О неособых потоках Морса-Смейла с двумя предельными циклами

Данила Шубин, НИУ ВШЭ – НН

Это исследование было проведено в сотрудничестве с Ольгой Витальевной Починкой.

Постановка задачи

"Исследовать связь" динамики с топологией несущего многообразия

Конкретнее:

1. выяснить, на каких многообразиях бывают заявленные в заголовке потоки
2. классифицировать эти потоки на каждом из найденных многообразий
    - найти инварианты
    - найти полный инвариант (критерий)
    - реализовать каждый класс эквивалентности некоторым "каноническим"потоком
    - предъявить алгоритм, различающий полные инварианты

Основные определения

Для тех, кто забыл

Definition

Поток f^t называется *потоком Морса-Смейла*, если:

- f^t имеет конечное число неподвижных точек и гиперболических траекторий
- устойчивые и неустойчивые многообразия f^t пересекаются трансверсально
- f^t не имеет гетероклинических пересечений

Definition

Потоки f^t и f'^t на многообразии M^n называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$ переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением направления движения по траекториям.

Потоки на поверхностях

В силу **теоремы Хопфа**

$$\chi(M^n) = 0,$$

что для $n = 2$ влечёт

$$M^2 = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \text{ либо } M^2 = \mathbb{K}^2 = \mathbb{S}^1 \tilde{\times} \mathbb{S}^1$$

Потоки на поверхностях

В силу **теоремы Хопфа**

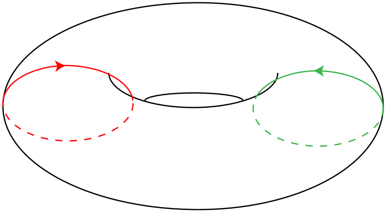
$$\chi(M^n) = 0,$$

что для $n = 2$ влечёт

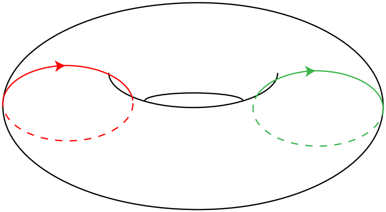
$$M^2 = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \text{ либо } M^2 = \mathbb{K}^2 = \mathbb{S}^1 \tilde{\times} \mathbb{S}^1$$

Theorem (Классификация на поверхностях)

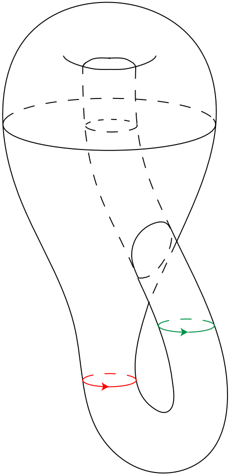
Существует ровно пять классов топологической эквивалентности неособых потоков на двумерных многообразиях с двумя периодическими орбитами. Причём два из них на торе, а три — на бутылке Клейна.



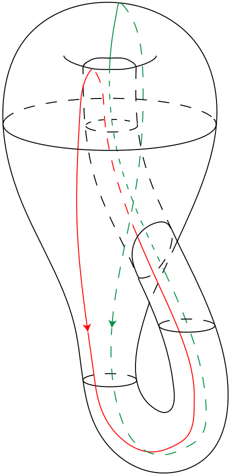
1.



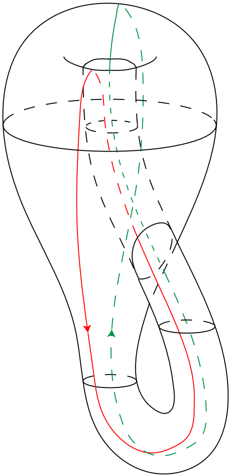
2.



1.



2.



3.

Потоки на трёхмерных многообразиях

Что уже известно

$$\chi(M^3) = 0 \Longrightarrow M^3 \text{ вообще любое трёхмерное}$$

Классификация следует из работы Уманского[1], но реализации нет, поэтому делаем сами.

[1] Я. Л. Уманский, "Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий", Матем. сб., 181:2 (1990), 212–239

Потоки на трёхмерных многообразиях

Что уже известно

Известны[1] некоторые многообразия, допускающие интересующие нас потоки:

Утверждение

Пусть на простом многообразии[2] M^3_+ существует НМС поток, неблуждающее множество которого состоит не более, чем из трёх нескрученных периодических траекторий. Тогда M^3_+ является линзовым пространством.

---

[1] Campos, Beatriz & Cordero, Alicia & Martinez-Alfaro, Jose & Vindel, P.. (2004). NMS Flows on Three-DimensionalManifolds with One Saddle Periodic Orbit. Acta Mathematatica Sinica-english Series - ACTA MATH SIN-ENGLISH SERIES. 20. 47-56. 10.1007/s10114-003-0305-z.

[2] n-многообразие называется *простым*, если его невозможно представить в виде связной суммы двух n-многообразий каждое из которых отлично от $\mathbb{S}^n$.

Потоки на трёхмерных многообразиях

Что уже известно

Бин Ю доказал[1], что на сфере всего один класс эквивалентности.

Утверждение

С точностью до топологической эквивалентности существует единственный НМС поток на $\mathbb{S}^3$ ровно с двумя периодическими орбитами, притягивающей A и отталкивающей R. Более того, периодические орбиты $A \sqcup R$ образуют зацепление Хопфа.

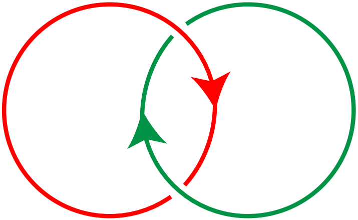


Рис.: Фазовые портреты эквивалентных потоков на 3-сфере

Потоки на трёхмерных многообразиях

Theorem (Классификация на трёхмерных многообразиях)

1. *Ориентируемое многообразие M^3_+ допускает поток из класса $G_2(M^3_+)$ тогда и только тогда, когда M^3_+ является линзовым пространством. С точностью до топологической эквивалентности существует ровно один НМС поток на $\mathbb{S}^3$ и ровно два потока на каждом линзовом пространстве, отличном от 3-сферы.*
2. *Единственным неориентируемым многообразием, допускающим поток из класса $G_2(M^3_-)$ является косое произведение 2-сферы на окружность $\mathbb{S}^2\tilde{\times}\mathbb{S}^1$. Обе периодические орбиты такого потока являются скрученными. При этом существует в точности один класс топологической эквивалентности потоков в множестве $G_2(\mathbb{S}^2\tilde{\times}\mathbb{S}^1)$.*

Потоки на трёхмерных многообразиях

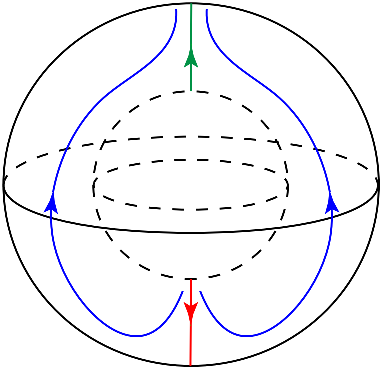
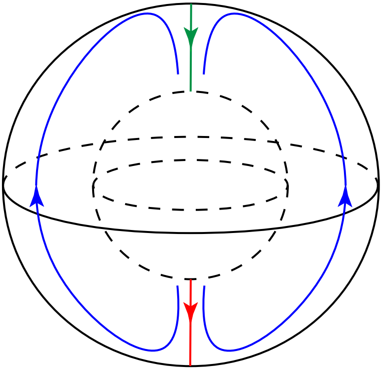



Рис.: Фазовые портреты неэквивалентных потоков на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

Потоки на n-мерных многообразиях

Theorem

Многообразие M^n допускает поток из класса $G_2(M^n)$ тогда и только тогда, когда $M^n = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ или $M^n = \mathbb{S}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$. При этом существует в точности два класса топологической эквивалентности потоков в каждом множестве $G_2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ и $G_2(\mathbb{S}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1)$.

