Узел, как полный инвариант диффеоморфизмов поверхностей с тремя периодическими орбитами

Баранов Д., ВШЭ, Нижний Новгород, Россия
Научный руководитель: Починка О.В., ВШЭ, Нижний Новгород, Россия

Блуждающее множество

Пусть S_p – замкнутая ориентируемая поверхность рода $p \geqslant 0$ с метрикой d и пусть $f : S_p \to S_p$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм с конечным гиперболическим неблуждающим множеством f.

Точка $x \in S_p$ называется блуждающей для f, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка называется неблуждающей. Множество неблуждающих точек f называется неблуждающем множеством и обозначается Ω_f.

Гиперболические точки

Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $r \in \Omega_f$ периодическая с некоторым периодом $m_r \in \mathbb{N}$. Точка $r \in \Omega_f$ является гиперболической, если абсолютные значения всех собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$ не равны 1. Если абсолютные значения всех собственных значений меньше (больше) 1, то точка r называется стоком (источником). Стоки и источники называются узлами. Если гиперболическая периодическая точка не является узлом, то это седловая точка.

Устойчивое и неустойчивое многообразие

Для гиперболической периодической точки r диффеоморфизма f обозначим через q_r число собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$ по модулю больших 1. Гиперболическая структура периодической точки r влечет существование устойчивого $W^s_r = \{x \in S_p : \lim\limits_{k\to+\infty} d(f^{k\cdot m_r}(x), r) = 0\}$ и неустойчивого $W^u_r = \{x \in S_p : \lim\limits_{k\to+\infty} d(f^{-k\cdot m_r}(x), r) = 0\}$ многообразий, являющихся гладкими вложениями $\mathbb{R}^{2-q_r}$ и $\mathbb{R}^{q_r}$, соответственно.

Диффеоморфизм Морса-Смейла

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются инвариантными многообразиями. Компонента связности множества $W^u_r \setminus r$ ($W^s_r \setminus r$) называется неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой. Диффеоморфизм $f : S_p \to S_p$ называется диффеоморфизмом Морса-Смейла, если Ω_f конечно и гиперболично, а инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Периодические данные

Периодические данные периодической орбиты $\mathcal{O}_r$ периодической точки r – это набор чисел (m_r, q_r, ν_r), где m_r – период r, $q_r = \dim\ W^u_r$ и ν_r – это тип ориентации r: $\nu_r = +1\,(\nu_r = -1)$, если $f^{m_r}|_{W^u_r}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов тип ориентации всех узлов $+1$, а тип ориентации седловых точек может быть равен $+1$ или -1.

Множество G

Обозначим через G множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла $f : S_p \to S_p$, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех периодических орбит.

Диффеоморфизмы класса G

Утверждение

Неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in G$ состоит из стоковой орбиты $\mathcal{O}_\omega$, источниковой орбиты $\mathcal{O}_\alpha$ и седловой орбиты $\mathcal{O}_\sigma$. При этом седловая орбита имеет отрицательный тип ориентации и хотя бы одна из узловых орбит диффеоморфизма имеет период 1.

Топологическая сопряженность

Везде далее для определенности будем считать, что неподвижной является стоковая точка ω. Из гиперболичности стока следует, что диффеоморфизм $f|_{W^s_\omega}$ топологически сопряжен, посредством некоторого гомеоморфизма $\psi_f : W^s_\omega \to \mathbb{R}^2$, с линейным диффеоморфизмом $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданным формулой

$$A(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right).$$

Естественная проекция

Положим $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))/A$ и обозначим через $p : \mathbb{R}^2 \setminus \to \mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Введем образующие на торе следующим образом. Параллелью L на торе $\mathbb{T}^2$ будем называть образ единичной окружности $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ $(L = p(\mathbb{S}^1))$ с ориентацией против часовой стрелки, параллель имеет гомотопичесикй тип $\langle 1, 0\rangle$. Меридианом M будем называть образ положительной полуоси $Ox_1^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 = 0\}$ оси Ox_1 $(M = p(Ox_1^+))$ с ориентацией в направлении убывания x_1, меридиан имеет гомотопический тип $\langle 0, 1\rangle$.

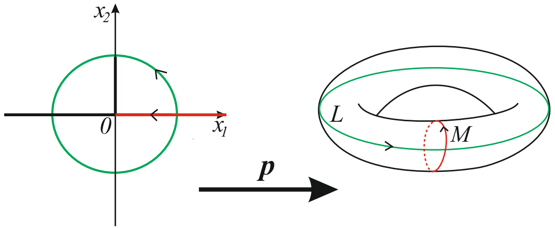

Рис.: Параллель L и меридиан M на торе

Гомтопический тип узла

Положим $p_f = p\psi_f : V_f \to \mathbb{T}^2$ и $\gamma_f = p_f(W^u_{\mathcal{O}_\sigma})$. Множество γ_f является существенным узлом на торе $\mathbb{T}^2$, имеющим гомотопический тип $\langle \lambda_f, \mu_f \rangle$, где $\mu_f > 0$ и НОД$(\lambda_f, \mu_f) = 1$. Гомотопический тип узла γ_f зависит от выбора гомеоморфизма ψ_f так, что если $(\tilde{\lambda}_f, \tilde{\mu}_f)$ – гомотопический тип узла γ_f для некоторого гомеоморфизма $\tilde{\psi}_f$, отличного от ψ_f, то $\tilde{\mu}_f = \mu_f$, $\tilde{\lambda}_f \equiv \lambda_f \pmod{\mu_f}$. Таким образом, не уменьшая общности будем считать, что гомеоморфизм ψ_f выбран так, что узел γ_f имеет гомотопический тип

$$\langle \lambda_f, \mu_f \rangle : \ \mu_f > 0, \ \text{НОД}(\lambda_f, \mu_f) = 1, \ 0 \leqslant \lambda_f < \mu_f. \qquad (*)$$

Классификация диффеоморфизмов класса G

Теорема

Класс топологической сопряженности диффеоморфизма $f \in G$ однозначно определяется гомотопическим типом $\langle \lambda_f, \mu_f \rangle$ узла γ_f. То есть диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\lambda_f = \lambda_{f'}$ и $\mu_f = \mu_{f'}$.

Связь рода несущей поверхности и гомотопическим типо узла γ_f

Теорема

На поверхности S_p рода $p \geqslant 0$ диффеоморфизм $f \in G$ с узлом γ_f гомотопического типа $\langle \lambda_f, \mu_f \rangle$ существует тогда и только тогда, когда

$$\mu_f = 4p \text{ или } \mu_f = 4p + 2.$$

При этом число N_p классов топологической сопряженности диффеоморфизмов $f \in G$, заданных на поверхности S_p вычисляется по формуле

$$N_p = \varphi(4p) + \varphi(4p + 2),$$

где $\varphi(n)$ – функция Эйлера, то есть количество взаимно простых с n чисел, не превышающих n.

Периодические гомеоморфизмы поверхности

Мы рассматриваем сохраняющие ориентацию периодические гомеоморфизмы. Согласно результатам Я. Нильсена для любого такого гомеоморфизма $\varphi : S_p \to S_p$ множество точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия гомеоморфизма φ на S_p является сферой с g ручками (модульной поверхностью). В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi\dfrac{\delta_0}{\lambda_0}$, где $\lambda_0 = \dfrac{n}{n_0}$.

Полная характеристика периодического гомеоморфизма

Обозначим через X_i, $i = 1, \ldots, k$ орбиты точек меньшего периода, их периоды – через n_i и положим $\lambda_i = \dfrac{n}{n_i}$ (n - период гомеоморфизма). Обозначим через $\dfrac{\delta_i}{\lambda_i}$ соответствующее число вращения и определим число d_i из условия $d_i \delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$.

Набор параметров $(n, p, g, n_1, \ldots, n_k, d_1, \ldots, d_k)$ периодического гомеоморфизма φ называется его полной характеристикой.

Вспомогательные утверждения

Утверждение

Два периодических гомеоморфизма топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые с точностью до перенумерации полные характеристики.

Вспомогательные утверждения

Утверждение

Полная характеристика $(n, p, g, n_1, \ldots, n_k, d_1, \ldots, d_k)$ реализуется некоторым периодическим гомеоморфизмом $\varphi : S_p \to S_p$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $2p + \sum_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g + k - 2)$
- $\sum_{i=1}^{k} d_i n_i \equiv 0 \pmod{n}$
- если $g = 0$, то $\gcd(d_1 n_1, \ldots, d_k n_k, n) = 1$.

Вспомогательные утверждения

Утверждение

Пусть дан периодический гомеоморфизм φ с полной характеристикой $(n, p, n_1, \ldots, n_k, d_1, \ldots, d_k)$. Тогда выполнены следующие неравенства:

1. $g \leqslant p$;
2. $k \leqslant 2(p+1)$;
3. $n \leqslant 4p+2$.

Алгоритмический критерий реализуемости характеристики периодическим гомеоморфизмом

Лемма

Набор чисел $(n, p, g, n_1, \ldots, n_k, d_1, \ldots, d_k)$ является полной характеристикой периодического отображения φ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия (ниже $\lambda_i = \dfrac{n}{n_i}$, $\lambda = \mathrm{lcm}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$):

В случае $g = 0$

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\lambda_i} \in \{1, \ldots, k-1\}$;
2. $n = \lambda$ и $p = \dfrac{\lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\lambda_i}}{2} + 1$;
3. $\gcd(\lambda, d_1, \ldots, d_k) = 1$.

Алгоритмический критерий реализуемости характеристики периодическим гомеоморфизмом

Лемма

В случае $g \neq 0$:

1. $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{d_i}{\lambda_i} \in \{1, \ldots, k-1\}$
2. $n = \tau\lambda$, $\tau \in \mathbb{N}$ и $p = \dfrac{\lambda(2g+k-2) - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda}{\lambda_i}}{2}\tau + 1$

Периодические данные диффеоморфизма $f \in G$

Утверждение

Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм $f : S_p \to S_p$ представляются в виде композиции $f = \varphi \circ \xi^1$, где ξ^1 есть сдвиг на единицу времени вдоль траекторий градиентного потока ξ^t некоторой функции Морса[1], а φ — периодический гомеоморфизм. При этом:

- точки меньшего периода гомеоморфизма φ являются также периодическими точками диффеоморфизма f, причём их периоды совпадают;
- период сепаратрисы любой седловой точки диффеоморфизма f совпадает с периодом гомеоморфизма φ.

[1] C^2-гладкая функция с невырожденными критическими точками.

Периодические данные диффеоморфизма $f \in G$

Лемма

Пусть $f = \varphi \circ \xi^1 \in G$. Тогда если отображение φ имеет ровно три точки меньшего периода, то оно имеет одну из следующих полных характеристик:

1) $(n = 4p, g = 0, p > 0, n_1 = 2p, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 2p - d_2)$,
   $0 < d_2 < 2p$, $\gcd(d_2, 2p) = 1$;
2) $(n = 4p, g = 0, p > 0, n_1 = 2p, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 6p - d_2)$,
   $2p < d_2 < 4p$, $\gcd(d_2, 2p) = 1$;
3) $(n = 4p + 2, g = 0, p > 0, n_1 = 2p + 1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 2p + 1 - 2d_2)$,
   $0 < d_2 \leqslant p$, $\gcd(d_2, 2p + 1) = 1$;
4) $(n = 4p + 2, g = 0, p > 0, n_1 = 2p + 1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 6p + 3 - 2d_2)$,
   $p < d_2 \leqslant 2p$, $\gcd(d_2, 2p + 1) = 1$.

Линеаризующая окрестность седловой точки

Пусть $f : S_p \to S_p$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла и σ – седловая периодическая точка периода m_σ и типа ориентации ν_σ диффеоморфизма f. Обозначим через $a_{\nu_\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, заданный формулой

$$a_{\nu_\sigma}(x, y) = \left(\nu_\sigma \cdot \frac{x}{2}, \nu_\sigma \cdot 2y\right).$$

Диффеоморфизм $a_{\nu_\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет единственную неподвижную седловую точку в начале координат O с устойчивым многообразием $W^s_O = Ox_1$ и неустойчивым многообразием $W^u_O = Ox_2$. Положим $\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x_1 x_2| < 1\}$. Определим в окрестности $\mathcal{N}$ пару трансверсальных слоений $\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}^s$ следующим образом:

$$\mathcal{F}^u = \bigcup_{c_2 \in Ox_2} \{(x_1, x_2) \in \mathcal{N} \ : \ x_2 = c_2\},$$

$$\mathcal{F}^s = \bigcup_{c_1 \in Ox_1} \{(x_1, x_2) \in \mathcal{N} \ : \ x_1 = c_1\}.$$

Линеаризующая окрестность седловой точки

Заметим, что множество $\mathcal{N}$ является инвариантным относительно диффеоморфизма a_ν, который переводит слои слоения $\mathcal{F}^u$ ($\mathcal{F}^s$) в слои этого же слоения.
Окрестность N_σ седловой точки σ назовем линеаризующей, если существует гомеоморфизм $h_\sigma : N_\sigma \to \mathcal{N}$, сопрягающий диффеоморфизм $f^{m_\sigma}|_{N_\sigma}$ с каноническим диффеоморфизмом $a_{\nu_\sigma}|_{\mathcal{N}}$. Слоения $\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}^s$ индуцируют посредством гомеоморфизма h_σ^{-1}, f^{m_σ}-инвариантные слоения F^u_σ, F^s_σ на линеаризующей окрестности N_σ. Окрестность
$N_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup\limits_{k=0}^{m_\sigma-1} f^k(N_\sigma)$, оснащенную отображением $h_{\mathcal{O}_\sigma}$,
составленным из гомеоморфизмов
$h_\sigma f^{-k} : f^k(N_\sigma) \to \mathcal{N},\ k = 0, \dots, m_\sigma - 1$ и слоениями
$F^u_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup\limits_{k=0}^{m_\sigma-1} f^k(F^u_\sigma)$, $F^s_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup\limits_{k=0}^{m_\sigma-1} f^k(F^s_\sigma)$, будем называть линеаризующей окрестностью орбиты $\mathcal{O}_\sigma$.

Линеаризующая окрестность седловой точки

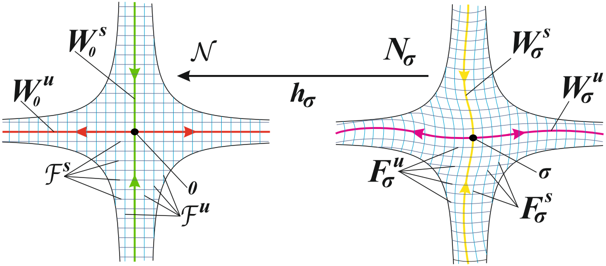

Рис.: Линеаризующая окрестность седловой точки σ

Вспомогательные утверждения

Утверждение

Любая седловая точка (орбита) сохраняющего ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла $f : S_p \to S_p$ обладает линеаризующей окрестностью.

Вспомогательные утверждения

Положим $\mathcal{N}^u = \mathcal{N} \setminus Ox_1$ и через $\hat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma} = \mathcal{N}^u / a_{\nu_\sigma}$ обозначим пространство орбит действия группы $\{a^n_{\nu_\sigma}, n \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathcal{N}^u$. Обозначим далее через $p_{\hat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma}} : \mathcal{N}^u \to \hat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma}$ естественную проекцию. Фундаментальная область действия группы $\{a^n_{\nu_\sigma}, n \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathcal{N}^u$ в случае $\nu_\sigma = +1$ состоит из двух непересекающихся криволинейных трапеций, каждая из которых имеет эквивалентные точки, принадлежащие горизонтальным отрезкам границы, а в случае $\nu_\sigma = -1$ фундаментальную область можно выбрать в виде одной криволинейной трапеции (с эквивалентными точками на горизонтальных отрезках границы).

Вспомогательные утверждения

Утверждение

Многообразие $\hat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma}$ имеет следующий топологический тип в зависимости от ν_σ:

- пространство $\hat{\mathcal{N}}^u_{-1}$ гомеоморфно одному двумерному кольцу K;
- пространство $\hat{\mathcal{N}}^u_{+1}$ гомеоморфно паре двумерных колец K_1, K_2.

Вспомогательные утверждения

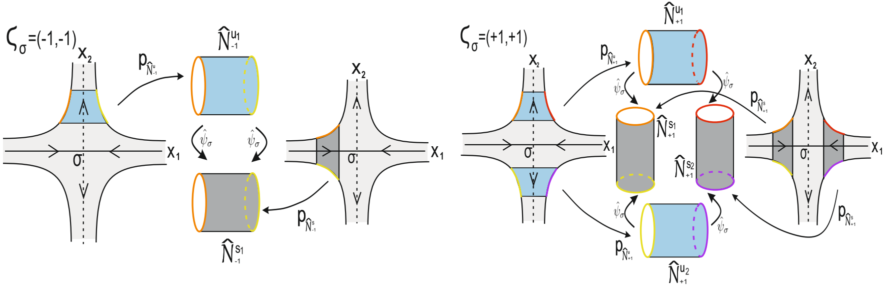

Рис.: Пространства $\hat{\mathcal{N}}^u_{-1}$ и $\hat{\mathcal{N}}^u_{+1}$