О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, О рациональных приближениях функций и выборе собственных значений в алгоритме Вернера, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2015, том 25, выпуск 3, 297–305

УДК 517.518.84

© *О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина*

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ И ВЫБОРЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В АЛГОРИТМЕ ВЕРНЕРА [1]

Работа посвящена изучению наилучших равномерных рациональных приближений (НРРП) непрерывных функций на компактных, в том числе конечных, подмножествах числовой оси $\mathbb{R}$. Показано, что НРРП на конечном множестве существует не всегда. Более подробно изучен алгоритм Гельмута Вернера поиска НРРП вида $P_m/Q_n = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \big/ \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ для функций на множестве из $N = m+n+2$ точек $x_1 < \ldots < x_N$. Этот алгоритм может использоваться в алгоритме Ремеза поиска НРРП на отрезке. При работе алгоритма Вернера вычисляется $(n+1)$ вещественное собственное значение $h_1, \ldots, h_{n+1}$ для пучка матриц $A - hB$, где A и B — некоторые симметричные матрицы. Каждому собственному значению сопоставляется своя рациональная дробь вида P_m/Q_n, являющаяся кандидатом на наилучшее приближение. Поскольку не более одной из этих дробей свободны от полюсов на отрезке $[x_1, x_N]$, то возникает задача отыскания того собственного значения, которому соответствует рациональная дробь без полюсов. В работе показано, что если $m = 0$, все значения $f(x_1), -f(x_2), \ldots, (-1)^{n+2} f(x_{n+2})$ различны и НРРП положительно (отрицательно) во всех точках $x_1, \ldots, x_{n+2}$, то это собственное значение занимает $[(n+2)/2]$-е ($[(n+3)/2]$-е) место по величине. Приведены три численных примера, иллюстрирующих это утверждение.

Ключевые слова: наилучшие равномерные рациональные приближения, рациональные приближения на конечных множествах, алгоритм Ремеза, алгоритм Вернера, выбор собственных значений в алгоритме Вернера.

Введение

Статья посвящена изучению наилучших равномерных рациональных приближений непрерывных функций на компактных, в том числе конечных, помножествах числовой оси $\mathbb{R}$. Рациональным приближениям посвящено большое число работ (см., например, [1–5] и имеющиеся там ссылки).

Работа состоит из шести параграфов. В первом параграфе приведены *основные обозначения и определения*. Во втором параграфе приведены достаточные условия существования *наилучшего равномерного рационального приближения* (НРРП), найденные Уолшем, и показано, что НРРП на конечном множестве существует не всегда (теорема 1). Третий параграф посвящен *единственности и характеризации* НРРП. Приведена теорема об альтернансе для рациональных приближений на отрезке (теорема A), а также аналогичная теорема для произвольного компактного множества из $\mathbb{R}$ (теорема 2). В четвертом параграфе описан *алгоритм Ремеза поиска* НРРП, а также приведен результат Ральстона о достаточных условиях сходимости этого алгоритма. В пятом параграфе описан *алгоритм Гельмута Вернера*, который может быть применен на одном из шагов алгоритма Ремеза. Алгоритм Вернера предназначен для поиска НРРП вида $P_m/Q_n = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \big/ \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ функций, заданных на множестве из $N = m+n+2$ точек $x_1 < \ldots < x_N$. Многочлен Q_n не должен иметь полюсов на отрезке $[x_1, x_N]$. При работе этого алгоритма вычисляется $(n+1)$ собственное значение $h_1, \ldots, h_{n+1}$ для пучка матриц $A - hB$, где A и B — некоторые симметричные матрицы, B положительно определена. Все эти собственные значения вещественны, поэтому каждому из них сопоставляется своя рациональная дробь вида P_m/Q_n, являющаяся кандидатом на наилучшее приближение. Как известно, не более одной из

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 13–02–12155-офи_м, 14–01–00516-А).

этих дробей свободно от полюсов на отрезке $[x_1, x_N]$. Данное утверждение можно уточнить, заменив отрезок $[x_1, x_N]$ на набор точек $x_1, \ldots, x_N$ (предложение 1).

Таким образом, возникает задача отыскания того собственного значения, которому соответствует рациональная дробь без полюсов. Приведено достаточное условие Куртиса и Осборна того, что в случае $n = 1$ это собственное значение (если оно существует) имеет минимальный модуль. Далее в теореме 3 нами показано, что если $m = 0$, все значения $f(x_1)$, $-f(x_2)$, $\ldots$, $(-1)^{n+2} f(x_{n+2})$ различны и приближающая функция P_m/Q_n положительна (отрицательна) в точках $x_1, \ldots, x_N$, то это собственное значение занимает $[(n+2)/2]$-е ($[(n+3)/2]$-е) место в последовательности $h_1 < \ldots < h_{n+1}$. После формулировки теоремы приведены три иллюстрирующих ее численных примера.

