

Топологическая классификация периодических гомеоморфизмов 2-тора

Баранов Д., ВШЭ, Нижний Новгород, Россия

КРОМШ-2021

17 сентября – 26 сентября, 2021, Крым, Россия

Периодические гомеоморфизмы

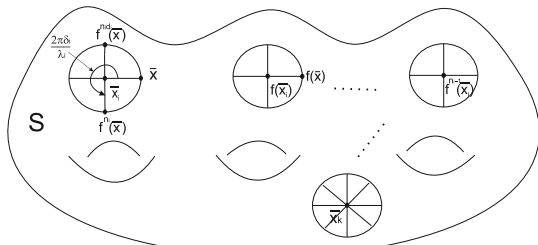
Пусть S – замкнутая ориентируемая поверхность и $f : S \rightarrow S$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Гомеоморфизмы $f, f' : S \rightarrow S$ называются топологически сопряженными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : S \rightarrow S$ такой, что $f' = h \circ f \circ h^{-1}$.

Гомеоморфизм f называется периодическим, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f .

Точки меньшего периода

В силу результатов Я. Нильсена с каждым периодическим преобразованием f периода n связаны следующие объекты:

- множество $\bar{B} \subset S$ точек, периода меньшего n , оно состоит из конечного числа орбит \mathcal{O}_i , $i = 1, \dots, k$ периода n_i , являющегося делителем n ; с каждой орбитой $\mathcal{O}_i \subset \bar{B}$ связано число $\delta_i \in \{1, \dots, \lambda_i - 1\}$ взаимно простое с $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$ такое, что в некоторой окрестности $D_{\bar{x}_i}$ точки $\bar{x}_i \in \mathcal{O}_i$ гомеоморфизм f^{n_i} топологически сопряжен с поворотом плоскости вокруг начала координат.
- число $d_i \in \{1, \dots, \lambda_i - 1\}$ такое, что $d_i \delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$. Пара (n_i, d_i) , где называется валентностью орбиты \mathcal{O}_i



Естественная проекция

- группа $G = \{id, f, \dots, f^{n-1}\}$, изоморфная $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ и действующая на S так, что модульная поверхность $\Sigma = S/G$ является замкнутой поверхностью, и естественная проекция $\pi : S \rightarrow \Sigma$ является n -листным накрытием всюду, кроме точек множества \bar{B} ; $B = \pi(\bar{B})$, $x_i = \pi(O_i)$;
- гомоморфизм $\eta : H_1(\Sigma \setminus B) \rightarrow \mathbb{Z}_n$, индуцированный проекцией π .

Классификация Нильсена периодических гомеоморфизмов

Предложение

Два периодических преобразования f, f' поверхности S топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды и наборы валентностей орбит меньшего периода.

Следствие

Два периодических преобразования f, f' поверхности S без точек меньшего периода топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды.

Периодические данные

Таким образом, если p – род поверхности S , а g – род модульной поверхности Σ , то каждый периодический гомеоморфизм можно описать периодическими данными

$$(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k).$$

Если $B = \emptyset$, то $k = 0$ и периодические данные имеют вид (n, p, g) , а естественная проекция $\pi : S \rightarrow \Sigma$ является n -листным накрытием (без точек ветвления) модульной поверхности Σ рода g поверхностью S рода p .

Реализуемость периодических данных

Реализуемость некоторого набора чисел периодическими данными какого-либо периодического гомеоморфизма определяется следующими соотношениями:

$$2p + \sum_{i=1}^k n_i - 2 = n(2g + k - 2) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^k d_i n_i \equiv 0 \pmod{n} \quad (2)$$

