Реализация сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора

Е. Е. Чилина

НИУ ВШЭ НН

2021

Пусть S – замкнутая ориентируемая поверхность и $f : S \to S$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм.

Определение

Отличный от тождественного гомеоморфизм f называется **периодическим**, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f.

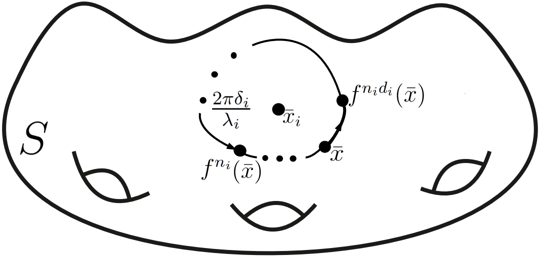
В силу результатов Я. Нильсена [1] для любого сохраняющего ориентацию периодического преобразования f периода $\mathbf{n}$ поверхности S рода $\mathbf{p}$ верны следующие утверждения:

Каждому f сопоставляется множество $\bar{B} \subset S$ точек, период которых строго меньше n. Это множество либо пусто, либо состоит из конечного числа орбит $\mathcal{O}_1, \ldots, O_k$, $k \geq 1$, периода $\mathbf{n_i}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, являющегося делителем n; для каждой орбиты $\mathcal{O}_i \subset \bar{B}$ существует единственное взаимно простое с $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$ число $\delta_i \in \{1, \ldots, \lambda_i - 1\}$ такое, что в некоторой окрестности $D_{\bar{x}_i}$ точки $\bar{x}_i \in \mathcal{O}_i$ гомеоморфизм f^{n_i} топологически сопряжен с поворотом комплексной плоскости вокруг начала координат на $\frac{2\pi\delta_i}{\lambda_i}$ радиан:

$$z \to e^{\frac{2\pi\delta_i}{\lambda_i}\mathbf{i}} z.$$

1. J. Nielsen, Die struktur periodischer transformationen von flachen, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15 (1937).

Для любого δ_i существует число $\mathbf{d_i} \in \{1, \ldots, \lambda_i - 1\}$ такое, что $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$. В силу формулы 1 существует кривая, гомеоморфная окружности, которая инвариантна относительно гомеоморфизма f^{n_i}. Тогда число d_i обладает следующим свойством: дуга, принадлежащая инвариантной кривой, рассматриваемая в направлении против часовой стрелки и заключенная между точками $\bar{x}$ и $f^{n_i d_i}(\bar{x})$, не содержит точек орбиты точки $\bar{x}$, отличных от точек $\bar{x}$ и $f^{n_i d_i}(\bar{x})$.



$$z \to e^{\frac{2\pi\delta_i}{\lambda_i}\mathbf{i}} z. \tag{1}$$

Полная характеристика периодического преобразования

Для каждого периодического преобразования f поверхности S определим набор чисел

$$(n, p, n_1, \ldots, n_k, d_1, \ldots, d_k),$$

который будем называть **полной характеристикой** периодического преобразования f.

Определение

Гомеоморфизмы $f, f' : S \to S$ называются **топологически сопряженными**, если существует гомеоморфизм $h : S \to S$ такой, что $f' = h \circ f \circ h^{-1}$.

В силу результатов Нильсена, Брауэра и Керькъярто два периодических преобразования замкнутой ориентируемой поверхности сопряжены с помощью сохраняющего ориентацию гомеоморфизма тогда и только тогда, когда их полные характеристики совпадают.

Допустимые полные характеристики периодических не гомотопных тождественному гомеоморфизмов двумерного тора

f_1: $n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1;$
f_2: $n = 3,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1;$
f_3: $n = 2,\ k = 4,\ n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1;$
f_4: $n = 3,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 2;$
f_5: $n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 5;$
f_6: $n = 4,\ k = 3,\ n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1;$
f_7: $n = 4,\ k = 3,\ n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = d_3 = 3.$

Д.Баранов, Классификация гомеоморфизмов двумерного тора. Тезисы доклада. Саратов. Конференция "Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2021"

Алгебраический автоморфизм двумерного тора

Пусть A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – унимодулярная целочисленная матрица. Тогда она индуцирует отображение $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$f_A : \begin{cases} \overline{x} = ax + by \pmod 1 \\ \overline{y} = cx + dy \pmod 1 \end{cases},$$

которое является **алгебраическим автоморфизмом двумерного тора**.

Основной результат

Теорема

Каждая полная характеристика f_j реализуется в виде алгебраического автоморфизма двумерного тора, заданного матрицей A_j ($j = \overline{1,7}$).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

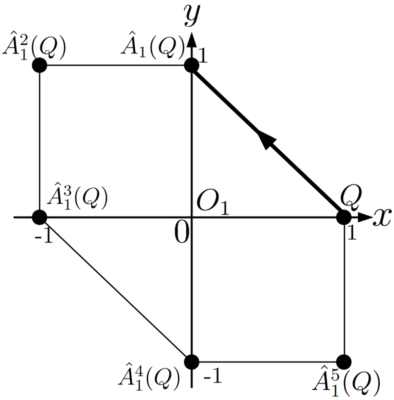
Доказательство

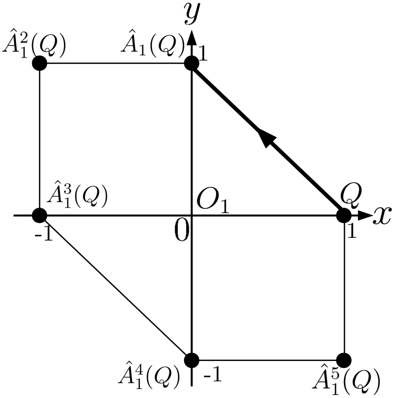
Рассмотрим отображение f_{A_1}, индуцированное матрицей
$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Так как $A_1^6 = E$ и $A_1^t \neq E \ \forall t < 6 \ (t \in \mathbb{N})$, то $\mathbf{n} = \mathbf{6}$.
Из системы $\begin{cases} x = -y \pmod 1 \\ y = x + y \pmod 1 \end{cases}$ находим единственную орбиту
$\mathcal{O}_1 = \{p^1(0,0)\}$ периода $\mathbf{n_1} = \mathbf{1}$(неподвижную точку).

[1] $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ – естественная проекция.

Рассмотрим отображение $\hat{A}_1 : \begin{cases} \overline{x} = -y \\ \overline{y} = x + y \end{cases}$, которое является накрывающим для f_{A_1}, и для которого точка $O_1(0,0)$ является неподвижной.

В окрестности точки O_1 выберем точку $Q(1,0)$ и начнём действовать на неё отображением $\hat{A}_1$.





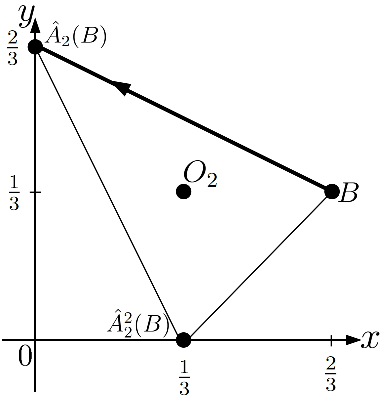
Соединив последовательно множество точек $\mathcal{O}_Q = \{(1,0),(0,1),(-1,1),(-1,0),(0,-1),(1,-1)\}$ в направлении против часовой стрелки, получим замкнутую кривую. Она является инвариантной кривой отображения $\hat{A}_1$. Дуга $(Q, \hat{A}_1(Q))$, рассматриваемая в направлении против часовой стрелки, не содержит других точек орбиты точки Q. Следовательно, $\mathbf{d_1 = 1}$.

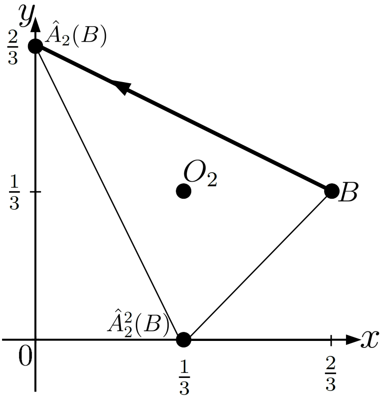
Для нахождения точек периода 2 отображения f_{A_1}, найдём неподвижные точки отображения $f_{A_1}^2$, индуцированного матрицей $A_1^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Из системы $\begin{cases} x = -x - y \pmod 1 \\ y = x \pmod 1 \end{cases}$ находим единственную орбиту $\mathcal{O}_2 = \{p(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), p(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$ периода $\mathbf{n_2 = 2}$.

Рассмотрим отображение $\hat{A}_2 : \begin{cases} \overline{x} = -x - y + 1 \\ \overline{y} = x \end{cases}$, которое является накрывающим для $f^2_{A_1}$, и для которого точка $O_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ является неподвижной.

В окрестности точки O_2 выберем точку $B(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ и начнём действовать на неё отображением $\hat{A}_2$.



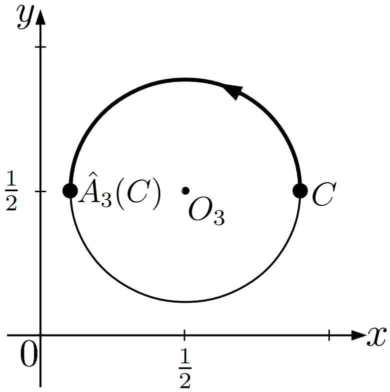


Соединив последовательно множество точек $\mathcal{O}_B = \{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (0, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, 0)\}$ в направлении против часовой стрелки, получим замкнутую кривую. Она является инвариантной кривой отображения $\hat{A}_2$. Дуга $(B, \hat{A}_2(B))$, рассматриваемая в направлении против часовой стрелки, не содержит других точек орбиты точки B. Следовательно, $\mathbf{d_2 = 1}$.

Для нахождения точек периода 3 отображения f_{A_1}, найдём неподвижные точки отображения $f_{A_1}^3$, индуцированного матрицей $A_1^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Из системы $\begin{cases} x = -x \pmod 1 \\ y = -y \pmod 1 \end{cases}$ находим единственную орбиту $\mathcal{O}_3 = \{p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), p(\frac{1}{2}, 0), p(0, \frac{1}{2})\}$ периода $\mathbf{n_3} = \mathbf{3}$.

Рассмотрим отображение $\hat{A}_3 : \begin{cases} \overline{x} = -x + 1 \\ \overline{y} = -y + 1 \end{cases}$, которое является накрывающим для $f^3_{A_1}$, и для которого точка $O_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ является неподвижной.
Отображение $\hat{A}_3$ задаёт поворот плоскости вокруг точки $O_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ на π радиан .



Отсюда $\mathbf{d_3 = 1}$.

Полной характеристикой отображения, заданного матрицей A_1, является следующий набор данных:
$\mathbf{n=6, p=1, k=3, n_1=3, n_2=2, n_3=1,\ d_1=d_2=d_3=1}$,
которому сопоставляется класс периодических гомеоморфизмов f_1.