



Общероссийский математический портал

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, Применение крайних под- и надаргументов, выпуклых и вогнутых оболочек для поиска глобальных экстремумов, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2019, том 29, выпуск 4, 483–500

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190402>

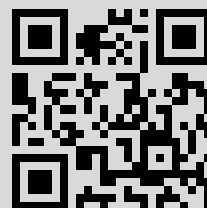
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 193.238.44.127

7 декабря 2021 г., 15:25:18



УДК 517.518.244, 519.6

© *О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина***ПРИМЕНЕНИЕ КРАЙНИХ ПОД- И НАДАРГУМЕНТОВ, ВЫПУКЛЫХ И ВОГНУТЫХ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ**

Для вещественнозначных функций f , заданных на подмножествах вещественных линейных пространств, введены понятия крайних подаргументов и крайних надаргументов, а также понятия естественных выпуклой \hat{f} и вогнутой \check{f} оболочек. Показано, что для любой строго выпуклой функции g любая точка глобального максимума функции $f+g$ является крайним подаргументом для функции f . Аналогичный результат получен для функций вида $f/v + g$. На основе этих результатов предложен метод, облегчающий поиск глобальных экстремумов функций в некоторых случаях. Доказано, что при определенных условиях функции $f/v + g$ и $\hat{f}/v + g$ имеют одинаковые глобальные максимумы и одинаковые точки глобального максимума. Приведены необходимые и достаточные условия естественности выпуклой оболочки функции. Указано достаточное условие того, что при сужении области определения f , значения вогнутой оболочки \check{f} на суженной области не меняются. Найдены крайние под- и надаргументы для непрерывной нигде не дифференцируемой функции Кобаяши–Грея–Такаги $K(x)$ на отрезке $[0; 1]$. Кроме того, на отрезке $[0; 1]$ вычислены глобальные экстремумы функции $K(x)/\cos x$ и глобальный максимум функции $K(x) - \sqrt{x(1-x)}$. Работа снабжена примерами и проиллюстрирована графиками.

Ключевые слова: недифференцируемая оптимизация, крайние подаргументы (подабсциссы) и крайние надаргументы (надабсциссы) функции, естественные вогнутая и выпуклая оболочки функции, функция Кобаяши–Грея–Такаги.

DOI: [10.20537/vm190402](https://doi.org/10.20537/vm190402)**Введение**

Целью работы является изучение свойств крайних подаргументов и надаргументов функций, естественных выпуклых и вогнутых оболочек функций, а также применение этих понятий для поиска глобальных экстремумов функций (не обязательно дифференцируемых).

Задачи поиска глобальных экстремумов, глобальной оптимизации, в том числе для недифференцируемых функций, часто возникают в технике, экономике и самой математике. Такие задачи необходимо решать, в частности, при чебышевской аппроксимации (см., например, [1, 2]) и при оценках цифровых сумм (см., например, [3], [4, sect. 1], [5]). Интерес к недифференцируемой оптимизации особенно вырос в последние годы. Помимо работ, ставших уже классическими ([1, 6–9] и других), постоянно появляются новые исследования (см., например, [10–14]).

Все результаты нашей статьи являются новыми. Мы используем элементы выпуклого анализа (см. [7–9]), но наш подход к поиску глобальных экстремумов отличается от уже известных (в частности, описанных в [1, 6–8, 10–12]). Предлагаемая нами методика приводит к более простой экстремальной задаче, которая в некоторых случаях допускает непосредственное решение (см. предложения 4 и 5), а иногда требует привлечения других алгоритмов (см. описание нашего метода на стр. 487).

Краткое содержание работы и некоторые замечания. Работа состоит из введения и трех параграфов. В начале параграфа 1 для функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, где D — подмножество

вещественного линейного пространства X , вводятся множество $\text{ExtrSA}(f, D)$ крайних подаргументов и множество $\text{ExtrEA}(f, D)$ крайних надаргументов (определение 1). Крайний подаргумент (соответственно, надаргумент) функции f — это аргумент, то есть первая компонента x , любой крайней точки (x, y) выпуклой оболочки подграфика (соответственно, надграфика) функции f . Оба этих множества лежат в D (предложение 2). Выпуклая оболочка множества D обозначается через $\text{Conv}(D)$ или \tilde{D} . В теореме 1 показано, в частности, что для любой строго выпуклой функции $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ любая точка глобального максимума функции $f + g$ на D является крайним подаргументом для f на D . Таким образом, крайние подаргументы и надаргументы для недифференцируемых функций могут играть роль, аналогичную роли стационарных точек для дифференцируемых функций. Результат теоремы 1 усилен в теореме 2, где речь идет о глобальных максимумах функций вида $f/v + g$.

Заметим, что множества $\text{ExtrSA}(f, D)$ и $\text{ExtrEA}(f, D)$ не зависят от функций g и v . Поэтому, найдя эти множества один раз, дальше можно применять их с помощью теорем 1 и 2 для поиска экстремумов функций $f/v + g$ при различных g и v . Иногда этот поиск можно еще облегчить, подобрав достаточно гладкую функцию, интерполирующую f на (не обязательно всем) множестве $\text{ExtrSA}(f, D)$ (верхнюю интерполянту ψ_Δ) или множестве $\text{ExtrEA}(f, D)$ (нижнюю интерполянту ψ_∇). На основе полученных результатов предложен метод, облегчающий поиск глобальных экстремумов функций в некоторых случаях (см. стр. 487).

В начале параграфа 2 (определение 2) мы напоминаем определения выпуклой \hat{f} и вогнутой \check{f} оболочек функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, а затем (определение 3) объясняем, когда мы называем их естественными. Затем мы изучаем свойства таких оболочек и применение для поиска глобальных экстремумов. В теореме 3 показано, в частности, что при некоторых условиях функции $f/v + g$ на D и $\hat{f}/v + g$ на \tilde{D} имеют одинаковые глобальные максимумы и одинаковые точки глобального максимума. Этот результат важен по двум причинам. Во-первых, функции \hat{f} и \check{f} могут иметь гораздо лучшие дифференциальные свойства, чем f (см. [9, теорема 1.5.2], [7, теорема 25.5]). Во-вторых, \hat{f} и \check{f} не зависят от g и v . Поэтому, найдя \hat{f} и \check{f} один раз, можно использовать их для поиска глобальных экстремумов функций $f/v + g$ при различных g и v .

Далее в теореме 5 приводятся достаточные условия естественности выпуклой оболочки \hat{f} функции f . В примерах 1 и 2 для модельных функций, заданных на отрезке, найдены их вогнутая и выпуклая оболочки, а также множества крайних подаргументов и надаргументов. В теореме 6 приводятся необходимые и достаточные условия того, что выпуклая функция $h: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ является естественной выпуклой оболочкой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. В теореме 7 для случая $D_0 \subset D$ дано достаточное условие совпадения на множестве D_0 значений функции \hat{f}_{D_0} со значениями функции \hat{f}_D .

В параграфе 3 в качестве иллюстрации полученные результаты применяются к непрерывной нигде не дифференцируемой функции Кобаяши–Грея–Такаги $K(x)$ (см. [5]). В предложении 4 найдены на $[0; 1]$ ее верхняя и нижняя интерполянты, функции $\hat{K}_{[0;1]}$ и $\check{K}_{[0;1]}$, а также множества $\text{ExtrSA}(K, [0; 1])$ и $\text{ExtrEA}(K, [0; 1])$. В предложении 5 вычислены на отрезке $[0; 1]$ глобальный максимум функции $K(x) - \sqrt{x(1-x)}$ и глобальные экстремумы функции $K(x)/\cos x$.

Заметим, что кроме $K(x)$ авторам удалось найти множества крайних под- и надаргументов и у некоторых других непрерывных нигде не дифференцируемых функций на отрезке, например у функции Такаги (см. [17, sect. 1.1]). Но эти результаты мы не включили в данную работу. Кроме того, если область определения D функции f конечна и лежит в \mathbb{R}^n , то, как следует из [18, теор. 3.14 и 3.16], множества $\text{ExtrSA}(f, D)$ и $\text{ExtrEA}(f, D)$ могут быть найдены численными методами за конечное число операций $O(|D|^{[(n+3)/2]})$.

§ 1. О крайних подаргументах, надаргументах и глобальных экстремумах

Пусть X — вещественное линейное пространство (ВЛП) и D — его подмножество. Для любой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через $\text{Gr } f$ ее *график* $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$, через $\text{Sub } f$ — ее *подграфик* $\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y \leq f(x)\}$, и через $\text{Epi } f$ — ее *надграфик* $\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$. *Глобальный максимум функции* f на D обозначим через $\max_D f$, а множество точек, где он достигается — через $\text{Argmax}_D f$. Аналогично вводятся обозначения $\min_D f$ и $\text{Argmin}_D f$. Через $\sup_D f$ и $\inf_D f$ обозначим, соответственно, *супремум* и *инфимум* функции f на D .

Напомним (см. [9, § 1.18]), что точка выпуклого множества называется *крайней*, если она не внутренняя ни для какого отрезка, лежащего в этом множестве. *Выпуклую оболочку* множества D будем обозначать через $\text{Conv}(D)$ или \tilde{D} , а *множество его крайних точек* — через $\text{Extr}(D)$.

Предложение 1 (ср. [9, теорема 1.18.2]). *Любое множество D в ВЛП содержит все крайние точки своей выпуклой оболочки, то есть $\text{Extr}(\tilde{D}) \subset D$.*

Доказательство. Пусть z — произвольная крайняя точка множества \tilde{D} . Если z не лежит в D , то множество $\tilde{D} \setminus \{z\}$ содержит D и, согласно определению крайней точки, выпукло. Но это противоречит тому, что \tilde{D} — наименьшее выпуклое множество, содержащее D . Следовательно, z лежит в D . \square

Введем понятия крайнего подаргумента и крайнего надаргумента.