§ 1. Основные обозначения и определения

Всюду далее m и n — неотрицательные целые числа. Обозначим символом $\mathcal{R}_{m,n}$ множество всех рациональных функций вида

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j} \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами. *Дефектом* $d(R)$ рациональной функции (1) называется такое число d, что $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_{m-d+1} = 0$, $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_{n-d+1} = 0$, но хотя бы один из коэффициентов a_{m-d}, b_{n-d} отличен от нуля. В случае $R \equiv 0$ считаем, что $d(R) = n$.

Пусть K — компактное (возможно, конечное) подмножество множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Обозначим символом $\mathcal{R}^K_{m,n}$ (соответственно $\mathcal{R}^{K+}_{m,n}$) множество всех функций вида (1), удовлетворяющих условию $Q_n(x) \neq 0$ (соответственно $Q_n(x) > 0$) при всех $x \in K$.

Множество всех непрерывных функций $f\colon K \to \mathbb{R}$ обозначается через $C(K)$. Рациональную функцию $R_* = P_m/Q_n$ будем называть *наилучшим равномерным рациональным приближением* (НРРП) из класса $\mathcal{R}^K_{m,n}$ (соответственно $\mathcal{R}^{K+}_{m,n}$) для функции $f \in C(K)$, если выполняется равенство

$$\max_{x \in K} |R_*(x) - f(x)| = \inf \max_{x \in K} |R(x) - f(x)|,$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям R из соответствующего класса.

Замечание 1. Пусть $K = [a, b]$ и $f \in C[a, b]$. Тогда несократимая рациональная функция $R_* = P_m/Q_n$, дающая НРРП из класса $\mathcal{R}^{[a,b]}_{m,n}$ для функции f, не имеет полюсов на $[a, b]$. Поэтому можно считать, что ее знаменатель Q_n положителен всюду на $[a, b]$. Значит, для непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ понятия НРРП из классов $\mathcal{R}^{[a,b]}_{m,n}$ и $\mathcal{R}^{[a,b]+}_{m,n}$ совпадают.

§ 2. Существование наилучшего равномерного рационального приближения

Из результата Уолша [6, Theorem III, p. 672] вытекает, что если K — компактное множество из $\mathbb{R}$ без изолированных точек (в частности, отрезок $[a, b]$), то для любой непрерывной на нем функции существует НРРП из класса $\mathcal{R}^K_{m,n}$.

Следующая теорема показывает, что НРРП на конечном множестве из $\mathbb{R}$ может не быть.

Теорема 1. 1. *Если $n \geqslant 1$ и конечное множество $K \subset \mathbb{R}$ имеет более чем $m + 1$ точек, то найдется функция $f_0\colon K \to \mathbb{R}$, для которой не существует* НРРП *ни из класса $\mathcal{R}^K_{m,n}$, ни из класса $\mathcal{R}^{K+}_{m,n}$.*

2. *Если $n = 0$ или множество $K \subset \mathbb{R}$ имеет не более $m + 1$ точек, то для любой функции $f\colon K \to \mathbb{R}$* НРРП *как из класса $\mathcal{R}^K_{m,n}$, так и из класса $\mathcal{R}^{K+}_{m,n}$ существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $K=\{x_0,x_1,\ldots,x_M\}$, где $M\geqslant m+1$, $x_0<x_1<\ldots<x_M$. Зададим функцию f_0 так: $f_0(x_0)=1$; $f_0(x_i)=0$ при $i=1,\ldots,M$. Введем последовательность функций из класса $\mathcal{R}^{K+}_{m,n}$: $R_j(x)=1/(1+j(x-x_0))$, $j=1,2,\ldots$. Тогда выполнены соотношения

$$0\leqslant\inf_{R\in\mathcal{R}^K_{m,n}}\max_{x\in K}|R(x)-f(x)|\leqslant\inf_{R\in\mathcal{R}^{K+}_{m,n}}\max_{x\in K}|R(x)-f(x)|\leqslant\inf_{j=1,2,\ldots}\max_{x\in K}|R_j(x)-f(x)|=$$

$$=\inf_{j=1,2,\ldots}\max_{i=1,\ldots,M}|1/(1+ji)|=0.$$

Отсюда следует, что НРРП $R_*=P_m/Q_n$, если оно существует, на множестве K должно совпадать с функцией f. Поэтому значение многочлена P_m, имеющего степень не выше m, в точке x_0 должно быть отличным от нуля, а в точках $x_1,\ldots,x_M$ должно быть равным нулю. Но это невозможно, значит, НРРП не существует.

