Возмущения негиперболических автоморфизмов двумерного тора

В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина

НИУ ВШЭ НН

2022

Основные определения и обозначения

Пусть M^n– гладкое замкнутое (компактное без края) связное ориентируемое n-многообразие ($n \geq 1$) и p – гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма $f\colon M^n \to M^n$. Обозначим через W^s_p (W^u_p) устойчивое (неустойчивое) многообразие точки p, а через Ω_f неблуждающее множество диффеоморфизма f.

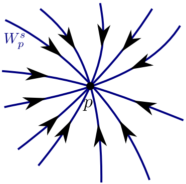


Рис.: p – сток ($n = 2$)

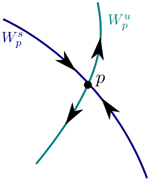


Рис.: p – седло ($n = 2$)

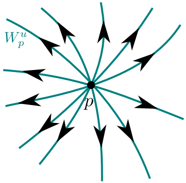
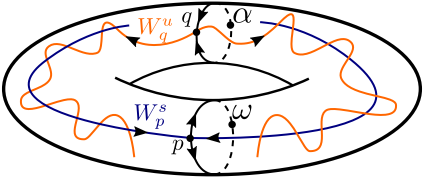


Рис.: p – источник ($n = 2$)

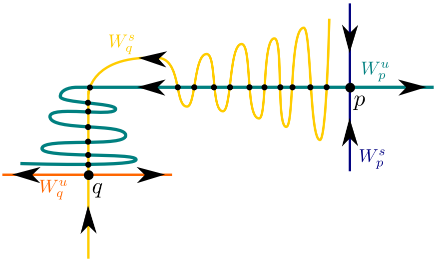
Диффеоморфизмы Морса-Смейла

Диффеоморфизм f называется **диффеоморфизмом Морса-Смейла**, если множество Ω_f конечно и гиперболично и многообразия W^s_p, W^u_q пересекаются трансверсально для любых периодических точек p, q.



Гетероклиническая орбита

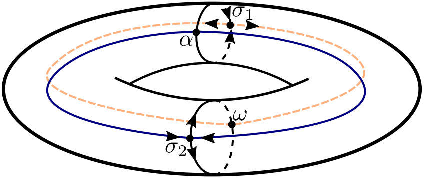
Если p, q – различные периодические седловые точки диффеоморфизма f, для которых $W^s_q \cap W^u_p \neq \emptyset$, то пересечение $W^s_q \cap W^u_p$ называется **гетероклиническим**. При этом в случае $\dim W^s_q \cap W^u_p = 0$, пересечение $W^s_q \cap W^u_p$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется **гетероклинической точкой**, а орбита гетероклинической точки называется **гетероклинической орбитой**. **Гетероклиническим множеством** диффеоморфизма f называется множество всех его гетероклинических точек.



Градиентно-подобные диффеоморфизмы

Диффеоморфизм Морса-Смейла f называется **градиентно-подобным**, если из условия $W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует, что $\dim W^u_p < \dim W^u_q$.

Известно, что диффеоморфизм Морса-Смейла является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда его гетероклиническое множество пусто.



Гетероклиническое множество

Пусть $n = 2$, $f\colon M^2 \to M^2$ – диффеоморфизм Морса-Смейла и p его седловая периодическая точка. Обозначим через $W_p^{\nu,i}$ $(i \in \{1,2\})$, $\nu \in \{u,s\}$, компоненту связности множества $W_p^{\nu} \setminus \{p\}$. Диффеоморфизм f является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда $W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i} = \emptyset$ для каждой пары седловых периодических точек p, q и любых $i, j \in \{1,2\}$.

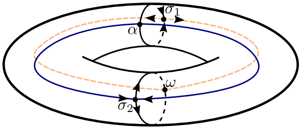


Рис.: Градиентно-подобный диффеоморфизм

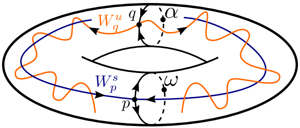


Рис.: Диффеоморфизм Морса-Смейла, который не является градиентно-подобным

Ориентируемое гетероклиническое множество

Согласно [1], гетероклиническое множество диффеоморфизма f называется **ориентируемым**, если для каждой пары седловых периодических точек p, q и любых $i, j \in \{1, 2\}$, для которых $W^{u,j}_p \cap W^{s,i}_q \neq \emptyset$, индекс пересечения кривых $W^{u,j}_p$ и $W^{s,i}_q$ один и тот же в любой точке $z \in W^{u,j}_p \cap W^{s,i}_q$.

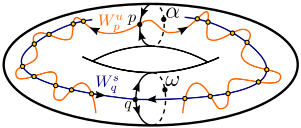


Рис.: Диффеоморфизм с неориентируемым гетероклиническим множеством

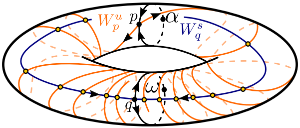


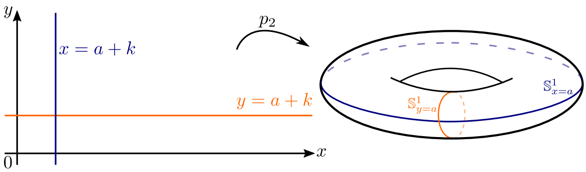
Рис.: Диффеоморфизм с ориентируемым гетероклиническим множеством

1. Безденежных А.Н., Гринес В.З. Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз.темат. сб. науч. тр. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1985. С. 139–152

Окружность и двумерный тор

Представим окружность $\mathbb{S}^1$ как фактор-группу $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}$ с естественной проекцией $p_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$ и двумерный тор $\mathbb{T}^2$ как фактор-группу $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с естественной проекцией $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$.

Пусть $a \in [0, 1)$. Обозначим через $\mathbb{S}^1_{x=a}$ ($\mathbb{S}^1_{y=a}$) окружность на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, которая является образом относительно естественной проекции $p_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ прямой $x = a + k$ $(y = a + k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.



Функция $h_\varepsilon(z)$

Зададим функцию $h_\varepsilon(z)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по следующему правилу:

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctan}\left(\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} tg(\pi z)\right), \ z \in (k - \dfrac{1}{2}; k + \dfrac{1}{2})\ (k \in \mathbb{Z}) \\ k + \dfrac{1}{2}, z = k + \dfrac{1}{2}\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases},$$

где $\varepsilon \in (-1, 1)$.

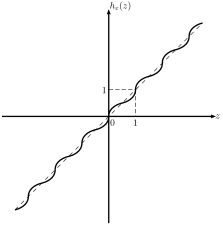


Рис.: $h_\varepsilon(z)$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$

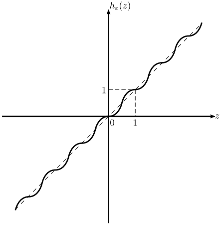


Рис.: $h_\varepsilon(z)$ при $\varepsilon \in (0, 1)$

Диффеоморфизмы окружности φ_ε и ψ_ε

Функция $h_\varepsilon(z)$ индуцирует диффеоморфизмы окружности $\varphi_\varepsilon\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ и $\psi_\varepsilon\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, зависящие от параметра $\varepsilon \in (-1, 1)$ и заданные формулами:

$$\varphi_\varepsilon : \bar{z} = h_\varepsilon(z) \pmod 1,$$

$$\psi_\varepsilon : \bar{z} = \frac{1}{2} h_\varepsilon(2z) \pmod 1.$$

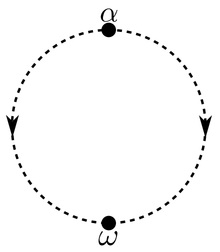


Рис.: φ_ε при $\varepsilon \neq 0$

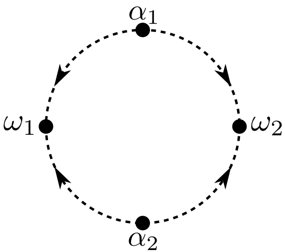


Рис.: ψ_ε при $\varepsilon \neq 0$

Определим диффеоморфизмы двумерного тора M_ε и L_ε как прямые произведения: $M_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \times \varphi_\varepsilon$, $L_\varepsilon = \psi_\varepsilon \times \varphi_\varepsilon$.

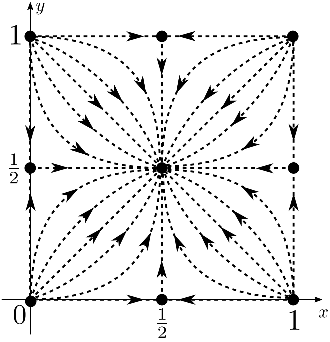


Рис.: M_ε при $\varepsilon \in (-1, 0)$

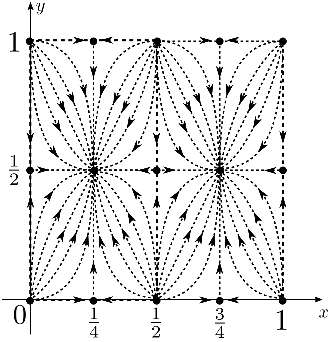


Рис.: L_ε при $\varepsilon \in (-1, 0)$

Алгебраический автоморфизм двумерного тора

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$, то есть A — целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда отображение $\hat{A} \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$\hat{A} : \begin{cases} \overline{x} = ax + by \pmod 1 \\ \overline{y} = cx + dy \pmod 1 \end{cases},$$

называется **алгебраическим автоморфизмом двумерного тора**.

Если собственные значения матрицы $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм $\hat{A}$ называется **гиперболическим**. В противном случае автоморфизм $\hat{A}$ называется **негиперболическим**.

Классификация негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора

Согласно работам [2] и [3], каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора посредством алгебраического автоморфизма задается в точности одной из следующих матриц:

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

2. S.Batterson. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 256 (Dec., 1979), pp. 395-403
3. С. В. Сидоров, Е. Е. Чилина, "О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора", Журнал СВМО, 23:3 (2021), 295–307

Действие непериодических автоморфизмов

Автоморфизмы $\hat{A}_1(m)$ и $\hat{A}_2(m)$ при $m \neq 0$ не являются периодическими отображениями. Каждая окружность $\mathbb{S}^1_{y=\gamma}$ $(\gamma \in [0,1))$ является инвариантной относительно $\hat{A}_1(m)$. Ограничение $\hat{A}_1(m)$ на каждую окружность $\mathbb{S}^1_{y=\gamma}$ действует как поворот на некоторый угол θ_γ. Инвариантными относительно $\hat{A}_2(m)$ являются окружности $\mathbb{S}^1_{y=0}$, $\mathbb{S}^1_{y=\frac{1}{2}}$ и объединения окружностей $\mathbb{S}^1_{y=\gamma} \cup \mathbb{S}^1_{y=1-\gamma}$ $(\gamma \in (0, \frac{1}{2}))$. Ограничение второй степени $\hat{A}_2(m)$ на каждую окружность $\mathbb{S}^1_{y=\gamma}$ действует как поворот на некоторый угол θ_γ.

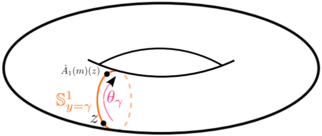


Рис.: Действие $\hat{A}_1(m)$ при $m \neq 0$

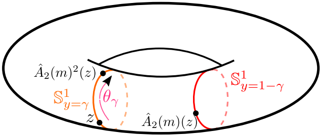


Рис.: Действие $\hat{A}_2(m)$ при $m \neq 0$

Основные результаты

Введём однопараметрические семейства диффеоморфизмов следующими формулами: $\mathcal{M}_{\varepsilon,A} = M_\varepsilon \circ \hat{A}$, $\mathcal{L}_{\varepsilon,A} = L_\varepsilon \circ \hat{A}$ где $\hat{A}$ – автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in GL(2,\mathbb{Z})$.

Теорема 1

Для любого $\varepsilon \in (-1,0) \cup (0,1)$ верны следующие утверждения:

1. При $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_1(m)}$ и $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из m гетероклинических орбит.
2. При $m = 2l - 1$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $\mathcal{L}_{\varepsilon,A_1(m)}$ и $\mathcal{L}_{\varepsilon,A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из $4m$ гетероклинических орбит.
3. Любая периодическая точка каждого диффеоморфизма из пункта 1 и 2 является периодической точкой того же периода относительно возмущаемого алгебраического автоморфизма.

При $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) неблуждающее множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ состоит из двух неподвижных гиперболических узлов и двух неподвижных гиперболических сёдел. Одно из инвариантных многообразий первого седла участвует в гетероклиническом пересечении с инвариантным многообразием второго седла и содержит $\frac{m}{2}$ орбит на каждой компоненте связности.

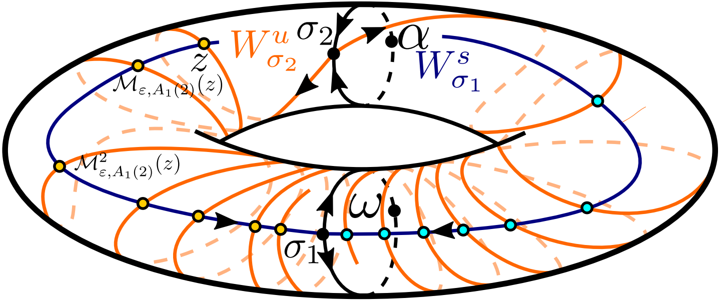


Рис.: Гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(2)}$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$

При $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) неблуждающее множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_2(m)}$ состоит из двух неподвижных гиперболических узлов и двух неподвижных гиперболических сёдел. Ограничение отображения $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_2(m)}$ на инвариантные многообразия сёдел не сохраняет ориентацию. Каждая компонента связности этих многообразий, участвующая в гетероклиническом пересечении, содержит точки каждой гетероклинической орбиты диффеоморфизма.

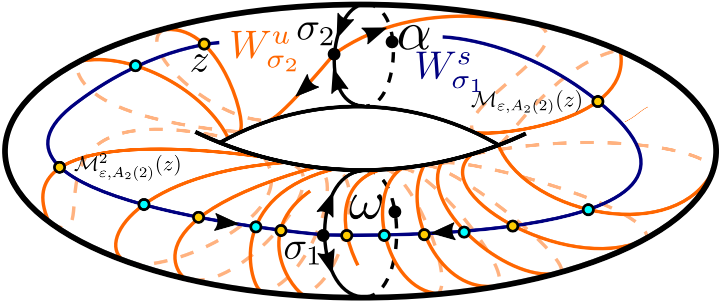


Рис.: Гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_2(2)}$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$

При $m = 2l - 1$ ($l \in \mathbb{N}$) неблуждающее множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\varepsilon, A_1(m)}$ состоит из двух неподвижных гиперболических узлов, двух гиперболических узлов периода два, двух неподвижных гиперболических сёдел и двух гиперболических сёдел периода два. Одно из инвариантных многообразий каждого неподвижного седла участвует в гетероклиническом пересечении с одним из инвариантных многообразий каждого периодического седла и содержит m орбит на каждой компоненте связности.

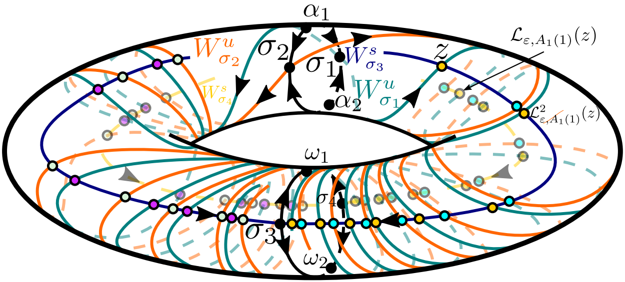


Рис.: Гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\varepsilon, A_1(1)}$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$

При $m = 2l - 1$ ($l \in \mathbb{N}$) неблуждающее множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\varepsilon, A_2(m)}$ состоит из четырёх неподвижных гиперболических узлов и четырёх гиперболических сёдел периода два. Каждая гетероклиническая орбита диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\varepsilon, A_2(m)}$ содержит точки на инвариантном многообразии каждого из четырёх сёдел.

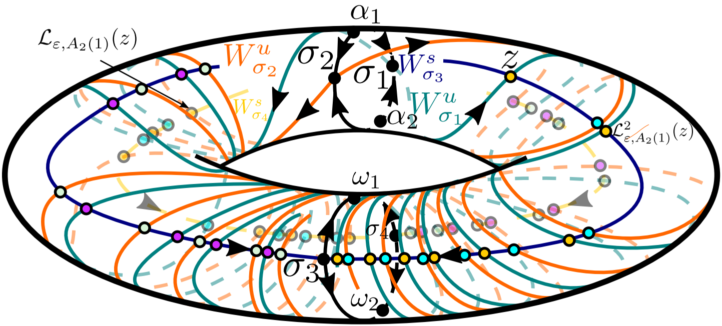


Рис.: Гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\varepsilon, A_2(1)}$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$

Семейства M_ε, K_ε и J_ε

Рассмотрим однопараметрические семейства M_ε, K_ε и J_ε диффеоморфизмов двумерного тора такие, что при $\varepsilon = 0$ они являются тождественными отображениями, а при $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ являются сдвигами на единицу времени потоков с гиперболическими состояниями равновесия, фазовые портреты которых в фундаментальной области действия группы $\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{R}^2$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$ представлены на рисунках.

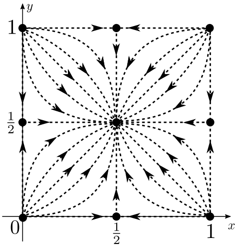


Рис.: M_ε

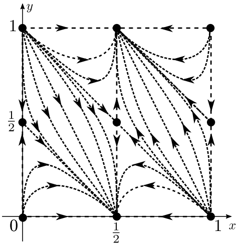


Рис.: K_ε

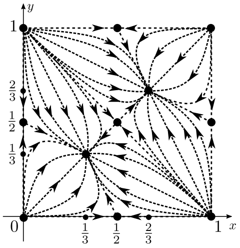


Рис.: J_ε

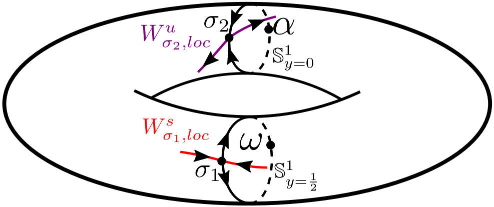
Основные результаты

Введём однопараметрические семейства диффеоморфизмов следующими формулами: $\mathcal{M}_{\varepsilon,A} = M_\varepsilon \circ \hat{A}$, $\mathcal{K}_{\varepsilon,A} = K_\varepsilon \circ \hat{A}$ и $\mathcal{J}_{\varepsilon,A} = J_\varepsilon \circ \hat{A}$, где $\hat{A}$ – автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in GL(2,\mathbb{Z})$.

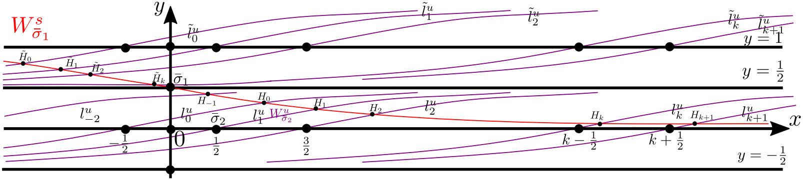
Теорема 2

Для любого $\varepsilon \in (-1,0) \cup (0,1)$ верны следующие утверждения:

1. Отображения $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_2(0)}$, $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_3}$, $\mathcal{K}_{\varepsilon,A_4}$, $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_5}$, $\mathcal{J}_{\varepsilon,A_6}$, $\mathcal{J}_{\varepsilon,A_7}$ являются градиентно-подобными диффеоморфизмами.
2. Любая периодическая точка каждого диффеоморфизма из пункта 1 является периодической точкой того же периода относительно возмущаемого алгебраического автоморфизма.



$W^u_{\sigma_2,loc}$
σ_2
α
$\mathbb{S}^1_{y=0}$
$W^s_{\sigma_1,loc}$
ω
σ_1
$\mathbb{S}^1_{y=\frac{1}{2}}$



$W^s_{\bar\sigma_1}$
y
x
$\tilde l^u_0$
$\tilde l^u_1$
$\tilde l^u_2$
$\tilde l^u_k$
$\tilde l^u_{k+1}$
$y=1$
$y=\frac{1}{2}$
$y=-\frac{1}{2}$
$\bar\sigma_1$
$\bar\sigma_2$
l^u_{-2}
l^u_0
l^u_1
$W^u_{\bar\sigma_2}$
l^u_2
l^u_k
l^u_{k+1}
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$
$k-\frac{1}{2}$
$k+\frac{1}{2}$

Теорема 2. Идея доказательства.