Определение 1. Пусть X — ВЛП и $D \subset X$. *Крайним подаргументом* (соответственно *крайним надаргументом*) функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ назовем аргумент x (то есть первую компоненту) любой крайней точки (x, y) множества $\text{Conv}(\text{Sub } f)$ (соответственно $\text{Conv}(\text{Epi } f)$). Множество всех крайних подаргументов (соответственно надаргументов) функции f на множестве D будем обозначать через $\text{ExtrSA}(f, D)$ (соответственно $\text{ExtrEA}(f, D)$). В случае $X = \mathbb{R}$ крайний подаргумент (соответственно надаргумент) будем называть также *крайней подабсциссой* (соответственно *крайней надабсциссой*).

Замечание 1. Для любой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ верны равенства $\min_D(f) = -\max_D(-f)$, $\text{Argmin}_D f = \text{Argmax}_D(-f)$, а также $\text{ExtrEA}(f, D) = \text{ExtrSA}(-f, D)$. Поэтому для любого утверждения про максимумы и крайние подаргументы можно сформулировать равносильное ему двойственное утверждение про минимумы и крайние надаргументы (и наоборот).

Предложение 2. *Если X — ВЛП и $D \subset X$, то для любой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ верны включения $\text{Extr}(\tilde{D}) \subset \text{ExtrSA}(f, D) \subset D$ и $\text{Extr}(\tilde{D}) \subset \text{ExtrEA}(f, D) \subset D$.*

Доказательство. Множество $\text{ExtrSA}(f, D)$ лежит в D , поскольку множество $\text{Extr}(\text{Conv}(\text{Sub } f))$ лежит в $\text{Sub } f$ в силу предложения 1. Докажем обратное включение $\text{Extr}(\tilde{D}) \subset \text{ExtrSA}(f, D)$. Так как $\text{Extr}(\tilde{D}) \subset D$ по предложению 1, то достаточно показать, что для любого $x \in \text{Extr}(\tilde{D})$ точка $(x, f(x))$ лежит в $\text{Extr}(\text{Conv}(\text{Sub } f))$. Для этого, в свою очередь, достаточно вывести равенство $A = B$ из равенства $(x, f(x)) = \gamma A + (1 - \gamma)B$ при любых $A, B \in \text{Conv}(\text{Sub } f)$ и $0 < \gamma < 1$. Имеем: $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i, y_i)$, $B = \sum_{i=1}^n \beta_i(x_i, y_i)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, $\beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$, и $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ — элементы из $\text{Sub } f$. Точки x_1, \dots, x_n , очевидно, можно считать различными. Отсюда следует равенство $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$, где $c_i = \gamma \alpha_i + (1 - \gamma) \beta_i$ при $i = 1, \dots, n$. Значит, поскольку $x \in \text{Extr}(\tilde{D})$, то

существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $c_i = \gamma\alpha_i + (1 - \gamma)\beta_i = 0$ при всех $i \neq j$. Следовательно, так как $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ и $0 < \gamma < 1$, то $\alpha_i = \beta_i = 0$ при $i \neq j$. Поэтому $\alpha_j = \beta_j = 1$ и $A = B$.

Включения $\text{Extr}(\tilde{D}) \subset \text{ExtrEA}(f, D) \subset D$ следуют из доказанных включений для $\text{ExtrSA}(f, D)$ и замечания 1. \square

Для доказательства теоремы 1 нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть X — ВЛП, $D \subset X$, заданы функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и выпуклая функция $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть, кроме того, $x_* \in \text{Argmax}_D(f + g)$ и верно равенство

$$(x_*, f(x_*)) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i, y_i), \quad (1.1)$$

где числа c_1, \dots, c_n неотрицательны, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ и $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ — элементы из множества $\text{Sub } f$, причем точки x_1, \dots, x_n различны. Тогда

(1) при любом $i = 1, \dots, n$, таком что $c_i > 0$, точка x_i является точкой глобального максимума функции $f + g$ на D ;

(2) если g строго выпукла, то $c_i = 0$ для всех $i \neq j$ при некотором $j \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Из равенства (1.1) следует, что $x_* = \sum_{i=1}^n c_i x_i$. Отсюда, в силу выпуклости функции g , имеем:

$$g(x_*) = g\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n c_i g(x_i). \quad (1.2)$$

Кроме того, из (1.1), в силу включения $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \text{Sub } f$, вытекают соотношения $f(x_*) = \sum_{i=1}^n c_i y_i \leq \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$. Прибавляя сюда неравенство (1.2), приходим к выводу, что

$\max_D(f + g) = f(x_*) + g(x_*) \leq \sum_{i=1}^n c_i (f(x_i) + g(x_i)) \leq \max_D(f + g)$. Здесь, поскольку крайние члены равны, оба неравенства являются равенствами. Отсюда следует утверждение пункта (1), а также то, что является равенством и неравенство в (1.2). Это, если функция g строго вогнута, возможно лишь при обращении в ноль всех коэффициентов c_i , кроме одного. \square

Теорема 1. Пусть X — ВЛП, $D \subset X$, заданы функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и выпуклая функция $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда множество $\text{Extr}(\text{Conv}(\text{Argmax}_D(f + g)))$ включено в множество $\text{ExtrSA}(f, D)$. Если, кроме того, функция g строго выпукла, то любая точка глобального максимума функции $f + g$ на D является крайним подаргументом для f на D , то есть верно включение $\text{Argmax}_D(f + g) \subset \text{ExtrSA}(f, D)$.

Доказательство. (1) Пусть $x_* \in \text{Extr}(\text{Conv}(\text{Argmax}_D(f + g)))$. Тогда, по предложению 1, $x_* \in \text{Argmax}_D(f + g)$. В силу определения крайнего подаргумента, нам достаточно доказать, что $(x_*, f(x_*))$ — крайняя точка множества $\text{Conv}(\text{Sub } f)$. В свою очередь, для этого достаточно при любых $A, B \in \text{Conv}(\text{Sub } f)$ и любых $0 < \gamma < 1$ вывести равенство $A = B$ из равенства $(x_*, f(x_*)) = \gamma A + (1 - \gamma)B$. Имеем: $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i, y_i)$, $B = \sum_{i=1}^n \beta_i(x_i, y_i)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ и $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ — элементы из $\text{Sub } f$. Точки x_1, \dots, x_n , очевидно, можно считать различными. Отсюда следует равенство (1.1), где $c_i = \gamma\alpha_i + (1 - \gamma)\beta_i$ при $i = 1, \dots, n$. Ясно, что числа c_1, \dots, c_n

неотрицательны. Кроме того, $\sum_{i=1}^n c_i = \gamma \sum_{i=1}^n \alpha_i + (1 - \gamma) \sum_{i=1}^n \beta_i = 1$. Следовательно, по пункту (1) леммы 1, $x_i \in \text{Argmax}_D(f + g)$ при всех $i = 1, \dots, n$, таких что $c_i > 0$. Это, с учетом соотношений $x_* = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ и $x_* \in \text{Extr}(\text{Conv}(\text{Argmax}_D(f + g)))$, доказывает наличие такого $j \in \{1, \dots, n\}$, что $c_i = \gamma \alpha_i + (1 - \gamma) \beta_i = 0$ при всех $i \neq j$. Отсюда, так как $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ и $0 < \gamma < 1$, получаем, что $\alpha_i = \beta_i = 0$ при $i \neq j$. Тогда $\alpha_j = \beta_j = 1$ и $A = B$.

(2) Доказательство второго утверждения теоремы аналогично, но в конце него вместо пункта (1) леммы 1 нужно использовать пункт (2) той же леммы. \square

При $g \equiv 0$ из теоремы 1 и двойственной к ней сразу вытекает такое утверждение:

Предложение 3. Если X — ВЛП и $D \subset X$, то для любой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ верны включения $\text{Extr}(\text{Conv}(\text{Argmax}_D f)) \subset \text{ExtrSA}(f, D)$ и $\text{Extr}(\text{Conv}(\text{Argmin}_D f)) \subset \text{ExtrEA}(f, D)$.

Замечание 2. Множества $\text{ExtrSA}(f, D)$ и $\text{ExtrEA}(f, D)$ не зависят от функции g . Поэтому, найдя эти множества один раз, дальше можно использовать их, с помощью теоремы 1 и двойственной к ней, для поиска глобальных экстремумов функции $f + g$ при различных вогнутых или выпуклых функциях g .

Замечание 3. Поиск глобальных максимумов (минимумов) функции $f + g$ может быть еще облегчен, если удастся подобрать достаточно гладкую верхнюю интерполянту ψ_Δ (соответственно нижнюю интерполянту ψ_∇), интерполирующую функцию f на (не обязательно всем) множестве $\text{ExtrSA}(f, D)$ (соответственно $\text{ExtrEA}(f, D)$).

Следующая теорема обобщает результат теоремы 1.

Теорема 2. Пусть X — ВЛП, $D \subset X$ и заданы функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$, причем v строго положительна на D . Пусть, кроме того, строго выпукла на \tilde{D} функция $(g - M) \cdot v$, где $M = \sup_D(f/v + g) < \infty$. Тогда все точки глобального максимума на множестве D функции $f/v + g$ являются крайними подаргументами функции f на D , то есть верно включение $\text{Argmax}_D(f/v + g) \subset \text{ExtrSA}(f, D)$.

