О. Е. Галкин, Бесконечномерные супераналоги формулы Мелера, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 927–931

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm1793

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ СУПЕРАНАЛОГИ ФОРМУЛЫ МЕЛЕРА

О. Е. Галкин

В работе найдена явная формула (являющаяся обобщением формулы Мелера, см. [1, с. 34]) решения задачи Коши для бесконечномерного аналога уравнения Шрёдингера гармонического осциллятора относительно функций на суперпространстве. Понятие суперпространства, использованное в работе, было введено в работах [2], [3] (конечномерный случай) и в [4] (бесконечномерный случай). Отметим также работы [5]–[16], посвященные различным аспектам как конечномерного, так и бесконечномерного суперанализа, особенно пионерскую работу Ф. А. Березина (см. [7] и имеющиеся там ссылки).

В настоящей работе используется подход к бесконечномерному суперанализу, описанный в работах [9], [11]. Отметим, что "вещественные" аналоги рассмотренной нами задачи решены в [17], [18]. Супераналоги классических уравнений математической физики изучались также в [10]–[13].

1. Суперпространство. Пусть $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – (вещественная) коммутативная банахова *суперталгебра* с тривиальным левым аннулятором (см. [3]) и нормой $|\cdot|$ такой, что $|ab| \leqslant |a| \cdot |b|$ (каковы бы ни были $a, b \in \Lambda$). Пусть, далее, $G = G_0 \oplus G_1$ и F – (вещественные) градуированные банаховы, $E = E_0 \oplus V \oplus W$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространства, причем подпространства E_0 и $E_1 = V \oplus W$ ортогональны, а V и W изоморфны. (Здесь и далее прямые суммы пополняются по ℓ_1-норме, для гильбертовых пространств – по ℓ_2-норме.) Фиксируем в E_0, V и W ортонормированные базисы. Тогда их объединение $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ будет базисом в E.

Супермодулем называется банахово пространство $G^{\Lambda} = G\widehat{\otimes}\Lambda$, являющееся пополнением тензорного произведения $G \otimes \Lambda$ по какой-либо кросс-норме $\|\cdot\|$, например, по норме проективной топологии или топологии равностепенно непрерывной сходимости (см. [19], [20]). В случае сепарабельного гильбертова пространства E в качестве такой нормы будем брать ℓ_2-норму:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \lambda_i\right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{1/2}.$$

При этом E^{Λ} будет гильбертовым суперпространством (см. [21]). В G^{Λ} и G_{Λ} естественным образом вводятся структуры двусторонних модулей над Λ и Λ_0 соответственно.

Аналогично определяются пространства

$$(E_\Lambda)_0 = E_0\widehat{\otimes}\Lambda_0, \quad (E_\Lambda)_V = V\widehat{\otimes}\Lambda_1, \quad (E_\Lambda)_W = W\widehat{\otimes}\Lambda_1,$$
$$(E_\Lambda)_1 = E_1\widehat{\otimes}\Lambda_1, \quad (G_\Lambda)_0 = G_0\widehat{\otimes}\Lambda_0, \quad (G_\Lambda)_1 = G_1\widehat{\otimes}\Lambda_1.$$

Ясно, что $(E_\Lambda)_1 = (E_\Lambda)_V \oplus (E_\Lambda)_W$.

Суперпространствами над Λ называются прямые суммы $G_\Lambda = (G_\Lambda)_0 \oplus (G_\Lambda)_1$ и $E_\Lambda = (E_\Lambda)_0 \oplus (E_\Lambda)_1$. Элементы E_Λ будем записывать в виде $X = (x, \theta, \overline{\theta})$, где $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in (E_\Lambda)_0, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, \dots) \in (E_\Lambda)_V, \overline{\theta} = (\overline{\theta}_1, \dots, \overline{\theta}_n, \dots) \in (E_\Lambda)_W$.

