Необходимые и достаточные условия топологической сопряжённости n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

И. Голикова, О. Починка

НИУ ВШЭ Нижний Новгород

28.04.2021

Грубые преобразования окружности

Майер А. Г. (1939). Грубое преобразование окружности в окружность. Учёные записки ГГУ, 12, 215–229

- понятие грубости для дискретных динамических систем на окружности;
- грубый каскад имеет лишь конечное число периодических точек;
- каждая периодическая точка гиперболическая.

Вводные определения

Definition (Грубый диффеоморфизм)

Диффеоморфизм $f \in Diff(M^n)$ называется грубым, если он имеет C^1-окрестность $U(f) \subset Diff(M^n)$ такую, что $\forall f' \in U(f)$ топологически сопряжён f.

Definition (Диффеморфизмы Морса-Смейла)

Диффеоморфизмы на связном замкнутом гладком многообразии M^n, $n > 1$, называются диффеоморфизмами Морса-Смейла если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби отличны от 1;
- для любых периодических точек p и q устойчивое W^s_p и неустойчивое W^u_q многообразия либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

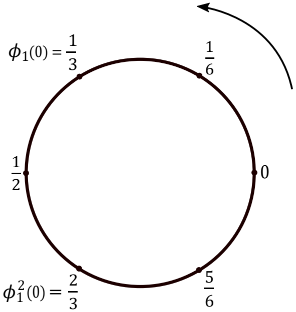
Топологическая классификация грубых преобразований окружности

Рассмотрим класс G грубых сохраняющих ориентацию преобразований окружности. Следуя вышеупомянутой работе А. Г. Майера, далее приведена топологическая классификация сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов рассматриваемого класса:

1) $\forall f \in G$ множество $Per(f)$ состоит из $2m,\ m \in \mathbb{N}$, периодических орбит, каждая из которых имеет период k.
   Перенумеруем периодические точки множества $Per(f)$: $p_0, p_1, \ldots, p_{2mk-1}, p_{2mk} = p_0$. Тогда существует целое число l такое, что $f(p_0) = p_{2ml}$, $l = 0$ если $k = 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ если $k > 1$ and $(k,\ l) = 1$.
2) Диффеоморфизмы $f;\ f' \in G$ с параметрами $m, k, l;\ m', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $m = m'$, $k = k'$ и выполняется одно из следующих условий:

Топологическая классификация грубых преобразований окружности

- $l = l'$ (если $l \neq 0$, тогда сопрягающий гомеоморфизм h сохраняет ориентацию);
- $l = k' - l'$ (h меняет ориентацию).



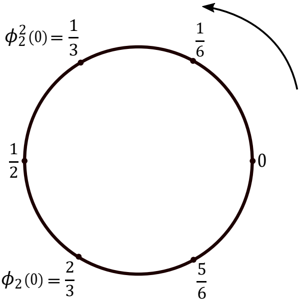


Fig.: Диффеоморфизмы $\phi_{1,3,1}$ и $\phi_{1,3,2}$

Топологическая классификация грубых преобразований окружности

3) Для любой тройки целых чисел m, k, l таких, что $m, k \in \mathbb{N}$, $l = 0$, если $k = 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ и если $k > 1$, $(k,\ l) = 1$, существует модельный диффеоморфизм $\phi_{m,k,l} \in G$ с данными параметрами

$$\phi_{m,k,l} = \pi \Phi_{m,k,l} \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,$$

где π — универсальное накрытие окружности $\mathbb{S}^1$ действительной прямой $\mathbb{R}$:

$$\pi(x) = e^{2\pi i x} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,$$

$$\Phi_{m,k,l}(x) = x + \frac{1}{4\pi n k} sin(2\pi n k x) + \frac{l}{k} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1.$$

Обозначим $MG \subset G$ в качестве класса, состоящего из всех модельных диффеоморфизмов окружности.