Эйлерова характеристика

Равенство (1) выражает связь эйлеровых характеристик поверхностей

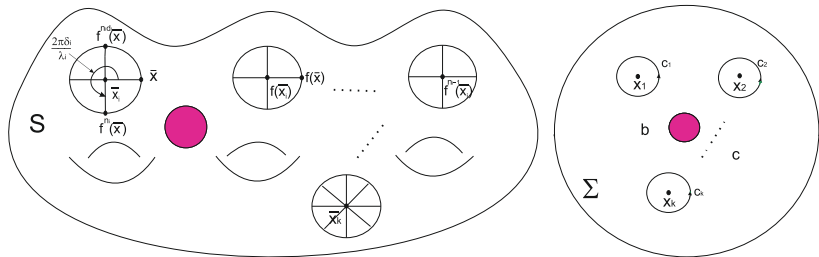
$$\dot{S} = S \setminus \bigcup_{i=1}^k \pi^{-1}(D_i), \quad \dot{\Sigma} = \Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i,$$

при условии, что поверхность \dot{S} n -листно накрывает $\dot{\Sigma}$

$$\chi(\dot{S}) = n\chi(\dot{\Sigma}).$$

Действие гомеоморфизма

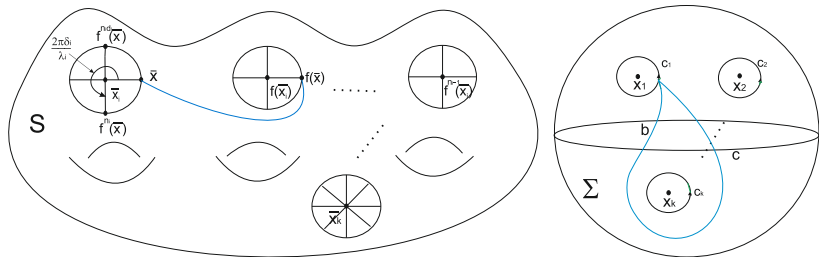
Соотношение (2) следует из следующих соображений. Положим $D_i = \pi(D_{\bar{x}_i})$ и обозначим через c_i границу диска D_i , ориентированную так, что при обходе вдоль границы диск остается слева. Тогда $\eta([c_i]) = n_i d_i$. С другой стороны объединение всех кривых $c_1 \cup \dots \cup c_k$ гомологично кривой c , которая ограничивает диск и, следовательно, удовлетворяет равенству $\eta([c]) = 0$.



Случай когда $g=0$

В случае, когда модульная поверхность является сферой ($g = 0$), отображение η является эпиморфизмом и, следовательно, некоторая цепь из кривых $c_1 \cup \dots \cup c_k$ должна быть гомологична кривой b такой, что $\eta([b]) = 1$. Тогда к соотношению (2) добавляется следующее условие на наибольший общий делитель (GSD) чисел $d_1 n_1, \dots, d_k n_k$

$$(GSD(d_1 n_1, \dots, d_k n_k), n) = 1 \quad (3)$$



Матрица гомеоморфизма

Пусть $S = \mathbb{T}^2$ – двумерный тор \mathbb{T}^2 и $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Тогда индуцированный изоморфизм $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2)$ однозначно определяется унимодулярной матрицей с определителем 1.

$$f_* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Гомеоморфизм f является изотопным тождественному тогда и только тогда, когда $f_* = E$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гомотопные тождественному гомеоморфизмы

Теорема

(Характеристика гомотопных тождественному периодических гомеоморфизмов тора) Для сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ периода $n \in \mathbb{N}$ следующие условия эквивалентны:

- 1 f – гомотопен тождественному отображению;
- 2 $B = \emptyset$;
- 3 $g = 1$;
- 4 f топологически сопряжен диффеоморфизму
$$\Psi_n(e^{i2x\pi}, e^{i2y\pi}) = \left(e^{i2\pi(x + \frac{1}{n})}, e^{i2y\pi} \right).$$

Негомотопные тождественному гомеоморфизмы

Теорема

(Классификация не гомотопных тождественному периодических гомеоморфизмов тора) Существует семь классов топологической сопряженности не гомотопных тождественному периодических гомеоморфизмов тора со следующими периодическими данными в каждом классе (см. Рис. 2):

① $f_1: n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 1;$

② $f_2: n = 3, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 1;$

③ $f_3:$

$$n = 2, k = 4, n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1;$$

④ $f_4: n = 3, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 2;$

⑤ $f_5:$

$$n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 5;$$

⑥ $f_6: n = 4, k = 3, n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 1;$

⑦ $f_7: n = 4, k = 3, n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1, d_1 = 1, d_2 = d_3 = 3.$

Пример гомеоморфизмов f_1 и f_6

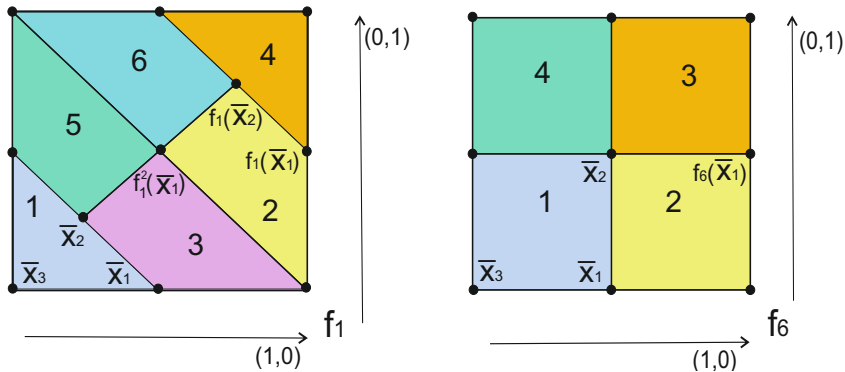


Рис.: Периодические гомеоморфизмы f_1 и f_6

Неравенства, связывающие периодические данные

Утверждение

Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f : S \rightarrow S$ периода n без точек меньшего периода справедливо следующее равенство:

$$p = n(g - 1) + 1 \quad (4)$$

Неравенства, связывающие периодические данные

Утверждение

Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f : S \rightarrow S$ периода n с непустым множеством точек меньшего периода справедливо следующее неравенство:

$$p > n(g - 1) + 1 \quad (5)$$

Неравенства, связывающие периодические данные

Утверждение

Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ периода n с непустым множеством точек меньшего периода, справедливо неравенство

$$2 < \frac{2n}{n-1} \leq k \leq 4 \quad (6)$$

Индекс неподвижной точки отображения

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – изолированная точка векторного поля $\xi(x, y)$ на плоскости и $r > 0$ такое, что диск $d_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\}$ не содержит изолированных точек векторного поля, отличных от (x_0, y_0) .

Тогда число оборотов векторного поля $\xi|_{\partial d_r}$ называется индексом особой точки M_0 и обозначается $I(M_0)$.

Пусть x_0 – изолированная неподвижная точка f и в некоторой окрестности (не содержащей других неподвижных точек f) точки x_0 векторное поле $\xi(x)$ определено формулой $\xi(x) = x - f(x)$. Тогда индексом неподвижной точки x_0 называется индекс особой точки x_0 векторного поля $\xi(x)$ и обозначается $I(x_0)$.

Индекс неподвижной точки для поворота

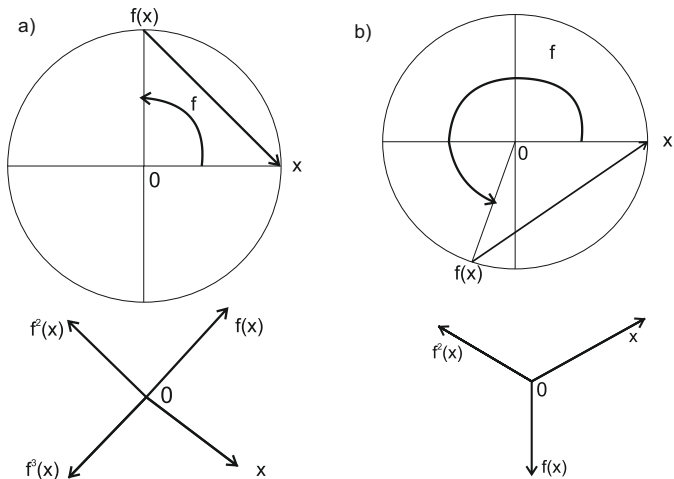


Рис.: Индекс неподвижной точки поворота плоскости: а) $I(0) = 1$,
 б) $I(0) = -2$