Топологическая классификация периодических гомеоморфизмов 2-тора

Баранов Д., Чилина Е., ВШЭ, Нижний Новгород, Россия

THE INTERNATIONAL CONFERENCE DYNAMICS IN SIBERIA 2021

1 Марта – 6 Марта, 2021, Новосибирск, Россия

Периодические гомеоморфизмы

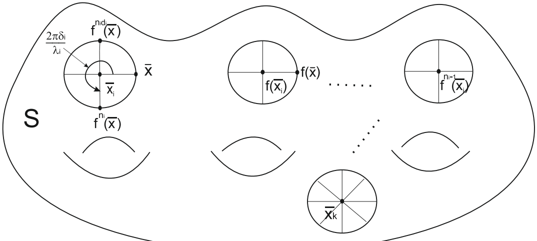
Пусть S – замкнутая ориентируемая поверхность и $f : S \to S$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Гомеоморфизмы $f, f' : S \to S$ называются топологически сопряженными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : S \to S$ такой, что $f' = h \circ f \circ h^{-1}$.

Гомеоморфизм f называется периодическим, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f.

Точки меньшего периода

В силу результатов Я. Нильсена с каждым периодическим преобразованием f периода n связаны следующие объекты:

- множество $\bar{B} \subset S$ точек, периода меньшего n, оно состоит из конечного числа орбит $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \ldots, k$ периода n_i, являющегося делителем n; с каждой орбитой $\mathcal{O}_i \subset \bar{B}$ связано число $\delta_i \in \{1, \ldots, \lambda_i - 1\}$ взаимно простое с $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$ такое, что в некоторой окрестности $D_{\bar{x}_i}$ точки $\bar{x}_i \in \mathcal{O}_i$ гомеоморфизм f^{n_i} топологически сопряжен с поворотом плоскости вокруг начала координат.
- число $d_i \in \{1, \ldots, \lambda_i - 1\}$ такое, что $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda}$. Пара (n_i, d_i), где называется валентностью орбиты $\mathcal{O}_i$



Естественная проекция

- группа $G = \{id, f, \dots, f^{n-1}\}$, изоморфная $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ и действующая на S так, что модульная поверхность $\Sigma = S/G$ является замкнутой поверхностью, и естественная проекция $\pi : S \to \Sigma$ является n-листным накрытием всюду, кроме точек множества $\bar{B}$; $B = \pi(\bar{B})$, $x_i = \pi(\mathcal{O}_i)$;
- гомоморфизм $\eta : H_1(\Sigma \setminus B) \to \mathbb{Z}_n$, индуцированный проекцией π.

Классификация Нильсена периодических гомеоморфизмов

Предложение

Два периодических преобразования f, f' поверхности S топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды и наборы валентностей орбит меньшего периода.

Следствие

Два периодических преобразования f, f' поверхности S без точек меньшего периода топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды.

Периодические данные

Таким образом, если p – род поверхности S, а g – род модульной поверхности Σ, то каждый периодический гомеоморфизм можно описать периодическими данными

$$(n, p, g, n_1, ..., n_k, d_1, ..., d_k).$$

Если $B = \emptyset$, то $k = 0$ и периодические данные имеют вид (n, p, g), а естественная проекция $\pi : S \to \Sigma$ является n-листным накрытием (без точек ветвления) модульной поверхности Σ рода g поверхностью S рода p.

Реализуемость периодических данных

Реализуемость некоторого набора чисел периодическими данными какого-либо периодического гомеоморфизма определяется следующими соотношениями:

$$2p + \sum_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g + k - 2) \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i n_i \equiv 0 \pmod{n} \tag{2}$$

Эйлерова характеристика

Равенство (1) выражает связь эйлеровых характеристик поверхностей

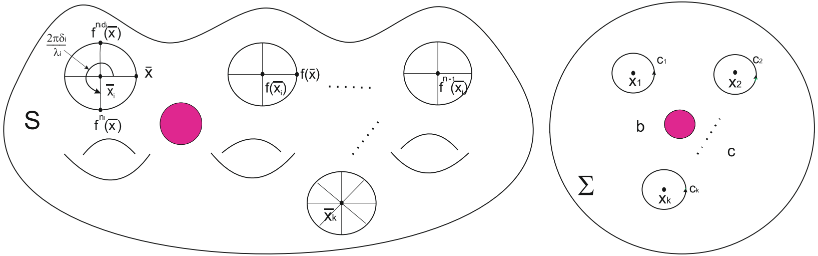
$$\dot{S} = S \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \pi^{-1}(D_i),\ \dot{\Sigma} = \Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^{k} D_i,$$