Главный результат

Введём обозначения:

$\phi_{m_i,k_i,l_i} = \phi_i,\ \Phi_{m_i,k_i,l_i} = \Phi_i,\ \phi = \phi_1 \times \phi_2 \times \cdots \times \phi_n.$

Теорема

Диффеоморфизмы $\phi,\ \phi' \in MG^n$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует подстановка $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix}$ индексов из множества $\{1,\ 2, \ldots,\ n\}$, $\xi(i) = \xi_i$, такая, что диффеоморфизмы ϕ_i и ϕ'_{ξ_i} топологически сопряжены для $i = 1, \ldots, n$.

Динамика n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

Рассмотрим класс G^n диффеоморфизмов, которые являются n-кратными декартовыми произведениями грубых преобразований окружностей. Тогда $MG^n \subset G^n$ является множеством модельных n-кратных декартовых произведений грубых диффеоморфизмов окружности, и оно так же называется классом модельных диффеоморфизмов.

Утверждение

Диффеоморфизм $f \in G^n$, являющийся n-кратным декартовым произведением $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$ грубых преобразований окружности с параметрами $m_1, k_1, l_1; m_2, k_2, l_2; \ldots; m_n, k_n, l_n$, соответственно, топологически сопряжён модельному диффеоморфизму $\phi = \phi_1 \times \phi_2 \times \cdots \times \phi_n \in MG^n$.

Динамика n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ существует сопрягающий гомеоморфизм h_i :

$$h_i f_i = \phi_i h_i,$$

и коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} x_i & \xrightarrow{h_i} & x_i' \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_i} \\ f_i(x_i) & \xrightarrow[h_i]{} & \phi_i(x_i') \end{array}$$

Рассмотрим гомеоморфизм
$h = h_1 \times h_2 \times \dots h_n : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n,\ h(x) = x'$, где
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ x' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$.

Динамика $\boldsymbol{n}$-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

$$hf(x) = (h_1 f_1(x_1), \ldots, h_n f_n(x_n)) = (\phi_1 h_1(x_1), \ldots, \phi_n h_n(x_n))$$

и

$$\phi h(x) = (\phi_1 h_1(x_1), \ldots, \phi_n h_n(x_n))$$

$$\Rightarrow hf = \phi h,$$

и коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad h \quad} & x' \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\ f(x) & \xrightarrow[\quad h \quad]{} & \phi(x') \end{array}$$

Динамика n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

Обозначим НОК$(a, b) = [a, b]$.

Утверждение

Диффеоморфизм $\phi \in MG^n$ является градиентно-подобным диффеоморфизмом n-мерного тора $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$, и его неблуждающее множество состоит из $2^n \prod_{i=1}^n m_i k_i$ периодических точек.

Динамика n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

Рассмотрим накрытие
$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n : p(x) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \dots, e^{2\pi i x_n})$, $x \in \mathbb{R}^n$.
Тогда автоморфизм g_λ накрытия p действует следующим образом:

$g_\lambda :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ g_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1+\lambda_1, x_2+\lambda_2, \dots, x_n+\lambda_n),\ \lambda_i \in \mathbb{Z},$

$i = 1, \dots, n.$
Группа скольжений (автоморфизмов) данного накрытия — $Aut(p) = \{g_\lambda\}$.
Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \Phi = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_n$ — поднятие отображения ϕ. Тогда

$$\Phi(x) = (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2), \dots, \Phi_n(x_n))\,.$$

Динамика n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

Точка x на торе $\mathbb{T}^n$ периодическая тогда и только тогда, когда существует $r \in \mathbb{N}$ и целые μ_i, $i = 1, \ldots, n$ такие, что $\Phi^r(x) = (x_1 + \mu_1, x_2 + \mu_2, \ldots, x_n + \mu_n)$.
Для того, чтобы найти периодические точки диффеоморфизмов ϕ_i, достаточно найти неподвижные точки для Φ_i, $i = 1, \ldots, p$.
Следовательно, $x_i^{\lambda_i} = \dfrac{\lambda_i}{2m_ik_i}, \lambda_i = 0, \ldots, 2m_ik_i - 1$.

