по направлению 02.04.01 Математика и компьютерные науки, профиль Математические основы компьютерных наук, на тему

«**Создание программного комплекса исправления искаженных данных**»

Количественный анализ профилей метилирования ДНК обладает высоким диагностическим потенциалом и является неотъемлемым аспектом исследований в области эпигенетических механизмов онкогенеза. Однако погрешности измерений в исследованиях могут препятствовать качественной интерпретации экспериментальных результатов. Ранее коллективом исследователей с моим участием были разработаны методы коррекции погрешностей, основанные на аппроксимации калибровочных данных кубическим полиномом или гиперболой, проходящей через крайние точки.

Студентке Савониной Н.А. было предложено написать комплекс программ, позволяющих находить параметры функций, аппроксимирующих реальные калибровочные данные метилирования ДНК. В качестве аппроксимирующих функций было предложено рассмотреть кубический полином, гиперболу, линейную комбинацию кубического полинома и гиперболы. Кроме того, для каждой из построенных аппроксимирующих функций написать программы, исправляющие искаженные экспериментальные данные.

С поставленными задачами Савонина Н.А. отлично справилась. Ею были предложены алгоритмы отыскания параметров рассматриваемых аппроксимирующих функций. Алгоритмы реализованы в виде программ. Написана программа исправления искаженных данных. Для специалиста выводятся на экран графики всех аппроксимирующих функций и величины среднеквадратического отклонения. Он может выбрать аппроксимирующую функцию или автоматический режим. В автоматическом режиме программа выполняет исправления на основе комбинированной функции, так как ее среднеквадратическое отклонение наименьшее для всех генов. Программы отлажены, выполнено их тестирование.

Студентка Савонина Н.А. показала ответственное отношение к обучению, хорошую математическую подготовку, продемонстрировала умения и навыки построения алгоритмов и программирования.

Считаю, что магистерская диссертация Савониной Н.А. отвечает всем требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам, и заслуживает оценки «отлично».

Руководитель
доцент кафедры функционального анализа
и операторных уравнений,
доцент, канд. физ.-мат. наук

подпись М. Г. Завгородний
расшифровка подписи

25.06.2020 г.

1508

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математический факультет

Кафедра функционального анализа и операторных уравнений

Создание программного комплекса исправления искаженных данных

Магистерская работа

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Профиль Математические основы компьютерных наук

Допущено к защите в ГЭК __.__.20__

Зав. кафедрой	_____	д.физ.-мат.н., проф.	М.И.Каменский
Обучающийся	_____		Н.А.Савонина
Руководитель	_____	к.физ.-мат.н., доцент	М.Г.Завгородний

Воронеж 2020

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математический факультет

Кафедра функционального анализа и операторных уравнений

Создание программного комплекса исправления искаженных данных

Магистерская работа

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Профиль Математические основы компьютерных наук

Допущено к защите в ГЭК __.__.20__

Зав. кафедрой	_____	д.физ.-мат.н., проф.	М.И.Каменский
Обучающийся	_____		Н.А.Савонина
Руководитель	_____	к.физ.-мат.н., доцент	М.Г.Завгородний

Воронеж 2020

1510

Содержание

Введение 3
Глава 1. Аппроксимация и исправление искаженных данных. 5
1.1 Описание метода 5
1.2 Оценка погрешности 6
1.3 Аппроксимация данных с помощью кубической параболы 6
1.4 Аппроксимация данных с помощью гиперболы 7
1.5 Аппроксимация данных с помощью линейной комбинации кубической параболы и гиперболы 8
1.6 Методы исправления данных 9
Глава 2. Практическая часть. 10
2.1 Постановка задачи. 10
2.2 Построение аппроксимационной кривой при помощи кубической параболы. 10
2.3 Построение аппроксимационной кривой при помощи гиперболы 12
2.4 Построение аппроксимационной кривой при помощи функции, являющейся линейной комбинацией кубической параболы и гиперболы .. 16
2.5 Алгоритм исправления экспериментальных данных методом деления пополам. 20
2.6 Программа исправления экспериментальных данных. 20
2.7 Анализ результатов аппроксимации. 25
2.8 Исходный код программы исправления экспериментальных данных ... 29
Заключение 45
Список литературы 46

1511

Введение

Каждый год в химии, биологии, физике и других сферах науки появляются новые способы получения данных. Новые методы по ряду параметров превосходят предшествующие, однако результаты могут быть получены со значительной погрешностью.

Так, например, для диагностики онкологических заболеваний определяется показатель онкомаркеров в крови. Для этого производятся замеры процента метилирования в ДНК с помощью исследования её параметров. Но из-за малого размера гена провести необходимые измерение не предоставляется возможным. Поэтому проводится реакция, которая увеличивает концентрацию определенных ферментов ДНК. После осуществления этой реакции удаётся произвести замеры необходимых параметров. Однако данные получены с погрешностью, так как после увеличения числа генов к ним ещё добавилась метильная группа, поэтому произошло завышение значений параметров. Необходимо исправление полученных результатов исследований. В данной работе рассматривается несколько способов, при помощи которых можно откалибровать полученные неточным методом значения.

Данную проблему исследовали в своих работах Москалев Е. А., Завгородний М. Г., Майорова С. П., Воробьев И. А. [5]. В их общей работе обосновывается, что кубическая парабола и гипербола являются наилучшими для аппроксимации функциями. Поэтому в моей работе используются эти функции, а также их линейная комбинация. Также эта проблема рассматривалась в дипломной работе Шилина Семёна, однако он использовал для нахождения коэффициентов гиперболы её частный случай, а именно функцию, которая проходит через две заданные точки.

Цель работы – написать программу, позволяющую построить функции, аппроксимирующие калибровочные данные, а затем исправить входные

значения наиболее точным образом, используя наилучшую из построенных функций для аппроксимации.

Указанная цель достигается выполнением задач:

1) Рассмотреть аппроксимацию калибровочных данных по методу наименьших квадратов кубической параболой, гиперболой и комбинированной функцией, являющейся линейной комбинацией кубической параболы и гиперболы.
2) Написать программу, которая находит параметры трех указанных аппроксимирующих функций, и вычисляет среднеквадратическое отклонение для каждой из этих функций.
3) Провести сравнение аппроксимации результатов исследования крови исследуемыми функциями.
4) Написать программу для коррекции значений экспериментальных данных.

Глава 1. Аппроксимация и исправление искаженных данных.

1.1 Описание метода

Пусть у нас имеется n результатов эксперимента

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

где x_i – результаты проведения точного эксперимента, y_i – результаты проведения неточного эксперимента.

Для того, чтобы любому неточному значению можно было сопоставить точное значение, необходимо найти зависимость между ними и представить её в виде аппроксимирующей функции. Будем считать, что вид аппроксимирующей (приближающей) зависимости выбран, и её можно записать в виде

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m), m \leq n - 1 \quad (1.1)$$

где f – известная функция, $a_0, a_1, \dots, a_m$ – неизвестные постоянные параметры, значения которых надо найти.

В статье [5] приводится обоснование того, что наилучшими функциями для аппроксимации являются кубическая парабола

$$y(x_i) = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d \quad (1.2)$$

и гипербола

$$y(x_i) = \frac{ax_i + b}{x_i + d} \quad (1.3)$$

Также в данной работе в качестве аппроксимирующей рассматривается функция, являющаяся линейной комбинацией кубической параболы и гиперболы

$$y(x_i) = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h} \quad (1.4)$$

Используя метод наименьших квадратов, мы можем оценить качество аппроксимирующей функции и понять, какая из этих трех функций (1.2), (1.3), (1.4) является наиболее оптимальной. В методе наименьших квадратов

приближение функции (1.1) к экспериментальной зависимости считается наилучшим, если выполняется условие

$$\sigma^2 = D = D(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{n}\big(y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m)\big)^2 \to min.$$

1.2 Оценка погрешности

Для того чтобы определить какая функция лучше всего подходит для аппроксимации исходных значений рассчитывается среднеквадратичное отклонение. Чем меньше будет это число, тем точнее полученная функция описывает экспериментальные данные.

Среднеквадратичное отклонение вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m))^2}, \quad (1.5)$$

где $f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m)$ – аппроксимирующая функция, $a_0, a_1, \dots, a_m$ – коэффициенты аппроксимирующей функции, x_i, y_i – экспериментальные данные, n – количество данных в эксперименте.

1.3 Аппроксимация данных с помощью кубической параболы

Рассмотрим в качестве аппроксимирующей функции кубическую параболу (1.2). Эта функция линейна относительно своих параметров a, b, c, d, значит её коэффициенты находятся достаточно просто. Для этого необходимо найти частные производные функции (1.2) по коэффициентам a, b, c, d и приравнять их к нулю. Решив полученную систему методом Гаусса, мы найдем нужные значения коэффициентов.

1.4 Аппроксимация данных с помощью гиперболы

Рассмотрим в качестве аппроксимирующей функции гиперболу (1.3). Эта функция не линейна относительно своих параметров a, b, d, поэтому мы не можем найти значения её коэффициентов, решая линейные системы. В таком случае был предложен следующий метод решения:

1) Определить выпуклость/вогнуть исходных данных. Для этого считается отклонение исходных данных от линейной функции $y = x$. Если это отклонение положительное, то данные выпуклые, а если отрицательное – данные вогнутые.
2) Найти частные производные функции (1.3) по коэффициентам a, b и приравнять их к нулю.
3) Найти значения коэффициентов a, b, перебирая значения d. Берем $d > 0$, если данные выпуклые. При таких значениях d будет нарисован график выпуклой ветви гиперболы. Если данные вогнутые, то берем $d < -100$. При таких значениях d будет нарисован график вогнутой ветви гиперболы. В цикле считаем начальное значение $d = 1$, если данные выпуклые, и с каждым шагом цикла прибавляем к этому значению единицу. Берем начальное значение $d = -101$, если данные вогнутые, затем на каждом шаге вычитаем единицу. Для каждого значения d находятся a, b решением системы, полученной на предыдущем шаге. Для этих наборов a, b, d находим среднеквадратичное отклонение σ.
4) Если с изменением d значение σ изменяется слишком мало ($\Delta < 0.001$), то выпуклость/вогнутость данных была определена неправильно, и программа начинает цикл заново в другом диапазоне значений d. Когда нашли минимальную $\sigma(a, b, d)$, то полученные значения коэффициентов a, b, d считаются искомыми.

1.5 Аппроксимация данных с помощью линейной комбинации кубической параболы и гиперболы

Рассмотрим в качестве аппроксимирующей функции линейную комбинацию кубической параболы и гиперболы (1.4). Эта функция не линейна относительно своих параметров a, b, c, d, g, h, поэтому мы не можем найти значения её коэффициентов, решая линейные системы. В таком случае был предложен следующий метод решения:

1) Определить выпуклость/вогнуть исходных данных. Для этого считается отклонение исходных данных от линейной функции $y = x$. Если это отклонение положительное, то данные выпуклые, а если отрицательное – данные вогнутые.
2) Найти частные производные функции (1.4) по коэффициентам a, b, c, d, g и приравнять их к нулю.
3) Найти значения коэффициентов a, b, c, d, g, перебирая значения h. Берем $h > 0$, если данные выпуклые, а если данные вогнутые, то $h < -100$. В цикле считаем начальное значение $h = 1$, если данные выпуклые, и с каждым шагом цикла прибавляем к этому значению единицу. Берем начальное значение $h = -101$, если данные вогнутые, затем на каждом шаге вычитаем единицу. Для каждого значения h находятся a, b, c, d, g решением системы, полученной на предыдущем шаге. Для этих наборов $a, b, \mathrm{c}, d, g, h$ находим среднеквадратичное отклонение σ.
4) Если с изменением h значение σ изменяется слишком мало ($\Delta < 0.001$), то выпуклость/вогнутость данных была определена неправильно, и программа начинает цикл заново в другом диапазоне значений h. Когда нашли минимальную $\sigma(a, b, \mathrm{c}, d, g, h)$, то полученные значения коэффициентов $a, b, \mathrm{c}, d, g, h$ считаются искомыми.

1.6 Методы исправления данных

После получения аппроксимационной кривой можем перейти к исправлению данных полученных неточным методом. Для этого требуется представить экспериментальное значение, как y, и найти исправленное (точное) значение – x.

Существует несколько методов, которые позволяют исправить полученные в ходе эксперимента данные:

1) Метод деления пополам (метод бисекций) [1, 2].
2) Метод хорд [2].
3) Метод касательных [2].

Для исправления процента метелированности был выбран и реализован метод деления пополам. Его преимущества по сравнению с другими в том, что он относительно прост в реализации и достаточно быстр (решение находится за конечное число шагов). Другие методы не дают большего прироста производительности при нахождении решения, чем метод бисекций.

Глава 2. Практическая часть.

2.1 Постановка задачи.

Пусть имеется два набора данных, полученных опытным путём. Первый набор получен применением точного метода измерения. Обозначим этот набор $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Второй набор получен методом, дающим погрешность, но этот метод либо дешевле первого, либо более доступный. Обозначим этот набор $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Представим наборы данных $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, где $(i = 1, \dots, n)$ на координатной плоскости в виде точек, у которых первая координата - $\{x_i\}$, вторая - $\{y_i\}$.

Необходимо написать программу, которая будет аппроксимировать набор экспериментальных значений с минимальной погрешностью, а также исправлять данные полученные неточным методом. Имея в своем распоряжении эту программу, любой пользователь сможет пользоваться удобным для него методом измерений и получать откорректированные (верные) данные.

2.2 Построение аппроксимационной кривой при помощи кубической параболы.

Рассмотрим случай аппроксимации кубической параболой:

$$y(x_i) = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d.$$

Необходимо найти такие коэффициенты $a,\ b,\ c,\ d$, чтобы сумма σ^2 была минимальной, то есть

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - y_i)^2 \to min,$$

где x_i, y_i – данные, которые были получены в результате эксперимента, а n – количество исследований в эксперименте.

Тогда

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)^2 .$$

Обозначим σ^2 как D и посчитаем частные производные σ^2 по переменным a, b, c, d.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)x_i^3 \\ \dfrac{\partial D}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)x_i^2 \\ \dfrac{\partial D}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i)x_i \\ \dfrac{\partial D}{\partial d} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i) \end{cases}$$

Приравняем частные производные к нулю и преобразуем уравнения.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^6 + b\sum_{i=1}^{n}x_i^5 + c\sum_{i=1}^{n}x_i^4 + d\sum_{i=1}^{n}x_i^3 = \sum_{i=1}^{n}y_i x_i^3 \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^5 + b\sum_{i=1}^{n}x_i^4 + c\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + d\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}y_i x_i^2 \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + d\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}y_i x_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n}x_i + dn = \sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases} \quad (2.1)$$

Алгоритм построения аппроксимационной кривой при помощи кубической параболы:

1. Считываем исходные данные из выбранного пользователем файла в массивы *xMas* и *yMas*.
2. Определяем количество элементов *n* в массиве *xMas*.

1520

3. Определяем двумерный массив $alpha$ и одномерный массив $beta$.
4. Цикл при изменении переменной i от 1 до n выполняем:
   4.1. Высчитываем коэффициенты $alpha_{ij}$, $beta_j$ системы линейных уравнений по формулам (2.1).
5. Вызываем функцию решения системы линейных уравнений методом Гаусса, передав в качестве параметров массивы $alpha$ и $beta$. Полученный результат запишем в *result*.
6. Полагаем $a = result[0], b = result[1], c = result[2], d = result[3]$.
7. Цикл при изменении переменной x от 0 до 100 выполняем:
   7.1. Полагаем $y = (x^3 * a) + (x^2 * b) + (x * c) + d$.
   7.2. Добавляем на график точку с координатой $\{x; y\}$ и соединяем её линией с предыдущей точкой на графике, если такая есть.
8. Цикл при изменении переменной i от 1 до n выполняем:
   8.1. Добавляем на график точку с координатой $\{xMas[i]; yMas[i]\}$.
9. Полагаем $otkl = 0$.
10. Цикл при изменении переменной i от 1 до n выполняем:
    10.1. Полагаем $x = xMas[i]$.
    10.2. Полагаем $y = (x^3 * a) + (x^2 * b) + (x * c) + d$.
    10.3. Полагаем $otkl += (yMas[i] - y)^2$.
11. Полагаем $otkl = \sqrt{otkl/n}$
12. Сохраняем полученные параметры $a, b, c, d, otkl$ в файл.

2.3 Построение аппроксимационной кривой при помощи гиперболы

Рассмотрим случай аппроксимации гиперболой:

1521

$$y(x_i) = \frac{ax_i+b}{x_i+d}.$$

Необходимо найти такие коэффициенты $a,\ b,\ c,\ d$, чтобы сумма σ^2 была минимальной, то есть

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - y_i)^2 \to min,$$

где x_i, y_i – данные, которые были получены в результате эксперимента, а n – количество исследований в эксперименте.

Тогда

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\frac{ax_i+b}{x_i+d} - y_i)^2.$$

Обозначим σ^2 как D. Пусть $d = d_1$, где d_1 известно. Посчитаем частные производные σ^2 по переменным a, b.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial a} = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\frac{ax_i + b}{x_i + d_1} - y_i)\frac{x_i}{x_i + d_1} \\ \dfrac{\partial D}{\partial b} = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\frac{ax_i + b}{x_i + d_1} - y_i)\frac{1}{x_i + d_1} \end{cases}$$

Приравняем частные производные к нулю и преобразуем уравнения.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{ax_i^2 + bx_i}{(x_i + d_1)^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{x_i + d_1} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{ax_i + b}{(x_i + d_1)^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i + d_1} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Для известного $d = d_1$ можем решить это уравнение и найти a_1, b_1. Затем взять $d = d_2$ и для этого значения найти a_2, b_2 и так далее. На каждом шаге будем считать $\sigma_j(a_j, b_j, d_j) = \sqrt{\sum_{j=1}^{K}(\frac{ax_j+b}{x_j+d} - y_i)^2}$. Цель – найти

минимальную σ_j, тогда параметры a_j, b_j, d_j, при которых достигается минимум, будут оптимальным решением.

Алгоритм построения аппроксимационной кривой при помощи гиперболы:

1. Считываем исходные данные из выбранного пользователем файла в массивы *xMas* и *yMas*.
2. Определяем количество элементов *n* в массиве *xMas*.
3. Полагаем $sumOtkl = 0$.
4. Цикл при изменении переменной *i* от 1 до *n* выполняем:
   4.1. Полагаем $sumOtkl += yMas[i] - xMas[i]$.
5. Полагаем $isBulgy = sumOtkl > 0$.
6. Если $isBulgy == true$, то $d = 1, dIncrement = 1$, иначе $d = -101, dIncrement = -1$.
7. Полагаем $counter = 0, lastS = 0, isIncreasing = false$.
8. Бесконечный цикл $while\ (true)$ выполняем:
   8.1. Полагаем $counter += 1$
   8.2. Определяем двумерный массив $alpha$ и одномерный массив $beta$.
   8.3. Цикл при изменении переменной *i* от 1 до *n* выполняем:
      8.3.1. Высчитываем коэффициенты $alpha_{ij}$, $beta_j$ системы линейных уравнений по формулам (2.2).
   8.4. Вызываем функцию решения системы линейных уравнений методом Гаусса, передав в качестве параметров массивы $alpha$ и $beta$. Полученный результат запишем в *result.*
   8.5. Полагаем $a = result[0], b = result[1]$.
   8.6. Полагаем $s = 0$.
   8.7. Цикл при изменении переменной *i* от 1 до *n* выполняем:

8.7.1. Полагаем $x = xMas[i]$.

8.7.2. Полагаем $y = ((a * x) + b) / (x + d)$.

8.7.3. Полагаем $s+= (yMas[i] - y)^2$.

8.8. Полагаем $s = \sqrt{s/n}$

8.9. Записываем полученные значения a, b, d, s в файл.

8.10. Если $counter! = 1$, то выполняем:

8.10.1. Если $counter == 2$, то полагаем $isIncreasing = s > lastS$.

8.10.2. Иначе если $|s - lastS| < 0.001$, то полагаем $isBulgy = !isBulgy$ и возвращаемся к шагу 6.

8.10.3. Иначе если $isIncreasing == true$, и $s < lastS$, то полагаем $isIncreasing = false$.

8.10.4. Иначе если $s > lastS$, то прервать выполнения цикла.

8.11. Полагаем $lastS = s, d += dIncrement$.

9. Цикл при изменении переменной x от 0 до 100 выполняем:

9.1. Полагаем $y = ((a * x) + b) / (x + d)$.

9.2. Добавляем на график точку с координатой $\{x; y\}$ и соединяем её линией с предыдущей точкой на графике, если такая есть.

10. Цикл при изменении переменной *i* от 1 до *n* выполняем

10.1. Добавляем на график точку с координатой $\{xMas[i]; yMas[i]\}$.

11. Полагаем $otkl = 0$.

12. Цикл при изменении переменной *i* от 1 до *n* выполняем:

12.1. Полагаем $x = xMas[i]$.

12.2. Полагаем $y = ((a * x) + b) / (x + d)$.

12.3. Полагаем $otkl+= yMas[i] - y^2$

13. Полагаем $otkl = \sqrt{otkl/n}$

1524

14. Сохраняем полученные параметры $a, b, d, otkl$ в файл.

2.4 Построение аппроксимационной кривой при помощи функции, являющейся линейной комбинацией кубической параболы и гиперболы

Рассмотрим аппроксимацию функцией

$$y(x_i) = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h} - y_i)^2$$

Обозначим σ^2 как D.

Пусть $h = h_1$, где h_1 известно. Посчитаем частные производные σ^2 по переменным a, b, c, d, g.

$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h_1} - y_i)x_i^3 \\ \frac{\partial D}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h_1} - y_i)x_i^2 \\ \frac{\partial D}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h_1} - y_i)x_i \\ \frac{\partial D}{\partial d} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h_1} - y_i) \\ \frac{\partial D}{\partial g} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h_1} - y_i)\frac{1}{x_i + h_1} \end{cases}$$

Приравняем $\frac{\partial D}{\partial a}, \dots, \frac{\partial D}{\partial g}$ к 0 и преобразуем уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(ax_i^6 + bx_i^5 + cx_i^4 + dx_i^3 + \frac{gx_i^3}{x_i + h_1}) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n}(ax_i^5 + bx_i^4 + cx_i^3 + dx_i^2 + \frac{gx_i^2}{x_i + h_1}) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n}(ax_i^4 + bx_i^3 + cx_i^2 + dx_i + \frac{gx_i}{x_i + h_1}) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n}(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d + \frac{g}{x_i + h_1}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n}(\frac{ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d}{x_i + h_1} + \frac{g}{(x_i + h_1)^2}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i + h_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^6 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^5 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + d\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + g\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_i + h_1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^3 \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^5 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + d\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + g\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i + h_1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + d\sum_{i=1}^{n} x_i + g\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + h_1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i + dn + g\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + h_1} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{(x_i + h_1)} + b\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(x_i + h_1)} + c\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{(x_i + h_1)} + dn + \\ +g\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i + h_1)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i + h_1} \end{cases} \quad (2.3)$$

Алгоритм построения аппроксимационной кривой при помощи гиперболы:

1. Считываем исходные данные из выбранного пользователем файла в массивы *xMas* и *yMas*.
2. Определяем количество элементов *n* в массиве *xMas*.
3. Полагаем $sumOtkl = 0$.

1526

4. Цикл при изменении переменной i от 1 до n выполняем:
   4.1. Полагаем $sumOtkl += yMas[i] - xMas[i]$.
5. Полагаем $isBulgy = sumOtkl > 0$.
6. Если $isBulgy == true$, то $h = 1, hIncrement = 1$, иначе $h = -101, hIncrement = -1$.
7. Полагаем $counter = 0, lastS = 0, isIncreasing = false$.
8. Бесконечный цикл $while\ (true)$ выполняем:
   8.1. Полагаем $counter += 1$
   8.2. Определяем двумерный массив $alpha$ и одномерный массив $beta$.
   8.3. Цикл при изменении переменной i от 1 до n выполняем:
      8.3.1. Высчитываем коэффициенты $alpha_{ij}$, $beta_j$ системы линейных уравнений по формулам (2.3).
   8.4. Вызываем функцию решения системы линейных уравнений методом Гаусса, передав в качестве параметров массивы $alpha$ и $beta$. Полученный результат запишем в *result.*
   8.5. Полагаем $a = result[0], b = result[1], c = result[2], d = result[3], g = result[4]$.
   8.6. Полагаем $s = 0$.
   8.7. Цикл при изменении переменной i от 1 до n выполняем:
      8.7.1. Полагаем $x = xMas[i]$.
      8.7.2. Полагаем $y = (x^3 * a) + (x^2 * b) + (x * c) + d + + \frac{g}{x + h}$.
      8.7.3. Полагаем $s += (yMas[i] - y)^2$.
   8.8. Полагаем $s = \sqrt{s/n}$
   8.9. Записываем полученные значения a, b, c, d, g, h, s в файл.
   8.10. Если $counter! = 1$, то выполняем:

1527

8.10.1. Если $counter == 2$, то полагаем $isIncreasing = s > lastS$.

8.10.2. Иначе если $|s - lastS| < 0.001$, то полагаем $isBulgy = !\,isBulgy$ и возвращаемся к шагу 6.

8.10.3. Иначе если $isIncreasing == true$, и $s < lastS$, то полагаем $isIncreasing = false$.

8.10.4. Иначе если $s > lastS$, то прервать выполнения цикла.

8.11. Полагаем $lastS = s, d \mathrel{+}= dIncrement$.

9. Цикл при изменении переменной x от 0 до 100 выполняем:

9.1. Полагаем $y = (x^3 * a) + (x^2 * b) + (x * c) + d + + \frac{g}{x+h}$.

9.2. Добавляем на график точку с координатой $\{x; y\}$ и соединяем её линией с предыдущей точкой на графике, если такая есть.

10. Цикл при изменении переменной *i* от 1 до *n* выполняем

10.1. Добавляем на график точку с координатой $\{xMas[i]; yMas[i]\}$.

11. Полагаем $otkl = 0$.

12. Цикл при изменении переменной *i* от 1 до *n* выполняем:

12.1. Полагаем $x = xMas[i]$.

12.2. Полагаем $y = (x^3 * a) + (x^2 * b) + (x * c) + d + + \frac{g}{x+h}$.

12.3. Полагаем $otkl \mathrel{+}= yMas[i] - y^2$

13. Полагаем $otkl = \sqrt{otkl/n}$

14. Сохраняем полученные параметры $a, b, c, d, g, h, otkl$ в файл.

1528

2.5 Алгоритм исправления экспериментальных данных методом деления пополам.

1. Считываем исходные данные из выбранного пользователем файла в массив $wMas$.
2. Определяем количество элементов n в массиве $wMas$.
3. Определяем одномерный массив $correctedData$.
4. Цикл при изменении переменной i от 1 до n выполняем:
   - 4.1. Полагаем $y = wMas[i], start = 0, end = 100, x = 0, res = 0$.
   - 4.2. Цикл с условием $|res - y| > 0.01$ выполняем:
     - 4.2.1. Полагаем $x = \frac{start+end}{2}, res = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$.
     - 4.2.2. Если $res < y$, то $start = x$, иначе $end = x$.
   - 4.3. Добавляем элемент x в массив $correctedData$.
5. Записываем массив $correctedData$ в файл.

2.6 Программа исправления экспериментальных данных.

Основным приоритетом проекта является удобство использования и скорость работы программы, поэтому было принято решение, что приложение будет десктопным. Приложение написано под операционную систему Microsoft Windows, так как на ней работает большее количество компьютеров.

В качестве языка программирования для реализации программы исправления экспериментальных данных был выбран C++. Наиболее популярной и удобной для работы с C++ средой разработки является Visual Studio.

Основными библиотеками, использованными при написании программы, являются:

1. System::Math – предоставляет константы и статические методы для тригонометрических, логарифмических и иных общих математических функций.
2. System::Windows::Forms::DataVisualization::Charting – содержит методы и свойства для элемента управления Windows Forms Chart, который используются для отрисовки одной или нескольких диаграмм с помощью одного набора осей.
3. Std::fstream – предоставляет методы для работы с файлами, позволяет получать содержимое из файла и записывать данные в него.

Интерфейс программы состоит из следующих основных блоков (Рис. 1):

- Выбор рассматриваемого гена и файла с исходными данными.
- Построение и визуальное представление аппроксимационных кривых.
- Выбор метода для исправления данных, выбор файла, в который будут записаны скорректированные данные и исправление данных.

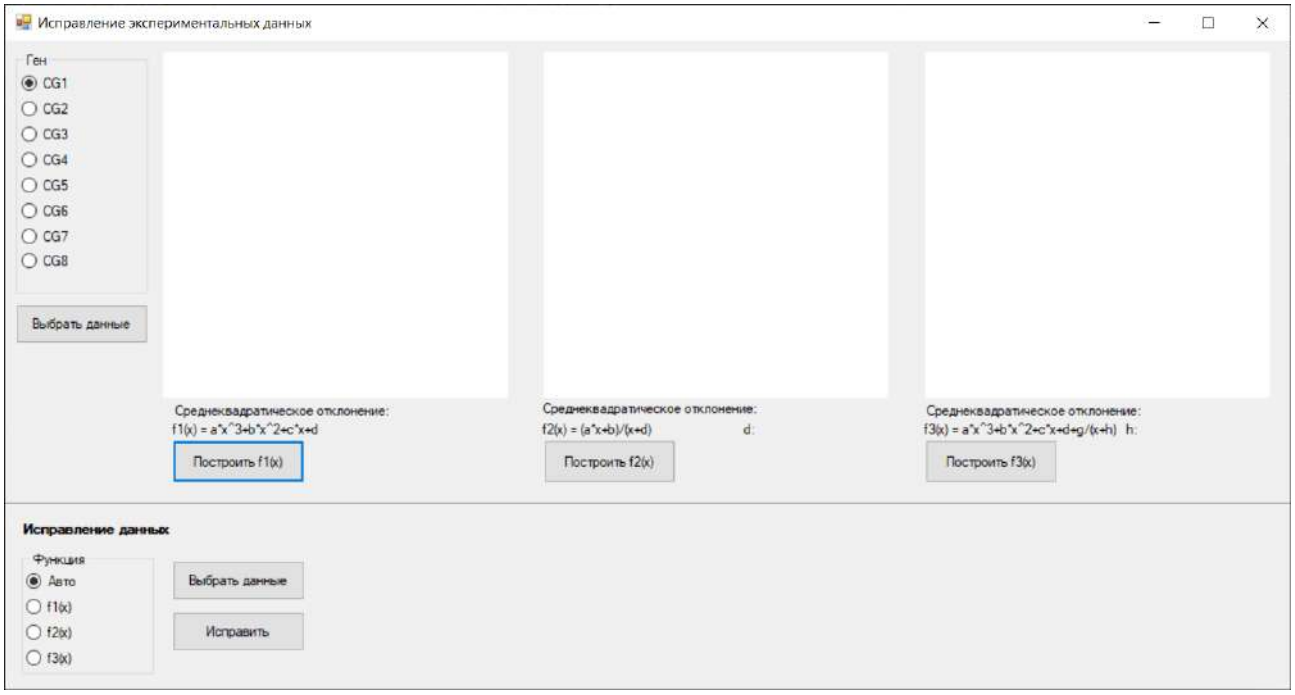


Рис. 1. Интерфейс программы.

1530

Для начала пользователю необходимо выбрать один из предложенных генов (CG1, CG2, …, CG8), экспериментальные значения по которому будут рассматриваться для аппроксимации (Рис. 2).

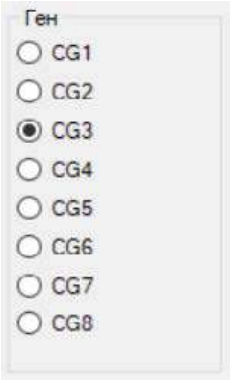


Рис. 2. Выбор рассматриваемого гена.

После выбора гена, пользователь должен выбрать файл с исходными данными. Для этого ему необходимо нажать кнопку «Выбрать данные», после чего откроется диалоговое окно для выбора файла (Рис. 3). Пользователь выбирает необходимый файл и нажимает кнопку «Открыть».

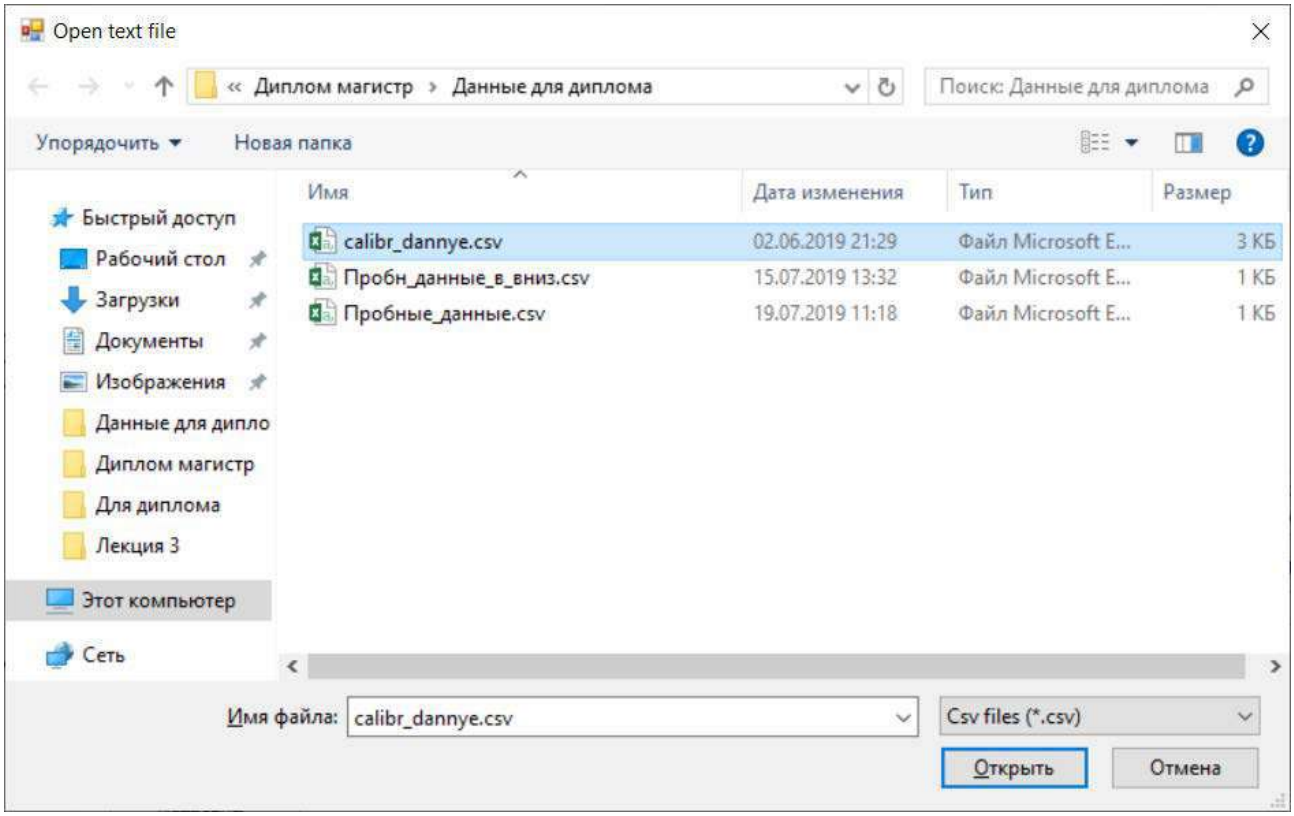


Рис. 3. Окно выбора исходных данных.

После этого, пользователь может перейти к построению аппроксимационных кривых (Рис. 4).

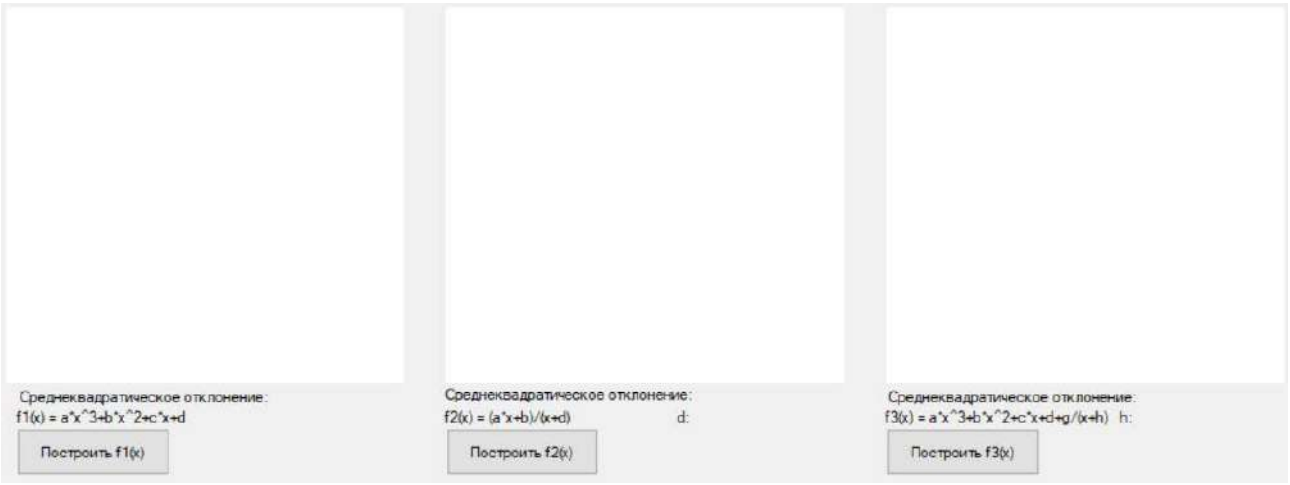


Рис. 4. Область построения аппроксимационных кривых.

Пользователь может построить одну или несколько аппроксимационных кривых путем нажатия на кнопки «Построить f1(x)» (кубической параболой), «Построить f2(x)» (гиперболой), «Построить f3(x)» (линейной комбинацией кубической параболы и гиперболы). Пользователю выводятся графики, на которых можно видеть, на сколько точно аппроксимационная кривая описывает исходные значения (Рис. 5). Также под графиками выводится значение среднеквадратического отклонения.

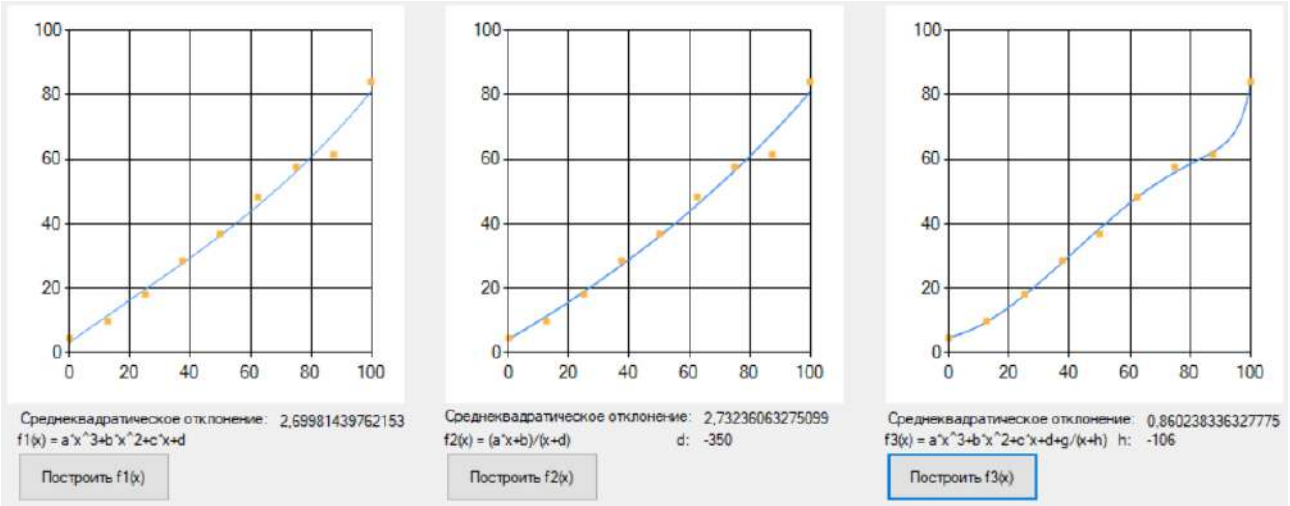


Рис. 5. Построение аппроксимационных кривых.

Далее пользователь может перейти к исправлению данных (Рис. 6).

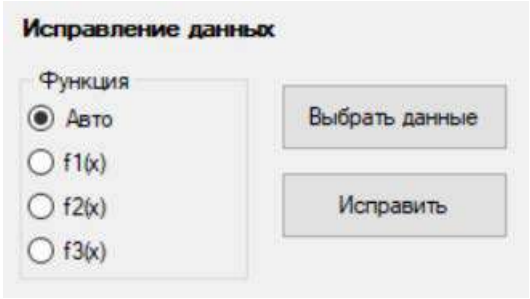


Рис. 6. Область исправления данных.

Здесь пользователю предлагается выбрать функцию, которая будет использоваться для исправления данных:

А) Авто – программа выбирает наилучший способ исправления, то есть корректировка данных будет производится на основе функции, у которой значение среднеквадратичного отклонения минимальное.

Б) $f_1(x)$ – корректировка данных будет производится на основе кубической параболы.

В) $f_2(x)$ – корректировка данных будет производится на основе гиперболы.

Г) $f_3(x)$ – корректировка данных будет производится на основе функции, которая является линейной комбинацией кубической параболы и гиперболы.

После выбора функции для исправления, пользователь выбирает файл с неточными данными, путем нажатия на кнопку «Выбрать данные» (Рис. 3).

Затем пользователь может нажать кнопку «Исправить», чтобы программа скорректировала считанные данные и предложила сохранить их в выходной файл (Рис. 7).

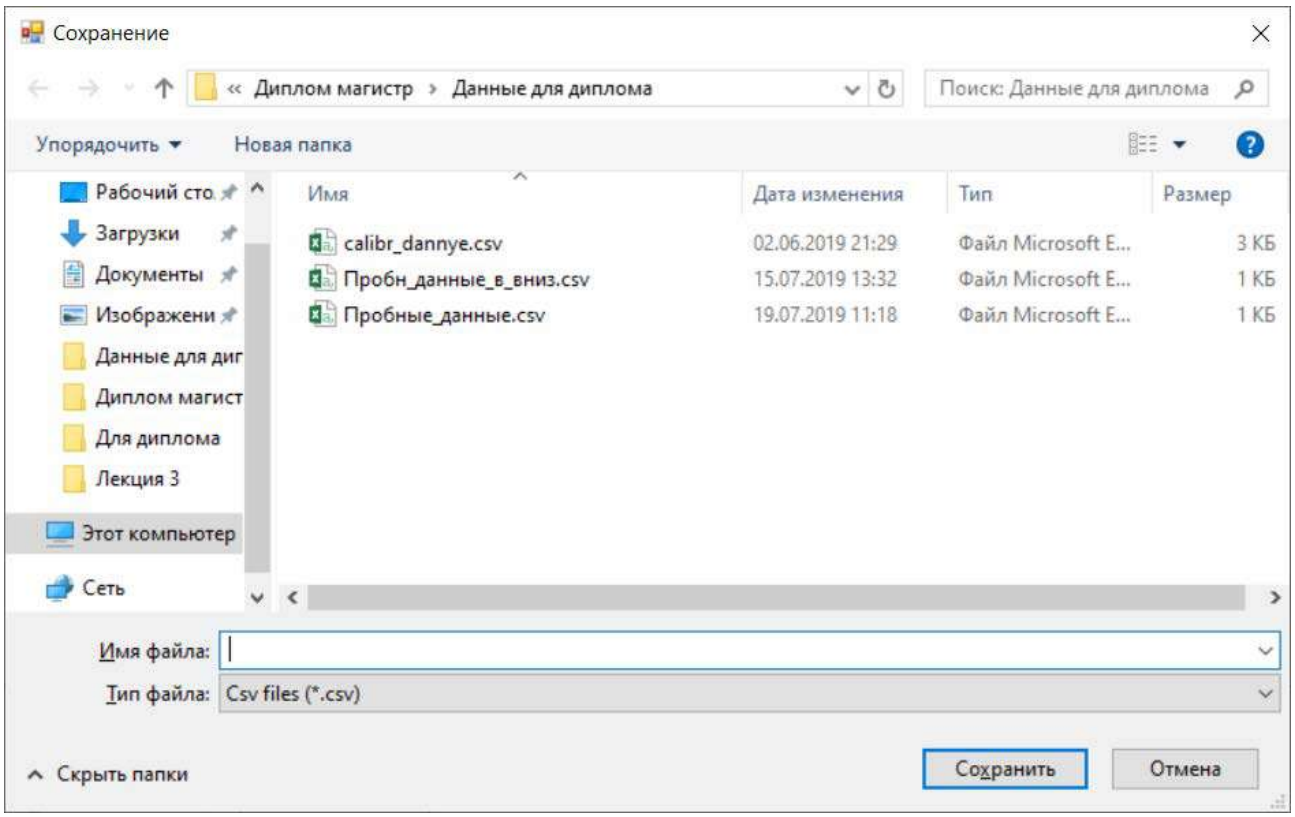


Рис. 7. Окно выбора файла для сохранения исправленных данных.

2.7 Анализ результатов аппроксимации.

Мы провели аппроксимацию экспериментальных данных по восьми различным генам. Ниже приведены полученные коэффициенты и величина среднеквадратического отклонения для каждой из функций.

Значения параметров и среднеквадратического отклонения кубической параболы для каждого гена представлены в таблице 1.

1534

Таблица 1. Значения параметров и среднеквадратического отклонения кубической параболы

	a	b	c	d	S
G01	7.566e-005	-0.007	0.851	1.907	2.762
G02	4.166e-005	-0.003	0.782	8.144	2.161
G03	2.639e-005	-0.002	0.681	3.308	2.7
G04	4.730e-005	-0.004	0.833	5.103	2.965
G05	-1.281e-005	0.005	0.41	4.799	1.166
G06	3.885e-005	-0.002	0.699	5.491	1.659
G07	6.092e-005	-0.009	0.69	0.777	3.339
G08	-3.438e-005	0.008	0.41	10.178	3.011

Значения параметров и среднеквадратического отклонения гиперболы для каждого гена представлены в таблице 2.

Таблица 2. Значения параметров и среднеквадратического отклонения гиперболы

	a	b	d	S
G01	-106.122	-1058	-231	2.999
G02	-166.685	-2850.23	-300	2.257
G03	-187.174	-1514.34	-350	2.732
G04	-181.884	-2206.16	-322	3.093

1535

	a	b	d	S
G05	-173.386	-1345.51	-333	1.272
G06	-138.91	-1714.05	-264	1.709
G07	-84.659	-794.063	-245	3.513
G08	-243.732	-3499.81	-395	3.176

Значения параметров и среднеквадратического отклонения комбинированной функции для каждого гена представлены в таблице 3.

Таблица 3. Значения параметров и среднеквадратического отклонения комбинированной функции

	a	b	c	d	g	h	S
G01	-4.227e-005	0.006	0.481	1.81	-137.301	-105	1.073
G02	-8.624e-005	0.01	0.391	3.29	-678.179	-114	1.562
G03	-0.0001	0.016	0.188	2.679	-235.541	-106	0.86
G04	-9.909e-005	0.011	0.385	2.935	-386.527	-109	2.123
G05	-8.818e-005	0.012	0.18	1.939	-399.572	-114	0.697
G06	-2.575e-005	0.004	0.5	1.929	-478.352	-117	1.458
G07	-1.505e-005	0.002	0.45	0.937	-66.475	-104	2.189
G08	-0.0002	0.022	-0.032	3.908	-860.934	-115	2.477

На основе полученных значений среднеквадратического отклонения выясним какая из рассматриваемых функций наименее уклоняется от

экспериментальных данных. Для этого сведём значения среднеквадратического отклонения в одну таблицу, которая представлена ниже.

Таблица 4. Значения среднеквадратического отклонения рассматриваемых функций

	Среднеквадратическое отклонение для		
	кубической параболы	гиперболы	комбинированной функции
G01	2.762	2.999	1.073
G02	2.161	2.257	1.562
G03	2.7	2.732	0.86
G04	2.965	3.093	2.123
G05	1.166	1.272	0.697
G06	1.659	1.709	1.458
G07	3.339	3.513	2.189
G08	3.011	3.176	2.477

Из полученных данных видно, что наименьшее среднеквадратическое отклонение достигается при использовании линейной комбинации кубической параболы и гиперболы. Из этого можно сделать вывод, что эта функция лучше всего аппроксимирует полученные экспериментальным путем данные для каждого гена. Следовательно, при исправлении данных этой функцией получатся более точные результаты.

2.8 Исходный код программы исправления экспериментальных данных

Ниже приведен исходный код основных функций приложения.

Функция для нахождения значения кубической параболы:

```
double getCubikY(double x, double a, double b, double c, double d)  {
        return (Math::Pow(x, 3.0) * a) + (Math::Pow(x, 2.0) * b) + (x * c) + d;
 }
```

Функция для нахождения значения гиперболы:

```
 double getHyperboleY(double x, double a, double b, double d)  {
        return ((a * x) + b) / (x + d);
 }
```

Функция для нахождения значения линейной комбинации кубической параболы и гиперболы:

```
double getComboY(double x, double a, double b, double c, double d, double g, double h)  {
        return (a * Math::Pow(x, 3)) + (b * Math::Pow(x, 2)) + (c * x) + d + (g / (x + h));
        }
```

Функция для нахождения коэффициентов кубической параболы:

```
void findCoefficientsForCubik(double& a, double& b, double& c, double& d)
 {
        int n = xMas->Count;
        vector<double> sumX;
        vector<vector<double>> alpha;
        vector<double> beta;
        ofstream file;
```

```
file.open("znach_cubik.txt"); // связываем объект с файлом
for (int i = 0; i < 7; i++)
{
	double tempSum = 0;
	for (int j = 0; j < n; j++)
	{
		tempSum += pow(xMas[j], i);
	}
	sumX.push_back(tempSum);
}
alpha.push_back({ sumX[6], sumX[5], sumX[4], sumX[3] });
alpha.push_back({ sumX[5], sumX[4], sumX[3], sumX[2] });
alpha.push_back({ sumX[4], sumX[3], sumX[2], sumX[1] });
alpha.push_back({ sumX[3], sumX[2], sumX[1], sumX[0] });
for (int i = 3; i >= 0; i--)
{
	double tempSum = 0;
	for (int j = 0; j < n; j++)
	{
		tempSum += pow(xMas[j], i)*yMas[j];
	}
	beta.push_back(tempSum);
}
vector<double> result = gauss(alpha, beta);
if (result.size() == 4)
{
	a = result[0];
	b = result[1];
	c = result[2];
	d = result[3];
```


1539

```
                file << "a = " << a << "; b = " << b << "; c = " << c << "; d = "
<< d << endl;
        }
        else
        {
                file << "coefficients can not be found" << endl;
        }
        file.close(); // закрываем файл
}
```

Функция для нахождения коэффициентов гиперболы:

```
void findCoefficientsForHyperbola(double& dOut, double& aOut, double&
bOut, bool isBulgy, bool isFirstAttempt)
{
        double d = isBulgy ? 1 : -101;
        double dIncrement = isBulgy ? 1 : -1; // шаг d
        int counter = 0;
        double lastS = 0;
        bool isIncreasing = false;
        ofstream file;
        file.open("znach_sigma_hyperbola.txt"); // связываем объект с
файлом
        while (true)
        {
                counter++;
                double a11 = 0;
                double a12 = 0;
                double a21 = 0;
                double a22 = 0;
                double b1 = 0;
```


1540

```
                double b2 = 0;
                for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
                        double x = xMas[i];
                        double y = yMas[i];
                        double xd = x + d;
                        double xd2 = Math::Pow(xd, 2);
                        a11 += Math::Pow(x, 2) / xd2;
                        a12 += x / xd2;
                        a22 += 1 / xd2;
                        b1 += x * y / xd;
                        b2 += y / xd;
                }
                a21 = a12;
                vector<vector<double>> alpha{ { a11, a12 }, { a21, a22 } };
                vector<double> beta{ { b1, b2 } };
                vector<double> result = gauss(alpha, beta);
                double a = result[0];
                double b = result[1];
                double s = sigmaHyperbola(d, a, b);
                file << "d = " << d << " b = " << b << " a = " << a << " " << "
sigma = " << s << endl;
                if (counter != 1)
                {
                        if (counter == 2)
                        {
                                isIncreasing = s > lastS;
                        }
                        else if (abs(s - lastS) < 0.001) {
                                if (isFirstAttempt) {
```


1541

```
                                        findCoefficientsForHyperbola(dOut, aOut, bOut, !isBulgy, false);
                                    }
                                    break;
                                }
                                else if (isIncreasing)
                                {
                                    if (s < lastS)
                                    {
                                        isIncreasing = false;
                                    }
                                }
                                else if (s > lastS)
                                {
                                    break;
                                }
                            }
                            aOut = a;
                            bOut = b;
                            dOut = d;
                            lastS = s;
                            d += dIncrement;
                        }
                        file.close(); // закрываем файл
                    }
```

Функция для нахождения коэффициентов линейной комбинации кубической параболы и гиперболы:

1542

```
void findCoefficientsForCombo(double& hOut, double& aOut, double& bOut, double& cOut, double& dOut, double& gOut, bool isBulgy, bool isFirstAttempt)
{
    double h = isBulgy ? 1 : -101;
    double hIncrement = isBulgy ? 1 : -1; // шаг h
    int counter = 0;
    double lastS = 0;
    bool isIncreasing = false;
    ofstream file;
    file.open("znach_sigma_combo.txt"); // связываем объект с файлом
    while (true)
    {
        counter++;
        double a11 = 0;
        double a12 = 0;
        double a13 = 0;
        double a14 = 0;
        double a15 = 0;
        double a24 = 0;
        double a25 = 0;
        double a34 = 0;
        double a35 = 0;
        double a44 = xMas->Count;
        double a45 = 0;
        double a54 = 0;
        double a55 = 0;
        double b1 = 0;
        double b2 = 0;
        double b3 = 0;
```

```
double b4 = 0;
double b5 = 0;
for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
        double x = xMas[i];
        double y = yMas[i];
        double xh = x + h;
        a11 += Math::Pow(x, 6);
        a12 += Math::Pow(x, 5);
        a13 += Math::Pow(x, 4);
        a14 += Math::Pow(x, 3);
        a15 += Math::Pow(x, 3) / xh;
        a24 += Math::Pow(x, 2);
        a25 += Math::Pow(x, 2) / xh;
        a34 += x;
        a35 += x / xh;
        a45 += 1 / xh;
        a54 += xMas->Count / xh;
        a55 += x / Math::Pow(xh, 6);
        b1 += y * Math::Pow(x, 3);
        b2 += y * Math::Pow(x, 2);
        b3 += y * x;
        b4 += y;
        b5 += y / xh;
}
vector<vector<double>> alpha{
        { a11, a12, a13, a14, a15 },
        { a12, a13, a14, a24, a25 },
        { a13, a14, a24, a34, a35 },
        { a14, a24, a34, a44, a45 },
        { a15, a25, a35, a54, a55 }
```


1544

```
                };
                vector<double> beta{ { b1, b2, b3, b4, b5 } };
                vector<double> result = gauss(alpha, beta);
                double a = result[0];
                double b = result[1];
                double c = result[2];
                double d = result[3];
                double g = result[4];
                double s = sigmaCombo(a, b, c, d, g, h);
                file << "h = " << h << " g = " << g << " d = " << d << " c = " <<
c << " b = " << b << " a = " << a << " " << " sigma = " << s << endl;
                if (counter != 1)
                {
                        if (counter == 2)
                        {
                                isIncreasing = s > lastS;
                        }
                        else if (abs(s - lastS) < 0.001) {
                                if (isFirstAttempt) {
                                        findCoefficientsForCombo(hOut,        aOut,
bOut, cOut, dOut, gOut, !isBulgy, false);
                                }
                                break;
                        }
                        else if (isIncreasing)
                        {
                                if (s < lastS)
                                {
                                        isIncreasing = false;
                                }
```


1545

```
                }
                else if (s > lastS)
                {
                        break;
                }
        }
        aOut = a;
        bOut = b;
        cOut = c;
        dOut = d;
        gOut = g;
        hOut = h;
        lastS = s;
        h += hIncrement;
    }
    file.close(); // закрываем файл
}
```

Функция для определения выпуклости/вогнутости исходных данных:

```
bool isFunctionBulgy()
{
    double sum_otkl = 0;
    for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
        sum_otkl += yMas[i] - xMas[i];
    }
    return sum_otkl > 0;
}
```


1546

Функция для построения графика кубической параболы:

```
private: System::Void button1_Click(System::Object^ sender, System::EventArgs^ e) {
            // находим коэффициенты
            double a = 0;
            double b = 0;
            double c = 0;
            double d = 0;
            findCoefficientsForCubik(a, b, c, d);
            // строим графики
            chart1->Series->Clear();
            Series^ series1 = gcnew Series();
            series1->ChartType = SeriesChartType::Spline;
            series1->Name = L"Series1";
            this->chart1->Series->Add(series1);
            for (double x = 0; x <= 100; x+=1) {
                series1->Points->AddXY(x, getCubikY(x, a, b, c ,d));
            }
            Series^ series2 = gcnew Series();
            series2->ChartType = SeriesChartType::Point;
            series2->Name = L"Series2";
            this->chart1->Series->Add(series2);
            for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
                series2->Points->AddXY(xMas[i], yMas[i]);
            }
            // находим среднекв. отклонение
            double sum_otkl = 0;
            for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
                sum_otkl += Math::Pow(yMas[i] - getCubikY(xMas[i], a, b, c, d), 2.0);
```


1547

```
            }
            sum_otkl = Math::Pow(sum_otkl / xMas->Count, 0.5);
                        this->label8->Text = sum_otkl.ToString();
            // сохраняем полученные коэффициенты
            cubikInfo->a = a;
            cubikInfo->b = b;
            cubikInfo->c = c;
            cubikInfo->d = d;
            cubikInfo->otkl = sum_otkl;
    }
```

Функция для построения графика гиперболы:

```
    private: System::Void button2_Click(System::Object^ sender,
System::EventArgs^  e) {
            // находим коэффициенты
            double d = 0;
            double a = 0;
            double b = 0;
            findCoefficientsForHyperbola(d, a, b, isFunctionBulgy(), true);
            // строим графики
            chart2->Series->Clear();
            Series^ series1 = gcnew Series();
            series1->ChartType = SeriesChartType::Spline;
            series1->Name = L"Series1";
            this->chart2->Series->Add(series1);
            for (double x = 0.2; x <= 100; x += 0.1 ) {
                series1->Points->AddXY(x, getHyperboleY(x, a, b, d));
            }
            Series^ series2 = gcnew Series();
            series2->ChartType = SeriesChartType::Point;
```

```
            series2->Name = L"Series2";
            this->chart2->Series->Add(series2);
            for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
                series2->Points->AddXY(xMas[i], yMas[i]);
            }
            // выводим d на экран
            this->label1->Text = d.ToString();
            // находим среднекв. отклонение
            double sum_otkl = 0;
            for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
                sum_otkl += Math::Pow(yMas[i] - getHyperboleY(xMas[i], a,
b, d), 2.0);
            }
            sum_otkl = Math::Pow(sum_otkl / xMas->Count, 0.5);
            this->label4->Text = sum_otkl.ToString();
            // сохраняем полученные коэффициенты
            hyperbolaInfo->a = a;
            hyperbolaInfo->b = b;
            hyperbolaInfo->d = d;
            hyperbolaInfo->otkl = sum_otkl;
        }
```

Функция для построения графика линейной комбинации кубической параболы и гиперболы:

```
        private: System::Void button4_Click(System::Object^ sender,
System::EventArgs^ e) {
            // находим коэффициенты
            double h = 0;
            double a = 0;
            double b = 0;
```

```
double c = 0;
double d = 0;
double g = 0;
findCoefficientsForCombo(h, a, b, c, d, g, isFunctionBulgy(), true);
// строим графики
chart3->Series->Clear();
Series^ series1 = gcnew Series();
series1->ChartType = SeriesChartType::Spline;
series1->Name = L"Series1";
this->chart3->Series->Add(series1);
for (double x = 0.2; x <= 100; x += 0.1) {
	series1->Points->AddXY(x, getComboY(x, a, b, c, d, g, h));
}
Series^ series2 = gcnew Series();
series2->ChartType = SeriesChartType::Point;
series2->Name = L"Series2";
this->chart3->Series->Add(series2);
for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
	series2->Points->AddXY(xMas[i], yMas[i]);
}
// выводим h на экран
this->label2->Text = h.ToString();
// находим среднекв. отклонение
double sum_otkl = 0;
for (double i = 0; i < xMas->Count; i++) {
	sum_otkl += Math::Pow(yMas[i] - getComboY(xMas[i], a, b, c,
d, g, h), 2.0);
}
sum_otkl = Math::Pow(sum_otkl / xMas->Count, 0.5);
this->label10->Text = sum_otkl.ToString();
```


1550

```
        // сохраняем полученные коэффициенты
        comboInfo->a = a;
        comboInfo->b = b;
        comboInfo->c = c;
        comboInfo->d = d;
        comboInfo->g = g;
        comboInfo->h = h;
        comboInfo->otkl = sum_otkl;
}
```

Функция для нахождения x по заданному y:

```
double findXFromY(Func^ f, double y)
 {
        double start = 0;
        double end = 100;
        double x = 0;
        double res = 0;
        do
        {
                x = (start + end) / 2;
                res = f(x);
                if (res < y) {
                        start = x;
                }
                else {
                        end = x;
                }
        } while (abs(res - y) > 0.01 && start != end);
        return x;
 }
```


1551

Функция для исправления данных с помощью кубической параболы:

```
vector<double> correctDataWithCubik()
{
	vector<double> correctedData;
	Func^ func = gcnew Func(this, &GraphicsCombo::MyForm::getCubikYWithSavedCoefficients);
	for (int i = 0; i < wMas->Count; i++)
	{
		double x = findXFromY(func, wMas[i]);
		correctedData.push_back(x);
	}
	delete func;
	return correctedData;
}
```

Функция для исправления данных с помощью гиперболы:

```
vector<double> correctDataWithHyperbola()
{
	vector<double> correctedData;
	Func^ func = gcnew Func(this, &GraphicsCombo::MyForm::getHyperbolaYWithSavedCoefficients);
	for (int i = 0; i < wMas->Count; i++)
	{
		double x = findXFromY(func, wMas[i]);
		correctedData.push_back(x);
	}
	delete func;
	return correctedData;
}
```


1552

Функция для исправления данных с помощью линейной комбинации кубической параболы и гиперболы:

```
vector<double> correctDataWithCombo()
{
    vector<double> correctedData;
    Func^ func = gcnew Func(this, &GraphicsCombo::MyForm::getComboYWithSavedCoefficients);
    for (int i = 0; i < wMas->Count; i++)
    {
        double x = findXFromY(func, wMas[i]);
        correctedData.push_back(x);
    }
    delete func;
    return correctedData;
}
```

Заключение

В ходе данной выпускной квалификационной работы получены следующие результаты:

1. Рассмотрены три разные функции для аппроксимации экспериментальных данных с помощью метода наименьших квадратов.
2. Разработан алгоритм нахождения коэффициентов гиперболы.
3. Рассмотрены методы исправления данных.
4. Написана программа для исправления экспериментальных данных, которая использует рассмотренные функции и методы.
5. Проведено сравнение аппроксимации результатов исследования крови исследуемыми функциями.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что линейная комбинация кубической параболы и гиперболы позволяет с большей точностью исправлять экспериментальные данные по генам. Реализованная программа уже сегодня может быть использована для исправления реальных данных. Например, в моем дипломе проводилась аппроксимация для результатов исследования крови, полученных при выявлении онкологических заболеваний.

