

О возмущениях алгебраических автоморфизмов двумерного тора

В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина

НИУ ВШЭ НН

2021

Окружность и двумерный тор

Представим окружность \mathbb{S}^1 как фактор-группу группы \mathbb{R}^1 по группе $\mathbb{Z} : \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}$ с естественной проекцией $p_1 : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ и двумерный тор \mathbb{T}^2 как фактор-группу группы \mathbb{R}^2 по целочисленной решётке $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$ с естественной проекцией $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Алгебраический автоморфизм двумерного тора

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$.

Тогда она индуцирует отображение $\hat{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$\hat{A} : \begin{cases} \bar{x} = ax + by \pmod{1} \\ \bar{y} = cx + dy \pmod{1} \end{cases},$$

которое является **алгебраическим автоморфизмом двумерного тора**.

Если собственные значения матрицы A не равны по модулю единице, то автоморфизм \hat{A} называется **гиперболическим**.
В противном случае автоморфизм \hat{A} будем называть **негиперболическим**.

Периодический автоморфизм двумерного тора

Определение

Аutomорфизм \hat{A} называется периодическим, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\hat{A}^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом \hat{A} .

Топологическая классификация негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора

Из результатов работы [1] следует:

Утверждение.

Каждый класс топологической сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора задан в точности одной из следующих матриц:

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (m \in \{0, 1, 2, \dots\});$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. S.Batterson. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 256 (Dec., 1979), pp. 395-403

Топологическая классификация негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора

Следствие.

Существует 6 классов топологической сопряжённости периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора, каждый из которых задан в точности одной из следующих матриц:

$$A_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_2(0)$, A_5 , A_6 , A_7 индуцируют сохраняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2, 4, 3 и 6 соответственно, а матрицы A_3 , A_4 индуцируют не сохраняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2.

Диффеоморфизм Морса-Смейла

Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом (компактном без края) связном ориентируемом n -многообразии, ($n \geq 1$), M^n называется **диффеоморфизмом Морса-Смейла**, если

- 1 неблуждающее множество Ω_f конечно и гиперболично;
- 2 многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых периодических точек p, q .

Диффеоморфизм Морса-Смейла f называется **градиентно-подобным**, если из условия $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^u$.

Утверждение

Диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^2 \rightarrow M^2$, где M^2 – замкнутая ориентируемая поверхность, является градиентно-подобным, если устойчивые и неустойчивые многообразия различных седловых точек не пересекаются.

Диффеоморфизм M_z

Рассмотрим диффеоморфизм $M_z : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, который зависит от единственного параметра $\varepsilon \in (-1, 1)$ и на каждом промежутке $(k; k + 1]$, $k \in \mathbb{Z}$, задаётся формулой:

$$M_z : \bar{z} = k + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \operatorname{tg} \left(\pi \left(z - \frac{1}{2} \right) \right) \right).$$

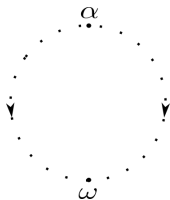
Отображение Мёбиуса на окружности

Рассмотрим отображение $M_{z,p_1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, заданное следующей формулой:

$$M_{z,p_1} = p_1(M_z(p_1^{-1}(z))),$$

где под $p_1^{-1}(z)$ подразумевается полный прообраз точки z .

Отображение M_{z,p_1} мы будем называть отображением Мёбиуса на окружности.



Отображение Мёбиуса на двумерном торе

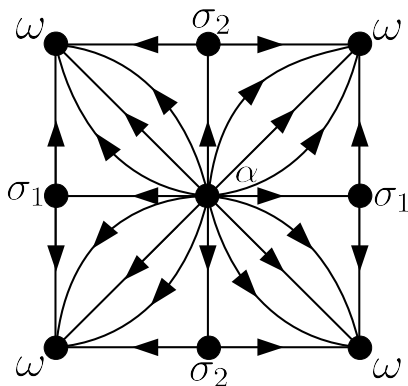
Рассмотрим отображение двумерного тора, заданное формулой:

$$M_{\varepsilon, \chi_2} = \begin{pmatrix} M_{x, \chi_1} & 0 \\ 0 & M_{y, \chi_1} \end{pmatrix}$$

которое будем называть отображением Мёбиуса на двумерном торе, где $\varepsilon \in (-1, 1)$.