Суперскалярным произведением (X,Y) произвольных элементов $X=(x,\theta,\overline{\theta})$, $Y=(y,\xi,\overline{\xi})$ из E_Λ называется величина $\sum_{i=1}^{\infty}(x_iy_i+\theta_i\overline{\xi}_i+\xi_i\overline{\theta}_i)$. (При этом $(X,Y)\in\Lambda_0$, $|(X,Y)|\leqslant\|X\|\cdot\|Y\|$, $(X,Y)=\overline{(Y,X)}$.)

2. Линейные операторы. Пусть $\mathrm{Hom}(F^\Lambda,G^\Lambda)$ – пространство Λ-линейных справа непрерывных отображений F^Λ в G^Λ, наделенное равномерной операторной нормой $\|\cdot\|$; $\mathrm{Hom}(F,G)$ – подмножество всех таких элементов $A\in\mathrm{Hom}(F^\Lambda,G^\Lambda)$, что $A(F)\subset G$; $\mathrm{Hom}_0(F,G)=\mathrm{Hom}(F_0,G_0)\oplus\mathrm{Hom}(F_1,G_1)$, $\mathrm{Hom}_1(F,G)=\mathrm{Hom}(F_0,G_1)\oplus\mathrm{Hom}(F_1,G_0)$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(F,G)$ – соответствующее ему суперпространство (пополнение взято относительно нормы пространства $\mathrm{Hom}(F^\Lambda,G^\Lambda)$).

Линейными операторами B на F_Λ со значениями в G_Λ называются ограничения на F_Λ операторов из $\mathrm{Hom}_\Lambda(F,G)$, а также сами эти операторы. Каждый линейный оператор B имеет четыре компоненты $B_{ij}\colon(E_\Lambda)_i\to(G_\Lambda)_j$; $i,j=0,1$.

Оператором Гильберта–Шмидта называется линейный оператор B с конечной нормой

$$\|B\|_2=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|Be_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Ядерным называется оператор B, представимый суммой $B=\sum_{i=1}^{\infty}C_iD_i$ попарных произведений операторов Гильберта–Шмидта, имеющий конечную ядерную норму. *Ядерной нормой* $\|B\|_1$ называется инфимум по всем таким представлениям сумм $\sum_{i=1}^{\infty}\|C_i\|_2\cdot\|D_i\|_2$. Заметим, что если C – линейный оператор, то $\|BC\|_1\leqslant\|B\|_1\cdot\|C\|$.

Суперследом элемента B пространства $N(E_\Lambda)$ всех ядерных операторов на E_Λ, наделенного нормой $\|\cdot\|_1$, называется величина $\mathrm{str}\,B=\mathrm{tr}(B_{00})-\mathrm{tr}(B_{11})$ (см. [7, с. 93]).

Оператор C называется *суперсимметричным*, если каковы бы ни были $X,Y\in E_\Lambda$ верно равенство $(CX,Y)=(X,CY)$.

Пусть D – линейный оператор, такой что $(D-\mathbf{1})$ – ядерный ($\mathbf{1}$ – тождественный оператор), и все элементы его матрицы $\check{D}$ принадлежат Λ_0. *Детерминантом* $\det D$ оператора D называется предел при $n\to\infty$ главных миноров порядка n матрицы $\check{D}$ (ср. [22, гл. 4, §1], [23, гл. 11, §6]). Если оператор C таков, что $(C-\mathbf{1})\in N(E_\Lambda)$, а C_{11} обратим, то величина

$$\mathrm{sdet}\,C=\det(C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{10})\det C_{11}^{-1}$$

называется *супердетерминантом* оператора C (ср. [7, с. 93]).

