УДК 511.32

О взаимных расположениях двух неособых кривых степени 4

Н. Д. Пучкова (Россия, г. Нижний Новгород)
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: nataha1910@mail.ru

On the dispositions of two non-singular curves of degree 4

N. D. Puchkova (Russia, Nizhny Novgorod)
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
e-mail: nataha1910@mail.ru

В работе рассматривается задача топологической классификации кривых степени 8, распадающихся в произведение двух кривых степени 4.

1. Постановка задачи

Задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта. На данный момент известна классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

В данной работе исследуется взаимное расположение в вещественной проективной плоскости двух кривых степени 4 при некоторых условиях максимальности и общего положения. Именно, предполагается, что:

1. Эти две кривые являются M-кривыми.
2. Все точки пересечения этих кривых лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой.
3. Точек пересечения максимальное число, т. е. $4 \cdot 4 = 16$.
4. Точки пересечения попарно различны.

2. Тип пересечения ветвей «змея, обвивающаяся вокруг овала»

Введем тип пересечения ветвей, который назовём «змея, обвивающаяся вокруг овала» (рассмотрением пересечений этого типа ограничимся ввиду большого числа всех подлежащих исследованию взаимных расположений пересекающихся ветвей).

Пусть имеем овал и пересекающуюся с ним в 8 точках незамкнутую дугу без самопересечений, которую будем называть образующей дугой. Рассмотрим границу ε-окрестности этой дуги с таким малым ε, что эта граница пересекает овал в 16 попарно различных точках. Эту границу, которую будем называть "змеёй", будет овалом второй кривой, а такое взаимное расположение двух овалов – пересечением ветвей типа «змея, обвивающаяся вокруг овала».

В введённом типе пересечения ветвей "змею" будем считать овалом первой кривой (кривой с номером 1), а овал, вокруг которого она обвивается, – овалом второй кривой (кривой с номером 2). Оставшиеся три овала кривой номер 1 и три овала кривой номер 2, на которых нет точек пересечения, называются свободными. Так как рассматриваем M–кривые четвёртой степени, то овалы с одним номером лежат вне друг друга.

Занумеруем на овале кривой с номером 2 подряд 8 точек – точек пересечения овала со "змеёй". Тогда можно рассматривать перестановки 8-го порядка и тем самым перебирать все возможные взаимные расположения рассматриваемого типа.

Будем рассматривать только такие расположения, что
1) объединение пересекающихся овалов лежит в конечной части аффинной плоскости (т.е. не пересекает граничную окружность модели проективной плоскости);
2) дуга, соединяющая первые две точки пересечения, соответствующие первым двум числам из перестановки, лежит внутри овала с номером 2;
3) хотя бы один конец образующей дуги лежит в неориентируемой компоненте дополнения к модели кривой.

Нетрудно заметить, что для каждого расположения, отвечающего перестановке со вторым элементом 2, найдётся симметричное расположение, которому отвечает перестановка со вторым элементом 8. Применяя аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что достаточно рассмотреть только перестановки со вторым элементом, значение которого $\leqslant 5$, см. рис. 1.

Если двум перестановкам соответствуют гомеоморфные расположения кривых, то оставим из них ту, которая встречается раньше в лексикографическом порядке.

Сначала с помощью устранения точек пересечения докажем, что расположения, отвечающие некоторым перестановкам, не могут быть реализованы кривой степени 8: если при некотором устранении точек пересечения (такие устранения независимы в силу теоремы Брюзотти – см., например, [1]) получаем неособую кривую с таким расположением ветвей, которое не может быть реализовано неособой кривой степени 8 в силу известных фактов о топологии таких кривых, то и исходное расположение нереализуемо кривой степени 8. Например, кривая рис. 3, получаемая устранением точек пересечения на рис.2, имеет гнездо веса 3 и гнездо веса 2, поэтому расположение рис. 2 не может быть реализовано кривой степени 8.

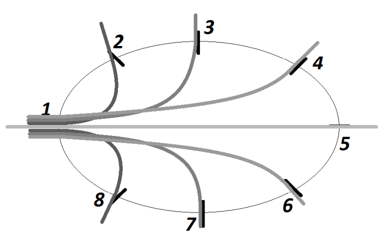

Рис. 1

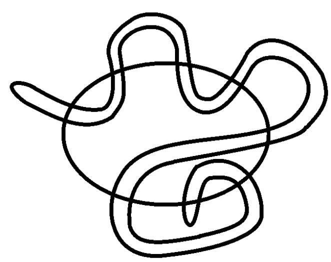

Рис. 2

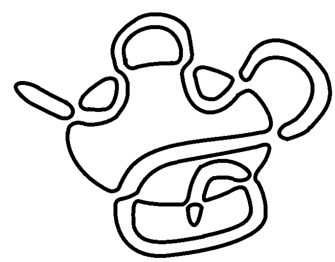

Рис. 3

После применения описанного приёма для дальнейшего исследования остаётся следующая 21 перестановка:

1. $(1,2,3,4,5,6,7,8)$	7. $(1,2,3,6,5,4,7,8)$	13. $(1,2,6,5,4,7,8,3)$	19. $(1,4,3,2,8,7,6,5)$
2. $(1,2,3,4,5,6,8,7)$	8. $(1,2,3,6,5,4,8,7)$	14. $(1,2,6,7,8,5,4,3)$	20. $(1,4,5,6,7,8,2,3)$
3. $(1,2,3,4,5,8,7,6)$	9. $(1,2,3,6,7,8,5,4)$	15. $(1,2,7,6,5,4,3,8)$	21. $(1,4,5,8,7,6,2,3)$
4. $(1,2,3,4,6,7,8,5)$	10. $(1,2,3,8,7,4,5,6)$	16. $(1,2,8,7,6,5,4,3)$	
5. $(1,2,3,4,7,6,5,8)$	11. $(1,2,4,5,6,7,8,3)$	17. $(1,4,3,2,6,7,8,5)$	
6. $(1,2,3,4,8,7,6,5)$	12. $(1,2,5,6,7,4,3,8)$	18. $(1,4,3,2,7,6,5,8)$	

Для каждой из этих перестановок перечисляются допустимые известными фактами о топологии неособых кривых степени 8 распределения шести свободных овалов между компонентами дополнения к пересекающимся овалам. Для каждой перестановки имеются около 100 таких попарно различных допустимых распределений.

Затем к расположениям из полученного списка топологических моделей взаимных расположений двух кривых степени 4 применялся метод Оревкова [2], основанный на сопоставлении изучаемому расположению косы. Для получения этих кос надо исследовать расположение изучаемой кривой относительно пучка прямых, удовлетворяющего некоторым условиям максимальности пересечения с кривой. Для того, чтобы изучаемое нами расположение двух кривых было реализуемо кривой степени 8, должны выполнятся некоторые необходимые условия на полученные косы из 8 нитей. Оревков предложил проверять выполнение неравенства Мурасуги-Тристрама (см. [2] стр. 796) и условия Фокса-Милнора (см. [2] стр. 784-785). Проверка этих условий проводилась мною с помощью программы М. Гущина для проверки выполнения неравенства Мурасуги-Тристрама и программы И. Борисова для проверки выполнения условия Фокса-Милнора.

Для расположений, отвечающих перестановкам 1, 3, 9, 10 и 14, найти пучки прямых с нужными свойствами не удалось. Для остальных перестановок рассмотренными методами не удалось запретить 4 расположения для перестановки с номером 2 (см. рис. 4 – 7), 4 расположения для перестановки с номером 15 (см. рис. 8 – 11) и ещё 4 расположений для перестановок под номером 5 (см. рис. 12), 7 (см. рис. 13), 12 (см. рис. 14) и 18 (см. рис. 15); остальные расположения удалось запретить.

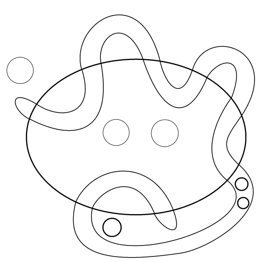
Рис. 4

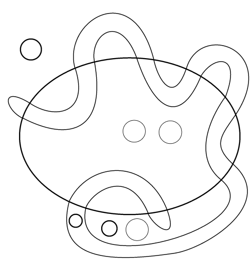
Рис. 5

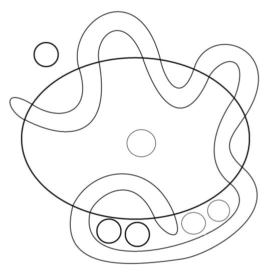
Рис. 6

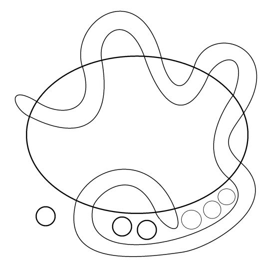
Рис. 7

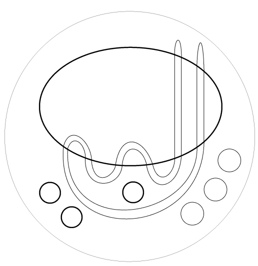
Рис. 8

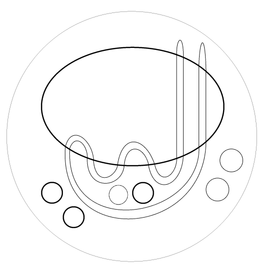
Рис. 9

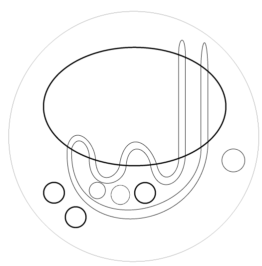
Рис. 10

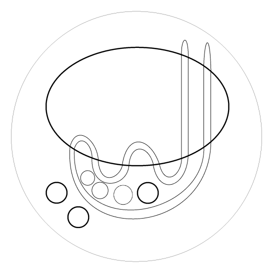
Рис. 11

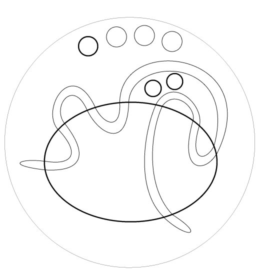
Рис. 12

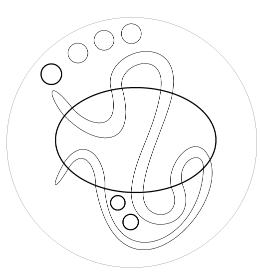
Рис. 13

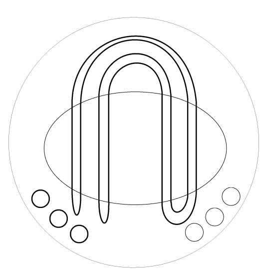
Рис. 14

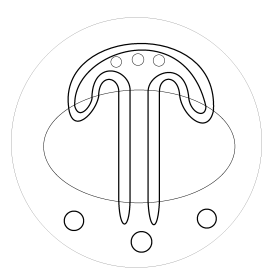
Рис. 15

3. Построения

Из незапрещённых расположений 10 удалось реализовать кривыми степени 8 с помощью удвоения кривой степени 2 в расположениях кривых степени 2 и степени 4, построенных Д. Гильбертом и Г.М. Полотовским (см. [3]). Покажем пример такой реализации. Расположение рис. 16, где кривая степени 4 нарисована более жирной линией, построено Гильбертом. Проведем 2 прямые l_1 и l_2, см. рис. 17. Рассмотрим кривую степени 2, которая определяется уравнением $\widetilde{C_2} = C_2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0$. Для достаточно малого ε она будет лежать близко к исходной кривой C_2 и пересекать ее в точках r_1, r_2, r_3, r_4 (видно из уравнения). Получим расположение кривых как на рис. 18.

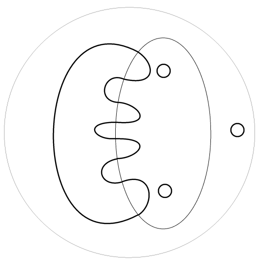

Рис. 16

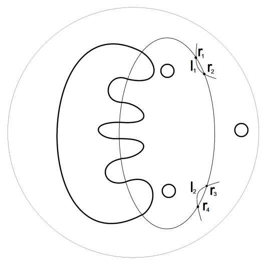

Рис. 17

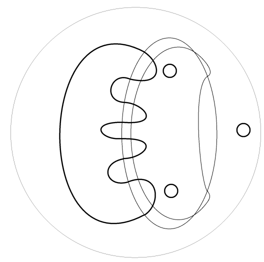

Рис. 18

Теперь с помощью малых изменений коэффициентов мы можем добиться возмущения простых двойных точек кривой $C_2 \cdot \tilde{C}_2 = 0$, как на рис. 19. Уравнение возмущённой кривой можно записать следующим образом: $\widetilde{C_4} = C_2 \cdot \widetilde{C_2} + \varepsilon_1 D_4 = 0$ для достаточно малого ε_1, где D_4 – некоторая кривая степени 4 без действительных точек.

Итак, мы получили взаимное расположение двух кривых степени 4. Если мы изобразим овал, выделенный более жирно, выпуклым, то получим рис. 20. Это пересечение двух кривых степени 4. Из рисунка видно, что оно отвечает перестановке с номером 1: (1,2,3,4,5,6,7,8).

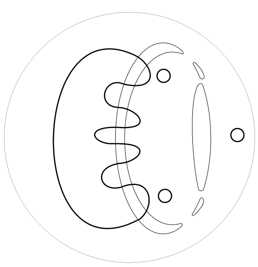

Рис. 19

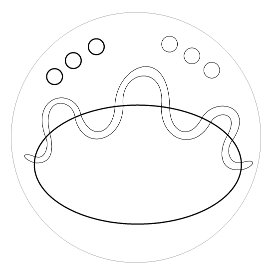

Рис. 20

Аналогично построены незапрещенные расположения для рис. 12, рис. 13, рис. 14, рис. 8 и рис. 15. Вопрос о реализуемости семи расположений рис. 4 – 7, рис. 8 – 11 остаётся открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Том 29. №4(178). С. 3–79.

2. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. 1999. Том 38. Vol.4. P. 779—810.

3. Полотовский Г. М. Каталог М-распадающихся кривых 6-го порядка // Докл. АН СССР. 1977. Том 236. Вып. 3. С.548–551.

––