2. При $n=0$ для построения НРРП $R_*=P_m/Q_n$ достаточно взять $Q_n\equiv1$, а в качестве P_m взять полином наилучшего равномерного приближения для функции f на множестве K (его существование доказано Борелем в [7]). ☐

Заметим, что для частного случая $M=2$, $m=0$, $n=1$ пример, аналогичный примеру из п. 1 доказательства, привел Ватсон в [2, p. 193].

§ 3. Единственность и характеризация наилучшего рационального приближения

Характеризационная теорема о наилучших рациональных приближениях, часто называемая теоремой Чебышёва об альтернансе, для ограниченного промежутка и единичной весовой функции может быть сформулирована так ([1, с. 66], см. также [8], [4, Sect. 8, p. 21]).

Теорема A. *Для любой функции $f\in C[a,b]$ несократимая рациональная функция $R=P_m/Q_n$, дающая* НРРП *из класса $\mathcal{R}^{[a,b]+}_{m,n}$, единственна. Эта функция вполне характеризуется таким свойством: существуют $N=m+n+2-d(R)$ точек $t_1<\ldots<t_N$ из отрезка $[a,b]$ и число $\varepsilon_0\in\{-1,1\}$ такие, что выполняются равенства*

$$R(t_k)-f(t_k)=\varepsilon_0(-1)^k\cdot\max_{x\in[a,b]}|R(x)-f(x)|,\quad k=1,\ldots,N.$$

Точки $t_1<\ldots<t_N$ принято называть *точками альтернанса.*

Для рациональных приближений на компактных множествах из $\mathbb{R}$ можно доказать следующий аналог теоремы A.

Теорема 2. *Пусть $K\subset\mathbb{R}$ — компактное множество, $f\in C(K)$, $R=P_m/Q_n$ — несократимая рациональная функция из класса $\mathcal{R}^{K+}_{m,n}$ и K содержит не менее чем $N=m+n+2-d(R)$ точек. Тогда R есть* НРРП *из класса $\mathcal{R}^{K+}_{m,n}$ для функции f если и только если существуют N точек $x_1<\ldots<x_N$ из K и число $\varepsilon_0\in\{-1,1\}$ такие, что выполняются равенства*

$$R(x_k)-f(x_k)=\varepsilon_0(-1)^k\cdot\max_{x\in K}|R(x)-f(x)|,\quad k=1,\ldots,N.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы A в [1, с. 66].

§ 4. Алгоритм Ремеза поиска наилучшего рационального приближения

На применении теоремы A основан, в частности, алгоритм Е. Я. Ремеза, разработанный им для поиска полиномов наилучшего равномерного приближения непрерывных функций на отрезке (см. [9, 10]). Этот алгоритм был модифицирован различными авторами для поиска НРРП (см., например, [11, 12]). Приведем здесь описание алгоритма Ремеза для поиска НРРП $R_*(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i/\sum\limits_{j=0}^{n}b_jx^j$ из класса $\mathcal{R}^{[a,b]+}_{m,n}$ для функций $f\in C[a,b]$ в случае $d(R_*)=0$ и $N=m+n+2$, который мы будем рассматривать далее (мы следуем [2, p. 200] и [5, p. 366]).

Алгоритм состоит из 4-х шагов.

Шаг 1. Положим $p = 1$ и выберем на отрезке $[a, b]$ произвольное подмножество из N элементов $K_p = \{x_1^{(p)} < x_2^{(p)} < \ldots < x_N^{(p)}\}$.

Шаг 2. Решив нелинейную систему

$$\sum_{i=0}^{m} a_i (x_k^{(p)})^i \Big/ \sum_{j=0}^{n} b_j (x_k^{(p)})^j - f(x_k^{(p)}) = (-1)^k h^{(p)}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

относительно $a_0, \ldots, a_m$, $b_0, \ldots, b_n$ и $h^{(p)}$, построим дающую НРРП на множестве K_p рациональную функцию $R_p(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \big/ \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$.

Шаг 3. Положим $r_p(x) = R_p(x) - f(x)$ и вычислим $\overline{h}^{(p)} = \max_{x \in [a,b]} |r_p(x)|$. Если $\overline{h}^{(p)} = |h^{(p)}|$, то (по теореме A) дробь $R_p(x)$ дает наилучшее приближение на $[a, b]$, работа алгоритма успешно завершена, иначе переходим к шагу 4.

