НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

О бифуркациях в однопараметрических семействах диффеоморфизмов, приводящих к рождению одномерных базисных множеств.

Гринес В.З., Минц Д.И., Петрова Ю.Э.

16 июля 2021

Основные понятия

Определение

- *Рассмотрим диффеоморфизм* $f : M^n \to M^n (M^n$*-замкнутое многообразие). Компактное, инвариантное относительно* f *множество* $\Lambda \subset int M^n$ $(f(\Lambda) = \Lambda)$ *называется гиперболическим относительно* f*, если существует непрерывное, инвариантное относительно дифференциала* f *разложение в прямую сумму касательного расслоения* $T_\Lambda M^n$ *:*

$$E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda, \;\; x \in \Lambda$$

такую, что для некоторых фиксированных $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ *и при условии, что* $k > 0$ *выполняется:*

$$||Df^k(v)|| \leqslant c\lambda^k ||v||, v \in E^s_\Lambda$$
$$||Df^{-k}(v)|| \leqslant c\lambda^k ||v||, v \in E^u_\Lambda.$$

Аксиома

Аксиома А. Пусть $f : M^n \to M^n$-диффеоморфизм, Ω_f - неблуждающее множество[1] *диффеоморфизма f. Тогда:*

1. *Ω_f является гиперболическим;*
2. *Периодические точки плотны в Ω_f*

Аксиома А и условие строгой трансверсальности являются необходимым и достаточным условием структурной устойчивости[2].

[1] Для f точка $x \in M^n$ называется блуждающей, если существует открытая окрестность U_x точки x такая,что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется неблуждающей.

[2] Диффеоморфизм f пространства C^1- диффеоморфизмов многообразия M^n с C^1-топологией называется структурно устойчивым, если существует C^1-окрестность $U(f)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжен f.

- *Теорема о спектральном разложении.*

Пусть $f : M^n \to M^n$ А-диффеоморфизм. Тогда

1. Ω_f единственным образом представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся подмножеств Λ_i, каждое из которых является компактным инвариантным и топологически транзитивным;

$$\Omega_f = \Lambda_1 \cup \ldots. \cup \Lambda_m$$

Определение

- *Множество Λ_i называется базисным множеством.*

Определение

- *Пусть* $f : M^n \to M^n$ *- гомеоморфизм. Рассмотрим компактное* f*-инвариантное множество* $A \subset M^n$*. Если существует компактная окрестность* $U_A \subset A$ *такая, что* $f(U_A) \subset int\ U_A$ *и* $A = \bigcap\limits_{k \geqslant 0} f^k(U_A)$*, то множество* A *называется аттрактором дискретной динамической системы* f*.*

Определение

- *Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ называется диффеоморфизмом Аносова, если для него все многообразие является гиперболическим множеством.*
  - Пусть $f : M^2 \to M^2$ -диффеоморфизм Аносова. Тогда:
    1. $M^2 = \mathbb{T}^2$(С.Смейл)
    2. f имеет единственное базисное множество $\Lambda = \mathbb{T}^2$(Я.Г.Синай)[3]
  - Таким образом, неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из одного двумерного базисного множества Λ, которое совпадает со всем тором.

[3] Синай Я.Г. доказал, что f топологически сопряжен с алгебраическим автоморфизмом Аносова

Определение

- *DA-диффеоморфизмом называется структурно устойчивый диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^2$, неблуждающее множество которого состоит из неподвижного источника и гиперболического одномерного аттрактора, полученного так называемой хирургической операцией Смейла из диффеоморфизма Аносова двумерного тора $\mathbb{T}^2$.*

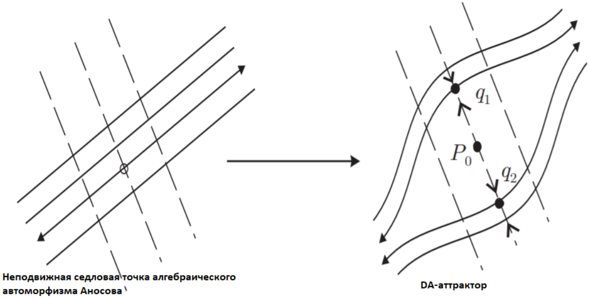


Рис.: Хирургическая операция Смейла

Рассмотрим диффеоморфизм $M_x : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ такой, что для любого $x \in [k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}], k \in \mathbb{Z}$, M_x задаётся формулой:

$$M_x : \overline{x} = k + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi x) \right); \quad \varepsilon \in (-1, 1). \tag{1}$$