$$\Phi(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \ldots, x_n^{\lambda_n}) = \left(x_1^{\lambda_1} + \frac{l_1}{k_1},\ x_2^{\lambda_2} + \frac{l_2}{k_2}, \ldots, x_n^{\lambda_n} + \frac{l_n}{k_n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi^r(x) = \left(x_1^{\lambda_1} + r\frac{l_1}{k_1},\ x_2^{\lambda_2} + r\frac{l_2}{k_2}, \ldots, x_n^{\lambda_n} + r\frac{l_n}{k_n}\right).$$

Динамика n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

Тогда, чтобы точка x диффеоморфизма ϕ была периодической периода r, должно выполняться условие $r\dfrac{l_i}{k_i} = \mu_i,\ \mu_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n.$

$$\begin{cases} r\dfrac{l_1}{k_1} = \mu_1, \\ r\dfrac{l_2}{k_2} = \mu_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ r\dfrac{l_n}{k_n} = \mu_n \end{cases}$$

Динамика n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности

Сложив строки данной системы, придём к уравнению

$$r\left(\frac{l_1}{k_1}+\frac{l_2}{k_2}+\cdots+\frac{l_n}{k_n}\right)=\sum_{i=1}^{p}\mu_i \Rightarrow$$

$\Rightarrow r=[k_1,k_2,\ldots,k_n].$

Топологическая классификация модельных диффеоморфизмов

Теорема

Диффеоморфизмы $\phi,\ \phi' \in MG^n$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует подстановка $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}$ индексов из множества $\{1,\ 2, \dots,\ n\}$, $\xi(i) = \xi_i$, такая, что диффеоморфизмы ϕ_i и ϕ'_{ξ_i} топологически сопряжены для $i = 1, \dots, n$.

Необходимость

В утверждении 2 было отмечено, что все периодические точки диффеоморфизма ϕ имеют вид $x_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} = \left(\dfrac{\lambda_1}{2m_1k_1}, \dfrac{\lambda_2}{2m_2k_2}, \dots, \dfrac{\lambda_n}{2m_nk_n}\right)$, где $\dfrac{\lambda_i}{2m_ik_i}$ — периодические точки диффеоморфизмов $\phi_i,\ i \in \{1,\dots,n\}$, соответственно, и $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{2m_ik_i}$.
Рассмотрим точки вида $x_{\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots,\lambda_n} = \left(\dfrac{\lambda_1}{2m_1k_1}, \dfrac{\lambda_2}{2m_2k_2}, \dots, \dfrac{\hat{\lambda}_i}{2m_ik_i}, \dots, \dfrac{\lambda_n}{2m_nk_n}\right)$ и множества $A_{i,\lambda_i} = \bigcup_{\lambda_i} clW^u_{x_{\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots,\lambda_n}}$. Рассмотрим также $L_{i,x_{\hat{\lambda}_1,\dots,\lambda_i,\dots,\hat{\lambda}_n}} = \bigcup_i clW^s_{\sigma^{n-1}_{x_{\hat{\lambda}_1,\dots,\lambda_i,\dots,\hat{\lambda}_n}}},\ \lambda_i = 2a,\ a \in \{0, 1, \dots, \frac{2m_ik_i-1}{2}\}$.

