

Построение возмущений негиперболических
алгебраических автоморфизмов двумерного
тора с предсказуемой динамикой

Е. Е. Чилина

НИУ ВШЭ НН

2022

Основные определения и обозначения

Пусть M^n – гладкое замкнутое (компактное без края) связное ориентируемое n -многообразие ($n \geq 1$) и p – гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$. Обозначим через W_p^s (W_p^u) устойчивое (неустойчивое) многообразие точки p , а через Ω_f неблуждающее множество диффеоморфизма f .

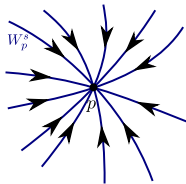


Рис.: p – сток ($n = 2$)

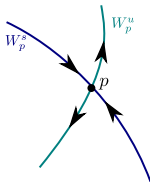


Рис.: p – седло
($n = 2$)

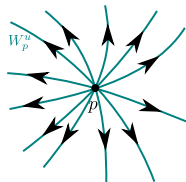
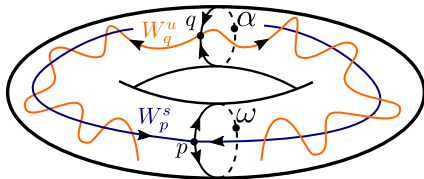


Рис.: p – источник
($n = 2$)

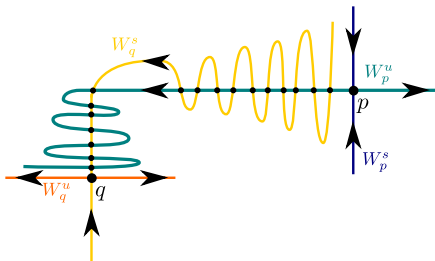
Диффеоморфизмы Морса-Смейла

Диффеоморфизм f называется **диффеоморфизмом Морса-Смейла**, если множество Ω_f конечно и гиперболично и многообразия W_p^s , W_q^u пересекаются трансверсально для любых периодических точек p , q .



Гетероклиническая орбита

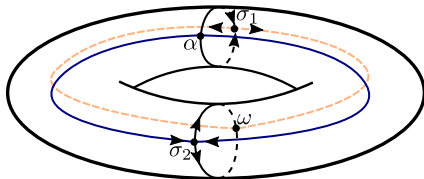
Если p, q – различные периодические седловые точки диффеоморфизма f , для которых $W_q^s \cap W_p^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ называется **гетероклиническим**. При этом в случае $\dim W_q^s \cap W_p^u = 0$, пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется **гетероклинической точкой**, а орбита гетероклинической точки называется **гетероклинической орбитой**. **Гетероклиническим множеством** диффеоморфизма f называется множество всех его гетероклинических точек.



Градиентно-подобные диффеоморфизмы

Диффеоморфизм Морса-Смейла f называется **градиентно-подобным**, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_p^u < \dim W_q^u$.

Известно, что диффеоморфизм Морса-Смейла является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда его гетероклиническое множество пусто.



Гетероклиническое множество

Пусть $n = 2$, $f: M^2 \rightarrow M^2$ – диффеоморфизм Морса-Смейла и p его седловая периодическая точка. Обозначим через $W_p^{\nu,i}$ ($i \in \{1, 2\}$), $\nu \in \{u, s\}$, компоненту связности множества $W_p^\nu \setminus \{p\}$. Диффеоморфизм f является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда $W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i} = \emptyset$ для каждой пары седловых периодических точек p, q и любых $i, j \in \{1, 2\}$.

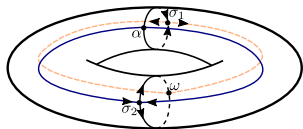


Рис.: Градиентно-подобный диффеоморфизм

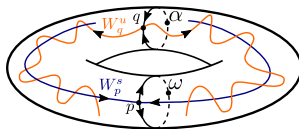


Рис.: Диффеоморфизм Морса-Смейла

Ориентируемое гетероклиническое множество

Следуя [1], гетероклиническое множество диффеоморфизма f называется **ориентируемым**, если для каждой пары седловых периодических точек p, q и любых $i, j \in \{1, 2\}$, для которых $W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i} \neq \emptyset$, индекс пересечения кривых $W_p^{u,j}$ и $W_q^{s,i}$ один и тот же в любой точке $z \in W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i}$.

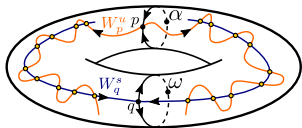


Рис.: Диффеоморфизм с неориентируемым гетероклиническим множеством

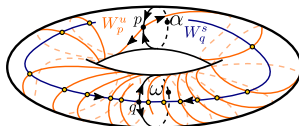


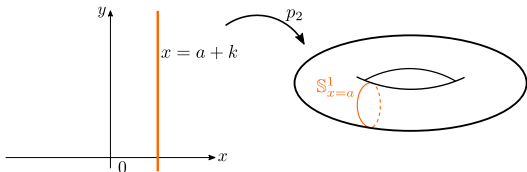
Рис.: Диффеоморфизм с ориентируемым гетероклиническим множеством

1. Безденежных А.Н., Гринес В.З. Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1985. С. 139–152

Окружность и двумерный тор

Представим окружность S^1 как фактор-группу $S^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}$ с естественной проекцией $p_1 : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ и двумерный тор T^2 как фактор-группу $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с естественной проекцией $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$.

Пусть $a \in [0, 1)$. Обозначим через $S^1_{x=a}$ ($S^1_{y=a}$) окружность на двумерном торе T^2 , которая является образом относительно естественной проекции $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ прямой $x = a + k$ ($y = a + k$), где $k \in \mathbb{Z}$.



Функция $h_\varepsilon(z)$

Зададим функцию $h_\varepsilon(z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по следующему правилу:

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z) \right), & z \in \left(k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}) \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases},$$

где $\varepsilon \in (-1, 1)$.

Функция $h_\varepsilon(z)$

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z) \right), & z \in \left(k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}\right) (k \in \mathbb{Z}) \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

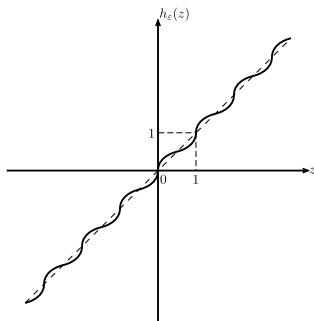


Рис.: График функции $h_\varepsilon(z)$ при фиксированном значении ε , лежащем в интервале $(-1, 0)$.

Диффеоморфизмы окружности φ_ε и ψ_ε

Рассмотрим диффеоморфизмы окружности $\varphi_\varepsilon: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ и $\psi_\varepsilon: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, зависящие от параметра $\varepsilon \in (-1, 1)$ и заданные формулами:

$$\varphi_\varepsilon: \bar{z} = h_\varepsilon(z) \pmod{1},$$

$$\psi_\varepsilon: \bar{z} = \frac{1}{2}h_\varepsilon(2z) \pmod{1}.$$

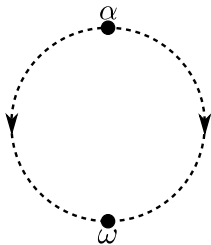


Рис.: φ_ε при $\varepsilon \neq 0$

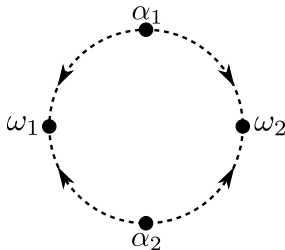


Рис.: ψ_ε при $\varepsilon \neq 0$

Диффеоморфизмы двумерного тора M_ε и L_ε

Определим диффеоморфизмы двумерного тора $M_\varepsilon: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ и $L_\varepsilon: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ следующими формулами:

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varphi_\varepsilon & 0 \\ 0 & \varphi_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad L_\varepsilon = \begin{pmatrix} \psi_\varepsilon & 0 \\ 0 & \varphi_\varepsilon \end{pmatrix}$$

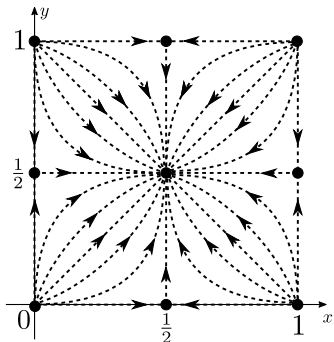


Рис.: M_ε при $\varepsilon \in (-1, 0)$

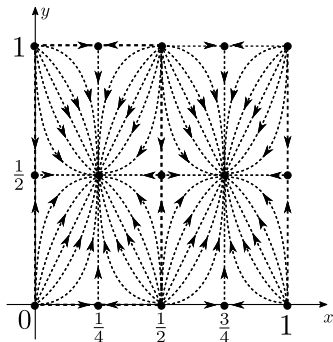


Рис.: L_ε при $\varepsilon \in (-1, 0)$

Алгебраический автоморфизм двумерного тора

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$, то есть A — целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда отображение $\hat{A}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$\hat{A}: \begin{cases} \bar{x} = ax + by \pmod{1} \\ \bar{y} = cx + dy \pmod{1} \end{cases},$$

называется **алгебраическим автоморфизмом двумерного тора**.

Если собственные значения матрицы $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм \hat{A} называется **гиперболическим**. В противном случае автоморфизм \hat{A} называется **негиперболическим**.

Классификация негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора

Из работ [2] и [3] следует:

Утверждение.

Каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора задан в точности одной из следующих матриц:

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (m \in \{0, 1, 2, \dots\});$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. S. Batterson. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 256 (Dec., 1979), pp. 395-403
3. С. В. Сидоров, Е. Е. Чилина, "О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора", Журнал СВМО, 23:3 (2021), 295–307

Периодический гомеоморфизм

Отличный от тождественного гомеоморфизм f замкнутой ориентируемой поверхности называется **периодическим**, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется **периодом** f .

Обозначим через $Per_f(z)$ период точки z относительно гомеоморфизма f . Пусть f – гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности M^2 периода n . Положим $B_f = \{z \in M^2 \mid Per_f(z) < n\}$. Если f сохраняет ориентацию, то согласно работе [4], множество B_f конечно.

4. J. Nielsen, Die struktur periodischer transformationen von flachen, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15 (1937).

Классификация периодических автоморфизмов двумерного тора

Следствие.

Существует 6 классов сопряженности периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора, каждый из которых задан в точности одной из следующих матриц:

$$A_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_2(0)$, A_5 , A_6 , A_7 индуцируют сохраняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2, 4, 3 и 6 соответственно, а матрицы A_3 , A_4 индуцируют меняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2.

Действие периодических автоморфизмов

Автоморфизм $\hat{A}_2(0)$ является сохраняющим ориентацию отображением периода 2. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$ состоит из 4-х неподвижных точек – $p_2(0, 0)$, $p_2(0, \frac{1}{2})$, $p_2(\frac{1}{2}, 0)$ и $p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, где $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – естественная проекция.

Автоморфизм \hat{A}_3 не сохраняет ориентацию и является отображением периода 2. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_3}$ состоит из двух окружностей: $\mathbb{S}_{x=0}^1$ и $\mathbb{S}_{x=\frac{1}{2}}^1$.

Автоморфизм \hat{A}_5 является сохраняющим ориентацию отображением периода 4. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_5}$ состоит из 2-х неподвижных точек – $p_2(0, 0)$ и $p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, и одной орбиты периода два – $\{p_2(0, \frac{1}{2}), p_2(\frac{1}{2}, 0)\}$.

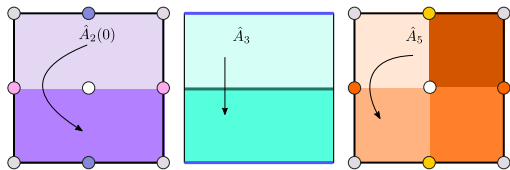


Рис.: Действие периодических автоморфизмов

Действие непериодических автоморфизмов

Автоморфизмы $\hat{A}_1(m)$ и $\hat{A}_2(m)$ при $m \neq 0$ не являются периодическими отображениями. Каждая окружность $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1$ ($\gamma \in [0, 1)$) является инвариантной относительно $\hat{A}_1(m)$. Ограничение $\hat{A}_1(m)$ на каждую окружность $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1$ действует как поворот на некоторый угол θ_γ . Инвариантными относительно $\hat{A}_2(m)$ являются окружности $\mathbb{S}_{y=0}^1$, $\mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1$ и объединения окружностей $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1 \cup \mathbb{S}_{y=1-\gamma}^1$ ($\gamma \in (0, \frac{1}{2})$). Ограничение второй степени $\hat{A}_2(m)$ на каждую окружность $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1$ действует как поворот на некоторый угол θ_γ .

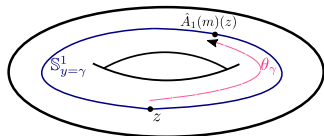


Рис.: Действие $\hat{A}_1(m)$ при $m \neq 0$

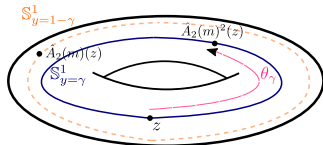


Рис.: Действие $\hat{A}_2(m)$ при $m \neq 0$

Основные результаты

Введём однопараметрические семейства диффеоморфизмов следующими формулами: $f_{\varepsilon, A} = M_\varepsilon \circ \hat{A}$, $g_{\varepsilon, A} = L_\varepsilon \circ \hat{A}$, где \hat{A} – автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in GL(2, \mathbb{Z})$.

Теорема 1

Для любого $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ верны следующие утверждения:

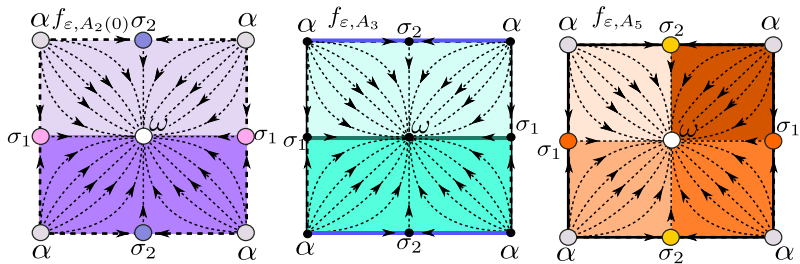
- 1 Отображения $f_{\varepsilon, A_2(0)}$, f_{ε, A_3} , f_{ε, A_5} являются градиентно-подобными диффеоморфизмами.
- 2 $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$, $\Omega_{f_{\varepsilon, A_3}} \subset \mathcal{B}_{\hat{A}_3}$, $\Omega_{f_{\varepsilon, A_5}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_5}$.
- 3 Период точек неблуждающего множества каждого диффеоморфизма из пункта 1 совпадает с их периодом относительно возмущаемого автоморфизма.

Теорема 2

Для любого $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ верны следующие утверждения:

- 1 При $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $f_{\varepsilon, A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из m гетероклинических орбит.
- 2 При $m = 2l - 1$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $g_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $g_{\varepsilon, A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из $4m$ гетероклинических орбит.
- 3 Период точек неблуждающего множества каждого диффеоморфизма из пунктов 1 и 2 совпадает с их периодом относительно возмущаемого автоморфизма.

Теорема 1. Идея доказательства.



Теорема 2. Идея доказательства. $(f_{\varepsilon, A_1(m)})$

$\Omega_{f_{\varepsilon, A_1(m)}}$ состоит из источника $\alpha = p_2(0, 0)$, стока $\omega = p_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и 2-х сёдел: $\sigma_1 = p_2(0, \frac{1}{2})$, $\sigma_2 = p_2(\frac{1}{2}, 0)$.

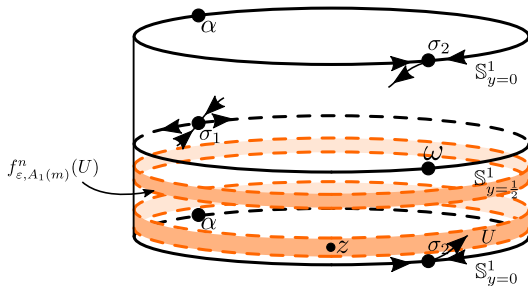


Рис.: Действие $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ на двумерном торе \mathbb{T}^2 , разрезанном по окружности $S_{y=0}^1$

Теорема 2. Идея доказательства. $(f_{\varepsilon, A_1(m)})$

Ограничение отображения $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ на инвариантные окружности $\mathbb{S}_{y=0}^1$ и $\mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1$ действует как отображение M_ε . Следовательно, множество $\mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1 \setminus \{\omega\}$ является неустойчивым многообразием точки σ_1 , а множество $\mathbb{S}_{y=0}^1 \setminus \{\alpha\}$ устойчивым многообразием точки σ_2 .

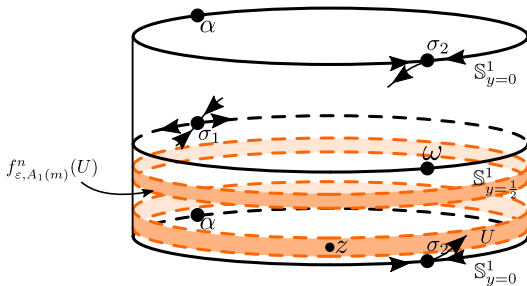
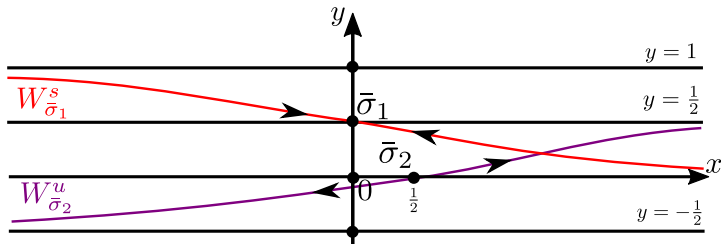


Рис.: Действие $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ на двумерном торе \mathbb{T}^2 , разрезанном по окружности $\mathbb{S}_{y=0}^1$

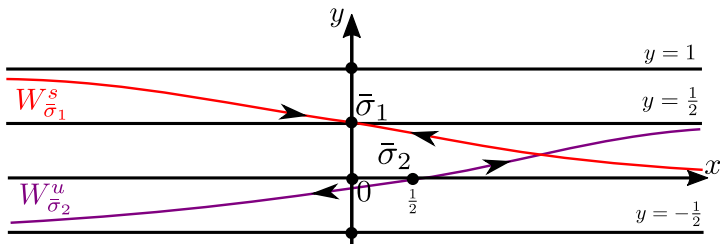
Теорема 2. Идея доказательства. $(f_{\varepsilon, A_1(m)})$

Рассмотрим два накрывающих для диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ отображения: $\bar{f}_{\varepsilon, A_1(m)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\bar{f}_{\varepsilon, A_1(m)}^*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что $\bar{\sigma}_1 = (0, \frac{1}{2})$ является неподвижной седловой точкой диффеоморфизма $\bar{f}_{\varepsilon, A_1(m)}$, а точка $\bar{\sigma}_2 = (\frac{1}{2}, 0)$ является неподвижной седловой точкой диффеоморфизма $\bar{f}_{\varepsilon, A_1(m)}^*$.



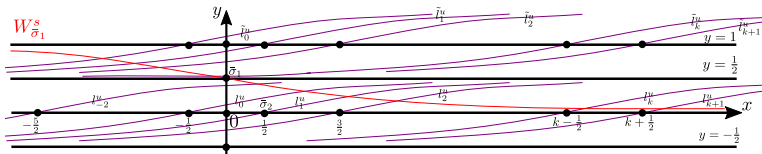
Теорема 2. Идея доказательства. $(f_{\varepsilon, A_1(m)})$

Из теоремы Адамара-Перрона известно поведение локальных инвариантных многообразий в окрестности неподвижной гиперболической точки. Итерируя фундаментальную область действия накрывающего отображения $\bar{f}_{\varepsilon, A_1(m)}$, лежащую на $W_{\bar{\sigma}_1}^s$, исследуется асимптотическое поведение многообразия $W_{\bar{\sigma}_1}^s$, и, итерируя фундаментальную область действия накрывающего отображения $\bar{f}_{\varepsilon, A_1(m)}^*$, лежащую на $W_{\bar{\sigma}_2}^u$, исследуется асимптотическое поведение многообразия $W_{\bar{\sigma}_2}^u$.



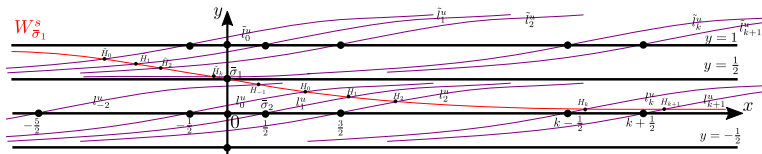
Теорема 2. Идея доказательства. $(f_{\varepsilon, A_1(m)})$

Положим $l_k^u = h_{k-1,0}(W_{\bar{\sigma}_2}^u)$ и $\tilde{l}_k^u = h_{k-1,1}(W_{\bar{\sigma}_2}^u)$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $h_{k-1,0}$, $h_{k-1,1}$ – элементы группы скольжений накрытия p_2 ($W_{\bar{\sigma}_2}^u = l_1$).



Теорема 2. Идея доказательства. $(f_{\varepsilon, A_1(m)})$

Ориентируем кривые $W_{\sigma_1}^s$ и $W_{\sigma_2}^u$ произвольным образом. Кривые I_k^u и \tilde{I}_k^u ориентируем согласованно с $W_{\sigma_2}^u$. Рассмотрим пересечения $W_{\sigma_1}^s$ с кривой I_k^u (\tilde{I}_k^u). В силу асимптотического поведения кривых каждое такое пересечение трансверсально и состоит из единственной точки, которую обозначим через H_k (\tilde{H}_k). Индекс пересечения кривой $W_{\sigma_1}^s$ с кривой I_k^u (\tilde{I}_k^u) в точке H_k (\tilde{H}_k) один и тот же для любого $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, инвариантные многообразия $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ пересекаются трансверсально и гетероклиническое множество $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ ориентируемо.



Теорема 2. Идея доказательства. $(f_{\varepsilon, A_1(m)})$

Итерируя накрывающем отображении точку H_k (\tilde{H}_k), аналитически доказывается, что она отображается через $\frac{m}{2}$ конгруэнтных кривых, то есть в точку $H_{k+\frac{m}{2}}$ ($\tilde{H}_{k+\frac{m}{2}}$).

Таким образом, на каждой компоненте связности многообразия $W_{\sigma_1}^s$ находится $\frac{m}{2}$ прообразов гетероклинических орбит диффеоморфизма $f_{\varepsilon, A_1(m)}$. Следовательно, гетероклиническое множество $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ состоит из m орбит.

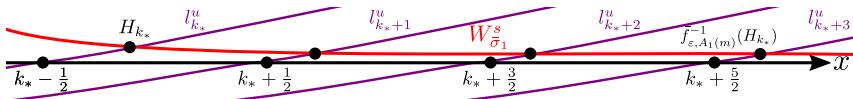


Рис.: Случай $m = 6$