При $\varepsilon = 0$ отображение M_{ε, p_2} тождественно. При $\varepsilon \neq 0$ отображение M_{ε, p_2} является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из 4-х неподвижных точек: стока, источника и 2-х седел. Устойчивые и неустойчивые многообразия различных седловых точек не пересекаются. Ограничение отображения M_{ε, χ_2} на инвариантные многообразия неподвижных точек сохраняет его ориентацию. Из работы [2] следует, что отображение M_{ε, χ_2} при $\varepsilon \neq 0$ включается в топологический поток.

Фазовый портрет потока, в который включается отображение Мёбиуса на двумерном торе при $\varepsilon \in (-1, 0)$



Основной результат

Пусть $f_{\varepsilon, A} = M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}$, где M_{ε, p_2} введённое ранее отображение Мёбиуса на двумерном торе, а \hat{A} некоторый алгебраический автоморфизм.

Теорема 1

Отображение $f_{\varepsilon, A}$, где

$$A \in \{A_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}, \text{ при}$$

$\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ представляет собой градиентно-подобный диффеоморфизм.

Теорема 2

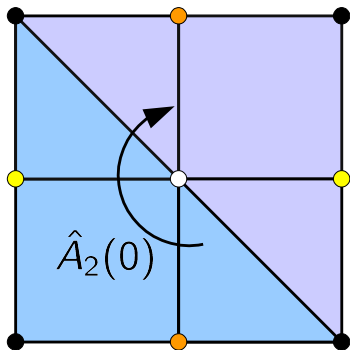
Отображение $f_{\varepsilon, A}$, где $A \in \{A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m = 2n (n \in \mathbb{N})\}$, при

$\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ представляет собой диффеоморфизм

Морса-Смейла, блуждающее множество которого содержит в точности m гетероклинических орбит.

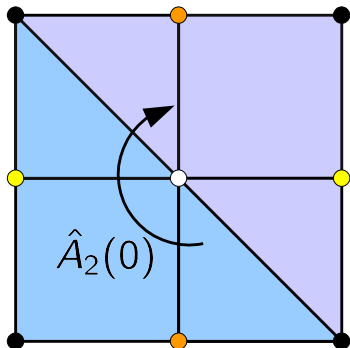
Теорема 1. Идея доказательства.

Отображение $\hat{A}_2(0)$, индуцированное матрицей $A_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, является сохраняющим ориентацию автоморфизмом двумерного тора периода 2.



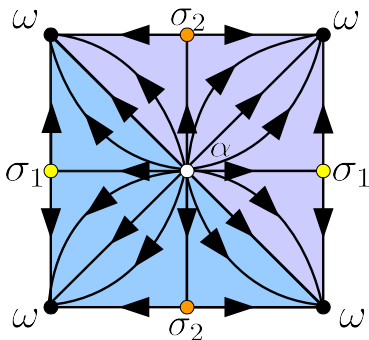
Теорема 1. Идея доказательства.

Для отображения $\hat{A}_2(0)$ существует в точности 4 неподвижные точки ($p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $p_2(0, 0)$, $p_2(0, \frac{1}{2})$ и $p_2(\frac{1}{2}, 0)$), которые совпадают с неблуждающим множеством отображения Мёбиуса на торе M_{ε, p_2} . На плоскости в фундаментальной области $[0, 1] \times [0, 1]$ отображение представляет собой поворот на π радиан относительно точки $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.