Теорема 1 (Лиувилля, ср. [7, с. 101]). *Пусть $\varepsilon>0$, A – аналитическое отображение (см.* [3]) *области $U=\{t\in\Lambda_0^{\mathbb{C}}\mid|t|<\varepsilon\}$ в пространство $N(E_\Lambda)$. Тогда в этой области существует решение задачи Коши $\{D'(t)=A(t)D(t),\ D(0)=D_0\}$, причем если $(D_0-\mathbf{1})\in N(E_\Lambda)$, то $\bigl(D(t)-\mathbf{1}\bigr)\in N(E_\Lambda)$ для всех $t\in U$, и $\bigl(\mathrm{sdet}\,D(t)\bigr)'=\mathrm{str}\,A(t)\cdot\mathrm{sdet}\,D(t)$. (Здесь берутся формальные производные степенных рядов.)*

3. Функции и супермеры. Отображение f открытого подмножества $U\subset F_\Lambda$ в суперпространство G_Λ называется *супердифференцируемым в точке X*, если оно дифференцируемо по Фреше, причем его производная $f'(X)$ принадлежит пространству $\mathrm{Hom}_\Lambda(F,G)$. Производная в точке X от производной порядка $n-1$ (где

$n \geqslant 2$) называется производной $f^{(n)}(X)$ порядка n (ее можно считать элементом пространства $\mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{\otimes}^n F, G)$).

Если существует n-я производная $D^n f(X)$ по нечетным переменным, то она принадлежит пространству $\mathrm{Ahom}_\Lambda(\widehat{\otimes}^n F_1, G)$ антисимметричных операторов на $(\widehat{\otimes}^n F_1)_\Lambda$, которые можно считать Λ-линейными справа непрерывными операторами, действующими в пространстве $(\widehat{\wedge}^n F_1)_\Lambda$, пополненном в проективной топологии. (Здесь $\wedge^n F_1$ – n-я внешняя степень пространства F_1, см. [24].)

Прямую сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{\wedge}^n F_1, G)$$

обозначим символом $\mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{\wedge} F_1, G)$, а подкласс ограниченных последовательностей в классе

$$\prod_{n=1}^{\infty} (\widehat{\wedge}^n F_1)_\Lambda,$$

наделенный ℓ_∞-нормой, – символом $(\widehat{\wedge} F_1)_\Lambda$. Тогда на $\mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{\wedge} F_1, G) \times (\widehat{\wedge} F_1)_\Lambda$ определено естественное непрерывное G_Λ-значное билинейное отображение

$$T\colon (A, \nu) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\nu_n),$$

где $A = (A_1, \dots, A_n, \dots)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \dots)$.

Супермерой μ *на* F_Λ называется $(\widehat{\wedge} F_1)_\Lambda$-значная борелевская счетноаддитивная мера на $(F_\Lambda)_0$, имеющая ограниченную вариацию $v(\mu)$. Пусть $M_b(F_\Lambda)$ – множество всех супермер на F_Λ с ограниченным носителем.

Для всякой функции $f\colon E_\Lambda \to G_\Lambda$, бесконечное число раз супердифференцируемой по нечетным переменным, и для любого $r > 0$ определим на $(E_\Lambda)_0$ отображения

$$\pi_r(f)\colon x \mapsto \left(f(x), rDf(x), \dots, r^n D^n \frac{f(x)}{n!}, \dots\right), \qquad \pi(f) = \pi_1(f).$$

Обозначим через $F_r(E_\Lambda, G_\Lambda)$ множество функций f, для которых $\pi_r(f)\big((E_\Lambda)_0\big) \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{\wedge} F_1, G)$. Пусть, кроме того, $F_{b,r}(E_\Lambda, G_\Lambda)$ – множество всех функций из класса $F_r(E_\Lambda, G_\Lambda)$, таких что отображение $\pi_r(f)\colon (E_\Lambda)_0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{\wedge} F_1, G)$ непрерывно и ограничено на ограниченных подмножествах, $F_b(E_\Lambda, G_\Lambda) = F_{b,1}(E_\Lambda, G_\Lambda)$.