Общие свойства

Классификация предельных циклов

Пусть $a_\pm : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ определён формулой:

$$a_\pm(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (\pm 2x_1, 2x_2, ..., 2x_{n-1}).$$

Пусть $a_\pm : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ определён формулой:

$$a_\pm(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (\pm 2x_1, 2x_2, ..., 2x_{n-1}).$$

Зададим диффеоморфизм $g_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (тоже) формулой

$$g_\pm(x, r) = (a_\pm(x), r - 1).$$

Общие свойства

Классификация предельных циклов

Пусть $a_\pm : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ определён формулой:

$$a_\pm(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (\pm 2x_1, 2x_2, ..., 2x_{n-1}).$$

Зададим диффеоморфизм $g_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (тоже) формулой

$$g_\pm(x, r) = (a_\pm(x), r - 1).$$

Положим $\Pi_\pm = \mathbb{R}^n / \langle g_\pm \rangle$ и обозначим через $v_\pm : \mathbb{R}^n \to \Pi_\pm$ естественную проекцию. Определим поток $\bar{b}^t$ на $\mathbb{R}^n$ системой дифференциальных уравнений:

$$(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1}, \dot{x}_n) = (0, \ldots, 0, 1)$$

Общие свойства

Классификация предельных циклов

Пусть $a_{\pm} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ определён формулой:

$$a_{\pm}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (\pm 2x_1, 2x_2, ..., 2x_{n-1}).$$

Зададим диффеоморфизм $g_{\pm} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (тоже) формулой

$$g_{\pm}(x, r) = (a_{\pm}(x), r - 1).$$

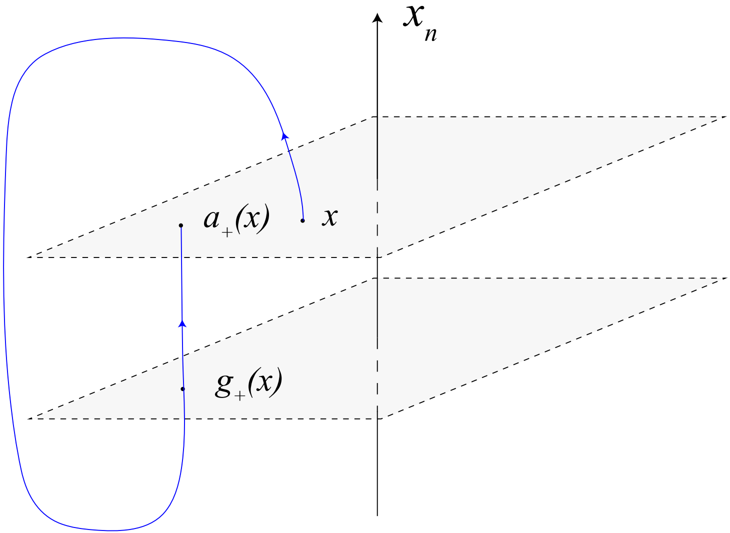
Положим $\Pi_{\pm} = \mathbb{R}^n / \langle g_{\pm} \rangle$ и обозначим через $v_{\pm} \colon \mathbb{R}^n \to \Pi_{\pm}$ естественную проекцию. Определим поток $\bar{b}^t$ на $\mathbb{R}^n$ системой дифференциальных уравнений:

$$(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1}, \dot{x}_n) = (0, \ldots, 0, 1)$$

Естественная проекция $v_{\pm}$ индуцирует (другой) поток $b^t_{\pm} = v_{\pm} \bar{b}^t v_{\pm}^{-1} : \Pi_{\pm} \to \Pi_{\pm}$.

Общие свойства

Классификация предельных циклов



Общие свойства

Классификация предельных циклов

Ирвин[1] классифицировал предельные циклы с точностью до топологической сопряжённости.

Утверждение

Гиперболическая отталкивающая орбита R *потока* $f^t : M^n \to M^n$ *обладает неустойчивым многообразием* $W^u_R = \{x \in S \mid f^t(x) \to R$ *при* $t \to -\infty\}$ *со следующими свойствами:*

1. *существует гомеоморфизм* $h_R : W^u_R \to \Pi_\pm$, *осуществляющий эквивалентность потоков* $f^t|_{W^u_R}$ *и* $b^t_\pm$. *Орбита* R *является скрученной, если поток* $f^t|_{W^u_R}$ *эквивалентен потоку* b^t_- *и нескрученной, в противном случае.*
2. W^u_R *диффеоморфно* $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, *если* R *— нескрученная, и диффеоморфно* $\mathbb{R}^{n-1} \widetilde{\times} \mathbb{S}^1$, *если* R *— скрученная.*

[1] Irwin, M.: A Classification of Elementary Cycles. Topology 9, 35–48 (1970).

Общие свойства

Классификация предельных циклов

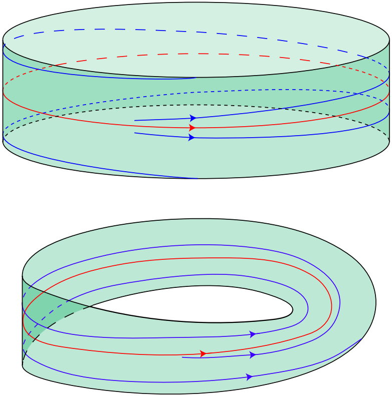


Рис.: Нескрученная и скрученная орбиты двумерного потока.

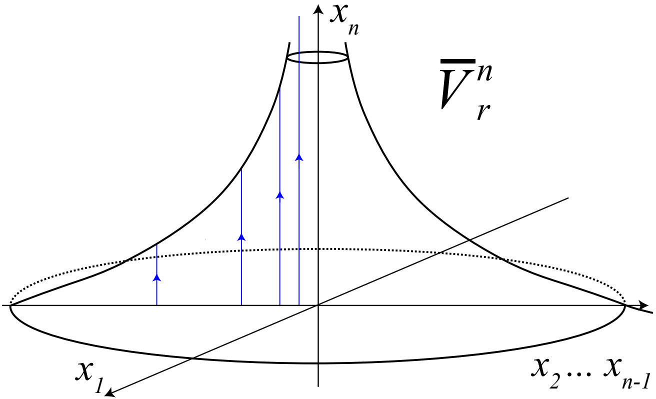
Общие свойства

Построение канонических потоков. Выберем глобальную секущую

$$\bar{V}_r^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant r2^{-x_n}\right\}, \quad \mathbb{V}_{\pm r}^n = v_\pm(\bar{V}_r^n) \quad r > 0$$

$$a_\pm(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (\pm 2x_1, 2x_2, ..., 2x_{n-1})$$

$$g_\pm(x, r) = (a_\pm(x), r-1)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$



Общие свойства

Построение канонических потоков

$$\bar{V}^n = \bar{V}_1^n,\, \mathbb{V}_{\pm}^n = v_{\pm}(\bar{V}^n),\, \mathbb{L}_{\pm}^n = v_{\pm}(Ox_n)$$

$$\mathbb{V}_+^n = \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{V}_-^n = \mathbb{D}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$$

Общие свойства

Построение канонических потоков

$$\bar{V}^n = \bar{V}^n_1, \mathbb{V}^n_\pm = v_\pm(\bar{V}^n), \mathbb{L}^n_\pm = v_\pm(Ox_n)$$

$$\mathbb{V}^n_+ = \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{V}^n_- = \mathbb{D}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$$

На этих многообразиях определены потоки $b^t_\pm = v_\pm \bar{b}^t v^{-1}_\pm$

Общие свойства

Построение канонических потоков

$$\bar{V}^n = \bar{V}^n_1,\, \mathbb{V}^n_\pm = v_\pm(\bar{V}^n),\, \mathbb{L}^n_\pm = v_\pm(Ox_n)$$

$$\mathbb{V}^n_+ = \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{V}^n_- = \mathbb{D}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$$

На этих многообразиях определены потоки $b^t_\pm = v_\pm \bar{b}^t v_\pm^{-1}$

$$j : \partial\mathbb{V}^n_\pm \to \partial\mathbb{V}^n_\pm$$

$$J(s,0) = (j(s),1) : \partial\mathbb{V}^n_\pm \times \{0\} \to \partial\mathbb{V}^n_\pm \times \{1\}$$

Общие свойства

Построение канонических потоков

$$\bar{V}^n = \bar{V}^n_1,\, \mathbb{V}^n_\pm = v_\pm(\bar{V}^n),\, \mathbb{L}^n_\pm = v_\pm(Ox_n)$$

$$\mathbb{V}^n_+ = \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{V}^n_- = \mathbb{D}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$$

На этих многообразиях определены потоки $b^t_\pm = v_\pm \bar{b}^t v_\pm^{-1}$

$$j : \partial\mathbb{V}^n_\pm \to \partial\mathbb{V}^n_\pm$$

$$J(s,0) = (j(s),1) : \partial\mathbb{V}^n_\pm \times \{0\} \to \partial\mathbb{V}^n_\pm \times \{1\}$$

Положим

$$M^n_j = \mathbb{V}^n_\pm \times \{0\} \cup_J \mathbb{V}^n_\pm \times \{1\}.$$

$p_j : \mathbb{V}^n_\pm \times \mathbb{Z}_2 \to M^n_j$ — естественная проекция.