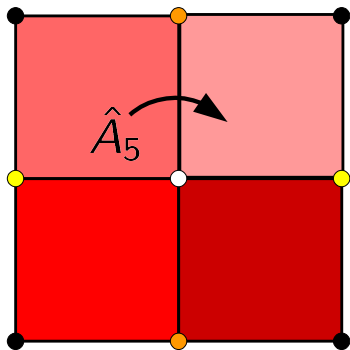
Теорема 1. Идея доказательства.

Отображение $f_{\varepsilon, A_2(0)} = M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}_2(0)$ двумерного тора является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого совпадает с множеством неподвижных точек возмущаемого автоморфизма.



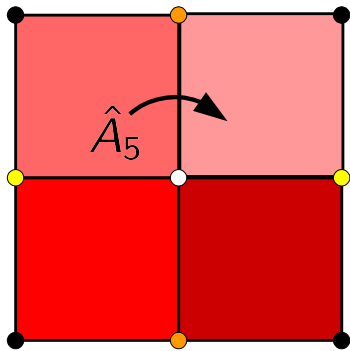
Теорема 1. Идея доказательства.

Отображение \hat{A}_5 , индуцированное матрицей $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, является сохраняющим ориентацию автоморфизмом двумерного тора периода 4.



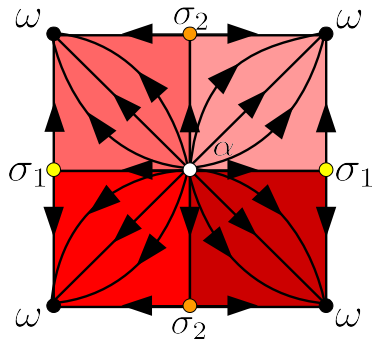
Теорема 1. Идея доказательства.

Для отображения \hat{A}_5 множество точек тора, период которых меньше 4, состоит из 4-х точек, которые совпадают с неблуждающим множеством отображения Мёбиуса на торе M_{ε, p_2} . При этом точки $p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $p_2(0, 0)$ являются неподвижными, точки $p_2(0, \frac{1}{2})$ и $p_2(\frac{1}{2}, 0)$ образуют орбиту периода 2. На плоскости в фундаментальной области $[0, 1] \times [0, 1]$ отображение представляет собой поворот на $\frac{\pi}{2}$ радиан относительно точки $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.



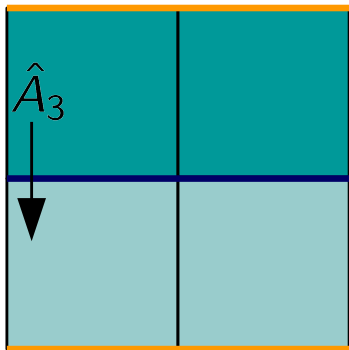
Теорема 1. Идея доказательства.

Отображение $f_{\varepsilon, A_5} = M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}_5$ двумерного тора является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого совпадает с множеством точек периода, меньшего периода возмущаемого автоморфизма. При этом при возмущении одна неподвижная точка становится стоком, другая источником, а орбита периода 2 становится седловой орбитой периода 2.



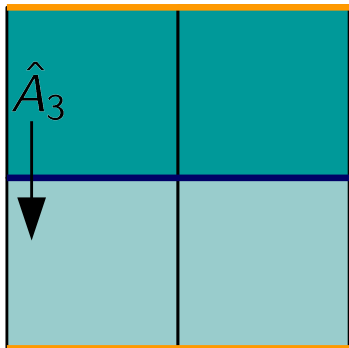
Теорема 1. Идея доказательства.

Отображение \hat{A}_3 , индуцированное матрицей $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, является не сохраняющим ориентацию автоморфизмом двумерного тора периода 2.



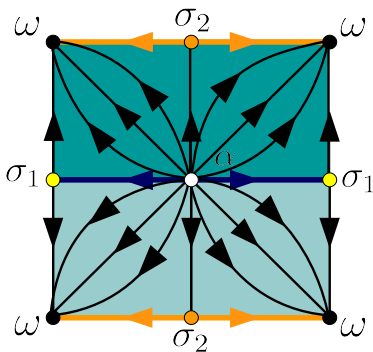
Теорема 1. Идея доказательства.