Замечание 1. Произведение двух функций из классов $F_{b,16r}(E_\Lambda, G_\Lambda)$ и $F_{b,16r}(E_\Lambda, \Lambda_0)$ соответственно является элементом класса $F_{b,r}(E_\Lambda, G_\Lambda)$.

Замечание 2. Функции $f_Y\colon X \mapsto \exp\{i(X,Y)\}$, $g_C\colon X \mapsto (CX, X)$ и $h_C\colon X \mapsto \exp\{(CX, X)\}$ принадлежат пространствам $F_{b,r}(E_\Lambda, \Lambda_0^{\mathbb{C}})$, каковы бы ни были элементы $Y \in E_\Lambda$, $C \in \mathrm{Hom}_\Lambda(E, E^{\mathbb{C}})$, $r > 0$. (Здесь $F^{\mathbb{C}}$ – комплексификация F.)

Теорема 2. *Если* $f \in F_b(E_\Lambda, G_\Lambda^{\mathbb{C}})$, $\mu \in M_b(E_\Lambda)$, *то функция*

$$\pi(f)\colon (E_\Lambda)_0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{\wedge} E_1, G^{\mathbb{C}})$$

интегрируема в смысле Бартла (см. [25]) по супермере μ относительно билинейного отображения T.

Величина билинейного интеграла

$$\int_{(E_\Lambda)_0} T\big(\pi(f)(X), \mu(dX)\big)$$

называется *интегралом* $\int f(X)\mu(dX)$ *функции* f *по супермере* μ.

Преобразованием Фурье супермеры $\mu \in M_b(E_\Lambda)$ называется функция

$$\widetilde{\mu}\colon E_\Lambda \mapsto \Lambda^{\mathbb{C}},\ X \mapsto \int \exp\{i(X,Y)\}\mu(dY).$$

Теорема 3 (о дифференцировании под знаком интеграла). *Пусть U – открытое подмножество E_Λ, и функция $g\colon U \times E_\Lambda \to G^{\mathbb{C}}_\Lambda$ такова, что каково бы ни было $k = 0,1,\dots,n+1$, отображение $g_k\colon X \mapsto g_x^{(k)}(X,\cdot)$, $U \to F_b\big(E_\Lambda, \mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{\otimes}^n E, G^{\mathbb{C}})\big)$ (здесь $g_x^{(k)}$ – k-я производная по первому аргументу) локально ограничено. Тогда если $\mu \in M_b(E_\Lambda)$, то функция $f\colon X \mapsto \int g(X,Y)\mu(dY)$, $U \to G^{\mathbb{C}}_\Lambda$, имеет производные до порядка n включительно, причем $f^{(k)}(X) = \int g_x^{(k)}(X,Y)\mu(dY)$ $(n \geqslant 1,\ k = 1,2,\dots,n)$.*

Доказательство проводится по индукции.

4. Гармонический осциллятор. Для ядерного оператора B в E_Λ и дважды супердифференцируемой функции f определен *суперлапласиан* $\Delta_B f = \mathrm{str}(f''BJ)$, где $J\colon (x,\theta,\overline{\theta}) \mapsto (x,\theta,-\overline{\theta})$ – оператор в E_Λ.

Теорема 4. *Пусть B, C – суперсимметричные операторы в E_Λ, причем B – ядерный; $\mu_0 \in M_b(E_\Lambda)$, $\alpha \in \Lambda_0^{\mathbb{C}}$, $\delta = \pi\big(2(\|B\|\cdot\|C\|)^{1/2}|\alpha|\big)^{-1}$. Тогда в классе функций $f\colon \big\{t \in \Lambda_0^{\mathbb{C}} \bigm| |t| \leqslant \delta\big\} \times E_\Lambda \to \Lambda^{\mathbb{C}}$ разрешима задача Коши для уравнения*

$$f_t'(t,X) = \frac{\alpha}{2}\big(-\Delta_B f(t,X) + (CX,X)f(t,X)\big) \tag{1}$$

с начальным условием $f(0,\cdot) = \widetilde{\mu}_0(\cdot)$. Причем существует решение вида $f(t,X) = \int G(t,X,Y)\mu_0(dY)$, где

$$G(t,X,Y) = s(t,Y)\exp\left\{\frac{\big(Q(t)X,X\big)}{2} + i\big(R(t,Y),X\big)\right\}, \tag{2}$$

а функции s, Q и R определяются равенствами:

$$s = \mathrm{sdet}^{-1/2}\big(\mathrm{ch}(\alpha t\sqrt{CB}\,)\big)\exp\left\{\frac{1}{2}B\left(\frac{\mathrm{th}(\alpha t\sqrt{CB}\,)}{\sqrt{CB}}Y,Y\right)\right\},$$

$$Q(t) = \frac{\mathrm{th}(\alpha t\sqrt{CB}\,)}{\sqrt{CB}}C, \qquad R(t,Y) = \mathrm{ch}^{-1}(\alpha t\sqrt{CB}\,)Y.$$

(Четные функции от $\sqrt{CB}$ определяются с помощью ряда Маклорена.)

Доказательство. Выполнение начальных условий очевидно. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция $G(\cdot,\cdot,Y)$ вида (2) будет решением уравнения (1) с начальными условиями $G(0,\cdot,Y) = \exp\{i(\cdot,Y)\}$ тогда и только тогда, когда функции s, Q и R аргумента t (Y – параметр) будут решениями системы уравнений

$$s'_t = s \cdot \frac{\alpha\big(\operatorname{str}(QB) + (BR, R)\big)}{2}, \qquad R'_t = -\alpha QBR, \qquad Q'_t = \alpha(C - QBQ)$$

с начальными условиями $\{s(0,Y) = 1,\ Q(0) = 0,\ R(0,Y) = Y\}$. Непосредственная проверка с использованием теоремы 1 показывает, что формулы, приведенные в формулировке теоремы, действительно определяют решение этой системы. Доказательство завершается применением теоремы 3.

Замечание. Уравнению Шрёдингера соответствует значение α, равное $-i$.

В заключение автор выражает благодарность О. Г. Смолянову за постановку задачи и внимание к работе.

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Поступило
20.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984. **2**. Rogers A. // J. Math. Phys. 1981. V. 22. № 5. P. 939–945. **3**. Владимиров В. С., Волович И. В. // ТМФ. 1984. Т. 59. № 1. С. 3–27. **4**. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // УМН. 1986. Т. 41. № 4. С. 164–165. **5**. Владимиров В. С., Волович И. В. // ТМФ. 1984. Т. 60. № 2. С. 169–198. **6**. Хренников А. Ю. // УМН. 1988. Т. 43. № 2. С. 87–114. **7**. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983. **8**. Хренников А. Ю. // ТМФ. 1987. Т. 72. № 3. С. 24–34. **9**. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 816–821. **10**. Хренников А. Ю. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 12. С. 2144–2153. **11**. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 309. С. 545–550. **12**. Хренников А. Ю. // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 2. С. 114–122. **13**. Маслова Е. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1990. Т. 6. С. 72–75. **14**. Rogers A. // J. Geom. Phys. 1993. V. 2. № 1–4. P. 491–505. **15**. Хренников А. Ю. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 3. С. 576–606. **16**. Хренников А. Ю. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 8. С. 1434–1443. **17**. Хренников А. Ю. // УМН. 1984. Т. 39. № 1. С. 163–164. **18**. Галкин О. Е. // Сб. “Исследования по теории функций”. Н. Новгород: ННГУ, 1992. С. 1113. **19**. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967. **20**. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. **21**. Хренников А. Ю. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 2. С. 298–301. **22**. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. **23**. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. **24**. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. **25**. Bartle R. G. // Studia Math. 1956. V. 15. № 3. P. 337–352.