при условии, что поверхность $\dot{S}$ n-листно накрывает $\dot{\Sigma}$

$$\chi(\dot{S}) = n\chi(\dot{\Sigma}).$$

Действие гомеоморфизма

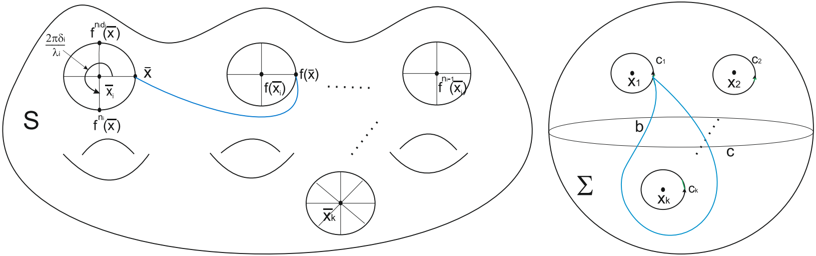
Соотношение (2) следует из следующих соображений. Положим $D_i = \pi(D_{\bar{x}_i})$ и обозначим через c_i границу диска D_i, ориентированную так, что при обходе вдоль границы диск остается слева. Тогда $\eta([c_i]) = n_i d_i$. С другой стороны объединение всех кривых $c_1 \cup \cdots \cup c_k$ гомологично кривой c, которая ограничивает диск и, следовательно, удовлетворяет равенству $\eta([c]) = 0$.



Случай когда g=0

В случае, когда модульная поверхность является сферой ($g = 0$), отображение η является эпиморфизмом и, следовательно, некоторая цепь из кривых $c_1 \cup \cdots \cup c_k$ должна быть гомологична кривой b такой, что $\eta([b]) = 1$. Тогда к соотношению (2) добавляется следующее условие на наибольший общий делитель (GSD) чисел $d_1 n_1, \ldots, d_k n_k$

$$(GSD(d_1 n_1, \ldots, d_k n_k), n) = 1 \tag{3}$$



Матрица гомеоморфизма

Пусть $S = \mathbb{T}^2$ – двумерный тор $\mathbb{T}^2$ и $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Тогда индуцированный изоморфизм $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ однозначно определяется унимодулярной матрицей с определителем 1.

$$f_* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Гомеоморфизм f является изотопным тождественному тогда и только тогда, когда $f_* = E$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гомотопные тождественному гомеоморфизмы

Теорема

(Характеристика гомотопных тождественному периодических гомеоморфизмов тора) Для сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ периода $n \in \mathbb{N}$ следующие условия эквивалентны:

1. f – гомотопен тождественному отображению;
2. $B = \emptyset$;
3. $g = 1$;
4. f топологически сопряжен диффеоморфизму $\Psi_n \left(e^{i2x\pi}, e^{i2y\pi}\right) = \left(e^{i2\pi\left(x+\frac{1}{n}\right)}, e^{i2y\pi}\right)$.

Негомотопные тождественному гомеоморфизмы

Теорема

(Классификация не гомотопных тождественному периодических гомеоморфизмов тора) Существует семь классов топологической сопряженности не гомотопных тождественному периодических гомеоморфизмов тора со следующими периодическими данными в каждом классе (см. Рис. 2):

1. f_1: $n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1;$
2. f_2: $n = 3,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1;$
3. f_3:
   $n = 2,\ k = 4,\ n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1;$
4. f_4: $n = 3,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 2;$
5. f_5: $n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = 1,\ d_3 = 5;$
6. f_6: $n = 4,\ k = 3,\ n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1;$
7. f_7: $n = 4,\ k = 3,\ n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = d_3 = 3.$

Пример гомеоморфизмов f_1 и f_6

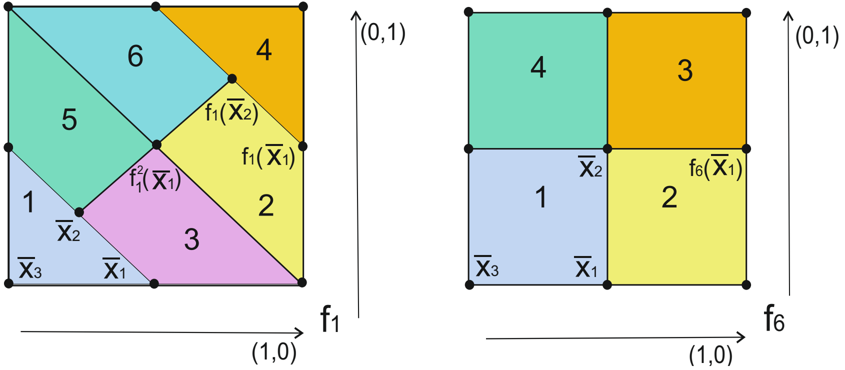


Рис.: Периодические гомеоморфизмы f_1 и f_6

Неравенства, связывающие периодические данные

Утверждение

Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f : S \to S$ периода n без точек меньшего периода справедливо следующее равенство:

$$p = n(g-1) + 1 \tag{4}$$

Неравенства, связывающие периодические данные

Утверждение

Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f : S \to S$ периода n с непустым множеством точек меньшего периода справедливо следующее неравенство:

$$p > n(g-1) + 1 \tag{5}$$

Неравенства, связывающие периодические данные

Утверждение

Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ периода n с непустым множеством точек меньшего периода, справедливо неравенство

$$2 < \frac{2n}{n-1} \leqslant k \leqslant 4 \qquad (6)$$

Индекс неподвижной точки отображения

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – изолированная точка векторного поля $\xi(x, y)$ на плоскости и $r > 0$ такое, что диск $d_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leqslant r\}$ не содержит изолированных точек веторного поля, отличных от (x_0, y_0). Тогда число оборотов векторного поля $\xi|_{\partial d_r}$ называется индексом особой точки M_0 и обозначается $I(M_0)$.
Пусть x_0 – изолированная неподвижная точка f и в некоторой окрестности (не содержащей других неподвижных точек f) точки x_0 векторное поле $\xi(x)$ определено формулой $\xi(x) = x - f(x)$. Тогда индексом неподвижной точки x_0 называется индекс особой точки x_0 векторного поля $\xi(x)$ и обозначается $I(x_0)$.

Индекс неподвижной точки для поворота

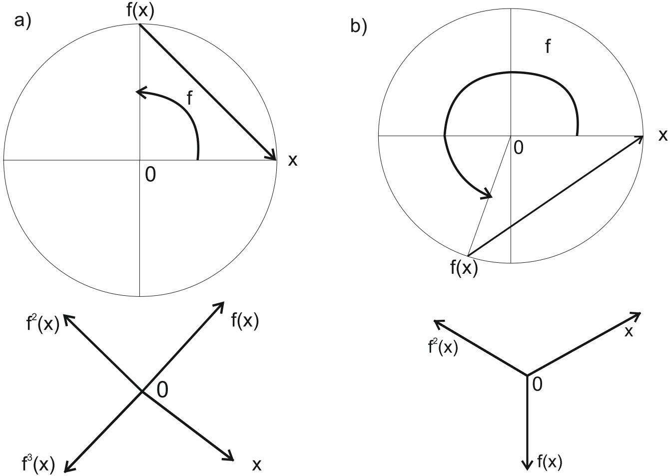


Рис.: Индекс неподвижной точки поворота плоскости: a) $I(0) = 1$, b) $I(0) = -2$

Определение

Пусть A$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – унимодулярная целочисленная матрица.

Тогда отображение $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$f_A : \begin{cases} \bar{x} = ax + by \pmod 1 \\ \bar{y} = cx + dy \pmod 1 \end{cases}$$

является алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Определение

Если собственные значения матрицы A равны по модулю единице, то f_A называется негиперболическим алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Определение

Два алгебраических автоморфизма тора f_A и f_B называются сопряжёнными, если существует такой автоморфизм f_C, что $f_A = f_C^{-1} f_B f_C$ (при этом отображение f_C может являться не сохраняющим ориентацию).

Определение

Матрица $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ подобна матрице $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ над $\mathbb{Z}$, если существут такая унимодулярная матрица $S \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, что $B = S^{-1} A S$.

Следовательно, задача о нахождении классов алгебраических автоморфизмов тора сводится к задаче о нахождении классов подобия матриц над $\mathbb{Z}$.

Лемма (Batterson, 1979)

Пусть A - целочисленная унимодулярная матрица второго порядка и её собственные значения равны по модулю единице. Тогда A подобна над $\mathbb{Z}$ в точности одной из следующих матриц.

$$\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & m\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Утверждение

Каждый класс сопряжённости алгебраических негиперболических автоморфизмов двумерного тора задаётся в точности одной из приведенных выше матриц.

Утверждение

Существует 6 классов сопряжённости периодических автоморфизмов двумерного тора, каждый из которых задан в точности одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема

В каждом классе топологической сопряженности не гомотопных тождественному периодических гомеоморфизмов тора существует алгебраический автоморфизм, индуцированный следующей матрицей в каждом классе:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где каждому автоморфизму, заданному матрицей A_i соответствует класс топологической сопряжённости гомеоморфизмов f_i, $i = \overline{1, 7}$.

1. f_1: $n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
2. f_2: $n = 3,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
3. f_3:
   $n = 2,\ k = 4,\ n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$;
4. f_4: $n = 3,\ k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 2$;
5. f_5: $n = 6, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = 1,\ d_3 = 5$;
6. f_6: $n = 4,\ k = 3,\ n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
7. f_7: $n = 4,\ k = 3,\ n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2 = d_3 = 3$.