



Общероссийский математический портал

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, О свойствах функций показательного класса Такаги, *Уфимск. матем. журн.*, 2015, том 7, выпуск 3, 29–38

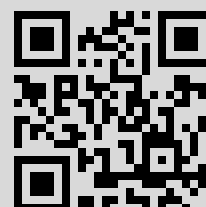
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 193.238.44.127

7 декабря 2021 г., 15:22:12



## О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО КЛАССА ТАКАГИ

О.Е. ГАЛКИН, С.Ю. ГАЛКИНА

**Аннотация.** Функции из показательного класса Такаги по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 г. Они имеют один вещественный параметр  $v$  и определяются с помощью ряда  $T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n T_0(2^n x)$ , где  $T_0(x)$  — расстояние между точкой  $x \in \mathbb{R}$  и ближайшей к ней целой точкой. При различных значениях параметра  $v$  мы изучаем область определения, непрерывность, свойство Гёльдера, дифференцируемость и вогнутость таких функций. Приводя известные результаты и доказывая недостающие факты, мы даем полное описание этих свойств для каждого значения параметра.

**Ключевые слова:** непрерывность, дифференцируемость, односторонняя производная, непрерывная нигде не дифференцируемая функция Такаги, класс Такаги, показательный класс Такаги, область определения, условие Гёльдера, глобальный максимум, вогнутость.

**Mathematics Subject Classification:** 26A27, 26A15, 26A16, 26A51

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Функция Такаги  $T(x)$  была определена Т. Такаги в 1903 г. в работе [1], где он также доказал, что  $T(x)$  на  $\mathbb{R}$  всюду непрерывна и нигде не дифференцируема. Эту функцию можно задать с помощью ряда

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} T_0(2^n x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где  $T_0(x) = |[x + 1/2] - x| = |\{x + 1/2\} - 1/2| = \rho(x, \mathbb{Z})$  — расстояние между точкой  $x \in \mathbb{R}$  и ближайшей к ней целой точкой,  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ,  $\{x\}$  — дробная часть числа  $x$ .

Хата и Ямагути [2, Сек. 2] заменили в определении функции Такаги последовательность коэффициентов  $\{1/2^n\}$  на произвольную последовательность констант  $\{c_n\}$  и получили новое семейство функций, назвав его *классом Такаги*.

Объектом нашего исследования являются принадлежащие более узкому семейству вещественные функции  $T_v$ , зависящие от параметра  $v$  и определяемые равенством

$$T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n T_0(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Заметим, что при  $v = 0$  функция  $T_v(x)$  совпадает с  $T_0(x)$ , а при  $v = 1/2$  получится сама функция Такаги:  $T_{1/2}(x) = T(x)$ .

---

О.Е. GALKIN, S.YU. GALKINA, ON PROPERTIES OF FUNCTIONS IN EXPONENTIAL TAKAGI CLASS.

© Галкин О.Е., Галкина С.Ю. 2015.

Работа поддержана РФФИ (гранты 13-02-12155 офи\_м, 14-01-00516 А).

Поступила 8 июля 2015 г.

Поскольку в данном случае коэффициенты  $c_n = v^n$  зависят от  $n$  по показательному закону, то множество функций вида (1), где  $v \in (-1; 1)$ , будем называть *показательным классом Такаги*.

Функция Такаги и её обобщения применяются в различных областях математики, например, в математическом анализе, теории вероятностей, теории чисел и других. Этим функциям посвящено большое количество публикаций, которое продолжает увеличиваться. В частности, множество интересных результатов и ссылок имеется в обзорах [3] и [4].

В данной работе мы изучаем такие характеристики функций из показательного класса Такаги, как область определения, непрерывность, условие Гёльдера, дифференцируемость, вогнутость. Приводя известные результаты и доказывая недостающие факты, мы даем полное описание этих свойств функций  $T_v$  для каждого значения параметра  $v$ . Каждый раздел статьи посвящён тому или иному свойству, указанному в его заголовке. В последнем разделе представленные результаты проиллюстрированы графически.

## 2. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Двоично-рациональными числами (или точками) будем называть числа вида  $p/2^k$ , где  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Теорема 1.** 1) Если  $|v| < 1$ , то ряд (1), задающий функцию  $T_v(x)$ , сходится равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ , его сумма  $T_v(x)$  непрерывна, и  $|T_v(x)| \leq 1/(2 - 2|v|)$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

2) Если  $|v| \geq 1$ , то ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда  $x$  — двоично-рациональная точка. При этом на множестве двоично-рациональных точек функция  $T_v(x)$  всюду разрывна.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть  $v \neq 1/2$ ,  $x$  — двоично-рациональная точка, имеющая двоичную запись  $x = \dots, x_1 x_2 \dots x_m$ , и  $N > m$ , где  $m, N \in \mathbb{N}$ . Тогда