Общие свойства

Построение канонических потоков

$$\bar{V}^n = \bar{V}_1^n,\ \mathbb{V}_\pm^n = v_\pm(\bar{V}^n),\ \mathbb{L}_\pm^n = v_\pm(Ox_n)$$

$$\mathbb{V}_+^n = \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{V}_-^n = \mathbb{D}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$$

На этих многообразиях определены потоки $b_\pm^t = v_\pm \bar{b}^t v_\pm^{-1}$

$$j : \partial\mathbb{V}_\pm^n \to \partial\mathbb{V}_\pm^n$$

$$J(s,0) = (j(s),1) : \partial\mathbb{V}_\pm^n \times \{0\} \to \partial\mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}$$

Положим

$$M_j^n = \mathbb{V}_\pm^n \times \{0\} \cup_J \mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}.$$

$p_j : \mathbb{V}_\pm^n \times \mathbb{Z}_2 \to M_j^n$ — естественная проекция.

$$f_j^t(x) = \begin{cases} p_j b_\pm^t (p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{0\}})^{-1}(x),\ x \in p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{0\}},\ t \leqslant 0 \\ p_j b_\pm^{-t} (p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}})^{-1}(x),\ x \in p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}},\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Общие свойства

Построение канонических потоков

$$f_j^t(x) = \begin{cases} p_j b_\pm^t (p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{0\}})^{-1}(x), \, x \in p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{0\}}, \, t \leqslant 0 \\ p_j b_\pm^{-t} (p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}})^{-1}(x), \, x \in p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}}, \, t \geqslant 0. \end{cases}$$

Общие свойства

Построение канонических потоков

$$f_j^t(x) = \begin{cases} p_j b_{\pm}^t (p_j|_{\mathbb{V}_{\pm}^n \times \{0\}})^{-1}(x), \, x \in p_j|_{\mathbb{V}_{\pm}^n \times \{0\}}, \, t \leqslant 0 \\ p_j b_{\pm}^{-t} (p_j|_{\mathbb{V}_{\pm}^n \times \{1\}})^{-1}(x), \, x \in p_j|_{\mathbb{V}_{\pm}^n \times \{1\}}, \, t \geqslant 0. \end{cases}$$

Будем называть построенные потоки *n-мерными модельными потоками*.

Общие свойства

Построение канонических потоков

$$f_j^t(x) = \begin{cases} p_j b_\pm^t (p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{0\}})^{-1}(x), \; x \in p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{0\}}, \; t \leqslant 0 \\ p_j b_\pm^{-t} (p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}})^{-1}(x), \; x \in p_j|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}}, \; t \geqslant 0. \end{cases}$$

Будем называть построенные потоки *n-мерными модельными потоками*. Для любого модельного потока f_j^t, заданного на многообразии M_j^n положим

$$A_j = p_j(\mathbb{L}_\pm^n \times \{0\}), \; R_j = p_j(\mathbb{L}_\pm^n \times \{1\}) \text{ — аттрактор и репеллер,}$$

$$V_{A_j} = p_j(\mathbb{V}_\pm^n \times \{0\}), \; V_{R_j} = p_j(\mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}) \text{ — трубчатые окрестности,}$$

$$\Sigma_j = p_j(\partial \mathbb{V}_\pm^n \times \{0\}) = p_j(\partial \mathbb{V}_\pm^n \times \{1\}) \text{ — разделяющая поверхность.}$$

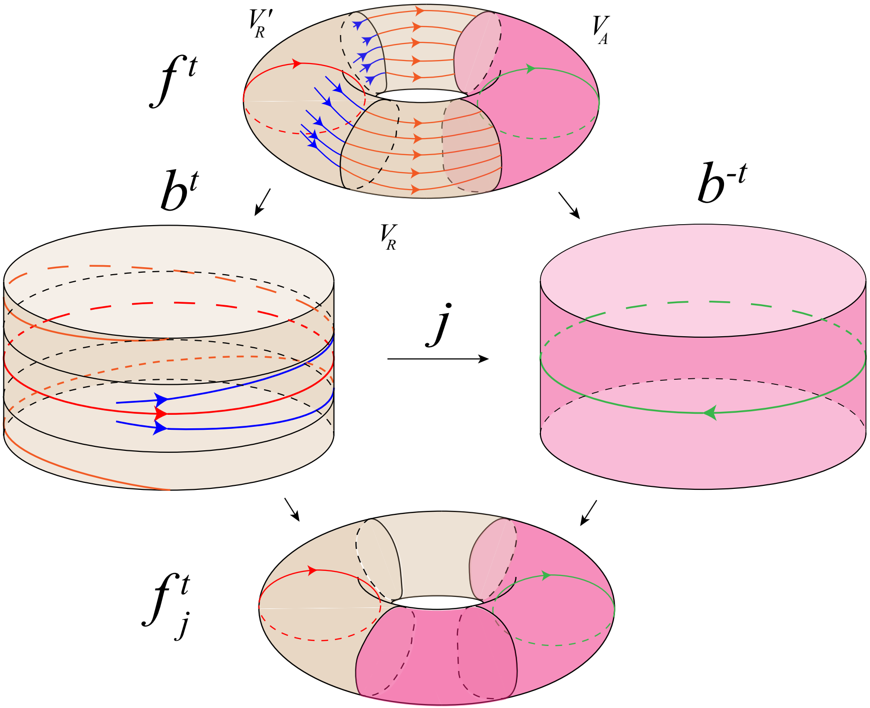
Классификация

Достаточно исследовать канонические

Основная идея: следующее утверждение позволяет свести задачу классификации всех потоков из $G_2(M^n)$ (2 орбиты, M^n — многообразие) к классификации модельных.

Lemma

Любой поток $f^t \in G_2(M^n)$ топологически эквивалентен некоторому модельному потоку $f_j^t : M_j^n \to M_j^n$.


V_R'
V_A
f^t
b^t
b^{-t}
V_R
j
f_j^t

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t\colon f^t \sim f_j^t$

Доказательство.
$f^t \in G_2(M^n)$ и A, R – притягивающая и отталкивающая гиперболические орбиты потока f^t.

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f^t_j \colon f^t \sim f^t_j$

Доказательство.
$f^t \in G_2(M^n)$ и A, R – притягивающая и отталкивающая гиперболические орбиты потока f^t.

$$\exists h_R : W^u_R \to \Pi_\pm,\ f^t|_{W^u_R} \text{ и } b^t_\pm; \quad \exists h_A : W^s_A \to \Pi_\pm,\ f^t|_{W^s_A} \text{ и } b^{-t}_\pm.$$

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t\colon f^t \sim f_j^t$

Доказательство.
$f^t \in G_2(M^n)$ и A, R – притягивающая и отталкивающая гиперболические орбиты потока f^t.

$$\exists h_R : W_R^u \to \Pi_\pm,\ f^t|_{W_R^u} \text{ и } b_\pm^t; \quad \exists h_A : W_A^s \to \Pi_\pm,\ f^t|_{W_A^s} \text{ и } b_\pm^{-t}.$$

$$V_A = h_A^{-1}(\mathbb{V}_\pm^n) \text{ и } H_A = h_A|_{\mathbb{V}_\pm^n}$$

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t\colon f^t \sim f_j^t$

Доказательство.
$f^t \in G_2(M^n)$ и A, R – притягивающая и отталкивающая гиперболические орбиты потока f^t.

$$\exists h_R : W_R^u \to \Pi_\pm,\ f^t|_{W_R^u} \text{ и } b_\pm^t; \quad \exists h_A : W_A^s \to \Pi_\pm,\ f^t|_{W_A^s} \text{ и } b_\pm^{-t}.$$

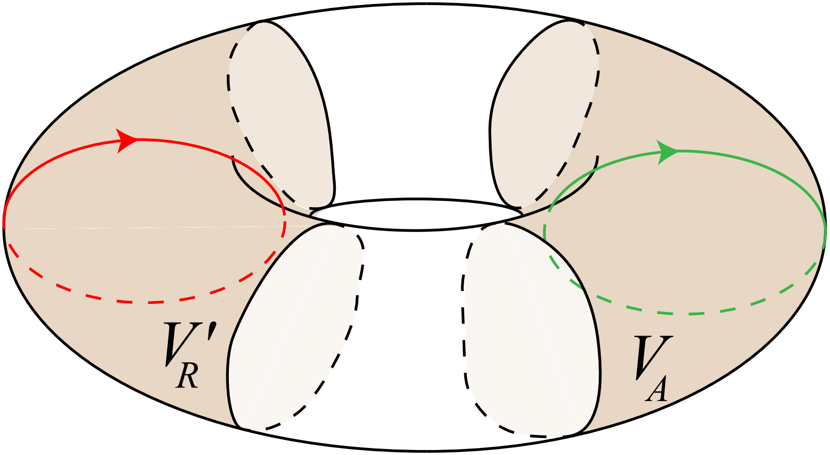
$$V_A = h_A^{-1}(\mathbb{V}_\pm^n) \text{ и } H_A = h_A|_{\mathbb{V}_\pm^n}$$

$$\exists r > 0\colon\ V_R' = h_R^{-1}(\mathbb{V}_{\pm r}^n) \cap V_A = \varnothing$$

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t :\ f^t \sim f_j^t$

⏩ Понятно



Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t \colon f^t \sim f_j^t$

Продолжение доказательства.
Известно[1], что
$$NW(f^t) = A \cup R.$$

[1]S. Smale, "Differentiable dynamical systems", Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 1967), 747–817. Имеется перевод: Успехи мат. наук,**25**, 1970, 113–185.