Для отображения \hat{A}_3 множество неподвижных точек представляет две параллели тора, которые являются проекциями прямых $y = 0$ и $y = \frac{1}{2}$ относительно p_2 . На плоскости в фундаментальной области $[0, 1] \times [0, 1]$ автоморфизм представляет собой отображение симметрии относительно оси $y = \frac{1}{2}$.



Теорема 1. Идея доказательства.

Отображение $f_{\varepsilon, A_3} = M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}_3$ двумерного тора является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого $(p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), p_2(0, 0), p_2(0, \frac{1}{2})$ и $p_2(\frac{1}{2}, 0))$ включено в множество неподвижных точек возмущаемого автоморфизма.



Теорема 2. Идея доказательства.

Теорема 2

Отображение $f_{\varepsilon, A}$, где $A \in \{A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m = 2n \ (n \in \mathbb{N})\}$, при $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ представляет собой диффеоморфизм Морса-Смейла, блуждающее множество которого содержит в точности m гетероклинических орбит.

Рассмотрим возмущение $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ негиперболического алгебраического автоморфизма двумерного тора, индуцированного матрицей $A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $m = 2l \ (l \in \mathbb{N})$ и $-1 < \varepsilon < 0$.

Каждая параллель тора является множеством, инвариантным относительно отображения $\hat{A}_1(m)$. Ограничение отображения $\hat{A}_1(m)$ на каждую параллель тора действует как поворот на некоторый угол α на окружности.

В дальнейшем для краткости будем писать f_ε вместо $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ и A вместо $A_1(m)$.

Теорема 2. Идея доказательства.

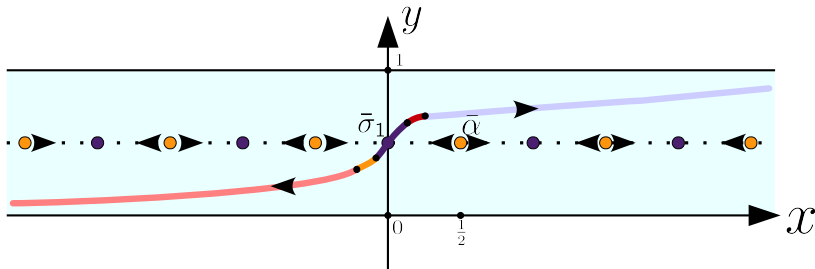
Шаг 1.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что неблуждающее множество диффеоморфизма f_ε конечно, гиперболично и состоит из 4-х неподвижных точек: 1 стоковая – $p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 1 источниковая – $p_2(0, 0)$, и 2 седловые – $p_2(0, \frac{1}{2})$ и $p_2(\frac{1}{2}, 0)$.

Теорема 2. Идея доказательства.

Шаг 2.

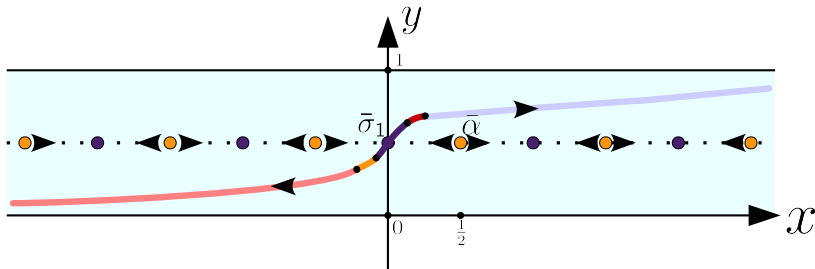
Для исследования поведения устойчивого и неустойчивого многообразий седловой точки $p_2(0, \frac{1}{2})$ рассмотрим такое накрывающее для f_ε отображение g_ε в области $\mathbb{R} \times [0, 1]$, что точки вида $(k, \frac{1}{2})$ ($k \in \mathbb{Z}$) являются седловыми неподвижными точками диффеоморфизма g_ε , а точки вида $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ($k \in \mathbb{Z}$) являются источниками неподвижными точками диффеоморфизма g_ε .



Теорема 2. Идея доказательства.

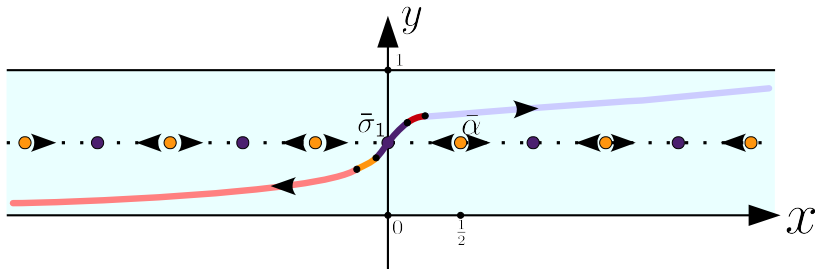
Рассмотрим седловую точку с координатами $(0, \frac{1}{2})$ и обозначим её через $\bar{\sigma}_1$.

Используя теорему Адамара-Перрона, можно рассмотреть локальное поведение устойчивого и неустойчивого многообразия точки $\bar{\sigma}_1$ в некоторой малой её окрестности. Зная действие накрывающего отображения g_ε , доказывается, что устойчивое многообразие седла $\bar{\sigma}_1$ идёт из источников.



Теорема 2. Идея доказательства.

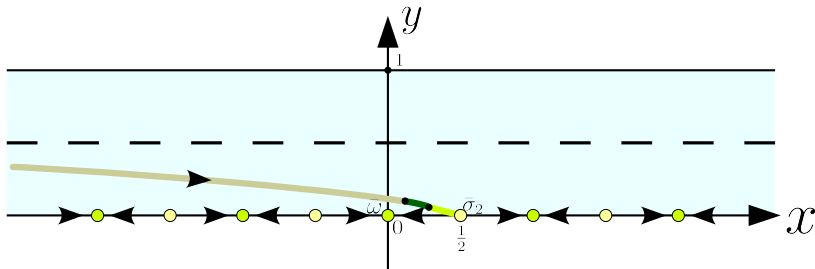
Выберем фундаментальную область на неустойчивом многообразии точки $\bar{\sigma}_1$. Рассматривая итерации фундаментальной области, методом математической индукции доказывается, что неустойчивое многообразие седла $\bar{\sigma}_1$ выглядит как график некоторой строго возрастающей функции такой, что при $x \rightarrow +\infty y \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow -\infty y \rightarrow 0$.



Теорема 2. Идея доказательства.

Шаг 3.

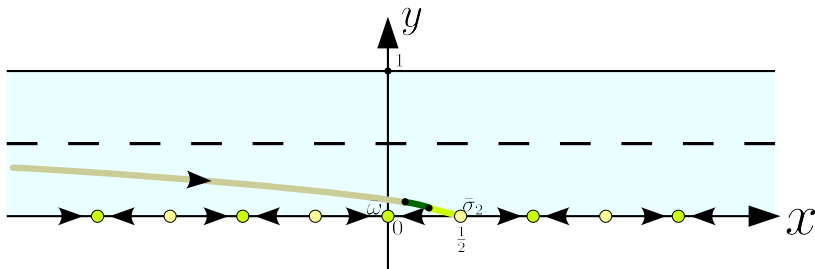
Для исследования поведения устойчивого и неустойчивого многообразий седловой точки $p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ рассмотрим такое накрывающее для f_ε отображение h_ε в области $\mathbb{R} \times [0, 1]$, что точки вида $(k + \frac{1}{2}, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) являются седловыми неподвижными точками диффеоморфизма h_ε , а точки вида $(k, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) являются стоковыми неподвижными точками диффеоморфизма g_ε .



Теорема 2. Идея доказательства.

Рассмотрим седловую точку с координатами $(\frac{1}{2}, 0)$ и обозначим её через $\bar{\sigma}_2$.

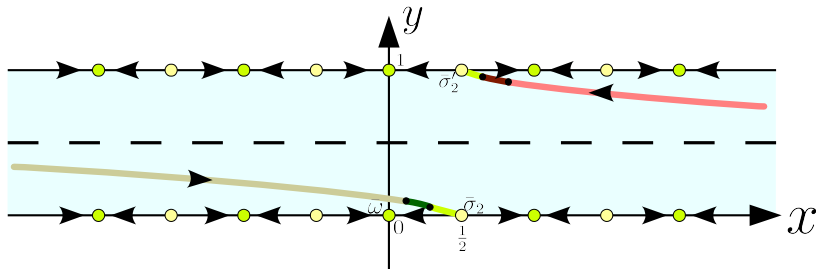
Аналогично доказывается, что неустойчивое многообразие седла $\bar{\sigma}_2$ идёт в стоки, а устойчивое представляет собой график некоторой строго убывающей функции такой, что при $x \rightarrow -\infty y \rightarrow \frac{1}{2}$.



Теорема 2. Идея доказательства.

Далее рассматривается точка $\bar{\sigma}'_2(\frac{1}{2}, 0)$, конгруэнтная точке $\bar{\sigma}_2$ относительно проекции p_2 , и накрывающее отображение такое, что точка $\bar{\sigma}'_2$ является седловой неподвижной точкой.

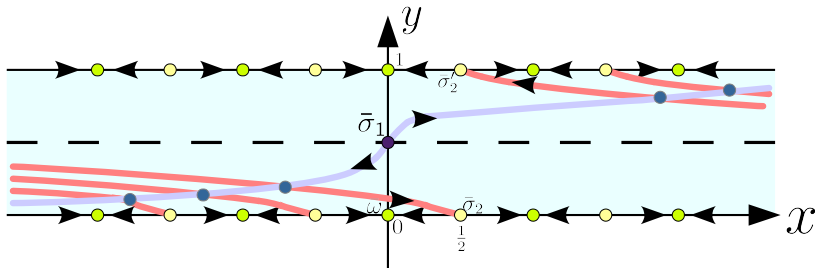
Аналогично доказывается, что неустойчивое многообразие седла $\bar{\sigma}'_2$ идёт в стоки, а устойчивое представляет собой график некоторой строго убывающей функции такой, что при $x \rightarrow +\infty y \rightarrow \frac{1}{2}$.



Теорема 2. Идея доказательства.

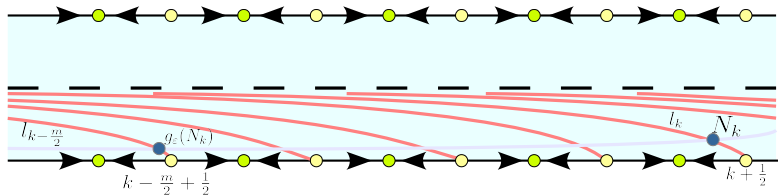
Шаг 4.

В области $\mathbb{R} \times [0, 1]$ рассматривается пересечение неустойчивого многообразия точки $\bar{\sigma}_1$ с устойчивыми многообразиями точек, конгруэнтных точкам $\bar{\sigma}_2$ относительно проекции p_2 .



