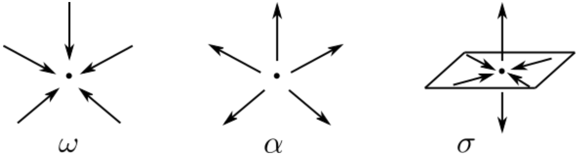
О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЯРНЫХ ПОТОКОВ

Н. С. Денисова

НИУ ВШЭ
Нижний Новгород

Основные определения

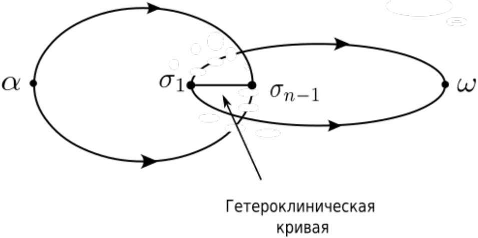
Гладкий поток $f^t : M^n \to M^n$, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n, называется градиентно-подобным, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, а инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально.



Число ind_p, равное размерности неустойчивого многообразия W^u_p гиперболического состояния равновесия p, называется его индексом Морса. Состояния равновесия, индекс Морса которого равен $n(0)$ называется источником (стоком), состояние равновесия, индекс Морса которого меньше n, но больше нуля, называется седловым.

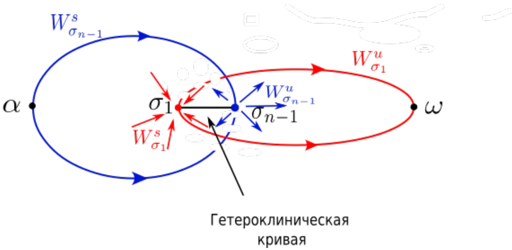
Основные определения

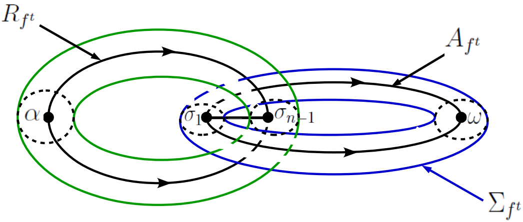
Пусть p, q — седловые состояния равновесия градиентно-подобного потока такие, что $W_p^u \cap W_q^s \neq \emptyset$. Пересечение $W_p^u \cap W_q^s$ называется гетероклиническим пересечением. Если пересечение $W_p^u \cap W_q^s$ одномерно, то каждая его компонента связности называется гетероклинической кривой.



В работе рассматривается класс $G(M^n)$ потоков на ориентируемом многообразии M^n размерности $n \geq 2$ такой, что для любого $f^t \in G(M^n)$ множество седловых состояний равновесия состоит ровно из двух точек, при этом при $n \geq 3$ седловые состояния равновесия имеют индексы Морса равные 1 и $(n-1)$ соответственно. Будем обозначать через ω (α) стоковое (источниковое) состояние равновесия потока $f^t \in G(M^n)$, через σ_1, σ_{n-1} — седловые состояния равновесия индексов 1, $(n-1)$ соответственно.

Цель: Оценка числа компонент связности гетероклинического пересечения и топологическая классификация.





Положим $A_{f^t} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega$, $R_{f^t} = W^s_{\sigma_{n-1}} \cup \alpha$, $V_{f^t} = M^n \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$.
Гладкое замкнутое подмногообразие $\Sigma_{f^t} \in V_{f^t}$, дифеоморфно $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$ и пересекается трансверсально с каждой траекторией потока f^t, лежащей в V_{f^t}.
И положим $L^s_{f^t} = W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}, L^u_{f^t} = W^u_{\sigma_{n-1}} \cap \Sigma_{f^t}$.

Топология многообразия M^n и гетероклинические пересечения потоков описывается следующим образом:

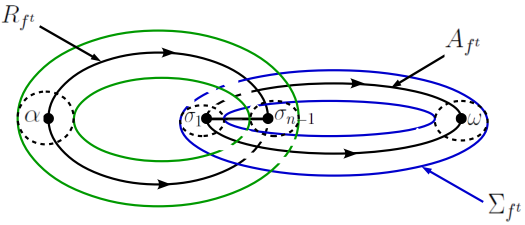
Теорема 1

Пусть M^n — ориентируемое замкнутое многообразие, допускающее полярный поток $f^t \in G(M^n)$ с двумя седловыми состояниями равновесия σ_1, σ_{n-1} индексов 1, $(n-1)$ соответственно. Тогда:

1. если $n = 2$, то многообразие M^n является тором и поток f^t не имеет гетероклинических пересечений;
2. если $n = 3$, то многообразие M^n является линзой $L_{p,q}$ и блуждающее множество потока f^t содержит не менее чем p гетероклинических кривых;
3. если $n \geq 4$, то многообразие M^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, при этом $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_{n-1}} = \emptyset$, а пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ либо пусто, либо состоит из конечного числа компонент связности.

Идея доказательства теоремы 1

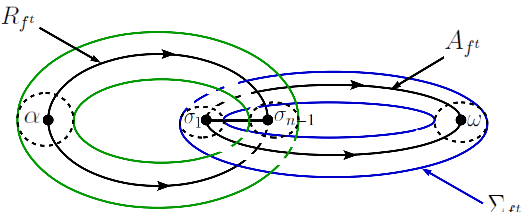
Доказательство пункта 1.$n = 2$



По условию, определяющему класс $G(M^n)$, инвариантные многообразия седловых состояний равновесия пересекаются трансверсально. В случае $n = 2$ размерность этих инвариантных многообразий равна единице, следовательно, их пересечение либо пусто, либо нульмерно. Если пересечение непусто, то в силу его инвариантности вместе с каждой точкой в пересечении содержится орбита этой точки, следовательно, пересечение одномерно. Полученное противоречие доказывает, что в случае $n = 2$ поток $f^t \in G(M^n)$ не имеет гетероклинических пересечений.

Доказательство пункта 2. $n = 3$

$A_{f^t} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega \approx S^1$, $R_{f^t} = W^s_{\sigma_{n-1}} \cup \alpha \approx S^1$



Лемма

A_{f^t} является аттрактором, R_{f^t} является репеллером, причем захватывающие окрестности V_a, V_r аттрактора A_{f^t} и репеллера R_{f^t} соответственно дифеоморфны $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Доказательство пункта 2.

Топологический тип линзы M^3 зависит только от гомотопического класса кривой $L^s_{f^t}$, где $L^s_{f^t} = W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}$ в полнотории Π_α. Возможны следующие варианты:

1) $L^s_{f^t}$ – параллель полнотория Π_α. Тогда M^3 есть сфера S^3, индекс пересечения $L^s_{f^t} \cap L^u_{f^t}$ равен единице. Минимальное число гетероклинических кривых в этом случае равно 1.

2) $L^s_{f^t}$ – меридиан полнотория Π_ω. Тогда M^3 гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, индекс пересечения $L^s_{f^t} \cap L^u_{f^t}$ равен нулю, и минимальное число гетероклинических кривых в этом случае равно 0.

3) $[L^s_{f^t}] = (p, q)$, $p^2 + q^2 \neq 0$. Тогда M^3 является линзой $L_{p,q}$, а минимальное число гетероклинических траекторий в этом случае равно p.

Доказательство пункта 3. $n \geq 4$ Нельсон Макс(2013):

Утверждение

Пусть $\varphi : S^1 \times S^{n-2} \to S^1 \times S^{n-2}$ гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм $\Phi : S^1 \times B^{n-1} \to S^1 \times B^{n-1}$ такой, что $\Phi|_{S^1 \times S^{n-2}} = \varphi$.

Следствие

Пусть M^n, $n \geq 4$—многообразие полученное склейкой двух копий $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$. Тогда M^n гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$.

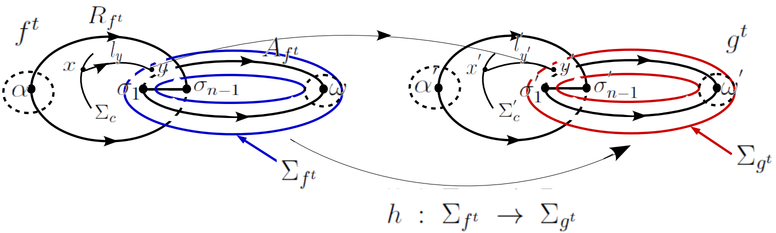
Доказательство пункта 3.

Каждое из многообразий $W^s_{\sigma_1}, W^u_{\sigma_{n-1}}$ пересекает Σ_{f^t} по компактному подмножеству, следовательно, пересечения $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}, W^u_{\sigma_{n-1}} \cap \Sigma_{f^t}$ являются замкнутыми подмногообразиями Σ_{f^t}. Тогда пересечение $P = (W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}) \cap \Sigma_{f^t}$ также является замкнутым гладким подмногообразием и, следовательно, состоит из конечного числа компонент связности. Пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ имеет структуру прямого произведения $P \times \mathbb{R}$, следовательно, также состоит из конечного числа компонент связности.

Классификация рассматриваемых потоков

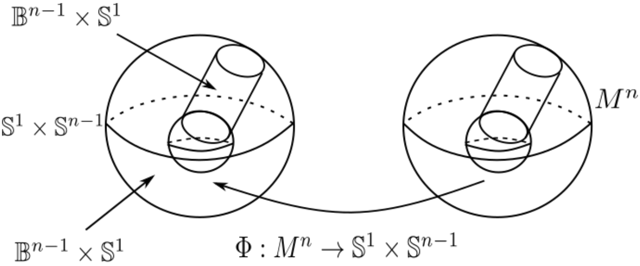
Теорема 2

Потоки $f^t, g^t \in G(M^n)$, $n \geq 3$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{g^t}$ такой, что $h(L^s_{f^t}) = L^s_{g^t}, h(L^u_{f^t}) = L^u_{g^t}$.



Определим гомеоморфизм $H : V_{f^t} \to V_{g^t}$ формулой $H(l_y \cap \Sigma_c) = l'_{h(y)} \cap \Sigma'_c$ для любой точки $y \in \Sigma_{f^t}, c \in (0, n)$.

Линзой $L_{p,q}$ называется многообразие, полученное склейкой полноториев Π_1 и Π_2 по диффеоморфизму $\varphi : \partial\Pi_1 \to \partial\Pi_2$, переводящему меридиан Π_1 полнотория в кривую $l \in \partial\Pi_2$, гомотопический класс которой определяется парой (p,q), где (p,q) — взаимно простые числа, $p > q > 0$. При этом гомотопический класс $(0,1)$ соответствует меридиану полнотория, а класс $(1,0)$ соответствует параллели. Трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$ и прямое произведение $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ двумерной сферы на окружность будем также считать линзами $L_{1,0}, L_{0,1}$ соответственно.


$\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$
$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$
M^n
$\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$
$\Phi : M^n \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$