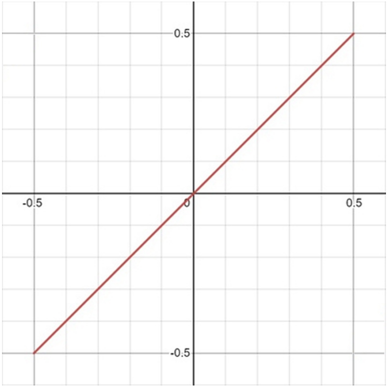
Рассмотрим отображение $\chi_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$, которое является естественной проекцией прямой на окружность, для $x \in \mathbb{R}^1$:

$$\chi_1(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } 0 \le \{x\} < \frac{1}{2} \\ \{x\} - 1, & \text{если } \frac{1}{2} \le \{x\} < 1 \end{cases} \tag{2}$$

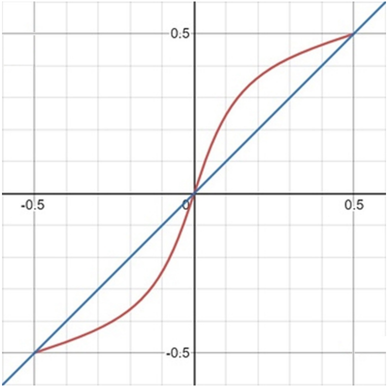
Введем отображение $M_{s,\chi_1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, заданное следующей формулой:

$$M_{s,\chi_1}(s) = \chi_1 \left(M_s \left(\chi_1^{-1}(s) \right) \right), s \in \mathbb{S}^1$$

Отображение Мебиуса



a) $\epsilon = 0$



b) $\epsilon = -0.5$

Пусть отображение $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задано формулой:

$$\mathrm{A}:\begin{cases}\overline{x} = 2x + y\\ \overline{y} = x + y\end{cases} \qquad (3)$$

Рассмотрим отображение $A_{\chi_2}:\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданное следующей формулой:

$$A_{\chi_2} = \chi_2\left(A\left(\chi_2^{-1}\left(x^*;y^*\right)\right)\right), \text{где } \chi_2(x,y) = (\chi_1(x);\chi_1(y)); x^*,y^* \in \mathbb{T}^2.$$

Рассмотрим прямое произведение отображений Мебиуса:

$$M_{\varepsilon,\chi_2} = \begin{pmatrix} M_{x,\chi_1} & 0\\ 0 & M_{y,\chi_1}\end{pmatrix} \qquad (4)$$

Запишем суперпозицию прямого произведния двух отображений Мебиуса и алгебраического автоморфизма Аносова:

$$F_\varepsilon = M_{\varepsilon,\chi_2}\circ A_{\chi_2} \qquad (5)$$

Однопараметрическое семейство диффеоморфизмов двумерного тора

Бифуркационное значение параметра $\varepsilon^* = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

При $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ отображение F_ε является диффеоморфизмом Аносова.

При $\varepsilon = \varepsilon^*$ неподвижная седловая точка $p_\varepsilon = (0{,}0)$ диффеоморфизма Аносова перестает быть гиперболической.

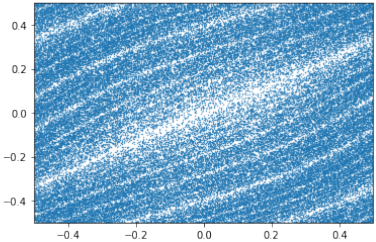
При переходе через бифуркационное значение неподвижная точка p_ε меняет свой тип и становится источником, а также в ее окрестности рождаются две неподвижные седловые точки, обозначим их q_1 и q_2.

Однопараметрическое семейство диффеоморфизмов двумерного тора

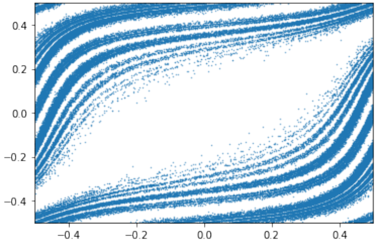
Неблуждающее множество однопараметрического семейства диффеоморфизмов двумерного тора, полученного суперпозицией прямого произведения отображений Мебиуса и алгебраического автоморфизма Аносова при $\varepsilon \in (\varepsilon^*, -0.5)$ состоит из:

$$\Omega_{f_\varepsilon} = p_\varepsilon \cup \Lambda_\varepsilon,$$

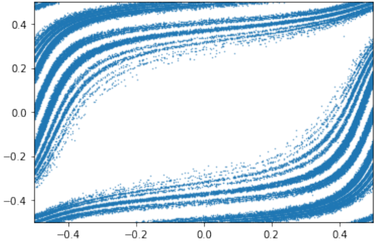
где $\Lambda_\varepsilon = \mathbb{T}^2 \setminus W^u_{p_\varepsilon}$ - аттрактор, являющийся одномерным базисным множеством.



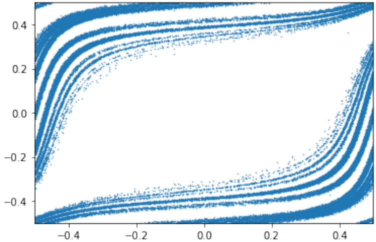
a) $\epsilon = -0.1$



b)$\epsilon = -0.43$



c)$\epsilon = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$



d)$\epsilon = -0.5$

Однопараметрическое семейство диффеоморфизмов трехмерного тора

Определение

Базисное множество B A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$, называется поверхностным базисным множеством, если B принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности M^2_B топологически вложенной в многообразие M^3

Однопараметрическое семейство диффеоморфизмов трехмерного тора

Рассмотрим отображение $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданное следующей формулой:

$$A = \begin{cases} \overline{x} = 2x + y \\ \overline{y} = x + y \\ \overline{z} = z \end{cases}$$

Введем естественную проекцию $\chi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{T}^3$:

$$\chi_3(x,y,z) = (\chi_1(x); \chi_1(y); \chi_1(z)).$$

Рассмотрим отображение $A\chi_3 : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, заданное формулой:

$$A\chi_3 = \chi_3(A(\chi_3^{-1}(x^*; y^*; z^*))), \text{где } x^*, y^*, z^* \in \mathbb{T}^3$$

Рассмотрим M_{ε,χ_3}

$$M_{\varepsilon,\chi_3} = \begin{pmatrix} M_{x,\chi_1} & 0 & 0 \\ 0 & M_{y,\chi_1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{z,\chi_1} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Возмущение отображения $A\chi_3$, имеет следующий вид:

$$G_\varepsilon = M_{\varepsilon,\chi_3} \circ A\chi_3 \tag{7}$$

Однопараметрическое семейство трехмерного тора

Бифуркационное значение $\varepsilon^* = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

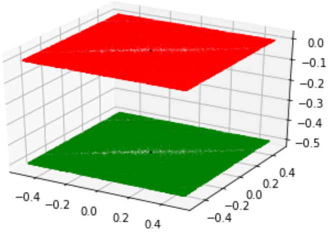
При $\varepsilon \in (0; \varepsilon^*)$ суперпозиция упомянутых ранее отображений имеет неблуждающее множество, состоящее из двух нетривиальных двумерных базисных множеств, каждое из которых гомеоморфно двумерному тору. Одно из них является аттрактором, другое - репеллером. Причем ограничение отображения G_ε на каждое из этих множеств является диффеоморфизмом Аносова.

При бифуркационном значении ε^* неподвижные точки $p_{1,\varepsilon} = (0; 0; 0)$ и $p_{2,\varepsilon} = (0; 0; -\frac{1}{2})$ перестают быть гиперболическими.

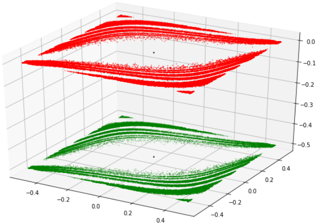
При переходе через бифуркационное значение неподвижные точки меняют свой тип и неблуждающее множество диффеоморфизма G_ε состоит из :

$$\Omega_{F_\varepsilon} = p_{1,\varepsilon} \cup p_{2,\varepsilon} \cup \Lambda_{1,\varepsilon} \cup \Lambda_{2,\varepsilon},$$

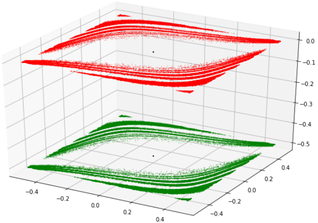
где p_1-гиперболическая источниковая точка, p_2-седловая точка с индексом Морса 2, $\Lambda_{1,\varepsilon}$ является одномерным аттрактором, $\Lambda_{2,\varepsilon}$ - одномерное седловое базисное множество.
$\Lambda_{1,\varepsilon}$ и $\Lambda_{2,\varepsilon}$ являются одномерными поверхностными базисными множествами.



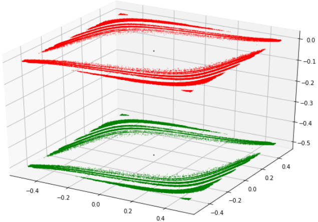
a) $\epsilon = -0.1$



b) $\epsilon = -0.43$



c) $\epsilon = -\frac{1}{\sqrt{5}}$



d) $\epsilon = -0.5$

Список литературы

- В.З.Гринес, О.В.Починка «Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три».
- Каток А., Хасселблат Б. «Введение в современную теорию динамических систем».
- В.З.Гринес, О.В.Починка, А.А. Шиловская «Диффеоморфизмы 3-многообразий с одномерными базисными множествами просторно расположенными на 2-торах»