Доказательство. При $x \in D$, поскольку $v(x) > 0$, оценка $g(x) + f(x)/v(x) \leq M$ равносильна оценке $f(x) + (g(x) - M)v(x) \leq 0$. Поэтому на D все точки глобального максимума функции $f/v + g$ являются точками глобального максимума (равного нулю) функции $f + (g - M)v$. Отсюда, в силу теоремы 1 и строгой выпуклости функции $(g - M)v$, вытекает, что точки глобального максимума функции $f/v + g$ являются крайними подаргументами для f на D . \square

На основе полученных результатов предлагается следующий метод, который может облегчить поиск глобальных экстремумов некоторых функций вида $f/v + g$, не подразумевая дифференцируемости f в какой-либо точке (он применен далее в предложении 5).

Метод поиска глобальных экстремумов. Метод содержит четыре шага:

(1) убеждаемся (например, с помощью теорем 1, 2, двойственных к ним или аналогичных утверждений), что точки глобального экстремума функции $f/v + g$ принадлежат множеству $\text{ExtrSA}(f, D)$ или множеству $\text{ExtrEA}(f, D)$;

(2) вычисляем нужное множество $\text{ExtrSA}(f, D)$ или $\text{ExtrEA}(f, D)$;

(3) подбираем, если возможно, верхнюю интерполянту ψ_Δ или нижнюю интерполянту ψ_∇ (см. замечание 3);

(4) вычисляем глобальный экстремум функции $f/v + g$ на множестве $\text{ExtrSA}(f, D)$ или $\text{ExtrEA}(f, D)$ (возможно, используя при этом интерполянту ψ_Δ или ψ_∇).

§ 2. Связь вогнутых и выпуклых оболочек функций с глобальными экстремумами

В данном параграфе мы коснемся некоторых свойств выпуклых и вогнутых оболочек функций, заданных на подмножествах линейного пространства.

Пусть X — вещественное линейное пространство (ВЛП), $D \subset X$. Для любой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и любого $M \in \mathbb{R}$ зададим множество $\text{Epi}_M f = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq M\}$. Слегка изменив определение [9, опр. 1.6.3], получаем следующее определение.

Определение 2. *Выпуклой (вогнутой) оболочкой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется функция $\check{f}_D: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ (соответственно функция $\hat{f}_D: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$), которая определяется равенством $\check{f}_D(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \text{Conv}(\text{Epi} f)\}$ (или $\hat{f}_D(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \text{Conv}(\text{Sub} f)\}$ соответственно).*

Введем также понятия *естественных* выпуклой и вогнутой оболочек:

Определение 3. *Выпуклая (вогнутая) оболочка функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется естественной, если верно равенство $\text{Epi} \check{f}_D = \text{Conv}(\text{Epi} f)$ (или $\text{Sub} \hat{f}_D = \text{Conv}(\text{Sub} f)$).*

Будем писать \hat{f} и \check{f} вместо \hat{f}_D и \check{f}_D , если понятно, о каком множестве D идет речь. Как показано ниже в примере 2, выпуклая и вогнутая оболочки функции не всегда являются естественными.

Замечание 4. На множестве D выполняются неравенства $\check{f}_D \leq f$ и $\hat{f}_D \geq f$, поскольку, в силу определения 2, верны включения $\text{Epi} \check{f}_D \supset \text{Epi} f$ и $\text{Sub} \hat{f}_D \supset \text{Sub} f$.

Замечание 5. Для любой функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, очевидно, верно равенство $\check{f}_D = -(\widehat{-f})_D$. Поэтому любое утверждение о функции \hat{f}_D равносильно двойственному утверждению о функции \check{f}_D .

Нам понадобится также понятие локально симплицеального множества в \mathbb{R}^n .

Определение 4 (см. [9, опр. 1.7.1], ср. [7, § 10]). Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *локально симплицеальным*, если для каждой точки $x \in D$ найдется ее окрестность U , а также конечное число симплексов S_1, \dots, S_m , содержащихся в D и имеющих точку x своей вершиной, таких что $U \cap D = U \cap (\cup_{i=1}^m S_i)$.

Локально симплицеальными множествами в \mathbb{R}^n являются, в частности, все отрезки, многогранники и открытые множества.

Далее нам будут нужны еще несколько фактов. Они хорошо известны, поэтому приведем их без доказательства в следующем замечании.

Замечание 6. Для любых подмножеств A и B из ВЛП верны соотношения

- (1) $\text{Conv}(A \cup B) \supset \text{Conv}(A) \cup \text{Conv}(B)$;
- (2) $\text{Conv}(A \cap B) \subset \text{Conv}(A) \cap \text{Conv}(B)$;
- (3) $\text{Conv}(A \times B) = \text{Conv}(A) \times \text{Conv}(B)$ (ср. [7, теорема 3.5]).

Переходим к способам применения естественных вогнутой и выпуклой оболочек функции.

Теорема 3. Пусть X — ВЛП, $D \subset X$, и заданы функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$, причем вогнутая оболочка \hat{f}_D функции f естественна, v строго положительна на D , и кроме того, выпукла на \tilde{D} функция $(g - M) \cdot v$, где $M = \sup_D (f/v + g) < \infty$. Тогда

- (1) выполняется равенство $\sup_D (f/v + g) = \sup_{\tilde{D}} (\hat{f}_D/v + g)$;

(2) $\text{Argmax}_D(f/v + g) \subset \text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f}_D/v + g) \subset \text{Conv}(\text{Argmax}_D(f/v + g))$;

(3) максимумы $\text{max}_{\tilde{D}}(\hat{f}_D/v + g)$ и $\text{max}_D(f/v + g)$ либо оба существуют и равны, либо оба не существуют;

(4) если, кроме того, функция $(g - M) \cdot v$ строго выпукла, то множества точек глобального максимума функций $f/v + g$ на D и $\hat{f}_D/v + g$ на \tilde{D} совпадают, то есть верно равенство $\text{Argmax}_D(f/v + g) = \text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f}_D/v + g)$.

Доказательство. Равенство $\text{sup}_D(f/v + g) = \text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f}_D/v + g) = M$ равносильно равенству $\text{sup}_D(f + (g - M)v) = \text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f}_D + (g - M)v) = 0$. Кроме того, если эти равенства верны, то будут выполняться также равенства $\text{Argmax}_D(f/v + g) = \text{Argmax}_D(f + (g - M)v)$ и $\text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f}_D/v + g) = \text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f}_D + (g - M)v)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $v \equiv 1$ (при этом функция g будет играть роль функции $(g - M)v$).

(1) С одной стороны, $\text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g) \geq \text{sup}_D(f + g)$, поскольку $\tilde{D} \supset D$ и $\hat{f} \geq f$ на D в силу замечания 4. Остается доказать, что и наоборот, $\text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g) \leq \text{sup}_D(f + g)$.

Возьмем произвольный элемент $\hat{x} \in \tilde{D}$. Тогда точка $(\hat{x}, \hat{f}(\hat{x}))$ будет принадлежать множеству $\text{Sub } \hat{f} = \text{Conv}(\text{Sub } f)$. Поэтому найдутся положительные числа c_1, \dots, c_n с суммой $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ и набор различных точек $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ из $\text{Sub } f$, такие что имеет место представление $(\hat{x}, \hat{f}(\hat{x})) = c_1(x_1, y_1) + \dots + c_n(x_n, y_n)$. Следовательно,

$$\hat{f}(\hat{x}) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \leq c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n) \tag{2.1}$$

и $\hat{x} = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$. Отсюда, поскольку g выпукла, получаем неравенство

$$g(\hat{x}) \leq c_1 g(x_1) + \dots + c_n g(x_n). \tag{2.2}$$

Складывая его с (2.1), приходим к оценке:

$$(\hat{f} + g)(\hat{x}) \leq c_1 (f + g)(x_1) + \dots + c_n (f + g)(x_n) \leq \text{sup}_D(f + g). \tag{2.3}$$

Беря супремум по $\hat{x} \in \tilde{D}$, получаем нужное неравенство $\text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g) \leq \text{sup}_D(f + g)$.

(2) Пусть $x_* \in \text{Argmax}_D(f + g)$. Тогда выполнены соотношения $\text{sup}_D(f + g) = (f + g)(x_*) \leq (\hat{f} + g)(x_*) \leq \text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g)$. Отсюда, в силу доказанного в пункте (1) равенства $\text{sup}_D(f + g) = \text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g)$, вытекает, что $(\hat{f} + g)(x_*) = \text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g)$. Следовательно, $x_* \in \text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g)$.

Пусть теперь $\hat{x} \in \text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g)$. Тогда, как и в пункте (1), при некоторых положительных c_1, \dots, c_n с суммой $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ и различных $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \text{Sub } f$ верны соотношения (2.1) и (2.3). В соотношении (2.3), по пункту (1), первый и последний члены равны. Следовательно, все неравенства, входящие в (2.3), являются равенствами. Поэтому

$$\hat{f}(\hat{x}) + g(\hat{x}) = c_1 (f + g)(x_1) + \dots + c_n (f + g)(x_n) = \text{sup}_D(f + g) = \text{sup}_{\tilde{D}}(\hat{f} + g). \tag{2.4}$$

Отсюда, с учетом (2.1) и (2.2), вытекает формула

$$g(\hat{x}) = g(c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) = c_1 g(x_1) + \dots + c_n g(x_n). \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует также, что x_1, \dots, x_n являются точками глобального максимума для $f + g$. Поэтому точка $\hat{x} = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ лежит в $\text{Conv}(\text{Argmax}(f + g))$.

(3) Утверждение пункта (3) следует из утверждений пунктов (1) и (2).

(4) Точки x_1, \dots, x_n можно считать различными. Поэтому, если функция g строго выпукла, то равенство (2.5) возможно лишь при $n = 1$. Тогда $\hat{x} = x_1$, а значит \hat{x} — точка глобального максимума для $f + g$. \square

Замечание 7. Функции \hat{f} и \check{f} не зависят от g и v . Поэтому, найдя их один раз, дальше можно использовать полученную информацию для поиска экстремумов функций $f/v + g$ при разных функциях g и v , удовлетворяющих условиям теоремы 3 или двойственной к ней.

В случае $g \equiv 0$ и $v \equiv 1$ результаты пунктов (1)–(3) теоремы 3 можно уточнить.

Теорема 4. Пусть X – ВЛП, $D \subset X$ и вогнутая оболочка \hat{f}_D функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ естественна. Тогда верны равенства $\sup_D(f) = \sup_{\tilde{D}}(\hat{f}_D)$ и $\text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f}_D) = \text{Conv}(\text{Argmax}_D f)$. При этом максимумы $\max_{\tilde{D}}(\hat{f}_D)$ и $\max_D(f)$ либо оба существуют и равны, либо оба не существуют.

Доказательство. В силу пунктов (1)–(3) теоремы 3, нам достаточно доказать лишь включение $\text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f}) \supset \text{Conv}(\text{Argmax}_D f)$. Если $x_1, \dots, x_n \in \text{Argmax}_D f$, числа c_1, \dots, c_n положительны и $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, то, ввиду вогнутости \hat{f}_D , выполнены следующие соотношения: $\hat{f}(\sum_{i=1}^n c_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n c_i \hat{f}(x_i) \geq \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) = \sup_D(f)$. Отсюда вытекает, в силу пункта (1) теоремы 3, что $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ – точка глобального максимума функции \hat{f} на \tilde{D} . Поэтому имеет место включение $\text{Argmax}_{\tilde{D}}(\hat{f}) \supset \text{Conv}(\text{Argmax}_D f)$. Теорема доказана. \square

Следующая лемма необходима для доказательства теоремы 5.

Лемма 2. Пусть функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена сверху и задано число $M \geq \sup_D f$. Тогда

(1) выполнено равенство $\text{Conv}(\text{Epi} f) = \text{Conv}(\text{Epi}_M f) \cup (\tilde{D} \times [M, +\infty))$;

(2) если, кроме того, D – компактное подмножество в \mathbb{R}^n , а функция f на D полунепрерывна снизу, то f на D ограничена и достигает своего инфимума, множество $\text{Epi}_M f$ компактно, а множество $\text{Conv}(\text{Epi} f)$ замкнуто.

Доказательство. (1) Так как $\text{Epi} f = \text{Epi}_M f \cup (D \times [M, +\infty))$, то из пункта (1) замечания 6 следует, что $\text{Conv}(\text{Epi} f) \supset \text{Conv}(\text{Epi}_M f) \cup \text{Conv}(D \times [M, +\infty))$. Отсюда, так как $\text{Conv}(D \times [M, +\infty)) = \tilde{D} \times [M, +\infty)$ по пункту (3) замечания 6, получаем включение $\text{Conv}(\text{Epi} f) \supset \text{Conv}(\text{Epi}_M f) \cup (\tilde{D} \times [M, +\infty))$. С другой стороны, поскольку множество $\text{Conv}(\text{Epi}_M f) \cup (\tilde{D} \times [M, +\infty))$ выпукло и содержит $\text{Epi} f$, то оно содержит и $\text{Conv}(\text{Epi} f)$.

(2) Поскольку множество D компактно и f полунепрерывна снизу, то функция f достигает на D своего инфимума (см. [15, глава 2, § 6, теорема 8, б], [16, гл. 2, § 8, теорема 30₂]), а значит ограничена снизу. Следовательно, f ограничена. Далее, так как функция f полунепрерывна снизу, то ее надграфик $\text{Epi} f$ замкнут (см. [8, пункт 3.2.1], [9, теорема 1.5.1]). Поскольку $\text{Epi}_M f = \text{Epi} f \cap (D \times (-\infty, M])$, D компактно и f ограничена снизу, то множество $\text{Epi}_M f$ замкнуто и ограничено в \mathbb{R}^n . Следовательно, оно компактно. Поэтому множество $\text{Conv}(\text{Epi}_M f)$ тоже компактно в силу следствия из теоремы Каратеодори (см. [8, пункт 3.5.1, следствие 2], [7, теорема 17.2]), а значит замкнуто. Тогда множество $\text{Conv}(\text{Epi} f)$, в силу пункта (1), есть объединение двух замкнутых множеств, поэтому и само замкнуто. \square

Приведем достаточные условия естественности выпуклой оболочки функции.

Теорема 5 (ср. [7, Следствие 17.2.1]). Если множество $D \subset \mathbb{R}^n$ компактно, а функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу и ограничена сверху, то ее выпуклая оболочка \hat{f}_D является естественной, полунепрерывной снизу и ограниченной сверху на \tilde{D} . При этом существуют и равны минимумы $\min_D f$ и $\min_{\tilde{D}} \hat{f}_D$. Если, кроме того, множество \tilde{D} локально симплицально, то \hat{f}_D непрерывна на \tilde{D} .

Доказательство. Согласно определению 3, нужно доказать, что выполняется равенство $\text{Eri } \check{f}_D = \text{Conv}(\text{Eri } f)$. Для этого достаточно показать, что при любом $x \in \tilde{D}$ множество $L_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \text{Conv}(\text{Eri } f)\}$ является лучом вида $[z_x, +\infty)$, где $z_x \in \mathbb{R}$ (при этом будет $\check{f}_D(x) = z_x$). Множество L_x , очевидно, выпукло и неограничено справа. Кроме того, по пункту (2) леммы 2, множество L_x ограничено слева и замкнуто. Отсюда следует, что L_x является замкнутым лучом $[z_x, +\infty)$ при некотором $z_x \in \mathbb{R}$. Итак, выпуклая оболочка \check{f}_D естественна.

Полунепрерывность \check{f}_D снизу следует из [9, теорема 1.14.3]. Существование минимумов $\min_D f$ и $\min_{\tilde{D}} \check{f}_D$ следует из пункта (2) леммы 2, а их равенство — из двойственной к теореме 4.

Если множество \tilde{D} локально симплицально, непрерывность на нем функции \check{f}_D следует из ее полунепрерывности снизу и выпуклости (см. [7, теорема 10.2], [9, теорема 1.7.2]). \square

В качестве примера найдем вогнутую и выпуклую оболочки, а также множества крайних подабсцисс и надабсцисс функции, полунепрерывной снизу на отрезке.

Пример 1. Зададим на отрезке $[0; 6]$ функцию F формулой

$$F(x) = \begin{cases} 1 + 2(x - 1)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 3; \\ 9 - (x - 3)^2 & \text{при } 3 \leq x < 5; \\ 4 - 3(x - 6)^2 & \text{при } 5 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $\text{ExtrSA}(F, [0; 6]) = \{0; 6\} \cup [3; 4]$ и $\text{ExtrEA}(F, [0; 6]) = [0; 1] \cup \{5; 6\}$. Вогнутая и выпуклая оболочки F , очевидно, являются естественными и их можно задать равенствами

$$\hat{F}_{[0;6]}(x) = \begin{cases} 3 + 2x, & 0 \leq x \leq 3; \\ 9 - (x - 3)^2, & 3 \leq x \leq 4; \\ 16 - 2x, & 4 \leq x \leq 6; \end{cases} \quad \check{F}_{[0;6]}(x) = \begin{cases} 1 + 2(x - 1)^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & 1 \leq x \leq 5; \\ 3x - 14, & 5 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Легко заметить, что функции $\hat{F}_{[0;6]}$ и $\hat{F}_{[0;5]}$ различаются на интервале $(4; 5)$. Аналогично, функции $\check{F}_{[0;6]}$ и $\check{F}_{[0;3]}$ различаются на полуинтервале $(1; 3]$ (см. далее замечание 9).

На рисунке 1 приведены графики функции F (линия А), ее вогнутой оболочки $\hat{F}_{[0;6]}$ (линия В) и ее выпуклой оболочки $\check{F}_{[0;6]}$ (линия С), а также показаны множества ее крайних подабсцисс $\text{ExtrSA}(F, [0; 6])$ (знаками Δ) и крайних надабсцисс $\text{ExtrEA}(F, [0; 6])$ (знаками ∇). \square

В следующем примере вогнутая и выпуклая оболочки функции не являются естественными.

Пример 2. Зададим функцию G , изменив значения функции F из примера 1 в трех точках: $G(1) = G(3) = G(5) = 3$ и $G(x) = F(x)$ при $x \in [0; 6] \setminus \{1; 3; 5\}$. Тогда на отрезке $[0; 6]$ функция G не имеет глобальных экстремумов, и ее вогнутая и выпуклая оболочки не являются естественными, хотя верны равенства $\hat{G}_{[0;6]} = \hat{F}_{[0;6]}$ и $\check{G}_{[0;6]} = \check{F}_{[0;6]}$. \square

Еще один пример содержит предложение 4, где найдены вогнутая и выпуклая оболочки и множества крайних под- и надабсцисс функции Кобаяши–Грея–Такаги (см. [3, 5]).

В следующей теореме приведены необходимые и достаточные условия того, что некоторая функция h является естественной выпуклой оболочкой функции f .

Теорема 6. Пусть X — ВЛП, $D \subset X$, задана функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и выпуклая функция $h: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

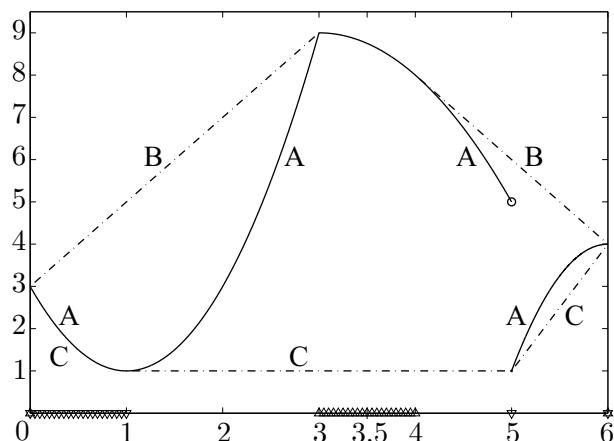


Рис. 1.

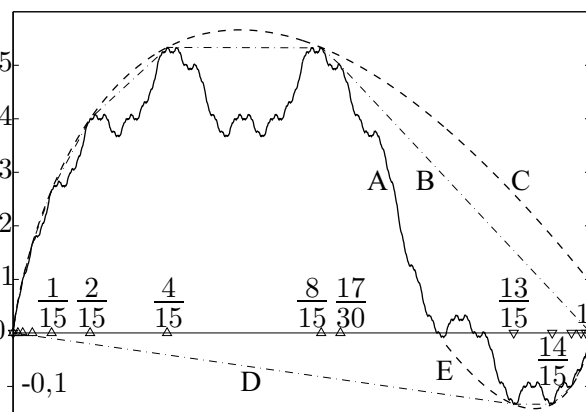


Рис. 2.

(1) если функция h является естественной выпуклой оболочкой функции f на D , то $h \leq f$ на D и все крайние точки надграфика функции h лежат на графике функции f ;

(2) если $X = \mathbb{R}^n$, D компактно, $h \leq f$ на D , все крайние точки надграфика функции h лежат на графике функции f , f ограничена сверху на D , функция h полунепрерывна снизу и ограничена сверху на \tilde{D} , то h является естественной выпуклой оболочкой функции f на D .

Доказательство. (1) Пусть h — естественная выпуклая оболочка функции f на D . Тогда, в силу замечания 4, $h \leq f$ на D . Покажем, что любая точка P из $\text{Extr}(\text{Epi } h)$ принадлежит графику $\text{Gr } f$. Так как $\text{Extr}(\text{Epi } h) = \text{Extr}(\text{Conv}(\text{Epi } f))$, то $P \in \text{Epi } f$ в силу предложения 1. Поэтому P имеет вид (x, y) , где $x \in D$, $y \geq f(x)$. В случае $y > f(x)$ точка P , очевидно, не будет крайней для $\text{Epi } h$. Значит, $y = f(x)$, то есть P лежит на графике $\text{Gr } f$.

(2) Для доказательства в обратную сторону нужно, в силу определения 2, убедиться, что $\text{Epi } h = \text{Conv}(\text{Epi } f)$. Имеем: $\text{Epi } h = \text{Conv}(\text{Epi } h) \supset \text{Conv}(\text{Epi } f)$, так как h выпукла и $h \leq f$. Остается установить, что $\text{Epi } h \subset \text{Conv}(\text{Epi } f)$. Положим $M = \max(\sup_D f, \sup_{\tilde{D}} h)$. Тогда $M < +\infty$ и верны равенства

$$\text{Epi } f = \text{Epi}_M f \cup (D \times [M, +\infty)); \quad \text{Epi } h = \text{Epi}_M h \cup (\tilde{D} \times [M, +\infty)). \quad (2.6)$$

Поэтому

$$\text{Extr}(\text{Epi}_M h) = \text{Extr}(\text{Epi } h) \cup (\text{Extr}(\tilde{D}) \times \{M\}). \quad (2.7)$$

Так как $\text{Extr}(\tilde{D}) \subset D$, то $\text{Extr}(\tilde{D}) \times \{M\} \subset \text{Epi}_M f$. Кроме того, по условию теоремы $\text{Extr}(\text{Epi } h) \subset \text{Gr } f \subset \text{Epi}_M f$. Отсюда, с учетом формулы (2.7), вытекает, что $\text{Extr}(\text{Epi}_M h) \subset \text{Epi}_M f$. Так как множество $\text{Epi}_M h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ компактно (по пункту (2) леммы 2) и выпукло, то по теореме Минковского [9, теорема 1.18.3] выполнено равенство $\text{Conv}(\text{Extr}(\text{Epi}_M h)) = \text{Epi}_M h$. Следовательно, верно включение $\text{Epi}_M h \subset \text{Conv}(\text{Epi}_M f)$. Отсюда, в силу замечания 6 и равенств (2.6), вытекают следующие соотношения, завершающие доказательство теоремы:

$$\begin{aligned} \text{Epi } h &= \text{Epi}_M h \cup (\tilde{D} \times [M, +\infty)) \subset \text{Conv}(\text{Epi}_M f) \cup \text{Conv}(D \times [M, +\infty)) \subset \\ &\subset \text{Conv}(\text{Epi}_M f \cup (D \times [M, +\infty))) = \text{Conv}(\text{Epi } f). \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 8. Из теоремы 6 и двойственной к ней следует, что если выпуклая и вогнутая оболочки функции f естественны, то на множестве $\text{ExtrEA}(f, D)$ совпадают значения функций \check{f}_D и \hat{f}_D , а на множестве $\text{ExtrSA}(f, D)$ — значения функций \check{f}_D и \hat{f}_D . Таким образом, \check{f}_D и \hat{f}_D являются, соответственно, нижней и верхней интерполянтами для f в смысле замечания 3. Из указанного совпадения вытекает также, что f выпукла на любом выпуклом подмножестве из $\text{ExtrEA}(f, D)$ и f вогнута на любом выпуклом подмножестве из $\text{ExtrSA}(f, D)$.

Замечание 9. Если даны функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и подмножество $D_0 \subset D$, то ограничения функций \check{f}_D и \hat{f}_D на D_0 могут не совпадать, соответственно, с функциями \check{f}_{D_0} и \hat{f}_{D_0} . Это видно из примера 1. Достаточное условие такого совпадения описано в теореме 7.

Теорема 7. Пусть D — это выпуклое подмножество в ВЛП X , и гиперплоскость $\Gamma \subset X$ отсекает от D часть D_0 , содержащую $D \cap \Gamma$ (при этом вторая отсекаемая от D часть не пересекается с $D \cap \Gamma$). Пусть, кроме того, у функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая оболочка \check{f}_D естественна и на $D \cap \Gamma$ совпадает с f . Тогда ограничение функции \check{f}_D на множество D_0 является естественной выпуклой оболочкой функции f на D_0 , причем выполняется равенство

$$\text{ExtrEA}(f, D_0) = (\text{ExtrEA}(f, D) \cap D_0) \cup \text{ExtrEA}(f, D \cap \Gamma). \tag{2.8}$$

Доказательство. (1) Известно (см., например, [15, гл. III, § 1, п. 6]), что по гиперплоскости Γ можно подобрать ненулевой линейный функционал $\gamma: X \rightarrow \mathbb{R}$ и число $c \in \mathbb{R}$ такие, что $\Gamma = \{x \in X \mid \gamma(x) = c\}$. Без ограничения общности можно считать, что D_0 лежит в полупространстве $X^+ = \{x \in X \mid \gamma(x) \geq c\}$. При этом выполняется равенство $D_0 = D \cap X^+$, поэтому множество D_0 выпукло как пересечение выпуклых множеств.

Для доказательства того, что $\check{f}_D|_{D_0}$ является естественной выпуклой оболочкой для f на D_0 , достаточно показать, в силу определения 3, что $\text{Epi } \check{f}_D \cap (D_0 \times \mathbb{R}) = \text{Conv}(\text{Epi } f \cap (D_0 \times \mathbb{R}))$, то есть $\text{Conv}(\text{Epi } f) \cap (D_0 \times \mathbb{R}) = \text{Conv}(\text{Epi } f \cap (D_0 \times \mathbb{R}))$. Правая часть лежит в левой в силу пунктов (2) и (3) замечания 6. Докажем обратное включение, то есть что любая точка $x \in \text{Conv}(\text{Epi } f) \cap (D_0 \times \mathbb{R})$ лежит в $\text{Conv}(\text{Epi } f \cap (D_0 \times \mathbb{R}))$. Так как $x \in \text{Conv}(\text{Epi } f)$, то x принадлежит некоторому симплексу S с вершинами из множества $\text{Epi } f$. Поскольку, кроме того, $x \in D_0 \times \mathbb{R}$, то x лежит в выпуклом многограннике $S \cap (D_0 \times \mathbb{R})$ с вершинами из $\text{Epi } f \cap (D_0 \times \mathbb{R})$. Поэтому $x \in \text{Conv}(\text{Epi } f \cap (D_0 \times \mathbb{R}))$.

(2) Равенство (2.8) следует из доказанного совпадения \check{f}_D и \check{f}_{D_0} на D_0 . □

§ 3. Крайние подабсциссы и надабсциссы функции Кобаяши–Грея–Такаги и глобальные экстремумы функций, выражающихся через нее

Немного изменив определение, данное Кобаяши в [3, с. 170], мы будем называть *функцией Кобаяши–Грея–Такаги* функцию $K(x)$, определяемую функциональным рядом (см. также [5]):

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} K_0(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где $K_0(x) = 2\rho(x/2 + 1/4, \mathbb{Z}) - 1/2$, величина $\rho(y, \mathbb{Z}) = |\{y + 1/2\} - 1/2|$ — это расстояние между точкой $y \in \mathbb{R}$ и ближайшей к ней целой точкой, $\{y\}$ — дробная часть числа y . При $0 \leq x \leq 2$ функцию $K_0(x)$ можно задать также формулами:

$$K_0(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0; 1/2]; \\ 1 - x & \text{при } x \in [1/2; 3/2]; \\ x - 2 & \text{при } x \in [3/2; 2]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, функция $K(x)$ имеет период 2, нечетна и подчиняется равенству

$$K(x) = K_0(x) + \frac{1}{2}K(2x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

В обзоре [17, с. 36] она названа *Gray Takagi function of Kobayashi*. Кроме того, в [17, с. 43] указано, что $K(x)$ всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема на \mathbb{R} . График функции $K(x)$ приведен на странице 492 (линия А на рисунке 2). Функция Кобаяши–Грея–Такаги была применена в [3] для вычисления двоичных цифровых сумм в кодировке Грея.

Как показано в [5, теорема 1], на $[0; 1]$ глобальный максимум функции $K(x)$ равен $8/15$, причем множество $\text{Argmax}_{[0;1]} K$ состоит из всех чисел, 16-ричная запись которых имеет лишь цифры 4 или 8. Поэтому наименьшая точка глобального максимума — это $0,444\dots = 4/15$, а наибольшая — это $0,888\dots = 8/15$. Отсюда, в силу формул (3.3), (3.2) и периодичности $K(x)$, имеем: $K(17/15) = K_0(17/15) + K(34/15)/2 = -2/15 + K(4/15)/2 = -2/15 + (8/15)/2 = 2/15$,

$$K\left(\frac{17}{30}\right) = K_0\left(\frac{17}{30}\right) + \frac{1}{2}K\left(\frac{17}{15}\right) = \frac{13}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Из [5, теорема 1, следствие 2] видим, что глобальный минимум $K(x)$ на $[0; 1]$ равен $-2/15$, причем наименьшая точка минимума — это $13/15$, а наибольшая — это $14/15$.

В [5, теорема 2] найден глобальный максимум функции $w(x) = \log_2 x + K(x)/x$ на $(0; 1]$. Он равен величине $M = \log_2(16/15)$ и достигается только в точках вида $s_n = 8/(15 \cdot 2^n)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, $K(s_n) = s_n(M - \log_2 s_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Положим $g(x) = \log_2 x$, $v(x) = x$. Легко убедиться, что функция $(g - M)v$ строго выпукла на $(0; 1]$. Значит, в силу теоремы 2, точки s_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, являются крайними подабсциссами функции $K(x)$ на $(0; 1]$.

Зададим функцию $\psi_\Delta(x) = x(\log_2(16/15) - \log_2 x)$ на полуинтервале $(0; 1]$, а также множество $E_\Delta = \{0; 17/30; 1\} \cup \{s_n\}_{n=0}^\infty$. Кроме того, зададим ломаную h_Δ с бесконечным числом звеньев, интерполирующую функцию $K(x)$ в точках множества E_Δ . Тогда получим: $h_\Delta(s_n) = s_n(M - \log_2 s_n) = 8(n+1)/(15 \cdot 2^n)$ при $n = 0, 1, 2, \dots$, а также $h_\Delta(0) = h_\Delta(1) = 0$ и $h_\Delta(17/30) = 1/2$ (в силу (3.4)). Так как при этом h_Δ линейна на отрезках $[s_0; 17/30]$, $[17/30; 1]$ и $[s_{n+1}; s_n]$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} h_\Delta(x) &= nx + s_n \text{ при } x \in [s_{n+1}; s_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ h_\Delta(x) &= \frac{16}{15} - x \text{ при } x \in \left[\frac{8}{15}; \frac{17}{30}\right]; \quad h_\Delta(x) = \frac{15(1-x)}{13} \text{ при } x \in \left[\frac{17}{30}; 1\right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее, зададим функцию $\psi_\nabla(x) = (1-x)(\log_2(1-x) - \log_2(4/15))$ на $[0; 1)$, а также множество $E_\nabla = \{0; 1\} \cup \{1 - s_n\}_{n=2}^\infty$. Кроме того, зададим ломаную h_∇ с бесконечным числом звеньев так: $h_\nabla(x) = -2/13 \cdot x$ при $x \in [0; 13/15]$ и $h_\nabla(x) = 1 - x - 1/2 \cdot h_\Delta(2 - 2x)$ при $x \in [13/15; 1]$. Таким образом, $h_\nabla(x) = (k-2)(x-1) - s_k$ при $x \in [1 - s_k; 1 - s_{k+1}]$, $k = 2, 3, \dots$ (в силу (3.5)), и $h_\nabla(1) = 0$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Выполняются неравенства:*

- (1) $K(x) \leq 16/15 - x$ при $x \in [8/15; 17/30]$;
- (2) $K(x) \geq -2/13 \cdot x$ при $x \in [0; 13/15]$;
- (3) $K(x) \leq 15/13 \cdot (1-x)$ при $x \in [17/30; 1]$;
- (4) Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$

$$K(x) \leq nx + s_n \text{ при } x \in [s_{n+1}; s_n]. \quad (3.6)$$

Доказательство. (1) Согласно [5, следствие 2], глобальный минимум $K(x)$ на $[1/2; 1]$ равен $-2/15$. Поэтому, с учетом периодичности и нечетности $K(x)$, при любом $t \in [1; 3/2]$ верны соотношения $K(t) = K(t - 2) = -K(2 - t) \leq 2/15$. Отсюда, в силу формул (3.3) и (3.2), для всех $x \in [1/2; 3/4]$ получим доказываемое: $K(x) = K_0(x) + 1/2 \cdot K(2x) \leq 1 - x + 1/2 \cdot 2/15 = 16/15 - x$.

(2) Из утверждения [5, пункт 3 теоремы 2] и его доказательства вытекают неравенства $K(x) \geq \varphi(x) = x(\log_2(11/15) - \log_2 x)$ при $x \in (0; 1/2]$ и $K(x) \geq \psi_{\nabla}(x)$ при $x \in (1/2; 13/15]$. Поскольку $\varphi(x) \geq -2/13 \cdot x$ при $x \in (0; 1/2]$ и $\psi_{\nabla}(x) \geq -2/13 \cdot x$ при $x \in (1/2; 13/15]$, то отсюда следует, что $K(x) \geq -2/13 \cdot x$ при $x \in [0; 13/15]$.

(3) Из неравенства пункта (2), в силу периодичности и нечетности $K(x)$, при всех $t \in [17/15; 2]$ вытекают соотношения $K(t) = K(t - 2) = -K(2 - t) \leq 2/13 \cdot (2 - t)$. Отсюда, а также из формул (3.3) и (3.2), для любой точки $x \in [17/30; 1]$ следует, что верны также соотношения $K(x) = K_0(x) + 1/2 \cdot K(2x) \leq 1 - x + 1/2 \cdot 2/13(2 - 2x) = 15/13 \cdot (1 - x)$.

(4) Применим индукцию по n . При $n = 0$ неравенство (3.6) имеет вид $K(x) \leq 8/15$ и вытекает из [5, теорема 1]. Выведем теперь из (3.6) его аналог для $n + 1$. Пусть $x \in [s_{n+2}; s_{n+1}]$. Тогда $2x \in [s_{n+1}; s_n]$ и $K(2x) \leq 2nx + s_n$ согласно (3.6). Отсюда, в силу формул (3.3) и (3.2), получаем нужное неравенство: $K(x) = x + 1/2 \cdot K(2x) \leq x + 1/2 \cdot (2nx + s_n) = (n + 1)x + s_{n+1}$. \square

Предложение 4. (1) На отрезке $[0; 1]$ естественной вогнутой оболочкой функции $K(x)$ является функция h_{Δ} , а естественной выпуклой оболочкой — функция h_{∇} .

(2) Множество крайних подаргументов $\text{ExtrSA}(K, [0; 1])$ совпадает с E_{Δ} :

$$\text{ExtrSA}(K, [0; 1]) = E_{\Delta} = \left\{0; \frac{17}{30}; 1\right\} \cup \left\{\frac{8}{15 \cdot 2^n}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{0, \dots, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{17}{30}, 1\right\},$$

а множество крайних надаргументов $\text{ExtrEA}(K, [0; 1])$ — с множеством E_{∇} :

$$\text{ExtrEA}(K, [0; 1]) = E_{\nabla} = \left\{0; 1\right\} \cup \left\{1 - \frac{2}{15 \cdot 2^k}\right\}_{k=0}^{\infty} = \left\{0, \frac{13}{15}, \frac{14}{15}, \frac{29}{30}, \frac{59}{60}, \frac{119}{120}, \dots, 1\right\}.$$

(3) Функции ψ_{Δ} и ψ_{∇} бесконечно дифференцируемы на интервале $(0; 1)$. При этом ψ_{Δ} строго вогнута и интерполирует $K(x)$ на множестве $\text{ExtrSA}(K, [0; 1]) \setminus \{0; 17/30; 1\}$, а ψ_{∇} строго выпукла и интерполирует $K(x)$ на множестве $\text{ExtrEA}(K, [0; 1]) \setminus \{0; 1\}$.

Доказательство. (1) Воспользуемся пунктом (2) теоремы, двойственной к теореме 6. Функция h_{Δ} вогнута, так как она непрерывна и, в силу формул (3.5), ее производная не возрастает на области дифференцируемости. Отсюда вытекает, что все крайние точки подграфика $\text{Sub } h_{\Delta}$ имеют вид $(x, h_{\Delta}(x)) = (x, K(x))$, где $x \in E_{\Delta}$. Значит, верно включение $\text{Extr}(\text{Sub } h_{\Delta}) \subset \text{Gr } f$. Кроме того, из леммы 3 вытекает, что $h_{\Delta} \geq K$ на $[0; 1]$. Следовательно, $\hat{K}_{[0;1]} = h_{\Delta}$ в силу теоремы, двойственной к теореме 6.

Далее, из формул (3.3) и (3.2) при $x \in [13/15; 1]$ следует, что $K(x) = 1 - x + 1/2 \cdot K(2x)$. Отсюда, в силу периодичности и нечетности $K(x)$, получаем: $K(x) = 1 - x - 1/2 \cdot K(2 - 2x)$. Так как $h_{\nabla}(x) = 1 - x - 1/2 \cdot h_{\Delta}(2 - 2x)$ при $x \in [13/15; 1]$ и $h_{\Delta} = \hat{K}_{[0;1]}$, то $h_{\nabla} = \hat{K}_{[0;1]}$ ввиду теоремы 6 и пункта (2) леммы 3.

(2) В пункте (1) доказано, что крайние точки подграфика $\text{Sub } h_{\Delta} = \text{Conv}(\text{Sub } K)$ имеют вид $(x, h_{\Delta}(x)) = (x, K(x))$, где $x \in E_{\Delta}$. Отсюда, в силу определения 3, следует равенство $\text{ExtrSA}(K, [0; 1]) = E_{\Delta}$. Аналогично доказывается, что $\text{ExtrEA}(K, [0; 1]) = E_{\nabla}$.

(3) Имеем: $\psi_{\Delta}''(x) = -1/(x \ln 2) < 0$ при $x \in (0; 1]$. Следовательно, ψ_{Δ} строго вогнута на полуинтервале $(0; 1]$. Строгая выпуклость функции ψ_{∇} на $[0; 1)$ доказывается аналогично.

Факт интерполирования функциями ψ_Δ и ψ_∇ функции $K(x)$ на соответствующих множествах следует из пункта 2) и определения функций ψ_Δ и ψ_∇ . \square

На рисунке 2 (страница 492) приведены графики функции Кобаяши–Грея–Такаги (линия А), ее вогнутой оболочки (линия В), ее выпуклой оболочки (линия D), ее верхней интерполянты ψ_Δ (линия С) и ее нижней интерполянты ψ_∇ (линия Е), а также показаны множества ее крайних подабсцисс (знаками Δ) и надабсцисс (знаками ∇) на $[0; 1]$.

Теперь найдем глобальные экстремумы двух функций, выражающихся через $K(x)$.

Предложение 5. (1) Глобальный максимум функции $K(x) - x\sqrt{1-x}$ на отрезке $[0; 1]$ равен $4(30 - \sqrt{165})/225 \approx 0,3050$ и достигается только в точке $4/15$.

(2) На $[0; 1]$ у функции $K(x)/\cos x$ глобальный максимум равен $8/(15 \cos(8/15)) \approx 0,6194$ и достигается только в точке $8/15$, а глобальный минимум равен $-2/(15 \cos(14/15)) \approx -0,2240$ и достигается только в точке $14/15$.

Доказательство. (1) Функция $g(x) = -x\sqrt{1-x}$ строго выпукла, поскольку имеем: $g''(x) = (3/4 \cdot x - 1)/\sqrt{(1-x)^3} < 0$ при $x \in [0; 1)$. Значит, по теореме 1, все точки глобального максимума функции $L(x) = K(x) - x\sqrt{1-x}$ на $[0; 1]$ лежат в множестве $\text{ExtrSA}(K, [0; 1])$. Следовательно, в силу пунктов (2) и (3) предложения 4, нам достаточно сначала найти у функции $y(x) = x(\log_2(16/15) - \log_2 x) - x\sqrt{1-x}$ глобальный максимум на множестве $\{8/(15 \cdot 2^n)\}_{n=0}^\infty$, входящем в $(0; 8/15]$, а затем сравнить его со значениями $L(x)$ в точках $x \in \{0, 17/30, 1\}$.

Применим производную. Имеем: $y'(x) = (\ln(16/15) - 1 - \ln x)/\ln 2 + (3/2 \cdot x - 1)/\sqrt{1-x}$, а также $y''(x) = y_2(x)/(4 \ln 2 \cdot x \sqrt{(1-x)^3})$, где $y_2(x) = \ln 2 \cdot (4/3 - 3(2/3 - x)^2) - 4\sqrt{(1-x)^3}$. Так как $y_2(x)$ возрастает при $0 \leq x \leq 8/15$ и $y_2(8/15) < 0$, то $y''(x) < 0$ и $y'(x)$ убывает при $0 < x \leq 8/15$. Далее, поскольку $y'(2/15) > 0$ и $y'(4/15) < 0$, то $y'(x) > 0$ и $y(x)$ возрастает при $0 < x \leq 2/15$, а также $y'(x) < 0$ и $y(x)$ убывает при $4/15 \leq x \leq 8/15$. Следовательно, точки глобального максимума функции $L(x)$ на $\text{ExtrSA}(K, [0; 1])$ (а значит, и на $[0; 1]$) находятся среди точек $0, 2/15, 4/15, 17/30$ и 1 . Сравнивая значения $L(x)$ в этих точках, видим, что глобальный максимум, равный $4(30 - \sqrt{165})/225 \approx 0,3050$, достигается только при $x = 4/15$.

(2) Пусть $D = [0; 1]$, $v(x) = \cos x$, $g(x) \equiv 0$, $M_2 = \sup_D(K/v + g)$, $m_2 = \inf_D(K/v + g)$. Тогда $M_2 > 0$, $m_2 < 0$, $v(x) > 0$ при $x \in D$, функция $(g(x) - M_2) \cdot v(x) = -M_2 \cos x$ строго выпукла, а функция $(g(x) - m_2) \cdot v(x) = -m_2 \cos x$ строго вогнута на \tilde{D} . Поэтому, в силу теоремы 2 и двойственной к ней, у функции $K(x)/\cos x$ все точки глобального максимума лежат в множестве $\text{ExtrSA}(K, [0; 1])$, а точки глобального минимума — в множестве $\text{ExtrEA}(K, [0; 1])$. Отсюда видим, в силу пунктов (2) и (3) предложения 4, что достаточно найти глобальный максимум функции $z_\Delta(x) = x(\log_2(16/15) - \log_2 x)/\cos x$ на множестве $\{8/(15 \cdot 2^n)\}_{n=0}^\infty \subset (0; 8/15]$, а также глобальный минимум функции $z_\nabla(x) = (1-x)(\log_2(1-x) - \log_2(4/15))/\cos x$ на множестве $\{1 - 2/(15 \cdot 2^k)\}_{k=0}^\infty \subset [13/15; 1)$, и затем сравнить их со значениями $K(x)/\cos x$ в точках $0, 17/30$ и 1 . Мы сделаем это ниже в пунктах (а) и (б).

(а) Дифференцируя функцию $z_\Delta(x)$, получим равенство: $z'_\Delta(x) = z'_{\Delta 1}(x)/(\ln 2 \cdot \cos^2 x)$, где $z'_{\Delta 1}(x) = (\cos x + x \sin x)(\ln(16/15) - \ln x) - \cos x$. Еще раз применив производную, находим: $z'_{\Delta 1}(x) = (x \ln(16/15) - x \ln x - 1/x) \cos x$. Если $x \in (0; 8/15]$, то $-x \ln x \leq 1/e$ и $-1/x \leq -15/8$, поэтому $z'_{\Delta 1}(x) \leq (8/15 \cdot \ln(16/15) + 1/e - 15/8) \cos x < 0$. Таким образом, $z_{\Delta 1}(x)$ убывает. Так как $z_{\Delta 1}(4/15) > 0$ и $z_{\Delta 1}(8/15) < 0$, то глобальный максимум $z_\Delta(x)$ на множестве $\{8/(15 \cdot 2^n)\}_{n=0}^\infty$ достигается при $x = 4/15$ или при $x = 8/15$. Сравнивая значения функции $K(x)/\cos x$ в точках $0, 4/15, 8/15, 17/30$ и 1 , находим, что ее глобальный максимум достигается только в точке $8/15$ и равен $8/(15 \cos(8/15)) \approx 0,6194$.

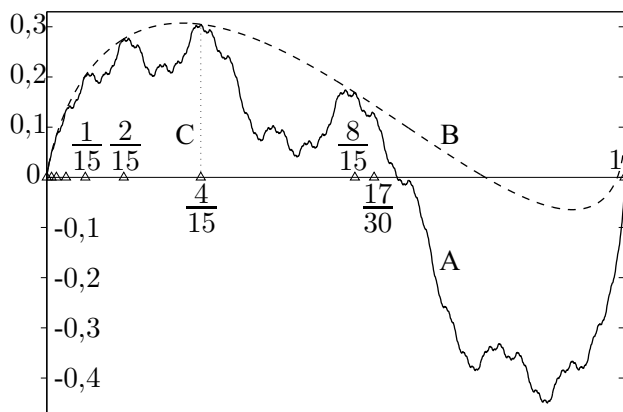


Рис. 3.

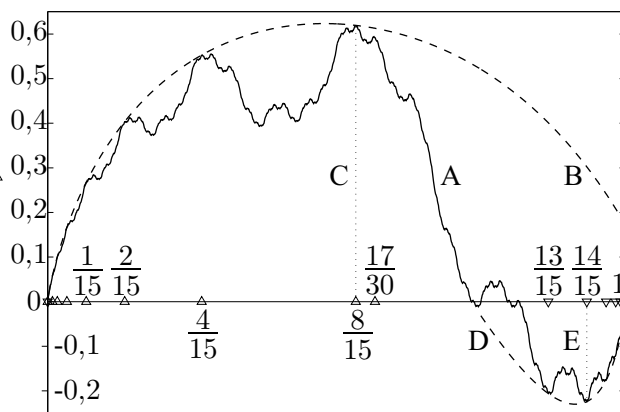


Рис. 4.

(б) Теперь продифференцируем функцию $z_{\nabla}(x)$: $z'_{\nabla}(x) = z_{\nabla}(x)/(\ln 2 \cdot \cos^2 x)$, где обозначено $z_{\nabla}(x) = ((1-x) \sin x - \cos x)(\ln(1-x) + \ln(15/4)) - \cos x$. Дифференцируя снова, получим: $z'_{\nabla}(x) = ((1-x) \ln(1-x) + (1-x) \ln(15/4) + 1/(1-x)) \cos x$. Если $x \in [13/15; 1)$, то $1-x \in (0; 2/15]$, $(1-x) \ln(1-x) \geq -1/e$ и $1/(1-x) \geq 15/2$. Отсюда вытекает, что $z'_{\nabla}(x) \geq (-1/e + 15/2)/\cos x > 0$. Следовательно, $z_{\nabla}(x)$ возрастает. Так как $z_{\nabla}(13/15) < 0$ и $z_{\nabla}(14/15) > 0$, то глобальный минимум $z_{\nabla}(x)$ на множестве $\{1 - 2/(15 \cdot 2^k)\}_{k=0}^{\infty}$ достигается при $x = 13/15$ или $x = 14/15$. Сравнив значения функции $K(x)/\cos x$ в точках 0, 13/15, 14/15 и 1, находим, что ее глобальный минимум достигается только в точке 14/15 и равен $-2/(15 \cos(14/15)) \approx -0,2240$. \square

На рисунке 3 приведены графики функции $K(x) - x\sqrt{1-x}$ (линия А), а также функции $\psi_{\Delta}(x) - x\sqrt{1-x}$ (линия В). На нем, кроме того, изображены множество крайних подабсцисс для $K(x)$ (знаками Δ) и глобальный максимум функции $K(x) - x\sqrt{1-x}$ на $[0; 1]$ (линия С).

На рисунке 4 приведены графики функций $K(x)/\cos x$ (линия А), $\psi_{\Delta}(x)/\cos x$ (линия В) и $\psi_{\nabla}(x)/\cos x$ (линия D), а также изображены множество крайних подабсцисс $\text{ExtrSA}(K, [0; 1])$ (знаками Δ), множество крайних надабсцисс $\text{ExtrEA}(K, [0; 1])$ (знаками ∇) и глобальные экстремумы функции $K(x)/\cos x$ на $[0; 1]$ (линии С и Е соответственно).

Финансирование. Параграфы § 1 и § 2 работы выполнены при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931; параграф § 3 работы выполнен при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 19-07-00782.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. Sukhorukova N., Ugon J. Chebyshev approximation by linear combinations of fixed knot polynomial splines with weighting functions // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. Vol. 171. No. 2. P. 536–549. <https://doi.org/10.1007/s10957-016-0887-0>
3. Kobayashi Z. Digital sum problems for the Gray code representation of natural numbers // Interdisciplinary Information Sciences. 2002. Vol. 8. No. 2. P. 167–175. <https://doi.org/10.4036/iis.2002.167>
4. Chen L. H. Y., Hwang H.-K., Zacharovas V. Distribution of the sum-of-digits function of random integers: A survey // Probability Surveys. 2014. Vol. 11. P. 177–236. <https://doi.org/10.1214/12-PS213>

5. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Глобальные экстремумы функции Кобаяши–Грея–Такаги и двоичные цифровые суммы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 17–25. <https://doi.org/10.20537/vm170102>
6. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
7. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
8. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
9. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007.
10. Elhedhli S., Goffin J.-L., Vial J.-P. Nondifferentiable optimization // Encyclopedia of optimization. Boston, MA: Springer, 2009. P. 2584–2590. https://doi.org/10.1007/978-0-387-74759-0_445
11. Bagirov A., Karmita N., Mäkelä M. M. Introduction to nonsmooth optimization. Theory, practice and software. Springer, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08114-4>
12. Ovcharova N., Gwinner J. A study of regularization techniques of nondifferentiable optimization in view of application to hemivariational inequalities // Journal of Optimization Theory and Applications. 2014. Vol. 162. No. 3. P. 754–778. <https://doi.org/10.1007/s10957-014-0521-y>
13. Kolosnitsyn A. V. Computational efficiency of the simplex embedding method in convex nondifferentiable optimization // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58. No. 2. P. 215–222. <https://doi.org/10.1134/S0965542518020070>
14. Mishura Y., Schied A. On (signed) Takagi–Landsberg functions: p th variation, maximum, and modulus of continuity // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. Vol. 473. No. 1. P. 258–272. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.047>
15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
16. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
17. Allaart P. C., Kawamura K. The Takagi function: a survey // Real Analysis Exchange. 2011. Vol. 37. No. 1. P. 1–54. <https://projecteuclid.org/euclid.rae/1335806762>
18. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию 16.09.2019

Галкин Олег Евгеньевич, с. н. с., лаборатория динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12.

E-mail: olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна, доцент, кафедра фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12.

E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru

Цитирование: О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина. Применение крайних под- и надаргументов, выпуклых и вогнутых оболочек для поиска глобальных экстремумов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 483–500.

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina

Application of extreme sub- and epiarguments, convex and concave envelopes to search for global extrema

Keywords: nondifferentiable optimization, extreme subarguments (subabscissae) and epiarguments (epi-abscissae) of function, natural convex and concave envelopes of function, Gray Takagi function of Kobayashi.

MSC2010: 26A27, 26A30, 26B25, 49M30, 90C26

DOI: [10.20537/vm190402](https://doi.org/10.20537/vm190402)

For real-valued functions f , defined on subsets of real linear spaces, the notions of extreme subarguments, extreme epiarguments, natural convex \check{f} and natural concave \hat{f} envelopes are introduced. It is shown that for any strictly convex function g , any point of the global maximum of the function $f + g$ is an extreme subargument for the function f . A similar result is obtained for functions of the form $f/v + g$. Based on these results, a method is proposed, that facilitates the search for global extrema of functions in some cases. It is proved that under certain conditions the functions $f/v + g$ and $\hat{f}/v + g$ have the same global maximum and the same points of the global maximum. Necessary and sufficient conditions for the naturalness of the convex envelope of function are given. A sufficient condition for the invariance of values of the concave envelope \hat{f} during narrowing the domain of f is established. Extreme sub- and epiarguments for continuous nowhere differentiable Gray–Takagi function $K(x)$ of Kobayashi on the segment $[0; 1]$ are found. Moreover, the global extrema of the function $K(x)/\cos x$ and the global maximum of the function $K(x) - \sqrt{x(1-x)}$ on $[0; 1]$ are calculated. The article is provided with examples and graphic illustrations.

Funding. Sections § 1 and § 2 of the study were partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of Science and Higher Education of the RF, grant agreement No. 075-15-2019-1931; section § 3 of the study was funded by RFBR, project number 19–07–00782.

REFERENCES

1. Dem'yanov V.F., Malozemov V.N. *Introduction to minimax*, New York: Dover, 1990. Original Russian text published in Dem'yanov V.F., Malozemov V.N. *Vvedenie v minimaks*, Moscow: Nauka, 1972.
2. Sukhorukova N., Ugon J. Chebyshev approximation by linear combinations of fixed knot polynomial splines with weighting functions, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, vol. 171, no. 2, pp. 536–549. <https://doi.org/10.1007/s10957-016-0887-0>
3. Kobayashi Z. Digital sum problems for the Gray code representation of natural numbers, *Interdisciplinary Information Sciences*, 2002, vol. 8, no. 2, pp. 167–175. <https://doi.org/10.4036/iis.2002.167>
4. Chen L.H.Y., Hwang H.-K., Zacharovas V. Distribution of the sum-of-digits function of random integers: A survey, *Probability Surveys*, 2014, vol. 11, pp. 177–236. <https://doi.org/10.1214/12-PS213>
5. Galkin O.E., Galkina S.Yu. Global extrema of the Gray Takagi function of Kobayashi and binary digital sums, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 17–25 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170102>
6. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nondifferentiable optimization*, New York: Springer, 1985. Original Russian text published in Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya*, Moscow: Nauka, 1981.
7. Rockafellar R. T. *Convex analysis*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1970. Translated under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow: Mir, 1973.

8. Ioffe A. D., Tihomirov V. M. *Theory of extremal problems*, Amsterdam: Elsevier Science, 1979. Original Russian text published in Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow: Nauka, 1974.
9. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* (Elements of convex and strongly convex analysis), Moscow: Fizmatlit, 2007.
10. Elhedhli S., Goffin J.-L., Vial J.-P. Nondifferentiable optimization, *Encyclopedia of optimization*, Boston, MA: Springer, 2009, pp. 2584–2590.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-74759-0_445
11. Bagirov A., Karmitsa N., Mäkelä M. M. *Introduction to nonsmooth optimization. Theory, practice and software*, Springer, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08114-4>
12. Ovcharova N., Gwinner J. A study of regularization techniques of nondifferentiable optimization in view of application to hemivariational inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 162, no. 3, pp. 754–778. <https://doi.org/10.1007/s10957-014-0521-y>
13. Kolosnitsyn A. V. Computational efficiency of the simplex embedding method in convex nondifferentiable optimization, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 2, pp. 215–222. <https://doi.org/10.1134/S0965542518020070>
14. Mishura Y., Schied A. On (signed) Takagi–Landsberg functions: p th variation, maximum, and modulus of continuity, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, vol. 473, no. 1, pp. 258–272. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.047>
15. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1976.
16. Schwartz L. *Analyse mathématique. I*, Hermann, 1967.
Translated under the title *Analiz. Tom 1*, Moscow: Mir, 1972.
17. Allaart P. C., Kawamura K. The Takagi function: a survey, *Real Analysis Exchange*, 2011, vol. 37, no. 1, pp. 1–54. <https://projecteuclid.org/euclid.rae/1335806762>
18. Preparata F., Shamos M. *Computational geometry. An introduction*, New York: Springer, 1985.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1098-6>
Translated under the title *Vychislitel'naya geometriya. Vvedenie*, Moscow: Mir, 1989.

Received 16.09.2019

Galkin Oleg Evgen'evich, Senior Researcher, Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12, Nizhni Novgorod, 603155, Russia.

E-mail: olegegalkin@ya.ru

Galkina Svetlana Yur'evna, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12, Nizhni Novgorod, 603155, Russia.

E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru

Citation: O. E. Galkin, S. Yu. Galkina. Application of extreme sub- and epiarguments, convex and concave envelopes to search for global extrema, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 483–500.