1554

Список литературы

[1] Волков Е. А. Численные методы / Волков Е. А. // Учеб.пособие. — М.: Наука, 1987. — 248 с.

[2] Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Демидович Б. П., Марон И. А. — М.: Наука, 1970. — 664 с.

[3] Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. / Линник Ю. В. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. — 349 с.

[4] Страуструп Б. Язык программирования C++ / Страуструп Б. — 3-е спец. изд. — М.: Бином, 2003. — 1104 с.

[5] Moskalev E. A., Zavgorodnij M. G., Majorova S. P., Vorobjev I. A., Jandaghi P., Hoheisel J. D. Correction of PCR-bias in quantitative DNA methylation studies by means of cubic polynomial regression. Nucleic Acids Research, 2011, Vol. 39, No. 11, e77 (doi:10.1093/nar/gkr213)

1555

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Трифонова Константина Николаевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием ««Динамика обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного гетероклинического контура» являются: Теоремы 4,5,6,7.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- Мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Google, Google Scholar, Scopus, Web of Science, arxiv.org. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Лерманом Львом Михайловичем, профессором кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ННГУ им. Н. И. Лобачевского.
- Проведено выступление на международной конференции "Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ". 17-21 июня 2019 г., г. Долгопрудный.
- Проведено выступление на международной конференции "Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop". 9-13 декабря 2019 г., г. Нижний Новгород.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с научным руководителем и выступлениях на конференциях следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоялась 10.06.2019. На Смотр представлен окончательный текста работы.

Подпись  Трифонов Константин Николаевич
26 мая 2021 г. Нижний Новгород, Россия

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра: ДУМЧА

Направление подготовки: «Математика»
Магистерская программа: «Фундаментальная математика и приложения»

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема:

«Динамика обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного гетероклинического контура.»

Выполнил: студент 381702м группы
_____Трифонов К. Н.
Подпись

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
_____Лерман Л.М.
Подпись

Нижний Новгород
2019

1557

Содержание

1 Постановка задачи **2**

2 Основные понятия и определения **3**

3 Локальные координаты **6**

4 Локальная структура системы около седло-центра **8**

5 Возможные типы симметричных контуров **11**

6 Case 1, $c = 0$ **14**

7 Отображение Пуанкаре около γ **15**

8 Глобальные отображения **17**

9 Гомоклинические траектории Пуанкаре **18**

10 1-параметрическое семейство: счетное множество гомоклиник седло-центра **21**

11 Симметричные неподвижные точки **23**

12 Эллиптические периодические траектории при $c < 0$ **26**

1558

1 Постановка задачи

Изучение динамики гамильтоновых систем является интересной и трудной задачей, привлекающей многих исследователей из разных областей науки, поскольку гамильтоновы системы появляются в качестве математических моделей в различных разделах физики, химии, техники. Такие системы, как показывает их изучение, в основном, весьма сложно устроены, поэтому одним из плодотворных подходов при изучении их динамики является исследование поведения гамильтоновой системы в окрестностях каких-то структур, которые могут быть выделены некими простыми условиями. Изучение систем в окрестностях гомоклинических траекторий и гетероклинических контуров является одной из таких задач. Исследование явлений в окрестности гомоклинической траектории к седловой периодической траектории было первой такой задачей, постановка которой и осознание сложности системы в окрестности этой структуры, восходит еще к Пуанкаре.

В работе изучается динамика обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, имеющей симметричный седло-центр, симметричную седловую периодическую траекторию в том же уровне гамильтониана (а поэтому – и во всех близких уровнях) и две несимметричные гетероклинические траектории, переставляемые инволюцией, которые идут от седло-центра к периодической траектории, одна – при возрастании времени и, другая, соответственно, – при убывании времени. Тем самым возникает гетероклинический контур, содержащий седло-центр, две гетероклинические траектории и седловую периодическую траекторию. В работе изучается динамика системы в окрестности такого контура.

Условие обратимости системы и симметричности седло-центра и периодической траектории позволяет показать, что наличие такого контура в классе обратимых гамильтоновых систем является ситуацией коразмерности 1, а не более высокой коразмерности.

Подобные задачи встречаются в приложениях. Например, в работе [13] изучалась система уравнений, описывающих распространение воздущных пузырьков в тонких трубках, проводящих сжимаемую жидкость (например, керосин). Соответствующая система дифференциальных урав-

1559

нений после замены переменных имеет вид

$$u_1' = u_2,\ v_1' = u_1 + \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2u_1},\ Du_2' = v_2,\ Dv_2' = -u_2 - v_1$$

с гамильтонианом

$$H = u_2 v_1 - \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2) - \lambda u_1 + \frac{1}{3}(\lambda^2 + 2u_1)^{3/2}.$$

Состояние равновесия в начале координат O является седло-центром, его собственными значениями являются пара чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$ и пара действительных $\pm\sigma$. Действительно, линеаризация в точке O дает линейную систему, характеристическим полиномом которой является многочлен

$$D^2\sigma^4 + \sigma^2 - (1-\lambda)/\lambda,$$

корнями которого являются

$$\pm iD^{-1}\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4D^2(1-\lambda)/\lambda})/2},\ \pm\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4D^2(1-\lambda)\lambda}}}.$$

Эта система обратима и численные эксперименты показывают существование как существование гомоклинических траекторий к седло-центру, так и симметричных контуров типа, рассматриваемого в данной работе.

2 Основные понятия и определения

Пусть (M, Ω) – вещественно-аналитическое четырехмерное симплектическое многообразие, Ω – симплектическая 2-форма, а H – вещественно-аналитическая функция (гамильтониан). Такая функция задает гамильтоново векторное поле X_H на M. Ниже предполагается, что система имеет особую точку p типа седло-центр, $H(p) = 0$, что не без ограничивает общность. Также будем предполагать, что в том же трехмерном уровне гамильтониана $H = 0$ лежит седловая периодическая траектория.

Напомним, что особая точка p гамильтонового векторного поля X_H на 4-мерном симплектическом многообразии M называется седло-центром, если оператор линеаризации векторного поля в точке p имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega,\ \omega \neq 0$, и пару вещественных

собственных значений $\pm\lambda \neq 0$. В окрестности такой точки существует единственное локальное инвариантное 2-мерное симплектическое многообразие W_p^c, заполненное замкнутыми траекториями (ляпуновское семейство периодических траекторий). В случае аналитической системы многообразие W_p^c является вещественно-аналитическим. В соответствующем уровне гамильтониана ляпуновская периодическая траектория является седловой вблизи точки p и каждая из них расположена на своем уровне гамильтониана $V_h = \{x \in M | H(x) = h\}$. Кроме этого, система имеет локальные 3-мерные центрально-устойчивое многообразие W^{cs} и центрально-неустойчивое многообразие W^{cu}, проходящие через точку p, содержащие траектории, асимптотические к траекториям ляпуновского семейства при $t \to \infty$ (для W^{cs}), или $t \to -\infty$ (для W^{cu}), причем $W^c = W^{cs} \cap W^{cu}$. Подмногообразие W^{cs} (соответственно, W^{cu}) само расслоено уровнями V_h на локальные устойчивые (неустойчивые) многообразия периодических траекторий L_h, эти многообразия диффеоморфны $I \times S^1$. Кроме того W^{cs} (соответственно, W^{cu}) содержит гладкую кривую $W^s(W^u)$ – локальное устойчивое (неустойчивое) многообразие точки p, содержащее траектории стремящиеся к p при $t \to \infty$ ($t \to -\infty$).

Всюду в работе предполагается, что в уровне гамильтониана, содержащем седло-центр, лежит также седловая периодическая траектория γ. Напомним, что в окрестности такой траектории в том же уровне гамильтониана имеются два гладких (соответственно – аналитических, если система вещественно аналитическая) двумерных многообразия $W^s(\gamma)$, $W^u(\gamma)$, являющиеся ее устойчивым и неустойчивым многообразиями. Они содержат каждое саму γ и топологически являются оба либо цилиндрами (если периодическая траектория имеет положительные мультипликаторы), либо листами Мебиуса (если периодическая траектория имеет отрицательные мультипликаторы). Заметим, что во всем четырехмерном фазовом пространстве седловая периодическая траектория γ принадлежит однопараметрическому семейству таких периодических траекторий, составляющих двумерный симплектический цилиндр, параметром семейства является значение гамильтониана c.

Всюду в этой работе мы предполагаем, что рассматриваемая гамильтонова система является также обратимой. Такие системы часто встречаются в качестве модельных в различных приложениях. Обратимость

означает, как известно [7], что на многообразии M, где задано векторное поле v, гладко действует инволюция $L : M \to M$, $L^2 = id_M$, и векторное поле v обладает свойством $DLv = -v \circ L$. Основное свойство обратимого векторного поля состоит в следующем: если $x(t)$ является решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, то $x_1(t) = Lx(-t)$ также является его решением. В соответствии с этим свойством, траек-

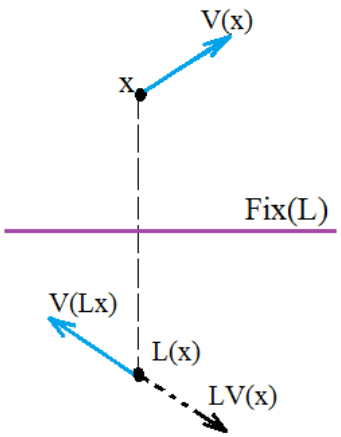


Рис. 1:

тория γ векторного поля называется *симметричной*, если она является инвариантным множеством относительно действия инволюции, т.е. для любой точки $x \in \gamma$ выполнено $Lx \in \gamma$. В частности, состояние равновесия p, $v(p) = 0$, симметрично, если $L(p) = p$, т.е. точка p принадлежит множеству неподвижных точек инволюции $Fix(L)$. Справедливо следующее утверждение

Утверждение 1. *[7] Симметричная периодическая траектория пересекает множество $Fix(L)$ ровно в двух точках. Верно и обратное: если траектория обратимой системы пересекает $Fix(L)$ в двух точках, то эта траектория – симметричная периодическая.*

Гамильтонова система задается на симплектическом многообразии (M, Ω). Пусть L аналитическое инволютивное отображение $L^{-1} = L$ на M и такое, что L является *антиканоническим*, т.е. $L^*(\Omega) = \Omega \circ DL = -\Omega$. Говорят, что гамильтонова система X_H с вещественно-аналитическим гамильтонианом H обратима относительно инволюции L, если $H \circ L = H$.

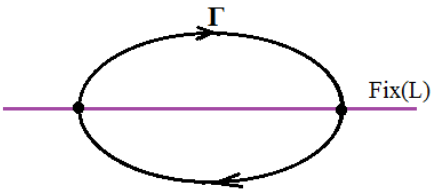


Рис. 2: Симметричная периодическая траектория Γ

В этом случае справедливы следующие тождества:

$$DLX_H = -X_H \circ L, \text{ и } \Phi_t \circ L = L \circ \Phi_{-t}.$$

Итак, рассматривается аналитическая обратимая гамильтонова система X_H на вещественно-аналитическом симплектическом многообразии (M, Ω), на котором антиканонически действует аналитическая инволюция L. Ниже считаем, что множество $Fix(L)$ является гладким двумерным подмногообразием в M. Предположим, что X_H имеет симметричное состояние равновесия p, $H(p) = 0$, типа седло-центр, седловую периодическую траекторию γ, $H(\gamma) = 0$, и две гетероклинические траектории: Γ_1, идущую при возрастании времени от γ к p, и $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$, идущую при возрастании времени от p к γ. Нашей задачей будет изучение поведения траекторий в окрестности полученного гетероклинического контура. Отметим, что сама задача, по постановке, является бифуркационной, т.к. структура траекторий меняется при изменении внутреннего параметра системы – значения гамильтониана c вблизи его нулевого значения. Например, на уровнях, отличных от V_0, состояние равновесия отсутствует, поэтому контур разрушается, т.е. происходят бифуркации. В частности, нас будут интересовать бифуркации рождения эллиптических периодических траекторий.

3 Локальные координаты

Для изучения системы нужно построить удобную систему координат в окрестности состояния равновесия p. Результат, который мы используем ниже, принадлежит Мозеру [14]. Он говорит, что около особой точки типа седло-центр вещественно-аналитическое гамильтоново векторное поле интегрируемо.

Теорема 1. *Пусть X_H аналитическое гамильтоново векторное поле и p его состояние равновесия типа седло-центр. Тогда в некоторой окрестности U точки p существуют аналитические симплектические координаты (x_1, y_1, x_2, y_2), $\Omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$, и вещественно аналитическая функция $h(\xi, \eta)$, для которых гамильтониан H имеет вид*

$$h(\xi,\eta) = \lambda\xi + \omega\eta + R(\xi,\eta), \qquad R(\xi,\eta) = O(\xi^2+\eta^2),$$

$$\xi = x_1 y_1; \quad \eta = \frac{x_2^2 + y_2^2}{2}.$$

Замечание 1. *Заменой времени $(t \to \pm t/n)$ и, при необходимости, каноническим преобразованием $(y_1 \to x_1, x_1 \to -y_1)$, мы можем сделать $\lambda = -1$, а $\omega > 0$ (новое ω представляет с точностью до знака отношение $|\omega/\lambda|$). Всюду ниже будем использовать эту нормализацию.*

Обозначим через $\Phi^t : m \to \Phi^t(m)$ поток векторного поля X_H. В координатах теоремы 1 система, соответствующая полю X_H, запишется

$$\dot{x_1} = -h_\xi x_1, \quad \dot{y_1} = h_\xi y_1, \quad \dot{x_2} = -h_\eta y_2, \quad \dot{y_2} = h_\eta x_2 \tag{1}$$

и Φ^t как

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-h_\xi^0 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{h_\xi^0 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(th_\eta^0) & -\sin(th_\eta^0) \\ 0 & 0 & \sin(th_\eta^0) & \cos(th_\eta^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \\ x_2^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

где

$$h_\xi^0 = h_\xi(\xi^0,\eta^0), \quad h_\eta^0 = h_\eta(\xi^0,\eta^0), \quad \xi^0 = x_1^0 y_1^0, \quad \eta^0 = ((x_2^0)^2 + (y_2^0)^2)/2.$$

Поскольку рассматриваемая гамильтонова система обратима, важно выяснить к какому наиболее простому виду можно привести одной заменой инволюцию и гамильтониан в окрестности симметричного седло-центра. Это означает, что мозеровские координаты нужно согласовать со свойством обратимости в системе координат из Теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть σ – антиканоническое преобразование на $(\mathbb{R}^4, \Omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2)$, которое сохраняет начало координат и для него*

выполнено тождество $h \circ \sigma = h$. Тогда σ имеет следующий вид

$$v : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \pm e^{\partial_\xi g} & 0 & 0 \\ \pm e^{-\partial_\xi g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\partial_\eta g) & -\sin(\partial_\eta g) \\ 0 & 0 & \sin(\partial_\eta g) & \cos(\partial_\eta g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

где в первых двух строках этой матрицы либо оба знака $+$, либо оба знака $-$, и g – вещественная функция от ξ и η.

Теорема 2. *Предположим, что X_H удовлетворяет условиям теоремы 1, обратимо относительно антиканонической инволюции L и имеет симметричное состояние равновесия p типа седло-центр. Тогда некоторой окрестности U точки p существует такая аналитическая система координат с теми же свойствами, как в Теореме 1, в которой L является одним из следующих линейных преобразований:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

4 Локальная структура системы около седло-центра

Используя мозеровские координаты, опишем строение уровней гамильтониана $V_c = \{H = c\}$ и поведение траекторий системы около состояния равновесия на каждом уровне. Здесь мы следуем [12]. Эта информация будет необходима для дальнейшего исследования. В мозеровских координатах система имеет вид (1). Система локально интегрируема и имеет две инвариантные симплектические плоскости (фактически – диска): $x_1 = y_1 = 0$ и $x_2 = y_2 = 0$. В качестве локальных интегралов выберем квадратичные функции $\xi = x_1 y_1$ $\eta = (x_2^2 + y_2^2)/2$. Рассмотрим сначала

уровень V_0, которому соответствует кривая $\xi = \omega\eta + O(\eta) = v(\eta)$ на плоскости переменных (ξ, η), $0 \le \eta \le \eta_*$. Рассмотрим окрестность этой кривой $|\xi - v(\eta)| \le \rho$ с достаточно малым ρ. Для получения окрестности начала координат в $\mathbb{R}^4$ с координатами (x_1, x_2, y_1, y_2) добавим еще секущие $|x_1| = d$, $|y_1| = d$.

Окрестность U точки p в M в координатах (x_1, y_1, x_2, y_2) можно рассматривать как произведение двух достаточно малых дисков $(x_1, y_1, 0, 0)$ и $(0, 0, x_2, y_2)$. Строение множества V_0 будем изучать, расслаивая его на инвариантные уровни интеграла η. При $\eta = 0$ получаем $\xi = v(0) = 0$, т.е. "крест"на диске $x_2 = y_2 = 0$ (объединение двух отрезков $y_1 = 0$ и $x_1 = 0$). В U этот крест является объединением локального устойчивого и неустойчивого многообразий седло-центра p (кривых – в данном случае). При $\eta > 0$ получаем положительное $\xi = v(\eta)$, которому соответствует два куска гипербол $x_1 y_1 = v(\eta)$, которые в U умножаются на окружность $x_2^2 + y_2^2 = 2\eta$. Меняя η от нуля до η_*, мы получаем два заполненных цилиндра в U, которые имеют одну общую точку – начало координат, т.е. седло-центр. Заметим, что два отрезка креста (с $x_1 \ge 0$, $y_1 = 0$, и $y_1 \ge 0$, $x_1 = 0$) являются топологическим пределом при $\eta \to +0$ цилиндров $x_1 y_1 = v(\eta)$, $x_2^2 + y_2^2 = 2\eta$, лежащих в одном заполненном цилиндре, а два других отрезка креста (с $x_1 \le 0$, $y_1 = 0$, и $y_1 \le 0$, $x_1 = 0$) являются топологическим пределом при $\eta \to +0$ цилиндров $x_1 y_1 = v(\eta)$, $x_2^2 + y_2^2 = 2\eta$, лежащих в другом заполненном цилиндре. Таким образом, в каждом заполненном цилиндре лежит одна половина устойчивой кривой (сепаратрисы) и одна половина неустойчивой кривой (неустойчивая сепаратриса).

При $c < 0$ на плоскости (ξ, η) кривая $\xi = \omega\eta + O(\eta) - c = v(\eta) - c$ при всех $\eta \ge 0$ соответствует положительным значениям η, т.е. уровень V_c при $c < 0$ есть несвязное объединение двух заполненных цилиндров, их проекции на плоскость (x_1, y_1) есть два криволинейных четырехугольника в первом и третьем квадрантах, ограниченных отрезками $x_1 = d$, $y_1 = d$, и кусками гиперболам $x_1 y_1 = v(0) - c$ и $x_1 y_1 = v(\eta_*) - c$, аналогично – для четырехугольника в третьем квадранте.

При $c > 0$ кривая $\xi = \omega\eta + O(\eta) - c = v(\eta) - c$ на плоскости (ξ, η) при $0 \le \eta \le \eta_*$ соответствует как положительным значениям ξ, так и отрицательным значениям (мы выбираем $|c|$ достаточно малым). Обозна-

чим через η_c единственный положительный корень уравнения $v(\eta) = c$. Тогда при $0 \le \eta \le \eta_c$ куски гипербол $x_1 y_1 = v(\eta) - c < 0$ лежат во втором и четвертом квадрантах, а при $\eta > \eta_c$ – в первом и третьем квадрантах. Топологический тип множества уровня V_c – связная сумма двух заполненных цилиндров. Чтобы увидеть это, рассмотрим проекцию множества V_c на плоскость (x_1, y_1), лежащую внутри квадрата $|x_1| \le d$, $|y_1| \le d$. Разрежем это множество на две половины диагональю $y_1 = -x_1$. Над этой диагональю в V_c лежит двумерная сфера S, т.к. крайним точкам диагонали $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ и $(\sqrt{c}, -\sqrt{c})$ соответствуют в V_c две точки (для них $\eta = 0$), а для любой точки между крайними в V_c лежит окружность, т.к. для этих точек $\eta > 0$. В частности, над средней точкой отрезка $(0, 0)$ лежит окружность $x_2^2 + y_2^2 = \eta_c$. Подмножество из V_c, лежащее над полуплоскостью $x_1 + y_1 > 0$ состоит из трех частей. Одна из них соответствует значениям $\eta \ge \eta_c$. При строгом неравенстве мы получим множество, диффеоморфное прямому произведению кольца (на плоскости (x_2, y_2)) на отрезок. При $\eta \to \eta_c + 0$ это множество содержит в пределе двумерное множество (цилиндр), являющееся произведением угла в плоскости (x_1, y_1): $0 \le x_1 \le d$, $y_1 = 0$, и $0 \le y_1 \le d$, $x_1 = 0$ на окружность $x_2^2 + y_2^2 = \eta_c$. Кроме этого рассматриваемое подмножество содержит два заполненных цилиндра. Они получаются, если рассмотреть подмножества, проектирующиеся во второй и четвертый квадранты плоскости (x_1, y_1). Чтобы это увидеть, зафиксируем некоторое η, $0 \le \eta < \eta_c$. Подмножество из V_c, лежащее над полуплоскостью $x_1 + y_1 > 0$ при $\xi < 0$, состоит из двух заполненных цилиндров, каждый из них расслоен на двумерные цилиндры, лежащие над кусками гиперболы $\xi = v(\eta) - c < 0$, соответственно во втором и четвертом квадранте. Одна из граничных окружностей такого цилиндра лежит над точкой на диагонали (для каждого цилиндра – своя), вторая граничная окружность – над точкой отрезка $x = d$ или $y = d$.

Аналогичным образом получается вторая часть множества V_c, лежащая над полуплоскостью $x_1 + y_1 \le 0$. Эти две части склеены вдоль сферы S, склейка соответствует одинаковым точкам диагонали. Наглядно можно себе представить, что в каждой половине (заполненном цилиндре) мы вырезали по внутреннему шару и по границе этих двух шаров полученные половины склеили согласно ориентации. Это и есть частный

случай связной суммы двух заполненных цилиндров. Поскольку каждый уровень расслоен на инвариантные цилиндры $\eta = const$, мы получаем полную картину локального поведения траекторий вблизи седло-центра.

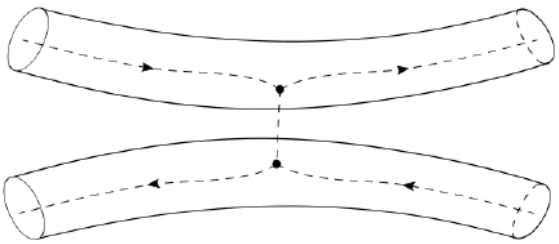


Рис. 3: $c = 0$

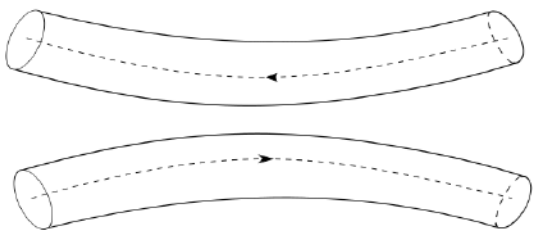


Рис. 4: $c < 0$

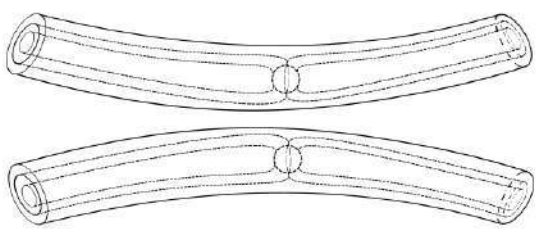


Рис. 5: $c > 0$

5 Возможные типы симметричных контуров

Вышеприведенные теоремы касались локального представления системы в окрестности седло-центра. Симметричная периодическая траектория в

уровне V_0 лежит вне рассматриваемой окрестности седло-центра p, поэтому нужно согласовать расположение этой траектории, ее симметрию с локальным действием инволюции в U относительно введенных координат. Мы предполагаем, что p и γ связаны двумя несимметричными гетероклиническими траекториями Γ_1 и $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$. Симметричная периодическая траектория пересекает множество $Fix(L)$ в двух своих точках m_1, m_2. Выберем одну из них, $m = m_1$, и рассмотрим в M трехмерную локальную секущую N к траектории γ. Эту секущую можно выбрать так, чтобы точка m принадлежала N вместе с некоторым достаточно малым гладким двумерным диском из $Fix(L)$ и N была бы инвариантна относительно действия инволюции. В дальнейшем предполагается такой выбор секущей N.

Около точки m уровень V_0 является гладким трехмерным многообразием, содержащим кривую γ, а N трансверсально ей, поэтому V_0 и N пересекаются трансверсально около N и следовательно пересекаются в M по гладкому 2-мерному диску $\Sigma \subset N$. Диск Σ является двумерной секущей к γ в уровне V_0. Пересечение диска из $Fix(L)$ с Σ трансверсально в N и является гладкой кривой l, проходящей через m. Поскольку траектория Γ_1 несимметрична и стремится к γ при $t \to -\infty$, то она пересечет Σ в счетном множестве точек, накапливающихся к m, но не пересекающих l. Эти точки принадлежат следу многообразия $W^u(\gamma)$ – гладкой кривой на диске Σ. Аналогично, траектория Γ_2 пересечет Σ в счетном множестве точек, накапливающихся к m при $t \to \infty$, но не пересекающих l. Они принадлежат следу многообразия $W^s(\gamma)$ – гладкой кривой на диске Σ.

Отметим, что около точки p инволюция L переставляет локальные устойчивое и неустойчивое многообразия (кривые) состояния равновесия p. Поскольку гетероклинические траектории содержат эти кривые, то возможны два различных случая. Для их описания выберем в окрестности U точки p на уровне V_0 два гладких диска D_1, $D_2 = L(D_1)$, трансверсальных гетероклиническим траекториям Γ_1 и Γ_2, соответственно. Напомним (см. выше), что в окрестности точки p локальный топологический тип уровня V_0 – это пара 3-мерных заполненных цилиндров, с отождествленными внутренними точками, выбранными по одной в каждом цилиндре (после склейки – это точка p) (см. рис. 3). Каждый ци-

линдр состоит из кусков траекторий векторного поля. Можно считать, что секущие D_1, D_2 – это два граничных диска (подошвы) этих цилиндров (из четырех). Возможны 2 различные ситуации: 1) оба диска принадлежат границе одного цилиндра; 2) один диск принадлежит границе одного цилиндра, а второй – границе другого. Эти случаи зависят от того, как действует ограничение инволюции на уровне V_0 в окрестности точки p (заметим, что уровни гамильтониана инвариантны относительно действия инволюции).

Рассмотрим траектории векторного поля, проходящие вблизи Γ_1, но отличные от Γ_1. При возрастании t они пересекают D_1 и входят в соответствующий локальный заполненный цилиндр, проходят его и выходят из цилиндра (сама положительная полутраектория Γ_1 стремится к p и остается в цилиндре). При этом они либо пересекают D_2 (случай 1), либо выходят из цилиндра, не пересекая D_2 (случай 2). В случае 2 отображение Пуанкаре в окрестности контура не определено при значениях $c \leq 0$, поскольку траектории, близкие к Γ_1, не возвращаются на D_2, если только для системы не выполнены некоторые дополнительные глобальные условия.

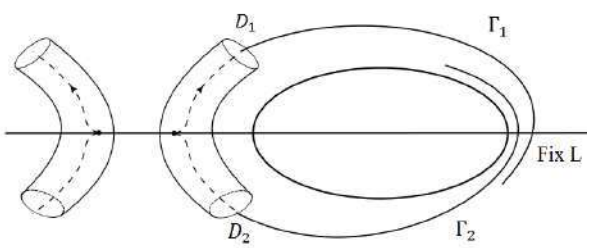


Рис. 6: Случай 1

Замечание 2. *При достаточно малых положительных c отображение Пуанкаре на соответствующем диске $D_1(c)$ становится определенным внутри некоторого малого диска на $D_1(c)$, границей которого является след устойчивого многообразия ляпуновской периодической траектории $W^s(l_c)$. Тогда вдоль некоторой последовательности положительных c_n, стремящихся к нулю, след $W^s(\gamma_{c_n})$ устойчивого многообразия седловой периодической траектории γ_{c_n} будет касаться следа $W^u(\gamma_{c_n})$ на $D_1(c_n)$, что сопровождается появлением эллиптических*

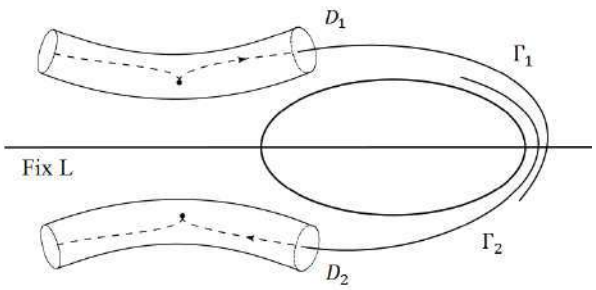


Рис. 7: Случай 2

периодических траекторий. Это будет рассмотрено ниже.

6 Case 1, $c = 0$

Начнем с рассмотрения случая 1 при $c = 0$. В окрестности U точки p в мозеровских координатах многообразие W^{cs} задается равенством $x_1 = 0$, W^{cu} – равенством $y_1 = 0$, W^s – равенствами $x_1 = x_2 = y_2 = 0$, и W^u – равенствами $y_1 = x_2 = y_2 = 0$. Предположим, для определенности, что в окрестности U гетероклиническая траектория Γ_1 соответствует значениям $y_1 > 0$. В окрестности U знаки переменных x_1 и y_1 сохраняются под действием локального отображения T и поскольку $h_\xi = -1 + \cdots \neq 0$ в U, то 3-мерный диск $N^s : y_1 = d, |x_1| \leq \delta, \eta \leq \eta_0$ трансверсален Γ_1 и траекториям, близким к Γ_1. Аналогичные утверждения справедливы для $N^u = L(N^s) : x_1 = d, |x_1| \leq \delta, \eta \leq \eta_0$.

Обозначим через $a_0(\eta)$ решение уравнения $h(\xi, \eta) = 0$ относительно ξ, $a_0(\eta) = \omega\eta + O(\eta^2)$. Можно предполагать, что a_0 – единственное решение уравнения $h(\xi, \eta) = 0$ в U. Тогда $N^s(0) = N^s \cap V_0$ является графиком функции $x_1 = a_0(\eta)/d$, а $N^u(0) = N^u \cap V_0$ – графиком функции $y_1 = \pm a_0(\eta)/d$. Секущие $N^u(0)$ и $N^s(0)$ являются гладкими двумерными дисками, симплектическими относительно ограничения формы Ω на $N^u(0)$ и $N^s(0)$ соответственно, а отображение $T_0 : N^s(0) \to N^u(0)$ является двумерным симплектическим отображением.

Найдем представление для отображения T_0 в координатах (x_2, y_2). Время перехода τ траекторий из N^s в N^u из (1) при $y_1 = d : \tau =$

$-(h_\xi^0)^{-1} ln(d/x_1), x_1 > 0$. Из (1) следует, что отображение T_0 имеет вид

$$\bar{x}_2 = x_2 \cos\Delta_0(\eta) - y_2 \sin\Delta_0(\eta), \quad \bar{y}_2 = x_2 \sin\Delta_0(\eta) + y_2 \cos\Delta_0(\eta), \quad (2)$$

где $\Delta_0(\eta) = (\omega + O(\eta)) \ln \frac{d^2}{a_0(\eta)}, \quad x_1 = \pm a_0(\eta)/d.$

7 Отображение Пуанкаре около γ

Для описания поведения траекторий в окрестности V траектории γ воспользуемся другой теоремой Мозера [15] о нормальной форме аналитического двумерного симплектического отображения в окрестности седловой неподвижной точки. Будем предполагать мультипликатор ν периодической траектории положительным, т.к. γ – ориентируемая периодическая траектория.

Теорема 3. *В окрестности седловой неподвижной точки вещественно-аналитического симплектического отображения S существуют симплектические аналитические координаты, в которых S имеет следующий вид*

$$\bar{u} = u/f(\zeta), \bar{v} = vf(\zeta), \text{ где } \xi = uv, f(\zeta) = \nu + O(\zeta), \ 0 < \nu < 1. \quad (3)$$

В рассматриваемом нами случае отображение S является обратимым относительно ограничения инволюции на секущую Σ и инволюция переставляет устойчивое и неустойчивое многообразия (кривые) неподвижной точки m. Нетрудно, следуя [5], доказать, что симплектические координаты (u, v) в теореме Мозера можно выбрать так, чтобы на Σ действие ограничения инволюции было $(u, v) \to (v, u)$. Тогда локально около точки m множество неподвижных точек этой инволюции будет диагональю $u = v$. В дальнейшем мы предполагаем это выполненным.

В полученных координатах локальное устойчивое многообразие имеет вид $u = 0$, а локальное неустойчивое – $v = 0$. Поэтому точка p_s – след траектории Γ_2 – имеет координаты $(0, v_+)$, а точка $p_u = L(p_s)$ – след траектории Γ_1 – координаты $(u_-, 0)$. Для определенности будем считать, что $v_+ > 0$. Тогда, ввиду обратимости и действия инволюции, имеем $u_- = v_+$.

Рассмотрим окрестности Π^s, Π^u точек p_s, p_u вида $\Pi^s : |v - v_+| < \varepsilon, \ |u| < \delta$, и $\Pi^u : |v| < \delta, \ |u - u_-| < \varepsilon$, величины δ, ε подберем ниже.

Опишем сначала множество точек из Π^s, которые какой-либо итерацией локального отображения S отображаются в окрестность Π^u. Благодаря удобной нормальной форме, эти множества легко находятся.

Действительно, возьмем точку $(u, v) \in \Pi^s$. Условие, что k-ая итерация этой точки лежит в Π^u записывается неравенствами: $|f^k(\zeta)v| < \delta$, $|f^{-k}(\zeta)u - u_-| < \varepsilon$. Отсюда получаем условия на границы множества точек k-ой полоски $\sigma_k^s \subset \Pi^s$, попадающих в Π^u за k итераций отображения S: $|v - v_+| < \varepsilon$, $f^k(\zeta)(u_- - \varepsilon) \le u \le f^k(\zeta)(u_- + \varepsilon)$. Уравнения $u = f^k(\zeta)(u_- \pm \varepsilon)$ задают функции $u = s_k^{\pm}(v)$, заданные на интервале $|v - v_+| < \varepsilon$, и являющиеся верхней и нижней границами полоски σ_k^s. Отсюда следует, что существует счетное множество таких полос для всех

$$k > k_0 = E\left\{\frac{ln((\varepsilon + u_-)/\delta)}{ln(\nu^{-1})}\right\}.$$

Здесь предполагается, что $\varepsilon + u_- > \delta$ (это первое ограничение на величины ε, δ, определяющие размеры окрестностей следов гетероклинических точек).

Ограничение инволюции на Σ действует как $L : (u, v) \to (v, u)$, откуда получаем, что $u_- = v_+ = r$. Таким образом, получаем такое же условие на k_0 для полос σ_k^u:

$$k > k_0 = E\left\{\frac{ln((\varepsilon + r)/\delta}{ln(\nu^{-1})}\right\}.$$

Есть одно ограничение на эти величины получается из требования, чтобы окрестность Π^s не пересекалась со своим образом $S(\Pi^s)$, а окрестность Π^u - со своим прообразом $S^{-1}(\Pi^u)$, и $\Pi^s \cap \Pi^u = \emptyset$. Эти условия приводят к следующим неравенствам:

$$\delta < r\frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad \delta < r - \varepsilon.$$

Теперь можно утверждать, в силу данной конструкции, что все траектории отображения, которые проходят через точки окрестности Π^s и достигают окрестности Π^u при положительных итерациях отображения S, должны либо проходить через построенные полоски $\sigma_k^s, k \ge k_0$, либо через точки отрезка $v = 0$. В последнем случае они принадлежат устойчивому многообразию и при положительных итерациях отображения S

стремятся к неподвижной точке. В частности, образы точек из σ_k^s относительно отображения S^k составляют полоску $\sigma_k^u, k \geq k_0$. При $k \to \infty$ полоски σ_k^u стремятся к отрезку неустойчивого многообразия. Эти точки при отрицательных итерациях отображения S стремятся к неподвижной точке.

Отметим следующий полезный факт. При изменении c (значения гамильтониана) вблизи нуля гамильтонова система имеет инвариантное 3-мерное подмногообразие $V_c = \{H = c\}$, являющееся гладким в окрестности периодической траектории γ. На V_c лежит седловая периодическая траектория γ_c, являющаяся продолжением по c траектории γ. Выбранная выше 3-мерная секущая N при пересечении с V_c дает гладкий 2-мерный диск Σ_c, являющийся локальной секущей ограничения потока на уровень V_c. Выбирая секущую вещественно аналитическим подмногообразием, получим вещественно аналитический диск Σ_c и на нем вещественно аналитическое отображение S_c с седловой неподвижной точкой m_c. Поэтому для этого отображения также справедлива теорема Мозера и его можно привести аналитической заменой координат к виду (3). Более того, поскольку зависимость от параметра c отображения будет аналитической, то замену можно делать сразу для всех достаточно малых и в (3) функция f будет аналитически зависеть от параметра c. Это будет использовано ниже при изучении динамики на уровнях, близких к $c = 0$.

8 Глобальные отображения

Теперь рассмотрим глобальное отображение T_1, определяемое сдвигом по траекториям системы, проходящих вблизи глобального куска Γ_1, и действующее из окрестности Π^u в окрестность V^s, $\quad T_1 : \Pi^u \to V^s$. Оно записывается в следующем виде: $x_2 = f(u, v), \quad y_2 = g(u, v)$ и является симплектическим, т.е. $f_u g_v - f_v g_u \equiv 1$. Линеаризация этого отображения в точке $(u_-, 0)$ имеет вид $x_2 = \alpha(u - u_-) + \beta v, \quad y_2 = \gamma(u - u_-) + \delta v$, где $\alpha = f_u, \quad \beta = f_v, \quad \gamma = g_u, \quad \delta = g_v$, производные вычисляются в точке $(u_-, 0)$. Таким образом, мы получаем общий вид отображения T_1:

$$x_2 = \alpha(u - u_-) + \beta v + \cdots, \quad y_2 = \gamma(u - u_-) + \delta v + \cdots.$$

Поскольку система обратима, то глобальное отображение около траектории $\Gamma_2 = L(\Gamma_1)$ из окрестности V^u в окрестность Π^s, $\quad T_2 : V^u \to \Pi^s$ выражается в следующем виде $T_2 = L \circ T_1^{-1} \circ L$, или в координатах:

$$u_1 = \gamma \bar{x}_2 + \alpha \bar{y}_2 + \cdots ,$$
$$v_1 - v_+ = -\delta \bar{x}_2 - \beta \bar{y}_2 + \cdots .$$

9 Гомоклинические траектории Пуанкаре

Первым результатом работы является следующая простая теорема:

Теорема 4. *Если обратимая гамильтонова система имеет гетероклинический контур типа 1 с указанными свойствами, то седловая периодическая траектория γ имеет счетное множество однообходных трансверсальных гомоклинических траекторий. В случае контура типа 2 на уровне $H = 0$ нет траекторий, отличных от траекторий контура, лежащих целиком в достаточно малой окрестности контура.*

Уточним понятие однообходной гомоклинической траекторией к периодической траектории γ. Для этого рассмотрим в уровне V_0 достаточно малую трубчатую окрестность траектории γ. Объединение точек траектории Γ_1, p и траектории Γ_2 дает простую кривую без самопересечений. Можно считать, что эта кривая состоит из трех связных кусков, один из которых R, лежит вне трубчатой окрестности траектории γ, а два других – внутри трубчатой окрестности (напомним, что траектории Γ_1, Γ_2 асимптотически стремятся к γ). Теперь рассмотрим гомоклиническую траекторию Γ, у которой ее глобальная часть вне трубчатой окрестности принадлежит малой окрестности кривой R, а две остальные части принадлежат трубчатой окрестности. Такую гомоклиническую траекторию назовем однообходной относительно контура.

Доказательство. Рассмотрим отрезок (A, B) неустойчивой инвариантной кривой из окрестности Π^u : $\quad v = 0, \quad |u - u_-| \le \varepsilon_1 < \varepsilon$. Найдем образ этого отрезка при действии глобального отображения T_1 : $x_2 = \alpha(u - u_-) + \beta v + \cdots , \quad y_2 = \gamma(u - u_-) + \delta v + \cdots$. Граничные точки отрезка $A = (u_- - \varepsilon_1, 0), \quad B = (u_- + \varepsilon_1, 0)$ перейдут в точки $A_1 = (-\alpha\varepsilon_1, -\gamma\varepsilon_1), \quad B_1 = (\alpha\varepsilon_1, \gamma\varepsilon_1)$. Так как отображение T_1 – диф-

феоморфизм, получаем отрезок, проходящий через начало координат с граничными точками A_1, B_1.

Полученный отрезок (A_1, B_1) с помощью отображения T_0 переводится в кривую:

$$\bar{x}_2 = x_2^0 \cos\Delta_0(\eta^0) - y_2^0 \sin\Delta_0(\eta^0), \quad \bar{y}_2 = x_2^0 \sin\Delta_0(\eta^0) + y_2^0 \cos\Delta_0(\eta^0).$$

Перейдем к полярным координатам

$$x_2^0 = \sqrt{2\eta}\sin\phi, \quad y_2^0 = \sqrt{2\eta}\cos\phi,$$
$$\bar{x}_2 = \sqrt{2\eta}\sin\theta, \quad \bar{y}_2 = \sqrt{2\eta}\cos\theta.$$

После замены отображение T_0 имеет следующий вид:

$$\overline{\eta} = \eta, \quad \overline{\theta} = \phi - \Delta(\eta),$$

где $\Delta(\eta) = -\omega \ln\frac{d^2}{\omega\eta}$. При $\eta = 0$ отображение имеет особенность.

Следовательно, что при действии отображения T_0 на отрезок (A_1, B_1), он перейдет в две спирали

$$\overline{\eta} = \eta, \quad \overline{\theta} = \phi + \gamma \ln\frac{d^2}{\omega\eta},$$

где $\eta = \frac{x_2^2+y_2^2}{2}$, $\quad \phi = arctg\frac{y_2}{x_2} \quad (mod \quad 1)$ и $\eta_0 \geq \eta > 0, \qquad \eta_0 = \frac{(\alpha^2+\gamma^2)\varepsilon^2}{2}$.

Рассмотрим одну из полученных спиралей

$$u_1 = \gamma\bar{x}_2 + \alpha\bar{y}_2 + \cdots,$$
$$v_1 - v_+ = -\delta\bar{x}_2 - \beta\bar{y}_2 + \cdots.$$

Для доказательства существования трансверсальных гомоклинических траекторий к седловому периодическому движению достаточно показать, что полученная спираль пересекает устойчивое многообразие седлового периодического движения без касания в окрестности Π^s.

Диффеоморфизм переводит спираль в спираль, а точка с координатами $(0,0)$ в окрестности V^u перейдет в точку $(0, v_+)$, поэтому остается доказать, что полученная спираль не касается устойчивого многообразия $u = 0$ седлового периодического движения. Для этого покажем, производная $\frac{\partial u_1}{\partial u} \neq 0$ в точках $(0, v)$, где $v \in (v^s - \varepsilon, v^s + \varepsilon)$. Для этого подставим

в первое выражение (??) вместо $\bar{x}_2, \bar{y}_2$ выражения от u, v:

$$u_1 = \gamma\Big[(\alpha(u-u^u)+\beta v)\cos\left(\omega\ln\frac{2d^2}{\omega((\alpha(u-u^u)+\beta v)^2+(\gamma(u-u^u)+\delta v)^2)}\right) -$$
$$(\gamma(u-u^u)+\delta v)\sin\left(\omega\ln\frac{2d^2}{\omega((\alpha(u-u^u)+\beta v)^2+(\gamma(u-u^u)+\delta v)^2)}\right)\Big] +$$
$$\alpha\Big[(\alpha(u-u^u)+\beta v)\sin\left(\omega\ln\frac{2d^2}{\omega((\alpha(u-u^u)+\beta v)^2+(\gamma(u-u^u)+\delta v)^2)}\right) +$$
$$(\gamma(u-u^u)+\delta v)\cos\left(\omega\ln\frac{2d^2}{\omega((\alpha(u-u^u)+\beta v)^2+(\gamma(u-u^u)+\delta v)^2)}\right)\Big] + \ldots \quad (4)$$

Из последнего выражения легко видеть, что $\frac{\partial u_1}{\partial u} \neq 0$.

В случае контура типа 2 траектории системы, проходящие через точки неустойчивого многообразия вида $|u-u_-| < \varepsilon, v = 0$ на Π_0^u, при возрастании времени пересекают диск N_0^s и затем выходят из окрестности V_0 (см. рис.). Аналогично, то же самое происходит, в силу симметрии, при убывании времени, для траекторий, проходящих через точки устойчивого многообразия вида $u = 0, |v - v_+| < \varepsilon$ на Π_0^s. ■

10 1-параметрическое семейство: счетное множество гомоклиник седло-центра

В этом параграфе мы рассмотрим общее 1-параметрическое семейство обратимых гамильтоновых систем X_{H_μ}, являющееся деформацией системы при $\mu = 0$, имеющей гетероклинический контур, рассмотренный в предыдущих разделах. Первым результатом, который будет получен здесь, является теорема о существовании счетного множества значений параметра, накапливающихся к $\mu = 0$, при которых соответствующая система имеет гомоклиническую траекторию к седло-центру. Напомним, что в классе гамильтоновых систем состояние равновесия типа седло-центр является грубым, т.е. оно сохраняется при всех достаточно малых возмущениях в этом классе. Седловая периодическая траектория гамильтоновой системы также является грубым образованием и сохраняется при малых возмущениях. Однако при общих обратимых возмущениях системы гетероклинические траектории, соединяющие седло-центр и периодическую траекторию, не существуют и поэтому могут существовать гомоклинические траектории к седло-центру. Мы будем искать симметричные гомоклинические траектории, которые могут быть двух типов.

Теорема 5. *Пусть X_{H_μ} 1-параметрическое семейство обратимых гамильтоновых систем, которое при $\mu = 0$ имеет гетероклинический контур, рассмотренный в предыдущих разделах. Тогда существует счетного множества значений параметра, накапливающихся к $\mu = 0$, при которых соответствующая система имеет гомоклиническую траекторию к седло-центру.*

Доказательство. Запишем возмущенные отображения

$$\begin{aligned}
T_2(\mu):&\ u_1 = a(\mu) + \gamma(\mu)\bar{x}_2 + \alpha(\mu)\bar{y}_2 + \cdots ,\\
&\ v_1 - v_+ = b(\mu) - \delta(\mu)\bar{x}_2 - \beta(\mu)\bar{y}_2 + \cdots ,\\
T_1(\mu):&\ x_2 = b(\mu) + \alpha(\mu)(u - u_-) + \beta(\mu)v + \cdots ,\\
&\ y_2 = a(\mu) + \gamma(\mu)(u - u_-) + \delta(\mu)v + \cdots ,\\
S(\mu):&\ u_1 = \nu^{-1}(\mu)u + \cdots ,\ v_1 = \nu(\mu)v + \cdots .
\end{aligned}$$

Для существования счетного множества симметричных гомоклинических траекторий к седло-центру достаточно показать, что неустойчивое

многообразие седло-центра пересекает линию неподвижных точек инволюции $Fix(L)$ при счетном значении параметра μ_n. Для определенности, рассмотрим точку $(0,0)$ окрестности V^u. При действии на нее композицией отображений $S^\mu \circ T_2^\mu$ получим: $u = \frac{a(\mu)}{\nu^n(\mu)}, \quad v - v_+ = b(\mu)\nu^n(\mu)$. Так как точка должно пересекать $Fix(L)$, то $u = v \Rightarrow \frac{a(\mu)}{\nu^n(\mu)} = (v_+ + b(\mu))\nu^n(\mu)$. Разложим $a(\mu), b(\mu)$ в ряд Тейлора до членов первого порядка: $a(\mu) = a\mu + ... \quad b(\mu) = b\mu + ...$ Тогда: $\frac{a\mu}{\nu^n} = (v_+ + b\mu)\nu^n$ Из последнего выражения получаем счетное множество параметров $\mu_n = \frac{\nu^{2n} v_+}{a - b\nu^{2n}}$, при которых существуют гомоклинические траектории к седло-центру.

Рассмотрим композицию отображений $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$:

$$x_2 = [b(\mu) + \nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)a(\mu) - \alpha(\mu)u_- + \beta(\mu)v_+ + \nu^n(\mu)\beta(\mu)b(\mu) + \\ + [\nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n\beta(\mu)\delta(\mu)]\bar{x}_2 + [\nu^{-n}(\mu)\alpha^2(\mu) - \nu^n(\mu)\beta^2(\mu)]\bar{y}_2 + \cdots,$$

$$y_2 = [a(\mu) + \nu^{-n}(\mu)\gamma(\mu)a(\mu) - \gamma(\mu)u_- + \delta(\mu)v_+ + \nu^n(\mu)\delta(\mu)b(\mu)] + \\ + [\nu^{-n}\gamma^2(\mu) - \nu^n\delta^2(\mu)]\bar{x}_2 + [\nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n(\mu)\beta(\mu)\delta(\mu)]\bar{y}_2 + \cdots$$

Свободные члены $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ равняются нулю, так как для существования гомоклинических траекторий необходимо, чтобы начало координат окрестности V^u отобразилось в начало координат окрестности V^s. Обозначим через $A = \nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n\beta(\mu)\delta(\mu), \quad B = \nu^{-n}(\mu)\alpha^2(\mu) - \nu^n(\mu)\beta^2(\mu), \quad C = \nu^{-n}\gamma^2(\mu) - \nu^n\delta^2(\mu), \quad D = \nu^{-n}(\mu)\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n(\mu)\beta(\mu)\delta(\mu)$. Тогда отображение $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ запишется в виде:

$$x_2 = A\bar{x}_2 + B\bar{y}_2 + \ldots, \qquad y_2 = C\bar{x}_2 + D\bar{y}_2 + \ldots.$$

Поскольку T_1^μ, S^μ, T_2^μ симплектические отображения, то и их композиция $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ также является симплектическим отображением. Покажем, что композиция $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ отлична от отображения поворота. Для этого рассмотрим окружности $S_1 : x_2^2 + y_2^2 = 2\eta, \quad S_2 : \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2 = 2\eta$ одного и того же радиуса в окрестностях $V^s, \quad V^u$, соответственно, и покажем, что окружность S_2 под действием $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu$ будет пересекаться с S_1 в четырех точках. Для этого перейдем к симплектическим полярным координатам:

$$x_2 = \sqrt{2\eta}\cos\theta, \quad y_2 = \sqrt{2\eta}\sin\theta$$
$$\bar{x}_2 = \sqrt{2\eta}\cos\varphi, \quad \bar{y}_2 = \sqrt{2\eta}\sin\varphi$$

Тогда условие пересечения S_1 и $T_1^\mu \circ S^\mu \circ T_2^\mu(S_2)$ эквивалентно уравнению:

$$1 = (A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (C\cos\varphi + D\sin\varphi)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{2} + \frac{A^2+C^2-B^2-D^2}{2}\cos 2\varphi + (AB+CD)\sin 2\varphi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sin(2\varphi + F) = \frac{2-(A^2+B^2+C^2+D^2)}{\sqrt{4(AB+CD)^2+(A^2+C^2-B^2-D^2)^2}} \quad (5)$$

Уравнение (5) будет иметь четыре решениям на отрезке $[0, 2\pi)$, если выполнено:

$$(2-(A^2+B^2+C^2+D^2))^2 < 4(AB+CD)^2 + (A^2+C^2-B^2-D^2)^2$$

Учитывая, что $A = D, \quad AD - BC = 1$ получим $2 - 2A^2 - B^2 - ^2 < 0$. Подставим в последнее неравенство $A, B, C \qquad 2 - 2(\nu^{-n}\alpha(\mu)\gamma(\mu) - \nu^n\beta(\mu)\delta(\mu))^2 - (\nu^{-n}(\mu)\alpha^2(\mu) - \nu^n(\mu)\beta^2(\mu))^2 - (\nu^{-n}\gamma^2(\mu) - \nu^n\delta^2(\mu))^2 < 0$. Преобразовывая это неравенство получим: $2-(\alpha^2(\mu)+\gamma^2(\mu))^2\nu^{-2n}(\mu) + 2(\alpha^2(\mu)\beta^2(\mu) - \gamma^2(\mu)\delta^2(\mu))^2 - (\beta^2(\mu)+\delta^2(\mu))^2\nu^{2n}(\mu) < 0$. Последнее неравенство будет выполняться, начиная с некоторого $n > n_0$, так как $(\beta^2(\mu)+\delta^2(\mu))^2\nu^{2n}(\mu) \to 0, \quad (\alpha^2(\mu)+\gamma^2(\mu))^2\nu^{-2n}(\mu) \to \infty$ при $n \to +\infty$. Таким образом, мы показали, что отображение $T_1 \circ S \circ T_2$ отлично от отображения поворота. ■

11 Симметричные неподвижные точки

Теорема 6. *Если обратимая гамильтонова система имеет гетероклинический контур типа 1 с указанными свойствами, то в окрестности такого контура существует счетное множество симметричных периодических траекторий.*

Доказательство. Для поиска симметричных периодических траекторий в окрестности изучаемого контура мы используем указанное выше характеристическое свойство таких траекторий для обратимой системы дифференциальных уравнений: они пересекают множество неподвижных точек инволюции точно в двух точках. Поэтому для поиска таких траекторий будем искать траектории, пересекающие два раза множество неподвижных точек инволюции.

Рассмотрим след множества $Fix(L)$ в окрестности седла-центра. В координатах уровне $H = 0$ это будет отрезок $x_1 = y_1, \quad x_2 = 0$ в множестве неподвижных точек инволюции. Введем параметризацию точек отрезка $x_1 = y_1 = \tau$. Образ полученного отрезка при сдвиге вдоль потока гамильтоновой системы до пересечения соответствующих траекторий с секущей $N^u(0)$ находится из решений системы (1) в окрестности точки p. Для этого запишем решения гамильтоновой системы (1) в окрестности точки p, выбирая в качестве начальных условий $x_1^0 = y_1^0 = \tau$, $x_2^0 = 0$. Поскольку $N^u(0)$ задается уравнением $x_1 = d, h(\xi, \eta) = 0$, то $\xi_0 = d^2$, $\eta_0 = y$ получаем $d = e^{-h_\xi^0 t}$, откуда время перехода на $N^u(0)$ равно $r = -\ln(d/\tau)/h_\xi^0$, где $\xi_0 = d^2, \eta_0 = y_0^2/2 = (1/\omega)d^2 + O(d^4)$.

Отсюда получаем, что отрезка на $N^u(0)$ состоит из двух спиралей, скручивающихся при $|\tau| \to 0$ к точке $x_2 = y_2 = 0$, одна при $\tau > 0$, а другая при $\tau < 0$:

$$x_2(r) = -y_2^0 \sin(r h_\eta^0), \quad y_2(r) = y_2^0 \cos(r h_\eta^0), \; h_\eta^0 = \omega + O(\eta).$$

Значение y_2^0 находится из уравнения $h = 0$, т.е. $\eta = \xi/\omega + O(\xi^2)$. Поскольку $x_2 = 0, \quad x_1^0 = y_1^0 = \tau$, то $y_2^0 = \pm\tau\sqrt{\dfrac{2}{\omega}} + O(\tau^2)$ и стремится к нулю при $|\tau| \to 0$.

Вторая точка пересечения искомой симметричной периодической траектории должна лежать на линии пересечения множества $Fix(L)$ с диском Σ, т.е. в координатах (u, v) это будет точка на отрезке $u = v$, содержащем седловую неподвижную точку $(0, 0)$. Для поиска этой второй точки отобразим спирали с помощью отображения T_2 в окрестность V^s, а затем, применяя отображение S^n будем искать точки пересечения образа спиралей с отрезком $u = v$.

Найдем сначала образы спиралей. Будем рассматривать только значения $\tau > 0$, т.к. для $\tau < 0$ вычисления аналогичны.

$$\begin{aligned} u_1 &= \tau\sqrt{\tfrac{2}{\omega}}\left(\gamma \sin\left(\ln(h_\eta^0 \tfrac{d}{\tau})\right) + \alpha \cos\left(\ln(h_\eta^0 \tfrac{d}{\tau})\right)\right) + O(\tau^2), \\ v_1 - v_+ &= \tau\sqrt{\tfrac{2}{\omega}}\left(-\delta \sin\left(h_\eta^0 \ln(\tfrac{d}{\tau})\right) - \beta \cos\left(\ln(h_\eta^0 \tfrac{d}{\tau})\right)\right) + O(\tau^2). \end{aligned} \tag{6}$$

n-ая итерация отображения S, примененная к точкам образа спирали, запишется как $(u_1/f^n(u_1 v_1), v_1 f^n(u_1 v_1))$. Условие, что точка на этой кривой пересечет линию неподвижных точек инволюции $u = v$ задается

равенством $u_1/f^n(u_1v_1) = v_1 f^n(u_1v_1)$ или $u_1 = v_1 f^{2n}(u_1v_1)$. Используя формулы (6), получим уравнение относительно τ

$$\tau\sqrt{\tfrac{2}{\omega}}\left(\gamma\sin\left(h_\eta^0\ln(\tfrac{d}{\tau})\right)+\alpha\cos\left(\ln(h_\eta^0\tfrac{d}{\tau})\right)\right)+O(\tau^2)= \\ \left[v_+ + \tau\sqrt{\frac{2}{\omega}}(-\delta\sin(h_\eta^0\ln(\tfrac{d}{\tau}))-\beta\cos(h_\eta^0\ln(\tfrac{d}{\tau}))+O(\tau^2)\right] f^{2n}(u_1v_1), \tag{7}$$

которое можно переписать, учитывая выражение для f, в следующем виде

$$\tau\sqrt{\tfrac{2(\gamma^2+\alpha^2)}{\omega}}\sin\left(\theta_1+h_\eta^0\ln\tfrac{d}{\tau}\right)+O(\tau^2)= \\ \nu^{2n}(1+\nu^{-2n}O(\tau))^{2n}\left(v_+ + \tau\sqrt{\tfrac{2(\beta^2+\delta^2)}{\omega}}\sin\left(\theta_2+h_\eta^0\ln(\tfrac{d}{\tau})\right)+O(\tau^2)\right), \tag{8}$$

где введены обозначения θ_1, θ_2 для углов, определяемых как

$$\cos\theta_1 = \gamma/\sqrt{\alpha^2+\gamma^2},\ \sin\theta_1 = \alpha/\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}, \\ \cos\theta_2 = -\delta/\sqrt{\beta^2+\delta^2},\ \sin\theta_2 = -\beta/\sqrt{\beta^2+\delta^2}.$$

Теперь покажем, что существует непересекающаяся последовательность отрезков J_n, накапливающихся к нулю, на каждом из которых имеется два значения $\tau_n^{(1)}, \tau_n^{(2)}$, которые соответствуют корням уравнения (7), и тем самым – симметричным периодическим траекториям, накапливающихся к контуру.

Для этого найдем точки пересечения спирали с осью v, т.е. $u = 0$ данное условие эквивалетно тому, что левая часть выражения (8) равна 0:

$$\tau\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\gamma^2)}{\omega}}\sin\left(\theta_1+h_\eta^0\ln\frac{d}{\tau}\right)+O(\tau^2)=0$$

Из этого выражения находим значения $\tau = de^{\frac{\theta_1-\pi k}{h_\eta^0}}$, которые при четном k соответствуют правому концу полуспирали, а при нечетном k–левому. Теперь найдем максимальное значение τ_{max} на каждой полуспирали J_k. Для этого решим уравнение $u' = 0$:

$$\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\gamma^2)}{\omega}}\sin\left(\theta_1+h_\eta^0\ln\frac{d}{\tau}\right)-\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\gamma^2)}{\omega}}h_\eta^0\cos\left(\theta_1+h_\eta^0\ln\frac{d}{\tau}\right)+O(\tau)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\theta_1 + h_\eta^0 \ln\frac{d}{\tau}\right) - h_\eta^0 \cos\left(\theta_1 + h_\eta^0 \ln\frac{d}{\tau}\right) + O(\tau) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+(h_\eta^0)^2}\sin\left(\theta_1 + \theta_3 + h_\eta^0 \ln\frac{d}{\tau}\right) + O(\tau) = 0, \qquad (9)$$

где $\cos\theta_3 = 1/\sqrt{1+(h_\eta^0)^2},\ \sin\theta_3 = -h_\eta^0/\sqrt{1+(h_\eta^0)^2}$.

Решением уравнения (9): $\tau_{max} = de^{\frac{\theta_1+\theta_3-\pi k}{h_\eta^0}}$ Теперь найдем номер итерации, отображения S,при каждом фиксированном значении k, при котором каждая полуспираль будет пересекать множество неподвижных точек инволюции в двух точках. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $u > v$, при $\tau = \tau_{max}$:

$$\tau_{max}\frac{\sqrt{2(\alpha^2+\gamma^2)}}{\sqrt{\omega}}\sin(\theta_1 + \ln\frac{d}{\tau_{max}}h_{I_2}^0) + O(\tau^2) > \nu^{2k}v_+\big(1 + \frac{\tau_{max}\sqrt{2(\beta^2+\delta^2)}}{\sqrt{\omega}}$$
$$\sin(\theta_2 + \ln\frac{d}{\tau_{max}}h_{I_2}^0) + O(\tau^2)\big)$$

$$\nu^{2n} < \frac{\tau_{max}\frac{\sqrt{2(\alpha^2+\gamma^2)}}{\sqrt{\omega}}\sin(\theta_1 + \ln\frac{d}{\tau_{max}}h_{I_2}^0) + O(\tau^2)}{v_+\left(1 + \frac{\tau_{max}\sqrt{2(\beta^2+\delta^2)}}{\sqrt{\omega}}\sin(\theta_2 + \ln\frac{d}{\tau_{max}}h_{I_2}^0) + O(\tau^2)\right)} \qquad (10)$$

Обозначим правую часть неравенства (10) через D. Тогда неравенство запишется в следующем виде: $\nu^{2n} < D$. Из последнего неравенства получим номер $n > \ln D/\ln\nu^2$, начиная с которого $u > v$. Таким образом, показали, что для каждого фиксированного k существует номер n , при котором существуют симметричные периодические траектории, накапливающиеся к контуру. ■

12 Эллиптические периодические траектории при $c < 0$

В этом параграфе докажем существование счетного множества эллиптических периодических траекторий, существующих в системе при отрицательных значениях постоянной c. При таких c в случае 1 в окрестности точки p все траектории, проходящие через одну "крышку" $N_c^s = N^s \cap V_c$ заполненного цилиндра, пересекают при возрастании времени вторую его крышку $N_c^u = N^u \cap V_c$.

Теорема 7. *Существует такая последовательность* $c_n \to -0$, *что в уровнях* V_{c_n} *у периодической траектории* γ_{c_n} *существуют нетрансверсальные гомоклинические траектории, вдоль которых устойчивое и неустойчивое многообразия* $W^s(\gamma_{c_n}), W^u(\gamma_{c_n})$ *имеют квадратичное касание. Для каждого значения* c_n *существует окрестность* $\mid c-c_n \mid < \varepsilon_n$, *для значений* c *из которой система имеет эллиптические периодические траектории на соответствующем уровне гамильтониана.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы рассмотрим уровень V_c при достаточно малых отрицательных c и найдем пересечение образа отрезка $v = 0$ (следа на Σ_c неустойчивого многообразия седловой периодической траектории γ_c) при отображении $T_c \circ T_1$. Нужно показать, что эта кривая при некоторых значениях c касается на N_c^u прообраза отрезка $u = 0$ (следа на Σ_c устойчивого многообразия седловой периодической траектории γ_c) относительно отображения T_2.

Запишем сначала вид отображения T_c. Он аналогичен (2), только при $c < 0$ функция $\Delta_c(\eta)$ имеет вид

$$\Delta_c(\eta) = -\frac{h_\eta}{h_\xi} \ln \frac{d^2}{a_c(\eta)},\ a_c(\eta) = -c + \omega\eta + O_2(c,\eta) > 0.$$

Положительность функции $a_c(\eta)$ означает, что отображение T_c является локальным симплектическим диффеоморфизмом в окрестности точки $(x_2, y_2) = (0, 0)$.

Рассмотрим отрезок $v = 0, |u - u_-| \le \varepsilon$ в Π_c^u. Поскольку $T_1(c)$ является симплектическим диффеоморфизмом, то образ этого отрезка будет гладким криволинейным отрезком в N_c^s, проходящим вблизи точки $(x_2, y_2) = (0, 0)$, расстояние этой точки до отрезка есть величина порядка $|c|$ ввиду аналитической зависимости от c неустойчивого многообразия седловой периодической траектории γ_c. В силу симметрии L, прообраз отрезка $u = 0, |v - v_+| \le \varepsilon$ из Π_c^s под действием отображения $T_2(c)$, также будет гладким криволинейным отрезком в N_c^u, проходящим вблизи точки $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (0, 0)$ на расстоянии от нее порядка $|c|$.

Перейдем к полярным координатам на дисках N_c^s, N_c^u:

$$x_2 = \sqrt{2\eta}\sin\phi, \quad y_2 = \sqrt{2\eta}\cos\phi,$$
$$\bar{x}_2 = \sqrt{2\eta}\sin\theta, \quad \bar{y}_2 = \sqrt{2\eta}\cos\theta.$$

После замены отображение T_c имеет следующий вид:

$$\overline{\eta} = \eta, \quad \overline{\theta} = \phi - \Delta_c(\eta),$$

где с точностью до членов первого порядка по c, η имеем $\Delta_c(\eta) = -\omega \ln \frac{d^2}{-c+\omega\eta}, \quad \eta = \frac{x_2^2+y_2^2}{2}, \quad \phi = arctg\frac{y_2}{x_2} \quad (mod \quad 1)$.

Разлагая по формуле Тейлора до членов первого порядка получим $a(c) = ac + ... \quad b(c) = bc + ...$ Тогда

$$\Delta_c(\eta) = -\omega \ln \frac{d^2}{-c + \omega[(ac + \alpha(u-u_-))^2 + (bc + \gamma(u-u_-))^2]/2} + O_2(c, \eta)$$

$T_1(c)$-образ отрезка $(u - u_-, 0)$ на N_c^s является гладкой кривой, ее минимальное расстояние до точки $(0,0)$ достигается в некоторой точке на отрезке с координатой $u - u_- = \xi(c) \sim c$. При отображении $T_1(c)$ эта точка лежит на окружности $\eta = \eta_c$ минимального радиуса по отношению к другим точкам этого отрезка. Отображение T_c сохраняет η, поэтому образ отрезка при отображении $T_c \circ T_1(c)$ будет спиралевидной кривой, которая лежит вне круга радиуса η_c на N_c^u. Точку спирали, лежащую на минимальной окружности назовем "носом спирали". Ее расстояние до начала координат $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (0,0)$ равно $\sqrt{2\eta_c}$.

Итак, на секущей N_c^u мы получаем две гладкие кривые: спираль и отрезок, являющийся $T_2(c)$-прообразом отрезка $(0, v - v_+)$ на Π_c^u. Отрезок на N_c^u симметричен отрезку на N_c^s, т.е. он также касается окружности $\eta = \eta_c$ минимального радиуса. Тем самым, мы имеем на минимальной окружности две точки от спирали и отрезка, обе точки являются точками касания с окружностью. Теперь рассмотрим взаимное положение этих двух точек на минимальной окружности при $c \to -0$. Точка отрезка при изменении c движется вдоль кривой, стремящейся к точке $(0,0)$ с определенной касательной (мы рассматриваем их в координатах (x_2, y_2)). Нос спирали однако движется таким образом, что его θ-координата монотонно зависит от c, как показано ниже, и она стремится к ∞. Это означает, что при $c \to -0$ нос спирали счетное множество раз при $c = c_n$ совпадает с точкой на отрезке, при этих c_n две точки на окружности совпадают, а соответствующие кривые (спираль и отрезок) касаются окружности с внешней стороны, тем самым, они касаются друг друга по крайней мере квадратично.

Покажем, что функция $\theta(\xi(c), c)$ монотонна по c. Для этого сначала найдем координаты носа спирали:

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \alpha(a(c) + \alpha(u - u_-)) + \gamma(b(c) + \gamma(u - u_-)) = 0$$

$$u - u_- = \frac{\alpha a(c) + \gamma b(c)}{\alpha + \gamma} = \xi(c).$$

Далее покажем, что производная $\frac{\partial\theta}{\partial c} \neq 0$ в этой точке:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial c}\right)_M = \frac{b\left(a(c) + \alpha\frac{\alpha a(c)+\gamma b(c)}{\alpha+\gamma}\right) - a\left(b(c) + \gamma\frac{\alpha a(c)+\gamma b(c)}{\alpha+\gamma}\right)}{\left(a(c) + \alpha\frac{\alpha a(c)+\gamma b(c)}{\alpha+\gamma}\right)^2 + \left(b(c) + \gamma\frac{\alpha a(c)+\gamma b(c)}{\alpha+\gamma}\right)^2} -$$

$$\frac{\omega\left(-1 + \omega\left(2\alpha(a(c) + \alpha\frac{\alpha a(c)+\gamma b(c)}{\alpha+\gamma}\right) + 2\gamma\left(b(c) + \gamma\frac{\alpha a(c)+\gamma b(c)}{\alpha+\gamma}\right)\right)}{-c + \omega\left[\left(a(c) + \alpha\frac{\alpha a(c)+\gamma b(c)}{\alpha+\gamma}\right)^2 + \left(b(c) + \gamma\frac{\alpha a(c)+\gamma b(c)}{\alpha+\gamma}\right)^2\right]} + O_2(c, u-u_-) \sim \frac{1}{c} \neq 0,$$

при $c \neq 0$. Таким образом, функция $\theta(\xi(c), c)$ монотонно зависит от c и неограниченно возрастает по абсолютной величине. Поэтому на окружности с координатой θ соответствующая точка счетное множество раз обходит окружность.

Второе утверждения теоремы следует из теоремы об однопараметрическом каскаде эллиптических точек (см., например, [9]).

Теорема 8. *Пусть f гладкое симплектическое отображение, имеющее седловую неподвижную точку, гомоклиническую траекторию Γ_0, вдоль которой устойчивое и неустойчивое многообразие седловой неподвижной точки имеет квадратичное касание. Рассмотрим общее однопараметрическое семейство симплектических отображений f_c, которое при $c = 0$ совпадает с f. Тогда на любом отрезке $[-c, c]$ существует бесконечно много открытых интервалов δ_k, таких, что $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, и отображение f_c, $c \in \delta_k$ имеет однообходную эллиптическую периодическую траекторию (периода $k + q$).*

Список литературы

[1] А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем, М. :Факториал, 1999.

[2] Л. М. Лерман. Динамика гамильтоновых систем, Учебное пособие, Горький, 1986.

[3] Л. М. Лерман. Динамика двумерных симплектических диффеоморфизмов, Методическое пособие, часть 1, Нижний Новгород, 2003.

[4] Л. М. Лерман. Динамика двумерных симплектических диффеоморфизмов, Методическое пособие, часть 2, Нижний Новгород, 2004.

[5] А. Д. Брюно, Нормализация системы Гамильтона вблизи инвариантного цикла или тора, УМН, 1989, том 44, выпуск 2(266), 49–78

[6] Д. Макдафф, Д Саламон. Введение в симплектическую топологию. Москва-Ижевск, 2012.

[7] R.L. Devaney. Reversible diffeomorphisms and flows. Trans. A.M.S., 218: 89-113, 1976.

[8] R.L. Devaney. Blue sky catastrophes in reversible and Hamiltonian systems. Indiana Univ. Math. J., 26: 247-263, 1977.

[9] M. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, On cascades of elliptic periodic points in two-dimensional symplectic maps with homoclinic tangencies, Regular and Chaotic Dynamics, 2009, Vol. 14, No. 1, pp. 116–136.

[10] A. Kelley, The stable, center-stable, center, center-unstable, and unstable manifolds, J. Differential Equations 3:4 (1967), 546-570.

[11] L. M. Lerman, Hamiltonian System with Loops of a Separatrix of Saddle-Center, Sel. Math. Soviet., (1991) 297-306.

[12] L. M. Lerman, Ya. L. Umanskii, Classification of four-dimensional Hamiltonian systems and Poisson actions of $\mathbb{R}^2$ in extended neighborhood of simple singular points, I, Matem. Sbornik, (in Russian), 1992, vol. 183, 141-176.

[13] А.И. Малкин, Акустические солитоны в заполненных жидкостью упругих трубах, ДАН РАН, Т.342 (1995), №5, 621-625.

[14] J. Moser, On the generalization of theorem of Liapounoff, Comm. Pure Appl. Math. 11:2 (1958) 257-271.

[15] J. Moser, The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point, Comm. Pure Appl. Math., v.9 (1956), 673-692.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от

Фернанды Андреа Флоридо Кальво

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Квазифейнмановские формулы для уравнения Шредингера на многообразии» являются: теорема нахождении явного решения уравнения Шредингера на римановом многообразии ограниченной геометрии (теорема 3.1).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Мною был произведён поиск в поисковой системе Google, при поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Иваном Дмитриевичем Ремизовым, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета ИМиКН Высшей Школы Экономики (в Нижнем Новгороде).

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится в ноябре 2021. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Подпись

Фернанда Андреа
Флоридо Кальво

02.06.2021
Пассау, Германия

National Research University Higher School of Economics
Department of Fundamental Mathematics

Quasi-Feynman Formulas for the Schrödinger Equation on a Manifold

Master of Science in Mathematics
Diploma Thesis

Author:
Fernanda Florido Calvo
2^{st} *Year Master Student*

Supervisor:
Ivan Remizov
Associate Professor, Ph.D.



HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

May 2021
Nizhny Novgorod, Russia

"Andábamos y andábamos. Para cambiar el rumbo del mundo."

Elvira Hernández.

Contents

1 Introduction **2**

2 Preliminaries **3**

2.1 Semigroups and Chernoff Functions 3

2.2 Schrödinger Equation 6

2.3 Manifolds 6

2.3.1 General Notions 6

2.3.2 Integration on Manifolds 11

3 Main Results **20**

4 Conclusion **29**

Bibliography **30**

Introduction

In this diploma thesis, the main purpose is to show the way how one can find the solution for the Schrödinger equation in a geodesically complete manifold M of bounded geometry. In order to do this, we will use an approach based on the Chernoff approximations. We fix the problem setting (i.e. the Schrödinger equation), provide the formula for solution of the equation and give a proof of this theorem.

The first section Preliminaries is devoted to state some previous definitions and theorems, needed for the understanding of the problem setting. The contents of this section have been obtained from the references [1], [2], [3] and [11]. Starting in the preliminaries, we first encounter the definitions of C_0-semigroup and its generator, and the Chernoff approximation of C_0- semigroup. An important consequence of this chapter is that we establish the connection of semigroups with differential equations, such as the Schödinger equation and evolution equations in general. We finish with definitions of manifolds, in particular we give some examples of known manifolds and their characteristics.

Finally, in Main Results, we explicitly define the problem setting. All of the previous concepts will be used to understand this part. We state and prove the theorem which gives us the solution for the Schrödinger equation in a geodesically complete manifold M of bounded geometry.

Preliminaries

In this section, we shall state some previous definitions and theorems, these have been obtained from several books and articles, all of them cited at the beginning of each subsection.

We begin with Semigroups and Chernoff Function, in this subsection we state the main results and definitions. Starting with the definitions of C_0- Semigroup and its infinitesimal generator, and we establish the connection of them with differential equations. We continue with the Chernoff tangency conditions and state the Chernoff Theorem, and we finish with a way to approximate the expression of the solution by means of the Chernoff approximation.

In the Schrödinger Equation subsection, we encounter a very short introduction of how it can be studied by means of semigroups.

We finally reach the last subsection of Manifolds, here we recall some definitions of manifolds and get to a table where we relate known manifolds and their properties, such as parallelizability, compatibility and being of bounded geometry.

These concepts are previous because we will use them to prove the theorems and propositions in the Main Results section. All of these preliminaries, help us set an environment to work.

2.1 Semigroups and Chernoff Functions

The following has been obtained form [6], [9], [10] and [11].

Definition 2.1 (C_0-Semigroup)**.** *Let $\mathcal{F}$ be a Banach space and $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ be the set of all bounded linear operators in $\mathcal{F}$. Suppose we have a mapping $V\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{F})$, i.e. $V(t)$ is a bounded linear operator $V(t)\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ for each $t \geq 0$. The mapping V is called a C_0-Semigroup if and only if it satisfies the following conditions:*

1. *$V(0)$ is the identity operator, i.e. $V(0)\varphi = \varphi$, for all $\varphi \in \mathcal{F}$.*

2. *V maps the addition of numbers in* $[0,+\infty)$ *into the composition of operators in* $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ *i.e.* $\forall t,s \geq 0$ $V(t+s) = V(t) \circ V(s)$.

3. *V is continuous with respect to the strong operator topology in* $\mathscr{L}(\mathcal{F})$*, i.e.* $\forall \varphi \in \mathcal{F}$ *function* $t \mapsto V(t)\varphi$ *is continuous as a mapping* $[0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{F}$.

Definition 2.2 (Infinitesimal generator of the C_0-Semigroup)**.** *If* $(V(t))_{t\geq 0}$ *is a* C_0*-Semigroup in Banach Space* $\mathcal{F}$*, then the set*

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{F} : \exists \lim_{t\to+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \stackrel{denote}{=} Dom(L) \tag{2.1}$$

is dense in $\mathcal{F}$*. The operator L defined on the domain* $Dom(L)$ *by the equality*

$$L\varphi = \lim_{t\longrightarrow+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \tag{2.2}$$

is called an infinitesimal generator of the C_0*-Semigroup* $(V(t))_{t\geq 0}$*, and the notation* $V(t) = e^{tL}$ *is used. The generator is a closed linear operator that defines the* C_0*-Semigroup uniquely.*

Comment 2.1. *Connection of* C_0*-Semigroups with evolution differential equations*

If there exists a C_0*-Semigroup,* $\left(e^{tL}\right)_{t\geq 0}$ *with generator L, then the Cauchy problem*

$$\begin{cases} u'_t(t,x) &= Lu(t,x) \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{cases} \tag{2.3}$$

for $t \geq 0$*, and x is the spatial coordinate (may belong to* $\mathbb{R}^d$*, manifold, or infinite dimensional space [See [6], [9], [10], [11]]) has a solution given by*

$$u(t,x) = \left(e^{tL}u_0\right)(x).$$

If the semigroup e^{tL} *with generator L exists, then the formula above defines a solution and depending on the definition of solution, it can be unique in some class of functions. In some cases Cauchy problem (2.3) admits some solutions even when* C_0*-semigroup with generator L does not exist.*

Definition 2.3. *Let us say that function G is Chernoff-tangent to the operator L if and only if the following conditions hold:*

(CT0) Let $\mathcal{F}$ *be a Banach space, and* $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ *the set of all linear bounded operators. Suppose that we have an operator-valued function* $G\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathcal{F})$ *and a closed linear operator* $L\colon Dom(L) \subset \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$.

(CT1) Function $t \mapsto G(t)f$ is continuous for each $f \in \mathcal{F}$.

(CT2) $G(0) = I$, i.e $G(0)f = f$, for all $f \in \mathcal{F}$.

(CT3) There exists a dense linear subspace $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ such that $\forall f \in \mathcal{D}$ there exits a limit

$$G'(0)f = \lim_{t \longrightarrow +0} \frac{G(t)f - f}{t}.$$

(CT4) The closure of $(G'(0), \mathcal{D})$ is equal to $(L, Dom(L))$.

Theorem 2.1 (The Chernoff Theorem)**.** ***Suppose*** *$\mathcal{F}$ and $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ are as defined in the previous definition, $L\colon \mathcal{F} \supset Dom(L) \longrightarrow \mathcal{F}$ is linear and closed, and the function G takes values in $\mathscr{L}(\mathcal{F})$. Suppose that the following assumptions are fulfilled:*

(E) There exists a C_0-Semigroup $\left(e^{tL}\right)_{t \geq 0}$ with generator $(L, Dom(L))$.

(CT) G is Chernoff-tangent to $(L, Dom(L))$.

(N) There exists a number $\omega \in \mathbb{R}$, such that $\| G(t) \| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.

Then *for each $f \in \mathcal{F}$ we have $(G(t/n))^n f \longrightarrow e^{tL} f$ as n tends to infinity, with respect to the norm in $\mathcal{F}$ uniformly with respect to $t \in [0, T]$, i.e. for all $T > 0$ we have*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} \| e^{tL} f - (G(t/n))^n f \| = 0,$$

Definition 2.4. *If conditions E, CT and N hold, then we call G a Chernoff function for the operator L. We also call $(G(t/n))^n$ a Chernoff approximation expression for e^{tL}.*

Theorem 2.2. *(See Theorem 1.3 in [9]). Let $\mathcal{F}$ be a complex Hilbert space, and let $Dom(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}$ be its dense linear subspace. Suppose that the operator $\mathcal{H}\colon Dom(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{F}$ is linear and self-adjoint, and real number $a \neq 0$. Suppose that we have such family $(W(t))_{t \geq 0}$ of bounded linear operators in $\mathcal{F}$ such that $(W(t))^* = W(t)$ $\forall t \geq 0$. Let $S(t) = I + W(t)$,such that the family $(S(t))_{t \geq 0}$ is Chernoff-tangent to $\mathcal{H}$. Set $R(t) = \exp[ia(S(t) - I)] = \exp[iaW(t)]$. Then there exists a C_0-Semigroup $(e^{iat\mathcal{H}})_{t \geq 0}$, family $(R(t))_{t \geq 0}$ that is Chernoff-equivalent to this semigroup, and for each $f \in \mathcal{F}$ and $t_0 \geq 0$ the following equalities hold with respect to the norm in $\mathcal{F}$*

$$e^{iat\mathcal{H}} f = \lim_{n \longrightarrow \infty} R(t/n)^n f = \lim_{n \longrightarrow \infty} \exp[ianW(t/n)] f, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{t \in [0, t_0]} \| e^{iat\mathcal{H}} f - \lim_{j \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{(ian)^k}{k!} W(t/n)^k f \| = 0.$$

2.2 Schrödinger Equation

The following has been obtained from [3] and [9].

The Schrödinger equation is one of the most important of Quantum Mechanics, and when the coefficients of it are not time dependent, then this equation describes the evolution of a closed quantum system (how the system changes over time under the condition of it being isolated). The Schrödinger equation is an example of a differential equation of the form (2.3), being L a linear operator in a Hilbert space. The Hamiltonian $\mathcal{H}$ describes ψ via de Cauchy problem

$$\begin{cases} i\psi_t'(t) &= \mathcal{H}\psi(t) \\ \psi(0) &= \psi_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

If $\mathcal{H}$ is a selfadjoint operator in L_2 with dense domain, then the selfadjointness guarantees thanks to the Stone theorem [See [3], Theorem 10.15], that for each $t \in \mathbb{R}$ the operator $e^{-it\mathcal{H}}$ exists and can be shown to be unitary. More over, the family $e^{-it\mathcal{H}}$ is a C_0-semigroup of unitary linear bounded operators with infinitesimal generator $-i\mathcal{H}$. Then the Cauchy problem associated to the Schrödinger equation (2.4) has solution given by $\psi(t) = e^{-it\mathcal{H}}\psi_0$.

2.3 Manifolds

2.3.1 General Notions

The following section has not been obtained from one single book but rather many books and papers, amongst them [1], [2], [7], [8] and [11].

Definition 2.5 (Locally Euclidean Space)**.** *A locally Euclidean space is a topological space M such that each point has a neighbourhood which is homeomorphic (i.e. there is a bijective continuous function whose inverse is continuous as well) to an open set of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$.*

Definition 2.6 (Topological Manifold)**.** *A topological manifold M of dimension n is a Hausdorff, second countable, locally Euclidean space of dimension n.*

Definition 2.7 (Coordinate Chart)**.** *A coordinate chart on M is a pair (U, φ), where U is an open subset of M and $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ is a homeomorphism onto an open subset of $\mathbb{R}^n$.*

Let $p \in U$, the pair (U, φ) is called a parametrization or system of coordinates, of M at p.

Comment 2.2. *We write $\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$ viewing this as the coordinate n-tuple of the point $p \in U \subset M$. Relative to such a parametrization, we can do calculus in the region U of M. Nevertheless, p might as*

well belong to another open set $U' \subset M$, therefore we need that these parametrizations agree with each other, we need to establish some sense of smooth compatibility.

Definition 2.8. *Two coordinate charts (U, φ) and (V, ψ) on M are C^∞-related if either $U \cap V = \emptyset$ or $\varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ is a diffeomorphism of open sets in $\mathbb{R}^n$.*

Comment 2.3. *We think of $\varphi \circ \psi^{-1}$ as a smooth change of coordinates on $U \cap V$. So on $U \cap V$, functions are smooth relative to one coordinate system iff they are smooth relative to the other. Differential calculus on $U \cap V$ via $\varphi(U \cap V)$ is equivalent to the calculus carried out via $\psi(U \cap V)$.*

Definition 2.9. *A C^∞ atlas on M is a collection $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ of coordinate charts such that*

1. *$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ is C^∞-related to (U_β, φ_β), $\forall \alpha, \beta \in J$.*
2. *$M = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$.*

Definition 2.10. *$\mathcal{A}$ is called a maximal C^∞ atlas on M if there does not exists any other atlas which contains it (strictly), and it is called a smooth structure on M (also called a differentiable structure or a C^∞ structure).*

Definition 2.11 (Differentiable Manifold)**.** *Let $\mathcal{A}$ be a maximal C^∞ atlas. The pair $(M, \mathcal{A})$ is called a smooth (or differentiable or C^∞) n-manifold.*

Definition 2.12 (Compact Manifold)**.** *A manifold is said to be compact if it is compact as a topological space.*

Definition 2.13 (Smooth function)**.** *Let M be a smooth manifold and $\mathcal{A}$ be its atlas. A function $f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ is said to be smooth if for each $x \in M$, there is a chart $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ such that $x \in U$ and $f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ is smooth. The set of all smooth, real valued functions on M will be denoted by $C^\infty(M)$.*

Comment 2.4. *In a similar way, we define for $U \subset M$ the set $C^\infty(U) := \{f \colon U \longrightarrow \mathbb{C} | f \text{ is smooth } \}$. And for each point $p \in M$ define $C^\infty(p) := \{f \colon U \longrightarrow \mathbb{C} | f \in C^\infty(U)$, where U is some neighbourhood of $p\}$.*

Lemma 2.1. *The function $f \colon M \longrightarrow \mathbb{C}$ is smooth iff $f \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}$ is smooth $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$*

Proof. See [2], lemma 3.1.14 □

Definition 2.14 (Tangent Space)**.** *Let M be a differentiable manifold and $p \in M$ and define $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow M$ a C^∞-path such that $\gamma(t) = p$ for some $t \in [a, b]$, where $[a, b] \subset \mathbb{R}$ is an open interval. The path γ defines a mapping $\dot{\gamma}_t \colon C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ as $\dot{\gamma}_t f = (f \circ \gamma)'(t) = (f(\gamma))'(t)$ called the tangent vector at p is the tangent vector at t of γ. The tangent space at p is the linear vector space of tangent vector at p, denoted by $T_p M$.*

Comment 2.5.
1. *The real-valued function $f \circ \gamma$ is defined on some neighbourhood of $t \in [a, b]$ and $(f \circ \gamma)'(t)$ is its usual derivative at t.*
2. *We may interpret $\dot{\gamma}_t f$ as a derivative of f in the direction of γ at the point p.*

3. *Let $p \in M$ and (U, φ), with $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ be a chart in p. We define a tangent vector at p by setting*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = D_i(f \circ \varphi^{-1})(x(p)), \quad f \in C^\infty(p)$$

where D_i is the partial derivative with respect to the i-th variable and denote $(\partial_i)_p = D_{x_i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$. This shows taht the tangent vector to the curve γ depends only on the derivative of γ in a coordinate system. The set T_pM with the usual operations of functions forms a vector space of dimension n and the choice of parametrizations determines an associated basis $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\}$ in T_pM. [See [1]].

Definition 2.15 (Tangent Bundle)**.** *For any differentiable manifold M, we define the tangent bundle of M denoted by TM to be the disjoint union of the tangent spaces at all points of M as $TM = \coprod_{p \in M} T_pM$. We will write an element of this disjoint union as an ordered pair (p, X), with $p \in M$ and $X \in T_pM$. The tangent bundle is equiped with a natrual projection map $\pi \colon TM \longrightarrow M$ which sends each vector in T_pM to the point p at which it is tangent i.e. $\pi(p, X) = p$.*

Comment 2.6. *The tangent bundle can be seen as a collection of vector spaces but it is even more than that, TM is a smooth manifold of dimension $2n$. [See [8], Lemma 4.1]*

Definition 2.16 (Vector Field)**.** *A vector field is a map $X \colon M \longrightarrow TM$ such that $X(p) \in T_pM$, this can also be written as $\pi \circ X = id_M$, i.e. $\pi(X(p)) = p$. We also write X_p instead of $X(p)$.*

Comment 2.7.
1. *Since TM is a manifold, it makes sense to call X as smooth vector field if the map $X \colon M \longrightarrow TM$ is smooth. So a smooth vector field on M is a smooth assignment of tangent vectors to the points $p \in M$. The set of smooth vector fields is denoted by $\mathfrak{X}(M)$.*
2. *We can see this as well in another way, recall the natural projection $\pi \colon TM \longrightarrow M$, the requirement that $X(p) \in T_pM$ for all $p \in M$ is equivalent to having $\pi \circ X = id_M$.*

The idea now is to equip the tangent space T_pM at p to the manifold with an inner product such that they change smoothly as p moves on M.

Definition 2.17 (Frame)**.** *Let M be an n-dimensional differentiable manifold. For any open subset $U \subset M$, an n-tuple of vector fields $X_1, \dots X_n$ over U is called a frame over U iff $(X_1(p), \dots, X_n(p))$ is a basis of the tangent space T_pM, for every $p \in U$. Now if $U = M$, then X_i are global sections and $X_1, \dots, X_n$ is called a frame.*

Definition 2.18 (Parallelizable Manifold)**.** *The manifold M is parallelizable if there are fields $X_1, \dots X_n \in TM$ such that $X_1(p), \dots, X_n(p)$ is a basis of T_pM, $\forall p \in M$.*

Definition 2.19 (Riemannian Metric)**.** *Let M be an n- dimensional differentiable manifold. A Riemannian metric on M (or TM) is a family $(\langle \cdot, \cdot \rangle_p)_{p \in M}$, of inner products on each tangent space T_pM, such that $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ depends smoothly on p. i.e. for every chart $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$, for every frame $X_1, \dots, X_n$ on U_α, the maps*

1599

$p \mapsto \langle X_i(p), X_j(p)\rangle_p$, *with* $p \in U_\alpha$, $1 \leq i, j \leq n$ *are smooth.*

Definition 2.20 (Riemannian Manifold)**.** *A differentiable n-dimensional manifold with a Riemannian metric is called a Riemannian manifold.*

Definition 2.21 (Directional Derivative)**.** *Let* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *and* $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ *be a differentiable function on* $U \subset M$*, we define for all* $p \in M$ *the directional derivative of* f *with respect to* X *is defined by*

$$X[f](p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p + tX(p)) - f(p)}{t}$$

And is denoted by $X[f](p)$ *or* $(X(f)(p)$*.*

Definition 2.22 (Connection)**.** *Let* M *be a smooth manifold. A connection on* M *is a map* $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$*, and we write* $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ *which satisfies the following*

1. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$.
2. $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$.

For all $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *and* $f \in C^\infty(M)$*.*

Definition 2.23. *Let* M *be a smooth manifold and* $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow M$ *be a smooth curve in* M*. A smooth vector field along the curve* γ *is a smooth map* $X\colon [a, b] \longrightarrow TM$ *such that* $\pi(X(t)) = \gamma(t)$*, for all* $t \in [a, b]$*.*

Definition 2.24 (Covariant Derivative)**.** *Let* ∇ *be a connection on* M*. An associated covariant derivative is an operator* $\frac{\nabla}{dt}\colon \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$*, usually denoted by* D_t *instead of* $\frac{\nabla}{dt}$ *satisfying the following properties*

1. *Linearity over* $\mathbb{R}$*:* $D_t(aX + bY) = aD_tX + bD_tY$ *for* $a, b \in \mathbb{R}$ *and* $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*.*
2. *Product rule:* $D_t(fX) = \frac{df}{dt}X + fD_tX$ *for* $f \in C^\infty[a, b]$ *and* $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$*.*
3. *If* $Y \in \mathfrak{X}(M)$*, then*
$$D_t(Y|_\gamma)(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}(Y) \in T_{\gamma(t)}M, \quad a \leq t \leq b.$$

Definition 2.25. *Let* M *be a manifold with connection* ∇*. Let* $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ *for a smooth path* $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow M$*. If* $D_tX \equiv 0$ *on* γ*, then* X *is said to be parallel along* γ*.*

Theorem 2.3. *Every manifold* M *has a connection.*

Proof. See [2], Theorem 10.1.23. □

Definition 2.26. *If* $v \in T_pM$*, for some* $p \in M$*, then the length of* v *is the non-negative number* $\| v \| = \sqrt{\langle v, v\rangle_p}$*.*

Comment 2.8. *We will often not write the subscript* p *on* $\langle v, w, \rangle_p$*, where* $v, w \in T_pM$*.*

1600

Definition 2.27. *If $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ is smooth, then the length of γ is*

$$L_\gamma = |\gamma| = \int_a^b \parallel \dot{\gamma}(t) \parallel dt.$$

Definition 2.28. *Geodesic Let M be an n-dimensional manifold with a connection ∇. A smooth curve $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ is a geodesic for ∇ if $\dot{\gamma}(t)$ is parallel along $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$.*

In local coordinates, the definition of a geodesic translates into a system of nonlinear, second order, ordinary differential equations, let us for $\gamma(t) = (x_1(t), \dots x_n(t))$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \dot{\gamma}(t) &= (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) \end{aligned}$$

and with the parallel condition $D_t\gamma = 0$ we obtain

$$\ddot{x}_k(t) + \dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0 \tag{2.5}$$

Equation (2.5) is called the Geodesic Equation, it is a second order system of ordinary differential equations for the functions $x_i(t)$. When solving this equation, we obtain the following theorem.

Theorem 2.4 (Existence and Uniqueness of Geodesics)**.** *Let M be a manifold with connection. For any $p \in M$ and $v \in T_pM$ and any $t_0 \in \mathbb{R}$, there exists an open interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ containing t_0 and a geodesic $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ satisfying $\gamma(t_0) = p$, $\dot{\gamma}(t_0) = v$.*

Proof. See [8], Theorem 4.10. □

Definition 2.29. *For $x \in U$ and $v \in T_pM$, $\parallel v \parallel < \varepsilon$, with $\varepsilon > 0$ we define $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$*

Comment 2.9. *We obtain that $\gamma_v(\tau) = \gamma_{\tau v}(1)$*

Lemma 2.2. *For $x \in U$ and $v \in T_pM$, $\parallel v \parallel < \varepsilon$, with $\varepsilon > 0$, $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, $-1 \leq t \leq 1$.*

Theorem 2.5. *If $\varepsilon_t > 0$ is sufficiently small, then $\exp_p\colon B_p(\varepsilon_p) \longrightarrow M$, called the exponential map at p, is a diffeomorphism onto an open neighbourhood of $p \in M$.*

Proof. See [2], Theorem 10.4.10. □

Definition 2.30 (Geodesically Complete Manifold)**.** *The Riemannian manifold M is geodesically complete if $\exp_p(v)$ is defined for all $p \in M$ and for all $v \in T_pM$.*

Theorem 2.6. *If M is compact, then M is geodesically complete.*

Proof. See [2], Corollary 10.4.17. □

Definition 2.31 (Injectivity Radius)**.** *The injectivity radius at $p \in M$, denoted by $I(p) \geq 0$ is the supremum of the set of radii r of the open ball $B_p(r) \subset M$ such that the chart $(B_p(r), \exp_p^{-1})$ is a normal Riemannian chart centred at p for an orthonormal basis of T_pM. We write $I := \inf_{p \in M} I(p)$.*

Definition 2.32 (Manifold of Bounded Geometry)**.** *A smooth Riemannian manifold is of bounded geometry if it has strictly positive injectivity radius.*

Comment 2.10. *Compact smooth Riemannian manifolds have strictly positive injectivity radius.*

Lemma 2.3. *If M is a connected smooth manifold with strictly positive injectivity radius, then M is geodesically complete and all closed bounded sets are compact.*

Proof. See [11], Lemma 9. □

Comment 2.11. *The condition of being of bounded geometry implies that M is as well complete, i.e. all geodesics can be extended indefinitely. It follows that M is complete as a metric space with the metric given by Riemannian metric, and every ball is compact.*

In the following table, we establish examples of manifolds which are parallelizable, compact and of bounded geometry.

Comment 2.12. *During this work the notion of parallelziability is not used, nervertheless it is very important in [11] and it might be useful for a future research.*

2.3.2 Integration on Manifolds

The following has been obtained mainly from [4] and [5].

Definition 2.33 (σ-algebra)**.** *A subset Σ of $\mathcal{P}(X)$ (the parts of X) is called a σ-algebra over X if it satisfies the following*

1. $X \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$.
3. $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \Sigma$.

If Σ is a σ-algebra over X, we call (X, Σ) a measure space, and every $A \in \Sigma$ is said to be Σ-measurable.

	Parallelizable		**Non Parallelizable**	
Bounded Geometry	• n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$ • Compact Lie group • $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$ • Ellipsoid	• Cylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ • Non compact Lie Group: $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ • Hyperboloid of one and two sheets • Paraboloid	• $\mathbb{S}^n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1,3,7\}$	• Möbius strip without boundary
Not Bounded Geometry	Not Possible	• Surface with constant negative curvature	Not Possible	• Möbius band $\times\mathbb{R}^2$
	Compact	**Not Compact**	**Compact**	**Not Compact**

Comment 2.13. *Suppose Σ is a σ-algebra and $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Sigma$, and $r \in \mathbb{N}$, then the following sets $\emptyset, A_0 \setminus A_1, \bigcup_{j=0}^{r} A_j, \bigcap_{j=0}^{r} A_j, \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ also belong to Σ.*

Definition 2.34 (The Borel σ-algebra)**.** *Let S be a non-empty subset of $\mathcal{P}(X)$. Then*

$$\Sigma(S) := \bigcap\{\Sigma \subset \mathcal{P}(X) | S \subset \Sigma, \Sigma \text{ is a } \sigma\text{-algebra over } X\}$$

Let $X := (X, \tau)$ be a topological space. Since τ is non-empty, it generates a well defined σ-algebra, called the Borel σ-algebra of X and denoted by $\mathcal{B}(X)$. The elements $\mathcal{B}(X)$ are the Borel subsets of X.

Comment 2.14.
1. *$\Sigma(S)$ is well defined and is the smallest σ- algebra containing S. [See [4], Remark 1.4]*
2. *We will write $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ as $\mathcal{B}^n$.*

Definition 2.35. *Suppose C is a collection of subsets of X with $\emptyset \in C$. Let $\varphi\colon C \longrightarrow [0,\infty]$ be a map (or set function) with $\varphi(\emptyset) = 0$. We say φ is σ-subadditive if for every sequence $(A_j) \in C$ such that $\bigcup_j A_j \in C$*

$$\varphi\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_j (A_j). \tag{2.6}$$

We say a map φ of C in $[0,\infty]$ such that $\varphi(\emptyset) = 0$ is σ-additive if

$$\varphi\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j (A_j) \tag{2.7}$$

1603

for every disjoint sequence $(A_j) \in C$ such that $\bigcup_j A_j \in C$.

If (2.6) holds for every finite collection $A_0, \ldots, A_m$ of subsets of C such that $\bigcup_j A_j \in C$ we say φ is subadditive.

Likewise, if (2.7) holds for every finite collection $A_0, \ldots A_m$ of pairwise disjoint subsets of C such that $\bigcup_j A_j \in C$, we say φ is additive.

Finally we say $\varphi \colon C \longrightarrow [0, \infty]$ is σ-finite if X belongs to C and there is a sequence $(A_j) \in C$ such that $\bigcup_j A_j = X$ and $\varphi(A_j) < \infty$, we say φ is finite.

Definition 2.36 (Measure Space)**.** *Suppose Σ is a σ-algebra over X and $\mu \colon \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ is σ-additive. We say that μ is a (positive) measure on X, and we call (X, Σ, μ) a measure space.*

Comment 2.15. *In the definition above if $\mu(X) = 1$, we also call μ a probability measure and (X, Σ, μ) a probability space.*

Proposition 2.1. *Let (X, Σ, μ) be a measure space. For $A, B \in \Sigma$ and $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Sigma$ we have*

1. *$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
2. *$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ if $A \subset B$ and $\mu(A) < \infty$.*
3. *$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ that is, μ is increasing.*
4. *$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_j \mu(A_j)$, that is, μ is σ-subadditive.*

Proof. See [4], Proposition 2.3. □

Definition 2.37. *Suppose (X, Σ, μ) is a measure space. A set $N \in \Sigma$ with $\mu(N) = 0$ is said to be μ-null. We denote the set of all μ-null sets by $\mathcal{N}_\mu$. A measure space (X, Σ, μ) is called complete if any subset of a μ-null set lies in Σ.*

Definition 2.38. *A map $\mu^* \colon \longrightarrow [0, \infty]$ such that $\mu^*(\emptyset) = 0$ is called an outer measure on X if it is increasing and σ-subadditive. A subset $\mathcal{K}$ of $\mathcal{P}(X)$ is said to be a conforming cover for X if it contains the empty set as well as elements K_j for $j \in \mathbb{N}$, such that $X = \bigcup_j K_j$.*

Definition 2.39. *For $a, b \in \mathbb{R}^n$, the n-dimensional volume of the interval $(a, b) \in \mathbb{R}^n$ is defined as*

$$vol_n(a, b) := \begin{cases} \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) & , \quad a \leq b, \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases} \tag{2.8}$$

If $(a, b) \neq \emptyset$, this coincides with the product of n edge lengths of (a, b), more specifically, with the everyday notion of length of an interval, are of a rectangle, and volume of a parallelepiped, for $n = 1, 2$ and 3 respectively.

Proposition 2.2. *For $A \subset \mathbb{R}^n$, let*

1604

$$\lambda_n^*(A) := \inf\left\{\sum_{j=0}^{\infty} vol_n(I_j) | I_j \text{ is an open interval , } j \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} I_j\right\}$$

Then $\lambda_n^*(A)$ is an outer measure on $\mathbb{R}^n$, called n-dimensional Lebesgue outer measure. For $a, b \in \mathbb{R}^n$ and $(a,b) \subset A \subset [a,b]$, we have $\lambda^*(A) = vol_n(a,b)$.

Proof. See [4], Proposition 3.3. □

Definition 2.40 (Measurable Set)**.** *A subset A of X is μ^*-measurable if, for every $D \subset X$, $\mu^*(D) \geq \mu^*(A \cap D) + \mu^*(A^c \cap D)$. We denote the set of all μ^*-measurable subsets of X by $\Sigma(\mu^*)$. If $N \subset X$ has $\mu^*(N) = 0$, we say the set N is μ^*-null (or of μ^* measure zero).*

Definition 2.41. *The σ-algebra $\Sigma(\lambda_n^*)$ generated bye the n-dimensional Lebesgue outer measure is called the σ-algebra of Lebesgue measurable subsets of $\mathbb{R}^n$ and will be denoted by $\mathcal{L}(n)$. Accordingly, Lebesgue null subsets of $\mathbb{R}^n$ (that is, λ_n^*-null or equivalently λ_n-null sets) are said to have Lebesgue measure zero. If necessary, we speak also of Lebesgue n-measure.*

Theorem 2.7. *1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(n), \lambda_n)$ is a complete, σ-finite measure space.*

2. *$\mathcal{B}^n \subset \mathcal{L}(n)$, i.e. every Borel subset of $\mathbb{R}^n$ is Lebesgue measurable.*
3. *For $a, b \in \mathbb{R}^n$, any set A satisfying $(a,b) \subset A \subset [a,b]$ belongs to $\mathcal{L}(n)$, and $\lambda_n(A) = vol_n(a,b) \prod_{j=1}(b_j - a_j)$.*
4. *Every compact subset of $\mathbb{R}^n$ is Lebesgue measurable and has finite measure.*
5. *A set $N \subset \mathbb{R}^n$ has Lebesgue measure zero iff for every $\varepsilon > 0$ there is a sequence I_j of open intervals such that $N \subset \bigcup_j I_j$ and $\sum_j \lambda_n(I_j) < \varepsilon$.*
6. *Every countable subset of $\mathbb{R}^n$ has Lebesgue measure zero.*

Proof. See [4], Theorem 5.1 □

Definition 2.42. *Let X be a topological space (X, Σ, μ), a measure space with $\mathcal{B}(X) \subset \Sigma$. We say (X, Σ, μ) and μ are regular if for ever open $A \in \Sigma$*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) | O \subset X \text{ is open with } A \subset O\} = \sup\{\mu(K) | K \subset X \text{ is compact with } K \subset A\}$$

Definition 2.43 (σ-compact)**.** *Let X be a topological space. A subset M of X is σ-compact if there is a sequence K_j of compact subsets such that $M = \bigcup_j K_j$.*

Definition 2.44. *Suppose P is a property that is either true or false of each point in X. We say that P holds μ-almost everywhere, for μ-almost every $x \in X$, if there exists a μ-null set N such that $P(x)$ is true for every $x \in N^c$.*

1605

Definition 2.45 (μ-simple)**.** *Let E be a Banach space. We say $f\colon X \longrightarrow E$ is μ-simple if $f(X)$ is finite, $f^{-1}(e) \in \Sigma$ for every $e \in E$, and $\mu(f^{-1}(E \setminus \{0\})) < \infty$. We denote by $\mathcal{S}(X, \mu, E)$ the set of all μ-simple functions from X to E.*

Definition 2.46. *Let E be a Banach space. A function $f\colon X \longrightarrow E$ is said to be μ-measurable if there is a sequence f_j in $\mathcal{S}(X, \mu, E)$ such that $f_, \longrightarrow f$, μ-almost everywhere as $j \longrightarrow \infty$. We set*

$$\mathcal{L}_0(X, \mu, E) := \{f\colon X \longrightarrow E | f \text{ is } \mu\text{-measurable}\}$$

Comment 2.16. *We have the inclusion of vector spaces $\mathcal{S}(X, \mu, E) \subset \mathcal{L}_0(X, \mu, E) \subset E^X$, where E^X is the set of functions $f\colon X \longrightarrow E$. [See [4], Remark 1.2].*

Definition 2.47. *Suppose X is σ-compact metric space. A Radon measure on X is regular, locally finite measure on a σ-algebra Σ over X such that $\mathcal{B}(X) \subset \Sigma$. We say a Radon measure μ is massive if μ is complete and every non-empty open subset O of X satisfies $\mu(O) > 0$.*

Definition 2.48. *The indicatrix function $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0, 1\}$ is defined as*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \in A, \\ 1 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

Definition 2.49. *Let $\varphi \in \sum_{j=0}^{m} e_j \chi_{A_j} \in \mathcal{S}(X, \mu, E)$, we define hte integral of φ over X with respect to the measure μ as the sum*

$$\int_X \varphi d\mu := \int \varphi d\mu := \sum_{j=0}^{m} e_j \chi_{A_j}$$

If A is a μ-measurable set, we define the integral φ over A with respect to the measure μ as

$$\int_A \varphi d\mu := \int_X \chi_A \varphi d\mu$$

Proposition 2.3. 1. *For $\varphi \in \mathcal{S}(X, \mu, E)$ and $A \in \Sigma$, the integral $\in_A \varphi d\mu$ is well defined*

2. *Let $\varphi = \sum_{k=0}^{n} f_k \chi_{B_k}$, where $f_0, \ldots f_n \in E$ are non-zero and $B_0, \ldots B_n \in \Sigma$ are pairwise disjoint, be a μ-simple function not necessarily in normal form. Then*

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=0}^{n} f_k \mu(B_k).$$

3. *The integral $\int_X \cdot d\mu\colon \mathcal{S}(X, \mu, E) \longrightarrow E$ is linear.*

4. *For $A, B \in \Sigma$ and $A \cap B = \emptyset$, we have*

$$\int_{A\cup B} \varphi d\mu = \int_A \varphi d\mu + \int_B \varphi d\mu \text{ for } \mathcal{S}(X,\mu,E)$$

5. *For $\varphi \in \mathcal{S}(X,\mu,E)$ and $A \in \Sigma$, we have*

$$\left|\int_A \varphi d\mu\right| \leq \int_A |\varphi| d\mu \leq \| \varphi \|_\infty \mu(A).$$

6. *If $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(X,\mu,\mathbb{R})$ satisfy $\varphi \leq \psi$, then $\int_A \varphi d\mu \leq \int_A \psi d\mu$.*

Proof. See [4], Remark 2.1. □

We now turn to our m-dimensional manifold M.

Definition 2.50. *A subset A of M is said to be Lebesgue measurable if around every $p \in A$ there is a chart (U,φ) such that $\varphi(A \cap U)$ belongs to $\mathcal{L}(m)$, that is $\varphi(A \cap U)$ is λ_m-measurable. We set $\mathcal{L}_M := \{A \subset M | A \text{ is measurable } \}$*

Proposition 2.4. 1. *The definition is coordinate-independent.*

2. *If M is open in $\mathbb{R}^n$, then $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}(m)|M$.*

3. *$\mathcal{L}_M$ is a σ-algebra over M, the Lebesgue σ-algebra of M. It contains the Borel σ-algebra $\mathcal{B}(M)$.*

Proof. See [4], Remark 1.1 and proposition 1.2. □

Definition 2.51. *The support of a function $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ is the set* $\operatorname{supp} f := \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$.

Definition 2.52 (Partition of Unity)**.** *Let M be a C^∞-manifold. A C^∞-partition of unity on M is a collection $\{\psi_i | i \in J\}$ of C^∞-functions on M such that*

1. *The collection of supports $\{\operatorname{supp} \psi_i | i \in I\}$ is locally finite.*

2. *$\psi_i(p) \geq 0$ for all $p \in M$ and $i \in J$.*

3. *For all $p \in M$, $\sum_{i\in J} \psi_i(p) = 1$.*

A partition of unity $\{\psi_i | i \in J\}$ is subordinate to a cover U_α ($M = \cup_\alpha U_\alpha$) if, for each $i \in J$ there is α such that $\operatorname{supp} \psi_i \subset U_\alpha$.

Theorem 2.8. *Let M be a C^∞-manifold and U_α an open cover of M. Then there exists a countable C^∞-partition of unity $\{\psi_i | i \in \mathbb{N}\}$ subordinate to the cover U_α, with* $\operatorname{supp} \psi_i$ *compact for each i.*

Proof. See [5], Theorem 2.25. □

Theorem 2.9 (Change of Variables Theorem)**.** *Suppose M and N are n-oriented manifolds and $f\colon M \to N$ is an orientation-preserving diffeomorphism. If $\omega \in \Omega^n(N)$ has compact support, then $f^*\omega$ has compact support and*

$$\int_N \omega = \int_M f^*\omega$$

Corollary 2.9.1. *Suppose M and N are n-oriented manifolds and $f\colon M \to N$ is an orientation-preserving diffeomorphism. If $\omega \in \Omega^n(N)$ then*

$$\int_N \omega = \int_M f^*\omega$$

Proof. Let us cover manifold N with open balls $B_1(x)$ with radius 1 and center x ranging over N. It follows from the properties of a manifold as a topological space that from this covering it is possible to extract countable sub-covering $(B_1(x_k))_{k=1}^{\infty}$. By theorem 2.8, we have that there is a smooth partition of unity φ_k on N, and let us define $\omega_k = \varphi_k\omega$, which has compact support, because the φ_k have compact support. By theorem 2.9 applied to an orientation-preserving diffeomorphism $f\colon M \to N$ and ω_k we have $\int_N \omega_k = \int_M f^*\omega_k$ which actually is $\int_N \varphi_k\omega = \int_M \varphi_k f^*\omega$. After summation in k we obtain

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_N \varphi_k\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M \varphi_k f^*\omega.$$

For each $x \in M$ only finite number of integrands are non-zero, so we can change order of summation and integration:

$$\int_N \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\omega = \int_M \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k f^*\omega.$$

But $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = 1$ so $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\omega = \omega$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k f^*\omega = f^*\omega$, hence $\int_N \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\omega = \int_N \omega$, $\int_M \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k f^*\omega = \int_M f^*\omega$, so $\int_N \omega = \int_M f^*\omega$ and corollary is proved. □

Definition 2.53. *Suppose that M is a Riemannian manifold, and let (U, φ_1), $\varphi_1 = (x_1, \dots x_n)$ and (U, φ_2), $\varphi_2 = y_1, \dots y_n)$ be charts. We will write the Riemannian metric g as*

$$\begin{aligned} g &= g^x_{ij} dx_i dx_j, \qquad g^x_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ g &= g^y_{ij} dy_i dy_j, \qquad g^y_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle \end{aligned}$$

Denote $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U) \longrightarrow \varphi_2(U)$. We want to define $\int_U d\mu$ where $d\mu$ is a volume element such that it

is independent of the chart. We will write for $p \in U$

$$\begin{aligned} G^x(p) &= (g^x_{ij}(p)) \\ G^y(p) &= (g^y_{ij}(p)) \end{aligned}$$

And let $A(q)$ be the matrix of $\varphi'(q)$ with respect to the standard basis of $\mathbb{R}^n$. Since g is positive definite and symmetric, we have $\det G^x(p) > 0$, for all $p \in M$. And obtain that

$$\int_{\varphi_1(U)} (\sqrt{\det G^x}) \circ \varphi_1^{-1} = \int_{\varphi_2(U)} (\sqrt{\det G^y}) \circ \varphi_2^{-1}$$

So we obtain the definition

$$\int_U d\mu := \int_{\varphi_1(U)} (\sqrt{\det G^x}) \circ x^{-1}$$

Independent of the chosen map φ_1.

Definition 2.54. *In a similar way, independent of x for all Borel function $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, and considering an atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in J\}$ and a countable C^∞-partition of unity $\{\psi_i\}$ subordinate to $\mathcal{A}$. For each i let $\alpha_i \in J$ be such that $\operatorname{supp} \psi_i \subset U_{\alpha_i}$. Then we define for any Borel set $A \subset M$,*

$$\mu(A) := \int_A d\mu = \sum_i \int_{U_{\alpha_i} \cap A} \psi_i d\mu = \sum_i \int_{U_{\alpha_i}} \psi_i \chi_A d\mu$$

This is independent of the chosen Atlas and partition of unity.

Definition 2.55.

$C_b^\infty(M)$ the set of all complex-valued and defined on M bounded continuous functions.

$L_2(M, \mathbb{C})$ the set of all measurable complex-valued functions f such that $|f|^2$ is integrable.

Definition 2.56. *$\omega \in \Omega^n(N)$ denotes the exterior n-forms of the manifold N.*

Definition 2.57. *Let A be a smooth vector field on M. If A is complete then it generates an one-parametric group of diffeomorphisms $\alpha_t\colon M \to M, t \in \mathbb{R}$. We have*

$$\frac{d\alpha_t(a_1)}{dt} = A(\alpha_t(a_1)), \quad \forall a_1 \in M.$$

Put $a_2 = \alpha_t(a_1)$ and

$$(\alpha_t^* \Omega)_{a_1} = (\alpha_t^*)_{a_2}(\Omega_{a_2}),$$

where $(\alpha_t^*)_{a_2} : \Lambda^q(T_bM) \to \Lambda^q(T_aM)$ *is a codifferential of diffeomorphism* α_t *at point* a_2.

Definition 2.58. *The divergence of vector field* A *is* $(\div A)\Omega = L_A\Omega$*, where* $L_A\Omega$ *is the Lie derivative of the tensor field* Ω *in the direction of the vector field* A.

1610

Main Results

Let M be a smooth Riemannian manifold of bounded geometry, and consider the following Cauchy problem for the Schrödinger equation with Hamiltonian $-H$:

$$\begin{cases} \psi'_t(t,x) = iH\psi(t,x), & x \in M \quad t \in \mathbb{R} \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), & x \in M \end{cases} \tag{3.1}$$

Our goal will be to obtain an explicit solution, for this we will use Chernoff Theorem and Chernoff approximation and the tools of differential geometry. The main result of the thesis is stated in the following theorem.

Theorem 3.1. *Let $V\colon M \to \mathbb{R}$ be measurable and bounded. Let us define for all $f \in L_2(M,\mathbb{C})$, $x \in M$ and $t \geq 0$*

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{2d}\sum_{j=1}^{d}\left(f\left(\gamma_{x,A_j}(\sqrt{td})\right) + f\left(\gamma_{x,-A_j}(\sqrt{td})\right)\right) - tV(x)f(x), \tag{3.2}$$

where $\gamma_{x,A_j}\colon \mathbb{R}^+ \to M$ denotes the integral curve of the vector field A_k starting at time 0 at the point $x \in M$, namely the solution of the initial value problem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma_{x,A_j}(t) = A_j(\gamma_{x,A_j}(t)), \\ \gamma_{x,A_j}(0) = x. \end{cases} \tag{3.3}$$

A_k are the d smooth and C^∞-bounded vector fields, we will assume $divA_k(\alpha_s^*) = 0$ for all $s > 0$, and that A_k has bounded derivative up to order 4. Define the Hamiltonian as follows

$$(H\psi)(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} A_k(A_k\psi)(x) - V(x)\psi(x) \tag{3.4}$$

1611

Then with respect to the norm

$$\| g \| = \left(\int_M |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

the following is satisfied:

1. *$S(t)$ is a bounded linear operator for each $t \geq 0$ i.e. $\| S(t) \| \leq C(t) < \infty$.*
2. *$S(t)$ is self adjoint for each $t \geq 0$. i.e. $S(t) = S(t)^*$.*
3. *$S(t)$ is Chernoff tangent to H.*
4. *$R(t) = \exp(i(S(t) - I))$ is a Chernoff function for iH, $e^{itH} f = \lim_{n \to \infty} R(t/n)^n f$ for each $f \in L_2(M, \mathbb{C})$.*
5. *The solution of Cauchy problem (3.3) with operator H defined in (3.4) is for almost all $x \in M$ and all $t \geq 0$ given by*

$$\psi(t,x) = \left(e^{itH} \psi_0 \right)(x) = \left(\lim_{n \to \infty} R(t/n)^n \psi_0 \right)(x) = \left(\lim_{n \to \infty} \exp\left(in(S(t/n) - I) \right) \psi_0 \right)(x) \tag{3.5}$$

$$\psi(t,x) = \left(\lim_{n \to +\infty} \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{(in)^k}{k!} \left(S\left(\frac{t}{n} \right) - I \right)^k \psi_0 \right)(x), \tag{3.6}$$

where I is the identity operator in $L_2(M, \mathbb{C})$.

Proof. 1. Let us denote

$$\begin{aligned}(P_k(t)f)(x) &= f\left(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{dt})\right)\\ (Q_k(t)f)(x) &= f\left(\gamma_{x,-A_k}(\sqrt{dt})\right)\\ (R(t)f)(x) &= tV(x)f(x).\end{aligned}$$

Then we can rewrite $S(t)$ as

$$S(t) = \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}(P_k(t)+Q_k(t)) - R(t),$$

so

$$\begin{aligned}\|S(t)\| &= \left\|\frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}(P_k(t)+Q_k(t)) - R(t)\right\|\\ &\le \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}(\|P_k(t)\|+\|Q_k(t)\|) + \|R(t)\|\end{aligned}$$

Let us now separately estimate $\|P_k(t)\|$, $\|Q_k(t)\|$, $\|R(t)\|$.

We take into account that $V(x)$ is bounded and that $f \in L_2(M)$, and obtain

$$\begin{aligned}\|R(t)f\|^2 &= \int_M |tV(x)f(x)|^2\,dx\\ &\le t^2 \sup_{x\in M}|V(x)|^2 \int_M |f(x)|^2\,dx\\ &= t^2 \sup_{x\in M}|V(x)|^2\,\|f\|^2.\end{aligned}$$

Hence $\|R(t)f\| \le t\sup_{x\in M}|V(x)|\,\|f\| \le C\|f\|$ for all $f \in L_2(M)$.

Let us now estimate $\|P_k(t)\|$ as follows:

1613

$$\|P_k(t)f\|^2 = \int_M \left| f\left(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{td})\right)\right|^2 dx$$

We do the following change of variables $y(x) = \gamma_{x,A_k}(\sqrt{td})$, $dy = J^{-1}(y(x))dx$, $dx = J(x(y))dy$ and obtain that

$$\begin{aligned}
\int_M \left| f\left(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{td})\right)\right|^2 dx &= \int_M |f(y)|^2 |J(x(y))| dy \\
&= \int_M |f(y)|^2 \left| \exp\left(\int_0^{\sqrt{td}} divA_k(\alpha_s^*(x(y)))ds \right)\right| dy \\
&\leq \int_M |f(y)|^2 \exp\left| \int_0^{\sqrt{td}} divA_k(\alpha_s^*(x(y)))ds \right| dy \\
&\leq \int_M |f(y)|^2 \exp \int_0^{\sqrt{td}} |divA_k(\alpha_s^*(x(y)))|\, ds
\end{aligned}$$

As stated on the assumptions of the theorem, now we use that $|divA_k(\alpha_s^*(x(y)))| = 0$ for all k

$$\int_M |f(y)|^2 \exp \int_0^t |divA_k(\alpha_s^*(x(y)))|\, ds \leq \int_M |f(y)|^2 dy = \|f\|^2.$$

Hence $\|P_k(t)\| \leq 1$. With the same argument we obtain that $\|Q_k(t)\| \leq 1$.

Using this results, we obtain that $S(t)$ is bounded.

2. To prove that $S(t)$ is self-adjoint, we shall show that for each $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
P_k(t)^* &= Q_k(t) \\
Q_k(t)^* &= P_k(t) \\
R(t)^* &= R(t)
\end{aligned}$$

Then since $S(t)$ is a linear combination of these operators, we obtain that it is also self-adjoint for each $t > 0$.

Let us take arbitrary $f, g \in L_2(M, \mathbb{C})$, and using the definition of the complex scalar product and taking into account that function V is real-valued:

1614

$$\begin{aligned}
\langle R(t)f,g\rangle &= \int_M (R(t)f)(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_M tV(x)f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_M f(x)\overline{tV(x)g(x)}dx \\
&= \int_M f(x)\overline{(R(t)g)(x)}dx \\
&= \langle f,R(t)g\rangle
\end{aligned}$$

hence $R(t)$ is self-adjoint. We continue with $P_k(t)$, taking into account that the mapping $x \longmapsto \gamma_{x,A_k}(\sqrt{dt})$ has the Jacobian equal to 1 because $divA_k(\alpha_s^*) = 0$ for all $s > 0$ thanks to assumption of our theorem:

$$\begin{aligned}
\langle P_k(t)f,g\rangle &= \int_M (P_k(t)f)(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_M f\left(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{td})\right)\overline{g(x)}dx
\end{aligned}$$

We do the following change of variables $y(x) = \gamma_{x,A_k}(\sqrt{td})$, $x = \gamma_{y,-A_k}(\sqrt{td})$, $dx = J(x(y))dy$ and obtain that

$$\begin{aligned}
\int_M f\left(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{td})\right)\overline{g(x)}dx &= \int_M f(y)\overline{g(\gamma_{y,-A_k}(\sqrt{td}))}|J(x(y))|dy \\
&= \int_M f(y)\overline{(Q_k(t)g)(y)}|1|dy \\
&= \langle f,Q_k(t)g\rangle
\end{aligned}$$

Therefore $P_k(t)^* = Q_k(t)$. Equality $Q_k(t)^* = P_k(t)$ is proved in the same manner. Using these

1615

results we get that $S(t)$ is self-adjoint.

3. Now let us prove Chernoff tangency, i.e. conditions (CT0)-(CT4).

   (CT0) We have $f \in L_2(M, \mathbb{C}) = \mathcal{F}$, $G(t) = S(t)$, and assume $\mathcal{D} = C_c^\infty \ni f$ dense in $L_2(M, \mathbb{C})$, so it follows from the assumptions in 2.3 .

   (CT1) For each $f \in L_2(M)$ the mapping $[0, +\infty) \ni t \longmapsto S(t)f \in L_2(M)$ is continuous. As before, let us show that for each $f \in L_2(M)$ the mapping $[0, +\infty) \ni t \longmapsto P_k(t)f \in L_2(M)$ is continuous. Use Lebesgue dominated convergence theorem

   Let $t_n \to t$ when $n \to \infty$, so we have

$$\|P_k(t)f - P_k(t_n)f\|^2 = \int_M \left| f(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{td}) - f(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{t_n d}) \right|^2 dx$$

   We use Lebesgue dominated convergence Theorem and the fact that M is complete and of bounded geometry, and obtain the continuity of $P_k(t)f$. The proceeding is analogous for $Q_k(t)f$.

   For $R_k(t)f$, we see that

$$\|R_k(t)f - R_k(t_n)f\|^2 = \int_M |tV(x)f(x) - t_n V(x)f(x)|^2 \, dx = \int_M |t - t_n|^2 |V(x)|^2 |f(x)|^2 dx$$

   Since V is bounded and using Lebesgue dominated convergence Theorem, we get the continuity of $R_k(t)f$.

   (CT2) We need to show $S(0) = I$, i.e. $S(0)f = f$

$$S(0)f = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{d} \left(f(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{0d}) + f(\gamma_{x,-A_k}(\sqrt{0d}) \right) - 0V(x)f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{d} 2f(x) = f$$

   (CT3) We will divide the proof onto three parts.

      (i) For fixed $f \in C_c^\infty(M)$ and $x \in M$ consider function $\tau \longmapsto f(\gamma_{x,A_k}(\tau))$ and write Taylor's expansion for it as $\tau \to 0$:

1616

$$
\begin{aligned}
f(\gamma_{x,A_k}(\tau)) &= f(\gamma_{x,A_k}(0)) + \tau \frac{d}{d\tau} f(\gamma_{x,A_k}(\tau))\Big|_{t=0} + \frac{1}{2}\tau^2 \frac{d^2}{d\tau^2} f(\gamma_{x,A_k}(\tau))\Big|_{t=0} + \\
&+ \frac{1}{6}\tau^3 \frac{d^3}{d\tau^3} f(\gamma_{x,A_k}(\tau))\Big|_{t=0} + \frac{1}{24}\tau^4 \frac{d^4}{d\tau^4} f(\gamma_{x,A_k}(\tau))\Big|_{t=0} + r_k(\tau, x) \\
&= f(x) + \tau A_k f(x) + \frac{1}{2}\tau^2 A_k A_k f(x) + \frac{1}{6}\tau^3 A_k A_k A_k f(x) + \\
&+ \frac{1}{24}\tau^4 A_k A_k A_k A_k f(x) + r_k^+(\tau, x)
\end{aligned}
$$

where for each fixed x we have $\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau^4} r_k(\tau, x) = 0$. In the same way we obtain

$$
\begin{aligned}
f(\gamma_{x,-A_k}(\tau)) &= f(x) - \tau A_k f(x) + \frac{1}{2}\tau^2 A_k A_k f(x) - \frac{1}{6}\tau^3 A_k A_k A_k f(x) + \\
&+ \frac{1}{24}\tau^4 A_k A_k A_k A_k f(x) + r_k^-(\tau, x),
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f(\gamma_{x,A_k}(\tau)) + f(\gamma_{x,-A_k}(\tau))) &= f(x) + \frac{1}{2}\tau^2 A_k A_k f(x) + \\
&+ \frac{1}{24}\tau^4 A_k A_k A_k A_k f(x) + r_k^-(\tau, x) + r_k^+(\tau, x),
\end{aligned}
$$

so pointwise (for each $x \in M$) we have

$$
\frac{1}{2}(f(\gamma_{x,A_k}(\tau)) + f(\gamma_{x,-A_k}(\tau))) = f(x) + \frac{1}{2}\tau^2 A_k A_k f(x) + O(\tau^4).
$$

(ii) Let us now set $\tau = \sqrt{td}$, then pointwise (for each $x \in M$) we have

1617

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(P_k(t)f + Q_k(t)f)(x) &= \frac{1}{2}(f(\gamma_{x,A_k}(\sqrt{td})) + f(\gamma_{x,-A_k}(\sqrt{td})))\\ &= f(x) + \frac{1}{2}tdA_kA_kf(x) + O(t^2).\end{aligned}$$

Take $t = t_n \in (0,1], t_n \to 0$ and note that in the last equality all the terms in l.h.s. and r.h.s. (except for $O(t^2)$) are known to be compactly supported and smooth, hence bounded uniformly in $n \in \mathbb{N}$ since $t_n \in (0,1]$, hence they are Lebesgue integrable in $L_2(M,\mathbb{C})$. Then the term $O(t^2)$ shares the same properties, and via Lebesgue dominated convergence theorem we deduce that pointwise $O(t^2)$ is also $O(t^2)$ in $L_2(M,\mathbb{C})$. We obtained that

$$\frac{1}{2}(P_k(t)f + Q_k(t)f)(x) = f(x) + \frac{1}{2}tdA_kA_kf(x) + O(t^2) \text{ in } L_p(M,\mathbb{C}) \text{ as } t \to 0.$$

(iii) After multiplying by $\frac{1}{d}$ summation in k we obtain

$$\frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}(P_k(t)f + Q_k(t)f)(x) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}f(x) + \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\frac{1}{2}tdA_kA_kf(x) + O(t^2),$$

and

$$\frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}(P_k(t)f + Q_k(t)f)(x) - tV(x)f(x) = f(x) + \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}A_kA_kf(x) - V(x)f(x)\right)t + O(t^2),$$

so

$$S(t)f = f + tHf + O(t^2) \text{ in } L_2(M,\mathbb{C}) \text{ as } t \to 0.$$

Finally, we remark that $O(t^2) = o(t)$ and conclude that (CT3) is now proved.

(CT4) We assume the closure of the operator H defined on C_c^∞ is a self-adjoint operator on $L_2(M,\mathbb{C})$.

1618

4. Follows from items 1, 2, 3, Theorem 2.2 and general theory of C_0-semigroups.

5. Follows from item 4 and general theory of C_0-semigroups which states that $\psi(t,x) = \left(e^{itH}\psi_0\right)(x)$, and $\lim_{n\to\infty} \exp\left(in(S(t/n) - I)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(in(S(t/n) - I\right)^k$.

□

1619

Conclusion

We have recalled several notions from functional analysis and differential geometry, in particular the Chernoff Theorem and integration over manifolds.

In this diploma thesis, we would like to extend what is known of Chernoff functions and Chernoff approximations to certain type of manifolds, such as geodesically complete and of bounded geometry.

The preamble of both theories are needed, in order to set up an enviroment to work over the manifold, which keeps its resemblance to an Euclidean space such as $\mathbb{R}^n$.

The goal and objective of this is to ask the least possible to the manifold (in particular not including the condition of compactness), and achieve to find a solution to the Schrödinger equation.

In the proof of the theorem the main tools of differential geometry are those related to the estimation of the Jacobian and its relation to the the smooth vector fields, with this we are able to estimate the boundedness and prove the self-adjointness of operators. On the other hand the the main tools from functional analysis are the Chernoff Theorem and the theorem by Professor Remizov, by the conjunction of these results we obtain the solution for the Schrödinger equation in a geodesically complete manifold of bounded geometry.

Bibliography

[1] Manfredo P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhauser, 1992.

[2] Lawrence Conlon. *Differentiable Manifolds*. Birkhäuser, 2001.

[3] Brian C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, 2013.

[4] Joachim Escher Herbert Amann. *Analysis III*. Birkhauser, 2009.

[5] Ilka Holopainen and Tuomas Sahlsten. *Riemannian Geometry*. 2019. URL: https://courses.helsinki.fi/sites/default/files/course-material/4608871/RiemannGeo.pdf (visited on 2020).

[6] M. Starodubtseva I. Remizov. "Quasi-Feynman Formulas providing Solutions of Multidimnesional Schrödinger Equations with Unbounded Potential". In: *Mathematical Notes* 104 (2018), pp. 767–772. URL: https://doi.org/10.1134/S0001434618110214.

[7] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2002.

[8] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer, 2002.

[9] Ivan D. Remizov. "Formulas that Represent Cauchy Problem Solution for Momentum and Position Schrödinger Equation". In: *Potential Analysis* (2018). URL: https://doi.org/10.1007/s11118-018-9735-1.

[10] Ivan D. Remizov. "Quasi-Feynman formulas- A Method of obtaining the Evolution Operator for the Schrödinger Equation". In: *Journal of Functional Analysis* (2016). URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.017.

[11] I. Remizov S. Mazzucchi V. Moretti and O. Smolyanov. "Feller semigroups and Chernoff approximations for diffusions on compact and noncompact manifolds". In: (2020). URL: https://arxiv.org/abs/2002.06606v1.

1621

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Цюцюрупы Игоря Константиновича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее — работа) под названием «The John—Lowner Ellipsoid and related geometric problems» являются: Theorem 1.1, Theorem 1.2, Theorem 1.3, Theorem 1.4, Proposition 2.10, Proposition 2.12, Theorem 3.1, Theorem 3.5, Theorem 3.6, Theorem 3.7, Lemma 3.5, Lemma 3.6, Corollary 3.1, Lemma 3.7, Lemma 3.8, Theorem 3.8, Claim 3.1-3.9, Theorem 4.1, Theorem 4.2, Theorem 4.3-4.5, Lemma 4.1, Corollary 4.1, Lemma 4.2, Theorem 4.6, Lemma 4.3-4.4, Theorem 4.7, Lemma 4.5-4.7, Claim 4.2, Lemma 4.8-4.9, Corollary 4.3, Lemma 4.10-11, Claim 4.3, Proposition 4.1, Claim 4.4-4.5.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 сентября по 15 февраля 2020 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: central cube sections, volume of cube sections, maximal volume cube sections, integral ratio of log-concave function, functional lowner ellipsoid, lower john ellipsoid, в выдаче поисковиков было исследовано 15 статей и 1 книга (см. References к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [Iva20a], [Iva20b], [Iva21], [IN20], [LSW19], [AGMJV18], [Bal86], [Bal89], [Zon06] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Григорием Михайловичем Ивановым, научным сотрудником Wagner Group, IST Austria.
- Полученные результаты о сечениях куба опубликованы в журнале Analysis and Geometry in Metric Spaces (https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/agms-2020-0103/html); результаты о функциональном эллипсоиде Лёвнера приняты к публикации в журнале The Journal of Geometric Analysis.
- Проведено выступление на следующих научных семинарах и конференциях:

— Научный семинар кафедры высшей математики МФТИ под руководством проф. Е.С. Половинкина (https://mipt.ru/education/chair/mathematics/news/nauchnyy_seminar_kafedry_24_sentyabrya_2020_g)

— Семинар по теории функций и теории приближений под руководством проф. П. Бородина

— Measure Theory Seminar, Kent State University (http://www.math.kent.edu/~zvavitch/seminar.html)

— The privatissimum of the research units for Convex and Discrete Geometry and Geometric Analysis at TU Wien (https://dmg.tuwien.ac.at/fg6/Privatissimum/)

— Conference «Combinatorics and Geometry Days III», MIPT (https://combgeo.org/en/events/combinatorics-and-geometry-days-iii/)

— Семинар Лаборатории дискретной и вычислительной геометрии, Ярославский Государственный университет

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2 работы других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится 4 июля 2021. На Смотр представлен проект текста.

Подпись  /Цюцюрупа Игорь Константинович

30 мая 2021
Долгопрудный, Россия

Moscow Institute of Physics and Technology
Phystech School of Fundamental and Applied Physics

Study Program “Mathematical Methods in Modern Physics”



Master Thesis

submitted for the degree of

Master of Science

The John–Löwner Ellipsoid
and related geometric problems

by

Igor Tsiutsiurupa, BSc

Submission Date: May 30, 2021
Supervisors: Grigory M. Ivanov, PhD

Contents

Acknowledgements 3

Chapter 1. Introduction 4
Publications, Conference and Seminar Talks 6

Chapter 2. General Properties of Convex Bodies 8
2.1. Notation and Basic Terminology 8
2.2. Preliminaries 10
2.3. The John–Löwner Ellipsoid 13
2.4. Tight Frames and John's Condition 19

Chapter 3. The Maximal Volume Sections of the Cube 22
3.1. State of the Art 22
3.2. Reformulation of the Problem 24
3.3. Operations on Frames 25
3.4. Properties of a Global Maximizer 27
3.5. Local Properties 29
3.6. The Maximal Area Planar Sections of the Cube 34

Chapter 4. The Löwner Function of a Log-concave Function 38
4.1. Classes of ψ-ellipsoidal Functions 41
4.2. When is a Solution unique? 45
4.3. When does a Solution Exist? 48
4.4. Classes of s-ellipsoidal Functions 50
4.5. Gaussian Densities. The Limit as $s \to +\infty$ 53
4.6. Outer Integral Ratio 56
4.7. The Duality of the John and Löwner functions 59

Chapter 5. Open Problems 60
5.1. Tight Frames 60
5.2. Extremal Volume Sections and Projections 61
5.3. Functional John and Löwner Ellipsoids 63

References 65

1625

Acknowledgements

Words are powerless to express the author's warmest gratitude to his supervisor, Grigory Ivanov, Ph.D., for being the Teacher.

The author appreciates Prof. Roman Karasev and his remarks on the text.

The author also wishes to thank Andrey Kupavskii, Ph.D., the vice-head of the Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures, and Alexandr Polyanskii, Ph.D., the assistant head of the Laboratory, who made this research possible and comfortable.

1626

CHAPTER 1

Introduction

Asymptotic geometric analysis studies the geometric properties and various quantitative parameters of finite dimensional normed spaces, convex bodies, their sections and projections as the dimension grows to infinity [**Bal97**, **AAGM15**, **BGVV14**]. An example of such a property is the fundamental Dvoretzky theorem, which in essence states that an origin symmetric convex body of sufficiently high dimension has a section that is approximately an ellipsoid. This fact is based on the concentration of measure phenomenon, one of the main tools of asymptotic geometric analysis.

Another key tools are the maximal volume ellipsoid *contained* in a given convex body and the minimal volume ellipsoid *containing* it. A well-known theorem of convex geometry states that such ellipsoids exist and are unique [**Bal97**, **Gru07**, **AS17**]. These ellipsoids are called the *John* and *Löwner ellipsoids* of a convex body, respectively. The John and Löwner ellipsoids are dual via polarity.

The fundamental theorem of F. John [**Joh14**, **Bal97**] characterizes the John and Löwner ellipsoids of a convex body. Provided that the Euclidean unit ball is contained in a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$, it states that the unit ball is the John ellipsoid of K if and only if there exist a set of unit vectors $u_1, \dots, u_m$ lying on the boundary of K and positive scalars $c_1, \dots, c_m$ such that

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i u_i^T = \mathrm{id}_n \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0,$$

where id_n is the identity matrix. The leftmost identity is called *John's condition*. Setting $v_i = \sqrt{c_i} u_i$, one rewrites it as

$$\sum_{i=1}^{m} v_i v_i^T = \mathrm{id}_n.$$

If an m-tuple of vectors in $\mathbb{R}^n$ satisfies this identity, it is a *tight frame*. Tight frames, sometimes called unit decompositions or John's decompositions, arise in many problems independently of their geometric nature. For example, in quantum mechanics, if a system of vectors forms a tight frame, it is said to satisfy a *completeness relation*. The recently solved Kadison–Singer problem, which came from quantum information theory, is a statement about tight frames [**MSS15**].

In this work, we study properties of the John and Löwner ellipsoid and Jonh's condition and related problems. We start with the classical volumetric problems where tight frames emerge naturally. Then, we discuss the functional generalizations of the John and Löwner ellipsoids. We will see how the discrete properties of the tight frames intertwine with the functional methods of asymptotic geometric analysis, tying these topics together.

The volumetric problems where tight frames arise are, for example, the problem of finding the optimal bounds on the volumes of sections and projections of the unit cube $[-1,1]^n$ and the standard cross-polytope $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant 1\}$ [**Vaa79**, **Bal86**, **Bal89**, **Bar98**]. G. Ivanov developed a method based on the properties of tight frames for these volume extrema problems [**Iva20b**, **Iva21**]. We describe the connection between tight frames and sections of the cube in details in Chapter 3. In this work, we apply this technique to the problem of finding a maximal volume section of n-dimensional cube $[-1,1]^n$ by a k-dimensional linear subspace,

$n > k > 1$, that is, the problem of finding the maximizers of the function

$$H \mapsto \mathrm{vol}_k([-1,1]^n \cap H), \text{ where } H \subset \mathbb{R}^n \text{ is a subspace of dimension } k. \tag{1.1}$$

Among other results, we obtain a geometric first order necessary condition for a subspace H to be a local maximizer of (1.1).

Theorem 1.1. Let a subspace $H \subset \mathbb{R}^n$, $\dim H = k$, be a local maximizer of (1.1), v_i be the projection of the i-th vector of the standard basis of $\mathbb{R}^n$ onto H, $i \in \{1,\dots,n\}$. Denote $P = [-1,1]^n \cap H$; we understand P as a k-dimensional polytope in H. Then the following assertions hold.

(1) $P = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in H : |\langle x, v_i\rangle| \leqslant 1\}$.

(2) The vector v_i is non-zero and the intersection of P with the hyperplane $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i\rangle = 1\}$ is a facet of P for every $i \in \{1,\dots,n\}$.

(3) For every $i \in \{1,\dots,n\}$, the line $\mathrm{span}\{v_i\}$ intersects the boundary of P in the centroid of a facet of P.

(4) Let F be a facet of P. Denote $P_F = \mathrm{conv}(F \cup \{0\})$. Then

$$\frac{\mathrm{vol}_k P_F}{\mathrm{vol}_k P} = \frac{1}{2}\frac{\sum_\star |v_i|^2}{k},$$

where the sum is taken over the indices $i \in \{1,\dots,n\}$ such that $\mathrm{span}\{v_i\}$ intersects F in its centroid.

Using these results and some additional geometric observations, we prove the following.

Theorem 1.2. For any two-dimensional subspace $H \subset \mathbb{R}^n$, the following inequality holds:

$$\mathrm{area}([-1,1]^n \cap H) \leqslant 4\sqrt{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}.$$

For each n, the equality is attained at some subspace. The equality is attained at a subspace H if and only if $[-1,1]^n \cap H$ is a rectangle with the sides of lengths $2\sqrt{\lceil n/2 \rceil}$ and $2\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Next, we focus on another aspect of asymptotic geometric analysis which is the study of log-concave functions. The idea of extending the results of convex analysis to the more general setting of log-concave functions has been investigated for the last few decades [**BGVV14**, **AS17**, **AAGM15**]. The notions of the John and Löwner ellipsoids were generalized recently to fit the log-concave functions [**AGMJV18**, **LSW19**, **IN20**]. In this work, we continue the study of functional analogs of the Löwner ellipsoid.

For a function $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$, we consider the following class of functions

$$\mathcal{E}^n[\psi] = \left\{ \alpha e^{-\psi(|A(x-a)|)} : A \text{ is positive definite, } \alpha > 0,\ a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

One may consider the functional class $\mathcal{E}^n[\psi]$ as the class of "affine" positions of the function $e^{-\psi(|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Note that the level sets of such a position are concentric ellipsoids. For a "good" convex function $\psi\colon [0,\infty) \to (-\infty,+\infty]$ and an upper semi-continuous log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ of finite positive integral, we study the following optimization problem:

$$\min_{\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]} \int_{\mathbb{R}^n} \ell \quad \text{subject to} \quad f \leqslant \ell. \tag{1.2}$$

We show the following.

Theorem 1.3. Let $\psi\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ be a strictly increasing convex function such that $e^{-\psi(t)}$ is upper semi-continuous and of finite integral. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be an upper semi-continuous log-concave function of finite positive integral. If there exists $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ such that $f \leqslant \ell$, then

there exists a unique solution to problem (1.2). Moreover, the supremum of a solution to this problem is at most e^n the supremum of f.

In fact, we prove this result for a wider class of functions ψ (see Theorem 4.1) and study the uniqueness and existence of a solution to problem (1.2) for all admissible functions f and ψ. In Chapter 4, we will show why the solution to this problem is a reasonable extension of the Löwner ellipsoid to the setting of log-concave functions.

G. Ivanov and M. Naszódi in [**IN20**] introduced the *John s-function* of a log-concave function, where s is a positive parameter, and showed its existence and uniqueness for any log-concave function. We dualize this notion and define the *Löwner s-finction* of a log-concave function f, which is a solution to the problem (1.2) with some special function $\psi = \psi_s$. We will show that a Löwner s-function of an upper semi-continuous log-concave function of positive integral exists and is unique for any $s > 0$. We establish the connection of our definitions with the results of B. Li, C. Schütt and E. Werner [**LSW19**], who studied problem (1.2) in the case $\psi(t) = t$. We also consider the case $\psi(t) = t^2$, that is, given a log-concave function f, we study the problem of minimizing the integral of a Gaussian density G which is at least f pointwise.

Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body, $\mathcal{J}(K)$ be its John ellipsoid and $\mathcal{L}(K)$ be its Löwner ellipsoid. The ratios

$$\left(\frac{\operatorname{vol}_n K}{\operatorname{vol}_n \mathcal{J}(K)}\right)^{1/n} \quad \text{and} \quad \left(\frac{\operatorname{vol}_n \mathcal{L}(K)}{\operatorname{vol}_n K}\right)^{1/n}$$

are called the *volume ratio* and the *outer volume ratio* of K. It is known [**Bal89**, **Bar98**] that for any convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ the volume ratio and outer volume ratio of K are at most $\Theta\sqrt{n}$ for some constant $\Theta > 0$ and this bound is asymptotically tight. We extend the notion of the outer volume ratio of a convex body to the setting of log-concave functions. That is, we bound the ratio of integrals of a function and its Löwner function.

Theorem 1.4. There exists $\Theta > 0$ such that for any positive integer n and an upper semi-continuous log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ of finite integral, the following inequality holds:

$$\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} L_f}{\int_{\mathbb{R}^n} f}\right)^{1/n} \leqslant \Theta\sqrt{n},$$

where L_f is the solution to the problem (1.2) with $\psi(t) = t$.

It is a standard trick to bound a log-concave function by a function of the form $\Theta e^{-\vartheta|x|}$ (see, for example, [**BGVV14**]). The theorem above says that, given a log-concave function f on $\mathbb{R}^n$, there is a function of this form whose integral is at most $cn^{n/2}$ integral of f. This bound cannot be improved: For example, consider f to be the characteristic function of the standard cross-polytope. To our knowledge, this is the first result of this type.

Publications, Conference and Seminar Talks

The results of this work concerning the sections of the cube were published in [**IT21b**]; the results on the functional Löwner ellipsoid are published in [**IT21a**]. The results were presented by the author at

- **Scientific Seminar of the Department of Higher Mathematics, MIPT** (in Russian);
- **Seminar in Theory of Functions and Approximation Theory** supervised by Prof. P. Borodin, **MSU** (in Russian);
- **Measure Theory Seminar, Kent State University** (in English);
- **Privatissimum of the research units for Convex and Discrete Geometry and Geometric Analysis, TU Wien** (in English);

- **Combinatorics and Geometry Days III, MIPT** (in English);
- **Seminar of the "Discrete and Computational Geometry" Lab, Yaroslavl Demidov State University** (in Russian).

CHAPTER 2

General Properties of Convex Bodies

In this Chapter, we introduce the notations and the basic objects. Next, we prove preliminary facts that will be used in the sequel. Further, we discuss in details the main objects of this work that are the John and Löwner ellipsoids. Using the Brascamp–Lieb inequality, we provide an application of these objects which is the maximization of the volume ratio and the outer volume ratio of a convex body. At the end, we establish some properties of tight frames and show their connection with John's condition. Since these results are known, we refer the reader to monographies [**Gru07**, **PB07**, **AAGM15**, **BGVV14**].

2.1. Notation and Basic Terminology

For a positive integer n, we refer to the set $\{1, 2, \dots, n\}$ as $[n]$. We identify the space $\mathbb{R}^n$ and its dual $(\mathbb{R}^n)^*$. We use $|x|$ to denote the Euclidean norm of a vector $x \in \mathbb{R}^n$ and $\langle p, x\rangle$ to denote the *standard inner product* of vectors p and x in $\mathbb{R}^n$. For vectors $u, v \in \mathbb{R}^n$, their *tensor product* is the linear operator on $\mathbb{R}^n$ defined by $(u \otimes v)x = \langle u, x\rangle\, v$ for every $x \in \mathbb{R}^n$. The linear hull of a subset S of $\mathbb{R}^n$ is denoted by $\operatorname{span} S$.

The i-th vector of the standard basis of $\mathbb{R}^n$ is denoted by e_i, $i \in [n]$.

We consider the square matrices of size n as operators from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ and use $\|A\|$ to denote the standard operator norm of a square matrix A (if A is positive definite, then $\|A\|$ is the maximal eigenvalue of A). We identify the square matrices of size n with the elements of $\mathbb{R}^{n\times n}$. The standard partial order on the cone of positive semi-definite matrices is denoted by $\prec$, that is, we write $A \prec B$ if $B - A$ is positive definite. The operator of the orthogonal projection onto a subspace $H \subset \mathbb{R}^n$ is denoted by P^H. We use id_H and id_n to denote the identity operator on a vector space H and $\mathbb{R}^n$, respectively.

We use $K|H$ to denote the orthogonal projection of a set $K \subset \mathbb{R}^n$ onto a subspace H of $\mathbb{R}^n$. For a non-zero vector $v \in \mathbb{R}^n$, we denote by H_v the affine hyperplane $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = 1\}$.

The set of k-dimensional subspaces of $\mathbb{R}^n$ is called the *Grassmanian* and is denoted by $\mathrm{Gr}(n, k)$. The standard metric on the Grassmanian is given by $\mathrm{Dist}(H, H') = \left\|P^H - P^{H'}\right\|$.

For a k-dimensional linear subspace H of $\mathbb{R}^n$ and a body $K \subset H$, we denote by $\mathrm{vol}_k K$ the k-dimensional volume of K. The two-dimensional volume of a body $K \subset \mathbb{R}^2$ is denoted by $\operatorname{area} K$.

2.1.1. **Convex Bodies.** The *Minkowski sum* of $K, L \subset \mathbb{R}^n$ is given by $K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}$. For any $\alpha \in \mathbb{R}$ and $K \subset \mathbb{R}^n$, put $\alpha K = \{\alpha x : x \in K\}$. The *Hausdorff distance* between $A, B \subset \mathbb{R}^n$ is

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A + \varepsilon \mathbf{B}^n,\ A \subset B + \varepsilon \mathbf{B}^n\}.$$

It is a metric on the set of compact subsets of $\mathbb{R}^n$.

A set $K \subset \mathbb{R}^n$ is said to be *convex*, if for any $x, y \in K$ and $\lambda \in [0, 1]$ the point $(1-\lambda)x + \lambda y$ belongs to K. The set $\operatorname{conv} K = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : x, y \in K, \lambda \in [0, 1]\}$ is the *convex hull* of a set $K \subset \mathbb{R}^n$. A *body* in $\mathbb{R}^n$ is a compact set with non-empty interior.

The gauge function of a body K in $\mathbb{R}^n$ containing the origin in its interior is defined by $|u|_K = \inf\{t > 0 : u \in tK\}$. A gauge function of an origin symmetric convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ is a norm on $\mathbb{R}^n$ and K is the unit ball in this norm.

1631

Clearly, if $K \subset L$, then $|x|_K \geqslant |x|_L$ for any $x \in \mathbb{R}^n$.

The Euclidean unit ball in $\mathbb{R}^n$ is denoted by $\mathbf{B}^n$. The unit balls in $\mathbb{R}^n$ equipped with the ℓ_1 and ℓ_∞ norms are called the *standard cross-polytope* and the *unit cube* and are denoted by $\Diamond^n$ and $\square^n$, respectively. A *simplex* Δ^n in $\mathbb{R}^n$ is defined as the convex hull of $n+1$ affinely independent vectors such that the Euclidean distance between any two of them is 1. One has $\Diamond^n = \operatorname{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ and $\square^n = [-1,1]^n$. Simple computations give $\operatorname{vol} \Diamond^n = 2^n/n!$ and $\operatorname{vol} \square^n = 2^n$. We recall that $\operatorname{vol} \mathbf{B}^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$, where $\Gamma(\cdot)$ stands for the gamma function. For the gamma function, we recall Stirling's formula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(1+n)}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1. \tag{2.1}$$

2.1.2. **Ellipsoids.** Recall that an *ellipsoid* in $\mathbb{R}^n$ is a set of the form $A\mathbf{B}^n + a$, where A is positive definite matrix of size n and $a \in \mathbb{R}^n$. For a matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \oplus \alpha$ stands for the matrix

$$A \oplus \alpha = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

of size $(n+1)$. We introduce the convex cone

$$\mathcal{E}^n = \left\{(A \oplus \alpha, a) : A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ is positive definite}, \alpha > 0, a \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

The set $\mathcal{E}^n$ is an open convex cone in $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Speaking about convergence in $\mathcal{E}^n$, we will refer to the convergence with respect to the induced metric.

The mapping $(A \oplus \alpha, a) \mapsto (A \oplus \alpha)\mathbf{B}^{n+1} + a$ is a one-to-one correspondence between $\mathcal{E}^n$ and the class of $(n+1)$-dimensional ellipsoids in $\mathbb{R}^{n+1}$ symmetric with respect to $\mathbb{R}^n$. We will refer to the elements of $\mathcal{E}^n$ as n-ellipsoids. For shortness, we will write $\mathbf{B}^{n+1}$ instead of $(\mathrm{id}_n \oplus 1, 0)$.

2.1.3. **Convex and Log-concave Functions.** For a function $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and a scalar $\alpha \in \mathbb{R}$, we denote the *superlevel set* of f by $[f \geqslant \alpha] = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant \alpha\}$. The *epigraph* of a function f on $\mathbb{R}^n$ is the set $\operatorname{epi} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant y\}$.

For functions $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, we say that f is *below* g and write $f \leqslant g$ if for all $x \in \mathbb{R}^n$ we have $f(x) \leqslant g(x)$. The L_∞-norm of a function f is denoted by $\|f\|$.

A function $\psi\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ is called *convex* if $\psi((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)\psi(x) + \lambda\psi(y)$ for every $x, y \in \mathbb{R}^n$ and $\lambda \in [0,1]$. Recall that the *effective domain* of a convex function $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ is the set $\operatorname{dom}\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) < +\infty\}$.

The *infimal convolution* of functions $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is defined by

$$(\varphi \oplus \psi)(x) = \inf_{x=x_1+x_2} (\varphi(x_1) + \psi(x_2)).$$

One can show that $\operatorname{epi} \varphi \oplus \psi = \operatorname{epi}\varphi + \operatorname{epi}\psi$, if φ and ψ are reasonable convex functions.

A function f on $\mathbb{R}^n$ is *log-concave* if it is of the form $f = e^{-\psi}$, where ψ is a convex function. Equivalently, if $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^\lambda$ for every $x, y \in \mathbb{R}^n$ and $\lambda \in [0,1]$. Clearly, if f and g are log-concave functions, then

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad -\log g \leqslant -\log f. \tag{2.2}$$

We say that a log-concave function f on $\mathbb{R}^n$ is a *proper log-concave function* if f is upper semi-continuous and has finite positive integral.

The *sup-convolution* of two functions f, g on $\mathbb{R}^n$ is defined by

$$(f \star g)(y) = \sup_{y=y_1+y_2} f(y_1) g(y_2).$$

Note that

$$f \star g = e^{-[(-\log f) \oplus (-\log g)]}.$$

The *indicator* I_K and the *characteristic function* χ_K of a set $K \in \mathbb{R}^n$ are the functions on $\mathbb{R}^n$ defined by

$$I_K(x) = \begin{cases} 0, \text{ if } x \in K \\ +\infty, \text{ if } x \notin K \end{cases} \qquad \text{and} \quad \chi_K(x) = e^{-I_K(x)} = \begin{cases} 1, \text{ if } x \in K \\ 0, \text{ if } x \notin K. \end{cases}$$

Clearly, if K is a convex set, then I_K is convex and χ_K is log-concave.

2.2. Preliminaries

In this Section, we state the very basic technical facts from linear algebra and convex analysis, which we will use later.

2.2.1. **Linear Algebra.**

Theorem 2.1 (Minkowski's determinant inequality)**.** Let A, B be positive definite matrices of size n. Then for any $\lambda \in [0,1]$

$$\det((1-\lambda)A + \lambda B)^{1/n} \geqslant (1-\lambda)(\det A)^{1/n} + \lambda(\det B)^{1/n}, \tag{2.3}$$

with equality if and only if $A = cB$ for some $c > 0$, and

$$\det((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant (\det A)^{1-\lambda}(\det B)^{\lambda}, \tag{2.4}$$

where equality is attained if and only if $A = B$.

We state as a lemma a technical fact from linear algebra that will be used later.

Lemma 2.1. Let A be a positive definite matrix of size n. Then for any $u \in \mathbb{R}^n$ one has

$$\det(A \pm u \otimes u) = \left(1 \pm \left|A^{-1/2}u\right|^2\right) \det A.$$

Proof. Since A is positive definite, the operator $A^{-1/2}$ is well-defined. Then

$$\det(A \pm u \otimes u) = \det A \cdot \det\left(\mathrm{id}_n \pm A^{-1/2}u \otimes A^{-1/2}u\right).$$

Diagonalizing the operator $\mathrm{id}_n \pm A^{-1/2}u \otimes A^{-1/2}u$, we see that its determinant is equal to $1 \pm \left|A^{-1/2}u\right|^2$. This completes the proof. ■

2.2.2. **Volumes in $\mathbb{R}^n$.**

Theorem 2.2 (The Brunn–Minkowski inequality)**.** Let $K, L \subset \mathbb{R}^n$ be compact. Then for any $\lambda \in [0,1]$

$$\mathrm{vol}_n((1-\lambda)K + \lambda L)^{1/n} \geqslant (1-\lambda)(\mathrm{vol}_n K)^{1/n} + \lambda(\mathrm{vol}_n L)^{1/n}. \tag{2.5}$$

The Brunn–Minkowski inequality expresses the fact that the volume in the power $1/n$ is a concave function with respect to the Minkowski addition. Using the arithmetic-geometric mean inequality then, we obtain the no-dimension Brunn-Minkowski inequality

$$\mathrm{vol}_n((1-\lambda)K + \lambda L) \geqslant (\mathrm{vol}_n K)^{1-\lambda}(\mathrm{vol}_n L)^{\lambda}, \quad \lambda \in [0,1], \tag{2.6}$$

which in particular means that the volume is log-concave with respect to the Minkowski addition.

The following statement allows to express the volume of a convex body in terms of corresponding log-concave function. This trick allows us to prove non-trivial facts in the sequel.

Proposition 2.1. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body containing the origin in its interior and $p > 0$. Then

$$\mathrm{vol}_n K = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|_K^p} dx. \tag{2.7}$$

PROOF. We have

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|_K^p} dx &= \int_0^1 \operatorname{vol}_n \left\{ x \in \mathbb{R}^n : e^{-|x|_K^p} \geqslant t \right\} dt \\ &= \int_0^1 \operatorname{vol}_n \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x|_K \leqslant (-\log t)^{1/p} \right\} dt \\ &= \operatorname{vol}_n K \int_0^1 (-\log t)^{n/p} dt = \operatorname{vol}_n K \cdot \Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right).\end{aligned}$$

■

In particular, one has

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|_K} = n! \operatorname{vol} K. \tag{2.8}$$

2.2.3. **Concept of Duality in Convex Analysis.**

Definition 2.1. The *polar* (or *dual*) set of $K \subset \mathbb{R}^n$ is

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \forall x \in K \ \ \langle x, y\rangle \leqslant 1\}.$$

In particular, if a body K is the unit ball of a norm on $\mathbb{R}^n$, then K° is the unit ball of the dual norm on $\mathbb{R}^n$. From the definitions of $\square^n$ and $\lozenge^n$, it follows that $(\lozenge^n)^\circ = \square^n$ and $(\square^n)^\circ = \lozenge^n$.

We will need the following example. Let $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. From the definition of polar set, it follows that

$$(\operatorname{conv}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\})^\circ = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i\rangle \leqslant 1\}. \tag{2.9}$$

We list some of the standard properties of a dual body in the Lemma below [**PB07**].

Proposition 2.2. Let $K, L \subset \mathbb{R}^n$ be convex bodies containing the origin. The following properties hold:

(1) K° is a convex body containing the origin.
(2) $K^{\circ\circ} = K$.
(3) $K \subset L$ implies $L^\circ \subset K^\circ$.
(4) $(K \cap L)^\circ = \operatorname{conv}(K^\circ \cup L^\circ)$ and $[\operatorname{conv}(K \cup L)]^\circ = K^\circ \cap L^\circ$.
(5) If A is a non-degenerate operator on $\mathbb{R}^n$, then $(AK)^\circ = (A^*)^{-1} K^\circ$.

Remark 2.1. A notable result characterizing the polarity mapping $K \mapsto K^\circ$ was obtained by K. Böröczky and R. Schneider [**BS08**, **Sch14**]. They showed that if a transform $K \mapsto K^*$ defined on the class of convex bodies containing the origin satisfies $(K \cap L)^* = \operatorname{conv}(K^* \cup L^*)$ and $\operatorname{conv}(K \cup L)^* = K^* \cap L^*$, then the mapping is either constant (that is, $K^\circ = C$ for some fixed convex body C), or of the form AK°, where A is a non-degenerate operator. The same result but in the class of *origin symmetric* convex bodies was obtained earlier by R. Schneider [**Sch08**].

Proposition 2.3. The body polar to an ellipsoid containing the origin in its interior is an ellipsoid. More precisely, for a vector $a \in \mathbb{R}^n$ with $|a| < 1$, we have

$$(\mathbf{B}^n + a)^\circ = \lambda_a A_a (\mathbf{B}^n + c_a), \tag{2.10}$$

where $\lambda_a = (1 - |a|^2)^{-1/2}$, $c_a = \lambda_a a$ and the operator A_a stretches the space by the factor λ_a along $\operatorname{span}\{a\}$. In particular,

$$\operatorname{vol}(\mathbf{B}^n + a)^\circ = \left(1 - |a|^2\right)^{-\frac{d+1}{2}} \operatorname{vol} \mathbf{B}^n. \tag{2.11}$$

PROOF. By the definition of polar set,

$$(\mathbf{B}^n + a)^\circ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in \mathbf{B}^n} \langle x, y\rangle + \langle a, y\rangle \leqslant 1 \right\} = \{ y \in \mathbb{R}^n : |y| + \langle a, y\rangle \leqslant 1 \}.$$

Without loss of generality, assume that $a = |a|e_1$. Denote by y_i the i-th component of a vector y in the standard basis. Squaring inequality $|y| + \langle a, y\rangle \leqslant 1$, we have

$$\left(\sqrt{1 - |a|^2} y_1 + \frac{|a|}{\sqrt{1 - |a|^2}} \right)^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant \frac{1}{1 - |a|^2},$$

which can be rewritten as $|A_a^{-1} y + c_a| \leqslant \lambda_a$. The Proposition follows. ∎

Recall the definition of the classical *Legendre transform*.

Definition 2.2. Let $\varphi : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$. The *Legendre transform* $\mathcal{L}\varphi$ of the function φ is given by

$$(\mathcal{L}\varphi)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y\rangle - \varphi(x)\}.$$

The standard properties of the Legendre transform are listed in the following Lemma [PB07].

Proposition 2.4. Let $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ be convex functions. The following properties hold:

(1) $\mathcal{L}\varphi$ is convex.
(2) $\mathcal{L}\mathcal{L}\varphi = \varphi$.
(3) $\varphi \leqslant \psi$ implies $\mathcal{L}\psi \leqslant \mathcal{L}\varphi$.
(4) $\mathcal{L}(\varphi + \psi) = \mathcal{L}\varphi \oplus \mathcal{L}\psi$ and $\mathcal{L}(\varphi \oplus \psi) = \mathcal{L}\varphi + \mathcal{L}\psi$.

Remark 2.2. S. Arstein-Avidan and V. Milman [AAM09] have shown that an involutive and order-reversing transform defined on the class of convex functions is essentially Legendre transform. Namely, they have shown that if a mapping $\varphi \mapsto \varphi^*$ defined on the class of convex functions on $\mathbb{R}^n$ satisfies $\varphi^{**} = \varphi$ and if $\varphi \leqslant \psi$ implies $\psi^* \leqslant \varphi^*$, then there exists an affine transform $\mathcal{A}$ of $\mathbb{R}^n$, a vector $v \in \mathbb{R}^n$ and a constant C such that $\varphi^*(x) = (\mathcal{L}\varphi)(\mathcal{A}x) + \langle v, x\rangle + C$.

We will need the following computation in Chapter 4.

Proposition 2.5. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be an origin symmetric convex body containing the origin in its interior. Then $\mathcal{L}\,|\cdot|_K = I_{K^\circ}$ and $\mathcal{L} I_K = |\cdot|_{K^\circ}$

PROOF. Put $\varphi(x) = |x|_K$. Let $y \in \mathbb{R}^n$. We have to show that the quantity

$$(\mathcal{L}\varphi)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - |x|_K)$$

is zero if $|y|_{K^\circ} \leqslant 1$ and is $+\infty$ otherwise. By the definitions of the dual norm and the polar body, the inequality $\langle x, y\rangle \leqslant |x|_K |y|_{K^\circ}$ holds for all $x \in \mathbb{R}^n$ and is tight by the compactness of K. Therefore, $(\mathcal{L}\varphi)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|_K (|y|_{K^\circ} - 1)$. The Proposition follows. ∎

The reasonable extension [AAM07, AAM08, AAM09] of Legendre transform to the setting of log-concave functions is the following.

Definition 2.3. Let $f = e^{-\psi} : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$. The *log-conjugate* (or *polar*) function f° is defined by

$$f^\circ(y) = e^{-(\mathcal{L}\psi)(y)} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{e^{-\langle x, y\rangle}}{f(x)}.$$

From the definition of the log-conjugate function and Lemma 2.4, we obtain properties of log-conjugate function immediately.

Proposition 2.6. Let $f, g\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be log-concave functions. The following properties hold:

(1) f° is log-concave. If f is a proper log-concave function containing the origin in the interior of its support, then f° is a proper log-concave function.
(2) $f^{\circ\circ} = f$.
(3) $f \leqslant g$ implies $g^\circ \leqslant f^\circ$.
(4) $(f \cdot g)^\circ = f^\circ \star g^\circ$ and $(f \star g)^\circ = f^\circ \cdot g^\circ$.

As an immediate corollary of Proposition 2.5, we obtain the following.

Proposition 2.7. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be an origin symmetric convex body containing the origin in its interior. Then $\left(e^{-|\cdot|_K}\right)^\circ = \chi_{K^\circ}$ and $(\chi_K)^\circ = e^{-|\cdot|_{K^\circ}}$.

The following result is proven in [**AAKM04**, Lemma 3.2] (see also [**RW98**, Chapter 7]).

Lemma 2.2. Let $f, \{f_i\}_1^{+\infty} : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be log-concave functions such that $f_i \to f$ on a dense set $S \subset \mathbb{R}^n$. Then

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} f_i \to \int_{\mathbb{R}^n} f$,
(2) $f_i^\circ \to f^\circ$ locally uniformly on the interior of the support of f°.

2.3. The John–Löwner Ellipsoid

The John and Löwner ellipsoids and John's condition are cornerstones of modern convex analysis. They proved to be extremely fruitful in various geometric problems, for example, reverse isoperimetric inequalities and maximizing volume ratios [**Bal91**], estimating the number of faces of symmetric polytopes [**Fig77**, **Bal97**, **Bar02**] and many others.

It is known that for any origin symmetric convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ the inclusion

$$\mathcal{J}(K) \subset K \subset \sqrt{n}\mathcal{J}(K) \tag{2.12}$$

holds, where $\mathcal{J}(K)$ denotes the John ellipsoid of K. This inclusion cannot be improved since it is tight for $K = \square^n$. If the symmetry condition is dropped, then the factor $\sqrt{n}$ in (2.12) is replaced by n [**Joh14**, **Hen12**], which is the best possible as $K = \Delta^n$ shows.

In terms of the Banach–Mazur distance, inclusion (2.12) means that the distance between an arbitrary real normed space of dimension n and the Euclidean space ℓ_2^n is at most $\sqrt{n}$. Recall that the *Banach–Mazur distance* between real normed spaces X and Y, denoted by $d_{BM}(X, Y)$, is defined as the minimal positive constant c such that there exists a linear operator $A\colon X \to Y$ satisfying

$$A(B_X) \subset B_Y \subset cA(B_X),$$

where B_X and B_Y are the unit balls of X and Y, respectively. Inclusion (2.12) says that the inequality $d_{BM}(X, \ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$ holds for any normed space X with $\dim X = n$. The set of real normed spaces of the fixed dimension endowed with the metric $\log d_{BM}$ becomes a compact metric space since the Banach–Mazur distance satisfies the triangle inequality in the sense that $d_{BM}(X, Y) \leqslant d_{BM}(X, Z)d_{BM}(Z, Y)$ for any normed spaces X, Y and Z. We refer the reader to [**Gru07**, **BGVV14**, **AAGM15**]

In this Section, we discuss the basic properties of John and Löwner ellipsoids. We also consider an application of these objects and the related notion of John's condition to a geometric problem of maximizing the volume ratio and the outer volume ratio of a convex body.

2.3.1. **The Existence and Uniqueness of the John–Löwner ellipsoid.** Here we establish the existence and uniqueness of our main objects. We emphasize the fact that the proof of the existence and uniqueness of a solution to problem (1.2), which we give in Chapter 4, will be based on exactly the same strategy.

Proposition 2.8. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body. Then there exists a *unique* ellipsoid E of maximal volume contained in K.

Proposition 2.9. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a body (not necessarily convex). Then there exists a *unique* ellipsoid E of minimal volume containing K.

Clearly, the maximal and minimal ellipsoids are affine invariant. That is, if E is the maximal (minimal) ellipsoid of a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ and A is a non-degenerate operator on $\mathbb{R}^n$, then $A(E)$ is the maximal (minimal) ellipsoid of the body $A(K)$.

The proofs of Proposition 2.8 and Proposition 2.9 follow the same steps. To show the existence of these objects, we apply a simple compactness argument. To be more precise, we show that if an ellipsoid $A\mathbf{B}^n + a$ is a candidate for an extremal volume ellipsoid of a body K, then $\|A\| \leqslant \rho$ and $|a| \leqslant \mu$, where ρ, μ are some constants. Hence, the parameters A and a of the optimization problems belong to a bounded and closed set in the finite-dimensional spaces $\mathbb{R}^{n\times n}$ and $\mathbb{R}^n$, respectively. By the continuity of the volume and compactness, there exist an operator A and a vector a such that the ellipsoid $A\mathbf{B}^n + a$ is contained in K and is of extremal volume. To prove the uniqueness, we first show that all the extremal ellipsoids are necessarily translates of each other. Then, assuming that there are at least two extremal ellipsoids, we use them to construct the third ellipsoid which is of greater volume (in case of Proposition 2.8) or of less volume (in case of Proposition 2.9) than the original ones. This leads to the contradiction.

Proof of Proposition 2.8. Let $A\mathbf{B}^n + a \subset K$. Then, since K is compact, we have $\|A\| \leqslant \mu$ and $|a| \leqslant \rho$, where $\mu, \rho > 0$ are some constants. The existence follows.

Now we show uniqueness of a maximal volume ellipsoid. Let $E_1 = A\mathbf{B}^n + a$ and $E_2 = B\mathbf{B}^n + b$ be maximal volume ellipsoids contained in K, then $\det A = \det B$. Consider the ellipsoid $E = \frac{A+B}{2}\mathbf{B}^n + \frac{a+b}{2}$. By the convexity of K, we have $E \subset K$. Indeed, any point in E is of the form $x = \frac{A+B}{2}y + \frac{a+b}{2}$, where $y \in \mathbf{B}^n$. Then

$$x = \frac{1}{2}\left((Ay + a) + (By + b)\right) \in \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \subset K.$$

The volume of E is $\det(\frac{A+B}{2}) \operatorname{vol} \mathbf{B}^n$. By Minkowski's determinant inequality (2.4), we have

$$\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geqslant \sqrt{\det A}\sqrt{\det B} = \det A. \tag{2.13}$$

We see that $\operatorname{vol} E \geqslant \operatorname{vol} E_1$. Then, by the choice of E_1, there is equality in (2.13). Therefore, $A = B$ by Minkowski's determinant inequality (2.4). Thus, E_1 and E_2 are translates.

Assume without loss of generality that $A = B = \mathrm{id}_n$ and $b = -a$, that is, $E_1 = \mathbf{B}^n + a$ and $E_2 = \mathbf{B}^n - a$. By convexity of K, the convex hull of E_1 and E_2 is contained in K. Clearly, $\operatorname{conv}(E_1 \cup E_2)$ contains the unit ball stretched by the factor $(1 + |a|)$ along $\operatorname{span}\{a\}$, whose volume is $(1 + |a|) \operatorname{vol} \mathbf{B}^n > \operatorname{vol} E_1$. It contradicts the choice of E_1. This completes the proof. ∎

Proof of Proposition 2.9. Let $\delta > 0$ be sufficiently large. Let $E = A\mathbf{B}^n + a$ be an ellipsoid containing the body K and $\operatorname{vol} E < \delta$. Then, by convexity, the set $\operatorname{conv}\{K, a\}$ is contained in E, hence $\operatorname{vol}\operatorname{conv}\{K, a\} < \delta$. Therefore, $|a| \leqslant \rho$, where $\rho > 0$ is some constant depending on δ and K. Let λ be the smallest eigenvalue of A and c be the minimal width of K.

Clearly, $c/2 \leqslant \lambda$. Then

$$\delta > \operatorname{vol} E = \det A \operatorname{vol} \mathbf{B}^n \geqslant \|A\| \lambda^{n-1} \operatorname{vol} \mathbf{B}^n \geqslant \|A\| (c/2)^{n-1} \operatorname{vol} \mathbf{B}^n.$$

Therefore, there exists a constant $\mu > 0$ such that $\|A\| \leqslant \mu$. The existence follows.

Let $E_1 = A\mathbf{B}^n + a$ and $E_2 = B\mathbf{B}^n + b$ be minimal volume ellipsoids containing K, then $\det A = \det B$. The inclusions $A^{-1}(K - a) \subset \mathbf{B}^n$ and $B^{-1}(K - b) \subset \mathbf{B}^n$ hold. By convexity of the unit ball, we have $\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2} K - \frac{A^{-1}a+B^{-1}b}{2} \subset \mathbf{B}^n$. Denote $C = \left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1}$ and $c = C\left(\frac{A^{-1}a+B^{-1}b}{2}\right)$. We have shown that the ellipsoid $E = C\mathbf{B}^n + c$ contains the body K. The volume of E is $\det\left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1} \operatorname{vol} \mathbf{B}^n$. By Minkowski's determinant inequality (2.4), we have

$$\det\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1} \leqslant \sqrt{\det A}\sqrt{\det B} = \det A. \tag{2.14}$$

We see that $\operatorname{vol} E \leqslant \operatorname{vol} E_1$. Then, by the choice of E_1, there is equality in (2.14). Therefore, we have the equality case in (2.4) and $A = B$. Thus, E_1 and E_2 are translates.

Without loss of generality assume that $A = B = \mathrm{id}_n$ and $b = -a$. That is, $E_1 = \mathbf{B}^n + a$ and $E_2 = \mathbf{B}^n - a$. We have that $K \subset E_1 \cap E_2$. Clearly, the intersection of the balls E_1 and E_2 is contained in the unit ball stretched by the factor $(1 - |a|)$ along $\operatorname{span}\{a\}$, which is of the volume $(1 - |a|) \operatorname{vol} \mathbf{B}^n < \operatorname{vol} E_1$. It contradicts the choice of E_1. This completes the proof. ■

Definition 2.4. The maximal volume ellipsoid contained in a convex body K is called the *John ellipsoid* of K and the minimal volume ellipsoid containing K is called the *Löwner ellipsoid* of K. We use $\mathcal{J}(K)$ and $\mathcal{L}(K)$ to denote these ellipsoids, respectively.

Remark 2.3. We note that the proof of Proposition 2.9 is somewhat dual to that of Proposition 2.8: inequality (2.14) is a reversed version of inequality (2.13), the set operation $\psi(X, Y) = \operatorname{conv}(X \cup Y)$ is replaced with the operation $\varphi(X, Y) = X \cap Y$ dual to ψ in the sense of Assertion 4 of Proposition 2.2. That is, the dual proof can be constructed from the original one by replacing the bodies with their polars and the functions with their log-conjugates and by reversing the inequalities. We use this approach to construct dual proofs in the sequel.

2.3.2. **The Duality of the John and Löwner ellipsoids.** Now we clarify the exact meaning of the duality between the John and Löwner ellipsoids. By the duality, some properties of the Löwner ellipsoid follow from the properties of the John ellipsoid immediately.

Lemma 2.3. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body. Then the following assertions hold:

(1) If $\mathcal{J}(K)$ is centered in the origin, then $\mathcal{J}(K)^\circ = \mathcal{L}(K^\circ)$.
(2) If $\mathcal{L}(K)$ is centered in the origin, then $\mathcal{L}(K)^\circ = \mathcal{J}(K^\circ)$.

Proof. We show Assertion 1. Since $\mathcal{J}(K) \subset K$, we have inclusion $K^\circ \subset \mathcal{J}(K)^\circ$. Assume that $\mathcal{L}(K^\circ) \neq \mathcal{J}(K)^\circ$. Therefore, $\operatorname{vol} \mathcal{J}(K)^\circ > \operatorname{vol} \mathcal{L}(K^\circ)$. From Proposition 2.2 and Proposition 2.3, we have that $\mathcal{L}(K^\circ)^\circ \subset K$ is an ellipsoid and $\operatorname{vol} \mathcal{L}(K^\circ) \operatorname{vol} \mathcal{L}(K^\circ)^\circ \geqslant (\operatorname{vol} \mathbf{B}^n)^2 = \operatorname{vol} \mathcal{J}(K) \operatorname{vol} \mathcal{J}(K)^\circ$. Hence

$$\operatorname{vol} \mathcal{L}(K^\circ)^\circ \geqslant \frac{\operatorname{vol} \mathcal{J}(K)^\circ}{\operatorname{vol} \mathcal{L}(K^\circ)} \operatorname{vol} \mathcal{J}(K) > \operatorname{vol} \mathcal{J}(K),$$

a contradiction. ■

2.3.3. **John's Theorem and John's condition.** In his fundamental theorem, F. John [Joh14] gave an algebraic description of the John ellipsoid of a convex body. In this Subsection, we discuss John's Theorem and its various forms including its dual version for the Löwner ellipsoid.

John's Theorem 1 (John, 1948)**.** Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body containing the Euclidean unit ball $\mathbf{B}^n$. Then $\mathbf{B}^n$ is the John ellipsoid of K if and only if there exist unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of K and positive scalars $(c_i)_1^m$ such that

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = \mathrm{id}_n \tag{2.15}$$

and

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0. \tag{2.16}$$

Remark 2.4. The "if" part is due to Ball [Bal97]. This is the easier part to prove.

Remark 2.5. In [GLM+04], Y. Gordon, A. Litvak, M. Meyer and A. Pajor extended this theorem and described an affine map T involving contact pairs of two convex bodies $K, L \subset \mathbb{R}^n$, when $T(K)$ is in maximal volume position in L.

Condition (2.15) on vectors $(u_i)_1^m \subset \mathbb{R}^n$ and positive scalars $(c_i)_1^m$ is called *John's condition*. It is equivalent to the fact that for any $x \in \mathbb{R}^n$ one has

$$x = \sum_{i=1}^m c_i \langle u_i, x\rangle u_i.$$

Taking the scalar product of both sides of this identity with x, we have

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^m c_i |\langle u_i, x\rangle|^2.$$

Note that is if unit vectors $(u_i)_1^m \subset \mathbb{R}^n$ and positive scalars $(c_i)_1^m$ satisfy (2.15), then, taking the traces of both sides of identity (2.15), we obtain

$$\sum_{i=1}^m c_i = n. \tag{2.17}$$

We adjust John's Theorem to our needs and introduce its version for a maximum volume ellipsoid among the ellipsoids centered in the origin.

Proposition 2.10. Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$. A maximal volume *origin symmetric* ellipsoid contained in K exists and is unique. This ellipsoid is the Euclidean unit ball $\mathbf{B}^n$ if and only if $\mathbf{B}^n \subset K$ and there exist unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of K and positive weights $(c_i)_1^m$ satisfying John's condition (2.15).

Remark 2.6. Compare Proposition 2.10 with John's Theorem: note that in Proposition 2.10 we do not require the vectors $(u_i)_1^m$ to satisfy condition (2.16). If we drop this condition, we fix the center of an extremal ellipsoid at the origin and it is still characterised by John's condition (2.15).

Proof of Proposition 2.10. Clearly, $\mathbf{B}^n$ is the maximal volume origin symmetric ellipsoid of the body K if and only if $\mathbf{B}^n$ is the maximal volume ellipsoid of the convex body $K \cap (-K)$. The latter holds if and only if there are unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of $K \cap (-K)$ and positive weights $(c_i)_1^m$ satisfying John's condition (2.15). However, since $(-u_i) \otimes (-u_i) = u_i \otimes u_i$, we may assume that the vectors $(u_i)_1^m$ are on the boundary of K. This completes the proof. ■

The following statement characterizes the Löwner ellipsoid of a convex body and can be considered as dual to John's Theorem.

Proposition 2.11. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body *contained* in the Euclidean unit ball $\mathbf{B}^n$. Then $\mathbf{B}^n$ is the Löwner ellipsoid of K if and only if there exist unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of K and positive scalars $(c_i)_1^m$ satisfying John's condition (2.15) and (2.16).

Proof. By Proposition 2.3, $\mathbf{B}^n$ is the Löwner ellipsoid of K if and only if $\mathbf{B}^n$ is the John ellipsoid of K°. The latter holds if and only if there are unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of K° and positive scalars $(c_i)_1^m$ satisfying John's condition (2.15). By the properties of polar set and the convexity of K° and K, $(u_i)_1^m \subset K^{\circ\circ} = \operatorname{conv}(K \cup \{0\})$. This implies that $(u_i)_1^m$ lie on the boundary of K since they are of unit norm and $K \subset \mathbf{B}^n$. ■

In Chapter 4, we will need the version of Proposition 2.10 for a minimal volume ellipsoid centered in the origin, which is the Proposition below.

Proposition 2.12. Let K be a body in $\mathbb{R}^n$. A minimal volume origin symmetric ellipsoid contained in K exists and is unique. This ellipsoid is the Euclidean unit ball $\mathbf{B}^n$ if and only if $\mathbf{B}^n \subset K$ and there exist unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of K and positive weights $(c_i)_1^m$ satisfying John's condition (2.15).

Proof. It is easy to see that the ball $\mathbf{B}^d$ is the minimal volume origin symmetric ellipsoid containing K if and only if $\mathbf{B}^d$ is the Löwner ellipsoid of $\operatorname{conv}(K \cup (-K))$. By Proposition 2.11, $\mathbf{B}^d$ is the Löwner ellipsoid of $\operatorname{conv}(K \cup (-K))$ if and only if $\operatorname{conv}(K \cup (-K)) \subset \mathbf{B}^d$ and there are unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of $\operatorname{conv}(K \cup (-K))$ and positive numbers $(c_i)_1^m$ satisfying John's condition (2.15). Since the ball $\mathbf{B}^d$ is a strictly convex set, any point of $\operatorname{conv}(K \cup (-K)) \cap \mathbf{B}^d$ belongs either to the boundary of K or $-K$. However, since $(-u_i) \otimes (-u_i) = u_i \otimes u_i$, we may assume that the vectors $(u_i)_1^m$ are on the boundary of K. ■

2.3.4. **The Volume Ratio.** K. Ball solved the following problem: among the symmetric bodies having the Euclidean unit ball as their John ellipsoid, what is a body of maximal volume? Using his version of the Brascamp–Lieb inequality, he showed that an answer is the unit cube. F. Barthe showed that the unit cube is the *unique* maximizer. Moreover, Barthe studied the dual question: among the symmetric bodies having the Euclidean unit ball as their Löwner ellipsoid, which is of minimal volume? He proved the reverse Brascamp–Lieb inequality and, using it, showed that the standard cross-polytope is the unique minimizer.

In this Subsection, we formulate the Brascamp–Lieb inequality and its reverse form, which we will need in the sequel. Next, for the sake of completeness, we present the proofs of the results above, following [**Bal89**, **Bar98**]. In Chapter 4, we will extend the results of K. Ball and F. Barthe on volume ratios to the setting of log-concave functions using the reverse Brascamp–Lieb inequality.

The Brascamp–Lieb Inequality and its Reverse Form. The theorem below is a form of the Brascamp–Lieb inequality introduced by K. Ball [**Bal89**] that matches John's Theorem.

Theorem 2.3 (Ball, 1989)**.** Let unit vectors $(u_i)_1^m$ in $\mathbb{R}^n$ and positive scalars $(c_i)_1^m$ satisfy John's condition (2.15). Let $f_1, \dots, f_n$ be non-negative integrable functions on $\mathbb{R}$. Then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(\langle u_i, x\rangle)^{c_i} dx \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i \right)^{c_i}. \tag{2.18}$$

The following theorem is a form of the reverse Brascamp–Lieb inequality stated and proved by Barthe [**Bar98**]. It can be considered as the statement dual to Theorem 2.3.

Theorem 2.4 (Barthe, 1998)**.** Let unit vectors $(u_i)_1^m$ in $\mathbb{R}^n$ and positive scalars $(c_i)_1^m$ satisfy John's condition (2.15). Let $f_1, \dots, f_n$ be non-negative integrable functions on $\mathbb{R}$. Then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup\left\{\prod_{i=1}^m f_i(\Theta_i)^{c_i} : x = \sum_{i=1}^m c_i \Theta_i u_i\right\} dx \geqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i\right)^{c_i}. \tag{2.19}$$

Volume Ratio and Outer Volume Ratio. Recall the definitions of the volume ratio and the outer volume ratio.

Definition 2.5. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body. Then

- the *volume ratio* of K is defined by
$$\operatorname{vr} K = \left(\frac{\operatorname{vol}_n K}{\operatorname{vol}_n \mathcal{J}(K)}\right)^{1/n};$$
- the *outer volume ratio* of K is defined by
$$\operatorname{ovr} K = \left(\frac{\operatorname{vol}_n \mathcal{L}(K)}{\operatorname{vol}_n K}\right)^{1/n}.$$

Since the John and Löwner ellipsoids are affine invariant, the volume ratio and the outer volume ratio are also affine invariant.

The sharp upper bound on the volume ratio of a convex body in both symmetrical and general cases was given by K. Ball in [**Bal89**, **Bal01**]. We state it in the following theorem.

Theorem 2.5 (Ball, 1989)**.** Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body. Then $\operatorname{vr} K \leqslant \operatorname{vr} \Delta^n$ with equality if and only if K is an affine image of the standard simplex. Under assumption that K is origin symmetric, one has $\operatorname{vr} K \leqslant \operatorname{vr} \square^n$ with equality if and only if K is an affine cube.

Remark 2.7. The "only if" parts were proven by F. Barthe in [**Bar98**].

Proof. We show the symmetric case. Since a volume ratio is affine invariant, we put $\mathcal{J}(K) = \mathbf{B}^n$ for convenience. By John's theorem, there are unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of K and positive scalars $(c_i)_1^m$ satisfying John's condition (2.15). By convexity and symmetry of K, it is contained in the body $C = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle u_i, x\rangle| \leqslant 1\}$. By John's theorem, $\mathcal{J}(C) = \mathbf{B}^n$. Since $\mathcal{J}(\square^n) = \mathbf{B}^n$, it suffices show that $\operatorname{vol}_n C \leqslant \operatorname{vol}_n \square^n = 2^n$. Let f_i be the characteristic function of the segment $[-1, 1]$ for each $i \in [m]$. Clearly, the characteristic function of C is $\prod_{i=1}^m f_i(\langle u_i, x\rangle)^{c_i}$. Therefore, by the Brascamp–Lieb inequality (2.18) and identity (2.17), we have

$$\operatorname{vol}_n K \leqslant \operatorname{vol}_n C = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(\langle u_i, x\rangle)^{c_i} dx \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i\right)^{c_i} = \prod_{i=1}^m 2^{c_i} = 2^n.$$

■

Using his version of Brascamp–Lieb inequality, Barthe [**Bar98**] proved the dual inequality.

Theorem 2.6 (Barthe, 1998)**.** Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body. Then $\operatorname{ovr} K \leqslant \operatorname{ovr} \Delta^n$ with equality if and only if K is an affine image of the standard simplex. Under assumption that K is origin symmetric, one has $\operatorname{ovr} K \leqslant \operatorname{ovr} \Diamond^n$ with equality if and only if K is an affine cross-polytope.

Proof. We consider the symmetric case. Since the volume ratio is affine invariant, we put $\mathcal{L}(K) = \mathbf{B}^n$ for convenience. Since $\mathcal{L}(\Diamond^n) = \mathbf{B}^n$, it suffices to show that $\operatorname{vol}_n K \geqslant \operatorname{vol}_n \Diamond^n = 2^n/n!$. By Proposition 2.11, there are unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of K and positive

scalars $(c_i)_1^m$ such that the John condition (2.15) holds. The body K contains the body $C = \operatorname{conv}(u_i)_1^m$. The definition of the gauge function implies that $|x|_C = \inf\{\sum|\lambda_i| : x = \sum\lambda_i u_i\}$. For each $i \in [m]$, define $f_i(t) = e^{-t}$ if $t \geqslant 0$ and $f_i(t) = 0$ otherwise. Applying identity (2.8), the reverse Brascamp–Lieb inequality (2.19) and identity (2.17), we have

$$\operatorname{vol}_n K \geqslant \operatorname{vol}_n C = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|_C}dx$$
$$= \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^n} \sup\left\{\prod_{i=1}^m \left(e^{-|\Theta_i|}\right)^{c_i} : x = \sum_{i=1}^m c_i\Theta_i u_i\right\} \geqslant \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}} f_i\right)^{c_i} = \frac{2^n}{n!}.$$

■

Remark 2.8. We note that the proof of Theorem 2.6 is dual to the proof of Theorem 2.5 in the sense of Remark 2.3. Here, the body $C_1 = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle u_i, x\rangle| \leqslant 1\}$ from the proof of Theorem 2.5 is replaced with $C_2 = \operatorname{conv}(u_i)_1^m$, polar to C_1 by identity (2.9). In Theorem 2.5, we use the integral representation of the volume of C_1 it terms of its characteristic function. In Theorem 2.6, the volume of C_2 is expressed via the integral of the function $e^{-|x|_{C_2}}$, which is the log-conjugate function of χ_{C_1} by Proposition 2.7.

Remark 2.9. Since $\operatorname{vol}\square^n = 2^n$ and $\operatorname{vol}\lozenge^n = 2^n/n!$, by Theorem 2.5, Theorem 2.6 and Stirling's formula (2.1), there exist positive constants Θ_1 and Θ_2 such that the inequalities

$$\operatorname{vr} K \leqslant \Theta_1\sqrt{n} \quad \text{and} \quad \operatorname{ovr} K \leqslant \Theta_2\sqrt{n}$$

hold and are asymptotically tight for any centrally symmetric convex body $K \subset \mathbb{R}^n$.

2.4. Tight Frames and John's Condition

The tight frames and Jonh's condition are closely related notions. Recall that, given an m-tuple $(u_i)_1^m \subset \mathbb{R}^n$ of unit vectors and positives $(c_i)_1^m$ satisfying John's condition (2.15), one sets $v_i = \sqrt{c_i}u_i$ and obtains a tight frame $(v_i)_1^m$.

In this Section, among other results, we show that a tight frame of m vectors in $\mathbb{R}^n$ can be lifted up to an orthonormal basis in $\mathbb{R}^m$. This simple fact and other properties of tight frames will help us to establish new results in Chapter 3.

Definition 2.6. An ordered m-tuple $(v_i)_1^m \subset H$ is called a *tight frame* (or *forms a tight frame*) in a vector space H, if

$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i = \mathrm{id}_H.$$

We denote the set of m-tuples that form a tight frame in $\mathbb{R}^n$ by $\Omega(m, n)$.

Definition 2.7. An ordered tuple of vectors in a linear space H that spans H is called a *frame* in H.

The following lemma is stated in [**Iva20b**]. For the sake of completeness, we provide its prove here.

Lemma 2.4. Let $(v_i)_1^m \subset \mathbb{R}^n$. The following assertions are equivalent:

(1) $(v_i)_1^m$ is a tight frame in $\mathbb{R}^n$.
(2) There exist an orthonormal basis $(f_i)_1^m$ of $\mathbb{R}^m$ such that $Pf_i = v_i$ for each $i \in [m]$, where P is the canonical projection of $\mathbb{R}^m$ onto $\mathbb{R}^n$.
(3) $\operatorname{span}(v_i)_1^m = \mathbb{R}^n$ and the Gram matrix of the set $(v_i)_1^m$ is the orthogonal projection onto the linear span H of the rows of the $n \times m$ matrix $A = (v_1 \ \cdots \ v_m)$.

(4) The $n \times m$ matrix $A = (v_1 \ \cdots \ v_m)$ is a submatrix of an orthogonal matrix.

PROOF. (4) $\Longrightarrow$ (3). Since A is a submatrix of an orthogonal matrix, its rank is n. Therefore, $\operatorname{span}(v_i)_1^m = \mathbb{R}^n$. Let G be the Gram matrix of vectors $(v_i)_1^m$ and P be the orthogonal projection from $\mathbb{R}^m$ onto the linear hull H. Since the rows of A form an orthonormal basis of their linear hull H, we can identify Pe_i and v_i in this basis of H. Therefore,

$$P_{ij} = \langle Pe_i, e_j \rangle = \left\langle P^2 e_i, e_j \right\rangle = \langle Pe_i, Pe_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = G_{ij}.$$

(3) $\Longrightarrow$ (2). Let the Gram matrix G of the vectors $(v_i)_1^m$ be the orthogonal projection onto H. By the last identity, we have that $\langle Ge_i, Ge_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$. But if two sets S_1 and S_2 of vectors have the same Gram matrix, then there exists an orthogonal transformation of the space that maps vectors of S_1 to S_2. Indeed, each step in the Gram–Schmidt process for both systems are identical, that means that any orthogonal transformation which maps the Gram–Schmidt orthonormalization of S_1 to the Gram–Schmidt orthonormalization of S_2 maps S_1 to S_2. Therefore, with a proper choice of the orthonormal basis in $\mathbb{R}^n$, we can identify vectors v_i and Pe_i, for $i \in [n]$, and the subspaces H and $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(v_i)_1^m$.
(2) $\Longrightarrow$ (1). Let P be the projection from $\mathbb{R}^m$ onto $\mathbb{R}^n$. Let $v_i = Pf_i$ for each $i \in [m]$. For an arbitrary vector $x \in \mathbb{R}^n$, we have $Px = x$ and therefore

$$\left(\sum_{i=1}^m v_i \otimes v_i \right) x = \sum_{i=1}^m \langle v_i, x \rangle \, v_i = \sum_{i=1}^m \langle Pf_i, x \rangle \, v_i$$
$$= \sum_{i=1}^m \langle f_i, Px \rangle \, v_i = P \left(\sum_{i=1}^m \langle f_i, x \rangle \, f_i \right) = Px = x.$$

(1) $\Longrightarrow$ (4). For $i \in [m]$, we have $e_j = \sum\limits_{i=1}^m \langle v_i, e_j \rangle \, v_i$. Therefore,

$$\delta_{jk} = \langle e_j, e_k \rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_i, e_j \rangle \, \langle v_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^m v_i[j] v_i[k],$$

where $v_i[j]$ is the j-th coordinate of the vector v_i in the given basis. That is, the rows of the $n \times m$ matrix $A = (v_1 \ \cdots \ v_m)$ form an orthonormal system of n vectors in $\mathbb{R}^m$.

■

With a set $S \subset \mathbb{R}^n$, we associate the operator $A_S = \sum\limits_{v \in S} v \otimes v$. Clearly, S is a frame in $\mathbb{R}^n$ if and only if $A_S > 0$ and is a tight frame if $A_S = \mathrm{id}_n$ by definition. Hence, for any frame S the matrix

$$B_S = A_S^{-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{v \in S} v \otimes v \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.20}$$

is well-defined. Its main property is that it maps S to the tight frame $B_S S$:

$$\sum_{v \in S} B_S v \otimes B_S v = B_S \left(\sum_{v \in S} v \otimes v \right) B_S^T = B_S A_S B_S = \mathrm{id}_k. \tag{2.21}$$

We use this observation to show that each non-degenerate origin symmetric polytope is a section of a higher dimensional cube up to linear transforms.

First, we note that any section of the unit cube is determined by some tight frame. Let H be a k-dimensional subspace of $\mathbb{R}^n$ and let v_i be the orthogonal projection of e_i onto H for

each $i \in [n]$. Clearly, for any $x \in H$ we have $\langle x, e_i\rangle = \langle x, v_i\rangle$. Then

$$\square^n \cap H = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, e_i\rangle| \leqslant 1\} \cap H = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in H : |\langle x, v_i\rangle| \leqslant 1\}. \tag{2.22}$$

On the other hand, $(v_i)_1^m$ is a tight frame in H by Assertion 1 of Lemma 2.4.

Now, let P be an origin symmetric polytope in $\mathbb{R}^n$. Let $v_1, ..., v_m$ be its outer normals up to a sign. Choosing their lengths properly, we may assume that $P = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i\rangle| \leqslant 1\}$. Since P is bounded, $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\} = \mathbb{R}^n$, so $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ is a frame. Then $S' = B_S S = \{B_S v_1, \dots, B_S v_m\}$ is a tight frame in $\mathbb{R}^n$ by the definition of B_S. By Assertion 2 of Lemma 2.4, the polytope $B_S^{-1} P$ is a section of a unit cube in $\mathbb{R}^m$ by $\mathbb{R}^n$.

CHAPTER 3

The Maximal Volume Sections of the Cube

In this Chapter, we study the problem of maximizing the volume of the intersection of the n-dimensional unit cube $\square^n$ with a k-dimensional linear subspace, that is, we investigate maximizers of the function $H \mapsto \mathrm{vol}_k([-1,1]^n \cap H)$, where $H \subset \mathbb{R}^n$ is a subspace of dimension k.

We will discuss known results on the extremizers, which are Vaaler's theorem and Ball's theorem. One of the arguments used by K. Ball is that the projection of a vector of the standard basis onto a maximizer for $2k \geqslant n$ has length at least $\sqrt{2}$. We prove the following extension of this result.

Theorem 3.1. Let $n > k > 1$, H be a global maximizer of (1.1) and v be the orthogonal projection of a vector of the standard basis of $\mathbb{R}^n$ onto H. Then

$$\frac{k}{n+k} \leqslant |v|^2 \leqslant \frac{k}{n-k}.$$

We formulate the maximization problem in terms of tight frames, state the frame versions of Theorem 1.1, Theorem 3.1 and Theorem 1.2 and prove them.

3.1. State of the Art

The problem of volume extrema of the intersection of the cube $\square^n$ with a k-dimensional linear subspace has been studied intensively. The tight lower bound for all $n \geqslant k \geqslant 1$ was obtained by J. Vaaler [**Vaa79**].

Theorem 3.2 (Vaaler, 1979)**.** Let $H \subset \mathbb{R}^n$ be a k-dimensional subspace. Then

$$\mathrm{vol}\,\square^k \leqslant \mathrm{vol}\,(\square^n \cap H)$$

with equality if and only if H is a coordinate subspace.

A. Akopyan and R. Karasev [**AHK19**] gave a new proof of Vaaler's inequality in terms of waists. A deep generalization of Vaaler's result for ℓ_p^n balls was made by M. Meyer and A. Pajor [**MP88**].

Applying his form of the Brascamp–Lieb inequality (2.18), Ball obtains the following upper bounds [**Bal89**].

Theorem 3.3 (Ball, 1989)**.** Let $H \subset \mathbb{R}^n$ be a k-dimensional subspace. Then

$$\mathrm{vol}_k\,(\square^n \cap H) \leqslant \left(\frac{n}{k}\right)^{k/2} \mathrm{vol}_k\,\square^k,$$

where inequality is best possible if and only if k divides n, and

$$\mathrm{vol}_k(\square^n \cap H) \leqslant 2^{(n-k)/2}\,\mathrm{vol}_k\,\square^k,$$

where inequality is tight if and only if $2k \geqslant n$.

Remark 3.1. The "only if" part in the first inequality is due to Ivanov [**Iva20a**].

Proof of Theorem 3.3. We show the first inequality. Let $c_i = \left|P^H e_i\right|^2$ and $v_i = P^H e_i/\sqrt{c_i}$ for all $i \in [n]$. By (2.22),

$$\square^n \cap H = \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_i\rangle| \leqslant \frac{1}{\sqrt{c_i}} \right\}.$$

Let f_i be the characteristic function of the segment $\left[-1/\sqrt{c_i}, 1/\sqrt{c_i}\right]$ for each $i \in [n]$. Then the characteristic function of $\square^n \cap H$ is $\prod_{i=1}^n f_i(\langle x, u_i\rangle)^{c_i}$. By Assertion 1 of Lemma 2.4, the vectors $(u_i)_{i=1}^n$ and scalars $(c_i)_{i=1}^n$ satisfy John's condition (2.15). By the Brascamp–Lieb inequality (2.18) and identity (2.17), we obtain

$$\operatorname{vol}_k(\square^n \cap H) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(\langle x, u_i\rangle)^{c_i} \leqslant \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} f_i \right)^{c_i} = \prod_{i=1}^n \left(2c_i^{-1/2}\right)^{c_i} = 2^k \left(\prod_{i=1}^n c_i^{c_i} \right)^{-1/2}.$$

From the convexity of the function $x \log x$ and Jensen's inequality, it follows that $\prod_{i=1}^n \alpha_i^{\alpha_i}$ is at least $1/n$ provided that $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ and $\alpha_i \geqslant 0$ for each $i \in [n]$, and the bound $1/n$ is attained if $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$. We put $\alpha_i = c_i/k$. Therefore,

$$\operatorname{vol}_k(\square^n \cap H) \leqslant 2^k \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{k/n} \right)^{-1/2} = \left(\frac{n}{k}\right)^{k/2} \operatorname{vol} \square^k.$$

■

Thus, if k does not divide n and $2k < n$, the maximal volume of a section of the cube $\square^n$ remains unknown.

Using the reverse form of the Brascamp–Lieb inequality, F. Barthe proved the theorem that can be considered dual to Theorem 3.3.

Theorem 3.4 (Barthe, 1998)**.** Let $H \subset \mathbb{R}^n$ be a k-dimensional subspace. Then

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{k/2} \operatorname{vol} \Diamond^k \leqslant \operatorname{vol} (\Diamond^n | H).$$

Inequality is best possible if and only if k divides n.

Remark 3.2. The "only if" part is due to Ivanov [**Iva20a**].

Remark 3.3. We explain in which sense Theorem 3.3 and Theorem 3.4 are dual. Recall that $(\square^n)^\circ = \Diamond^n$ by the definition of the polar body. Let $H \subset \mathbb{R}^n$ be a k-dimensional subspace. If $K \subset \mathbb{R}^n$ is a convex body, then $(K \cap H)^\circ = K^\circ | H$, where $K \cap H$ and its polar are considered as subsets of the space H. The proofs of Theorem 3.3 and Theorem 3.4 also use duality relations in the sense of Remark 2.3 and Remark 2.8.

In [**Iva21**], a tight bound on the volume of a section of the cube $\square^n$ by a k-dimensional subspace was conjectured for all $n > k \geqslant 1$.

Conjecture 1. If the maximal volume of a section of the cube $\square^n$ by a k-dimensional subspace of $\mathbb{R}^n$ is attained at a subspace H, then $\square^n \cap H$ is an affine cube.

Let $C_\square(n,k) \operatorname{vol}_k \square^k$ be the maximal volume of a section of $\square^n$ by a k-dimensional subspace L such that $\square^n \cap L$ is an affine cube. Conjecture 1 states that for any k-dimensional subspace H of $\mathbb{R}^n$, one has

$$\operatorname{vol}_k(\square^n \cap H) \leqslant C_\square(n,k) \operatorname{vol}_k \square^k.$$

A complete description of a k-dimensional subspace L of $\mathbb{R}^n$ such that the section $\square^n \cap L$ is an affine cube of the volume $C_\square(n,k)\operatorname{vol}_k \square^k$ is given in the following lemma, proven in [**Iva21**]. We note that Theorem 1.2 is the particular case of Conjecture 1 with $k = 2$.

Lemma 3.1. The constant $C_\square(n,k)$ is given by

$$C_\square^2(n,k) = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil^{n-k\lfloor n/k \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{k-(n-k\lfloor n/k \rfloor)} \tag{3.1}$$

and is attained at the subspaces constructed by the following rule.

(1) We partition $[n]$ into k sets such that the cardinalities of any two sets differ by at most one.

(2) Let $\{i_1, \dots, i_\ell\}$ be one of the sets of the partition. Then, choosing arbitrary signs, we write the system of linear equations

$$\pm x_{i_1} = \ldots = \pm x_{i_\ell},$$

where x_i denotes the i-th coordinate of x in $\mathbb{R}^n$.

(3) Our subspace is the solution of the system of all equations written for each set of the partition at step (2).

3.2. Reformulation of the Problem

In Section 2.4, we showed that a section of the cube is determined by some tight frame in k-dimensional space. This observation together with Lemma 2.4 allow us to state problem (1.1) in terms of tight frames.

For an n-tuple $S \subset \mathbb{R}^k$, we call the set

$$\square(S) = \bigcap_{v \in S} \{x \in \mathbb{R}^k : |\langle x, v\rangle| \leqslant 1\} \tag{3.2}$$

the *section of the cube generated by* S. Consider the problem of finding the extrema of the function

$$S \mapsto \operatorname{vol}_k \square(S), \text{ where } S \in \Omega(n,k). \tag{3.3}$$

In order to study the local extremizers of problem (3.3), we endow the set of n-tuples of vectors in $\mathbb{R}^k$ with the metric

$$\operatorname{dist}(\{v_1, \dots, v_n\}, \{u_1, \dots, u_n\}) = \left(\sum_{i=1}^n |v_i - u_i|^2 \right)^{1/2}.$$

This induces the metric on the set of frames in $\mathbb{R}^k$ consisting of n vectors and on $\Omega(n,k)$.

Proposition 3.1. The extrema of problems (1.1) and (3.3) coincide.

Proof. We show that the global extrema of the problems are the same. For the case of local extrema, we refer the reader to [**Iva20b**, Lemma 4.1].

Consider the following action of the orthogonal group $O(k)$ in dimension k on $\Omega(n,k)$: for $U \in O(k)$ and $\{v_1, \dots, v_n\} \in \Omega(n,k)$, put

$$U\{v_1, \dots, v_n\} = \{Uv_1, \dots, Uv_n\}.$$

Clearly, since $\operatorname{vol}_k \square(S) = \operatorname{vol}_k \square(US)$ for any $U \in O(k)$ and $S \in \Omega(n,k)$, it suffices to construct a one-to-one correspondence $\Psi\colon \operatorname{Gr}(n,k) \to \Omega(n,k)/O(k)$ such that for any k-dimensional subspace H of $\mathbb{R}^n$ we have $\operatorname{vol}_k(\square^n \cap H) = \operatorname{vol}_k \square(S)$, where $S \in \Psi(H)$.

For any $H \in \operatorname{Gr}(n,k)$, fix an isometry $\varphi_H\colon H \to \mathbb{R}^k$. By Assertion 2 of Lemma 2.4, $P^H\{e_1, \dots, e_n\}$ is a tight frame in H. Then $\left(\varphi_H \circ P^H\right)\{e_1, \dots, e_n\} \in \Omega(n,k)$. Put

$$\Psi(H) = \left[\left(\varphi_H \circ P^H\right)\{e_1, \dots, e_n\}\right],$$

where $[S]$ is the orbit of $S \in \Omega(n,k)$ under the action of $O(k)$. We construct the inverse of Ψ. For a tight frame $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^k$, define a subspace H_S as a linear hull of the rows of the $k \times n$ matrix $(v_1 \ \cdots \ v_n)$. Define the map $\Phi\colon \Omega(n,k)/O(k) \to \mathrm{Gr}(n,k)$ by $\Phi[S] = H_S$. The mapping Φ is well-defined: the orthogonal projection onto H_S is the Gram matrix of S by Assertion 3 of Lemma 2.4 and orthogonal transforms preserve Gram matrices. The inverse of Ψ is Φ since the tuples $S = \{v_1, \dots, v_n\} \in \Omega(n,k)$ and $\{P^{H_S}e_1, \dots, P^{H_S}e_n\}$ are isometric by Assertion 4 of Lemma 2.4. ■

From now on, we will study properties of the maximizers of (3.3) and work with tight frames. We are ready to state Theorem 1.1 and Theorem 1.2 in terms of tight frames.

Theorem 3.5 (Frame version of Theorem 1.1)**.** Let $S \subset \Omega(n,k)$ be a local maximizer of (1.1). The following assertions hold.

(1) Each vector $v \in S$ is non-zero and the intersection of $\square(S)$ with the hyperplane $\{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, v\rangle = 1\}$ is a facet of $\square(S)$.
(2) For each $v \in S$, the line $\mathrm{span}\{v\}$ intersects the boundary of $\square(S)$ in the centroid of a facet of $\square(S)$.
(3) Let F be a facet of $\square(S)$. Denote $P_F = \mathrm{conv}(F \cup \{0\})$. Then

$$\frac{\mathrm{vol}_k P_F}{\mathrm{vol}_k P} = \frac{1}{2}\frac{\sum_\star |v|^2}{k},$$

where the sum is taken over the vectors $v \in S$ such that $\mathrm{span}\{v\}$ intersects F in its centroid.

Theorem 3.6 (Frame version of Theorem 1.2)**.** For any tight frame $S \in \Omega(n,2)$, one has

$$\mathrm{area}\,\square(S) \leqslant 4\sqrt{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor},$$

The inequality is attained at some tight frame for each n and is attained at a tight frame S if and only if $\square(S)$ is a rectangle with the sides of the lengths $2\sqrt{\lceil n/2 \rceil}$ and $2\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor}$.

3.3. Operations on Frames

The following approach to problem (3.3) was proposed in [**Iva20b**] and used in [**Iva21**] to study the properties of projections of the standard cross-polytope.

The main idea is to transform a given tight frame S into a new one S' and compare the volumes of the sections of the cube generated by them. Since it is not very convenient to transform a given tight frame into another one, we add an intermediate step: we transform a tight frame S into a frame $\tilde{S}$, and then we transform $\tilde{S}$ into the new tight frame $S' = B_{\tilde{S}}\tilde{S}$ with $B_{\tilde{S}}$ defined by (2.20).

We obtain the following necessary and sufficient condition for a tight frame to be a maximizer of (3.3).

Lemma 3.2. The maximum of (3.3) is attained at a tight frame $S \in \Omega(n,k)$ if and only if the following inequality holds for an arbitrary frame $\tilde{S}$ consisting of n vectors in $\mathbb{R}^k$:

$$\frac{\mathrm{vol}_k \square(\tilde{S})}{\mathrm{vol}_k \square(S)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\det A_{\tilde{S}}}}. \tag{3.4}$$

Proof. For any frame $\tilde{S}$ consisting of n vectors in $\mathbb{R}^k$, we have that $B_{\tilde{S}}\tilde{S} \in \Omega(n,k)$ by (2.21) and $\mathrm{vol}_k \square(B_{\tilde{S}}\tilde{S}) = \mathrm{vol}_k \square(\tilde{S})/\det B_{\tilde{S}}$. The maximum of (3.3) is attained at a tight frame S if

and only if $\operatorname{vol}_k \square(B_{\tilde{S}}\tilde{S}) \leqslant \operatorname{vol}_k \square(S)$ for an arbitrary frame $\tilde{S}$. Hence

$$1 \geqslant \frac{\operatorname{vol}_k \square(B_{\tilde{S}}\tilde{S})}{\operatorname{vol}_k \square(S)} = \frac{\operatorname{vol}_k \square(\tilde{S})}{\det B_{\tilde{S}}} \frac{1}{\operatorname{vol}_k \square(S)} = \frac{\operatorname{vol}_k \square(\tilde{S})}{\operatorname{vol}_k \square(S)} \sqrt{\det A_{\tilde{S}}}.$$

Dividing by $\sqrt{\det A_{\tilde{S}}}$, we obtain inequality (3.4). ■

Clearly, if $\tilde{S}$ in the assertion of Lemma 3.2 is close to S, then the tight frame $B_{\tilde{S}}\tilde{S}$ is close to S as well. Therefore, inequality (3.4) gives a necessary condition for local maximizers of (3.3). Let us illustrate how we will use it.

Let S be an extremizer of (3.3), and T be a map from a subset of $\Omega(n,k)$ to the set of frames in $\mathbb{R}^k$. In order to obtain properties of extremizers, we consider a composition of two operations:

$$S \quad \xrightarrow{T} \quad \tilde{S} \quad \xrightarrow{B_{\tilde{S}}} \quad S'.$$

For example, see Figure 1, where T is the operation of replacing a vector v of S by zero.

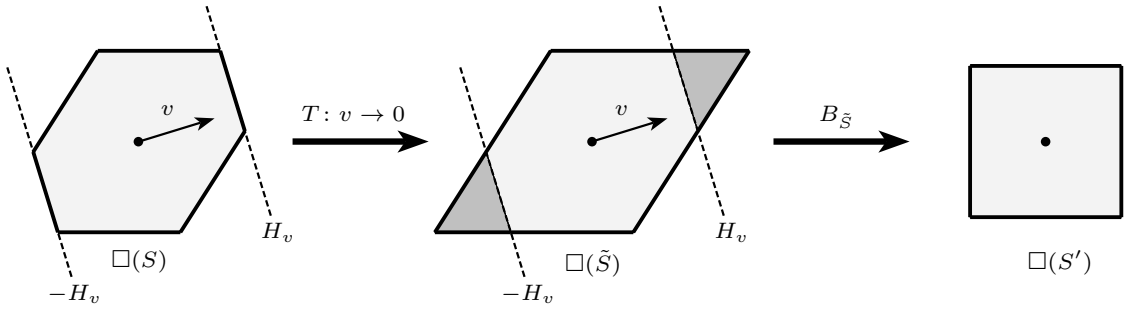


FIGURE 1. A frame $S \subset \mathbb{R}^2$ consists of three vectors and $\square(S)$ is a hexagon. A vector $v \in S$ is mapped to the origin, yielding the frame $\tilde{S}$. By construction, $\square(\tilde{S})$ is a parallelogram. Since the frame $S' = B_{\tilde{S}}\tilde{S}$ is a tight frame with only two nonzero vectors, these vectors are two orthogonal unit vectors. Hence $\square(S')$ is a square.

Choosing a simple operation T, we may calculate the left-hand side of (3.4) in some geometric terms. We will consider several simple operations: Scaling one or several vectors, mapping one vector to the origin, mapping one vector to another. On the other hand, the determinant in the right-hand side of (3.4) can be calculated for the operations listed above.

We end this Section with two technical lemmas. For any m-tuple $S \subset \mathbb{R}^n$ with $v \in S$, we use $S \setminus v$ to denote the $(m-1)$-tuple of vectors obtained from S by removing the first occurrence of v in S.

Lemma 3.3. Let $S \in \Omega(m,n)$ and $v \in S$ be a vector such that $|v| < 1$. Then $S \setminus v$ is a frame in $\mathbb{R}^n$ and $B_{S\setminus v}$ is the stretch of $\mathbb{R}^n$ by the factor $\left(1-|v|^2\right)^{-1/2}$ along $\operatorname{span}\{v\}$. In particular, for any $u \in \mathbb{R}^n$, we have $\left|B_{S\setminus v}u\right| \geqslant |u|$.

PROOF. Since $A_{S\setminus v} = \mathrm{id}_n - v \otimes v > 0$, we have that $S \setminus v$ is a frame in $\mathbb{R}^n$. Clearly, $A_{S\setminus v}$ stretches the space by the factor $\left(1-|v|^2\right)$ along $\operatorname{span}\{v\}$. Therefore, the operator $B_{S\setminus v} = A_{S\setminus v}^{-1/2}$ stretches the space by the factor $\left(1-|v|^2\right)^{-1/2}$ along the same direction. ■

The following first-order approximation of the determinant was obtained in [**Iva20b**, Theorem 1.2].

Lemma 3.4. Let $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^k$ be a tight frame and the n-tuple $\tilde{S}$ be obtained from S by substitution $v_i \to v_i + tx_i$, where $t \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^k$, $i \in [n]$. Then

$$\sqrt{\det A_{\tilde{S}}} = 1 + t \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, v_i \rangle + o(t).$$

3.4. Properties of a Global Maximizer

Theorem 3.1 is formulated in terms of subspaces. For the sake of convenience, we introduce its equivalent reformulation in terms of tight frames.

Theorem 3.7 (Frame version of Theorem 3.1)**.** Let $S \in \Omega(n, k)$ be a global maximizer of (3.3) and $v \in S$. Then

$$\frac{k}{n+k} \leqslant |v|^2 \leqslant \frac{k}{n-k}. \tag{3.5}$$

Proof. The definition of tight frame implies that $\sum\limits_{p \in S} |p|^2 = k$. Hence there is a vector $u \in S$ such that $|u|^2 \leqslant k/n$ and a vector $w \in S$ such that $|w|^2 \geqslant k/n$.

We start with the rightmost inequality in (3.5). Let $\tilde{S}$ be the n-tuple obtained from S by substitution $u \to v$. Since $|u|^2 \leqslant k/n < 1$, we have

$$A_{\tilde{S}} = \mathrm{id}_k - u \otimes u + v \otimes v \geqslant \mathrm{id}_k - u \otimes u > 0.$$

Hence $\tilde{S}$ is a frame in $\mathbb{R}^k$. By identity (3.2), inclusion $\square(S) \subset \square(\tilde{S})$ holds. Therefore, $\mathrm{vol}_k \square(S) \leqslant \mathrm{vol}_k \square(\tilde{S})$. Using Lemma 3.2 and Lemma 2.1, we obtain

$$1 \geqslant \det A_{\tilde{S}} = \left(1 + \left|B_{S \setminus u} v\right|^2\right) \left(1 - |u|^2\right).$$

By Lemma 3.3, the right-hand side of this inequality is at least $\left(1 + |v|^2\right) \left(1 - |u|^2\right)$. Therefore,

$$|v|^2 \leqslant \frac{|u|^2}{1 - |u|^2} \leqslant \frac{k}{n-k}.$$

Let us prove the leftmost inequality in (3.5). There is nothing to prove if $|v|^2 \geqslant k/n$. Assume that $|v| < k/n$. Let $\tilde{S}$ be the n-tuple obtained from S by substitution $v \to w$. Since $A_{\tilde{S}} = \mathrm{id}_k - v \otimes v + w \otimes w > 0$, $\tilde{S}$ is a frame in $\mathbb{R}^k$. By identity (3.2), the inclusion $\square(S) \subset \square(\tilde{S})$ holds. Therefore, $\mathrm{vol}_k \square(S) \leqslant \mathrm{vol}_k \square(\tilde{S})$. Using Lemma 3.2 and Lemma 2.1, we obtain

$$1 \geqslant \det A_{\tilde{S}} = \left(1 + \left|B_{S \setminus v} w\right|^2\right) \left(1 - |v|^2\right).$$

Again, by Lemma 3.3, the right-hand side of this inequality is at least $\left(1 + |w|^2\right) \left(1 - |v|^2\right)$. It follows that

$$|v|^2 \geqslant \frac{|w|^2}{1 + |w|^2} \geqslant \frac{k}{n+k}.$$

This completes the proof. ■

Clearly, Theorem 3.7 implies Theorem 3.1. These theorems can be sharpened in the case of sections by planes, i.e. $k = 2$.

Lemma 3.5. Let $S \in \Omega(n, 2)$ be a maximizer of (3.3) for $k = 2$ and $n \geqslant 3$. Let $v \in S$. Then

$$\frac{2}{n+1} \leqslant |v|^2 \leqslant \frac{2}{n-1}. \tag{3.6}$$

PROOF. Lemma 3.1 provides an example of a two-dimensional subspace H satisfying

$$\operatorname{area}(\square^n \cap H) = 4C_{\square}(n,2) = 4\sqrt{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}.$$

Therefore, the maximal area of a planar section of the cube $\square^n$ is at least $4\sqrt{\lceil n/2 \rceil \lfloor n/2 \rfloor}$. Thus, we have

$$\operatorname{area} \square(S) \geqslant 4\sqrt{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}. \tag{3.7}$$

Let us prove the leftmost inequality in (3.6). It is trivial if $|v| \geqslant 2/n$. Assume that $|v| < 2/n$. Let $S' \in \Omega(n-1,2)$ be a maximizer of (3.3). By Theorem 3.3, we have

$$\operatorname{area} \square(S') \leqslant 2(n-1). \tag{3.8}$$

Consider $S \setminus v$. It is a frame by Lemma 3.3. Then, by Lemma 3.2 and Lemma 2.1, we get

$$\frac{\operatorname{area} \square(S \setminus v)}{\operatorname{area} \square(S')} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\det A_{S \setminus v}}} = \frac{1}{\sqrt{1-|v|^2}}.$$

By identity (3.2), we have $\square(S) \subset \square(S \setminus v)$. By this and by inequalities (3.8) and (3.7), we get

$$\frac{\operatorname{area} \square(S \setminus v)}{\operatorname{area} \square(S')} \geqslant \frac{\operatorname{area} \square(S)}{\operatorname{area} \square(S')} \geqslant \frac{4\sqrt{\lceil n/2 \rceil \lfloor n/2 \rfloor}}{2(n-1)}.$$

Combining the last two inequalities, we obtain

$$|v|^2 \geqslant 1 - \left(\frac{\operatorname{area} \square(S')}{\operatorname{area} \square(S)} \right)^2 \geqslant 1 - \left(\frac{n-1}{2\sqrt{\lceil n/2 \rceil \lfloor n/2 \rfloor}} \right)^2 \geqslant \frac{2}{n+1}.$$

We proceed with the rightmost inequality in (3.6). Let $S' \in \Omega(n+1,2)$ be a maximizer of (3.3). By Theorem 3.3, we have

$$\operatorname{area} \square(S') \leqslant 2(n+1). \tag{3.9}$$

We use $\tilde{S}$ to denote the $(n+1)$-tuple obtained from S by concatenating S with the vector v. Since S is a frame in $\mathbb{R}^2$, $\tilde{S}$ is a frame in $\mathbb{R}^2$ as well. By Lemma 3.2 and Lemma 2.1, we get

$$\frac{\operatorname{area} \square(\tilde{S})}{\operatorname{area} \square(S')} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\det A_{\tilde{S}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+|v|^2}}.$$

By identity (3.2), we have $\square(S) = \square(\tilde{S})$. By this and by inequalities (3.9) and (3.7), we get

$$\frac{\operatorname{area} \square(S)}{\operatorname{area} \square(S')} = \frac{\operatorname{area} \square(\tilde{S})}{\operatorname{area} \square(S')} \geqslant \frac{4\sqrt{\lceil n/2 \rceil \lfloor n/2 \rfloor}}{2(n+1)}.$$

Combining the last two inequality, we obtain

$$|v|^2 \geqslant \left(\frac{\operatorname{area} \square(S')}{\operatorname{area} \square(S)} \right)^2 - 1 \geqslant \left(\frac{n+1}{2\sqrt{\lceil n/2 \rceil \lfloor n/2 \rfloor}} \right)^2 - 1 \geqslant \frac{2}{n-1}.$$

■

Remark 3.4. It is possible to sharpen inequality (3.5) for $k > 2$ and $n > 2k$ using the same approach as in Lemma 3.5. The idea is to remove $n \bmod k$ from or add $n - (n \bmod k)$ vectors to a maximizer and compare the volume of a section of the cube generated by the new frame with Ball's bound from Theorem 3.3. However, it does not give a substantial improvement.

3.5. Local Properties

In this section, we prove some properties of the local maximizers of (3.3). We will perturb facets of $\square(S)$ of a local maximizer S (that is, we will perturb the vectors of S in a specific way corresponding to a perturbation of some facets of the polytope $\square(S)$). To this end, we need to recall some general properties of polytopes connected to perturbations of a half-space supporting a polytope in its facet.

3.5.1. **Local Properties of Polytopes.** Recall that a point c is the *centroid* of a facet F of a polytope $P \subset \mathbb{R}^k$ if

$$c = \frac{1}{\operatorname{vol}_{k-1} F} \int\limits_F x d\lambda, \tag{3.10}$$

where $d\lambda$ is the standard Lebesgue measure on the hyperplane containing F.

For a set $W \subset \mathbb{R}^k$, we use $P(W)$ to denote the polytopal set $\bigcap\limits_{w\in W} \{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, w\rangle \leqslant 1\}$. Let W be a set of pairwise distinct vectors such that

- the set $P(W)$ is a polytope;
- for every $w \in W$, the hyperplane H_w supports $P(W)$ in a facet of $P(W)$.

That is, W is the set of scaled outer normals of $P(W)$. Denote $P = P(W)$. We fix $w \in W$ and the facet $F = P \cap H_w$ of P. Let c be the centroid of F.

Transformation 1. We will "shift" a facet of a polytope parallel to itself. Let W' be obtained from W by substitution $w \to w + h\frac{w}{|w|}$, where $h \in \mathbb{R}$. Denote $P' = P(W')$. That is, the polytopal set P' is obtained from P by the shift of the half-space $\{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, w\rangle \leqslant 1\}$ by h in the direction of its outer normal (see Figure 2). By the celebrated Minkowski existence and uniqueness theorem for convex polytopes (see, for example, [**Gru07**, Theorem 18.2]), we have

$$\operatorname{vol}_k P' - \operatorname{vol}_k P = h \operatorname{vol}_{k-1} F + o(h). \tag{3.11}$$

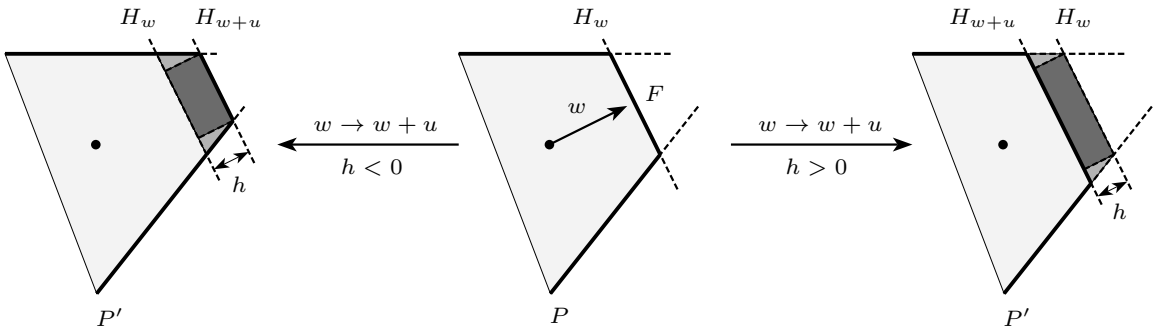


FIGURE 2. Parallel shift of the facet F by the vector $u = hw/|w|$

Transformation 2. We will rotate a facet around a codimension two subspace. Let u be a unit vector orthogonal to w. Define $c_w = H_w \cap \operatorname{span}\{w\}$ and $L_u = H_w \cap (u^\perp + c_w)$. Note that L_u is a codimension two affine subspace of $\mathbb{R}^k$ and an affine hyperplane in H_w. Clearly, for any non-zero $t \in \mathbb{R}$, $L_u = H_w \cap H_{w+tu} = \{x \in H_w : \langle x - c(w), u\rangle = 0\}$. Thus, L_u divides F into two parts

$$F^+ = F \cap \{x \in H_w : \langle x - c(w), u\rangle \geqslant 0\} \quad \text{and} \quad F^- = F \cap \{x \in H_w : \langle x - c(w), u\rangle \leqslant 0\}$$

(one of the sets F^+ or F^- is empty if $c(w) \notin F$). Let $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ be the oriented angle between hyperplanes H_w and H_{w+tu} such that α is positive for positive t.

Let W' be obtained from W by substitution $w \to w+tu$, where $t \in \mathbb{R}$ and u is a unit vector orthogonal to w. Denote $P' = P(W')$. Thus, for a sufficiently small $|t|$, the polytopal set P' is a polytope obtained from P by the rotation of the half-space $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, w\rangle \leqslant 1\}$ around the codimension two affine subspace L_u by some angle $\alpha = \alpha(t)$. Clearly, in order to calculate the volume of P', we need to subtract from $\operatorname{vol}_k P$ the volume of the subset of P that is above H_{w+tu} and to add to $\operatorname{vol}_k P$ the volume of the subset of P' that is above H_w. Formally speaking, denote

$$Q^+ = \begin{cases} P' \cap \left(\mathbb{R}^k \setminus \{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, w\rangle \leqslant 1\}\right) & \text{for} \quad \alpha \geqslant 0 \\ P \cap \left(\mathbb{R}^k \setminus \{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, w+tu\rangle \leqslant 1\}\right) & \text{for} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

and

$$Q^- = \begin{cases} P \cap \left(\mathbb{R}^k \setminus \{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, w+tu\rangle \leqslant 1\}\right) & \text{for} \quad \alpha \geqslant 0 \\ P' \cap \left(\mathbb{R}^k \setminus \{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, w\rangle \leqslant 1\}\right) & \text{for} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Then, we have (see Figure 3)

$$\operatorname{vol}_k P' - \operatorname{vol}_k P = \operatorname{sign} \alpha \left(\operatorname{vol}_k Q^+ - \operatorname{vol}_k Q^-\right). \tag{3.12}$$

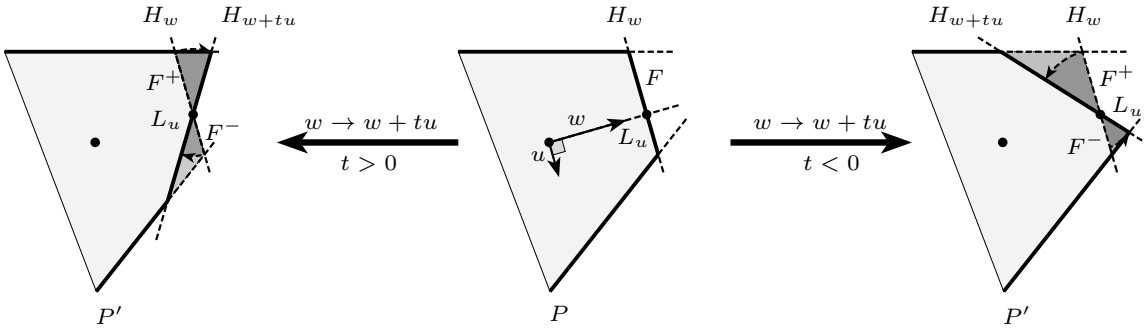


FIGURE 3. A rotation of the facet F around L_u

There is a nice approximation for $\operatorname{vol}_k Q^+ - \operatorname{vol}_k Q^-$. Let C_α^+ (resp., C_α^-) be the set swept out by F^+ (resp., F^-) while rotating around L_u by the angle α. By routine,

$$\operatorname{vol}_k C_\alpha^+ = |\alpha| \int_0^{+\infty} r \operatorname{vol}_{k-2}\left(F \cap (L_u + ru)\right) dr$$

and

$$\operatorname{vol}_k C_\alpha^- = |\alpha| \int_0^{+\infty} r \operatorname{vol}_{k-2}\left(F \cap (L_u - ru)\right) dr = -|\alpha| \int_{-\infty}^{0} r \operatorname{vol}_{k-2}\left(F \cap (L_u + ru)\right) dr.$$

We claim that

$$\operatorname{vol}_k Q^+ = \operatorname{vol}_k C_\alpha^+ + o(\alpha) \quad \text{and} \quad \operatorname{vol}_k Q^- = \operatorname{vol}_k C_\alpha^- + o(\alpha). \tag{3.13}$$

This can be shown in the following way. If F^+ is not a body in H_w, then $\operatorname{vol}_k Q^+ = \operatorname{vol}_k C_\alpha^+ = 0$. Assume F^+ is a body in H_w. Since a polytope is defined by a system of linear inequalities, there is a positive constant b such that for any sufficiently small τ the Hausdorff distance on $H_{w+\tau u}$ between $Q^+ \cap H_{w+\tau u}$ and $C_\alpha^+ \cap H_{w+\tau u}$ is at most $b\alpha$. Note that the section of C_α^+ by $H_{w+\tau u}$ is F^+ rotated around L_u by some small angle $\beta = \beta(\tau)$. Therefore, there exist two homothets $F_1^+ \subset H_w$ and $F_2^+ \subset H_w$ of F^+ satisfying two properties:

- both the Hausdorff distance between F_1^+ and F^+ and the Hausdorff distance between F_2^+ and F^+ are at most $\tilde{b}\alpha$ for a positive constant $\tilde{b}$;
- the body swept out by F_1^+ while rotating around L_u by the angle α is contained in Q^+ and the body swept out by F_2^+ contains Q^+.

By the first property and a simple integration, the volumes of the bodies swept out by F_1^+ and F_2^+ coincide with $\operatorname{vol}_k C_\alpha^+$ up to the terms of the first order of α. The second property implies the leftmost identity in (3.13). The rightmost one is obtained similarly.

By identities (3.12) and (3.13), we obtain

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}_k P' - \operatorname{vol}_k P &= \alpha\left(\operatorname{vol}_k C_\alpha^+ - \operatorname{vol}_k C_\alpha^-\right) + o(\alpha)\\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} r \operatorname{vol}_{k-2}\left(F \cap (L_u + ru)\right) dr + o(\alpha).\end{aligned}$$

By this and by (3.10), we get

$$\operatorname{vol}_k P' - \operatorname{vol}_k P = \alpha \langle c - c_w, u\rangle \operatorname{vol}_{k-1} F + o(\alpha).$$

Since w and u are orthogonal, we have

$$\alpha = \arctan \frac{|u|}{|w|} t = \frac{|u|}{|w|} t + o(t).$$

Finally, we obtain

$$\operatorname{vol}_k P' - \operatorname{vol}_k P = \frac{\operatorname{vol}_{k-1} F}{|w|} \langle c - c_w, u\rangle\, t + o(t). \tag{3.14}$$

3.5.2. **Local Properties of Sections of the Cube.** Let S be a frame in $\mathbb{R}^k$. For every $v \in S$, we denote the set $H_v \cap \square(S)$ by F_v. We say that $v \in S$ *corresponds to a facet* F of $\square(S)$ if either $F = F_v$ or $F = -F_v$. Clearly, if some vectors of S correspond to the same facet of $\square(S)$, then they are equal up to a sign. For a given frame S in $\mathbb{R}^k$ and $u \in \mathbb{R}^k$, a facet F of $\square(S)$ and a vector $u \in \mathbb{R}^k$, we define an F-substitution in the direction u as follows:

- each vector v of S such that $F \subset H_v$ is substituted by $v + u$;
- each vector v of S such that $-F \subset H_v$ is substituted by $v - u$;
- all other vectors of S remain the same.

In order to prove Theorem 3.5, which is equivalent to Theorem 1.1, we will use F-substitutions. First, we simplify the structure of a local maximizer.

Lemma 3.6. Let S be a local maximizer of (3.3) and $v \in S$. Then F_v is a facet of $\square(S)$.

Proof. Since $\square(S)$ is the intersection of half-spaces of the form $\{\langle w, x\rangle \leqslant 1\}$ with $w \in \pm S$, we have that $\operatorname{conv}\{\pm S\}$ is polar to $\square(S)$ in $\operatorname{span} S = \mathbb{R}^k$.

By the duality argument, it suffices to prove that $v \in S$ is a vertex of the polytope $\operatorname{conv}\{\pm S\}$. Assume that v is not a vertex of $\operatorname{conv}\{\pm S\}$.

Clearly, $v \in \operatorname{conv}\{\pm(S \setminus v)\}$ and v is not a vertex of the polytope $\operatorname{conv}\{\pm(S \setminus v)\}$. Therefore we have that $\operatorname{span}\{S \setminus v\} = \operatorname{span} S = \mathbb{R}^k$. That is, $S \setminus v$ is a frame in $\mathbb{R}^k$. Since $B_{S\setminus v}$ is a non-degenerate linear transformation, $B_{S\setminus v} v$ is not a vertex of the polytope $\operatorname{conv}\{\pm B_{S\setminus v}(S \setminus v)\}$. By this and by the triangle inequality, there is a vertex u of $\operatorname{conv}\{\pm S\}$ such that $u \in S$ and $|B_{S\setminus v} v| < |B_{S\setminus v} u|$.

Denote by $\tilde{S}$ the n-tuple obtained from S by substitution $v \to v + t(u - v)$, where $t \in (0, 1]$. Since $A_{\tilde{S}} \geqslant A_{S\setminus v} > 0$, $\tilde{S}$ is a frame in $\mathbb{R}^k$. By the choice of u and identity (3.2), we have $\square(\tilde{S}) = \square(S)$. Hence $\operatorname{vol}_k \square(\tilde{S}) = \operatorname{vol}_k \square(S)$. Lemma 3.2 implies that $\det A_{\tilde{S}} \leqslant 1$.

On the other hand, by Lemma 2.1, we have

$$\det A_{\tilde S} = \left(1 + \left|B_{S\setminus v}(v + t(u - v))\right|^2\right)\left(1 - |v|^2\right).$$

Inequality $\left|B_{S\setminus v}v\right| < \left|B_{S\setminus v}u\right|$ implies that $\left|B_{S\setminus v}v\right| < \left|B_{S\setminus v}(v + t(u - v))\right|$. By this and by Lemma 3.3, we conclude that $\det A_{\tilde S} > 1$. This is a contradiction. Thus, v is a vertex of $\operatorname{conv}\{\pm S\}$. The Lemma is proven. ■

As an immediate corollary of Lemma 3.6 and by the standard properties of polytopes, we have the following statement.

Corollary 3.1. Let S be a local maximizer of (3.3) and $v \in S$. Let $\tilde S_t$ be the n-tuple obtained from S by F_v-substitution in the direction tu with $t \in \mathbb{R}$ and $u \in \mathbb{R}^k$. Then, for a sufficiently small $|t|$, $\tilde S_t$ is a frame, the vector $v + ut$ corresponds to a facet of $\square(\tilde S_t)$. Moreover, $\operatorname{vol}_k \square(\tilde S_t)$ is a smooth function of t at $t = 0$.

In the following two lemmas, we will perturb a local maximizer by making F-substitutions. Geometrically speaking, making an F-substitution in the direction tu with $u \in \mathbb{R}^k$ and $t \in \mathbb{R}$, we move the opposite facets F and $-F$ of a local maximizer in a symmetric way. Thus, for a sufficiently small t, perturbations of the facets F and $-F$ are independent.

Lemma 3.7. Let S be a local maximizer of (3.3). Let $v \in S$ and d be the number of the vectors of S that correspond to F_v. Then

$$\frac{2}{|v|}\operatorname{vol}_{k-1} F_v = d|v|^2 \operatorname{vol}_k \square(S). \tag{3.15}$$

Proof. Denote by $\tilde S$ the n-tuple obtained from S by F_v-substitution in the direction tv with $t \in \mathbb{R}$. Thus, we apply Transformation 1 to the facets $\pm F_v$ of $\square(S)$. By Lemma 3.2, we have

$$\frac{\operatorname{vol}_k \square(\tilde S)}{\operatorname{vol}_k \square(S)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\det A_{\tilde S}}}. \tag{3.16}$$

By Lemma 3.4 and Corollary 3.1, both sides of this inequality are smooth as functions of t in a sufficiently small neighborhood of $t_0 = 0$. Consider the Taylor expansions of both sides of inequality (3.16) as functions of t about $t_0 = 0$.

By Lemma 2.1, $\det A_{\tilde S} = 1 + d(2t + t^2)|v|^2$. Hence

$$\frac{1}{\sqrt{\det A_{\tilde S}}} = 1 - td|v|^2 + o(t). \tag{3.17}$$

Geometrically speaking, we shift the half-space H_v^+ (resp., H_v^-) by

$$h = \frac{1}{|(1 + t)v|} - \frac{1}{|v|} = -\frac{t}{|v|} + o(t)$$

in the directions of its outer normal. By this and by (3.11), we obtain

$$\operatorname{vol}_k \square(\tilde S) - \operatorname{vol}_k \square(S) = -\frac{2t}{|v|}\operatorname{vol}_{k-1} F_v + o(t). \tag{3.18}$$

Using identities (3.18) and (3.17) in (3.16), we get

$$1 - \frac{2t}{|v|}\frac{\operatorname{vol}_{k-1} F_v}{\operatorname{vol}_k \square(S)} \leqslant 1 - d|v|^2 t + o(t).$$

Since $\tilde{S} = S$ for $t = 0$ and the previous inequality holds for all $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ for a sufficiently small ε, the coefficients of t in both sides of the previous inequality coincide. That is,

$$\frac{2}{|v|}\frac{\operatorname{vol}_{k-1} F_v}{\operatorname{vol}_k \square(S)} = d|v|^2.$$

This completes the proof. ■

Lemma 3.8. Let S be a local maximizer of (3.3) and $v \in S$. Then the line $\operatorname{span}\{v\}$ intersects the hyperplane H_v in the centroid of the facet F_v.

Proof. Denote the centroid of F_v by c and let $c_v = \operatorname{span}\{v\} \cap H_v$. Fix a unit vector u orthogonal to v. Denote by $\tilde{S}$ the n-tuple obtained from S by F_v-substitution in the direction tu with $t \in \mathbb{R}$. Thus, we apply Transformation 2 to the facets $\pm F_v$ of $\square(S)$.

By Lemma 3.2, we have

$$\frac{\operatorname{vol}_k \square(\tilde{S})}{\operatorname{vol}_k \square(S)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\det A_{\tilde{S}}}}. \tag{3.19}$$

By Lemma 3.4 and Corollary 3.1, both sides of this inequality are smooth as functions of t in a sufficiently small neighborhood of $t_0 = 0$. Consider the Taylor expansions of both sides of inequality (3.16) as functions of t about $t_0 = 0$.

By (3.14), we obtain

$$\operatorname{vol}_k \square(\tilde{S}) - \operatorname{vol}_k \square(S) = C\,\langle c - c_v, u\rangle\, t + o(t),$$

where $C = 2\operatorname{vol}_{k-1} F_v/|v| > 0$. By Lemma 3.4, $\sqrt{\det A_{\tilde{S}}} = 1 + o(t)$. Therefore, inequality (3.19) takes the following form

$$1 + \frac{C}{\operatorname{vol}_k \square(S)}\,\langle c - c_v, u\rangle\, t + o(t) \leqslant 1 + o(t).$$

Since the previous inequality holds for all $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ for a sufficiently small ε and $\tilde{S} = S$ for $t = 0$, the coefficients of t in both sides of the previous inequality coincide. That is, we conclude

$$\langle c - c_v, u\rangle = 0.$$

Since $c, c_v \in H_v$ and the last identity holds for all unit vectors parallel to H_v, it follows that $c = c_v$. The lemma is proven. ■

As a simple consequence of Lemma 3.8, we obtain the following result for the planar case.

Theorem 3.8. Let $S \in \Omega(n, 2)$ be a local maximizer of (3.3) for $k = 2$. Then, the polygon $\square(S)$ is cyclic. That is, there is a circle that passes through all the vertices of $\square(S)$.

Proof. Denote the origin by o. Let ab be an edge of $\square(S)$ and oh be the altitude of the triangle abo. By Lemma 3.8, h is the midpoint of ab. Hence, the triangle abo is isosceles and $ao = bo$. It follows that $\square(S)$ is cyclic. ■

We are ready to give a proof of Theorem 3.5, which implies Theorem 1.1.

Proof of Theorem 3.5. Assertion 1 and Assertion 2 are equivalent to Lemma 3.6 and Lemma 3.8, respectively.

By Lemma 3.6, all vectors $v \in S$ such that $\operatorname{span}\{v\}$ intersects F correspond to F and have the same length that we denote by $|v|$. Then by Lemma 3.8, the line spanned by each of these vectors intersects F in its centroid. Since the length of the altitude of the pyramid $P_F = \operatorname{conv}(F \cup \{0\})$ is $1/|v|$, we have

$$\operatorname{vol}_k P_F = \frac{1}{k}\frac{\operatorname{vol}_{k-1} F}{|v|}.$$

Hence Assertion 3 follows from Lemma 3.7. ■

3.6. The Maximal Area Planar Sections of the Cube

We use the setting of tight frames developed in the previous sections to prove Theorem 1.2. More precisely, we prove its frame reformulation, Theorem 3.6, using the obtained necessary conditions for a tight frame in $\mathbb{R}^2$ that maximizes (3.3) for $n > k = 2$.

First, let us introduce the notation. Let $S = \{v_1, \dots, v_n\} \in \Omega(n, 2)$ be a global maximizer of (3.3) for $k = 2$ and $n > 2$. Clearly, $\square(S)$ is a centrally symmetric polygon in $\mathbb{R}^2$. The number of edges of $\square(S)$ is denoted by $2f$. Clearly, $f \leqslant n$. By Theorem 3.8, the polygon $\square(S)$ is cyclic; and we denote its circumradius by R. Let $F_1, \dots, F_{2f}$ be the edges of $\square(S)$ enumerated in clockwise direction (that is, edges F_i and F_{i+f} are opposite to each other, $i \in [f]$). We renumerate the vectors of S in such a way that the vector v_i corresponds to the edge F_i for every $i \in [f]$. The central angle subtended by the edge F_i is denoted by $2\varphi_i$, $i \in [f]$.

Clearly, we have the following identities (see Figure 4):

$$\varphi_1 + \dots + \varphi_f = \frac{\pi}{2}, \tag{3.20}$$

$$R \cos \varphi_i = \frac{1}{|v_i|} \quad \text{for all} \quad i \in [f], \tag{3.21}$$

and

$$\operatorname{area} \square(S) = R^2 \sum_{i=1}^{f} \sin 2\varphi_i. \tag{3.22}$$

Also, we note here that

$$\operatorname{area} \square(S) \geqslant 4C_{\square}(n, 2) = 4\sqrt{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}. \tag{3.23}$$

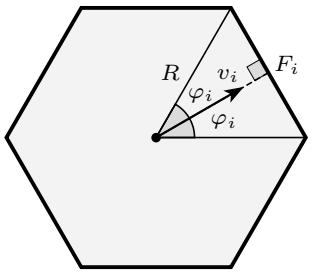


FIGURE 4. Notation for $\square(S)$

There are several steps in the proof of Theorem 3.6. We explain the main steps briefly. In fact, we want to show that the number of edges of a local maximizer is $2f = 4$. Using the discrete isoperimetric inequality (see below), we obtain an upper bound on $\operatorname{area} \square(S)$ in terms of f. This upper bound yields the desired result for $n \geqslant 8$ (the bound is less than conjectured volume $4C_{\square}(n, 2)$ for $n \geqslant 8$). Finally, we deal with the lower-dimension cases using the necessary conditions obtained earlier.

The discrete isoperimetric inequality for cyclic polygons says that among all cyclic f-gons with fixed circumradius there is a unique maximal area polygon – the regular f-gon. We will use a slightly more general form. Namely, fixing one or several central angles of a cyclic polygon,

its area is maximized when all other central angles are equal. In our notation fixing the central angle φ_i and its vertically opposite, we have

$$R^2 f \sin\frac{\pi}{f} \geqslant R^2\left(\sin 2\varphi_i + (f-1)\sin\frac{\pi-2\varphi_i}{f-1}\right) \geqslant 4C_{\square}(n,2). \tag{3.24}$$

This inequality immediately follows from the Jensen inequality and concavity of the sine function on $[0,\pi]$.

Step 1.

Claim 3.1. The area of $\square(S)$ such that $f=2$ is at most $4C_{\square}(n,2)$. The bound is attained when $\square(S)$ is a rectangle with the sides of lengths $2\sqrt{\lceil n/2\rceil}$ and $2\sqrt{\lfloor n/2\rfloor}$.

Proof. Since $f=2$, the polygon $\square(S)$ is an affine square. Hence the claim is an immediate consequence of Lemma 3.1. ■

Thus, it suffices to prove that $f=2$ for any $n>2$.

Step 2.

Claim 3.2. For any $n>2$ the following inequality holds

$$R^2 \leqslant \frac{n+1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2f}}. \tag{3.25}$$

Proof. Let φ_1 be the smallest central angle. By identity (3.20), we have $\cos\varphi_1 \geqslant \cos\frac{\pi}{2f}$. Combining this with the leftmost inequality in (3.6) and identity (3.21), we obtain

$$R^2 = \frac{1}{|v_1|^2\cos^2\varphi_1} \leqslant \frac{n+1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2f}}.$$

■

Claim 3.3. For any $n>2$ the following inequality holds

$$f\tan\frac{\pi}{2f} \geqslant \frac{4}{n+1}\sqrt{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}. \tag{3.26}$$

Proof. By the discrete isoperimetric inequality (3.24), we have

$$R^2 f\sin\frac{\pi}{f} \geqslant 4C_{\square}(n,2).$$

Combining this with inequalities (3.25) and (3.23), we obtain

$$f\frac{\sin\frac{\pi}{f}}{\cos^2\frac{\pi}{2f}} \geqslant \frac{2}{n+1}C_{\square}(n,2) = \frac{8}{n+1}\sqrt{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}.$$

The claim follows. ■

Claim 3.4. The following bounds on f hold:

(1) $f=2$ if $n\geqslant 8$;
(2) $f\leqslant 3$ if $n=7$;
(3) $f\leqslant 4$ if $n=5$.

Proof. We consider the functions in the left- and right-hand sides of (3.26) as functions of f and n respectively. Set $g(f)=f\tan\frac{\pi}{2f}$ and $h(n)=\frac{4}{n+1}\sqrt{\lfloor n/2\rfloor\lceil n/2\rceil}$. Thus, inequality (3.26) takes the form $g(f)\geqslant h(n)$. By routine analysis, we have that g is strictly decreasing and h is increasing on $\{n\in\mathbb{N} : n\geqslant 2\}$. The first two assertions of the claim follows from this and the identity $g(3)=h(7)$. Inequality $f\leqslant 4$ for $n=5$ follows from the direct computations of $g(5), g(4)$ and $h(5)$ (see Figure 5). ■

Theorem 1.2 is proven for $n\geqslant 8$. We proceed with the lower-dimensional cases.

f	2	3	4	5
$g(f)$	2	$\sqrt{3}$	$4\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\sqrt{5\left(5-2\sqrt{5}\right)}$

n	5	6	7
$h(n)$	$2\sqrt{6}/3$	$12/7$	$\sqrt{3}$

FIGURE 5. Some values of g and h

Step 3.

Claim 3.5. For $n = 7$, we have that $f = 2$.

PROOF. We showed that $f \leqslant 3$ for $n = 7$. Assume that $f = 3$. We see that inequality (3.26) with such values turns into an identity. It follows that $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi/6$ and $\square(S)$ is a regular hexagon. Hence the vectors of S are of the same length. Since $\sum\limits_{v\in S} |v|^2 = \operatorname{tr} \mathrm{id}_2 = 2$, we conclude that $|v|^2 = 2/7$ and $R^2 = \frac{1}{|v^2| \cos^2 \pi/6} = 14/3$. However, the volume of such a hexagon is strictly less than $4C_{\square}(7, 2)$. We conclude that $f = 2$ for $n = 7$. ■

Claim 3.6. For $n \in \{3, 4, 6\}$, we have that $f = 2$.

PROOF. For $n = 3$, the statement is a simple exercise (see [**Zon06**]). Conjecture 1 was confirmed in [**Iva20a**] for any $n > k \geqslant 1$ such that $k|n$, in particular, for $k = 2$ and $n \in \{4, 6\}$. ■

Remark 3.5. The inequality on the area for $n \in \{4, 6\}$ and $k = 2$ is a special case of the first inequality in Theorem 3.3 originally proved by K. Ball [**Bal89**]. In [**Iva20a**], the equality cases in this Ball's inequality are described.

Step 4.

Claim 3.7. Let $n = 5$ and either $f = 3$ or $f = 4$. Then $\varphi_i \leqslant \pi/4$ for every $i \in [f]$.

PROOF. Assume that there is $i \in [f]$ such that $\varphi_i > \pi/4$. Thus, $\cos \varphi_i < 1/\sqrt{2}$. Using identity (3.21) for i and for any $j \in [f]$, we have that

$$\frac{\cos \varphi_j}{\cos \varphi_i} = \frac{|v_i|}{|v_j|} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

where the inequality follows from Lemma 3.5. Hence $\cos \varphi_j \leqslant \sqrt{3/2} \cos \varphi_i < \sqrt{3}/2$ and, therefore, $\varphi_j > \pi/6$. This contradicts identity (3.20):

$$\frac{\pi}{2} = \varphi_1 + \cdots + \varphi_f > \frac{\pi}{4} + (f-1)\frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2}.$$

Thus, $\varphi_i \leqslant \pi/4$ for every $i \in [f]$. ■

Claim 3.8. Let $n = 5$ and either $f = 3$ or $f = 4$. Then $\varphi_i \geqslant \pi/10$ for every $i \in [f]$.

PROOF. Fix $i \in [f]$. By identity (3.21) and Lemma 3.5, we have $R^2 \leqslant \frac{3}{2\cos^2 \varphi_i}$. By inequality (3.24), we get

$$\frac{3}{\cos^2 \varphi_i} \left(\sin 2\varphi_i + (f-1) \sin \frac{\pi - 2\varphi_i}{f-1} \right) \geqslant 4C_{\square}(5, 2) = 4\sqrt{6}.$$

The function of φ_i in the left-hand side of this inequality is increasing on $[0, \pi/2]$. Since the inequality does not hold for $\varphi_i = \pi/10$, we conclude that φ_i is necessarily at least $\pi/10$. ■

Claim 3.9. For $n = 5$, we have that $f = 2$.

PROOF. Assume that either $f = 3$ or $f = 4$. Denote by d_i the number of vectors in S that correspond to F_i. We want to rewrite the inequality of Lemma 3.7 using the circumradius and the center angle. Since the length of edge F_i is $2R\sin\varphi_i$ and by identity (3.21), identity (3.15) takes the form

$$2R^2 \sin 2\varphi_i = \frac{d_i}{R^2\cos^2\varphi_i}\operatorname{area}\square(S).$$

Set $q(\varphi) = \cos^2\varphi\sin 2\varphi$. Then for all $i, j \in [f]$, we have

$$\frac{d_i}{d_j} = \frac{q(\varphi_i)}{q(\varphi_i)}.$$

Clearly, there are $i, j \in [f]$ such that $d_i = 2$ and $d_j = 1$. Therefore, $q(\varphi_i)/q(\varphi_j) = 2$. By Claim 3.7 and Claim 3.8, we have that $\varphi_i, \varphi_j \in [\pi/10, \pi/4]$. By simple computations, the maximum of q on the segment $[\pi/10, \pi/4]$ is $q(\pi/6) = 3\sqrt{3}/8$ and the minimum is $q(\pi/4) = 1/2$. Hence $\max\{q(\varphi)/q(\psi) : \varphi, \psi \in [\pi/10, \pi/4]\} = 3\sqrt{3}/4 < 2$ and we come to a contradiction. Thus, $f = 2$. ■

Thus, we have proved that for a maximizer of (3.3), then $f = 2$. By Claim 3.1, the conjectured upper bound for the area of a planar section holds and also is tight. The proof of Theorem 1.2 is complete.

Remark 3.6. We used Theorem 3.3 to prove Theorem 1.2 for $n \in \{3, 4, 6\}$. However, it can be done by using our approach without the Ball inequality. The proof is technical. Since it is not of great interest, we do not give a proof.

CHAPTER 4

The Löwner Function of a Log-concave Function

The log-concave distributions on $\mathbb{R}^n$ are generalizations of the convex bodies in $\mathbb{R}^n$. To be precise, let $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^{n+s}$ be a convex body and K be its orthogonal projection onto $\mathbb{R}^n$. Consider the Lebesgue measure supported on $\tilde{K}$. Its marginal on $\mathbb{R}^n$ has the density $f_K(x) = \mathrm{vol}_n\left(\tilde{K} \cap (\mathbb{R}^s + x)\right)$, supported on K. It follows from the Brunn-Minkowski inequality (2.5) that the function $f^{1/s}$ is concave and hence f is log-concave. It is known that each log-concave function f on $\mathbb{R}^n$ is a weak limit of marginals on $\mathbb{R}^n$ of uniform measures on convex bodies in $\mathbb{R}^{n+s}$, that is, the marginals of convex bodies form a dense subset in the class of log-concave densities.

Many results on geometry of convex bodies may be generalized to the functional language bringing new functional inequalities that are of independent interest. For the past few decades, a lot of progress has been made in this direction. For example, the Prékopa–Leindler inequality can be considered as the functional form of the Brunn–Minkowski inequality [**Pré71**, **AAGM15**]. The Blaschke–Santaló inequality also has a functional form due to K. Ball [**AAKM04**, **FM07**].

To the best of our knowledge, D. Alonso-Gutiérrez, B. G. Merino, C. H. Jiménez and R. Villa [**AGMJV18**] were the first who extended the notion of the John ellipsoid to the setting of integrable log-concave functions, and the first extension of the notion of Löwner ellipsoid was introduced by B. Li, C. Schütt, and E. Werner [**LSW19**]. Let us explain their approaches.

Consider the class of scaled characteristic functions of ellipsoids in $\mathbb{R}^n$, that is, the functions of the form $\alpha\chi_E$, where $\alpha > 0$ and χ_E is the characteristic function of an ellipsoid E in $\mathbb{R}^n$. The authors of [**AGMJV18**] showed that, under a mild condition on a log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, there is a unique function, which we refer to as the *John function of f in the sense of* [**AGMJV18**], of this class of maximal integral that is pointwise less than or equal to f.

The authors of [**LSW19**] study the dual problem: They consider the class of functions of the form $\alpha e^{-|\mathcal{A}x|}$, where $\alpha > 0$ and $\mathcal{A}$ is a non-degenerate affine transformation, and show that there is a unique function of minimal integral that is pointwise greater than or equal to a given upper semi-continuous log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ of finite positive integral. We call this unique function of minimal integral the *Löwner function of f in the sense of* [**LSW19**].

As in the setting of convex sets, the connection between these two optimization problems is via polar duality. By Proposition 2.7, the classes of functions considered in [**AGMJV18**] and [**LSW19**] consist of translates of functions that are polar to each other.

Recently, a more general approach to the definition of John function has been considered in [**IN20**], where the *John s-functions* of an integrable log-concave function are constructed for all $s \in (0, +\infty)$. We define and discuss these functions in Subsection 4.4.1. It was shown [**IN20**, Theorem 7.3] that the John function in the sense of [**AGMJV18**] is the limit (in a rather strong sense) of the John s-function as $s \to 0$. Apart of this limit result, a characterization of the John s-function similar to the one given by John in his fundamental theorem is given in [**IN20**, Theorem 5.1].

Combining ideas of [LSW19] and [IN20], we consider the "dual" problem and define the Löwner s-function below. In hindsight, we understood that it is easier to see the main ideas of our proofs and geometric construction considering a more abstract approach than the one in [IN20].

We formalize our approach in a functional way. For a function $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$, we consider the following class of functions

$$\mathcal{E}^n[\psi] = \left\{ \alpha e^{-\psi(|A(x-a)|)} : A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ is positive definite, } \alpha > 0,\ a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

One may consider the functional class $\mathcal{E}^n[\psi]$ as the class of "affine" positions of the function $e^{-\psi(|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Now we can say that the classes of "affine" positions of the characteristic function of the unit ball and the function $x \mapsto e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, were considered in [AGMJV18] and [LSW19], respectively.

We require for functions of $\mathcal{E}^n[\psi]$ to be "reasonably good" log-concave functions. We say that $\psi\colon [0,\infty) \to (-\infty,+\infty]$ is an *admissible function* if the function $e^{-\psi(|t|)}$, $t \in \mathbb{R}$, is an upper semi-continuous log-concave function of finite positive integral. We discuss the properties of admissible functions in Subsection 4.1.1.1 and consider only classes $\mathcal{E}^n[\psi]$ with ψ being admissible.

For an admissible function $\psi\colon [0,\infty) \to (-\infty,+\infty]$ and an upper semi-continuous log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ of finite positive integral, we study optimization problem (1.2), which is

$$\min_{\ell\in\mathcal{E}^n[\psi]} \int_{\mathbb{R}^n} \ell \quad \text{subject to} \quad f \leqslant \ell.$$

First, we study the uniqueness of the solution to (1.2). We state the full version of Theorem 1.3.

Theorem 4.1. Let $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ be an admissible function and let ψ satisfy one of the following conditions:

(1) ψ is strictly increasing and takes only finite values;
(2) the effective domain of ψ is bounded.

Further, let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be an upper semi-continuous log-concave function of finite positive integral. If there exists $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ such that $f \leqslant \ell$, then there exists a unique solution to problem (1.2). Moreover, the supremum of a solution to this problem is at most $e^n \|f\|$.

The upper bound on the supremum of the solution depends only on the dimension n and does not depend on ψ. This bound is proven by following the same lines as in [AGMJV18]. We note that this result for the Löwner function in the sense of [LSW19] has not been obtained earlier.

The question of the existence of $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ satisfying relation $f \leqslant \ell$ is not hard. As shown in Lemma 4.6, it suffices for ψ to be of linear growth at infinity.

Next, we study the dual problem to that considered in [IN20]. For any $s \in [0,+\infty]$, we define $\psi_s\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ by

$$\psi_s(t) = \begin{cases} t, & s = 0 \\ \dfrac{s}{2}\left[\sqrt{1+4\left(\dfrac{t}{s}\right)^2} - \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+4\left(\frac{t}{s}\right)^2}}{2}\right) - 1\right], & s \in (0,+\infty) \\ t^2, & s = +\infty \end{cases} . \tag{4.1}$$

As it will be shown in Subsection 4.4.1, the function ψ_s is an admissible function for an arbitrary $s \in [0,+\infty]$. One sees that $\mathcal{E}^n[\psi_s]$ with $s = 0$ coincides with the class of functions considered in [LSW19], and that the Löwner function in the sense of [LSW19] is a solution to

problem (1.2) with $\psi = \psi_0$. The class $\mathcal{E}^n[\psi_{+\infty}]$ consists of Gaussian densities. The cumbersome definition of ψ_s in the case $s \in (0, +\infty)$ is caused by polar duality. In Subsection 4.4.1, we will show that problem (1.2) with $\psi = \psi_s$ and $s \in (0, +\infty)$ is dual to the problem of finding the John s-function considered in [**IN20**]. We study problem (1.2) with $\psi = \psi_s$ in the last four Sections of the Chapter.

As a simple consequence of Theorem 4.1, we obtain the following result.

Theorem 4.2. Fix $s \in [0, +\infty)$ and let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be an upper semi-continuous log-concave function of finite positive integral. Then there exists a unique solution to problem

$$\min_{\ell \in \mathcal{E}^n[\psi_s]} \int_{\mathbb{R}^n} \ell \quad \text{subject to} \quad f \leqslant \ell. \tag{4.2}$$

We will refer to the solution to problem (4.2) for a fixed $s \in [0, +\infty)$ as the *Löwner s-function* of f, and denote it by ${}^{(s)}L_f$. Note that the Löwner function in the sense of [**LSW19**] is precisely ${}^{(0)}L_f$.

As in the case of John s-functions, we get the following limit result as s tends to zero.

Theorem 4.3. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be an upper semi-continuous log-concave function of finite positive integral. Then the Löwner s-functions of f converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to the Löwner function of f in the sense of [**LSW19**] as $s \to +0$.

In other words, ${}^{(s)}L_f \to {}^{(0)}L_f$ uniformly on $\mathbb{R}^n$. That is, the Löwner s-functions of f can be considered as a reasonable extension of the Löwner function in the sense of [**LSW19**].

Probably, the most striking difference between the John s-functions and the Löwner s-functions appears in the case $s = +\infty$. We prove the following statement in Section 4.5.

Theorem 4.4. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be a an upper semi-continuous log-concave function of finite positive integral. Then the following assertions are equivalent:

(1) $\liminf\limits_{s \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_f < +\infty$;
(2) There exists a Gaussian density G such that $f \leqslant G$;
(3) There exists a unique solution to problem

$$\min_{\ell \in \mathcal{E}^n[\psi_{+\infty}]} \int_{\mathbb{R}^n} \ell \quad \text{subject to} \quad f \leqslant \ell. \tag{4.3}$$

Also, the Löwner s-functions of f converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to the solution to problem (4.3) as $s \to +\infty$.

This shows that the choice of $\psi_{+\infty}$ is reasonable indeed. Surprisingly enough, it was shown in [**IN20**] that the Gaussian density of maximal integral below a given upper semi-continuous log-concave function of positive integral is not necessarily unique.

By Theorem 2.6, the outer volume ratio of a convex body in $\mathbb{R}^n$ is at most $\Theta\sqrt{n}$ for some positive constant Θ. We extend this result to the setting of log-concave functions. That is, we bound the ratio of integrals of a function and its Löwner s-function. The following theorem is a corollary of Theorem 1.4 and extends it to Löwner s-functions with $s > 0$.

Theorem 4.5. Fix $s \in [0, +\infty)$. There exists Θ_s such that for any positive integer n and an upper semi-continuous log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ of finite integral, the following inequality holds:

$$\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_f}{\int_{\mathbb{R}^n} f} \right)^{1/n} \leqslant \Theta_s \sqrt{n}.$$

We prove Theorem 1.4 and Theorem 4.5 in Section 4.6 and discuss their interrelations with the notions of volume ratio and outer volume ratio.

Finally, in Section 4.7, the duality between John s-function introduced in [**IN20**] and our Löwner s-function is discussed.

4.1. Classes of ψ-ellipsoidal Functions

In this Section, we discuss the properties of existence of a solution to problem (1.2) in a broad sense. To establish the existence, we show in Lemma 4.1 that the set of parameters of problem (1.2) is a bounded set in a finite-dimensional linear space. This yields a compactness result, namely, the convergence of minimizing sequences (see Corollary 4.1). We also explain one of our tools, *interpolation* between the functions of the class $\mathcal{E}^n[\psi]$. We use this tool to show in Theorem 4.6 that all the solutions to problem (1.2) are necessarily translates of each other. We outline that the proof strategies of Lemma 4.1 and Theorem 4.6 are the same as the ones of Proposition 2.8 and Proposition 2.9.

4.1.1. Ellipsoids and Ellipsoidal Functions.

4.1.1.1. *Admissible Convex Functions.* Clearly, $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ is an admissible function if and only if ψ has the following properties:

- ψ is convex with minimum at zero (otherwise, $e^{-\psi(|t|)}$ is not log-concave);
- ψ is lower semi-continuous (otherwise, $e^{-\psi(|t|)}$ is not upper semi-continuous);
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = +\infty$ (otherwise, the integral of $e^{-\psi(|t|)}$ equals $+\infty$);
- $\operatorname{dom}\psi$ has positive measure (otherwise, the integral of $e^{-\psi(|t|)}$ equals zero).

Recall that a convex function is continuous (even locally Lipschitz) on the interior of the effective domain (see [**Cla90**, Proposition 2.2.6]).

We say that an admissible function ψ is *of linear growth* if inequality $\psi(t) \leqslant ct$ holds for some constant c and all $t \in [0,+\infty)$. By convexity, ψ is an admissible function of linear growth if and only if the limit $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\psi(t)}{t}$ exists and is finite. For example, ψ_s is an admissible function of linear growth for any $s \in [0,+\infty)$, as it is shown in Subsection 4.4.1.

Let $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ be a convex function. Since $e^{-\psi(t)+c} = e^c e^{-\psi(t)}$, we have that $\mathcal{E}^n[\psi] = \mathcal{E}^n[\psi+c]$ for any constant $c \in \mathbb{R}$. We will use this observation and assume sometimes that an admissible function is zero at zero.

4.1.1.2. *Classes of ellipsoidal functions.* We say that the functions of $\mathcal{E}^n[\psi]$ are *ψ-ellipsoidal* functions. If ψ is an admissible function, then all the functions of $\mathcal{E}^n[\psi]$ are proper log-concave functions.

Given $(A\oplus\alpha, a) \in \mathcal{E}^n$, we say that the ψ-ellipsoidal function on $\mathbb{R}^n$ defined by $x \mapsto \alpha\cdot e^{-\psi(|A(x-a)|)}$ is *represented* by $(A\oplus\alpha, a)$. We use $\ell_{\psi,\overline{E}}$ to denote the ψ-ellipsoidal function represented by $\overline{E} = (A\oplus\alpha, a) \in \mathcal{E}^n$. By definition, we have

$$\ell_{\psi,\overline{E}}(x) = \alpha\cdot \ell_{\psi,\mathbf{B}^{n+1}}(A(x-a))\,. \tag{4.4}$$

This simple identity plays a key role in our proofs.

By the polar decomposition theorem, any ψ-ellipsoidal function is represented by a unique element of $\mathcal{E}^n$. Thus,

$$\mathcal{E}^n[\psi] = \left\{\alpha e^{-\psi(|A(x-a)|)} : (A\oplus\alpha, a) \in \mathcal{E}^n\right\} = \left\{\ell_{\psi,\overline{E}} : (A\oplus\alpha, a) \in \mathcal{E}^n\right\}.$$

The number α is called the *height* of the ψ-ellipsoidal function $\ell_{\psi,(A\oplus\alpha,a)}$.

Remark 4.1. This identification of a ψ-ellipsoidal functions $\ell_{\psi,\overline{E}}$ with a point in $\mathcal{E}^n$ allows us to consider problem (1.2) as a problem on the finite-dimensional cone $\mathcal{E}^n$, which significantly simplifies questions of the existence of a minimizing sequence. Also, all the superlevel sets of

a ψ-ellipsoidal function are concentric similar ellipsoids. These two simple observations play a crucial role in our proofs.

We use $\lambda_n[\psi]$ to denote the integral of the ψ-ellipsoidal function represented by the unit Euclidean ball $\mathbf{B}^{n+1}$, that is,

$$\lambda_n[\psi] = \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\mathbf{B}^{n+1}}.$$

Clearly, $\lambda_n[\psi]$ is a positive number. Also, for an arbitrary $\overline{E} = (A \oplus \alpha, a) \in \mathcal{E}^n$, we have that

$$\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} = \frac{\alpha}{\det A} \cdot \lambda_n[\psi]. \tag{4.5}$$

4.1.1.3. *Classes of ψ_s-ellipsoidal functions.* We will use the following notations related to ψ_s to stress the fact that we restrict ourselves to the admissible functions ψ_s in the last four Sections:

- s-ellipsoidal function **instead of** ψ_s-ellipsoidal function (in case $s = +\infty$, we will say ∞-ellipsoidal omitting "+");
- ${}^{(s)}\ell_{\overline{E}}$ **instead of** $\ell_{\psi_s,\overline{E}}$;
- ${}^{(s)}\lambda_n$ **instead of** $\lambda_n[\psi]$.

That is, for any d-ellipsoid $\overline{E} \in \mathcal{E}^n$ and the s-ellipsoidal function ${}^{(s)}\ell_{\overline{E}}$, identity (4.5) takes the form

$$\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}\ell_{\overline{E}} = \frac{\alpha}{\det A}\, {}^{(s)}\lambda_n. \tag{4.6}$$

4.1.2. **Boundedness.** In this Subsection, we show that for any admissible function ψ, problem (1.2) can be considered as a finite-dimensional optimization problem on a bounded subset of $\mathcal{E}^n$, which implies the existence of a solution by compactness. That is, the proof of the existence is essentially the same as the proof of existence of the Löwner ellipsoid (see Proposition 2.9).

The main result of this Subsection is the following lemma.

Lemma 4.1. For any proper log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ and $\delta > 0$, there exist $\rho, \nu, \mu_1, \mu_2 > 0$ with the following property. If for an admissible function $\psi\colon [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty]$ with $\psi(0) = 0$ and $\overline{E} = (A \oplus \alpha, a) \in \mathcal{E}^n$ inequalities

$$f \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}} \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} \leqslant \delta$$

hold, then inequalities

$$|a| \leqslant \rho \quad \text{and} \quad \|f\| \leqslant \alpha \leqslant \nu \tag{4.7}$$

and

$$\mu_1 \frac{\lambda_n[\psi]}{(\lambda_1[\psi])^{d-1}} \cdot \mathrm{id}_n \prec A \prec \mu_2 \lambda_1[\psi] \cdot \mathrm{id}_n \tag{4.8}$$

hold.

Proof. Put $\Theta = \|f\|/2$ and consider the superlevel set $[f \geqslant \Theta]$. Since f is log-concave and has finite positive integral, $[f \geqslant \Theta]$ is a convex body in $\mathbb{R}^n$. Without loss of generality, we assume that $\vartheta\mathbf{B}^n \subset [f \geqslant \Theta]$ for some $\vartheta > 0$.

Since $f \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$, one sees that $[f \geqslant \Theta] \subset [\ell_{\psi,\overline{E}} \geqslant \Theta]$. By the log-concavity of $\ell_{\psi,\overline{E}}$ and since the maximum of $\ell_{\psi,\overline{E}}$ is attained at a, we have $\operatorname{conv}\{\vartheta\mathbf{B}^n, a\} \subset [\ell_{\psi,\overline{E}} \geqslant \Theta]$. Hence,

$$\delta \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} \geqslant \Theta \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\operatorname{conv}\{\vartheta\mathbf{B}^n,a\}} = \Theta \operatorname{vol}_n \operatorname{conv}\{\vartheta\mathbf{B}^n, a\} \geqslant \Theta \frac{\vartheta^{d-1} \operatorname{vol} d-1\mathbf{B}^{d-1}}{d} |a|$$

Thus, there exists $\rho > 0$ depending only on f and δ such that $|a| \leqslant \rho$.

Clearly, $\alpha \geqslant \|f\|$. We proceed with an upper bound on α. Using again the inclusion $\vartheta\mathbf{B}^n \subset [f \geqslant \Theta] \subset [\ell_{\psi,\overline{E}} \geqslant \Theta]$ and by symmetry, we conclude that $\vartheta\mathbf{B}^n + a \subset [\ell_{\psi,\overline{E}} \geqslant \Theta]$. Therefore, for all $x \in \vartheta\mathbf{B}^n$, we have

$$\ell_{\psi,\overline{E}}(x+a) \geqslant \ell_{\psi,\overline{E}}(a)^{1-\frac{|x|}{\vartheta}} \cdot \ell_{\psi,\overline{E}}\left(a + \vartheta\frac{x}{|x|}\right)^{\frac{|x|}{\vartheta}} \geqslant \alpha^{1-\frac{|x|}{\vartheta}} \cdot \Theta^{\frac{|x|}{\vartheta}} \geqslant \alpha \cdot \left(\frac{\Theta}{\alpha}\right)^{\frac{|x|}{\vartheta}}.$$

Therefore,

$$\delta \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} \geqslant \int_{\vartheta\mathbf{B}^n} \ell_{\psi,\overline{E}}(x+a)dx \geqslant \alpha \int_{\vartheta\mathbf{B}^n} \left(\frac{\Theta}{\alpha}\right)^{\frac{|x|}{\vartheta}} dx.$$

By routine computation, the right-hand side tends to $+\infty$ as $\alpha \to +\infty$. The existence of ν follows. This completes the proof of inequality (4.7).

We proceed with inequality (4.8). Let l be the line passing through a in the direction of an eigenvector of A corresponding to the eigenvalue $|.|_A$ Since $\vartheta\mathbf{B}^n + a \subset [\ell_{\psi,\overline{E}} \geqslant \Theta]$ and by (4.5), we have

$$2\Theta\vartheta \leqslant \int_l \ell_{\psi,\overline{E}} = \frac{\alpha}{\|A\|}\lambda_1[\psi] \leqslant \frac{\nu}{\|A\|}\lambda_1[\psi].$$

Thus, $\|A\| \leqslant \mu_2\lambda_1[\psi]$ for some $\mu_2 > 0$.

Let β be the smallest eigenvalue of A. Using the obtained bound on $\|A\|$ and identity (4.5), we get

$$\delta \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} = \frac{\alpha}{\det A}\lambda_n[\psi] \geqslant \frac{\alpha}{\|A\|^{d-1}\,\beta}\lambda_n[\psi] \geqslant \frac{\alpha}{(\mu_2\lambda_1[\psi])^{d-1}} \cdot \frac{1}{\beta}\lambda_n[\psi].$$

Thus, $\beta \geqslant \mu_1\lambda_n[\psi]/\lambda_1[\psi]^{d-1}$ for some $\mu_1 > 0$. This completes the proof. ■

As an immediate consequence of Lemma 4.1, we have

Corollary 4.1. Let $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ be an admissible function and let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be a proper log-concave function. If there exists $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ such that $f \leqslant \ell$, then there exists a solution to problem (1.2).

Proof. Assume there is $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ such that $f \leqslant \ell$. Setting $\delta = \int_{\mathbb{R}^n} \ell$ in the assertion of Lemma 4.1, one sees that the set of d-ellipsoids $(A \oplus \alpha, a)$ such that

$$f \leqslant \ell_{\psi,(A\oplus\alpha,a)} \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,(A\oplus\alpha,a)} \leqslant \delta$$

is non-empty and is contained in a closed and bounded subset of the finite-dimensional cone $\mathcal{E}^n$. Hence, there is a minimizing sequence $\{\overline{E}_i\}_1^{+\infty} \subset \mathcal{E}^n$ such that $f \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}_i}$ for all $i \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{i\to\infty} \overline{E}_i = \overline{E} \in \mathcal{E}^n, \quad \text{and} \quad \lim_{i\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_i} = \inf_{\ell\in\mathcal{E}^n[\psi]} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \ell : f \leqslant \ell \right\}.$$

Clearly, $f \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$. Thus, by (4.6), $\ell_{\psi,\overline{E}}$ is a solution to problem (1.2). ■

4.1.3. **Interpolation between ψ-ellipsoidal Functions.** In this Subsection, we show how to construct a ψ-ellipsoidal function, which is pointwise greater than or equal to a log-concave function f on $\mathbb{R}^n$, using two given ψ-ellipsoidal functions which are pointwise greater than or equal to f. We call the constructed function the *interpolated ψ-ellipsoidal function*. This construction is similar to the step of the proof of Proposition 2.9, where, given two minimal volume ellipsoids containing a given body, we constructed the third one. Then, using interpolation between ψ-ellipsoidal functions and following the proof strategy of Proposition 2.9, we show that the solutions to problem (1.2) are necessarily translates of each other.

Lemma 4.2 (Interpolated ψ-ellipsoidal function)**.** Let $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ be an admissible function. Let f_1 and f_2 be proper log-concave functions on $\mathbb{R}^n$. Let $\overline{E}_1 = (A_1 \oplus \alpha_1, a_1)$ and $\overline{E}_2 = (A_2 \oplus \alpha_2, a_2)$ be d-ellipsoids in $\mathcal{E}^n$ such that $f_1 \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}_1}$ and $f_2 \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}_2}$. Let $\beta_1, \beta_2 > 0$ be such that $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Put

$$A = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2, \quad \alpha = \alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}, \quad a = A^{-1}(\beta_1 A_1 a_1 + \beta_2 A_2 a_2) \quad \text{and} \quad \overline{E} = (A \oplus \alpha, a). \tag{4.9}$$

Then $\ell_{\psi,\overline{E}}$ satisfies the following inequalities:

$$f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}} \tag{4.10}$$

and

$$\int \ell_{\psi,\overline{E}} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1}\right)^{\beta_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1}\right)^{\beta_2}, \tag{4.11}$$

with equality in (4.11) if and only if $A_1 = A_2$.

Proof. Since $f_1 \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}_1}$ and $f_2 \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}_2}$, we have

$$f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \leqslant \left(\ell_{\psi,\overline{E}_1}\right)^{\beta_1} \left(\ell_{\psi,\overline{E}_2}\right)^{\beta_2}. \tag{4.12}$$

Since $\ell_{\psi,\mathbf{B}^{n+1}}$ is log-concave and $\beta_1 A_1(x-a_1) + \beta_2 A_2(x-a_2) = A(x-a)$, inequality

$$\ell_{\psi,\mathbf{B}^{n+1}}(A(x-a)) \geqslant (\ell_{\psi,\mathbf{B}^{n+1}}(A_1(x-a_1)))^{\beta_1} (\ell_{\psi,\mathbf{B}^{n+1}}(A_2(x-a_2)))^{\beta_2}$$

holds for all $x \in \mathbb{R}^n$. Using the identities (4.4) and $\alpha = \alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}$, we get $\left(\ell_{\psi,\overline{E}_1}\right)^{\beta_1} \left(\ell_{\psi,\overline{E}_2}\right)^{\beta_2} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$. This and inequality (4.12) imply inequality (4.10).

Using (4.5), we see that (4.11) is equivalent to inequality

$$\frac{\lambda_n[\psi]}{\det(\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2)} \leqslant \frac{\lambda_n[\psi]}{(\det A_1)^{\beta_1}(\det A_2)^{\beta_2}},$$

which is equivalent to

$$(\det A_1)^{\beta_1}(\det A_2)^{\beta_2} \leqslant \det(\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2).$$

That is, inequality (4.11) and the equality condition in it follow from Minkowski's determinant inequality (2.4) and the equality condition therein. ■

Lemma 4.2 and Corollary 4.1 imply

Theorem 4.6. Let $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ be an admissible function and let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be a proper log-concave function. If there exists $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ such that $f \leqslant \ell$, then there exists a solution to problem (1.2). Moreover, all solutions to this problem are translates of each other.

Proof. By Corollary 4.1, if the set $\{\ell \in \mathcal{E}^n[\psi] : f \leqslant \ell\}$ is non-empty, then the minimum in (1.2) is attained at some ψ-ellipsoidal function. Let $\overline{E}_1 = (A_1 \oplus \alpha_1, a_1)$ and $\overline{E}_2 = (A_2 \oplus \alpha_2, a_2)$ be d-ellipsoids in $\mathcal{E}^n$ such that $\ell_{\psi,\overline{E}_1}$ and $\ell_{\psi,\overline{E}_2}$ are solutions to problem (1.2).

Set $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$ and let $\overline{E}$ be given by (4.9). By the choice of the ellipsoids and Lemma 4.2, $\ell_{\psi,\overline{E}}$ is a ψ-ellipsoidal function such that $f \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$ and

$$\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_2}} = \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1}.$$

Hence, by the equality condition in (4.11), we have $A_1 = A_2$. Since the integrals of $\ell_{\psi,\overline{E}_1}$ and $\ell_{\psi,\overline{E}_2}$ are equal and by (4.5), we obtain $\alpha_1 = \alpha_2$. Hence, $\ell_{\psi,\overline{E}_1}$ and $\ell_{\psi,\overline{E}_2}$ are translates of each other. This completes the proof. ■

4.2. When is a Solution unique?

We investigate the question of uniqueness of a solution to problem (1.2). Given two functions $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{E}^n[\psi]$ that are translates of each other, we construct a special function $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ that satisfies two conditions: First, $\ell_1 \leqslant \ell$ and $\ell_2 \leqslant \ell$; second, ℓ is of smaller integral than that of the functions ℓ_1 or ℓ_2 (see Lemma 4.3 and Lemma 4.4). We note here that we use two different geometric ideas when the function ψ satisfies different conditions in Theorem 4.1. Using this construction, we immediately get the uniqueness result (see Theorem 4.7). We also show in Subsection 4.2.2 that there is no uniqueness of a solution if ψ does not satisfy either of the two conditions in Theorem 4.1.

Let ℓ_1 and ℓ_2 be two ψ-ellipsoidal function that are translates of each other. Summarizing the already proved results, we need to be able to "squeeze" a ψ-ellipsoidal function ℓ between ℓ_1 and ℓ_2 in such a way that $\int_{\mathbb{R}^n} \ell < \int_{\mathbb{R}^n} \ell_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \ell_2$ and $\min\{\ell_1, \ell_2\} \leqslant \ell$ to show the uniqueness of a solution to problem (1.2). We are able to find such an interpolation for two classes of admissible functions. They are the class of strictly increasing admissible functions and the class of admissible functions with bounded effective domain. We will prove the following two lemmas about interpolation between two translated ψ-ellipsoidal functions:

Lemma 4.3. Let $\psi\colon [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty]$ be a strictly increasing admissible function. Let $a_1 \neq a_2$ and let $\overline{E}_1 = (A \oplus \alpha, a_1)$ and $\overline{E}_2 = (A \oplus \alpha, a_2)$ be elements of $\mathcal{E}^n$. Then there exists $\overline{E} \in \mathcal{E}^n$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} < \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1} = \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_2} \quad \text{and} \quad \min\left\{\ell_{\psi,\overline{E}_1}, \ell_{\psi,\overline{E}_2}\right\} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}.$$

Lemma 4.4. Let $\psi\colon [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty]$ be an admissible function with bounded effective domain. Let $a_1 \neq a_2$ and let $\overline{E}_1 = (A \oplus \alpha, a_1)$ and $\overline{E}_2 = (A \oplus \alpha, a_2)$ be elements of $\mathcal{E}^n$. Then there exists $\overline{E} \in \mathcal{E}^n$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} < \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1} = \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_2} \quad \text{and} \quad \min\left\{\ell_{\psi,\overline{E}_1}, \ell_{\psi,\overline{E}_2}\right\} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}.$$

We use two different ideas of how to construct a ψ-ellipsoidal function $\ell_{\psi,\overline{E}}$ in these lemmas.

Before we proceed with the proofs of Lemmas 4.3 and 4.4, let us show how they imply the uniqueness result.

Theorem 4.7. Let $\psi\colon [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty]$ be an admissible function. Additionally, let ψ be a strictly increasing function or let the effective domain of ψ be bounded. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be a proper log-concave function. If there exists $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ such that $f \leqslant \ell$, then there exists a unique solution to problem (1.2).

Proof. Assume there exists $\ell \in \mathcal{E}^n[\psi]$ such that $f \leqslant \ell$. By Corollary 4.1, the solution to problem (1.2) exists. Assume that there are at least two different solutions ℓ_1 and ℓ_2. By construction, we have that $f \leqslant \min\{\ell_1, \ell_2\}$. This means that a ψ-ellipsoidal function ℓ such that $\min\{\ell_1, \ell_2\} \leqslant \ell$ also satisfies inequality $f \leqslant \ell$. By Theorem 4.6, the ψ-ellipsoidal functions ℓ_1 and ℓ_2 are translates of each other. Hence, by Lemma 4.3 (in case ψ is strictly increasing) and by Lemma 4.4 (in case ψ has bounded effective domain), ℓ_1 and ℓ_2 are not solutions to problem (1.2). This contradicts the choice of ℓ_1 and ℓ_2. ■

4.2.1. **Proofs of Lemma 4.3 and Lemma 4.4.** For the sake of simplicity, we assume that $\psi(0) = 0$. Without loss of generality, we assume that a_1 and a_2 are the opposite vectors, that is, $a_2 = -a_1 \neq 0$.

Set $a = -Aa_1$. One has $|A(x - a_1)| = |Ax + a|$ and $|A(x - a_2)| = |Ax - a|$. Consider the half-space $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, a\rangle \geqslant 0\}$. Clearly, for all $x \in H^+$,

$$|Ax + a|^2 = |Ax|^2 + 2\langle Ax, a\rangle + |a|^2 > |Ax|^2$$

and

$$|Ax+a|^2 = |Ax|^2 + 2\langle Ax, a\rangle + |a|^2 \geqslant |Ax|^2 - 2\langle Ax, a\rangle + |a|^2 = |Ax-a|^2. \tag{4.13}$$

By this and by monotonicity of ψ, we get

$$|Ax+a| - |Ax| > 0 \quad \text{and} \quad \ell_{\psi,\overline{E}_1}(x) \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}_2}(x) \quad \text{for all } x \in H^+. \tag{4.14}$$

Proof of Lemma 4.3. The idea of our construction is as follows. We consider ψ-ellipsoidal functions $\ell_{\psi,\overline{E}}$, where $\overline{E}$ is of the form $(\rho_1 A \oplus \rho_2\alpha, 0)$. Next, we find suitable $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$. That is, we decrease the height **and** the determinant of the matrix.

First, we construct ψ-ellipsoidal functions which satisfy the inequality $\min\left\{\ell_{\psi,\overline{E}_1}, \ell_{\psi,\overline{E}_2}\right\} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$.

Claim 4.1. Set

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2d}\inf\{\psi(|Ax+a|) - \psi(|Ax|)\}, \tag{4.15}$$

where the infimum is taken over $x \in H^+$ satisfying $\psi(|Ax|) \leqslant 2d$. Then $\varepsilon_1 > 0$ and for any $\varepsilon \in [0, \min\{\varepsilon_1, 1\})$, the ψ-ellipsoidal function $\ell_{\psi,\overline{E}}$ with

$$\overline{E} = \left((1-\varepsilon)A \oplus \alpha e^{-2d\cdot\varepsilon}, 0\right), \tag{4.16}$$

satisfies inequality $\min\left\{\ell_{\psi,\overline{E}_1}, \ell_{\psi,\overline{E}_2}\right\} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$.

Proof. Since $\ell_{\psi,\overline{E}}$ is even, $\ell_{\psi,\overline{E}_1}(x) = \ell_{\psi,\overline{E}_2}(-x)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$, and by (4.13), it suffices to prove inequality $\min\left\{\ell_{\psi,\overline{E}_1}, \ell_{\psi,\overline{E}_2}\right\} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$ only on H^+.

Let us show that $\varepsilon_1 > 0$. Since ψ is a convex function, for any $\tau, t > 0$, we have

$$\psi(\tau) = \psi(\tau) - \psi(0) \leqslant \psi(\tau + t) - \psi(t).$$

Hence, by this and by (4.14), $\psi(|Ax+a| - |Ax|) \leqslant \psi(|Ax+a|) - \psi(|Ax|)$ for all $x \in H^+$. Since ψ is a convex function and since $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t) = +\infty$, the set $\{x \in \mathbb{R}^n : \psi(|Ax|) \leqslant 2d\}$ is bounded. Clearly, $|Ax+a| - |Ax|$ is bounded from below by some positive constant on the bounded set $H^+ \cap \{x : \psi(|Ax|) \leqslant 2d\}$. Since ψ is strictly increasing, we conclude that $\varepsilon_1 > 0$.

Let us check inequality $\min\left\{\ell_{\psi,\overline{E}_1}, \ell_{\psi,\overline{E}_2}\right\} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$ on H^+. Using (2.2) and (4.14), we see that it suffices to prove that

$$\psi\left(|(1-\varepsilon)Ax|\right) + 2d\cdot\varepsilon \leqslant \psi(|Ax+a|) \quad \text{for all } x \in H^+.$$

Since ψ is a convex function, for any $\varepsilon \in [0,1)$, we have

$$\psi\left(|(1-\varepsilon)Ax|\right) \leqslant (1-\varepsilon)\psi(|Ax|) + \varepsilon\psi(0) = (1-\varepsilon)\psi(|Ax|).$$

Therefore, it suffices to show that

$$(1-\varepsilon)\psi(|Ax|) + 2d\cdot\varepsilon \leqslant \psi(|Ax+a|) \quad \text{for all } x \in H^+. \tag{4.17}$$

Consider three cases. First, if $\psi(|Ax|) = +\infty$ for $x \in H^+$, then $\psi(|Ax+a|) = +\infty$. Therefore, inequality (4.17) trivially holds in this case. Second, since $|Ax+a| > |Ax|$ for any $x \in H^+$, inequality (4.17) holds for any non-negative ε and any x in $\{y \in H^+ : \psi(|Ay|) \geqslant 2d\}$. Third, consider $x \in \{y \in H^+ : \psi(|Ay|) \leqslant 2d\}$. Then inequality (4.17) takes the form

$$\varepsilon(2d - \psi(|Ax|)) \leqslant \psi(|Ax+a|) - \psi(|Ax|). \tag{4.18}$$

Set

$$\varepsilon_0 = \inf_{x\in H^+ : \psi(|Ax|)\leqslant 2d}\left\{\frac{\psi(|Ax+a|) - \psi(|Ax|)}{2d - \psi(|Ax|)}\right\}.$$

We see that inequality (4.18) holds for any $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Hence, inequality (4.17) holds for any $\varepsilon \in [0, \min\{1, \varepsilon_0\}]$ and any $x \in H^+$. Clearly, $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_1$. By symmetry, ε_1 given by (4.15) satisfies the required property. This proves the Claim. ■

Using (4.5) with $\overline{E}$ given by (4.16), we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} = \frac{e^{-2d\cdot\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^d} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1}.$$

However, since $\frac{e^{-2d\cdot\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^d} < 1$ for any $\varepsilon \in (0, 1/2]$, we conclude that $\int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}} < \int_{\mathbb{R}^n} \ell_{\psi,\overline{E}_1}$ for a sufficiently small positive ε. This completes the proof of Lemma 4.3. ■

Proof of Lemma 4.4. Here we use the same idea as in the setting of convex sets, that is, if the set $(\mathbf{B}^n + a_1) \cap (\mathbf{B}^n + a_2)$ with $a_1 \neq a_2$ is non-empty, then it is a subset of $\rho\mathbf{B}^n + \frac{a_1+a_2}{2}$ for some $\rho \in (0, 1)$. We apply this observation for the superlevel sets of ψ-ellipsoidal functions and consider ψ-ellipsoidal functions $\ell_{\psi,\overline{E}}$, where $\overline{E}$ is of the form $(A_1 \oplus \alpha, 0)$ with $A \prec A_1$. The boundedness of the effective domain allows us to show that there exists a suitable A_1.

Denote $\delta = |a|$. Let $[0, \tau]$ be the closure of $\operatorname{dom}\psi$. We have that $\operatorname{supp}\ell_{\psi,\overline{E}_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |Ax + a| \leqslant \tau\}$. Hence, the interiors of supports of $\ell_{\psi,\overline{E}_1}$ and $\ell_{\psi,\overline{E}_2}$ do not intersect if $\delta \geqslant \tau$. Thus, any $\overline{E}$ of the form $(\rho A \oplus \alpha, 0)$ with any $\rho > 1$ suits us in this case.

Assume that $\delta < \tau$. Choose an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$ such that the first vector of the basis is in the direction of the vector a. We claim that the function $\ell_{\psi,\overline{E}}$ with

$$\overline{E} = (MA \oplus \alpha, 0), \quad \text{where} \quad M = \operatorname{diag}\left\{\frac{\tau}{\tau-\delta}, 1, \dots, 1\right\},$$

satisfies the condition of the lemma.

The bound on the integral of $\ell_{\psi,\overline{E}}$ trivially holds.

Let us check inequality $\min\left\{\ell_{\psi,\overline{E}_1}, \ell_{\psi,\overline{E}_2}\right\} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$. By (2.2) and (4.14), it suffices to prove that

$$\psi\left(|MAx|\right) \leqslant \psi(|Ax + a|) \quad \text{for all } x \in H^+ \cap \operatorname{supp}\ell_{\psi,\overline{E}_1}. \tag{4.19}$$

Since an admissible function is increasing on its domain, inequality (4.19) follows from the following:

$$|MAx| \leqslant |Ax + a| \quad \text{for all } x \in H^+ \cap \{v \in \mathbb{R}^n : |Av + a| \leqslant \tau\}. \tag{4.20}$$

Indeed, denote $y = Ax$ and let $y = \lambda a + z$, where z is orthogonal to a. We have

$$|My|^2 = |M(\lambda a + z)|^2 = \left|\frac{\tau}{\tau-\delta}\lambda a + z\right|^2 = \left(\frac{\tau}{\tau-\delta}\right)^2 \lambda^2\delta^2 + |z|^2$$

and $|y + a|^2 = (1 + \lambda)^2\delta^2 + |z|^2$. Since $\lambda \geqslant 0$ for $x \in H^+$, inequality (4.20) is equivalent to

$$\frac{\tau}{\tau-\delta}\lambda \leqslant 1 + \lambda,$$

which trivially holds since $(1+\lambda)\delta \leqslant |y + a| = |Ax + a| \leqslant \tau$. Thus, inequality (4.19) holds. We conclude that $\min\left\{\ell_{\psi,\overline{E}_1}, \ell_{\psi,\overline{E}_2}\right\} \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$, completing the proof of Lemma 4.4. ■

4.2.2. **Chimeras.** Let $\psi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ be an admissible function which takes only finite values and is constant on some interval $[0, \tau], \tau > 0$. We claim that, given such an admissible function and a log-concave function f, a solution to problem (1.2) is not necessarily unique, which we show in the following example. For simplicity, we assume that $\psi(0) = 0$.

Example 4.1. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be given by $f = \min\left\{\ell_{\psi,(\mathrm{id}_n\oplus 1,-c)}, \ell_{\psi,(\mathrm{id}_n\oplus 1,c)}\right\}$, where $|c| = \tau$. Then the functions of the form $\ell_{\psi,(\mathrm{id}_n\oplus 1,\rho c)}$ with $|\rho| \leqslant 1$ are solutions to problem (1.2).

PROOF. By monotonicity of the Euclidean norm, we see that any function of the form $\ell_{\psi,(\mathrm{id}_n\oplus 1,\rho c)}$ with $|\rho| \leqslant 1$ satisfies inequality $f \leqslant \ell_{\psi,(\mathrm{id}_n\oplus 1,\rho c)}$. Thus, we need to show that these functions are of minimal integral.

Let $(A\oplus\alpha, a) \in \mathcal{E}^n$ be such that $f \leqslant \ell_{\psi,(A\oplus\alpha,a)}$. Since $f(0) = 1$, we conclude that $\alpha \geqslant 1$. By this and by (4.5), it suffices to show that $|\leqslant|_A 1$. Assume the contrary: There is an eigenvalue λ of A such that $\lambda > 1$. Denote by u a unit eigenvector corresponding to λ such that $\langle u, c\rangle \geqslant 0$. Then, for all $\xi > 0$, the following inequality holds:

$$\alpha e^{-\psi(|\lambda\xi u - Aa|)} \geqslant e^{-\psi(|\xi u + c|)},$$

or, equivalently,

$$\psi(|\xi u + c|) - \psi(|\lambda\xi u - Aa|) \geqslant -\ln\alpha. \tag{4.21}$$

By convexity of ψ, the left-hand side in (4.21) is at most $-\psi(|\lambda\xi u - Aa| - |\xi u + c|)$. Since $\lambda > 1$, one has that $|\lambda\xi u - Aa| - |\xi u + c| \to +\infty$ as $\xi \to +\infty$. Thus, the left-hand side in (4.21) is strictly less than $-\ln\alpha$ for a sufficiently large ξ. We obtain a contradiction. ■

4.3. When does a Solution Exist?

In this Section, we address the question of existence of a solution to problem (1.2). By Corollary 4.1, it suffices to find one ψ-ellipsoidal function ℓ such that $f \leqslant \ell$. This is a simple technical question.

Example 4.2. Let $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ be an admissible function which is not of linear growth. Then for any $d \in \mathbb{N}$, the set

$$\left\{\ell \in \mathcal{E}^n[\psi] : e^{-|x|} \leqslant \ell\right\}$$

is empty.

In Lemma 4.6, we prove that if $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ is an admissible function of linear growth, then for any proper log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$, there is a ψ-ellipsoidal function ℓ such that $f \leqslant \ell$. Next, we bound the norm of the maximizers of (1.2) in Lemma 4.7, and complete the proof of Theorem 4.1.

4.3.1. Existence of a "Covering".

Lemma 4.5. Let $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ be an admissible function and $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be a proper log-concave function. If there exists $\overline{E} \in \mathcal{E}^n$ such that $f \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}}$, then for an arbitrary $\alpha > \|f\|$, there exists $(A\oplus\alpha, a) \in \mathcal{E}^n$ such that $f \leqslant \ell_{\psi,(A\oplus\alpha,a)}$.

PROOF. Without loss of generality, we assume that $\overline{E} = \mathbf{B}^{n+1}$ and $\psi(0) = 0$. Case $\alpha > 1$ is trivial. Consider $\|f\| < \alpha < 1$. Put $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ell_{\psi,(1/2\cdot\mathrm{id}_n\oplus\alpha,0)} \leqslant \ell_{\psi,\mathbf{B}^{n+1}}\}$. Since ψ is convex and admissible, it follows that S is bounded. Clearly, for a sufficiently small $\rho \in (0,1/2)$, we have $\|f\| \leqslant \ell_{\psi,(\rho\cdot\mathrm{id}_n\oplus\alpha,0)}(x)$ for all $x \in S$. By monotonicity, $\ell_{\psi,(1/2\cdot\mathrm{id}_n\oplus\alpha,0)} \leqslant \ell_{\psi,(\rho\cdot\mathrm{id}_n\oplus\alpha,0)}$. Thus, by construction, $f \leqslant \ell_{\psi,(\rho\cdot\mathrm{id}_n\oplus\alpha,0)}$. ■

Lemma 4.6. Let $\psi\colon [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty]$ be an admissible function of linear growth with $\psi(0) = 0$ and $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be a proper log-concave function. Then for any $(A\oplus\alpha, a) \in \mathcal{E}^n$ with $\alpha > \|f\|$, there exists $\gamma > 0$ such that $f \leqslant \ell_{\psi,(\gamma A\oplus\alpha,a)}$.

PROOF. By monotonicity of ψ, it suffices to prove the lemma for $A = \mathrm{id}$. Without loss of generality, we assume that $a = 0$. It is known that (see [BGVV14, Lemma 2.2.1]) for any proper log-concave function f on $\mathbb{R}^n$, there are $\Theta, \vartheta > 0$ such that

$$f(x) \leqslant \Theta e^{-\vartheta|x|}, \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

On the other hand, since ψ is convex and of linear growth, there are $\gamma_1 > 0$ and $C > 0$ such that

$$\Theta e^{-\vartheta|x|} \leqslant \alpha e^{-\psi(\gamma_1|x|)} \quad \text{for all } x \text{ such that } |x| > C.$$

By monotonicity of ψ, this inequality holds for all $\gamma \in (0, \gamma_1)$.

However, by continuity, there exists $\gamma_2 > 0$ such that inequality

$$\|f\| \leqslant \alpha e^{-\psi(\gamma_2|x|)} \text{ holds for all } x \text{ such that } |x| \leqslant C.$$

That is, $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$ satisfies the required property. ■

As an immediate consequence of Corollary 4.1 and Lemma 4.6, we get the following.

Corollary 4.2. Let $\psi\colon [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty]$ be an admissible function of linear growth. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be a proper log-concave function. Then there exists a solution to problem (1.2).

4.3.2. **Bound on the Height.** The following result is an extension of the analogous result from [**IN20**] about the John s-function with a similar proof. The idea of the proof can be traced back to [**AGMJV18**].

Lemma 4.7. Let $\psi\colon [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty]$ be an admissible function and $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be a proper log-concave function. Then for a solution L to problem (1.2), we have

$$\|L\| \leqslant e^n \|f\|. \tag{4.22}$$

Proof of Lemma 4.7. Without loss of generality, we assume that $\psi(0) = 0$. There is nothing to prove if $\|f\| = \|L\|$. Assume $\|f\| < \|L\|$. We define a function $\Psi\colon (\|f\|, +\infty) \to [0, +\infty)$ as follows. Let $\alpha > \|f\|$. By Lemma 4.5, there exists $\overline{E}_\alpha = (A_\alpha \oplus \alpha, a) \in \mathcal{E}^n$ such that $f \leqslant \ell_{\psi,\overline{E}_\alpha}$. By Lemma 4.1 and by compactness, we may assume that $\ell_{\psi,\overline{E}_\alpha}$ is of minimal integral among ψ-ellipsoidal functions ℓ of height α and such that $f \leqslant \ell$. Put $\Psi(\alpha) = \det A_\alpha$. The function Ψ is well-defined. Indeed, by (4.5), we have that the determinants of matrices that correspond to two different ψ-ellipsoidal functions with the same heights and the same integrals, are equal.

Claim 4.2. For any $\alpha_1, \alpha_2 \in (\|f\|, +\infty)$ and $\lambda \in [0, 1]$, we have

$$\Psi\big(\alpha_1^\lambda \alpha_2^{1-\lambda}\big)^{1/n} \geqslant \lambda \Psi(\alpha_1)^{1/n} + (1-\lambda)\Psi(\alpha_2)^{1/n}. \tag{4.23}$$

Proof. Let $(A_1 \oplus \alpha_1, a_1), (A_2 \oplus \alpha_2, a_2) \in \mathcal{E}^n$ be such that

$$f \leqslant \ell_{\psi,(A_1\oplus\alpha_1,a_1)} \quad \text{and} \quad f \leqslant \ell_{\psi,(A_2\oplus\alpha_2,a_2)},$$

and

$$\Psi(\alpha_1) = \det A_1 \quad \text{and} \quad \Psi(\alpha_2) = \det A_2.$$

By the definition of the function Ψ, Lemma 4.2 and identity (4.5), we have that

$$\Psi\big(\alpha_1^\lambda \alpha_2^{1-\lambda}\big) \geqslant \det\left(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2\right).$$

Now, (4.23) follows immediately from Minkowski's determinant inequality (2.3). This proves the Claim. ■

Set $\Phi(t) = \Psi(e^t)^{1/n}$ for all $t \in (\log\|f\|, +\infty)$. Inequality (4.23) implies that Φ is a concave function on its domain.

Let α_0 be the height of L. Then, by (4.5), for any α in the domain of Ψ, we have that

$$\frac{\alpha_0}{\Psi(\alpha_0)} \leqslant \frac{\alpha}{\Psi(\alpha)}.$$

Setting $t_0 = \log \alpha_0$ and taking the root of order n, we obtain

$$\Phi(t) \leqslant \Phi(t_0) e^{\frac{1}{n}(t-t_0)}$$

for any t in the domain of Φ. The expression on the right-hand side is a convex function of t, while Φ is a concave function. Since these functions take the same value at $t = t_0$, we conclude that the graph of Φ lies below the tangent line to the graph of $\Phi(t_0)e^{\frac{1}{n}(t-t_0)}$ at the point t_0. That is,

$$\Phi(t) \leqslant \Phi(t_0) \left(1 + \frac{1}{n}(t - t_0)\right).$$

Passing to the limit as $t \to \log \|f\|$ and since the values of Φ are positive, we get

$$0 \leqslant 1 + \frac{\log \|f\|}{n} - \frac{t_0}{n},$$

or, equivalently, $t_0 \leqslant n + \log \|f\|$. Therefore, $\alpha_0 = \|L\| \leqslant e^n \|f\|$. This completes the proof of Lemma 4.7. ■

4.3.3. **Proof of Theorem 4.1.** Since $\mathcal{E}^n[\psi] = \mathcal{E}^n[\psi + c]$ for any constant c, Theorem 4.1 is an immediate consequence of Theorem 4.7 and Lemma 4.7.

4.4. Classes of s-ellipsoidal Functions

In Section 4.4, we restrict ourselves to the function ψ_s, $s \in [0, +\infty)$ and discuss their properties. We recall the definition of John s-functions introduced in [**IN20**]. Using the Legendre transform, we obtain several simple properties of the function ψ_s and show that problem (1.2) and the problem considered in [**IN20**] are dual. This explains our motivation for introducing the function ψ_s. We prove Theorem 4.2 and discuss the properties of Löwner s-functions. Next, we consider the limit case as $s \to 0$ and prove Theorem 4.3.

4.4.1. **Basic Properties of s-ellipsoidal Functions and the John s-Functions.** Recall that for any $\overline{E} = (A \oplus \alpha, a) \in \mathcal{E}^n$ and any $s \in (0, +\infty)$, the s-ellipsoidal function ${}^{(s)}\ell_{\overline{E}}$ is given by

(4.24)

$${}^{(s)}\ell_{\overline{E}}(x) = \alpha e^{-\psi_s(|A(x-a)|)} = \alpha \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{s^2}|A(x-a)|^2}}{2} \cdot \exp\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{s^2}|A(x-a)|^2}\right)\right]^{s/2}.$$

However, we have not shown that ψ_s is an admissible function. To avoid boring computations, we show the basic properties of s-ellipsoidal functions using their log-conjugate functions. At the same time, we reveal the duality between our definition of Löwner s-function and the definition of John s-function introduced in [**IN20**].

For any d-ellipsoid $\overline{E} = (A \oplus \alpha, a) \in \mathcal{E}^n$ and any $s > 0$, define

$${}^{(s)}h_{\overline{E}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\left[1 - |A^{-1}(x-a)|^2\right]^{s/2}, & \text{if } x \in A\mathbf{B}^n + a \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The geometric sense of this function is as follows. The graph of ${}^{(1)}h_{(A\oplus\alpha,a)}$ restricted to its support coincides with the upper hemisphere of the d-ellipsoid $(A \oplus 1/\alpha)\mathbf{B}^{n+1} + a$. It follows that ${}^{(s)}h_{\overline{E}} \leqslant f$ if and only if the d-ellipsoid $(A \oplus 1/\alpha)\,\mathbf{B}^{n+1} + a$ is contained within the subgraph of $f^{1/s}$. Another consequence of the observation that ${}^{(1)}h_{\overline{E}}$ is a "height" function of the d-ellipsoid is that ${}^{(1)}h_{\overline{E}}$ is concave on its support. Hence, ${}^{(s)}h_{\overline{E}}$ is log-concave. Clearly, ${}^{(s)}h_{\overline{E}}$ is a proper log-concave function.

For a d-ellipsoid $\overline{E} = (A \oplus \alpha, a) \in \mathcal{E}^n$, we put

$$ {}^{(0)}h_{\overline{E}} = \frac{1}{\alpha}\chi_{A\mathbf{B}^n+a} \quad \text{and} \quad {}^{(+\infty)}h_{\overline{E}} = \frac{1}{\alpha}e^{-\left|A^{-1}(x-a)\right|^2}. $$

The authors of [**IN20**] consider the problem

$$ \max_{\overline{E}\in\mathcal{E}^n} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}h_{\overline{E}} \quad \text{subject to} \quad {}^{(s)}h_{\overline{E}} \leqslant f; \tag{4.25} $$

and show that for any fixed $s \in [0, +\infty)$ the solution to this problem exists and is unique [**IN20**, Theorems 4.5 and 7.3] for any proper log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$. The case $s = 0$ was studied earlier in [**AGMJV18**]. For a proper log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, we call the unique solution to problem (4.25) the *John s-function* of f and denote it by ${}^{(s)}J_f$.

In the next lemma we prove that for any $s \in [0, +\infty]$, the affine classes $\left\{{}^{(s)}h_{\overline{E}} : \overline{E} \in \mathcal{E}^n\right\}$ and $\mathcal{E}^n[\psi_s] = \left\{{}^{(s)}\ell_{\overline{E}} : \overline{E} \in \mathcal{E}^n\right\}$ are the affine classes of two functions polar to each other. That is, problems (4.25) and (4.2) are dual. This gives us a reason for considering the classes of s-ellipsoidal functions.

Lemma 4.8. Let $\overline{E} = (A \oplus \alpha, 0) \in \mathcal{E}^n$ and $s \in [0, +\infty]$. Then

$$ \left({}^{(s)}h_{\overline{E}}\right)^\circ = {}^{(s)}\ell_{\overline{E}} \quad \text{and} \quad \left({}^{(s)}\ell_{\overline{E}}\right)^\circ = {}^{(s)}h_{\overline{E}}. \tag{4.26} $$

Before we prove this lemma, let us mention several corollaries. First, it follows that for any $s \in [0, +\infty]$, ψ_s is indeed a strictly increasing admissible function, and s-ellipsoidal functions are proper log-concave functions. Moreover, as the support of ${}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}}$ is bounded for any $s \in [0, +\infty)$, we conclude that ψ_s is of linear growth for any $s \in [0, +\infty)$. Also, we will need the following simple observations. For any $\overline{E} \in \mathcal{E}^n$, we have

$$ \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}h_{\overline{E}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}\ell_{\overline{E}} = \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}. \tag{4.27} $$

Clearly, ${}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}}(x)$ is a strictly decreasing function of s on $[0, +\infty)$ for any fixed $x \in \mathbf{B}^n \setminus \{0\}$. By this and Assertion 4 of Proposition 2.6, we have that

(4.28) ${}^{(s)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}(x)$ is a strictly increasing function of s on $[0, +\infty)$ for any fixed $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Proof of Lemma 4.8. Identities (4.26) are trivial in the two cases $s = 0$ and $s = +\infty$. Assume $s \in (0, +\infty)$. By the definitions, for any log-concave function f and any positive definite matrix A, we have $(f \circ A)^\circ = f^\circ \circ A^{-1}$. Thus, it suffices to consider $\overline{E} = \mathbf{B}^{n+1}$. Consider $f = \left({}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}}\right)^{2/s} = 1 - |x|^2$, where $|x| < 1$, then

$$ f^\circ(y) = \inf_{|x|<1} \frac{e^{-\langle x,y\rangle}}{1-|x|^2} = \inf_{t\in[0,1)} \frac{e^{-t|y|}}{1-t^2} = \frac{1+\sqrt{1+|y|^2}}{2} \exp\left(1-\sqrt{1+|y|^2}\right). $$

Again, by the definition of the log-conjugate function, we have $(f^q)^\circ(x) = [f^\circ(x/q)]^q$ for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $q > 0$. Thus, we prove the leftmost identity in (4.26), which implies the rightmost identity. ■

4.4.2. **Löwner s-functions.** We proved all the required results to understand the properties of existence and uniqueness of a solution to problem (4.2).

Proof of Theorem 4.2. The result follows from Corollary 4.2, Theorem 4.7 and the fact that ψ_s is a strictly increasing admissible function of linear growth for a fixed $s \in [0, +\infty)$. ■

The following lemma says that for fixed s_1 and s_2, the integrals of the Löwner functions ${}^{(s_1)}L_f$ and ${}^{(s_2)}L_f$ are bounded by each other.

Note that by (4.28), ${}^{(s)}\lambda_n$ is an increasing function of $s \in [0, +\infty)$. By simple computation, we have ${}^{(0)}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} = n! \operatorname{vol}_n \mathbf{B}^n$. Actually, ${}^{(s)}\lambda_n$ can be computed using hypergeometric functions. Changing to spherical coordinates, by straightforward computations one can obtain

$$ {}^{(s)}\lambda_n = \pi^{n/2} s^n \left(nU\Big(\frac{n}{2}+1; n+\frac{s}{2}+1; s\Big) + U\Big(\frac{n}{2}; n+\frac{s}{2}+1; s\Big)\right), $$

where $U(a; b; z)$ is the *hypergeometric Tricomi* function defined by

$$ U(a; b; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} v^{a-1}(v+1)^{b-a-1} e^{-zv} dv. $$

We omit the computations since we do not use this representation of ${}^{(s)}\lambda_n$ in our proofs.

Lemma 4.9. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be a proper log-concave function and $0 \leqslant s_1 < s_2 < +\infty$. Then

$$ \frac{{}^{(s_1)}\lambda_n}{{}^{(s_2)}\lambda_n} \leqslant \frac{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_1)}L_f}{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_2)}L_f} \leqslant \sqrt{\left(\frac{n+s_2}{s_2}\right)^{s_2} \left(\frac{n+s_2}{n}\right)^{n}} \cdot \frac{{}^{(s_1)}\lambda_n}{{}^{(s_2)}\lambda_n}. \tag{4.29} $$

Proof. We prove the leftmost inequality in (4.29) first. Without loss of generality, assume that ${}^{(s_1)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}$ is the Löwner s_1-function of f. By (4.28), we have that $f \leqslant {}^{(s_2)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}$. Hence, $\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_2)}L_f \leqslant {}^{(s_2)}\lambda_n$. The leftmost inequality in (4.29) follows.

Now, we prove the rightmost inequality in (4.29). Assume that ${}^{(s_2)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}$ is the Löwner s_2-function of f. For a fixed $\rho \in (0, 1)$, consider

$$ \overline{E}_\rho = \left(\rho \cdot \mathrm{id}_n \oplus \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)^{-s_2}, 0\right). $$

We claim that ${}^{(s_2)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}} \leqslant {}^{(s_1)}\ell_{\overline{E}_\rho}$ for all $\rho \in (0, 1)$. By Assertion 4 of Proposition 2.6 and by (4.26), it is equivalent to the inequality ${}^{(s_1)}h_{\overline{E}_\rho} \leqslant {}^{(s_2)}h_{\mathbf{B}^{n+1}}$. Since for any $\rho \in (0, 1)$ the cylinder $\rho\mathbf{B}^n \times \left[0, \sqrt{1-\rho^2}\right]$ is contained in $\mathbf{B}^{n+1}$, we conclude that

$$ {}^{(s_1)}h_{\overline{E}_\rho} \leqslant \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)^{s_2} \cdot \chi_{\rho\mathbf{B}^n} = \left(\sqrt{1-\rho^2} \cdot \chi_{\rho\mathbf{B}^n}\right)^{s_2} \leqslant \left({}^{(1)}h_{\mathbf{B}^{n+1}}\right)^{s_2} = {}^{(s_2)}h_{\mathbf{B}^{n+1}}. $$

Thus, ${}^{(s_2)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}} \leqslant {}^{(s_1)}\ell_{\overline{E}_\rho}$ for all $\rho \in (0, 1)$. Therefore, $f \leqslant {}^{(s_1)}\ell_{\overline{E}_\rho}$ and $\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_1)}L_f \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_1)}\ell_{\overline{E}_\rho}$. Using (4.6) with $\rho = \sqrt{\frac{n}{n+s_2}}$, we obtain

$$ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_1)}L_f}{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_2)}L_f} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_1)}L_f}{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_2)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}} \leqslant \frac{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_1)}\ell_{\overline{E}_\rho}}{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_2)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}} = \sqrt{\left(\frac{n+s_2}{s_2}\right)^{s_2} \left(\frac{n+s_2}{n}\right)^{n}} \cdot \frac{{}^{(s_1)}\lambda_n}{{}^{(s_2)}\lambda_n}. $$

■

4.4.3. **The Limit as $s \to 0$.** In this Subsection, we prove Theorem 4.3.

Proof of Theorem 4.3. Let the Löwner s-function ${}^{(s)}L_f$ be represented by $(A_s \oplus \alpha_s, a_s) \in \mathcal{E}^n$ for every $s \in [0, 1]$. Clearly, it suffices to show that

$$ \lim_{s \to 0+} (A_s \oplus \alpha_s, a_s) = (A_0 \oplus \alpha_0, a_0). \tag{4.30} $$

Assume the contrary. Consider the set $\{(A_s \oplus \alpha_s, a_s)\}_{s \in [0,1]}$. By Lemma 4.9, we see that the integrals of ${}^{(s)}L_f$ for $s \in [0, 1]$ are bounded from above by some finite constant. By monotonicity,

$\left\{{}^{(s)}\lambda_n\right\}_{s\in[0,1]} \subset \left[{}^{(0)}\lambda_n, {}^{(1)}\lambda_n\right]$ for any $n \in \mathbb{N}$. Thus, applying Lemma 4.1 for $\psi = \psi_s$, $s \in [0,1]$, we get that the set $\{(A_s \oplus \alpha_s, a_s)\}_{s\in[0,1]}$ is contained in a closed and bounded subset of the finite-dimensional cone $\mathcal{E}^n$. It follows that if identity (4.30) does not hold, then there exists a sequence of positive numbers $\{s_i\}_1^{+\infty}$ with $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = 0$ such that

$$\lim_{i\to\infty}(A_{s_i} \oplus \alpha_{s_i}, a_{s_i}) = (A \oplus \alpha, a) \in \mathcal{E}^n \quad \text{and} \quad (A \oplus \alpha, a) \neq (A_0 \oplus \alpha_0, a_0).$$

Clearly, we have that

$$f \leqslant {}^{(0)}\ell_{(A\oplus\alpha,a)} \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(0)}\ell_{(A\oplus\alpha,a)} = \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_i)}L_f. \tag{4.31}$$

By (4.28), we have $f \leqslant {}^{(s)}\ell_{(A_0\oplus\alpha_0,a_0)}$ for any positive s. This and (4.31) imply that

$$\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(0)}\ell_{(A\oplus\alpha,a)} = \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_i)}L_f \leqslant \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_i)}\ell_{(A_0\oplus\alpha_0,a_0)} = \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(0)}L_f.$$

This contradicts the choice of ${}^{(0)}L_f$ since the function ${}^{(0)}L_f$ is the unique minimizer of (4.2) with $s = 0$. ■

4.5. Gaussian Densities. The Limit as $s \to +\infty$

In this Section, we prove Theorem 4.4. That is, we show that the limit of ψ_s-functions as s tends to $+\infty$ may be only a Gaussian density, which motivates our choice of the function $\psi_{+\infty}$.

4.5.1. **Basic Identities.** For any positive definite matrix A, we have

$$\left(e^{-\left|A^{-1}x\right|^2}\right)^\circ = e^{-\frac{1}{4}|Ax|^2}. \tag{4.32}$$

By direct computations, we find that

$$\lim_{s\to+\infty} \psi_s\left(\sqrt{s}\cdot t\right) = \frac{t^2}{2} \quad \text{for any } t \in [0,+\infty). \tag{4.33}$$

This implies that the functions ${}^{(s)}\ell_{(\sqrt{s}\cdot\mathrm{id}_n\oplus 1,0)}$ converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to $e^{-|x|^2/2}$ as $s \to +\infty$. By this and using assertion (1) of Lemma 2.2, we have

$$\lim_{s\to+\infty} {}^{(s)}\lambda_n \cdot s^{-d/2} = (2\pi)^{d/2}. \tag{4.34}$$

As an immediate consequence of Lemma 4.1 and identity (4.34), we obtain

Corollary 4.3. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be a proper log-concave function such that there is a sequence $\{s_i\}_1^{+\infty}$ of positive numbers with $\lim\limits_{i\to+\infty} s_i = +\infty$ and

$$\lim_{i\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_i)}L_f = \lambda < +\infty.$$

Further, let $(A_s \oplus \alpha_s, a_s)$ represent the Löwner s-function of f, $s \in [0,+\infty)$. Then inequality

$$\rho_1 \cdot \mathrm{id}_n \prec \frac{A_{s_i}}{\sqrt{s_i}} \prec \rho_2 \cdot \mathrm{id}_n$$

holds for some positive ρ_1, ρ_2 and all $i \in \mathbb{N}$.

Using (4.26) in assertion (2) of Lemma 2.2, we conclude that ${}^{(s)}h_{\left(\sqrt{s}\cdot \mathrm{id}_n \oplus 1,0\right)}(x) \to e^{-|x|^2/2}$. Again, by assertion (1) of Lemma 2.2, we get

$$\lim_{s\to+\infty} s^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}} = (2\pi)^{n/2}.$$

Thus, we conclude that

$$\lim_{s\to+\infty} {}^{(s)}\lambda_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}} = (2\pi)^{n}. \tag{4.35}$$

For any $(A \oplus \alpha, a) \in \mathcal{E}^n$, identity (4.6) gives

$$\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(+\infty)}\ell_{(A\oplus\alpha,a)} = \alpha \frac{\pi^{n/2}}{\det A}. \tag{4.36}$$

4.5.2. **Limits of Centered Sequences.**

Lemma 4.10. Let $\{s_i\}_1^{+\infty}$ be a sequence of positive scalars such that $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = +\infty$, let $\{A_i\}_1^{+\infty}$ be a sequence of positive definite matrices with $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{A_i}{\|A_i\|} = A$, where A is positive definite, and let the ellipsoids $\overline{E}_i$, represented by $(A_i \oplus 1, 0)$ satisfy $\lim\limits_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_i)}\ell_{\overline{E}_i} = \lambda < +\infty$. Then the functions $\left\{{}^{(s_i)}\ell_{\overline{E}_i}\right\}$ converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to the Gaussian density ${}^{(\infty)}\ell_{(A_L\oplus 1,0)}$, where

$$A_L = \frac{\sqrt{\pi}}{(\lambda \det A)^{1/n}} A. \tag{4.37}$$

Proof. Consider the functions $\left\{{}^{(s_i)}h_{\overline{E}_i}\right\}_1^{+\infty}$. By (4.35), we have that

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_i)}h_{\overline{E}_i} = \frac{(2\pi)^n}{\lambda}.$$

As shown in [**IN20**, Lemma 8.5], the functions ${}^{(s_i)}h_{\overline{E}_i}$ converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to the Gaussian density $e^{-\left|(2A_L)^{-1}x\right|^2}$. Thus, by (4.32) and by assertion (2) of Lemma 2.2, we get that the functions ${}^{(s_i)}\ell_{\overline{E}_i}$ converge locally uniformly to the Gaussian density ${}^{(\infty)}\ell_{(A_L\oplus 1,0)}$ with A_L given by (4.37). Hence, for any $\varepsilon > 0$, there are $R_\varepsilon, n_\varepsilon > 0$ such that the function ${}^{(\infty)}\ell_{(A_L\oplus 1,0)}$ is at most ε outside the ball $R_\varepsilon \mathbf{B}^n$ and the function $\left|{}^{(s_i)}\ell_{\overline{E}_i} - {}^{(\infty)}\ell_{(A_L\oplus 1,0)}\right|$ is at most ε inside the ball $2R_\varepsilon \mathbf{B}^n$ for all $i \geqslant n_\varepsilon$. Therefore, ${}^{(s_i)}\ell_{\overline{E}_i}$ are at most 2ε on the set $2R_\varepsilon \mathbf{B}^n \setminus R_\varepsilon \mathbf{B}^n$ for all $i \geqslant n_\varepsilon$. Since the functions ψ_s are strictly increasing for all $s \in [0, +\infty]$, ${}^{(s_i)}\ell_{\overline{E}_i}$ are at most 2ε outside the ball $2R_\varepsilon \mathbf{B}^n$ for all $i \geqslant n_\varepsilon$. Thus, the functions $\left\{{}^{(s_i)}\ell_{\overline{E}_i}\right\}$ are uniformly convergent on $\mathbb{R}^n$. ■

Lemma 4.11. Let G be a Gaussian density. Then the functions ${}^{(s)}L_G$ converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to G as $s \to +\infty$.

Proof of Lemma 4.11. We assume that $G(x) = e^{-|x|^2/2}$. First, we show the following technical claim.

Claim 4.3. For all $s \geqslant 1$, one has $G \leqslant {}^{(s)}\ell_{\left(\sqrt{s}\cdot \mathrm{id}_n \oplus 1,0\right)}$, and the following identity holds

$$\lim_{s\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}\ell_{\left(\sqrt{s}\cdot \mathrm{id}_n \oplus 1,0\right)} = \int_{\mathbb{R}^n} G = (2\pi)^{n/2}.$$

PROOF. The convergence of the integrals is an immediate consequence of (4.6) and (4.34). Inequality $G \leqslant {}^{(s)}\ell_{\left(\sqrt{s}\mathrm{id}_n \oplus 1,0\right)}$ is purely technical. By (4.33), for any $x \in \mathbb{R}^n$, we have

$$\lim_{s\to+\infty} {}^{(s)}\ell_{\left(\sqrt{s}\cdot\mathrm{id}_n\oplus 1,0\right)}(x) = G(x).$$

We claim that ${}^{(s)}\ell_{\left(\sqrt{s}\cdot\mathrm{id}_n\oplus 1,0\right)}(x)$ is a decreasing function of $s \in [1,+\infty)$ for any fixed $x \in \mathbb{R}^n$. Or, equivalently, that $\psi_s(\sqrt{s}\cdot t)$ is an increasing function of $s \in [1,+\infty)$ for any fixed $t \in [0,+\infty)$. The derivative of $\psi_s\left(\sqrt{s}\cdot t\right)$ as a function of s is

$$\frac{1}{2}\frac{t^2/s}{\sqrt{1+t^2/s}+1} - \ln\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{s}}+1\right) + \ln 2.$$

It is a function of t^2/s, and we use $\Phi(t^2/s)$ to denote this function. Making the substitution $z = t^2/s$ and computing the derivative of $\Phi(z)$, we get that

$$\Phi'(z) = \frac{z}{4\sqrt{z+1}\left(1+\sqrt{z+1}\right)^2} > 0.$$

By this and since $\Phi(0) = 0$, we conclude that the derivative of $\psi_s(\sqrt{s}\cdot t)$ as a function of s is positive for any $s \in [1,+\infty)$. This completes the proof of the Claim. ■

By Theorem 4.2, the Löwner function ${}^{(s)}L_G$ exists and is unique for any positive s. By symmetry, we see that ${}^{(s)}L_G$ is of the form ${}^{(s)}\ell_{(\beta(s)\mathrm{id}_n\oplus\alpha(s),0)}$, where $\beta\colon [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ and $\alpha\colon [1,+\infty) \to [1,+\infty)$. By Claim 4.3 and the definition of the Löwner s-function, we obtain that

$$\lim_{s\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_G = \int_{\mathbb{R}^n} G. \tag{4.38}$$

We claim that $\alpha(s) \to 1$ as $s \to +\infty$. Assume the contrary, that is, there is a sequence $\{s_i\}_1^{+\infty}$ of positive scalars such that $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = +\infty$ and $\lim\limits_{i\to\infty}\alpha(s_i) > 1$. We may assume that there is a constant $\xi > 1$ such that $\alpha(s_i) > \xi$ for all $i \in \mathbb{N}$. By Corollary 4.3, there is $\rho > 0$ such that $\beta(s_i) \leqslant \rho\sqrt{s_i}$ for all $i \in \mathbb{N}$. By this and Claim 4.3, we have

$${}^{(s_i)}L_G = {}^{(s_i)}\ell_{(\beta(s_i)\mathrm{id}_n\oplus\alpha(s_i),0)} = \alpha(s_i)\cdot {}^{(s_i)}\ell_{(\beta(s_i)\mathrm{id}_n\oplus 1,0)} \geqslant \xi\cdot {}^{(s_i)}\ell_{\left(\rho\sqrt{s_i}\cdot\mathrm{id}_n\oplus 1,0\right)} \geqslant \xi e^{-\rho^2|x|^2/2}.$$

Therefore,

$$\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_i)}L_G - \int_{\mathbb{R}^n} G \geqslant \int_1^{\alpha(s_i)} \mathrm{vol}_n\left[{}^{(s_i)}L_G \geqslant t\right] dt \geqslant \int_1^{\xi} \mathrm{vol}_n\left\{x\in\mathbb{R}^n : \xi e^{-\rho^2|x|^2/2} \geqslant t\right\} dt.$$

This contradicts identity (4.38) since the latter integral is positive and independent of s_i.

Thus, $\alpha(s) \to 1$ as $s \to +\infty$. Hence, the functions ${}^{(s)}L_G = {}^{(s)}\ell_{(\beta(s)\mathrm{id}_n\oplus\alpha(s),0)}$ converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to the same function as the functions ${}^{(s)}\ell_{(\beta(s)\mathrm{id}_n\oplus 1,0)}$ as $s \to +\infty$ (if the latter converge). By Lemma 4.10, the latter converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to G. This completes the proof. ■

4.5.3. **Minimal Gaussian Density.**

PROOF OF THEOREM 4.4. Implication (3) ⇒ (2) is trivial. Implication (2) ⇒ (1) is a direct consequence of Lemma 4.11.

We proceed with implication (1) ⇒ (3). Let the Löwner s-function ${}^{(s)}L_f$ be represented by the ellipsoid $(A_s \oplus \alpha_s, a_s) \in \mathcal{E}^n$ for any $s \in [1,+\infty)$. Applying Lemma 4.1 with $\psi = \psi_s$, one

sees that there exists a minimizing sequence $\{s_i\}_1^{+\infty}$ with $\lim_{i\to\infty} s_i = +\infty$ such that

$$\lim_{i\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s_i)}L_f \to \liminf_{s\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_f, \quad \frac{A_{s_i}}{\|A_{s_i}\|} \to A, \quad \alpha_{s_i} \to \alpha \quad \text{and} \quad a_{s_i} \to a$$

for some positive semi-definite matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, a number $\alpha > 0$ and $a \in \mathbb{R}^n$ as i tends to $+\infty$. By Corollary 4.3, we conclude that A is positive definite. Thus, by Lemma 4.10, we have that the functions ${}^{(s_i)}L_f$ converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ to some Gaussian density G. Clearly, $f \leqslant G$ and $\int_{\mathbb{R}^n} G = \liminf_{s\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_f$. Hence, by Theorem 4.1, there exists a unique solution to problem (4.3). We use G_L to denote this solution. By Lemma 4.11, we have

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_L = \liminf_{s\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_{G_L} \geqslant \liminf_{s\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_f = \int_{\mathbb{R}^n} G.$$

Thus, by the choice of G_L, we conclude that $G_L = G$. Again, by Lemma 4.11, we have that

$$\lim_{s\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_f = \liminf_{s\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_f = \int_{\mathbb{R}^n} G_L.$$

Hence, $\frac{A_s}{\|A_s\|} \to A$, $\alpha_s \to \alpha$ and $a_s \to a$ as $s \to +\infty$. Indeed, otherwise using Lemma 4.10, we see that there is another Gaussian density G_2 such that $f \leqslant G_2$ and $\int_{\mathbb{R}^n} G_2 = \int_{\mathbb{R}^n} G_L$, which contradicts the choice of G_L. Thus, we conclude that the functions ${}^{(s)}L_f$ converge uniformly on $\mathbb{R}^n$ as $s \to +\infty$ to G_L, completing the proof of Theorem 4.4. ∎

The following is an example of an explicitly computed minimal Gaussian density in which we consider one of the standard representations of convex sets as log-concave functions. The minimal Gaussian density of the representation of a convex body K is not necessarily the corresponding representation of the Löwner ellipsoid of K.

Proposition 4.1. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body containing the origin in its interior. Let $A^{-1}(\mathbf{B}^n)$ be the minimal volume origin-centered ellipsoid containing K, where A is a positive definite matrix. Then the ∞-ellipsoidal function (Gaussian density) represented by $(A \oplus 1, 0)$ is the unique solution to (4.3) with $f = e^{-|x|_K^2}$.

Proof. Let $(A' \oplus \alpha', a') \in \mathcal{E}^n$ be such that $f \leqslant {}^{(\infty)}\ell_{(A'\oplus\alpha',a')}$. First, we show that $K \subset (A')^{-1}\mathbf{B}^n$. Indeed, we have

$$\langle A'(x-a'), A'(x-a')\rangle - \ln(\alpha') \leqslant |x|_K^2$$

for every $x \in \mathbb{R}^n$. Suppose for a contradiction that there is $y \in K \setminus (A')^{-1}\mathbf{B}^n$. Consider $x = \vartheta y$, and substitute into the previous inequality. We obtain

$$\vartheta^2 |A'y|^2 - 2\vartheta \langle A'a', A'y\rangle + |A'a'|^2 - \ln(\alpha') \leqslant \vartheta^2 |y|_K^2 < \vartheta^2.$$

As $|A'y| > 1$, letting ϑ tend to infinity, we obtain a contradiction. Thus, $K \subset (A')^{-1}\mathbf{B}^n$.

Hence, $\det A' \leqslant \det A$. On the other hand, $\alpha' \geqslant \|f\| = 1$. The Proposition now easily follows from (4.36). ∎

4.6. Outer Integral Ratio

The notion of the volume ratio was extended to the setting of log-concave functions in [**AGMJV18**] and then in [**IN20**] for John s-functions. For any $s \in [0, +\infty)$, the *s-integral ratio* of f is defined by

$${}^{(s)}\mathrm{I.\,rat}(f) = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} f}{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}J_f}\right)^{1/n}.$$

Corollary 1.3 of [AGMJV18] states that there exists $\Theta > 0$ such that

$$ {}^{(0)}\mathrm{I.\,rat}(f) \leqslant \Theta\sqrt{n} $$

for any proper log-concave function $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ and any positive integer n. As a simple consequence of this result, the authors of [IN20] generalized this asymptotically tight bound to the John s-functions with fixed $s \in [0,+\infty)$.

However, the similar property of the Löwner ellipsoid is not obtained in [LSW19]. For any $s \in [0,+\infty)$, it is reasonable to define the *outer s-integral ratio* of f by

$$ {}^{(s)}\mathrm{I.\,or}(f) = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(s)}L_f}{\int_{\mathbb{R}^n} f} \right)^{1/n}. $$

Clearly, the outer s-integral ratio is the same for any two "affine" positions of a given proper log-concave function. Namely, let $f_1\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be a proper log-concave function and f_2 be given by $f_2(x) = \alpha f_1(A(x-a))$, where $\alpha > 0, a \in \mathbb{R}^n$ and A is an invertible matrix of size n, then ${}^{(s)}\mathrm{I.\,or}(f_1) = {}^{(s)}\mathrm{I.\,or}(f_2)$.

Theorem 4.5 is an immediate corollary of Theorem 1.4 and Lemma 4.9.

Proof of Theorem 1.4 . Since the outer 0-integral ratio is the same for all functions of the form $\alpha f(x-a)$ with $\alpha > 0$ and $a \in \mathbb{R}^n$, we assume that $f(0) = \|f\| = e^{-n}$. By Lemma 4.6, there is a n-ellipsoid $(A \oplus 1, 0)$ such that $f \leqslant {}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)}$. By Lemma 4.1 and Corollary 4.1, there exists a 0-ellipsoidal function of minimal integral among those even 0-ellipsoidal functions with height 1 that are pointwise greater than or equal to f. Applying a suitable linear transform, we assume that the minimal integral is attained at ${}^{(0)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}} = e^{-|x|}$. That is, we assume that $f \leqslant {}^{(0)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}$ and ${}^{(0)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}$ is the solution to problem

$$ \min_{(A\oplus 1,0)\in\mathcal{E}^n} \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)} \quad \text{subject to} \quad f \leqslant {}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)}. $$

Let us show the geometric necessary condition for ${}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)}$ to be the solution to this problem. Define the convex set

$$ K_f = \mathrm{cl\,conv} \left(\bigcup_{r\geqslant n} \frac{1}{r}[f \geqslant e^{-r}] \right). $$

Claim 4.4. The unit ball $\mathbf{B}^n$ is the minimal volume origin centered ellipsoid containing K_f.

Proof. Since f is log-concave, $f(0) = \|f\| = e^{-n}$ and $f \leqslant {}^{(0)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}$, we see that each of the convex sets $\frac{1}{r}[f \geqslant e^{-r}]$ with $r > n$ is a convex body and is a subset of the unit ball $\mathbf{B}^n$. Thus, K_f is a body inside $\mathbf{B}^n$. Also, by construction, the origin belongs to K_f.

By Proposition 2.12, the minimal volume origin centered ellipsoid containing K_f is unique. Assume, by a contradiction, that $\mathbf{B}^n$ is not the minimal volume origin ellipsoid containing K_f, that is, there is a positive definite matrix A of order n with $\det A > 1$ such that the ellipsoid $A^{-1}(\mathbf{B}^n)$ contains K_f. Consider the function ${}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)}$. Fix $r \geqslant n$. By definition, we have

$$ \left[{}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)} \geqslant e^{-r} \right] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : e^{-|Ax|} \geqslant e^{-r} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |Ax| \leqslant r \right\} = r \cdot A^{-1}(\mathbf{B}^n). $$

This and $\frac{1}{r}[f \geqslant e^{-r}] \subset A^{-1}(\mathbf{B}^n)$ yield

$$ [f \geqslant e^{-r}] \subset \left[{}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)} \geqslant e^{-r} \right]. $$

Thus, $f \leqslant {}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)}$ and $\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(0)}\ell_{(A\oplus 1,0)} < \int_{\mathbb{R}^n} {}^{(0)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}$. We obtain a contradiction. ∎

Let unit vectors $(u_i)_1^m$ on the boundary of K_f and positive weights $(c_i)_1^m$ satisfy John's condition (2.15). Fix $i \in \{1, \dots, m\}$. Let f_i be the restriction of f on the line with directional vector u_i, that is, $f_i(t) = f(tu_i)$, $t \in \mathbb{R}$. What does it mean that u_i belongs to the boundary of K_f? The answer is simple: either there exists $t \geqslant d$ such that $f_i(t) = e^{-t}$ or, by convexity, u_i is an accumulation point of the segments $\left\{\frac{1}{r}[f_i \geqslant e^{-r}]\right\}_{r \geqslant n}$ and does not belong to any of these segments. In the former case, we set $t_i = \min\{t \geqslant 0 : f(tu_i) = e^{-t}\}$. Otherwise, put $t_i = +\infty$. Clearly, $t_i \geqslant n$. Define for a finite t_i

$$g_i(t) = \begin{cases} e^{-n} e^{-t\left(1 - \frac{n}{t_i}\right)}, & \text{if} \quad t \in [0, t_i), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

and for $t_i = +\infty$

$$g_i(t) = \begin{cases} e^{-n} e^{-t}, & \text{if} \quad t \in [0, +\infty), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Claim 4.5. For any $i \in \{1, \dots, m\}$, we have that $g_i \leqslant f_i$.

Proof. If t_i is finite, the result follows from the the log-concavity of f_i and the identity $f_i(0) = e^{-n}$. Consider the case $t_i = +\infty$. Then for any $\varepsilon \in (0, 1)$, there exists $r > 1/\varepsilon$ such that $f_i((1-\varepsilon)r) \geqslant e^{-r}$. The log-concavity of f_i yields

$$f_i(t) \geqslant (f_i(0))^{1 - \frac{t}{(1-\varepsilon)r}} \cdot (f_i((1-\varepsilon)r))^{\frac{t}{(1-\varepsilon)r}} \geqslant e^{-n} e^{-t\left[\frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{n}{(1-\varepsilon)r}\right]}$$

for all $t \in [0, 1/\varepsilon - 1)$. Taking the limit as ε tends to 0, we see that $f_i(t) \geqslant e^{-n} e^{-t}$ for all $t \in [0, +\infty)$. This completes the proof of Claim 4.5. ■

By the log-concavity of f and identity (2.17), we get

$$f(x) \geqslant \sup\left\{\prod_{i=1}^m f_i(n\Theta_i)^{c_i/n} : x = \sum_{i=1}^m c_i \Theta_i u_i\right\}. \tag{4.39}$$

Using (4.39) in the reverse Brascamp–Lieb inequality (2.19) and by Claim 4.5, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \geqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i(tn)^{1/n} dt\right)^{c_i} \geqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} g_i(tn)^{1/n} dt\right)^{c_i} = \prod_{i=1}^m \left(\int_0^{t_i/n} g_i(tn)^{1/n} dt\right)^{c_i}.$$

For any $\tau \in [n, +\infty)$, define $p(\tau) = \int\limits_0^{\tau/n} e^{-t(1-n/\tau)} dt$. Additionally, put $p(+\infty) = e^{-n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt$. Therefore, by the previous inequality and identity (2.17), we get

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \geqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_0^{t_i/n} g_i(tn)^{1/n} dt\right)^{c_i} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{e}\int_0^{t_i/n} e^{-t(1-n/t_i)} dt\right)^{c_i} \geqslant e^{-n} \cdot \left(\inf_{\tau \in [n, +\infty]} p(\tau)\right)^n.$$

We claim that $\inf\limits_{\tau \in [n, +\infty]} p(\tau) = 1$. Indeed, $p(n) = 1$ and $\lim\limits_{\tau \to +\infty} p(\tau) = p(+\infty) = 1$; on the other hand, if $\tau \in [n, +\infty)$, we have

$$p(\tau) = \frac{1 - e^{1-\tau/n}}{1 - n/\tau} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\tau/n} > \frac{e\tau}{n}.$$

The last inequality is simple and holds for any $\tau \in [n, +\infty)$. Thus, $\int_{\mathbb{R}^n} f \geqslant e^{-n}$, and we conclude that

$${}^{(0)}\mathrm{I}.\,\mathrm{or}(f) = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} {}^{(0)}L_f}{\int_{\mathbb{R}^n} f}\right)^{1/n} \leqslant \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f}\right)^{1/n} \leqslant \left(\frac{n!\,\mathrm{vol}_n\, \mathbf{B}^n}{e^{-n}}\right)^{1/n} = e\sqrt{\pi}\left(\frac{n!}{\Gamma(1 + n/2)}\right)^{1/n},$$

where $\Gamma(\cdot)$ is Euler's Gamma function. Since $n! = \Gamma(1+n)$ and by Stirling's formula (2.1), one sees that

$$\left(\frac{n!}{\Gamma(1+n/2)}\right)^{1/n} \leqslant C\sqrt{n}$$

for some $C > 0$. The existence of Θ follows. ■

4.7. The Duality of the John and Löwner functions

It is known that John and Löwner ellipsoids are dual in the sense of Lemma 2.3. One would expect the same properties for John and Löwner functions (see Subsection 4.4.1). However, as was shown in [**LSW19**], there is no duality between the John and Löwner 0-functions. That is, assuming the John 0-function of f is represented by an ellipsoid centered at the origin, we might have $\left({}^{(0)}J_f\right)^\circ \neq {}^{(0)}L_{f^\circ}$. By continuity and Theorem 4.3, it follows that there exist functions f such that $\left({}^{(s)}J_f\right)^\circ \neq {}^{(s)}L_{f^\circ}$ for a sufficiently small positive s. We conjecture that for any positive s there is such an example.

The problem is that the centers of the n-ellipsoids representing ${}^{(s)}J_f$ and ${}^{(s)}L_{f^\circ}$ might be different. It is not the case for the setting of convex sets (key observation: the polar of an ellipsoid containing the origin in the interior is an ellipsoid, see Proposition 2.3). However, for any $s \in [0, +\infty]$, if the n-ellipsoids representing ${}^{(s)}J_f$ and ${}^{(s)}L_{f^\circ}$ are origin symmetric, we have the duality, that is, the identities

$$\left({}^{(s)}J_f\right)^\circ = {}^{(s)}L_{f^\circ} \quad \text{and} \quad \left({}^{(s)}L_f\right)^\circ = {}^{(s)}J_{f^\circ} \tag{4.40}$$

hold. Indeed, it follows from Lemma 4.8, identity (4.27) and Assertion 4 of Proposition 2.6.

Here are some examples of such a duality. By symmetry, we have the following.

Example 4.3. Let $s \in [0, +\infty]$ and $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be a proper even log-concave function on $\mathbb{R}^n$. Then identity (4.40) holds.

In [**IN20**, Theorem 5.1], the authors give a necessary and sufficient condition for a proper log-concave function f to satisfy ${}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}} = {}^{(s)}J_f$, $s \in (0, +\infty)$. This and Example 4.3 yield the same type of result for proper even log-concave functions.

In the following example, the centers were computed directly. By Proposition 4.1 and Proposition 8.3 of [**IN20**], we obtain

Example 4.4. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body containing the origin it its interior. Set $f = e^{-|x|_K^2}$. Then

$$\left({}^{(s)}J_f\right)^\circ = {}^{(s)}L_{f^\circ} \quad \text{and} \quad \left({}^{(s)}L_f\right)^\circ = {}^{(s)}J_{f^\circ}.$$

Finally, we note that the duality helps us to understand the properties of the constructed Löwner functions. The key tool for the interpolation between ellipsoidal functions ${}^{(s)}h_{(\cdot)}$ is the *sup-convolution* (see Subsection 2.1.3). In the case of s-ellipsoidal functions things are easier: we use the product of two ${}^{(s)}\ell_{(\cdot)}$ functions. We recall that, by Proposition 2.6,

$$(f_1 \star f_2)^\circ = {f_1}^\circ \cdot {f_2}^\circ.$$

That is, despite the fact that there is no duality between the John and Löwner s-functions in general, there is duality between the methods.

CHAPTER 5

Open Problems

In this Chapter, we list some problems that can be possible directions of the further research. We divide them in three Sections according to the topic they relate to.

5.1. Tight Frames

We start with the problems concerning the approximation of the identity using given unit vectors $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ and positive constants $c_1, \dots, c_m$ satisfying John's decomposition. More formally, for a given $d \in \mathbb{N}$ and $\varepsilon > 0$, what is the minimal number $k = k(d, \varepsilon)$ such that for a sequence of unit vectors $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ satisfying John's decomposition, there is a multi-subset $\sigma \subset [m]$ of size k for which the following inequality holds:

$$\left\| \frac{n}{k} \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes u_i - \mathrm{id}_n \right\| < \varepsilon?$$

In [FY17], it was shown that k is at most cn/ε^2 and it is the best possible bound in terms of the dimension.

The so-called *Kadison–Singer problem*, arised from the foundations of quantum mechanics, can be formulated in terms of tight frames: provided that vectors $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ with $|v_i|^2 \leqslant \delta$ satisfy $\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes v_i = \mathrm{id}_n$, does there exist a partition of a set $[m]$ into two sets S_1 and S_2 such that

$$\left\| \sum_{i \in S_j} v_i \otimes v_i \right\| \leqslant \frac{\left(1 + \sqrt{2\delta}\right)^2}{2} \quad \text{for} \quad j = 1, 2?$$

These question were studied intensively [BSS14, Sri12]. The Kadison–Singer problem was solved by Marcus, Spielman and Srivastava [MSS15].

G. Ivanov, M. Naszódi and A. Polyanskii studied a more general setting, when the identity operator is decomposed in convex combination of positive semi-definite operators. They proved the following [INP20].

Theorem 5.1 (Ivanov, Naszódi, Polyanskii, 2020)**.** Let $\varepsilon \in (0, 1)$, $Q_1, \dots, Q_m$ be positive semi-definite operators on $\mathbb{R}^n$ and $A \in \mathrm{conv}\{Q_1, \dots, Q_m\}$. Assume that

$$k \geqslant c \, \|A\| \cdot \max_{i \in [m]} \|Q_i\| \cdot \frac{\ln n}{\varepsilon^2},$$

where c is an absolute constant. Then there exists a multi-subset $\sigma \subset [m]$ of size k such that

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i \in \sigma} Q_i - A \right\| < \varepsilon.$$

In [INP20], they also showed that the $\ln n$ term in Theorem 5.1 cannot be removed. That is, for any sufficiently small ε and sufficiently large n, there exist positive semi-definite matrices

1683

$Q_1, \dots, Q_m$ of size n with $\mathrm{id}_n \in \mathrm{conv}\{Q_1, \dots, Q_m\}$ such that, for any multi-subset $\sigma \in [m]$ of size $k \leqslant C \ln n/\varepsilon$, one has

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i \in \sigma} Q_i - \mathrm{id}_n \right\| \geqslant \varepsilon,$$

where $C > 0$ is independent of n.

The following problem arise naturally.

Problem 1. Let $\varepsilon \in (0,1)$ and $r \in \mathbb{N}$. For $i \in [m]$, let P_i be the operator of the orthogonal projection onto an r-dimensional subspace. Assume that $\mathrm{id}_n \in \mathrm{conv}\{P_1, \dots, P_n\}$ and let $k \geqslant c(r)n/\varepsilon^2$, where $c(r)$ is an absolute constant. Show that there exists a multi-subset $\sigma \subset [m]$ of size k such that

$$\left\| \frac{n}{kr} \sum_{i \in \sigma} P_i - \mathrm{id}_n \right\| < \varepsilon.$$

5.2. Extremal Volume Sections and Projections

Conjecture 1 on the maximal volume sections of the cube was confirmed for $n > k = 2$ (see Theorem 1.2) and also in the case $k|n$ (see Theorem 3.3). In the case $2k > n$, the second inequality in Theorem 3.3 is tight, but the subspaces at which the equality is attained are unknown. The tight upper bounds on the volume of k-dimensional sections of the n-dimensional cube and subspaces the bounds are attained at remain unknown in the case of arbitrary n and k.

Problem 2. Show Conjecture 1 for $n > k > 2$.

The problem on the volume extrema of orthogonal projections of the standard cross-polytope $\Diamond^n$ onto k-dimensional subspace of $\mathbb{R}^n$, that is, on the extrema the function

$$H \mapsto \mathrm{vol}_k(\Diamond^n|H), \text{ where } H \subset \mathbb{R}^n \text{ is a subspace of dimension } k, \tag{5.1}$$

can be considered dual to problem (1.1).

Since the minimum of (1.1) is attained if and only if the section is the k-dimensional unit cube by Theorem 3.2, it is reasonable to suppose that the maximum of (5.1) is attained if and only if the projection is the standard k-dimensional cross-polytope, as was conjectured by G. Ivanov [**Iva21**].

Conjecture 2. The volume of the projection of the n-dimensional cross-polytope $\Diamond^n$ onto a k-dimensional subspace $H \subset \mathbb{R}^n$ is at most the volume of the k-dimensional cross-polytope, i.e. $\mathrm{vol}_k(\Diamond^n|H) \leqslant \mathrm{vol}_k \Diamond^k$. The bound is attained only on coordinate subspaces.

On the other hand, the only known minimizers of the volume of the projection are affine k-dimensional cross-polytopes (see Theorem 3.4 and Remark 3.2). G. Ivanov conjectured that they are *the* minimizers [**Iva21**]. Namely, let $C_\Diamond(n,k)\,\mathrm{vol}_k \Diamond^k$ be the minimum of the volumes of the orthogonal projections of $\Diamond^n$ onto k-dimensional subspaces that are affine k-dimensional cross-polytopes.

Conjecture 3. The minimum volume of a projection of $\Diamond^n$ onto a k-dimensional subspace H is attained at subspaces such that $\Diamond^n|H$ is an affine cross-polytope, i.e.

$$C_\Diamond(n,k)\,\mathrm{vol}_k \Diamond^k \leqslant \mathrm{vol}(\Diamond^n|H).$$

The constant $C_\Diamond(n,k)$ is given by

$$C_\square(n,k)^2 = \frac{1}{C_\Diamond(n,k)^2} = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil^{n-k\lfloor n/k \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{k-(n-k\lfloor n/k \rfloor)}$$

and is attained at the same subspaces as $C_{\square}(n,k)$ [**Iva21**].

Using the tight frames technique, Ivanov confirmed Conjecture 2 in the case $k \in \{2,3\}$ and any $n > k$ [**Iva21**, Theorem 1.2] and Conjecture 3 in the case $n > k = 2$ [**Iva21**, Theorem 1.5]. F. Barthe confirmed Conjecture 2 in the case $k|n$ and in the hyperplane case $k = n-1$ [**Bar98**, **BN02**]. The proof of the general case remains unknown. We note here that Theorem 3.1 is applicable for the minimal volume projections of the cross-polytope as well.

Problem 3. Show Conjecture 2 and Conjecture 3 for all n and k.

We summarize some of the statements above in the Figure 1.

	The cube $\square^n$		The cross-polytope $\Diamond^n$		
minimal volume sections	Vaaler:	$\operatorname{vol}_k \square^k$	Conjecture 2 (shown for $k=2$, $k=3$ $k=n-1$)	$\operatorname{vol}_k \Diamond^k$	maximal volume projections
maximal volume sections	Ball:	$(n/k)^{k/2} \operatorname{vol}_k \square^k$	Barthe:	$(k/n)^{k/2} \operatorname{vol}_k \Diamond^k$	minimal volume projections
	Ball:	$\left(\sqrt{2}\right)^{n-k} \operatorname{vol}_k \square^k$	—		
	Conjecture 1 (shown for $k=2$)	$C_{\square}(n,k) \operatorname{vol}_k \square^k$	Conjecture 3 (shown for $k=2$)	$C_{\Diamond}(n,k) \operatorname{vol}_k \Diamond^k$	

FIGURE 1. Some of the known results on the volume extrema problems. The dual statements are put in the same row.

Not much is known about local extrema of problems (1.1) and (5.1). Necessary conditions on the local maximizers of problem (1.1) are given in Theorem 1.1. They were derived from Lemma 3.2, which is the maximal volume section criterion. We note that Lemma 3.2 characterizes the minimal volume sections of the cube if one switches the inequality sign with the opposite. Using this criterion, the conditions on the local minimizer can be obtained. There is also a criterion on the extremal volume of the cross-polytope projections, from which one derives necessary conditions of the local extrema, using perturbation of tight frames [**Iva21**]. G. Ivanov showed that a plane in $\mathbb{R}^3$ such that the projection of the cross-polytope $\Diamond^3$ onto it is a regular hexagon is a local maximizer of (5.1) with $n = 3$ and $k = 2$, but not a global one. Examples of local extremizers of problem (1.1) are unknown [**Iva21**, Lemma 7.1].

Problem 4. Characterize the local extrema of problems (1.1) and (5.1).

It may occur that the technique of so-called *shadow systems* together with the tight frame machinery can bring new results on the problem of extremal volume sections of the cube. Recall that a *shadow system* along the direction $v \in \mathbb{R}^n$ is a family of convex sets $K_t \subset \mathbb{R}^n$ defined by

$$K_t = \operatorname{conv}\{x + \alpha(x)tv : x \in A\},$$

where v is a unit vector, $A \subset \mathbb{R}^n$, α is a bounded function on A and t runs over an interval of $\mathbb{R}$. Equivalently, a shadow system is a family of projections of a $(n+1)$-dimensional convex set onto an n-dimensional subspace: Namely, let $K = \operatorname{conv}\{x + \alpha(x)e_{n+1} : x \in A\}$, then K_t is the projection of K onto $\mathbb{R}^n$ in the direction $e_{n+1} - tv$. The basic fact about shadow systems proven by C. Rogers and G. Shephard is that $\operatorname{vol}_n K_t$ is a convex function of t [**RS58**, **She64**]. S. Campi and P. Gronchi showed that if $\{K_t\}_{t\in[0,1]}$ is a shadow system of origin symmetric convex bodies in $\mathbb{R}^n$, then $(\operatorname{vol}_n K_t^{\circ})^{-1}$ is a convex function of t [**CG06**].

These observations could be used as follows. Let $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^k$ be a tight frame and S_t be obtained from S by substitutions $v_i \to v_i + \alpha_i u t$, where α_i are constants, $i \in [m]$, $u \in \mathbb{R}^k$ and $t \in \mathbb{R}$. Then $\{\operatorname{conv} S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ is a shadow system. On the other hand, $(\operatorname{conv} S_t)^\circ = \operatorname{vol}\square(S_t)$. Hence, the function $(\operatorname{vol}\square(S_t))^{-1}$ is convex. We believe that, choosing numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ and a vector u wisely, one can obtain new results using this convexity.

There is almost no information about the surface area measure of a section of the cube. The following hypothesis seems natural.

Problem 5. For any $n > k > 1$ and a linear subspace $H \subset \mathbb{R}^n$ of dimension k, one has

$$\operatorname{vol}_{k-1} \partial\square^k \leqslant \operatorname{vol}_{k-1} \partial(\square^n \cap H),$$

where ∂K stands for the boundary of K.

It is a nice puzzle to solve Problem 5 for $k = 2$. To the best of our knowledge, there are no results on this problem for $k > 2$.

5.3. Functional John and Löwner Ellipsoids

A technical question on the continuity of the Löwner s-functions as the parameter s varies left unanswered. That is, is it true that for any proper log-concave function f on $\mathbb{R}^n$ its Löwner s_0-function and Löwner s-function are close in L_∞-norm if s_0 and s are close? We suspect that the answer is yes and pose the following problem.

Problem 6. Let $s_0 > 0$ and $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be a proper log-concave function. Show that for any $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that for all s with $|s_0 - s| < \delta$ the inequality $\left\| {}^{(s_0)}L_f - {}^{(s)}L_f \right\| < \varepsilon$ holds.

In [IN20], G. Ivanov and M. Naszódi proved the following analog of John's Theorem for the John s-ellipsoidal functions.

Theorem 5.2 (Ivanov, Naszódi, 2021)**.** Let $s > 0$ and $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ be a proper log-concave function. Assume that ${}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}} \leqslant f$. Then ${}^{(s)}h_{\mathbf{B}^{n+1}}$ is the John s-function of f if and only if there exist unit vectors $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ lying on the boundary of the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| \leqslant f^{1/s}(x)\}$ and positives $c_1, \dots, c_m$ such that

$$\sum_{i=1}^m c_i \bar{u}_i \otimes \bar{u}_i = \mathrm{id}_n \oplus s \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^m c_i \bar{u}_i = 0. \tag{5.2}$$

Proposition 2.11 is the version of John's Theorem for the Löwner ellipsoid. However, a functional version of John's Theorem for the Löwner s-ellipsoidal functions is unknown.

Problem 7. Given $s > 0$, give a characterization for the proper log-concave function to have the function ${}^{(s)}\ell_{\mathbf{B}^{n+1}}$ as the Löwner s-function.

As was mentioned in Remark 2.5, in [GLM+04], the authors give a necessary condition for a convex body K to be in a position of the maximal volume inside a convex body L with $0 \in \operatorname{int} L$ in terms of contact pairs of vectors. We believe that this result can be generalized to the setting of log-concave functions as follows.

Let $\psi\colon [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty]$ be an admissible convex function and K be a convex body in $\mathbb{R}^n$ containing the origin in its interior. Define the following class of log-concave functions:

$$\mathcal{E}_K^n[\psi] = \left\{ \alpha e^{-\psi\left(|A(x-a)|_K\right)} : A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ is positive definite, } \alpha > 0,\ a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

The functions of this class can be considered as the "affine" positions of the function $e^{-\psi(|x|_K)}$. Note that the superlevel sets of a function from this class are the homothets of a fixed affine position of the body K.

Let f be an admissible log-concave function on $\mathbb{R}^n$. We pose the optimization problem:

$$\min_{\ell\in\mathcal{E}_K^n[\psi]} \int_{\mathbb{R}^n} \ell \quad \text{subject to} \quad f \leqslant \ell. \tag{5.3}$$

Problem 8. Show that problem (5.3) has a solution, if there is at least one function $\ell \in \mathcal{E}_K^n[\psi]$ such that $f \leqslant \ell$. Characterize a solution in terms of contact vectors.

Theorem 2.5 and Theorem 2.6 show that in the class of origin symmetric convex bodies, the cube and the cross-polytope are, up to affine transforms, the maximizers of the volume ratio and the outer volume ratio, respectively. This shows that the volume ratios and are bounded from above by the constant times square root of the dimension and this bound is asymptotically tight. The same asymptotically tight upper bounds on the s-integral ratios of log-concave functions are given in Theorem 4.5, Corollary 7.4 of [**IN20**] and Corollary 1.3 of [**AGMJV18**], but the exact maximizers are known only for the 0-integral ratio. D. Alonso-Gutiérrez et al. showed that, up to affine transforms, the function $e^{-|x|_\infty}$ is the maximizer of the 0-integral ratio in the class of even log-concave functions and the function $e^{-|x|_{\Delta^n-c}}$, where $c \in \Delta^n$, is the maximizer of the 0-integral ratio in the class of arbitrary log-concave functions [**AGMJV18**, Theorem 1.2].

Theorem 4.5 does not give the maximizer of the outer 0-integral ratio, since inequality (4.39) is not tight. We conjecture that, up to affine transforms, the maximizers of the outer 0-integral ratio in the class of even log-concave functions and the class of all log-concave functions are the functions $e^{-|x|_1}$ and $e^{-|x|_{\Delta^n-c}}$, respectively. We believe that this can be proven by using the yet undeveloped functional version of John's Theorem for Löwner s-functions (see Problem 7) and the reverse form of Brascamp–Lieb inequality or its extensions.

Problem 9. Let $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ be a proper log-concave function. Show that

$$^{(0)}\mathrm{I.\,or}(f) \leqslant {}^{(0)}\mathrm{I.\,or}(g_c),$$

where $g_c(x) = e^{-|x|_{\Delta^n-c}}$ and $c \in \Delta^n$, with equality if and only if $f = \|f\| \cdot (g_c \circ \mathcal{A})$ for some $c \in \Delta^n$ and an affine transform $\mathcal{A}$ on $\mathbb{R}^n$. If f is even, show that

$$^{(0)}\mathrm{I.\,or}(f) \leqslant {}^{(0)}\mathrm{I.\,or}(g),$$

where $g = e^{-|x|_1}$, with equality if and only if $f = \|f\| \cdot (g \circ \mathcal{A})$ for some affine transform $\mathcal{A}$ on $\mathbb{R}^n$.

The maximizers of integral s-ratio with $s > 0$ are unknown as well as of outer s-integral ratio. We believe that this problem can be solved by using Theorem 5.2, its analog for the Löwner s-function and the Brascamp–Lieb inequality or its extensions.

Problem 10. Find the proper log-concave functions that maximize the s-integral ratio for $s > 0$ and the outer s-integral ratio for $s > 0$.

References

[AAGM15] Shiri Artstein-Avidan, Apostolos Giannopoulos, and Vitali D. Milman, *Asymptotic geometric analysis, part i*, vol. 202, American Mathematical Soc., 2015.

[AAKM04] Shiri Artstein-Avidan, Bo'az Klartag, and Vitali Milman, *The Santaló point of a function, and a functional form of the Santaló inequality*, Mathematika **51** (2004), no. 1-2, 33–48.

[AAM07] Shiri Artstein-Avidan and Vitali Milman, *A characterization of the concept of duality*, Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences **14** (2007), 42–59.

[AAM08] Shiri Artstein-Avidan and Vitali Milman, *The concept of duality for measure projections of convex bodies*, Journal of Functional Analysis **254** (2008), no. 10, 2648–2666.

[AAM09] ———, *The concept of duality in convex analysis, and the characterization of the legendre transform*, Annals of Mathematics **169** (2009), no. 2, 661–674.

[AGMJV18] David Alonso-Gutiérrez, Bernardo González Merino, C. Hugo Jiménez, and Rafael Villa, *John's ellipsoid and the integral ratio of a log-concave function*, The Journal of Geometric Analysis **28** (2018), no. 2, 1182–1201.

[AHK19] Arseniy Akopyan, Alfredo Hubard, and Roman Karasev, *Lower and upper bounds for the waists of different spaces*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **53** (2019), no. 2, 457–490.

[AS17] Guillaume Aubrun and Stanisław J. Szarek, *Alice and Bob Meet Banach: The interface of Asymptotic Geometric Analysis and Quantum Information Theory*, vol. 223, American Mathematical Soc., 2017.

[Bal86] Keith Ball, *Cube slicing in* $\mathbb{R}^n$, Proceedings of the American Mathematical Society (1986), 465–473.

[Bal89] ———, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Geometric aspects of functional analysis (1989), 251–260.

[Bal91] ———, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, Journal of the London Mathematical Society **2** (1991), no. 2, 351–359.

[Bal97] ———, *An elementary introduction to modern convex geometry*, Flavors of geometry **31** (1997), 1–58.

[Bal01] ———, *Convex geometry and functional analysis*, Handbook of the geometry of Banach spaces **1** (2001), 161–194.

[Bar98] Franck Barthe, *On a reverse form of the Brascamp–Lieb inequality*, Inventiones mathematicae **134** (1998), no. 2, 335–361.

[Bar02] A. Barvinok, *A course in convexity*, vol. 54, Graduate Studies in Mathematics, 2002.

[BGVV14] Silouanos Brazitikos, Apostolos Giannopoulos, Petros Valettas, and Beatrice-Helen Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, vol. 196, American Mathematical Society Providence, 2014.

[BN02] Franck Barthe and Assaf Naor, *Hyperplane projections of the unit ball of* ℓ_p^n, Discrete & Computational Geometry **27** (2002), no. 2, 215–226.

[BS08] Károly Böröczky and Rolf Schneider, *A characterization of the duality mapping for convex bodies*, Geometric and Functional Analysis **18** (2008), 657–667.

[BSS14] Joshua Batson, Daniel A. Spielman, and Nikhil Srivastava, *Twice-Ramanujan sparsifiers*, SIAM Rev. **56** (2014), no. 2, 315–334. MR 3201185

[CG06] Stefano Campi and Paolo Gronchi, *On volume product inequalities for convex sets*, Proceedings of the American Mathematical Society **134** (2006), no. 8, 2393–2402.

[Cla90] Frank H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, SIAM, 1990.

[Fig77] Lindenstraus J. Milman V.D. Figiel, T., *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), 53–94.

[FM07] Matthieu Fradelizi and Mathieu Meyer, *Some functional forms of Blaschke–Santaló inequality*, Mathematische Zeitschrift **256** (2007), no. 2, 379–395.

[FY17] Omer Friedland and Pierre Youssef, *Approximating matrices and convex bodies*, International Mathematics Research Notices **2019** (2017), no. 8, 2519–2537.

1688

[GLM+04] Yehoram Gordon, A. E. Litvak, Mathieu Meyer, Alain Pajor, et al., *John's decomposition in the general case and applications*, J. Differential Geom. **68** (2004), no. 1, 99–119.

[Gru07] Peter M. Gruber, *Convex and discrete geometry*, Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Hen12] Martin Henk, *Löwner–John ellipsoids*, Documenta Math (2012), 95–106.

[IN20] Grigory Ivanov and Márton Naszódi, *Functional John Ellipsoids*, arXiv preprint arXiv:2006.09934 (2020).

[INP20] Grigory Ivanov, Márton Naszódi, and Alexandr Polyanskii, *Approximation of the average of some random matrices*, Journal of Functional Analysis **279** (2020), no. 7, 108684.

[IT21a] Grigory Ivanov and Igor Tsiutsiurupa, *Functional Löwner Ellipsoids*, The Journal of Geometric Analysis (2021).

[IT21b] ———, *On the Volume of Sections of the Cube*, Analysis and Geometry in Metric Spaces **9** (2021), no. 1, 1–18.

[Iva20a] Grigory Ivanov, *On the volume of the John–Löwner ellipsoid*, Discrete & Computational Geometry **63** (2020), no. 2, 455–459.

[Iva20b] Grigory Ivanov, *Tight frames and related geometric problems*, Canadian Mathematical Bulletin (2020), 1–22.

[Iva21] ———, *On the volume of projections of the cross-polytope*, Discrete Mathematics **344** (2021), no. 5, 112312.

[Joh14] Fritz John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Traces and emergence of nonlinear programming, Springer, 2014, pp. 197–215.

[LSW19] Ben Li, Carsten Schütt, and Elisabeth M. Werner, *The Löwner function of a log-concave function*, The Journal of Geometric Analysis **31** (2019), no. 1, 423–456.

[MP88] Mathieu Meyer and Alain Pajor, *Sections of the unit ball of ℓ_p^n*, Journal of Functional Analysis **80** (1988), no. 1, 109–123.

[MSS15] Adam Marcus, Daniel Spielman, and Nikhil Srivastava, *Interlacing Families II: Mixed Characteristic Polynomials and the Kadison–Singer Problem*, Annals of Mathematics (2015), 327–350.

[PB07] E. S. Polovinkin and M. V. Balashov, *Elements of convex and strongly convex analysis*, Fizmatlit (in Russian), 2007.

[Pré71] András Prékopa, *Logarithmic Concave Measures with Application to Stochastic Programming*, Acta Scientiarum Mathematicarum **32** (1971), 301–316.

[RS58] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *Some extremal problems for convex bodies*, Mathematika **5** (1958), no. 2, 93–102.

[RW98] R. Tyrrell Rockafellar and Roger J.-B. Wets, *Variational analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[Sch08] Rolf Schneider, *The endomorphisms of the lattice of closed convex cones*, Beitr. Algebra Geom. **49** (2008), 541–547.

[Sch14] ———, *Convex Bodies: the Brunn–Minkowski Theory*, no. 151, Cambridge university press, 2014.

[She64] G. C. Shephard, *Shadow Systems of Convex Bodies*, Israel J. Math **2** (1964).

[Sri12] Nikhil Srivastava, *On contact points of convex bodies*, Geometric aspects of functional analysis, Springer, 2012, pp. 393–412.

[Vaa79] Jeffrey Vaaler, *A geometric inequality with applications to linear forms*, Pacific Journal of Mathematics **83** (1979), no. 2, 543–553.

[Zon06] Chuanming Zong, *The cube – a window to convex and discrete geometry*, vol. 168, Cambridge University Press, 2006.

Приложение
к приказу НИУ ВШЭ – Нижний Новгород
от 30.04.2021 №8.1.6.3-14/300421-1

УТВЕРЖДЕНО
ученым советом НИУ ВШЭ – Нижний Новгород
(протокол от 22.04.2021 № 4)

Положение о конкурсе
«Смотр дипломных работ математиков России»

1. Общие положения

1.1. Настоящее Положение определяет порядок организации и проведения конкурса «Смотр дипломных работ математиков России» (далее – Смотр), организуемого и проводимого НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.

1.2. Организатором Смотра является НИУ ВШЭ – Нижний Новгород (далее – Организатор). Проведение Смотра от имени НИУ ВШЭ – Нижний Новгород обеспечивает кафедра фундаментальной математики. Контактным лицом Организатора является Ремизов Иван Дмитриевич, iremizov@hse.ru.

1.3. Предметом Смотра является выпускная квалификационная работа (далее – конкурсная работа). Кандидатские, докторские, PhD диссертации и приравненные к ним работы не допускаются до участия в Смотре.

1.4. Смотр является открытым и проводится среди студентов, а также выпускников образовательных организаций Российской Федерации, освоивших основные профессиональные образовательные программы высшего образования - программы бакалавриата, программы специалитета, программы магистратуры математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки в год проведения конкурса, а также за один, два или три года до даты проведения Смотра (далее – Участники, Авторы конкурсной работы). Срок проведения Смотра с 1 мая до 1 июля (информация о конкурсе публикуется на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr).

1.5. Сроки проведения отдельных этапов конкурса могут быть скорректированы и опубликованы на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr.

1.6. Смотр проводится по следующим номинациям:

1.6.1. Лучшие работы по мнению участников Смотра (далее – Номинация 1, называемая также «выбор авторов работ»);

1.6.2. Лучшие работы по мнению представителей научно-исследовательских организаций и организаций высшего образования (далее – Номинация 2, называемая также «выбор учёных и преподавателей»);

1.6.3. Лучшие работы по мнению представителей других организацией, деятельность которых тесно связана с математикой (далее – Номинация 3, называемая также «выбор работодателей»).

1.7. Кафедра фундаментальной математики не менее чем за три рабочих дня до даты начала приема конкурсных работ публикует на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород информацию об условиях Смотра, критерии и порядок оценок конкурсных работ, место, срок и порядок представления конкурсных работ, размер и форму награды, порядок и сроки объявления результатов Смотра.

1.8. Положение и изменения к нему утверждаются ученым советом НИУ ВШЭ – Нижний Новгород и вводится в действие приказом директора НИУ ВШЭ – Нижний Новгород

1.9. Положение действует на период проведения Смотра.

2. Условия Конкурса

2.1. Смотр проходит в два этапа:

2.1.1. первый этап Смотра проводится с 1 мая по 10 июня включительно и состоит из следующих мероприятий:

– с 1 мая по 31 мая включительно осуществляется сбор конкурсных работ.

Конкурсные работы, поступившие после окончания срока приема конкурсных работ, к Смотру не допускаются.

– с 1 июня по 10 июня включительно осуществляется отбор конкурсных работ на соответствие правилам оформления конкурсных работ.

Список Участников по итогам первого отборочного этапа конкурсных работ будет опубликован на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород не позднее 10 июня.

2.1.2. второй этап Смотра проводится с 11 июня до 1 июля и состоит из следующих мероприятий:

- присвоение конкурсным работам порядковых номеров и их публикация в сборнике;

- оценка конкурсных работ членами Жюри для выявления Победителей в Номинациях 1-3.

Решение жюри Смотра по второму этапу Смотра должно быть принято не позднее 1 июля.

2.2. Информация о Победителях Смотра по каждой номинации по итогам второго этапа Смотра будет опубликована не позднее 9 июля на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr.

2.3. Награждение Победителей Смотра по каждой номинации осуществляется не позднее 15 июля.

3. Участники Смотра

3.1. Участниками Смотра являются студенты, а также выпускники образовательных организаций Российской Федерации, освоившие основные профессиональные образовательные программы высшего образования - программы бакалавриата, программы специалитета, программы магистратуры математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки в год проведения конкурса, а также за один, два или три года до даты проведения Смотра.

3.2. Участники, принимая участие в Смотре, соглашаются с правилами проведения Смотра, изложенными в настоящем Положении.

3.3. Участник может обращаться за консультациями, разъяснениями и технической поддержкой по вопросам, связанным с участием в Смотре, к Организатору.

3.4. В случае нарушения Участником настоящего Положения, а равно установления факта недобросовестного поведения в рамках Смотра, Организатор вправе не допустить такого Участника к участию в Смотре и отстранить на любом этапе от дальнейшего участия в Смотре и лишить призового места.

4. Жюри Смотра

4.1. Рассмотрение конкурсных работ Участников и определение Победителя Смотра по каждой номинации осуществляет жюри Смотра, состав которого формируется Оргкомитетом Смотра и публикуется на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.

4.2. Для выявления Победителей в каждой номинации формируется три группы Жюри, состоящие из:

4.2.1 всех Участников Смотра для выявления Победителя в Номинации 1 (далее – группа Жюри 1);

4.2.2 представителей научно-исследовательских организаций и организаций высшего образования для выявления Победителя в Номинации 2 (далее – группа Жюри 2);

4.2.3 представителей других организацией, деятельность которых тесно связана с математикой, для выявления Победителя в Номинации 3 (далее – группа Жюри 3).

4.3. При оценке работ Участников член жюри Смотра по каждой номинации руководствуется следующими критериями:

4.3.1. Понятность постановки задачи. После прочтения работы должно быть ясно, какая задача решалась автором;

4.3.2. Доступность введения для неспециалистов. Базовые термины и факты исследуемой области должны быть изложены в форме, доступной для понимания широкой математической аудиторией;

4.3.3. Качество изложения основного научного результата, полученного автором;

4.3.4. Качество обоснования основного научного результата, полученного автором;

4.3.5. Качество оформления работы - стилистическое единство, качество вёрстки текста, наличие необходимых частей в работе;

4.3.6. Наличие и уровень публикаций автора по теме работы.

4.4. Каждый член жюри Смотра проводит оценку работ Участников по критериям, указанным в п. 4.3. настоящего Положения, по бинарной шкале (0 или 1 балл), где «0» – «конкурсная работа имеет существенные недостатки и в представленном на Смотр виде не может считаться достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно», а «1» – «конкурсная работа является достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно».

4.5. Каждый член группы Жюри обязан оценить 5 работ, направленных ему Оргкомитетом случайным образом, а также выбрать для оценки по своему усмотрению любые другие от 2 до 5 работ из опубликованных в сборнике конкурсных работ.

4.6. Набранные баллы от каждой группы Жюри суммируются отдельно. Авторы работ, набравшие наибольшее количество баллов от одной группы Жюри, признаются Победителями в соответствующей Номинации.

4.7. При определении итоговых оценок работ учитываются оценки, присланные членами каждой из трёх групп Жюри до даты окончания приёма оценок от Жюри.

5. Правила оформления конкурсных работ и порядок их представления

5.1. Конкурсная работа должна быть выполнена в формате PDF и содержать:

5.1.1. Полный текст выпускной квалификационной работы со всеми пригодными для изображения в статическом виде приложениями;

5.1.2. Отзыв научного руководителя о работе (необязательно). Направляя отзыв, Участник подтверждает согласие научного руководителя на публикацию отзыва в сети Интернет;

5.1.3. Скан/фото заполненного и подписанного Заявления о новизне согласно Приложению.

5.2. К конкурсной работе должно прилагаться письмо с информацией об Участнике. Информация об Участнике должна содержать следующие данные:

5.2.1. фамилия, имя, отчество;

5.2.2. контактный номер телефона;

5.2.3. страна и город проживания;

5.2.4. информация о (планируемой) дате защиты представленной на Смотр выпускной квалификационной работы.

5.3. Конкурсная работа направляется Организатору в электронном виде. Конкурсные работы в электронном виде направляются Организатору на корпоративную электронную почту, указанную на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr.

5.4. Конкурсные работы должны быть направлены Организатору в срок, указанный на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr.

6. Подведение итогов Смотра

6.1. Решение жюри Смотра должно быть принято не позднее 10 июня (I этап) и 01 июля (II этап).

6.2. Оргкомитет осуществляет сбор и обработку оценок, выставленных членами жюри Смотра, в электронном виде заочно. Очных заседаний членов Жюри не предусмотрено.

6.3. Решение жюри Смотра оформляется протоколами заседания Оргкомитета, которые подлежат опубликованию на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород не позднее 9 июля.

6.4. Победителями Смотра по каждой номинации являются Участники, набравшие высший балл по результатам заочного голосования жюри Смотра.

6.5. Решение жюри Смотра является окончательным и обязательным для Участников.

6.6. Подлинники протоколов заседаний Оргкомитета и прилагаемые к ним материалы хранятся в структурном подразделении НИУ ВШЭ – Нижний Новгород,

обеспечивающем проведение Смотра, в течение пятилетнего срока оперативного хранения.

6.7. Протоколы заседаний Оргкомитета и прилагаемые к ним материалы являются документами постоянного срока хранения. По истечении пятилетнего срока оперативного хранения протоколы и прилагаемые к ним материалы передаются по описи на архивное хранение в Общий отдел НИУ ВШЭ – Нижний Новгород в установленном в НИУ ВШЭ – Нижний Новгород порядке.

7. Финансирование Смотра

7.1. Призовой фонд Смотра отсутствует, денежное вознаграждение Победителей Смотра по каждой номинации не предусмотрено.

7.2. По результатам подведения итогов Смотра Победитель Смотра из каждой номинации награждается нематериальным вознаграждением в виде диплома I или II степени Победителя Смотра в соответствующей номинации.

8. Авторские права

8.1. Конкурсная работа является результатом творческой деятельности соответствующего Автора конкурсной работы.

8.2. Автор конкурсной работы гарантирует Организатору Смотра, что:

8.2.1. на момент направления (передачи) конкурсной работы он является единственным ее правообладателем, обладает всеми необходимыми правами для принятия всех условий проведения Смотра, предусмотренных настоящим Положением. В случае если Авторами конкурсной работы являются несколько лиц, Автор, направляющий конкурсную работу Организатору, обязуется заблаговременно получить согласие остальных лиц на направление работы Организатору и обеспечить достижение соглашения с остальными лицами в отношении распоряжения исключительным правом на конкурсную работу в соответствии с условиями, предусмотренными настоящим Положением;

8.2.2. использование конкурсной работы Организатором Смотра в соответствии с условиями настоящего Положения не приведет к нарушению прав и законных интересов третьих лиц;

8.2.3. им за свой счет будут предприняты все необходимые действия, исключающие возникновение (или обеспечивающие возмещение уже понесенных) расходов Организатора Смотра, связанных с требованиями и претензиями третьих лиц в отношении использования конкурсной работы. До полного выяснения обстоятельств использования и удовлетворения соответствующих требований и претензий конкурсная работа, послужившая их основанием, исключается из Смотра.

8.3. Автор конкурсной работы предоставляет Организатору Смотра право использования конкурсной работы на условиях простой (неисключительной) лицензии путем:

8.3.1. воспроизведения в любой форме, без ограничения количества экземпляров;

8.3.2. распространения, включая воспроизведенные экземпляры, путем продажи или иного отчуждения;

8.3.3. доведение до всеобщего сведения;

8.3.4. включения в составные и иные произведения;

8.3.5. перевода или другой переработки с возможностью последующего использования любыми способами такого перевода или иным образом переработанного произведения (производного произведения) и распоряжения исключительным правом на производное произведение.

Использование конкурсной работы Организатором Смотра допускается на территории любого государства (на территории всего мира) в течение всего срока действия исключительного права на конкурсную работу с момента предоставления права использования, без выплаты вознаграждения за использование конкурсной работы и без представления отчетов. Право использования конкурсной работы считается предоставленным в момент получения Организатором Смотра конкурсной работы в порядке, указанном в настоящем Положении, безотносительно результатов оценки работ Участников Смотра.

8.4. Автор конкурсной работы дают свое согласие на:

8.4.1. использование конкурсной работы Организатором Смотра с указанием имени Автора при каждом таком использовании;

8.4.2. использование созданной им конкурсной работы в составе сборника работ.

8.5. Принимая участие в Смотре, Автор конкурсной работы выражает свое согласие на:

8.5.1. сбор, запись, систематизацию, хранение, уточнение, извлечение, использование, удаление и уничтожение Организатором следующих своих персональных данных, предоставленных и предоставляемых Организатору, в частности: фамилии, имени, отчества; даты, года, места рождения; образования, квалификации и их уровня; профессии (специальности); места и адреса работы, должности; места регистрации и проживания; номера телефонов (мобильный, домашний, рабочий); адреса электронной почты; адресов страниц Автора в социальных сетях и прочих Интернет-сайтах; иных данных, предоставляемых Организатору, а также обусловленных участием Автора в Смотре;

8.5.2. передачу третьим лицам (распространение, в том числе посредством корпоративного сайта (портала) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, предоставление, доступ) Организатором следующих своих персональных данных, предоставленных и предоставляемых Организатору, в частности: фамилии, имени, отчества; даты, года, места рождения; образования, квалификации и их уровня; профессии (специальности); места и адреса работы, должности; города регистрации и проживания; адреса электронной почты; адресов страниц Автора в социальных сетях и прочих Интернет-сайтах.

8.6. Принимая участие в Смотре, Автор конкурсной работы выражает свое согласие, что обработка персональных данных Автора может осуществляться как с помощью средств вычислительной техники (автоматизированная обработка), так и без их применения.

8.7. Целями предоставления согласия Автора на обработку его персональных данных является обеспечение соблюдения Организатором прав Автора на имя, обеспечения равных условий для всех Участников и гласности проведения Смотра, распространения его результатов. Срок, в течение которого действует согласие Автора, равен сроку действия исключительного права на конкурсную работу. Отзыв согласия Автора на обработку его персональных данных осуществляется в порядке, предусмотренном Федеральным законом от 27.07.2006 № 152-ФЗ «О персональных данных».

8.8. Представленные на Смотр работы проверяются Оргкомитетом на соответствие формальным требованиям настоящего Положения. При этом рецензирования работ не происходит, члены жюри представляют лишь оценки, но не рецензии. В Сборнике работ указывается дата его публикации. В силу этого:

8.8.1. Сборник не может считаться рецензируемым научным изданием;

8.8.2. Публикация научных результатов в составе выпускной квалификационной работы в Сборнике не является препятствием для публикации их в составе статьи в рецензируемых научных изданиях;

8.8.3. Публикация работы в Сборнике может быть использована для установления научного приоритета;

8.8.4. Опубликованная в Сборнике работа не может быть полностью бесследно отозвана после публикации Сборника.

Приложение
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от _____

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием _____ являются:

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: *перечислить сделанное (поиск в Интернете, выступления на семинарах, консультации с коллегами и т.п.)*

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре.

Защита работы состоится/состоялась _____. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.

Подпись ФИО полностью

Дата
город, страна

Пример заполнения Приложения

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Иванова Ивана Ивановича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Конструкции, связанные с продолжением интеграла Петтиса» являются: Определение 2.3, Лемма 3.1, доказательство Теоремы 3.4, Замечания 1.2, 1.3, 1.7.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: продолжение интеграла Петтиса, Pettis integral continuation, в выдаче поисковиков было исследовано 23 статьи, 5 тезисов докладов, 6 монографий, 25 препринтов, 4 диссертации (список см. в Приложении 1 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1-4], [5], [7] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Иваном Петровичем Сидоровым, доцентом кафедры математики факультета естественных наук Пензенского государственного университета.
- Проведена переписка с профессором кафедры дифференциальных уравнений факультета математики Казанского государственного университета Сидором Петровичем Ивановым.
- Проведено выступление на научном семинаре отдела математики и информатики Самарского государственного педагогического университета (руководитель семинара член-корреспондент РАН Петр Иванович Сидоров).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоится 30.05.2021. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись Иванов Иван Иванович
15 мая 2021 г. Пермь, Россия

Смотр дипломных работ математиков России 2021

Уважаемые коллеги!

Приглашаем Вас и Ваших учеников принять участие в **Смотре дипломных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей России.**

На Смотр можно представить как готовящуюся к защите в 2021 году выпускную квалификационную работу бакалавра, специалиста или магистра, так и защищённую в 2018, 2019, 2020, 2021 годах. **Участие в Смотре заочное и бесплатное**, участники присылают свои работы **по электронной почте** в Оргкомитет. Главное требование — работа должна содержать новый математический материал (то есть хотя бы одно из этого: новые определения, теоремы, доказательства, замечания, пригодные для проверки гипотезы и прочее) и должно быть указано, что именно автор работы сделал для того, чтобы убедиться, что этот материал действительно новый.

Подробности: *https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr*



Этапы проведения Смотра:

- **1 мая по 31 мая** – сбор заявок и выпускных квалификационных работ;
- **1 июня по 10 июня** – вёрстка сборника выпускных квалификационных работ, формирование списка оценщиков;
- **10 июня** – публикация сборника работ на сайте Смотра и рассылка сборника для оценки участникам и оценщикам Смотра;
- **11 июня по 1 июля** – сбор оценок;
- **8 июля** – публикация оценок;
- **15 июля** – подведение итогов Смотра, награждение авторов.

Кафедра фундаментальной математики