Необходимость

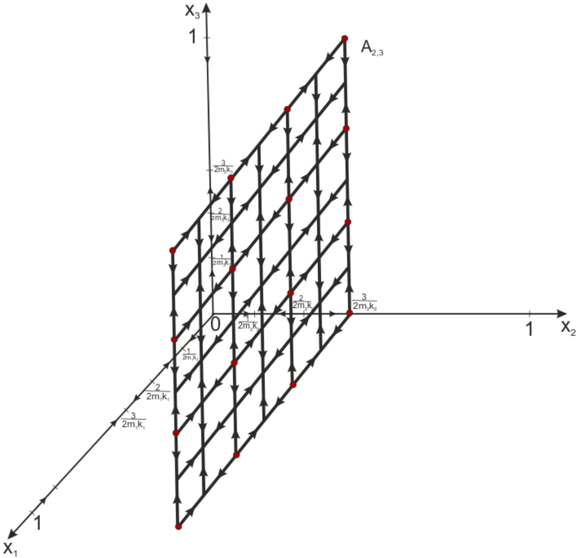


Fig.: Гиперплоскость $A_{2,3}$

Необходимость

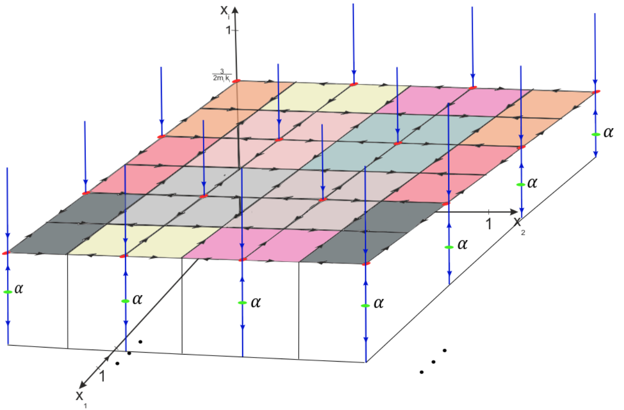


Fig.: Линии $L_{i,x_{\hat{\lambda}_1,\dots,\lambda_i,\dots,\hat{\lambda}_n}}$

Необходимость

Из свойств сопрягающего гомеоморфизма h следуют равенства:

$$h(A_{i,\lambda_i}) = A_{i',\lambda'_{i'}},$$

$$h(L_{i,x_{\hat{\lambda}_1,\ldots,\lambda_i,\ldots,\hat{\lambda}_n}}) = L_{i',x'_{\hat{\lambda'}_1,\ldots,\lambda'_{i'},\ldots,\hat{\lambda}'_n}}.$$

Прямая $L_{i,x_{\hat{\lambda}_1,\ldots,\lambda_i,\ldots,\hat{\lambda}_n}}$ имеет координаты

$\left(\dfrac{\lambda_1}{2m_1k_1},\ldots,x_i,\ldots,\dfrac{\lambda_n}{2m_nk_n}\right),$

Тогда поскольку диффеоморфизмы $\phi,\ \phi'$ топологически сопряжены, то

$$h\phi\left(\frac{\lambda_1}{2m_1k_1},\ldots,x_i,\ldots,\frac{\lambda_n}{2m_nk_n}\right) = \phi' h\left(\frac{\lambda_1}{2m_1k_1},\ldots,x_i,\ldots,\frac{\lambda_n}{2m_nk_n}\right),$$

Необходимость

$$h\left(\frac{\lambda_1}{2m_1k_1}+\frac{l_1}{k_1},\ldots,\phi_i(x_i),\ldots,\frac{\lambda_n}{2m_nk_n}+\frac{l_n}{k_n}\right)=\phi'(c_1,\ldots,x'_{i'},\ldots,c_n),$$

$$(c_1^*,\ldots,h\phi_i(x_i),\ldots,c_n^*)=(c_1+\frac{l'_1}{k'_1},\ldots,\phi' h(x'_{i'}),\ldots,c_n+\frac{l'_n}{k'_n})\Rightarrow$$

$\Rightarrow h\phi_i=\phi'_i h,\ \forall i\in\{1,\ldots,n\}$. Следовательно, существует подстановка индексов такая, что каждому индексу i диффеоморфизма ϕ_i ставится в соответствие индекс i' диффеоморфизма $\phi'_{i'}$.

Достаточность

Аналогично утверждению (1) показывается, что $h = h_1 \times h_2 \times \ldots, h_n$, где $h_i\phi_i = \phi'_{i'}h,\ i \in \{1, \ldots, n\}$, — сопрягающий гомеоморфизм для диффеоморфизмов $\phi,\ \phi'$.

References

Майер, А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Учён. зап. ГГУ. 1939. № 12. С. 215–229.

Гуревич, Е. Я., Зинина, С. Х. О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локально прямыми произведениями // СВМО. 2015. Т. 17 № 1. С. 37–45.