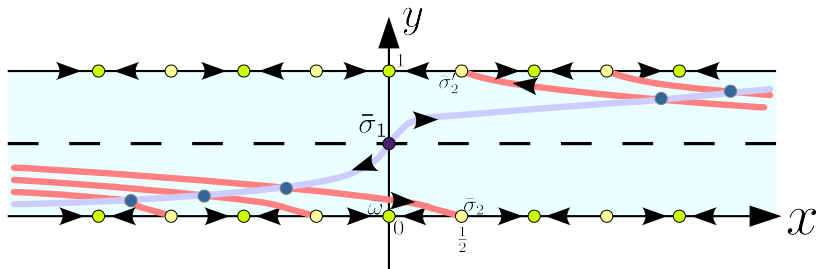
Теорема 2. Идея доказательства.

Обозначим через I_k устойчивое многообразие точки $(k + \frac{1}{2}, 0)$ относительно отображения h_ε . Точку пересечения неустойчивого многообразия точки $\bar{\sigma}_1$ относительно отображения g_ε с многообразием I_k обозначим через N_k . Под действием отображения g_ε точка N_k итерируется в точку, лежащую на многообразии $I_{k - \frac{m}{2}}$. Таким образом, в области $\mathbb{R} \times [0, \frac{1}{2}]$ содержится $\frac{m}{2}$ орбит, которые при проекции на двумерный тор будут представлять $\frac{m}{2}$ гетероклинических орбит.



Теорема 2. Идея доказательства.

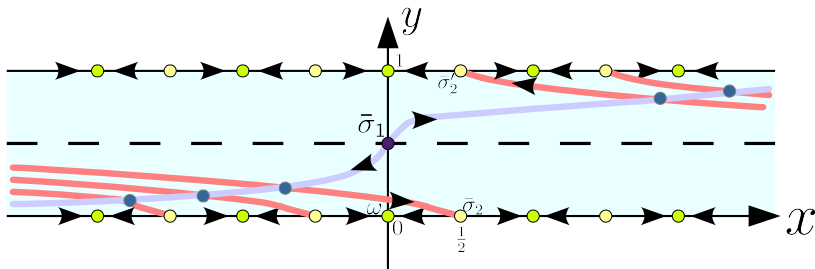
Используя свойства накрывающего пространства и естественной проекции, доказывается, что любая замкнутая кривая, образованная пересечением устойчивого и неустойчивого многообразий седловых точек, заключенная между двумя соседними точками одной гетероклинической орбиты, принадлежит классу петель $\langle \frac{m}{2}, 0 \rangle$.



Теорема 2. Идея доказательства.

Шаг 5.

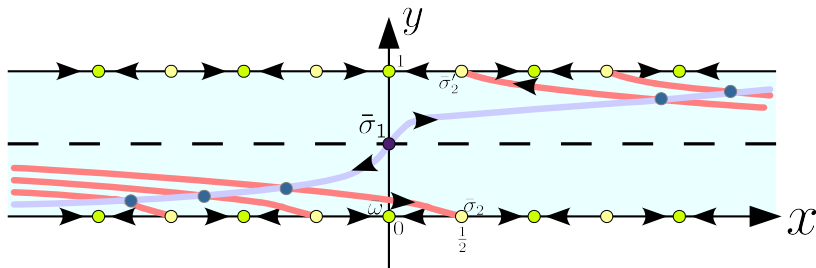
Используя доказанные свойства накрывающих отображений, доказываем, что устойчивое и неустойчивое многообразия различных седловых точек пересекаются трансверсально.



Теорема 2. Идея доказательства.

Шаг 6.

Аналогично доказывается, что в области $\mathbb{R} \times [\frac{1}{2}, 1]$ многообразия пересекаются трансверсально, образуя $\frac{m}{2}$ гетероклинических. При этом замкнутые кривые на торе, образованные пересечением устойчивого и неустойчивого многообразия различных седловых точек, заключенных между двумя соседними точками одной гетероклинической орбиты, принадлежат классу петель $\langle \frac{m}{2}, 0 \rangle$.



Теорема 2. Идея доказательства.

Шаг 7.

Используя изученные свойства накрывающих отображений, доказывается, что отображение f_ε является диффеоморфизмом Морса-Смейла, блуждающее множество которого содержит в точности m гетероклинических орбит.