О применении функционального анализа для создания новых численных методов в теории эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными

Иван Ремизов

НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород:

- кафедра фундаментальной математики (доц.),
- лаб. динамических систем и приложений (с.н.с.)
- научно-учебный коллектив «эволюционные полугруппы и их приложения» (рук.)

Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), г. Москва:

- НИО «Аппаратно-программные лабораторные комплексы» (в.н.с.)

Форум «Наука будущего — наука молодых»
Россия, г. Калининград
17 ноября 2021

О докладе

- Суммарный объём моих статей с соавторами по теме доклада - сотни страниц
- Времени на доклад сегодня - 15 минут
- Постараюсь рассказать мало, но понятно
- Вопросы можно задавать по ходу доклада, не дожидаясь конца выступления
- Ожидаю, что слушатели знакомы с началами теории дифференциальных уравнений с частными производными

Избранные публикации автора по теме доклада

- S. Mazzucchi, V. Moretti, I. Remizov, O. Smolyanov. *Mathematische Nachrichten* (в печати)
- О. Е. Галкин, И. Д. Ремизов. *Матем. заметки* (в печати)

- I.D. Remizov. *Potential Analysis* 52 (2020)
- А. В. Веденин, В. С. Воеводкин, В. Д. Галкин, Е. Ю. Каратецкая, И. Д. Ремизов, *Матем. заметки*, 108:3 (2020)
- I.D. Remizov. *Journal of Mathematical Physics*, 60:7 (2019)
- I.D. Remizov. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* 21:4 (2018)
- I.D. Remizov. *Applied Mathematics and Computation* 328 (2018)
- И.Д. Ремизов, М.Ф. Стародубцева. *Матем. заметки* 104:5 (2018)
- И. Д. Ремизов. *Дифференциальные уравнения*, 53:4 (2017)
- И. Д. Ремизов. *ДАН* 476:1 (2017)
- I.D. Remizov. *Journal of Functional Analysis*, 270:12 (2016)

Какие уравнения умеем решать

Даны функции $a, b, c, u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Требуется найти функцию $u \colon [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую задаче Коши:

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = a(x)u''_{xx} + b(x)u'_x(t,x) + c(x)u(x), t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Решение находим в виде $u(t,x) = \lim_{k\to\infty} u_k(t,x)$, где функции u_k называются черновскими аппроксимациями и ЯВНО выражаются через a, b, c, u_0.

Умеем решать аналогичные уравнения в следующих случаях:

- $x \in \mathbb{R}^n$
- x принадлежит риманову многообразию
- x принадлежит гильбертову пространству
- уравнение содержит производные по x сколь угодно высокого порядка, и в левой части стоит не u'_t, а iu'_t, то есть решаем уравнение Шрёдингера для большого класса гамильтонианов

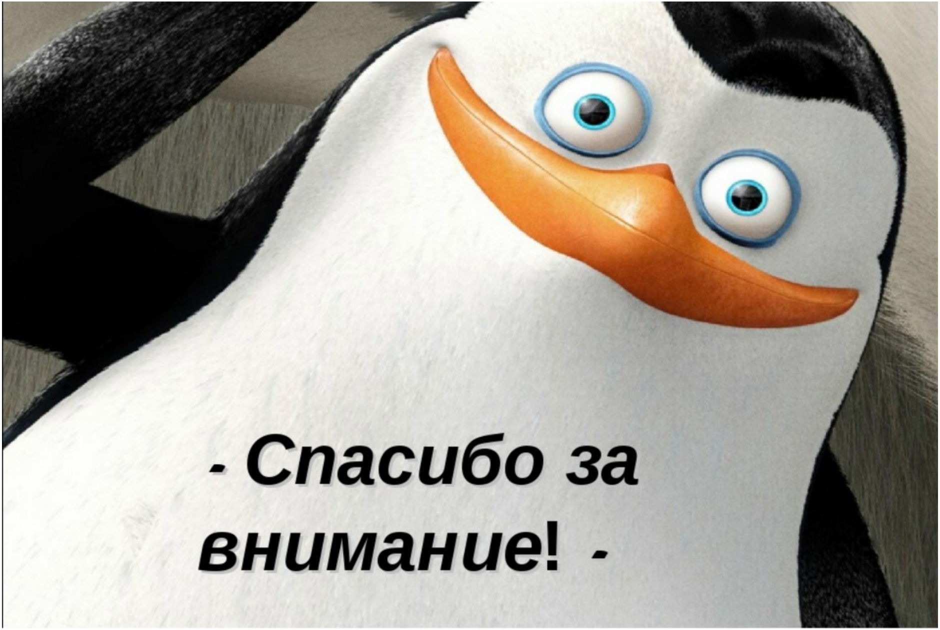
Для некоторых случаев умеем оценить скорость сходимости $u_k(t,x) \to u(t,x)$ в при $k \to \infty$. Ищем функции $u_k(t,x)$, дающие высокую скорость сходимости.

Каким образом здесь помогает функциональный анализ

Этапы построения u_k следующие:

- Переписываем исходное уравнение в виде $u'_t = Lu$, где L – линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами. Уравнение $u'_t = Lu$ называется эволюционным уравнением и выполняется в банаховом пространстве.
- Согласно общей теории C_0-полугрупп в банаховом пространстве получаем равенство $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$.
- Подбираем такую операторно-значную функцию S, что выполняется условие $S(t) = I + tL + o(t)$ при $t \to 0$, и ещё несколько технических условий. Функция S называется функцией Чернова и задана явной формулой, содержащей коэффициенты оператора L.
- По теореме Чернова получаем $e^{tL} = \lim_{k\to\infty} S(t/k)^k$. Обозначим $u_k(t,x) = (S(t/k)^k u_0)(x)$.

Таким образом мы доказали, что $u(t,x) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(t,x)$.



Email: ivremizov@yandex.ru