Продолжение доказательства.
Известно[1], что

$$NW(f^t) = A \cup R.$$

Следовательно

$$M^n = W_R^u \cup A = W_A^s \cup R.$$

[1] S. Smale, "Differentiable dynamical systems", Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 1967), 747–817. Имеется перевод: Успехи мат. наук,**25**, 1970, 113–185.

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t \colon f^t \sim f_j^t$

Продолжение доказательства.
Известно[1], что

$$NW(f^t) = A \cup R.$$

Следовательно

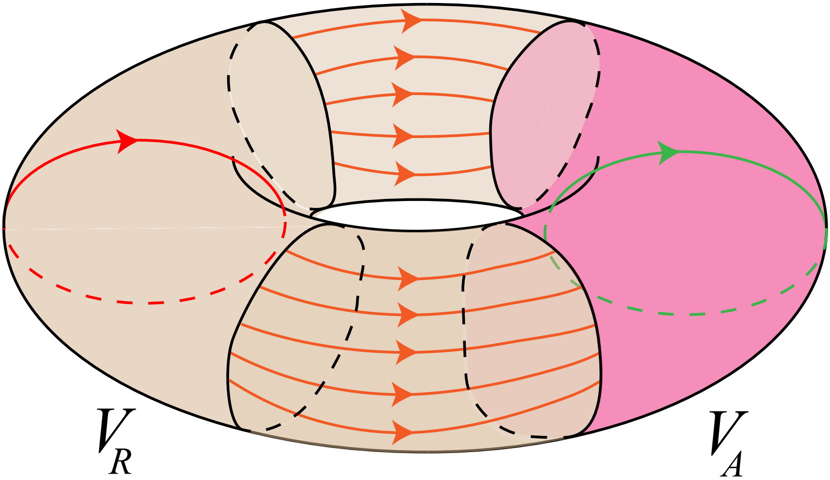
$$M^n = W_R^u \cup A = W_A^s \cup R.$$

Но тогда $M^n \setminus int(V_A \cup V_R')$ состоит из отрезков траекторий потока f^t, а граничные точки этих отрезков лежат на разных компонентах связности границы $\partial M^n \setminus int(V_A \cup V_R')$

[1] S. Smale, "Differentiable dynamical systems", Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 1967), 747–817. Имеется перевод: Успехи мат. наук,**25**, 1970, 113–185.

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t \colon f^t \sim f_j^t$



Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t\colon f^t \sim f_j^t$

Положим $V_R = M^n \setminus int\, V_A$. Тогда гомеоморфизм $h_R|_{\mathbb{V}^n_{\pm r}}$ продолжается до гомеоморфизма $H_R : \mathbb{V}^n_{\pm} \to V_R$, осуществляющего эквивалентность потоков b^t и f^t.

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t \colon f^t \sim f_j^t$

Положим $V_R = M^n \setminus int\, V_A$. Тогда гомеоморфизм $h_R|_{\mathbb{V}^n_{\pm r}}$ продолжается до гомеоморфизма $H_R : \mathbb{V}^n_\pm \to V_R$, осуществляющего эквивалентность потоков b^t и f^t.
Определим гомеоморфизм $j : \partial\mathbb{V}^n_\pm \to \partial\mathbb{V}^n_\pm$ формулой

$$j = H_A^{-1} H_R|_{\partial\mathbb{V}^n_\pm}.$$

Классификация

Достаточно исследовать канонические. $\forall f^t \in G_2(M^n)\ \exists f_j^t\colon f^t \sim f_j^t$

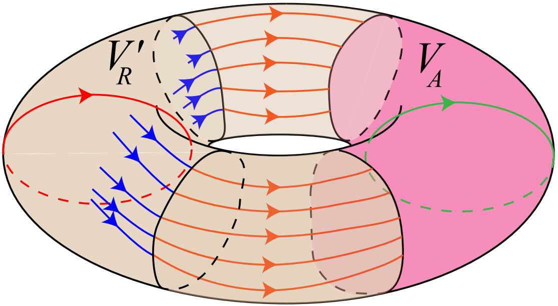
Положим $V_R = M^n \setminus int\, V_A$. Тогда гомеоморфизм $h_R|_{\mathbb{V}^n_{\pm r}}$ продолжается до гомеоморфизма $H_R : \mathbb{V}^n_{\pm} \to V_R$, осуществляющего эквивалентность потоков b^t и f^t.
Определим гомеоморфизм $j : \partial\mathbb{V}^n_{\pm} \to \partial\mathbb{V}^n_{\pm}$ формулой

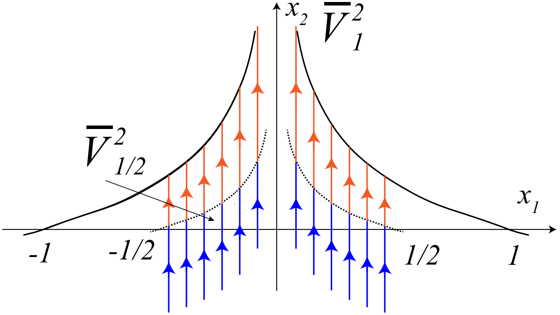
$$j = H_A^{-1} H_R|_{\partial\mathbb{V}^n_{\pm}}.$$

Тогда гомеоморфизм $H : M_j^n \to M^n$, заданный формулой

$$H(x) = \begin{cases} H_A p_j^{-1}(x), & x \in V_{A_j} \\ H_R p_j^{-1}(x), & x \in V_{R_j} \end{cases},$$

осуществляет эквивалентность потоков f_j^t и f^t.


V'_R
V_A


x_2
$\overline{V}^2_1$
$\overline{V}^2_{1/2}$
x_1
-1
-1/2
1/2
1

Классификация

Маленький технический факт

Lemma

Если потоки $f_j^t : M_j^n \to M_j^n$ *и* $f_{j'}^t : M_{j'}^n \to M_{j'}^n$ *топологически эквивалентны, то существует осуществляющий эквивалентность этих потоков гомеоморфизм* $H \colon M_j^n \to M_{j'}^n$ *такой, что* $H(\Sigma_j) = \Sigma_{j'}$.

Классификация

Технический факт побольше

$G = \{g_\pm^k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ и $\mathbb{V}_\pm^n = \bar{V}^n/G$ линейно связно.

Классификация

Технический факт побольше

$$G = \{g_{\pm}^k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \text{ и } \mathbb{V}_{\pm}^n = \bar{V}^n / G \text{ линейно связно.}$$

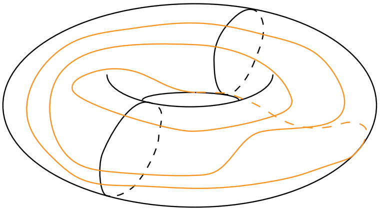
При этом естественная проекция $v_{\pm} \colon \bar{V}^n \to \mathbb{V}_{\pm}^n$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм

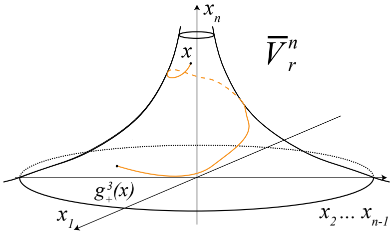
$$\eta_{\pm,\bar{x}} \colon \pi_1(\mathbb{V}_{\pm}^n, x) \to \mathbb{Z},$$

ставящий в соответствие элементу $[c] \in \pi_1(\mathbb{V}_{\pm}^n, x)$ целое число k по следующему правилу: поднятие $\bar{c}$ петли c соединяет точку $\bar{x} \in \bar{V}^n$ с точкой $g_{\pm}^k(\bar{x})$.

Классификация

Технический факт побольше





Так как $G \cong \mathbb{Z}$ — абелева группа, то можем опустить $\bar{x}$ в обозначении.

Классификация

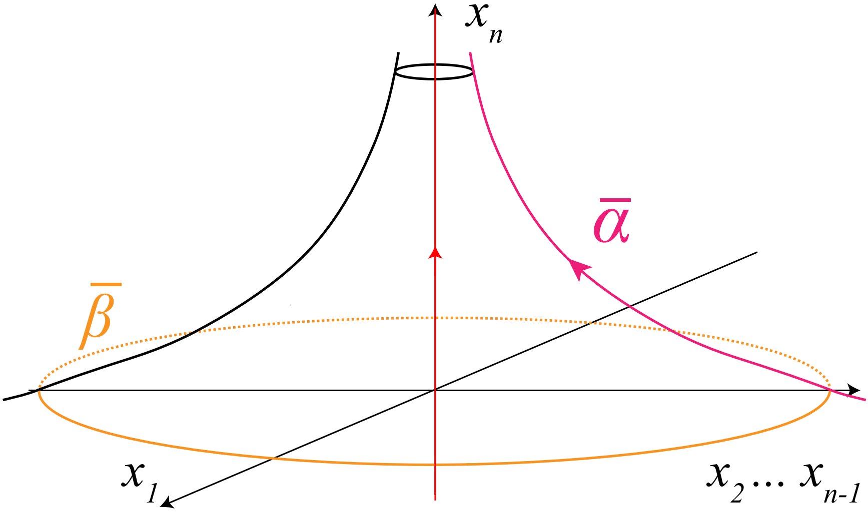
Технический факт побольше

Так как $G \cong \mathbb{Z}$ — абелева группа, то можем опустить $\bar{x}$ в обозначении.

Утверждение

1. *Если* $\bar{H} : \bar{V}^n \to \bar{V}^n$ *— гомеоморфизм такой, что* $\bar{H} g_\pm = g_\pm \bar{H}$, *то отображение* $H : \mathbb{V}^n_\pm \to \mathbb{V}^n_\pm$, *заданное формулой* $H = v_\pm \bar{H} v_\pm^{-1}$ *является гомеоморфизмом и* $\eta_\pm = \eta_\pm H_*$;
2. *Если* $H : \mathbb{V}^n_\pm \to \mathbb{V}^n_\pm$ *— гомеоморфизм такой, что* $\eta_\pm = \eta_\pm H_*$, *то для любых точек* $\bar{x} \in v_\pm^{-1}(x)$ *и* $\bar{x}' \in v_\pm^{-1}(h(x))$ *существует единственный гомеоморфизм* $\bar{H} : \bar{V}^n \to \bar{V}^n$, *являющийся поднятием* H *и такой, что* $\bar{H} g_\pm = g_\pm \bar{H}$, $\bar{H}(\bar{x}) = \bar{x}'$.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков



Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

Theorem

Потоки f^t_j *и* $f^t_{j'}$, *топологически эквивалентны тогда и только тогда когда существует гомеоморфизм* $h_0\colon \partial\mathbb{V}^n_{\pm} \to \partial\mathbb{V}^n_{\pm}$, *такой что для* $h_1 = j' h_0 j^{-1}$ *выполняется* $\eta_{\pm}([h_0(\alpha_{\pm})]) = \eta_{\pm}([h_1(\alpha_{\pm})]) = 1$.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

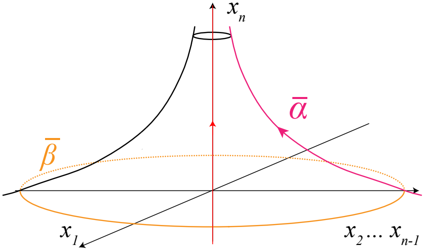
Theorem

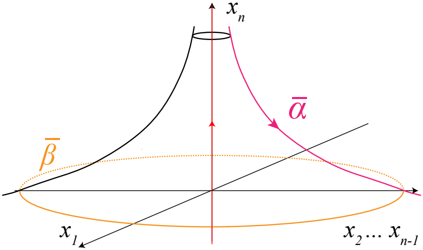
Потоки f_j^t *и* $f_{j'}^t$, *топологически эквивалентны тогда и только тогда когда существует гомеоморфизм* $h_0\colon \partial\mathbb{V}_\pm^n \to \partial\mathbb{V}_\pm^n$, *такой что для* $h_1 = j' h_0 j^{-1}$ *выполняется* $\eta_\pm([h_0(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_1(\alpha_\pm)]) = 1$.

Следствие

Если гомеоморфизмы $j, j' : \partial\mathbb{V}_\pm^n \to \partial\mathbb{V}_\pm^n$ *изотопны, то потоки* $f_j^t, f_{j'}^t$ *топологически эквивалентны.*

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков





Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Доказательство. Необходимость.
Пусть потоки f_j^t и $f_{j'}^t$ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма $h\colon M_j^n \to M_{j'}^n$. Пусть гомеоморфизмы $H_i\colon \partial\mathbb{V}_\pm^n \to \partial\mathbb{V}_\pm^n$

$$H_i = p_{j'}^{-1} h p_j\big|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{i\}}$$

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Доказательство. Необходимость.
Пусть потоки f_j^t и $f_{j'}^t$ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма $h\colon M_j^n \to M_{j'}^n$. Пусть гомеоморфизмы $H_i\colon \partial\mathbb{V}_\pm^n \to \partial\mathbb{V}_\pm^n$

$$H_i = p_{j'}^{-1} h p_j\big|_{\mathbb{V}_\pm^n \times \{i\}}$$

Заметим, что $h(R_j) = R_{j'}$, значит $H_1(\mathbb{L}_\pm^n) = \mathbb{L}_\pm^n$. Тогда $H_{1*}([\mathbb{L}_\pm^n]) = [\mathbb{L}_\pm^n] = [\alpha_\pm]$, что для $h_1 = H_1\big|_{\partial\mathbb{V}_\pm^n}$ влечёт $h_1([\alpha_\pm]) = 1$.
Аналогично и для h_-.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.
Пусть существует гомеоморфизм h_0 и $h_1 = j' h_0 j^{-1}$ а $\eta_\pm([h_1(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_0(\alpha_\pm)]) = 1$.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.
Пусть существует гомеоморфизм h_0 и $h_1 = j' h_0 j^{-1}$ а $\eta_\pm([h_1(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_0(\alpha_\pm)]) = 1$.

$$\bar{B} = Ox_1x_2\dots x_{n-1} \cap \bar{V}^n \text{ и } \bar{\beta} = \partial \bar{B}$$

.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.
Пусть существует гомеоморфизм h_0 и $h_1 = j' h_0 j^{-1}$ а $\eta_\pm([h_1(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_0(\alpha_\pm)]) = 1$.

$$\bar{B} = Ox_1 x_2 \dots x_{n-1} \cap \bar{V}^n \text{ и } \bar{\beta} = \partial \bar{B}$$

.
Тогда $(n-1)$-диск $B = v_\pm(\bar{B})$ ограничен $(n-2)$-сферой $\beta = v_\pm(\bar{\beta})$ на $\partial \mathbb{V}^n_+$.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.
Пусть существует гомеоморфизм h_0 и $h_1 = j' h_0 j^{-1}$ а $\eta_\pm([h_1(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_0(\alpha_\pm)]) = 1$.

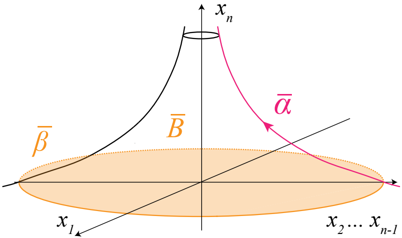
$$\bar{B} = Ox_1x_2 \dots x_{n-1} \cap \bar{V}^n \text{ и } \bar{\beta} = \partial \bar{B}$$

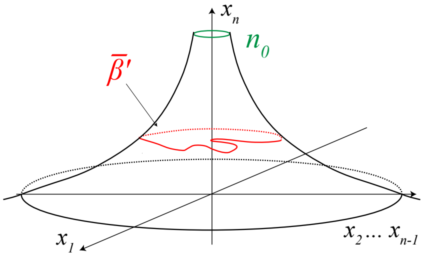
.
Тогда $(n-1)$-диск $B = v_\pm(\bar{B})$ ограничен $(n-2)$-сферой $\beta = v_\pm(\bar{\beta})$ на $\partial \mathbb{V}^n_+$.
Положим $\beta' = h_1(\beta)$.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.





Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.

$$\eta_\pm([h_1(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_0(\alpha_\pm)]) = 1$$

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.

$$\eta_\pm([h_1(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_0(\alpha_\pm)]) = 1$$

$h_1(\beta_\pm), h_0(\beta_\pm)$ ограничивают диски в $\mathbb{V}^n_\pm$, то полный прообраз $v_\pm^{-1}(\beta')$ состоит из счетного числа сфер, объединение которых инвариантно относительно диффеоморфизма $g_\pm$.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.

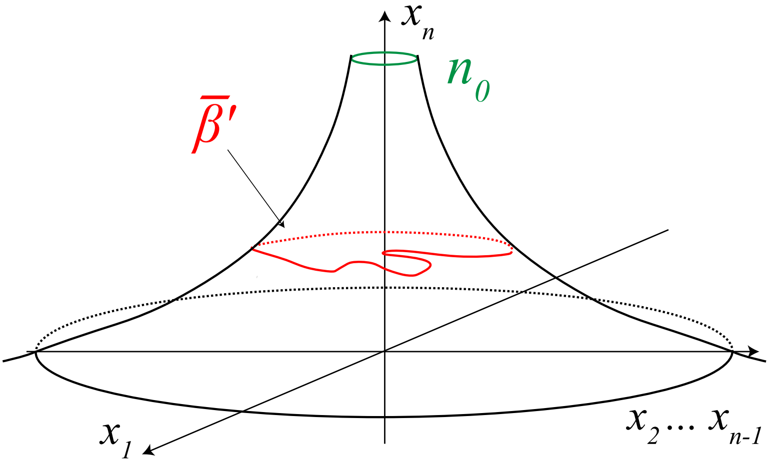
$$\eta_\pm([h_1(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_0(\alpha_\pm)]) = 1$$

$h_1(\beta_\pm), h_0(\beta_\pm)$ ограничивают диски в $\mathbb{V}^n_\pm$, то полный прообраз $v_\pm^{-1}(\beta')$ состоит из счетного числа сфер, объединение которых инвариантно относительно диффеоморфизма $g_\pm$.
Выберем натуральное число n_0 и компоненту связности $\bar{\beta}'$ множества $v_\pm^{-1}(\beta')$ такую, что $\bar{\beta}' \subset \{(x_1, \ldots x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < n_0\}$.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.



Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

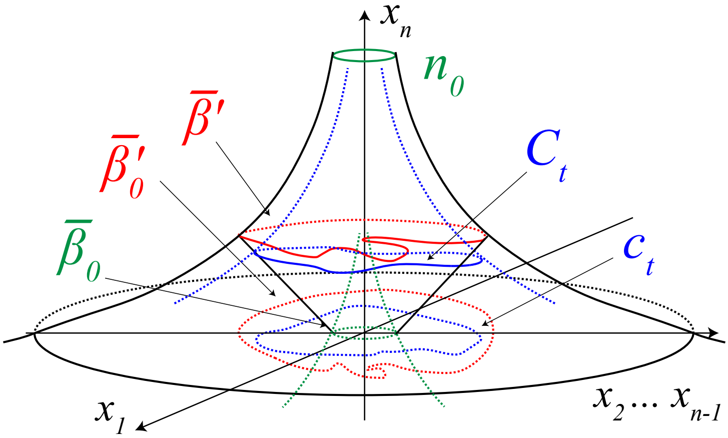
$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.
Гомеоморфизм h_1 поднимается до гомеоморфизма $\bar{h}_1 : \partial \bar{V}^n \to \partial \bar{V}^n$, коммутирующего с $g_\pm$ и такого, что $\bar{h}_1(\bar{\beta}) = \bar{\beta}'$.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

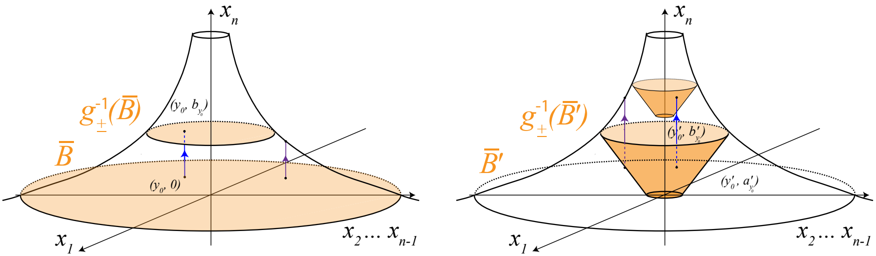
Продолжение доказательства. Достаточность.



Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.



Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+ j = j' h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.
Определим гомеоморфизм $\bar{w}_0 \colon Oy \setminus O \to Oy \setminus O$ формулой

$$\bar{w}_0 = p_0 \bar{h}_1 (p_0|_{\partial \bar{V}_1^n})^{-1}.$$

Определим гомеоморфизм $\bar{h}_{y_0} : I_{y_0} \to I'_{y'_0}$ формулой

$$\bar{h}_{y_0}(y_0, x_n) = \left(\bar{w}_0(y_0), x_n \frac{b'_{y'_0} - a'_{y'_0}}{b_{y_0}} + a'_{y'_0} \right)$$

и продолжим его на $\bar{V}^n$ как

$$\bar{H}_1(x_1, \dots x_{n-1}, x_n) = g^{-[x_n]}(\bar{h}_{y_0}|_{\bar{W}}(g^{[x_n]}(x_1, \dots x_{n-1}, x_n))),$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Общий критерий топологической эквивалентности модельных потоков

$h_+j = j'h_-$ и $\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Продолжение доказательства. Достаточность.
По построению

$$\bar{H}_1 g_\pm = g_\pm \bar{H}_1$$

откуда получается, что $H_1 = v_\pm^{-1}\bar{H}_1 v_\pm$ является гомеоморфизмом, и для него верно:

$$H_1 b^t = b^t H_1.$$

Пусть $\tilde{H}_i(s,\kappa) = (H_i(s), \kappa + 1 \pmod 2) \colon \mathbb{V}^n_\pm \times \{i\} \to \mathbb{V}^n_\pm \times \{i\}$ Тогда искомый гомеоморфизм $H : M^n_j \to M^n_{j'}$ определяется формулой

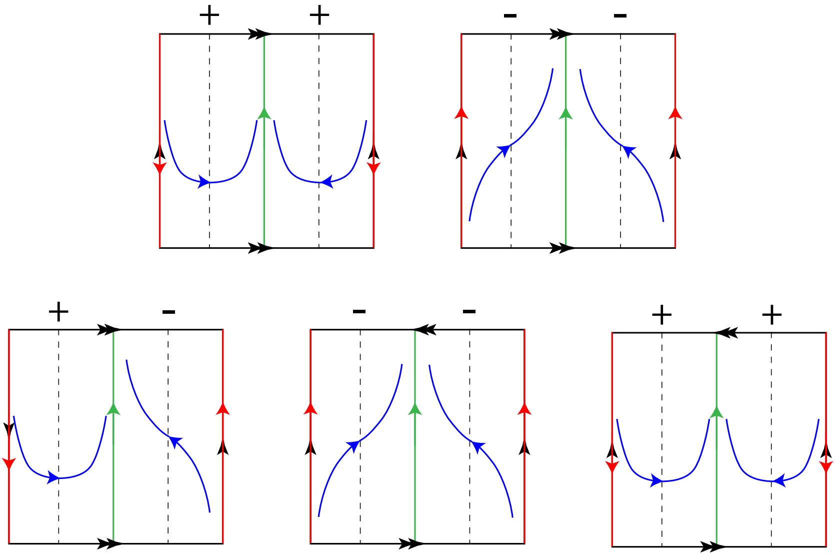
$$H(x) = \begin{cases} p_{j'} H_- p_j^{-1}(x), & x \in p_j(\mathbb{V}^n_\pm \times \{0\}) \\ p_{j'} H_+ p_j^{-1}(x), & x \in p_j(\mathbb{V}^n_\pm \times \{1\}) \end{cases}.$$

На поверхностях

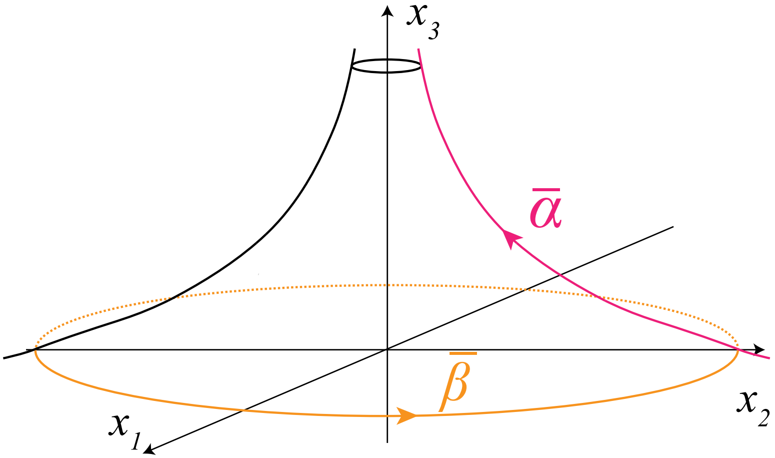
Напомним, что j и j' изотопны $\Longrightarrow$ f_j^t и $f_{j'}^t$ эквивалентны. Также существует ровно два класса гомеоморфизмов окружности с точностью до изотопии.

1. $j_1 : \partial\mathbb{V}^2_+ \to \partial\mathbb{V}^2_+$ сохраняет ориентацию на обеих компонентах связности;
2. $j_2 : \partial\mathbb{V}^2_+ \to \partial\mathbb{V}^2_+$ меняет ориентацию на обеих компонентах связности;
3. $j_3 : \partial\mathbb{V}^2_+ \to \partial\mathbb{V}^2_+$ сохряняет ориентацию на одной компоненте связности и меняет на другой;
4. $j_4 : \partial\mathbb{V}^2_- \to \partial\mathbb{V}^2_-$ сохраняет ориентацию;
5. $j_5 : \partial\mathbb{V}^2_- \to \partial\mathbb{V}^2_-$ меняет ориентацию.

На поверхностях



На трёхмерных многообразиях



$$\alpha_+ = v_+(\bar{\alpha}),\ \beta_+ = v_+(\bar{\beta}).$$

На трёхмерных (ориентируемых) многообразиях

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)[1]

$$j_* = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} : \pi_1(\partial \mathbb{V}^3_+) \to \pi_1(\partial \mathbb{V}^3_+)$$

Lemma

Два линзовых пространства M^3_j и $M^3_{j'}$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда индуцированные изоморфизмы $j_* = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$, $j'_* = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix}$ связаны соотношениями $|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$.

---

[1]Классификация линзовых пространств хорошо известна (см., например, Allen Hatcher. Notes on basic 3-manifold topology. Notes available on the author's webpage, 2007.) в формулировке, использующей соотношения параметров p, q. Однако, ниже мы приводим классификационную теорему, использующую соотношения параметров p, r, поскольку именно они возникают в качестве инвариантов топологической эквивалентности модельных потоков.

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Доказательство. Необходимость.

$$\exists H\colon M^3_j \to M^3_{j'}$$

$$H_0 = p_{j'}^{-1} H p_j|_{\mathbb{V}^3_+} : \mathbb{V}^3_+ \to \mathbb{V}^3_+,$$
$$H_1 = p_{j'}^{-1} H p_j|_{\mathbb{V}^3_+} : \mathbb{V}^3_+ \to \mathbb{V}^3_+,$$
$$h_0 = H_0|_{\partial(\mathbb{V}^3_+)},\ h_1 = H_1|_{\partial(\mathbb{V}^3_+)}.$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Доказательство. Необходимость.

$$\exists H\colon M^3_j \to M^3_{j'}$$

$$H_0 = p_{j'}^{-1} H p_j|_{\mathbb{V}^3_+} : \mathbb{V}^3_+ \to \mathbb{V}^3_+,$$
$$H_1 = p_{j'}^{-1} H p_j|_{\mathbb{V}^3_+} : \mathbb{V}^3_+ \to \mathbb{V}^3_+,$$
$$h_0 = H_0|_{\partial(\mathbb{V}^3_+)},\ h_1 = H_1|_{\partial(\mathbb{V}^3_+)}.$$

$$h_{0*} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ m_- & \pm 1 \end{pmatrix},\ h_{1*} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ m_+ & \pm 1 \end{pmatrix},$$

где $m_-,\ m_+ \in \mathbb{Z}$.

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Необходимость. Из определения линзовых пространств следует, что

$$h_1 j = j' h_0$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Необходимость. Из определения линзовых пространств следует, что

$$h_1 j = j' h_0$$

Откуда

$$h_{1*} j_* = j'_* h_{0*}$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Необходимость. Из определения линзовых пространств следует, что

$$h_1 j = j' h_0$$

Откуда

$$h_{1*} j_* = j'_* h_{0*}$$

или, в в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ m_+ & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ m_- & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Необходимость. Из определения линзовых пространств следует, что

$$h_1 j = j' h_0$$

Откуда

$$h_{1*} j_* = j'_* h_{0*}$$

или, в в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ m_+ & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ m_- & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pm r & \pm p \\ r m_+ \pm s & p m_+ \pm q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm r' + p' m_- & \pm p' \\ \pm s' + q' m_- & \pm q' \end{pmatrix}$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность. Пусть элементы матриц $j_* = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$, $j'_* = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix}$ связаны соотношениями $|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$. Тогда

$$\gamma_+ p = \delta_- p',\ \gamma_+ r = \gamma_- r' + m_- p'$$

для некоторых $\gamma_\pm, \delta_- \in \{-1, 1\},\ m_- \in \mathbb{Z}$.

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность. Пусть элементы матриц $j_* = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$, $j'_* = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix}$ связаны соотношениями $|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r$ $\pmod{|p|}$. Тогда

$$\gamma_+ p = \delta_- p',\ \gamma_+ r = \gamma_- r' + m_- p'$$

для некоторых $\gamma_\pm, \delta_- \in \{-1, 1\},\ m_- \in \mathbb{Z}$.

$$h_{-*} = \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 \\ m_- & \delta_- \end{pmatrix}$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность. Пусть элементы матриц $j_* = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$, $j'_* = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix}$ связаны соотношениями $|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$. Тогда

$$\gamma_+ p = \delta_- p',\ \gamma_+ r = \gamma_- r' + m_- p'$$

для некоторых $\gamma_\pm, \delta_- \in \{-1, 1\},\ m_- \in \mathbb{Z}$.

$$h_{-*} = \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 \\ m_- & \delta_- \end{pmatrix}$$

Тогда, учитывая $h_+ = j' h_- j^{-1}$:

$$h_{+*} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 \\ m_+ & \delta_+ \end{pmatrix}$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность.

$$h_{0*} = \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 \\ m_- & \delta_- \end{pmatrix}, \; h_{1*} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 \\ m_+ & \delta_+ \end{pmatrix}$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность.

$$h_{0*} = \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 \\ m_- & \delta_- \end{pmatrix}, \; h_{1*} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 \\ m_+ & \delta_+ \end{pmatrix}$$

Тогда h_1, h_0 продолжаются до гомеоморфизмов

$$H_0 \colon \mathbb{V}^3_+ \to \mathbb{V}^3_+, \; H_1 \colon \mathbb{V}^3_+ \to \mathbb{V}^3_+$$

Классификация объемлющих многообразий (линзовых пространств)

$|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность.

$$h_{0*} = \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 \\ m_- & \delta_- \end{pmatrix},\ h_{1*} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 \\ m_+ & \delta_+ \end{pmatrix}$$

Тогда h_1, h_0 продолжаются до гомеоморфизмов

$$H_0 \colon \mathbb{V}^3_+ \to \mathbb{V}^3_+,\ H_1 \colon \mathbb{V}^3_+ \to \mathbb{V}^3_+$$

Тогда определён

$$H(x) = \begin{cases} p_{j'} H_0 p_j^{-1}(x), & x \in V_{R_j} \\ p_{j'} H_1 p_j^{-1}(x), & x \in V_{A_j} \end{cases}.$$

Классификация потоков на линзах

Lemma

Два линзовых пространства M^3_j и $M^3_{j'}$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда индуцированные изоморфизмы $j_* = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$, $j'_* = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix}$ связаны соотношениями $|p'| = |p|$ и $r' \equiv \pm r \pmod{|p|}$.

Lemma

Трехмерные модельные потоки f^t_j, $f^t_{j'}$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда индуцированные изоморфизмы $j_* = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$, $j'_* = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix}$ связаны соотношениями $|p'| = |p|$, $r' \equiv r \pmod{|p|}$.

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Доказательство. Необходимость.
По критерию $\exists h_0 \colon \partial\mathbb{V}^3_+ \to \partial\mathbb{V}^3_+$, такой что для $h_1 = j' h_0 j^{-1}$
$\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Доказательство. Необходимость.
По критерию $\exists h_0 \colon \partial\mathbb{V}^3_+ \to \partial\mathbb{V}^3_+$, такой что для $h_1 = j' h_0 j^{-1}$
$\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

$$h_{1*} j_* = j'_* h_{0*}.$$

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Доказательство. Необходимость.
По критерию $\exists h_0 \colon \partial\mathbb{V}^3_+ \to \partial\mathbb{V}^3_+$, такой что для $h_1 = j' h_0 j^{-1}$
$\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

$$h_{1*} j_* = j'_* h_{0*}.$$

$$h_{i*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_\pm & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Необходимость.

$$h_{+*}j_* = j'_* h_{-*}.$$

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Необходимость.

$$h_{+*}j_* = j'_* h_{-*}.$$

$$h_{\pm *} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_{\pm} & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Необходимость.

$$h_{+*}j_* = j'_* h_{-*}.$$

$$h_{\pm *} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_\pm & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_+ & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_- & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Классификация потоков на линзах
$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Необходимость.

$$h_{+*}j_* = j'_* h_{-*}.$$

$$h_{\pm *} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_\pm & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_+ & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_- & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r & p \\ rm_+ \pm s & pm_+ \pm q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' + p'm_- & \pm p' \\ s' + q'm_- & \pm q' \end{pmatrix}$$

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность. Пусть элементы матриц $j_* = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$, $j'_* = \begin{pmatrix} r' & p' \\ s' & q' \end{pmatrix}$ связаны соотношениями $|p'| = |p|$ и $r' \equiv r \pmod{|p|}$. Тогда

$$p = \delta_- p', \;\; r = r' + m_- p'$$

для некоторых $\delta_- \in \{-1, 1\}, \;\; m_- \in \mathbb{Z}$.

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность.
$h_0 : \partial(\mathbb{V}^3_+) \to \partial(\mathbb{V}^3_+)$ – алгебраическим автоморфизмом тора, заданным матрицей

$$h_{0*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_- & \delta_- \end{pmatrix}$$

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность.
$h_0 : \partial(\mathbb{V}^3_+) \to \partial(\mathbb{V}^3_+)$ – алгебраическим автоморфизмом тора, заданным матрицей

$$h_{0*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_- & \delta_- \end{pmatrix}$$

$h_1 = j' h_0 j^{-1} : \partial(\mathbb{V}^3) \to \partial(\mathbb{V}^3)$ индуцирует изоморфизм

$$h_{1*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_+ & \delta_+ \end{pmatrix}$$

для некоторых $\delta_+ \in \{-1, 1\}, \; m_+ \in \mathbb{Z}$.

Классификация потоков на линзах

$|p'| = |p|, r' \equiv r \pmod{|p|}$

Продолжение доказательства. Достаточность.

$$h_{-*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_- & \delta_- \end{pmatrix}, \; h_{+*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_+ & \delta_+ \end{pmatrix}$$

$\eta_\pm([h_-(\alpha_\pm)]) = \eta_\pm([h_+(\alpha_\pm)]) = 1$

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

$$\alpha_- = v_-(\bar{\alpha}),\ \beta_- = v_-(\bar{\beta}).$$

Так же назовём кривые α_-, β_- *параллелью и меридианом.*

[1] Lickorish W. B. R. Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1963. – Т. 59. – №. 2. – С. 307-317.

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

$$\alpha_- = v_-(\bar{\alpha}),\ \beta_- = v_-(\bar{\beta}).$$

Так же назовём кривые α_-, β_- *параллелью и меридианом.*
Известно[1], что любой гомеоморфизм

$$j\colon \partial\mathbb{V}^3_- \to \partial\mathbb{V}^3_-$$

переводит меридиан в меридиан

[1] Lickorish W. B. R. Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1963. – Т. 59. – №. 2. – С. 307-317.

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

$$\alpha_- = v_-(\bar{\alpha}),\ \beta_- = v_-(\bar{\beta}).$$

Так же назовём кривые α_-, β_- *параллелью и меридианом.*
Известно[1], что любой гомеоморфизм

$$j\colon \partial\mathbb{V}^3_- \to \partial\mathbb{V}^3_-$$

переводит меридиан в меридиан, а также продолжается до гомеоморфизма.

$$\tilde{j}\colon \mathbb{V}^3_- \to \mathbb{V}^3_-.$$

[1] Lickorish W. B. R. Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1963. – Т. 59. – №. 2. – С. 307-317.

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

$$\alpha_- = v_-(\bar\alpha),\ \beta_- = v_-(\bar\beta).$$

Так же назовём кривые α_-, β_- *параллелью и меридианом.*
Известно[1], что любой гомеоморфизм

$$j\colon \partial\mathbb{V}^3_- \to \partial\mathbb{V}^3_-$$

переводит меридиан в меридиан, а также продолжается до гомеоморфизма.

$$\tilde{j}\colon \mathbb{V}^3_- \to \mathbb{V}^3_-.$$

Таким образом единственным многообразием, допускающим поток с двумя скрученными орбитами, является

$$\mathbb{S}^2\tilde{\times}\mathbb{S}^1.$$

[1] Lickorish W. B. R. Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1963. – Т. 59. – №. 2. – С. 307-317.

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

Напомним, что η_- является эпиморфизмом и $\eta_-([\alpha_-]) = 1$. Таким образом $\eta_-([j(\alpha_-)]) = \pm 1$.

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

Напомним, что η_- является эпиморфизмом и $\eta_-([\alpha_-]) = 1$. Таким образом $\eta_-([j(\alpha_-)]) = \pm 1$.

Lemma

Если $\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)])$ то модельные потоки f^t_j и $f^t_{j'}$ эквивалентны.

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

Напомним, что η_- является эпиморфизмом и $\eta_-([\alpha_-]) = 1$. Таким образом $\eta_-([j(\alpha_-)]) = \pm 1$.

Lemma

Если $\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)])$ то модельные потоки f_j^t и $f_{j'}^t$ эквивалентны.

Доказательство.
Если $\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)]) = 1$, то пусть $h_1 = j', h_0 = j$. Тогда с учётом сказанного выше выполняются условия критерия. Значит потоки f_j^t и $f_{j'}^t$ эквивалентны.

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

$\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)])$

Продолжение доказательства.
Пусть $\bar{j}_1 : \partial \bar{V}^3 \to \partial \bar{V}^3$ задан формулой:

$$\bar{j}_1(x_1, x_2, x_3) = (1/x_1, 1/x_2, -x_3),$$

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях
$\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)])$

Продолжение доказательства.
Пусть $\bar{j}_1 : \partial\bar{V}^3 \to \partial\bar{V}^3$ задан формулой:

$$\bar{j}_1(x_1, x_2, x_3) = (1/x_1, 1/x_2, -x_3),$$

а $j_1 : \partial\mathbb{V}^3_- \to \partial\mathbb{V}^3_-$ такой, что

$$j_{-1} = v_- \bar{j}_1 v_-^{-1}.$$

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях

$\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)])$

Продолжение доказательства.
Пусть $\bar{j}_1 \colon \partial \bar{V}^3 \to \partial \bar{V}^3$ задан формулой:

$$\bar{j}_1(x_1, x_2, x_3) = (1/x_1, 1/x_2, -x_3),$$

а $j_1 \colon \partial \mathbb{V}^3_- \to \partial \mathbb{V}^3_-$ такой, что

$$j_{-1} = v_- \bar{j}_1 v_-^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\eta_-([j_{-1}(\alpha_-)]) = -1.$$

Случай скрученных орбит на трёхмерных многообразиях
$\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)])$

Продолжение доказательства.
Если
$$\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)]) = -1,$$
выберем
$$h_1 = j'j_{-1}, h_0 = j_{-1}j.$$

Продолжение доказательства.
Если

$$\eta_-([j(\alpha_-)]) = \eta_-([j'(\alpha_-)]) = -1,$$

выберем

$$h_1 = j' j_{-1}, h_0 = j_{-1} j.$$

Тогда снова выполняются условия критерия. Отсюда f_j^t и $f_{j'}^t$ эквивалентны.

frame title