Шаг 4. Если $\overline{h}^{(p)} > |h^{(p)}|$, то существует точка $x_* \in [a, b]$ такая, что $|r_p(x_*)| = \overline{h}^{(p)}$. Возьмем на отрезке $[a, b]$ новое подмножество $K_{p+1} = \{x_1^{(p+1)} < x_2^{(p+1)} < \ldots < x_N^{(p+1)}\}$ такое, что $\mathrm{sign}(r_p(x_{k+1}^{(p+1)})) = -\mathrm{sign}(r_p(x_k^{(p+1)}))$ при $k = 1, \ldots, N-1$, $|r_p(x_k^{(p+1)})| \geqslant |h^{(p)}|$ при $k = 1, \ldots, N$, а также $\max_{1 \leqslant k \leqslant N} |r_p(x_k^{(p+1)})| = \overline{h}^{(p)}$. (Этого можно добиться, например, заменив одну из точек множества K_p на x_*.) Увеличим p на 1 и перейдем к шагу 2.

Замечание 2. Если в какой-то момент нельзя будет сделать шаг 2 (это возможно), то алгоритм не даст результата. Иначе в итоге работы алгоритма получим последовательность рациональных функций $\{R_p\}_{p=1}^{\infty}$. Как показал Ральстон в [13, Corollary 1, p. 329], для равномерной сходимости последовательности $\{R_p\}_{p=1}^{\infty}$ к НРРП R_* достаточно выполнения двух условий:
(a) точки $x_k^{(1)}$, выбранные на шаге 1 алгоритма, достаточно близки к точкам альтернанса t_k из теоремы A, $k = 1, \ldots, N$;
(б) величина $\min_{k=1,\ldots,N} |R_1(x_k^{(1)}) - f(x_k^{(1)})|$ достаточно близка к величине $|R_*(t_1) - f(t_1)|$.

§ 5. Конструкция и свойства алгоритма Вернера

Как мы видели в предыдущем параграфе, на шаге 2 алгоритма Ремеза требуется для данного набора точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ из отрезка $[a, b]$ решить нелинейную систему вида

$$\sum_{i=0}^{m} a_i (x_k)^i \Big/ \sum_{j=0}^{n} b_j (x_k)^j - f(x_k) = (-1)^k h, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

относительно $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n, h$, что позволяет на конечном множестве $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ построить НРРП $R(x) = P_m(x)/Q_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \big/ \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{M+}$ для функции f (при условии, что $d(R) = 0$). При этом знаменатель $Q_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ должен быть положителен в точках $x_1, \ldots, x_N$. Для решения этой задачи и предназначен алгоритм Вернера ([14], см. также [15, Sect. 7]). Заметим, что согласно теореме 1 данная задача разрешима не всегда.

Вернер предлагает действовать следующим образом. Умножив равенство (2) на знаменатель и перенеся все в левую часть, получим систему уравнений

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x_k^i + \sum_{j=0}^{n} b_j x_k^j ((-1)^{k+1} h - f(x_k)) = 0, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

При фиксированном h это — линейная однородная система уравнений относительно коэффициентов $a_0, \ldots, a_m$, $b_0, \ldots, b_n$. Она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 3

определитель равен нулю. Матрица системы (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1^0 & \dots & x_1^m & x_1^0(h-f(x_1)) & \dots & x_1^n(h-f(x_1)) \\ x_2^0 & \dots & x_2^m & x_2^0(-h-f(x_2)) & \dots & x_2^n(-h-f(x_2)) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N^0 & \dots & x_N^m & x_N^0((-1)^{N+1}h-f(x_N)) & \dots & x_N^n((-1)^{N+1}h-f(x_N)) \end{pmatrix}.$$

Поскольку h входит лишь в последние $n+1$ столбцов этой матрицы, то ее определитель $D_{n+1}(h)$ является многочленом степени $n+1$ от h. Вернер [14, p. 334–335] доказал, что все корни $h_1,\dots,h_{n+1}$ этого многочлена являются *собственными значениями* пучка матриц $A-hB$, где A, B — некоторые симметричные матрицы, B положительно определена. Это означает, что выполняется равенство $Ab=hBb$, где $b=(b_0,\dots,b_n)$ (см. также [16, с. 325]). Отсюда следует, что $h_1,\dots,h_{n+1}$ вещественны. Для каждого собственного значения h_s ($s=1,\dots,n+1$), решая систему (3) при $h=h_s$, можно найти коэффициенты $a_i=a_{i,h_s}$ ($i=1,\dots,m$), $b_j=b_{j,h_s}$ ($j=1,\dots,n$) и соответствующие многочлены $P_{m,h_s}(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_{i,h_s}x^i$, $Q_{n,h_s}(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}b_{j,h_s}x^j$.

Известно (см. [14, p. 335], [15, p. 261], [3, p. 115]), что существует не более одного значения h_s, для которого соответствующий многочлен Q_{n,h_s} положителен на отрезке $[x_1,x_N]$. Кроме того, верно следующее, чуть более точное, утверждение.

Предложение 1. *Существует не более одного значения h_s, для которого соответствующий многочлен Q_{n,h_s} положителен во всех точках $x_1,\dots,x_N$.*

Доказательство (ср. [15, с. 261], [3, с. 115]). Пусть для значений h_i и h_j соответствующие им многочлены Q_{n,h_i} и Q_{n,h_j} положительны во всех точках $x_1,\dots,x_N$. Согласно (2) выполняются равенства

$$\frac{P_{m,h_i}(x_k)}{Q_{n,h_i}(x_k)}-f(x_k)=(-1)^kh_i,\quad \frac{P_{m,h_j}(x_k)}{Q_{n,h_j}(x_k)}-f(x_k)=(-1)^kh_j,\quad k=1,\dots,N.$$

Вычитая, получим

$$\frac{P_{m,h_i}(x_k)Q_{n,h_j}(x_k)-P_{m,h_j}(x_k)Q_{n,h_i}(x_k)}{Q_{n,h_i}(x_k)Q_{n,h_j}(x_k)}=(-1)^k(h_i-h_j),\quad k=1,\dots,N. \tag{4}$$

Отсюда видно, что многочлен $S_{m+n}=P_{m,h_i}Q_{n,h_j}-P_{m,h_j}Q_{n,h_i}$ степени $m+n$ при $h_i=h_j$ обращается в ноль в точках $x_1,\dots,x_N$, а при $h_i\neq h_j$ имеет чередующиеся знаки в этих точках. В любом случае он имеет не менее чем $N-1=m+n+1$ различных корней. Поэтому $S_{m+n}\equiv 0$. Тогда из равенства (4) получаем, что $h_i=h_j$. Предложение доказано. □

Замечание 3. Возможна ситуация, когда ни одному из $h_1,\dots,h_{n+1}$ не соответствует многочлен Q_{n,h_s}, положительный в точках $x_1,\dots,x_N$. Например, так будет, если $m=0$ и в последовательности $f(x_1),\dots,f(x_N)$ есть два соседних нулевых значения. Маэли [15, с. 262] также привел следующий пример такой ситуации: $m=0$, $n=1$; $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$; $f(x)=x$. Такая ситуация возможна даже тогда, когда все значения $f(x_1),\dots,f(x_N)$ положительны.

§ 6. Выбор собственных значений в алгоритме Вернера при $m=0$

Из вышеизложенного видна актуальность разработки экономичного способа выбора того единственного (см. предложение 1) собственного значения h_s, для которого многочлен Q_{n,h_s} положителен во всех точках $x_1,\dots,x_N$ (если, конечно, оно существует (см. замечание 3)).

В случае $n=1$ из результата Куртиса и Осборна [17, Sect. 2, p. 287] следует, что если производная порядка $m+1$ функции f сохраняет знак на отрезке $[x_1,x_N]$, то это собственное значение h_s (если оно существует) имеет *минимальный модуль* среди всех собственных значений (при $n=1$ их всего два). Далее в той же работе [17, Sect. 2, p. 287] авторы заметили, что при отсутствии знакопостоянства у f^{m+1} собственное значение h_s может иметь *максимальный модуль* среди всех. Соответствующий пример приведен Маэли в [15, p. 262]: $m=0$, $n=1$; $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=6$; $f(x)=(4+5x-x^2)/2$. При этом $h_1=-2$, $h_2=1$, $h_s=-2$, $Q_{n,h_s}=6/x$.

В настоящем параграфе мы решаем эту задачу выбора лишь для случая $m=0$, то есть $P_m(x)\equiv a_0$, $R(x)=a_0/Q_n(x)$. Кроме того, в силу специфики алгоритма Вернера должно быть $d(R)=0$. Отсюда следует, что $a_0\neq 0$ и $N=n+2$. В приводимой ниже теореме квадратными скобками обозначается целая часть числа, заключенного в них.

Теорема 3. *Пусть $m=0$, $x_1<\ldots<x_{n+2}$, все значения $f(x_1),-f(x_2),\ldots,(-1)^{n+2}f(x_{n+2})$ различны. Далее, пусть $h_1\leqslant\ldots\leqslant h_{n+1}$ — все собственные значения, значению h_s соответствует положительный во всех точках $x_1,\ldots,x_{n+2}$ многочлен Q_{n,h_s} и $P_{m,h_s}\equiv a_{0,h_s}\neq 0$. Тогда собственные значения $h_1,\ldots,h_{n+1}$ различны, причем $s=[(n+2)/2]$ при $a_{0,h_s}>0$, $s=[(n+3)/2]$ при $a_{0,h_s}<0$.*

Перед доказательством теоремы приведем три численных примера.

Пример 1. В описанном выше примере Маэли $a_{0,h_s}=6>0$, поэтому $s=[(n+2)/2]=1$.

В следующих двух примерах все результаты округлены до трех цифр после десятичной точки.

Пример 2. Пусть $m=0$, $n=3$, $N=5$; $\{x_k\}_{k=1}^N=\{1,2,3,4,5\}$; $\{f(x_k)\}_{k=1}^N=\{2,7,3,8,4\}$. Тогда $\{h_i\}_{i=1}^{n+1}=\{-7.524,-2.251,2.148,3.876\}$. Для $h_s=-2.251$ получим положительный в точках $\{x_k\}_{k=1}^N$ многочлен $Q_{n,h_s}=-0.001x^3+0.013x^2-0.126x+1$. При этом $a_{0,h_s}=3.765>0$, поэтому $s=[(n+2)/2]=2$. Заметим, что в данном случае модуль h_s не является минимальным.

Пример 3. Если $m=0$, $n=4$, $N=6$; $\{x_k\}_{k=1}^N=\{0,1,2,3,4,5\}$; $\{f(x_k)\}_{k=1}^N=\{5,6,4,7,3,8\}$, то $\{h_i\}_{i=1}^{n+1}=\{-7.932,-6.348,-1.5,3.348,4.932\}$. Для $h_s=-1.5$ получим положительный в точках $\{x_k\}_{k=1}^N$ многочлен $Q_{n,h_s}=-0.04x^4+0.404x^3-1.283x^2+1.364x+1$. Так как при этом $a_{0,h_s}=6.5>0$, то $s=[(n+2)/2]=3$.

Для доказательства теоремы 3 нужна следующая лемма (ср. [14, Hilfssatz 2.1, p. 333]).

Лемма 1. *Пусть $x_1<\ldots<x_{n+2}$, Q — многочлен степени не выше n. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n+2}(-1)^k Q(x_k)/|w_k|=0, \quad \text{где} \quad w_k=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+2}(x_k-x_j). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интерполяционным многочленом для Q с узлами $x_1,\ldots,x_{n+2}$ является сам многочлен Q. Следовательно, при всех x выполнено соотношение

$$Q(x)=\sum_{k=1}^{n+2}Q(x_k)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+2}(x-x_j)\Big/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+2}(x_k-x_j).$$

Приравнивая коэффициенты при x^{n+1} в левой и правой частях, а также учитывая равенства $w_k=(-1)^{n-k}|w_k|$, $k=1,\ldots,n+2$, получаем утверждение леммы. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.

Так как $m=0$, то система (3) принимает следующий вид:

$$a_0+\sum_{j=0}^{n}b_j x_k^j((-1)^{k+1}h-f(x_k))=0, \quad k=1,\ldots,n+2.$$

Для каждого $i=1,\ldots,n+1$ при $h=h_i$ она имеет нетривиальное решение $a_{0,h_i},b_{0,h_i},\ldots,b_{n,h_i}$:

$$a_{0,h_i}+\sum_{j=0}^{n}b_{j,h_i}x_k^j((-1)^{k+1}h_i-f(x_k))=0, \quad k=1,\ldots,n+2.$$

Отсюда

$$a_{0,h_i} + Q_{n,h_i}(x_k)((-1)^{k+1}h_i - f(x_k)) = 0, \quad k = 1, \ldots, n+2. \tag{6}$$

При $i = s$, учитывая, что $Q_{n,h_s}(x_k) \neq 0$, выразим из (6) значения $f(x_k)$:

$$f(x_k) = a_{0,h_s}/Q_{n,h_s}(x_k) + (-1)^{k+1}h_s, \quad k = 1, \ldots, n+2.$$

Далее, введя при $k = 1, \ldots, n+2$ обозначения $\alpha_k = (-1)^{k+1}a_{0,h_s}/Q_{n,h_s}(x_k)$, получим

$$f(x_k) = (-1)^{k+1}(\alpha_k + h_s), \quad k = 1, \ldots, n+2. \tag{7}$$

Отсюда в силу условий теоремы следует что все значения $\alpha_k = (-1)^{k+1}f(x_k) - h_s$ различны, $k = 1, \ldots, n+2$. Затем подставим выражения (7) в равенства (6) для каждого $i = 1, \ldots, n+1$:

$$a_{0,h_i} + Q_{n,h_i}(x_k)(-1)^{k+1}(h_i - h_s - \alpha_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n+2.$$

Выразим из этого равенства $Q_{n,h_i}(x_k)$, введя обозначения $d_i = h_i - h_s$ при $i = 1, \ldots, n+1$:

$$Q_{n,h_i}(x_k) = (-1)^k a_{0,h_i}/(d_i - \alpha_k). \tag{8}$$

Далее воспользуемся леммой 1 для многочлена $Q = Q_{n,h_i}$ при каждом $i = 1, \ldots, n+1$. Тогда подставив в равенство (5) выражения (8), получим $a_{0,h_i} \sum\limits_{k=1}^{n+2} |w_k|^{-1}/(d_i - \alpha_k) = 0$, где $a_{0,h_i} \neq 0$.

Итак, числа d_i, $i = 1, \ldots, n+1$, являются корнями следующего уравнения относительно d:

$$\sum_{k=1}^{n+2} |w_k|^{-1}/(d - \alpha_k) = 0. \tag{9}$$

Для любого $k = 1, \ldots, n+2$ левая часть уравнения (9) стремится к $-\infty$ при $d \to \alpha_k - 0$ и стремится к $+\infty$ при $d \to \alpha_k + 0$. Кроме того, левая часть (9) непрерывна на каждом из смежных интервалов, образованных различными числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}$. Следовательно, уравнение (9) имеет не менее $n+1$ различных корней. С другой стороны, после приведения левой части (9) к общему знаменателю в числителе получим многочлен степени не выше $n+1$, значит, это уравнение имеет не более $n+1$ корней. Итак, корни $d_1, \ldots, d_{n+1}$ уравнения (9) расположены ровно по одному на каждом из смежных интервалов, образованных числами $\alpha_k = (-1)^{k+1}a_{0,h_s}/q_k$, $k = 1, \ldots, n+2$. Отсюда, поскольку $q_k = Q_{n,h_s}(x_k) > 0$ при $k = 1, \ldots, n+2$ и $d_s = 0$, получаем следующие выводы.

1. Все корни $d_1, \ldots, d_{n+1}$ различны.
2. При $a_{0,h_s} > 0$ среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2}$ находятся ровно $[(n+2)/2]$ отрицательных чисел и ровно $[(n+3)/2]$ положительных. Поэтому корень $d_s = 0$ стоит на $[(n+2)/2]$-м месте в упорядоченной последовательности корней $d_1 < \ldots < d_{n+1}$. При $a_{0,h_s} < 0$, соответственно, корень $d_s = 0$ стоит на $[(n+3)/2]$-м месте в этой последовательности.

Поскольку $h_i = d_i + h_s$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, то аналогичные выводы верны и для собственных значений. Из этих выводов следует утверждение теоремы. □

Авторы благодарят Александра Артамонова за помощь в проведении численных экспериментов, в результате которых был обнаружен эффект, описанный в теореме 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
2. Watson G.A. Approximation theory and numerical methods. New York: John Wiley and Sons, 1980. 229 p.
3. Powell M.J. Approximation theory and methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. 339 p.
4. Brezinski C. Historical perspective on interpolation, approximation and quadrature // Handbook of numerical analysis. Vol. 3 / P.G. Ciarlet, J.-L. Lions. North-Holland, 1994. P. 3–46.

5. Sendov B., Andreev A. Approximation and interpolation theory // Handbook of numerical analysis. Vol. 3 / P.G. Ciarlet, J.-L. Lions. North-Holland, 1994. P. 223–462.
6. Walsh J.L. The existence of rational functions of best approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1931. Vol. 33. P. 668–689.
7. Borel E. Leçons sur les fonctions de variables réelles. Paris: Gauthier-Villars, 1905.
8. Ахиезер Н.И. Об экстремальных свойствах некоторых рациональных функций // Доклады Академии наук СССР. 1930. Т. 18. С. 495–498.
9. Remes E.Ya. Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tchebycheff // C.R. Acad. Sci. Paris. 1934. Vol. 199. P. 337–340.
10. Ремез Е.Я. Про методи найкращого в розумінні Чебишова наближеного представления функцій. Київ: Вид-во ВУАН, 1935. 162 с.
11. Werner H. Tschebyscheff-approximation im bereich der rationalen funktionen bei vorliegen einer guten ausgangsnäherung // Arch. Ration. Mech. Anal. 1962. Vol. 10. № 1. P. 205–219.
12. Fraser W., Hart J.F. On the computation of rational approximations of continuous functions // Comm. ACM. 1962. Vol. 5. № 7. P. 401–403.
13. Ralston A. Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithms // Numer. Math. 1965. Vol. 7. № 4. P. 322–330.
14. Werner H. Rationale Tschebyscheff-approximation, eigenwerttheorie und differenzenrechnung // Arch. Ration. Mech. Anal. 1963. Vol. 13. № 1. P. 330–347.
15. Maehly H.J., Witzgal Ch. Methods for fitting rational approximations. Parts II and III // Journal of the ACM. 1963. Vol. 10. № 3. P. 257–277.
16. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. 384 с.
17. Curtis A., Osborne M.R. The construction of minimax rational approximation to functions // The Computer Journal. 1966. Vol. 9. № 3. P. 286–293.

Поступила в редакцию 01.08.2015

Галкин Олег Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina

On rational approximations of functions and eigenvalue selection in Werner algorithm

Keywords: best uniform rational approximations, rational approximations on finite sets, Remez algorithm, Werner algorithm, selection of eigenvalues in Werner algorithm.

MSC: 65D15, 41A20

The paper deals with the best uniform rational approximations (BURA) of continuous functions on compact (and even finite) subsets of real axis $\mathbb{R}$. The authors show that BURA does not always exist. They study the algorithm of Helmut Werner in more detail. This algorithm serves to search for BURA of the type $P_m/Q_n = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i / \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ for functions on a set of $N = m+n+2$ points $x_1 < \ldots < x_N$. It can be used within the Remez algorithm of searching for BURA on a segment. The Verner algorithm calculates $(n+1)$ real eigenvalues $h_1, \ldots, h_{n+1}$ for the matrix pencil $A - hB$, where A and B are some symmetric matrices. Each eigenvalue generates a rational fraction of the type P_m/Q_n which is a candidate for the best approximation. It is known that at most one of these fractions is free from poles on the segment $[x_1, x_N]$, so the following problem arises: how to determine the eigenvalue which generates the rational fraction without poles? It is shown that if $m = 0$ and all values $f(x_1), -f(x_2), \ldots, (-1)^{n+2} f(x_{n+2})$ are different and the approximating function is

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 3

positive (negative) at all points $x_1, \ldots, x_{n+2}$, then this eigenvalue ranks $[(n+2)/2]$-th ($[(n+3)/2]$-th) in value. Three numerical examples illustrate this statement.

REFERENCES

1. Achiezer N.I. *Theory of approximation*, New York: Frederick Ungar publishing, 1956, 307 p. Original Russian text published in Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii*, Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1947, 323 p.
2. Watson G.A. *Approximation theory and numerical methods*, New York: John Wiley and Sons, 1980, 229 p.
3. Powell M.J. *Approximation theory and methods*, Cambridge: Cambridge University Press, 1981, 339 p.
4. Brezinski C. Historical perspective on interpolation, approximation and quadrature, *Handbook of numerical analysis*, vol. 3, Eds.: Ciarlet P.G., Lions J.-L. North-Holland, 1994, pp. 3–46.
5. Sendov B., Andreev A. Approximation and interpolation theory, *Handbook of numerical analysis*, vol. 3, Eds.: Ciarlet P.G., Lions J.-L. North-Holland, 1994, pp. 223–462.
6. Walsh J.L. The existence of rational functions of best approximation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1931, vol. 33, pp. 668–689.
7. Borel E. *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Paris: Gauthier-Villars, 1905.
8. Achieser N.I. On extremal properties of certain rational fuctions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1930, vol. 18, pp. 495–498 (in Russian).
9. Remes E.Ya. Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tchebycheff, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1934, vol. 199, pp. 337–340.
10. Remez E.Ya. *Pro metody naikrashchogo v rozuminni Chebyshova nablizhenogo predstavleniya funktsii* (On the methods of the best approximate representation of functions in Chebyshov sense), Kiiv: Ukr. Akad. Nauk, 1935, 162 p. (In Ukrainian).
11. Werner H. Tschebyscheff-approximation im bereich der rationalen funktionen bei vorliegen einer guten ausgangsnäherung, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 205–219.
12. Fraser W., Hart J.F. On the computation of rational approximations of continuous functions, *Comm. ACM*, 1962, vol. 5, no. 7, pp. 401–403.
13. Ralston A. Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithms, *Numer. Math.*, 1965, vol. 7, no. 4, pp. 322–330.
14. Werner H. Rationale Tschebyscheff-approximation, eigenwerttheorie und differenzenrechnung, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1963, vol. 13, no. 1, pp. 330–347.
15. Maehly H.J., Witzgal Ch. Methods for fitting rational approximations. Parts II and III, *Journal of the ACM*, 1963, vol. 10, no. 3, pp. 257–277.
16. Parlett B. *The symmetric eigenvalue problem*, N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980, 348 p. Translated under the title *Simmetrichnaya problema sobstvennykh znachenii. Chislennye metody*, Moscow: Mir, 1983, 384 p.
17. Curtis A., Osborne M.R. The construction of minimax rational approximation to functions, *The Computer Journal*, 1966, vol. 9, no. 3, p. 286–293.

Received 01.08.2015

Galkin Oleg Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: olegegalkin@ya.ru

Galkina Svetlana Yur'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru