

О возмущениях негиперболических автоморфизмов двумерного тора

В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина

НИУ ВШЭ НН

2022

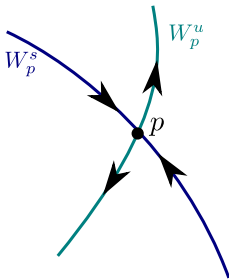
Основные определения и обозначения

Пусть M^n – гладкое замкнутое (компактное без края) связное ориентируемое n -многообразие ($n \geq 1$).

Точка $z \in M^n$ называется **периодической точкой** гомеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, если существует число $Per_f(z) \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{Per_f(z)}(z) = z$, но $f^k(z) \neq z$ для всех натуральных чисел $0 < k < Per_f(z)$. Число $Per_f(z)$ называется **периодом** периодической точки z .

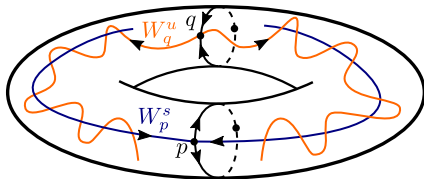
Основные определения и обозначения

Пусть p – гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$. Обозначим через W_p^s (W_p^u) устойчивое (неустойчивое) многообразие точки p , а через Ω_f неблуждающее множество диффеоморфизма f .



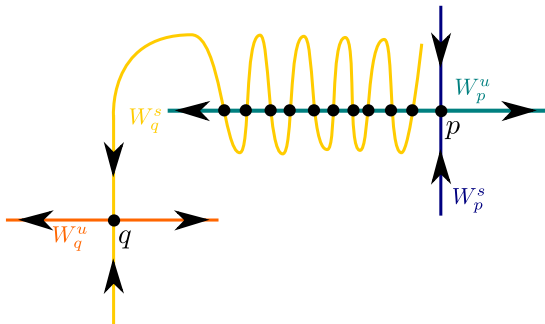
Диффеоморфизмы Морса-Смейла

Диффеоморфизм f называется **диффеоморфизмом Морса-Смейла**, если множество Ω_f конечно и гиперболично и многообразия W_p^s , W_q^u пересекаются трансверсально для любых периодических точек p , q .



Гетероклиническая орбита

Если p, q – различные периодические седловые точки диффеоморфизма f , для которых $W_q^s \cap W_p^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ называется **гетероклиническим**. При этом в случае $\dim W_q^s \cap W_p^u = 0$, пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется **гетероклинической точкой**, а орбита гетероклинической точки называется **гетероклинической орбитой**.



Градиентно-подобные диффеоморфизмы

Диффеоморфизм Морса-Смейла f называется **градиентно-подобным**, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_p^u < \dim W_q^u$.

Утверждение

Диффеоморфизм Морса-Смейла f является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда он не имеет гетероклинических точек.

Диффеоморфизм M_ε

Рассмотрим диффеоморфизм $M_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, который зависит от единственного параметра ε и задаётся формулой:

$M_\varepsilon : \bar{z} = g_\varepsilon(z)$, $\varepsilon \in (-1, 1)$, где

$$g_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z) \right), & z \in \left(k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}) \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Функция $g_\varepsilon(z)$

$$g_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z) \right), & z \in \left(k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}) \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

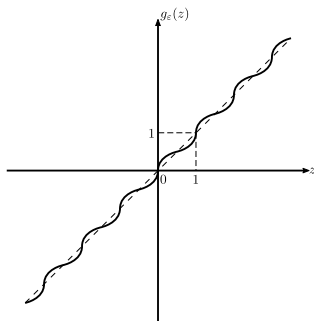
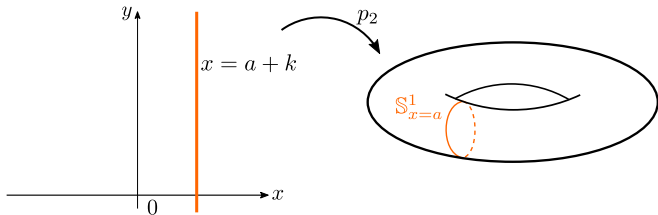


Рис.: График функции $g_\varepsilon(z)$ при фиксированном значении ε , лежащем в интервале $(-1, 0)$.

Окружность и двумерный тор

Представим окружность S^1 как фактор-группу группы \mathbb{R}^1 по группе $\mathbb{Z} : S^1 = \mathbb{R}^1 / \mathbb{Z}$ с естественной проекцией $p_1 : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ и двумерный тор \mathbb{T}^2 как фактор-группу группы \mathbb{R}^2 по целочисленной решётке $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \Gamma$ с естественной проекцией $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Пусть $a \in [0, 1)$. Обозначим через $S^1_{x=a}$ ($S^1_{y=a}$) окружность, которая является образом прямой $x = a + k$ ($y = a + k$) относительно проекции p_2 с плоскости \mathbb{R}^2 на двумерный тор \mathbb{T}^2 , где $k \in \mathbb{Z}$.



Отображение M_{ε, p_1}

Отображение M_ε индуцирует диффеоморфизм окружности $M_{\varepsilon, p_1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, заданный следующей формулой:

$$M_{\varepsilon, p_1} = p_1(M_\varepsilon(p_1^{-1}(z))),$$

где под $p_1^{-1}(z)$ подразумевается полный прообраз точки z .

При $\varepsilon = 0$ отображение является тождественным. При $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ отображение представляет собой диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из стока ω и источника α .

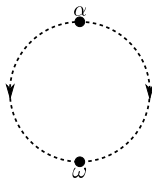


Рис.: Фазовый портрет диффеоморфизма M_{ε, p_1} при $\varepsilon \neq 0$.

Отображение M_{ε, p_2}

Рассмотрим отображение $M_{\varepsilon, p_2}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное следующей формулой:

$$M_{\varepsilon, p_2} = \begin{pmatrix} M_{\varepsilon, p_1} & 0 \\ 0 & M_{\varepsilon, p_1} \end{pmatrix}$$

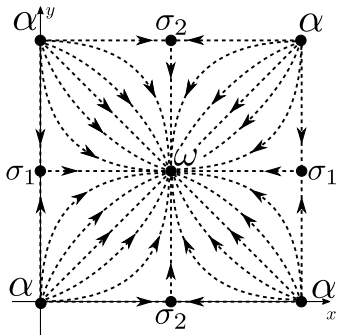


Рис.: Фазовый портрет диффеоморфизма M_{ε, p_2} при $\varepsilon \in (-1, 0)$.

Отображение M_{ε, p_2}

При $\varepsilon = 0$ отображение M_{ε, p_2} является тождественным. При $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ отображение M_{ε, p_2} является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из 4-х неподвижных точек: стока ω , источника α и седел σ_1 и σ_2 .

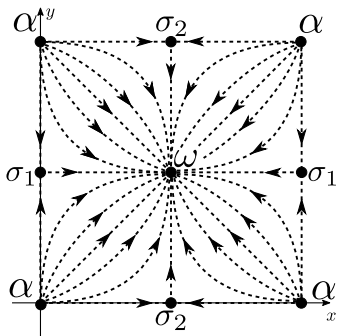


Рис.: Фазовый портрет диффеоморфизма M_{ε, p_2} при $\varepsilon \in (-1, 0)$.

Алгебраический автоморфизм двумерного тора

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$, то есть A — целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда отображение $\hat{A}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$\hat{A}: \begin{cases} \bar{x} = ax + by \pmod{1} \\ \bar{y} = cx + dy \pmod{1} \end{cases},$$

является **алгебраическим автоморфизмом двумерного тора**.

Если собственные значения матрицы $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм \hat{A} называется **гиперболическим**. В противном случае автоморфизм \hat{A} называется **негиперболическим**.

Классификация негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора

Из работ [1] и [2] следует:

Утверждение.

Каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора задан в точности одной из следующих матриц:

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (m \in \{0, 1, 2, \dots\});$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. S.Batterson. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 256 (Dec., 1979), pp. 395-403
2. С. В. Сидоров, Е. Е. Чилина, "О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора", Журнал СВМО, 23:3 (2021), 295–307

Периодический гомеоморфизм

Отличный от тождественного гомеоморфизм f замкнутой ориентируемой поверхности называется **периодическим**, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется **периодом** f .

Пусть f – гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности M^2 периода n . Положим $B_f = \{z \in M^2 \mid Per_f(z) < n\}$. Согласно работе [3], если f сохраняет ориентацию, то множество B_f конечно.

3. J. Nielsen, Die struktur periodischer transformationen von flachen, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15 (1937).

Классификация периодических автоморфизмов двумерного тора

Следствие.

Существует 6 классов сопряженности периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора, каждый из которых задан в точности одной из следующих матриц:

$$A_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_2(0)$, A_5 , A_6 , A_7 индуцируют сохраняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2, 4, 3 и 6 соответственно, а матрицы A_3 , A_4 индуцируют меняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2.

Периодические автоморфизмы

Автоморфизм $\hat{A}_2(0)$ является сохраняющим ориентацию отображением периода 2. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$ состоит из 4-х неподвижных точек – $p_2(0, 0)$, $p_2(0, \frac{1}{2})$, $p_2(\frac{1}{2}, 0)$ и $p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, где $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – естественная проекция.

Автоморфизм \hat{A}_3 не сохраняет ориентацию и является отображением периода 2. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_3}$ состоит из двух окружностей: $\mathbb{S}_{x=0}^1$ и $\mathbb{S}_{x=\frac{1}{2}}^1$.

Автоморфизм \hat{A}_5 является сохраняющим ориентацию отображением периода 4. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_5}$ состоит из 2-х неподвижных точек – $p_2(0, 0)$ и $p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, и одной орбиты периода два – $\{p_2(0, \frac{1}{2}), p_2(\frac{1}{2}, 0)\}$.

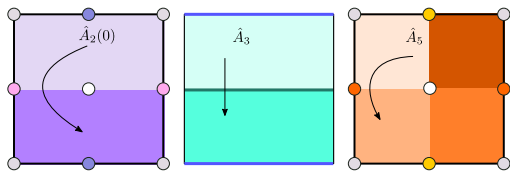


Рис.: Действие периодических автоморфизмов

Пусть $f_{\varepsilon, A} = M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}$, где \hat{A} – автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$.

Теорема 1

Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1 Отображения $f_{\varepsilon, A_2(0)}$, f_{ε, A_5} являются сохраняющими ориентацию градиентно-подобными диффеоморфизмами и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$, $\Omega_{f_{\varepsilon, A_5}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_5}$.
- 2 Отображение f_{ε, A_3} является меняющим ориентацию градиентно-подобным диффеоморфизмом и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_3}} \subset \mathcal{B}_{\hat{A}_3}$.
- 3 Неблуждающее множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A}}$ совпадает с неблуждающим множеством $\Omega_{M_{\varepsilon, p_2}}$ и $Per_{f_{\varepsilon, A}}(z) = Per_{\hat{A}}(z)$ для любого $z \in \Omega_{f_{\varepsilon, A}}$, где $A \in \{A_2(0), A_3, A_5\}$.

Теорема 2

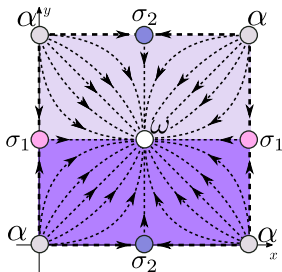
Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда диффеоморфизм $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ при $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) является диффеоморфизмом Морса-Смейла и его блуждающее множество содержит в точности m гетероклинических орбит.

Теорема 1. Отображение $f_{\varepsilon, A_2(0)}$. Идея доказательства.

$$\Omega_{M_{\varepsilon, p_2}} \subset \Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}}$$

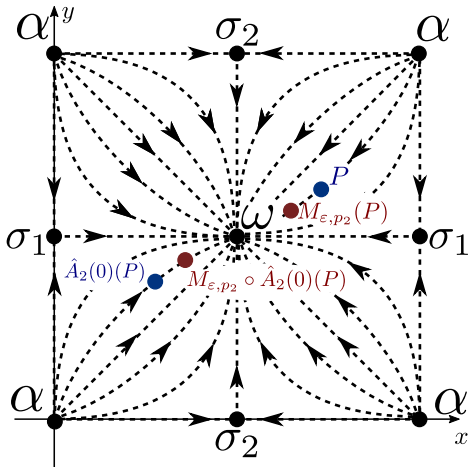
Так как $\Omega_{M_{\varepsilon, p_2}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$ и $f_{\varepsilon, A_2(0)} = M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}_2(0)$, то непосредственно проверяется, что неблуждающее множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}}$ содержит источник $\alpha = p_2(0, 0)$, сток $\omega = p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и 2 седла: $\sigma_1 = p_2(0, \frac{1}{2})$, $\sigma_2 = p_2(\frac{1}{2}, 0)$.

Докажем, что других точек неблуждающее множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}}$ не содержит.



$$M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}_2(0) = \hat{A}_2(0) \circ M_{\varepsilon, p_2}$$

Используя свойства диффеоморфизма M_{ε, p_2} и алгебраического автоморфизма $\hat{A}_2(0)$, доказывается, что отображения M_{ε, p_2} и $\hat{A}_2(0)$ коммутируют.



$$\Omega_{f_{\varepsilon}, A_2(0)} = \Omega_{M_{\varepsilon}, p_2}$$

Рассмотрим точку $P \in p_2([0, 1] \times (0, \frac{1}{2}))$. Так как $P \notin \Omega_{M_{\varepsilon}, p_2}$, то существует такая окрестность $U_P \subset p_2([0, 1] \times (0, \frac{1}{2}))$, что $M_{\varepsilon, p_2}^n(U_P) \cap U_P = \emptyset$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

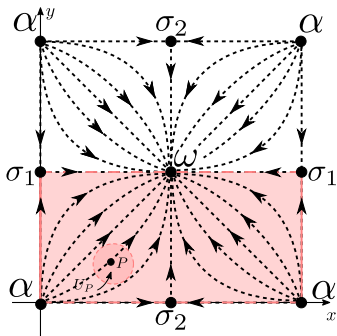


Рис.: Окрестность U_P

$$\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}} = \Omega_{M_{\varepsilon, p_2}}$$

Под действием $\hat{A}_2(0)$ окрестность U_P отображается в множество $p_2([0, 1] \times (\frac{1}{2}, 1))$, которое является инвариантным относительно действия M_{ε, p_2} . Следовательно, $M_{\varepsilon, p_2}^n \circ \hat{A}_2(0)(U_P) \cap U_P = \emptyset$.

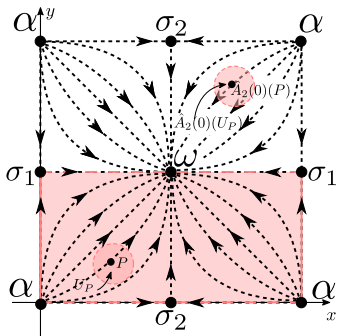


Рис.: Действие отображения $\hat{A}_2(0)$ на окрестность U_P

$$\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}} = \Omega_{M_{\varepsilon, p_2}}$$

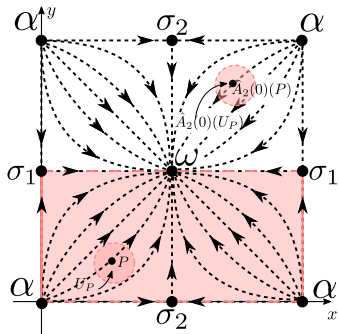
В силу того, что $M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}_2(0) = \hat{A}_2(0) \circ M_{\varepsilon, p_2}$ и $\hat{A}_2(0)$ – автоморфизм периода 2, то для $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) выполняется

$f_{\varepsilon, A_2(0)}^n(U_P) = M_{\varepsilon, p_2}^n(U_P)$. Следовательно, $f_{\varepsilon, A_2(0)}^n(U_P) \cap U_P = \emptyset$. Для

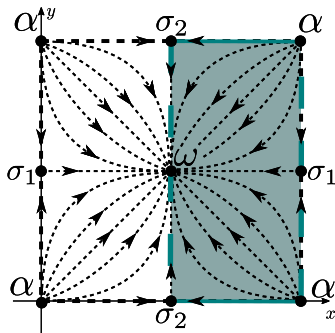
$n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) выполняется $f_{\varepsilon, A_2(0)}^n(U_P) = M_{\varepsilon, p_2}^n \circ \hat{A}_2(0)(U_P)$.

Следовательно, $f_{\varepsilon, A_2(0)}^n(U_P) \cap U_P = \emptyset$.

Таким образом, любая точка множества $p_2([0, 1] \times (0, \frac{1}{2}))$ является блуждающей.



$$\Omega_{M_{\varepsilon, p_2}} = \Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}}$$

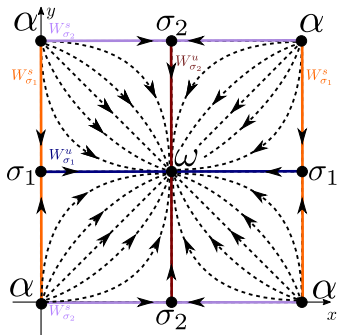


Для диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_2(0)}$ любая такая точка P , что $P \notin \Omega_{M_{\varepsilon, p_2}}$, является блуждающей. Точки неблуждающего множества $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}}$ совпадают с точками неблуждающего множества $\Omega_{M_{\varepsilon, p_2}}$.

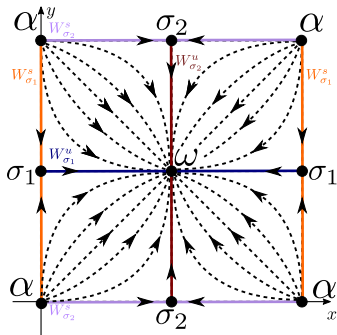
Через d обозначим метрику на двумерном торе \mathbb{T}^2 .

Доказывается, что $d(\hat{A}_2(0)(Q), \hat{A}_2(0)(Q')) = d(Q, Q')$ для любых $Q, Q' \in \mathbb{T}^2$. Тогда верно, что

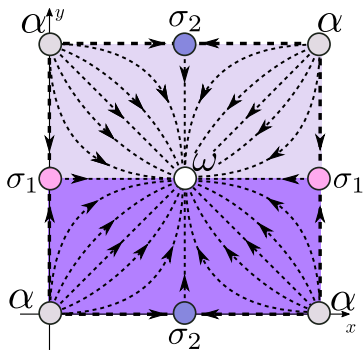
$d(f_{\varepsilon, A_2(0)}^n(Q), f_{\varepsilon, A_2(0)}^n(Q')) = d(M_{\varepsilon, p_2}^n(Q), M_{\varepsilon, p_2}^n(Q'))$. Следовательно, любая точка Q , принадлежащая инвариантному относительно M_{ε, p_2} многообразию неподвижной седловой точки σ_1 (σ_2), принадлежит инвариантному относительно $f_{\varepsilon, A_2(0)}$ многообразию неподвижной седловой точки σ_1 (σ_2).



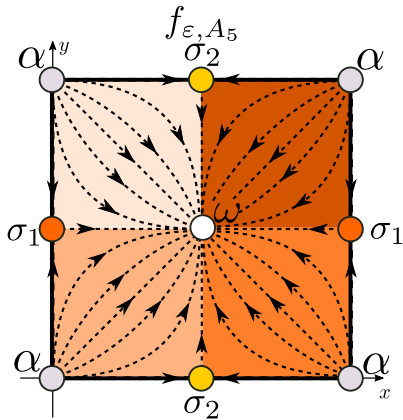
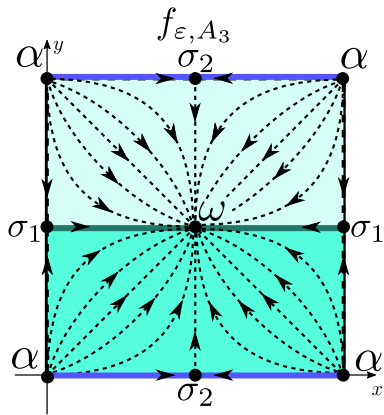
Инвариантные относительно диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_2(0)}$ многообразия точек σ_1 и σ_2 совпадают с инвариантными относительно диффеоморфизма M_{ε, p_2} многообразиями этих точек.



Таким образом, неблуждающее множество диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_2(0)}$ конечно и гиперболично, и диффеоморфизм $f_{\varepsilon, A_2(0)}$ не имеет гетероклинических точек. Следовательно, **диффеоморфизм $f_{\varepsilon, A_2(0)}$ является градиентно-подобным.**



Теорема 1. Отображения f_{ε, A_3} и f_{ε, A_5} . Идея доказательства.



Теорема 2

Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда диффеоморфизм $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ при $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) является диффеоморфизмом Морса-Смейла и его блуждающее множество содержит в точности m гетероклинических орбит.

Замечание

Для нечётных натуральных значений m неблуждающее множество диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ содержит негиперболические точки, следовательно, отображение $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ не является структурно-устойчивым.

Везде далее, будем полагать $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) и $\varepsilon \in (-1, 0)$. Для случая $\varepsilon \in (0, 1)$ доказательство аналогично.

Автоморфизм $\hat{A}_1(m)$.

Автоморфизм $\hat{A}_1(m)$ при $m \neq 0$ не является периодическим отображением. Каждая окружность $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1$ ($\gamma \in [0, 1)$) является инвариантной относительно действия $\hat{A}_1(m)$. Ограничение отображения $\hat{A}_1(m)$ на каждую окружность $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1$ действует как поворот на некоторый угол θ_γ .

Теорема 2. Идея доказательства.

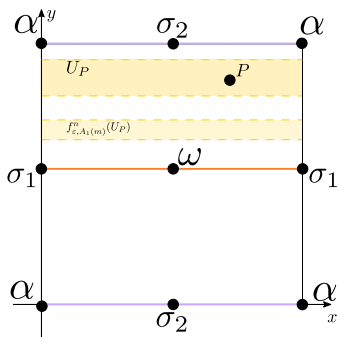
$$\Omega_{M_{\varepsilon, p_2}} \subset \Omega_{f_{\varepsilon, A_1(m)}}$$

Неблуждающее множество $\Omega_{M_{\varepsilon, p_2}}$ включено в множество неподвижных точек автоморфизма $\hat{A}_1(m)$. Так как $f_{\varepsilon, A_1(m)} = M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}_1(m)$, то непосредственно проверяется, что неблуждающее множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A_1(m)}}$ содержит источник $\alpha = p_2(0, 0)$, сток $\omega = p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и 2 седла: $\sigma_1 = p_2(0, \frac{1}{2})$, $\sigma_2 = p_2(\frac{1}{2}, 0)$.

Докажем, что других точек неблуждающее множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A_1(m)}}$ не содержит.

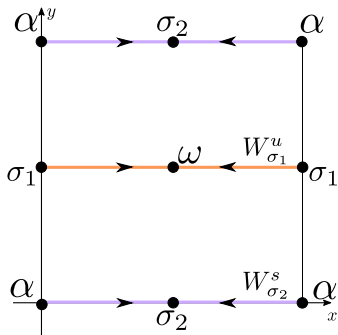
$\mathbb{T}^2 \setminus (\mathbb{S}_{y=0}^1 \cup \mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1)$ – множество блуждающих точек

Для любой точки $P \in \mathbb{T}^2 \setminus (\mathbb{S}_{y=0}^1 \cup \mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1)$ можно выбрать такую цилиндрическую окрестность $U_P = \mathbb{S}^1 \times (\alpha, \beta)$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $f_{\varepsilon, A_1(m)}^n(U_P) \cap U_P = \emptyset$. Следовательно, любая точка множества $\mathbb{T}^2 \setminus (\mathbb{S}_{y=0}^1 \cup \mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1)$ является блуждающей.



Инвариантные многообразия седловых точек

Ограничение отображения $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ на инвариантные окружности $\mathbb{S}_{y=0}^1$ и $\mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1$ действует как ограничение отображения M_{ε, p_2} . Отсюда следует, что множество $\mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1 \setminus \{\omega\}$ является неустойчивым многообразием точки σ_1 , а множество $\mathbb{S}_{y=0}^1 \setminus \{\alpha\}$ устойчивым многообразием точки σ_2 .

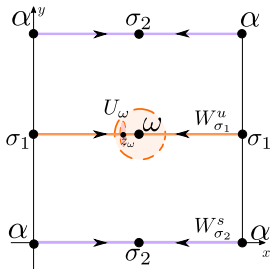


$W_{\sigma_1}^u \setminus \sigma_1$ – множество блуждающих точек

По теореме о локальной топологической классификации гиперболических неподвижных точек диффеоморфизма в некоторой окрестности U_ω диффеоморфизм $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ топологически сопряжён с линейным отображением $\tilde{A}_\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданным матрицей

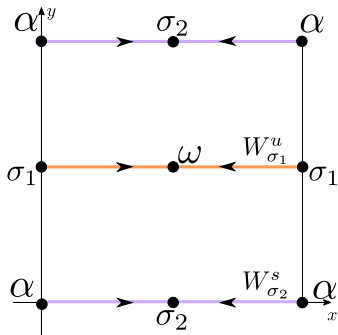
$$A_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Следовательно, для любой точки } z_\omega \in U_\omega \setminus \{\omega\}$$

существует такая окрестность U_{z_ω} , что $f_{\varepsilon, A_1(m)}^n(U_{z_\omega}) \cap U_{z_\omega} = \emptyset$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как для любой точки $z \in W_{\sigma_1}^u \setminus \sigma_1$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f_{\varepsilon, A_1(m)}^n(z) \in U_\omega$, то любая точка множества $W_{\sigma_1}^u \setminus \sigma_1$ является блуждающей.



$$\Omega_{f_{\varepsilon, A_1(m)}} = \Omega_{M_{\varepsilon, p_2}}$$

Следовательно, неблуждающее множество диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ конечно и гиперболично. Неустойчивое многообразие точки σ_1 не пересекается с устойчивым многообразием точки σ_2 .

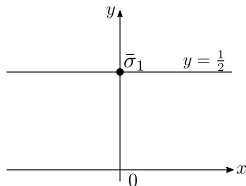


Асимптотическое поведение устойчивого многообразия точки σ_1 на накрывающем пространстве \mathbb{R}^2

Рассмотрим отображение $\hat{f}_{\varepsilon, A_1(m)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое является накрывающим для отображения $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ и задаётся формулой

$$\hat{f}_{\varepsilon, A_1(m)} := \begin{cases} x_n = g_\varepsilon(x_{n-1} + my_{n-1} - \frac{m}{2}) \\ y_n = g_\varepsilon(y_{n-1}) \end{cases}$$

Рассмотрим седловую неподвижную точку диффеоморизма $\hat{f}_{\varepsilon, A_1(m)}$, координаты которой $(0, \frac{1}{2})$. Обозначим её через $\bar{\sigma}_1$.



Асимптотическое поведение устойчивого многообразия точки σ_1 на накрывающем пространстве \mathbb{R}^2

Отображение $\hat{f}_{\varepsilon, A_1(m)} \in C^1$, следовательно, по теореме Адамара-Перрона локально устойчивое многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ седловой точки $\bar{\sigma}_1$ является гладкой кривой класса C^1 . Из определения гладкой кривой и отрицательности тангенса угла наклона касательной к кривой $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ в точке $\bar{\sigma}_1$ следует, что локальное устойчивое многообразие $W_{loc}^s(\bar{\sigma}_1)$ точки $\bar{\sigma}_1$ является графиком некоторой строго убывающей функции

$$y = g_s(x), \quad g_s(x) \in C^1.$$

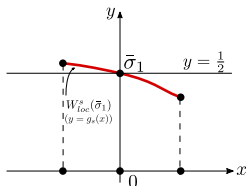
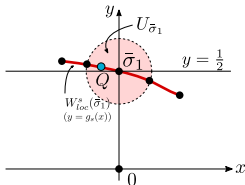


Рис.: Локальное устойчивое многообразие $W_{loc}^s(\bar{\sigma}_1)$ точки $\bar{\sigma}_1$

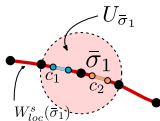
Асимптотическое поведение устойчивого многообразия точки σ_1 на накрывающем пространстве \mathbb{R}^2

По теореме о локальной топологической классификации гиперболических неподвижных точек диффеоморфизма в некоторой окрестности $U_{\bar{\sigma}_1}$ точки $\bar{\sigma}_1$ диффеоморфизм $\hat{f}_{\varepsilon, A_1(m)}$ топологически сопряжён с линейным отображением $\tilde{A}_{\bar{\sigma}_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданным матрицей $A_{\bar{\sigma}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

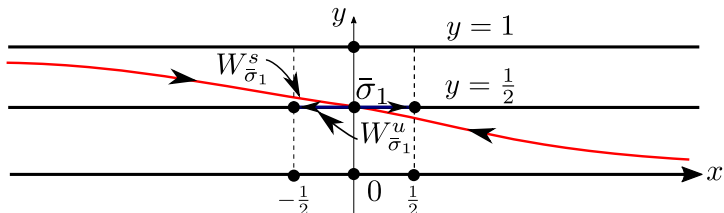
Таким образом, можно описать поведение произвольной точки Q , лежащей на многообразии $W_{loc}^s(\bar{\sigma}_1)$ в окрестности $U_{\bar{\sigma}_1}$ под действием отображения $\hat{f}_{\varepsilon, A_1(m)}$.



Асимптотическое поведение устойчивого многообразия точки σ_1 на накрывающем пространстве \mathbb{R}^2



Так как известно поведение точек в окрестности $U_{\bar{\sigma}_1}$, то итерируя фундаментальные области c_1 и c_2 действия диффеоморфизма $\hat{f}_{\varepsilon, A_1(m)}$ на компонентах связности устойчивого многообразия $W_{\bar{\sigma}_1}^s$, доказывается, что многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ является графиком некоторой непрерывной, строго убывающей функции, определённой на \mathbb{R} и стремящейся к $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$ и к $y = 1$ при $x \rightarrow -\infty$.

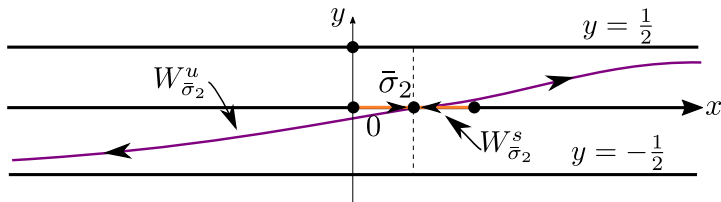


Асимптотическое поведение неустойчивого многообразия точки σ_2 на накрывающем пространстве \mathbb{R}^2

Рассмотрим накрывающее для диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ отображение $\hat{f}'_{\varepsilon, A_1(m)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое задаётся формулой

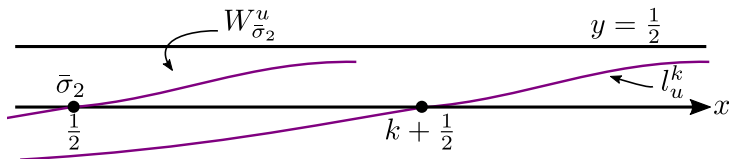
$$\hat{f}'_{\varepsilon, A_1(m)} := \begin{cases} x_n = g_\varepsilon(x_{n-1} + my_{n-1}) \\ y_n = g_\varepsilon(y_{n-1}) \end{cases}$$

и для которого точка с координатами $(\frac{1}{2}, 0)$ является седловой неподвижной точкой. Обозначим её через $\bar{\sigma}_2$. По аналогии доказывается, что многообразие $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ является графиком некоторой непрерывной, строго возрастающей функции, определённой на \mathbb{R} и стремящейся к $y = \frac{1}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$ и к $y = -\frac{1}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$.



Исследование гетероклинических орбит дiffeоморфизма $f_{\varepsilon, A_1}(m)$ на накрытии

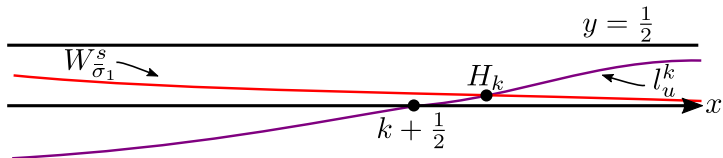
Через каждую точку $(k + \frac{1}{2}, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) проходит кривая, конгруэнтная кривой $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ относительно p_2 . Обозначим её через l_u^k . Каждая кривая l_u^k представляет собой график некоторой непрерывной, строго возрастающей функции, определённой на \mathbb{R} и стремящейся к $y = -\frac{1}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$ и к $y = \frac{1}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$.



Исследование гетероклинических орбит дiffeоморфизма $f_{\varepsilon, A_1}(m)$ на накрытии

Из асимптотического поведения кривых следует, что многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ пересекает кривую l_u^k строго в одной точке, которую обозначим через H_k . При этом $H_k \in \mathbb{R} \times (0, \frac{1}{2})$.

Так как касательные в точке H_k к кривым l_u^k и $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ не совпадают, то многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ трансверсально пересекает каждую кривую l_u^k ($k \in \mathbb{Z}$).

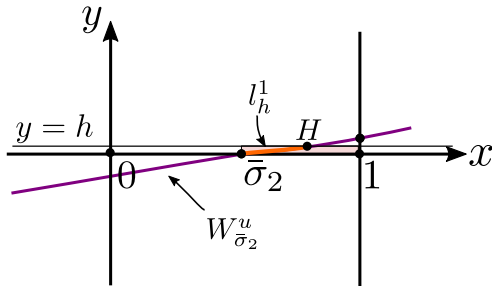


Исследование гетероклинических орбит дiffeоморфизма $f_{\varepsilon, A_1}(m)$ на накрытии

Обозначим орбиту точки H_k относительно $\hat{f}_{\varepsilon, A_1}(m)$ через \mathcal{O}_{H_k} .

Пусть $(1, \bar{h})$ – координаты точки пересечения многообразия $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ с прямой $x = 1$. Положим $h = \min\{\bar{h}, \frac{1}{2m}\}$. Через H обозначим точку пересечения многообразия $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ с прямой $y = h$. Дугу многообразия $W_{\bar{\sigma}_2}^u$, заключенную между точками $\bar{\sigma}_2$ и H , обозначим через l_h^1 .

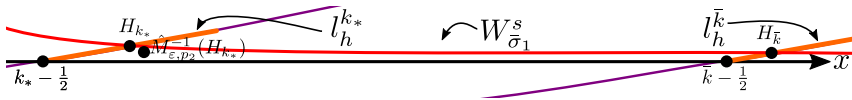
Через l_h^k обозначим дугу, конгруэнтную дуге l_h^1 и содержащую точку $(k + \frac{1}{2}, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Исследование гетероклинических орбит диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1}(m)$ на накрытии

Так как многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ является графиком некоторой убывающей функции, стремящейся к $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то существует такое значение \bar{x} , что на луче $(\bar{x}, +\infty)$ многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ лежит ниже прямой $y = h$.

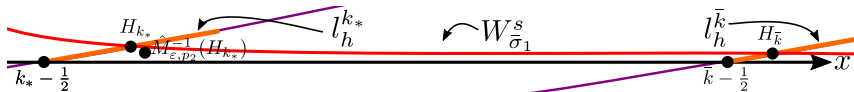
Пусть $k_* > \bar{x}$ и $k_* \in \mathbb{Z}$, тогда $H_{k_*} \in I_h^{k_*}$. Обозначим точку $\hat{f}_{\varepsilon, A_1}(m)(H_{k_*})$ через $H_{\bar{k}}$. Оценив координаты точки $H_{\bar{k}}$, получаем, что $\bar{k} = k_* + \frac{m}{2}$.



Исследование гетероклинических орбит диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ на накрытии

Таким образом, под действием отображения $\hat{f}_{\varepsilon, A_1(m)}$ точка H_{k_*} итерируется на дугу вида $I_h^{k_* + \frac{m}{2}}$, при этом многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ пересекается с каждой дугой I_h^k .

Следовательно, существует в точности $\frac{m}{2}$ попарно непересекающихся орбит \mathcal{O}_{H_k} ($k \in \mathbb{Z}$).

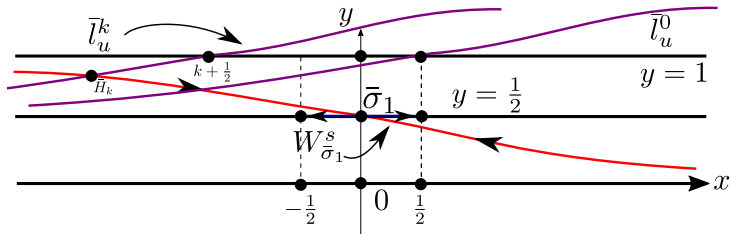


Исследование гетероклинических орбит диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1}(m)$ на накрытии

Кривую, конгруэнтную $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ и содержащую точку $(k + \frac{1}{2}, 1)$ ($k \in \mathbb{Z}$), обозначим через \bar{l}_u^k .

Из асимптотического поведения кривых следует, что многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ пересекает кривую \bar{l}_u^k строго в одной точке, которую обозначим через \bar{H}_k . При этом $\bar{H}_k \in \mathbb{R} \times (\frac{1}{2}, 1)$.

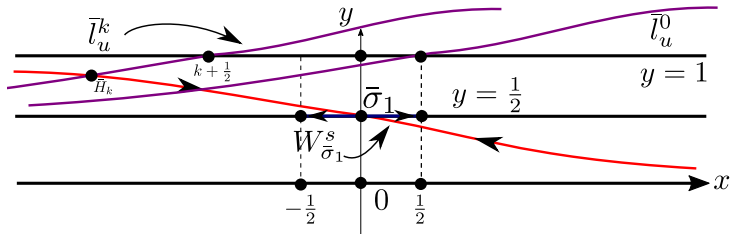
Так как касательные в точке \bar{H}_k к кривым \bar{l}_u^k и $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ не совпадают, то многообразие $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ трансверсально пересекает каждую кривую \bar{l}_u^k ($k \in \mathbb{Z}$).



Исследование гетероклинических орбит диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1}(m)$ на накрытии

Обозначим через $\mathcal{O}_{\bar{H}_k}$ орбиту точки \bar{H}_k относительно действия отображения $\hat{f}_{\varepsilon, A_1}^{-1}$.

Аналогично доказывается, что существует в точности $\frac{m}{2}$ попарно непересекающихся орбит $\mathcal{O}_{\bar{H}_k}$ ($k \in \mathbb{Z}$).



$f_{\varepsilon, A_1}(m)$ – диффеоморфизм Морса-Смейла

Неблуждающее множество диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1}(m)$ конечно, гиперболично.

На накрытии устойчивое многообразие $W_{\sigma_1}^s$, трансверсально пересекаясь с кривыми, конгруэнтными неустойчивому многообразию $W_{\sigma_2}^u$ относительно p_2 , образует m гетероклинических орбит. Парно эти орбиты не конгруэнтны, следовательно, устойчивое многообразие $W_{\sigma_1}^s$, пересекаясь с неустойчивым многообразием $W_{\sigma_2}^u$, образует в точности m гетероклинических орбит. Другие гетероклинические пересечения отсутствуют.

Следовательно, диффеоморфизм $f_{\varepsilon, A_1}(m)$ является диффеоморфизмом Морса-Смейла и его блуждающее множество содержит в точности m гетероклинических орбит.

Пусть $f_{\varepsilon, A} = M_{\varepsilon, p_2} \circ \hat{A}$, где \hat{A} – автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$.

Теорема 1

Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1 Отображения $f_{\varepsilon, A_2(0)}$, f_{ε, A_5} являются сохраняющими ориентацию градиентно-подобными диффеоморфизмами и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$, $\Omega_{f_{\varepsilon, A_5}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_5}$.
- 2 Отображение f_{ε, A_3} является меняющим ориентацию градиентно-подобным диффеоморфизмом и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_3}} \subset \mathcal{B}_{\hat{A}_3}$.
- 3 Неблуждающее множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A}}$ совпадает с неблуждающим множеством $\Omega_{M_{\varepsilon, p_2}}$ и $Per_{f_{\varepsilon, A}}(z) = Per_{\hat{A}}(z)$ для любого $z \in \Omega_{f_{\varepsilon, A}}$, где $A \in \{A_2(0), A_3, A_5\}$.

Теорема 2

Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда диффеоморфизм $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ при $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) является диффеоморфизмом Морса-Смейла и его блуждающее множество содержит в точности m гетероклинических орбит.