1) Если  $v \in (-1; 1)$ , и число  $h \in [0; 2^{-N})$  имеет двоичную запись  $h = 0, \underbrace{0 \dots 0}_N h_{N+1} h_{N+2} \dots$ , то выполняется равенство

$$T_v(x+h) - T_v(x) = h \cdot \left( \frac{1 - 2^N v^N}{1 - 2v} - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n \right) + v^N T_v(2^N h).$$

2) Выполняется равенство

$$T_v(x + 2^{-N}) - T_v(x) = 2^{-N} \left( (1 - 2^N v^N) / (1 - 2v) - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n \right).$$

*Доказательство леммы 1.* 1) Сначала заметим, что для любого числа  $y$ , имеющего двоичную запись  $0, y_1 y_2 \dots$ , верна цепочка равенств:

$$T_0(0, y_1 y_2 \dots) = T_0(y) = \begin{cases} y & \text{при } y_1 = 0 \\ 1 - y & \text{при } y_1 = 1 \end{cases} = y_1 + (1 - 2y_1) \cdot 0, y_1 y_2 \dots$$

Используя эти выкладки, периодичность функции  $T_0$  и равенство

$x + h = \dots, x_1 \dots x_m \underbrace{0 \dots 0}_{N-m} h_{N+1} h_{N+2} \dots$ , получаем:

$$\begin{aligned} T_v(x+h) &= T_v(\dots, x_1 x_2 \dots x_m \underbrace{0 \dots 0}_{N-m} h_{N+1} h_{N+2} \dots) = \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} v^n T_0(0, x_{n+1} \dots x_m \underbrace{0 \dots 0}_{N-m} h_{N+1} \dots) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=m}^{N-1} v^n T_0(0, \underbrace{0 \dots 0}_{N-n} h_{N+1} h_{N+2} \dots) + \sum_{n=N}^{\infty} v^n T_0(0, h_{n+1} h_{n+2} \dots) = \\
 & = \sum_{n=0}^{m-1} v^n (x_{n+1} + (1 - 2x_{n+1}) \cdot 0, x_{n+1} \dots x_m \underbrace{0 \dots 0}_{N-m} h_{N+1} h_{N+2} \dots) + \\
 & \quad + \sum_{n=m}^{N-1} v^n \cdot 0, \underbrace{0 \dots 0}_{N-n} h_{N+1} h_{N+2} \dots + v^N T_v(2^N h).
 \end{aligned}$$

Полагая здесь  $h = 0$ , находим:

$$T_v(x) = \sum_{n=0}^{m-1} v^n (x_{n+1} + (1 - 2x_{n+1}) \cdot 0, x_{n+1} \dots x_m).$$

Вычитая два последних равенства, получаем:

$$\begin{aligned}
 T_v(x+h) - T_v(x) & = \sum_{n=0}^{m-1} v^n (1 - 2x_{n+1}) \cdot 0, \underbrace{0 \dots 0}_{N-n} h_{N+1} h_{N+2} \dots + \\
 & \quad + \sum_{n=m}^{N-1} v^n \cdot 0, \underbrace{0 \dots 0}_{N-n} h_{N+1} h_{N+2} \dots + v^N T_v(2^N h) = \\
 & = \sum_{n=0}^{N-1} v^n \cdot 2^n h - 2 \sum_{n=0}^{m-1} v^n x_{n+1} \cdot 2^n h + v^N T_v(2^N h) = \\
 & = h \cdot ((1 - 2^N v^N)/(1 - 2v) - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n) + v^N T_v(2^N h).
 \end{aligned}$$

2) Если двоично-рационально не только число  $x$ , но и  $h$ , то ряды для  $T_v(x)$  и  $T_v(x+h)$  содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых, поэтому рассуждения п. 1) верны при всех  $v \neq 1/2$ . Заменяя  $N$  на  $N-1$ , применим эти рассуждения для случая  $h = 2^{-N} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{N-1} 1$ . Учитывая, что  $T_v(1/2) = 1/2$ , получим:

$$\begin{aligned}
 T_v(x + 2^{-N}) - T_v(x) & = 2^{-N} \cdot \left( \frac{1 - 2^{N-1} v^{N-1}}{1 - 2v} - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n \right) + v^{N-1} T_v(2^{-1}) = \\
 & = 2^{-N} \cdot ((1 - 2^N v^N)/(1 - 2v) - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

*Доказательство теоремы 1.* 1) При  $|v| < 1$  равномерная сходимость ряда (1) вытекает из признака Вейрштрасса, а непрерывность его суммы  $T_v(x)$  следует из теоремы Вейрштрасса и непрерывности слагаемых. Оценка  $|T_v(x)| \leq 1/(2 - 2|v|)$  следует из неравенств

$$|T_v(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v|^n |T_0(2^n x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v|^n / 2 = 1/(2 - 2|v|).$$

2) Пусть  $|v| \geq 1$ .

2а) Сначала покажем, что если  $x$  не является двоично-рациональной точкой, то ряд (1) расходится. В этом случае двоичная запись  $x = \dots, x_1 x_2 \dots x_n \dots$  непериодична. Поэтому существует строго возрастающая последовательность номеров  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , таких что  $x_{n_k+1} = 0$ , и  $x_{n_k+2} = 1$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ . Следовательно,

$$T_0(2^{n_k} x) = T_0(0, x_{n_k+1} x_{n_k+2} \dots) = 0, x_{n_k+1} x_{n_k+2} \dots \geq 0, 01_2 = 1/4.$$

Отсюда  $|v^{n_k} T_0(2^{n_k} x)| \geq |v^{n_k}|/4 \geq 1/4$ , поэтому общий член ряда (1) не стремится к нулю, и ряд расходится.

Если же  $x$  — двоично-рациональная точка, то  $x = p/2^m$ , где  $p$  — целое,  $m$  — целое неотрицательное. Поэтому при  $n \geq m$  будет  $T_0(2^n x) = T_0(2^{n-m} p) = 0$ . Значит ряд (1) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых и поэтому сходится в точке  $x$ .

2б) Теперь покажем, что при  $|v| \geq 1$  функция  $T_v$  на множестве двоично-рациональных точек  $x$  всюду разрывна. Пусть  $x$  имеет двоичную запись  $x = \dots, x_1 x_2 \dots x_m$ . Тогда по п. 2) леммы 1 при  $N > m$  выполняется равенство

$$T_v(x + 2^{-N}) - T_v(x) = (2^{-N} - v^N)/(1 - 2v) - 2^{1-N} \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n.$$

Следовательно, разность  $T_v(x + 2^{-N}) - T_v(x)$  не стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , а значит функция  $T_v$  разрывна.

Теорема доказана.  $\square$

**Замечание.** 1) Отметим, что функция  $T_0$  на  $\mathbb{R}$  четна, имеет период 1, удовлетворяет тождеству  $T_0(1-x) = T_0(x)$ . Кроме того,  $T_0(x) = x$  при  $x \in [0; 1/2]$  и  $T_0(x) = 1-x$  при  $x \in [1/2; 1]$ . Поэтому функция  $T_v$  на области определения также четна, имеет период 1 и удовлетворяет тождеству  $T_v(1-x) = T_v(x)$ .

2) В случае  $|v| > 1$  из п. 2б) доказательства теоремы 1 следует, что при  $N \rightarrow \infty$  разность  $T_v(x + 2^{-N}) - T_v(x)$  стремится к бесконечности, поэтому на множестве двоично-рациональных чисел функция  $T_v$  неограничена в любом интервале.

3) Простой результат п. 1) теоремы добавлен для сопоставления с результатом п. 2).

### 3. УСЛОВИЯ ЛИПШИЦА И ГЕЛЬДЕРА

**3.1.** При  $1/2 < |v| < 1$ , как следует из результатов работы К. Спарриер [5, Proposition 2.1.3], функция  $T_v$  на  $\mathbb{R}$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\log_2(1/|v|)$ .

**3.2.** При  $|v| = 1/2$  из результатов работы Шидфара и Сабетфахри [6, р. 375] вытекает, что функция  $T_v$  на  $\mathbb{R}$  удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем из интервала  $(0; 1)$ .

**3.3.** В случае  $|v| < 1/2$  верно следующее простое утверждение.

**Теорема 2.** При  $|v| < 1/2$  функция  $T_v$  удовлетворяет условию Липшица на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Из равенства (1) вытекает неравенство:

$$|T_v(x) - T_v(y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v|^n |T_0(2^n x) - T_0(2^n y)| \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, используя оценку  $|T_0(2^n x) - T_0(2^n y)| \leq |2^n x - 2^n y|$ , получаем:

$$|T_v(x) - T_v(y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v|^n 2^n |x - y| = |x - y|/(1 - 2|v|).$$

Следовательно, функция  $T_v$  удовлетворяет условию Липшица.  $\square$

## 4. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

4.1. Из результатов де Рама [7] следует, что при каждом  $v \in (-1; 1)$  функция  $T_v$  является единственным ограниченным решением функционального уравнения

$$y(x) = v \cdot y(2x) + T_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

4.2. Хата и Ямагути [8, р. 335] показали, что в случае  $v = 1/4$  выполняется равенство

$$T_v(x) = T_{1/4}(x) = 2(x - x^2) \text{ при } x \in [0; 1]. \quad (3)$$

В истинности этого равенства можно убедиться и непосредственной подстановкой функции (3) в функциональное уравнение (2).

## 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

5.1. При  $v = 1/2$ , как уже было отмечено во введении, функция  $T_v(x)$  совпадает с функцией Такаги  $T(x)$ , поэтому нигде не дифференцируема на  $\mathbb{R}$  (см. [1]).

5.2. При  $v = 1/4$ , как следует из равенства (3) и периодичности  $T_v(x)$ , эта функция дифференцируема во всех точках  $x \in \mathbb{R}$ , кроме целочисленных.

5.3. При  $v = 0$  функция  $T_v$  совпадает с функцией  $T_0$ , поэтому она дифференцируема во всех точках  $x \in \mathbb{R}$ , кроме полуцелых.

5.4. При  $1/2 \leq |v| < 1$  из теоремы Коно [9, Theorem 2] о функциях класса Такаги следует, что функция  $T_v$  не дифференцируема ни в одной точке из  $\mathbb{R}$ .

5.5. При  $|v| < 1/2$  из той же теоремы Коно [9, Theorem 2] следует, что функция  $T_v$  дифференцируема почти всюду на  $\mathbb{R}$ . Этот результат можно уточнить следующим образом:

а) Из результатов К. Спарриер [5, Proposition 1.1.2] следует, что при  $|v| < 1/2$  функция  $T_v$  на  $\mathbb{R}$  дифференцируема во всех точках, не являющихся двоично-рациональными.

б) Мандельброт в [10, Sec. A.1.2, р. 247] без доказательства отметил, в частности, что при  $0 < v < 1/2$  и  $v \neq 1/4$  функция  $T_v$  во всех точках из  $\mathbb{R}$  имеет односторонние производные  $T'_v(x \pm 0)$ , которые различаются в двоично-рациональных точках и совпадают в остальных точках. Мы докажем следующий результат, согласующийся с этими фактами:

**Теорема 3.** 1) При  $0 < |v| < 1/2$  в любой двоично-рациональной точке, имеющей двоичную запись  $x = 0, x_1 x_2 \dots x_m$ , существуют односторонние производные  $T'_v(x \pm 0) = \lim_{h \rightarrow +0} (T_v(x \pm h) - T_v(x))/h$ , и выполняются равенства

$$T'_v(x + 0) = \frac{1}{1 - 2v} - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n, \quad (4)$$

$$T'_v(x - 0) = \frac{1}{1 - 2v} - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n + 2^m v^{m-1} \frac{1 - 4v}{1 - 2v} \text{ при } x \notin \mathbb{Z},$$

$$T'_v(x - 0) = -\frac{1}{1 - 2v} \text{ при } x \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

2) При  $0 < |v| < 1/2$  и  $v \neq 1/4$  функция  $T_v$  не дифференцируема в двоично-рациональных точках из  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* 1) Сначала докажем утверждение п. 1).

1а) По любому числу  $h \in (0; 1/2^m)$  можно подобрать натуральное  $N = N(h)$  так, что  $2^{-N-1} \leq h < 2^{-N}$ . Тогда, используя оценку из п. 1) теоремы 1, получим:

$$\begin{aligned} |v^N T_v(2^N h)/h| &\leq |v|^N / (2(1 - |v|)h) = 2^{-N \log_2 1/|v|} / (2h(1 - |v|)) \leq \\ &\leq h^{\log_2 1/|v|} / (2h(1 - |v|)) = h^{\log_2 1/|2v|} / (2(1 - |v|)). \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку  $\log_2 1/|2v| > 0$ , видим, что  $v^N T_v(2^N h)/h \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Теперь из п. 1) леммы 1 следует равенство (4).

1б) При  $x \in \mathbb{Z}$  равенство (5) следует из равенства (4), поскольку в силу периодичности и четности функции  $T'_v(x-0) = T'_v(-x-0) = -T'_v(x+0)$ .

1в) Пусть  $x \notin \mathbb{Z}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $x_m = 1$  в двоичной записи  $x = \dots, x_1 x_2 \dots x_m$ . Тогда, воспользовавшись разложением  $h = 0, \underbrace{0 \dots 0}_N h_{N+1} h_{N+2} \dots$ , получаем:

$$x - h = \dots, x_1 \dots x_{m-1} \underbrace{0 \underbrace{1 \dots 1}_{N-m}}_N \tilde{h}_{N+1} \tilde{h}_{N+2} \dots = \tilde{x} + \tilde{h},$$

где  $\tilde{x} = \dots, x_1 \dots x_{m-1} \underbrace{0 \underbrace{1 \dots 1}_{N-m}}_N$ ,  $\tilde{h} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_N \tilde{h}_{N+1} \tilde{h}_{N+2} \dots = 2^{-N} - h$ ,  $\tilde{h}_n = 1 - h_n$  при  $n = N+1, N+2, \dots$

Далее воспользуемся утверждением п. 1) леммы 1, заменив в нем  $x$  на  $\tilde{x}$ ,  $h$  на  $\tilde{h}$ ,  $m$  на  $N$ :

$$\begin{aligned} T_v(x-h) - T_v(\tilde{x}) &= T_v(\tilde{x} + \tilde{h}) - T_v(\tilde{x}) = \\ &= \tilde{h} \cdot \left( \frac{1 - 2^N v^N}{1 - 2v} - 2 \sum_{n=1}^N (2v)^{n-1} \tilde{x}_n \right) + v^N T_v(2^N \tilde{h}) = \\ &= (2^{-N} - h) \cdot \left( \frac{1 - 2^N v^N}{1 - 2v} - 2 \sum_{n=1}^{m-1} (2v)^{n-1} x_n - 2 \sum_{n=m+1}^{N-1} (2v)^{n-1} \right) + v^N T_v(2^N h). \end{aligned}$$

При  $h = 0$  из этого равенства получаем:

$$T_v(x) - T_v(\tilde{x}) = 2^{-N} \cdot \left( \frac{1 - 2^N v^N}{1 - 2v} - 2 \sum_{n=1}^{m-1} (2v)^{n-1} x_n - 2 \sum_{n=m+1}^{N-1} (2v)^{n-1} \right).$$

Вычитая из последнего равенства предпоследнее, находим:

$$T_v(x) - T_v(x-h) = h \cdot \left( \frac{1 - 2^N v^N}{1 - 2v} - 2 \sum_{n=1}^{m-1} (2v)^{n-1} x_n - 2 \sum_{n=m+1}^N (2v)^{n-1} \right) - v^N T_v(2^N h).$$

Отсюда, так как  $x_m = 1$ , получаем:

$$\begin{aligned} T_v(x) - T_v(x-h) &= h \cdot \left( \frac{1 - 2^N v^N}{1 - 2v} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2^{m+1} v^m - 2^{N+1} v^N}{1 - 2v} + 2^m v^{m-1} - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n \right) - v^N T_v(2^N h). \end{aligned}$$

Теперь, устремляя  $h$  к нулю и пользуясь соотношением  $v^N T_v(2^N h)/h \rightarrow 0$  из п. 1а), находим:

$$T'_v(x-0) = 1/(1-2v) + 2^m v^{m-1} (1-4v)/(1-2v) - 2 \sum_{n=1}^m (2v)^{n-1} x_n,$$

что и требовалось.

2) Из доказанных в п. 1) равенств следует, что  $T'_v(x-0) \neq T'_v(x+0)$  при  $0 < |v| < 1/2$ ,  $v \neq 1/4$  и двоично-рациональном  $x$ . Поэтому функция  $T_v$  не дифференцируема ни в одной двоично-рациональной точке.

Теорема доказана.  $\square$

**Пример.** С помощью доказанных в теореме формул можно, например, вычислить, что при  $v \in (0; 1/4)$  в точках  $x = 1/4$  и  $x = 3/4$  самый большой скачок производной  $T'_v(x+0) - T'_v(x-0) = 6 - 4\sqrt{2} \approx 0,343$  получится для  $v = 1/2 - \sqrt{2}/4 \approx 0,146$  (рис. 1).

## 6. ГЛОБАЛЬНЫЙ МАКСИМУМ

**6.1.** При  $v = 1/2$  точки глобальных и локальных экстремумов функции  $T_{1/2}(x) = T(x)$  нашёл Кахан. В частности, он доказал следующее утверждение [11, р. 54]:

**Теорема** (Кахан, 1959). *Множество точек, в которых функция Такаги достигает своего глобального максимума, равно  $4/3$ , есть множество точек, имеющих двоичную запись  $x = \dots, x_1x_2\dots x_n\dots$  и удовлетворяющих условию  $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$  для  $k = 0, 1, \dots$*

Изложение дальнейших результатов исследований локальных экстремумов и множеств уровня функции Такаги можно найти в обзорах [3], [4] и работе [14].

**6.2.** При  $v = 1/\sqrt{2}$  из результатов работы [12, Лемма 5] вытекает, что глобальный максимум функции  $T_v$  равен  $(2 + \sqrt{2})/3$ , и на отрезке  $[0; 1]$  достигается в двух точках:  $1/3$  и  $2/3$ .

**6.3.** Табор и Табор получили формулу для глобальных максимумов функций  $T_{v_n}$  на  $\mathbb{R}$  для некоторой последовательности  $\{v_n\}$ . С учетом наших обозначений, их результат [13, Theorem 3.1] может быть представлен так:

**Теорема** (Табор и Табор, 2009). *Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $v_n$  единственное положительное решение уравнения  $2v + 4v^2 + \dots + 2^n v^n = 1$ . Пусть  $C_v = 1/(1 - (4v - 1)^{\log_{2v} v})$  при  $v \in (1/4; 1/2)$ . Тогда*

- 1)  $v_1 = 1/2$ , последовательность  $\{v_n\}$  убывает и сходится к  $1/4$ .
- 2)  $\max_{x \in \mathbb{R}} T_{1/4}(x) = 1/2 = \lim_{v \rightarrow 1/4+0} C_v$ ;  $\max_{x \in \mathbb{R}} T_{1/2}(x) = 2/3 = \lim_{v \rightarrow 1/2-0} C_v$ .
- 3)  $\max_{x \in \mathbb{R}} T_{v_n}(x) = C_{v_n}$  для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**6.4.** Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема о достижении функциями  $T_v$  максимума в точке  $1/2$ .

**Теорема 4.** 1) При  $v \in [-1/2; 1/4]$  функция  $T_v$  в точке  $1/2$  имеет глобальный максимум, равный  $1/2$ .

2) При  $v \in (-1; -1/2) \cup (1/4; 1)$  функция  $T_v$  в точке  $1/2$  не имеет глобального максимума.

3) При  $v \in [0; 1/4]$  и целых  $n \geq 0$  функции

$$S_{v,n}(x) = \sum_{k=0}^n v^k T_0(2^k x)$$

в точке  $1/2$  имеют глобальный максимум, равный  $1/2$ .

*Доказательство.* 1) Рассмотрим отдельно случаи  $v \in [-1/2; 0)$  и  $v \in [0; 1/4]$ .

1а) При  $v \in [-1/2; 0)$  функция  $F_v(x) = T_0(x) + vT_0(2x)$  является неотрицательной на  $\mathbb{R}$ . Кроме того, из равенства (1), определяющего функцию  $T_v$ , получаем:

$$T_v(x) = T_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+1} F_v(2^{2k+1}x).$$

Отсюда, так как  $v < 0$ , а  $F_v(x) \geq 0$ , то  $T_v(x) \leq T_0(x) \leq 1/2$ . Поскольку  $T_v(1/2) = 1/2$ , то  $1/2$  — точка глобального максимума функции  $T_v$ .

1б) Пусть теперь  $v \in [0; 1/4]$ . Если  $x \in [0; 1]$ , то из представления (1) функции  $T_v$  и формулы (3) следуют соотношения:  $T_v(x) \leq T_{1/4}(x) = 2(x - x^2) \leq 1/2 = T_v(1/2)$ . Для остальных  $x$  неравенство  $T_v(x) \leq T_v(1/2)$  следует из периодичности функции  $T_v$ . Поэтому  $1/2$  — точка глобального максимума.



2) При  $v = 1/2$  из теоремы Кахана (см. п. 6.1) следует, что  $1/2$  не входит в число точек глобального максимума функции  $T_v(x) = T(x)$ .

При  $v \neq 1/2$ ,  $v \in (-1; -1/2) \cup (1/4; 1)$  достаточно показать, что для некоторого натурального  $N$  выполняется неравенство  $T_v(1/2 + 2^{-N}) > T_v(1/2)$ .

По лемме 1 при  $x = 1/2 = 0,1_2$  и  $m = 1$  имеем:

$$T_v(1/2 + 2^{-N}) = 2^{-N}((1 - 2^N v^N)/(1 - 2v) - 2) = 2^{-N}(4v - 1 - 2^N v^N)/(1 - 2v).$$

Следовательно, для  $v \in (-1; -1/2)$  условие  $T_v(1/2 + 2^{-N}) > T_v(1/2)$  будет выполняться при достаточно больших нечетных  $N$ ; а для  $v \in (1/4; 1)$  и  $v \neq 1/2$  это условие будет выполняться при всех достаточно больших натуральных  $N$ .

3) При  $v \in [0; 1/4]$  из определения функции  $S_{v,n}$  и уже доказанного утверждения пункта 1) имеем:  $S_{v,n}(x) \leq T_v(x) \leq 1/2 = S_{v,n}(1/2)$ . Значит, при таких  $v$  в точке  $1/2$  функции  $S_{v,n}$  имеют глобальный максимум.  $\square$

## 7. ВОГНУТОСТЬ НА ОТРЕЗКЕ $[0; 1]$

**7.1.** Имеет место следующее утверждение о вогнутости функций  $T_v$  на отрезке  $[0; 1]$ .

**Теорема 5.** *Функции  $T_v$  на отрезке  $[0; 1]$  вогнуты при  $v \in [0; 1/4]$  и не являются вогнутыми при  $v \in (-1; 0) \cup (1/4; 1)$ .*

*Доказательство.* 1) Покажем, что для любого  $v \in [0; 1/4]$  функция  $T_v$  вогнута, то есть при всех  $x, y \in [0; 1]$  и  $\alpha \in (0; 1)$  выполняется неравенство

$$T_v(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha T_v(x) + (1 - \alpha)T_v(y). \quad (6)$$

Так как  $T_v(x)$  есть поточечный предел функций  $S_{v,n}(x) = \sum_{k=0}^n v^k T_0(2^k x)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для доказательства вогнутости  $T_v$  достаточно доказать вогнутость функций  $S_{v,n}$  при всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Воспользуемся для этого индукцией по  $n$ .

При  $n = 0$  функция  $S_{v,n}(x) = T_0(x)$ , очевидно, вогнута на  $[0; 1]$ .

Пусть функция  $S_{v,n}$  вогнута на  $[0; 1]$ . Покажем, что  $S_{v,n+1}$  также вогнута на  $[0; 1]$ , то есть для всех  $x, y \in [0; 1]$  и  $\alpha \in (0; 1)$  выполняется неравенство

$$S_{v,n+1}(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha S_{v,n+1}(x) + (1 - \alpha)S_{v,n+1}(y). \quad (7)$$

Рассмотрим три случая: а)  $0 \leq x \leq y \leq 1/2$ ; б)  $1/2 \leq x \leq y \leq 1$ ; в)  $0 \leq x < 1/2 < y \leq 1$ .

а) Пусть  $0 \leq x \leq y \leq 1/2$ . Так как

$$S_{v,n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} v^k T_0(2^k x) = T_0(x) + v S_{v,n}(2x),$$

то соотношение (7) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} & T_0(\alpha x + (1 - \alpha)y) + v S_{v,n}(\alpha \cdot 2x + (1 - \alpha) \cdot 2y) \geq \\ & \geq \alpha T_0(x) + (1 - \alpha)T_0(y) + v(\alpha S_{v,n}(2x) + (1 - \alpha)S_{v,n}(2y)), \end{aligned}$$

это неравенство выполнено в силу вогнутости функций  $T_0$  и  $S_{v,n}$  на отрезке  $[0; 1]$ .

б) Пусть  $1/2 \leq x \leq y \leq 1$ . Тогда  $0 \leq 1 - y \leq 1 - x \leq 1/2$ . Заменив в неравенстве (7)  $x$  на  $1 - y$ ,  $y$  на  $1 - x$ ,  $\alpha$  на  $1 - \alpha$  и воспользовавшись тождеством  $S_{v,n+1}(t) = S_{v,n+1}(1 - t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), получим необходимое соотношение.

в) Рассмотрим оставшийся случай  $0 \leq x < 1/2 < y \leq 1$ . Не ограничивая общности, можно считать, что точка  $\alpha x + (1 - \alpha)y$  лежит на отрезке  $[0; 1/2]$ .

Подберем число  $\beta \in (0; 1)$  так, что  $\alpha x + (1 - \alpha)y = \beta x + (1 - \beta) \cdot 1/2$ . Для этого, очевидно, надо взять  $\beta = (1/2 - \alpha x - (1 - \alpha)y)/(1/2 - x)$ .

Поскольку  $y > 1/2$ , то  $\beta < (1/2 - \alpha x - (1 - \alpha) \cdot 1/2)/(1/2 - x) = \alpha$ .

В силу результата пункта а) функция  $S_{v,n+1}$  вогнута на отрезке  $[0; 1/2]$ , поэтому

$$S_{v,n+1}(\alpha x + (1 - \alpha)y) = S_{v,n+1}(\beta x + (1 - \beta) \cdot 1/2) \geq$$

$$\geq \beta S_{v,n+1}(x) + (1 - \beta)S_{v,n+1}(1/2) = S_{v,n+1}(1/2) - \beta(S_{v,n+1}(1/2) - S_{v,n+1}(x)).$$

Согласно п. 1) теоремы 4, при  $v \in [0; 1/4]$  выполнены неравенства  $S_{v,n+1}(x) \leq S_{v,n+1}(1/2)$  и  $S_{v,n+1}(y) \leq S_{v,n+1}(1/2)$ . Учитывая их, а также неравенство  $\beta < \alpha$ , получаем условие вогнутости функции  $S_{v,n+1}$ :

$$\begin{aligned} S_{v,n+1}(\alpha x + (1 - \alpha)y) &\geq S_{v,n+1}(1/2) - \alpha(S_{v,n+1}(1/2) - S_{v,n+1}(x)) = \\ &= \alpha S_{v,n+1}(x) + (1 - \alpha)S_{v,n+1}(1/2) \geq \alpha S_{v,n+1}(x) + (1 - \alpha)S_{v,n+1}(y). \end{aligned}$$

2) При  $v \in (-1; 0)$  функция  $T_v$  на отрезке  $[0; 1]$  не является вогнутой, поскольку  $T_v(1/4) = T_0(1/4) + vT_0(1/2) = 1/4 + v/2 < 1/4$ , а значит при  $x = 0$ ,  $y = 1/2$ ,  $\alpha = 1/2$  условие вогнутости (6) нарушается.

3) Остается показать, что при  $v \in (1/4; 1)$  функция  $T_v$  на отрезке  $[0; 1]$  не вогнута. Так как согласно п. 2) теоремы 4 точка  $1/2$  не является точкой глобального максимума, то при некотором  $x_0 \in [0; 1]$  будет  $T_v(x_0) > T_v(1/2)$ . Тогда  $T_v(1 - x_0) = T_v(x_0) > T_v(1/2)$ . Поэтому при  $x = x_0$ ,  $y = 1 - x_0$ ,  $\alpha = 1/2$  условие вогнутости (6) нарушается.

Что и требовалось доказать.  $\square$

**7.2.** Отметим также результат Табора и Табора [13, Corollary 2.1], которые установили, что при  $v \in [1/4, 1/2]$  функции  $T_v$  являются  $(1, \log_2(1/v))$  – полувывпуклыми, то есть удовлетворяют неравенствам

$$T_v\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{T_v(x) + T_v(y)}{2} + |x - y|^{\log_2(1/v)}; \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

## 8. ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Здесь мы проиллюстрируем представленные в работе результаты на примере функций  $T_v$  для  $v = 0,146$  и  $v = -0,64$ .

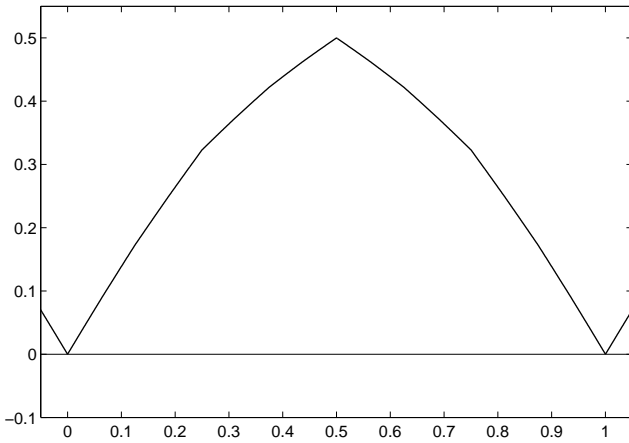


Рис. 1.

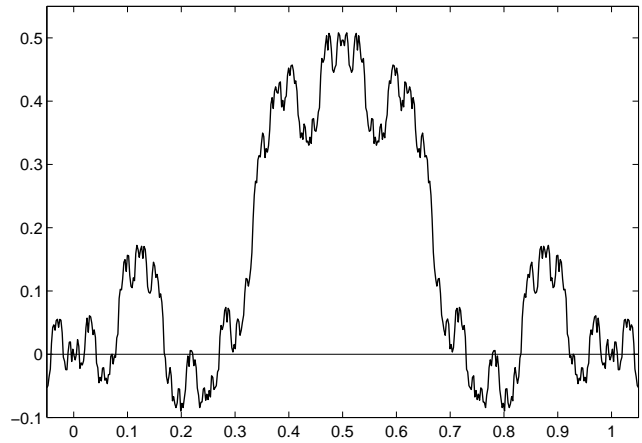


Рис. 2

Функция  $y = T_{0,146}(x)$  (ее график изображен на рис. 1) удовлетворяет условию Липшица на  $\mathbb{R}$  (см. теорему 2); не дифференцируема в двоично-рациональных точках и дифференцируема в остальных точках (см. п. 5.5); в точке  $1/2$  имеет глобальный максимум, равный  $1/2$  (см. теорему 4); вогнута на отрезке  $[0; 1]$  (см. теорему 5).

Функция  $y = T_{-0,64}(x)$  (см. ее график на рис. 2) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\log_2(25/16) \approx 0,644$  на  $\mathbb{R}$  (см. п. 3.1); не дифференцируема ни в одной точке из  $\mathbb{R}$  (см. п. 5.4); в точке  $1/2$  не имеет глобального максимума (см. теорему 4); не является вогнутой на отрезке  $[0; 1]$  (см. теорему 5).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Takagi *A simple example of a continuous function without derivative* // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. V. 1. 1903. P. 176–177.
2. M. Hata, M. Yamaguti *Takagi function and its generalization* // Japan J. Appl. Math. V. 1. 1984. P. 183–199.
3. P.C. Allaart, K. Kawamura *The Takagi function: a survey* // Real Anal. Exchange. V. 37, № 1. 2011/12. P. 1–54.
4. J.C. Lagarias *The Takagi Function and Its Properties* // In *RIMS Kokyuroku Bessatsu B34: Functions and Number Theory and Their Probabilistic Aspects*. Kyoto. B. 34. Aug. 2012. P. 153–189.
5. K.G. Spurrier *Continuous Nowhere Differentiable Functions*. Senior Thesis. South Carolina Honors College, South Carolina. 2004.
6. A. Shidfar, K. Sabetfakhri *On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Hölder Sense* // Amer. Math. Monthly. V. 93, № 5. 1986. P. 375–376.
7. de Rham G. *Sur un exemple de fonction continue sans dérivée* // Enseign. Math. V. 3. 1957. P. 71–72.
8. M. Hata, M. Yamaguti *Weierstrass's function and chaos* // Hokkaido Math. J. V. 12. 1983. P. 333–342.
9. N. Kôno *On generalized Takagi functions* // Acta Math. Hungar. V. 49. 1987. P. 315–324.
10. B.B. Mandelbrot *Fractal landscapes without creases and with rivers*. P. 247. In H.-O. Peitgen, D. Saupe Ed. *The Science of Fractal Images* N.Y.:Springer-Verlag 1988. 313 p.
11. J.P. Kahane *Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée* // Enseignement Math. V. 5. 1959. P. 53–57.
12. Галкина С. Ю. *О коэффициентах Фурье-Хаара от функций с ограниченной вариацией* // Мат. заметки. Т. 51, № 1. 1992. С. 42–54.
13. J. Tabor, J. Tabor *Takagi functions and approximate midconvexity* // J. Math. Anal. Appl. V. 356, № 2. 2009. P. 729–737.
14. P.C. Allaart *On the level sets of the Takagi–van der Waerden functions* // J. Math. Anal. Appl. V. 419. 2014. P. 1168–1180.

Галкин Олег Евгеньевич,  
 Институт информационных технологий, математики и механики ННГУ,  
 пр. Гагарина, 23,  
 603950, г. Нижний Новгород, Россия  
 E-mail: oleggalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна,  
 Институт информационных технологий, математики и механики ННГУ,  
 пр. Гагарина, 23,  
 603950, г. Нижний Новгород, Россия  
 E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru