Hausdorf dimensions of typical VLF chorus and verification of their excitation mechanism

P.A. Bespalov (1,2), O.N. Savina (2), G.M. Neshchetkin (2)

(1) Institute of Applied Physics, RAS, Nizhny Novgorod, Russia

(2) HSE University, Nizhny Novgorod, Russia

Содержание

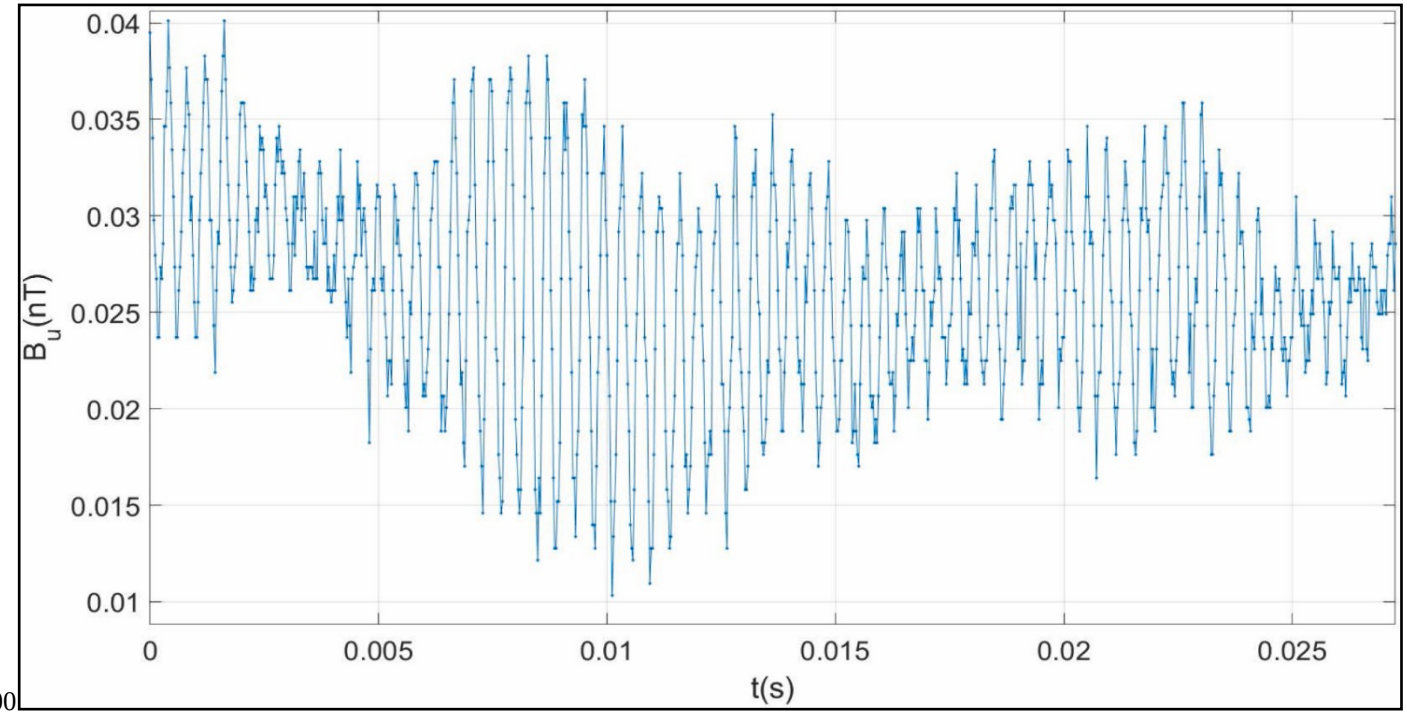
1. Введение
2. Исследуемые случаи
3. Алгоритм вычисления размерности Хаусдорфа
4. Результаты расчета размерности
5. Проверка *BPA* механизма возбуждения хоров
6. Заключение

1. Введение

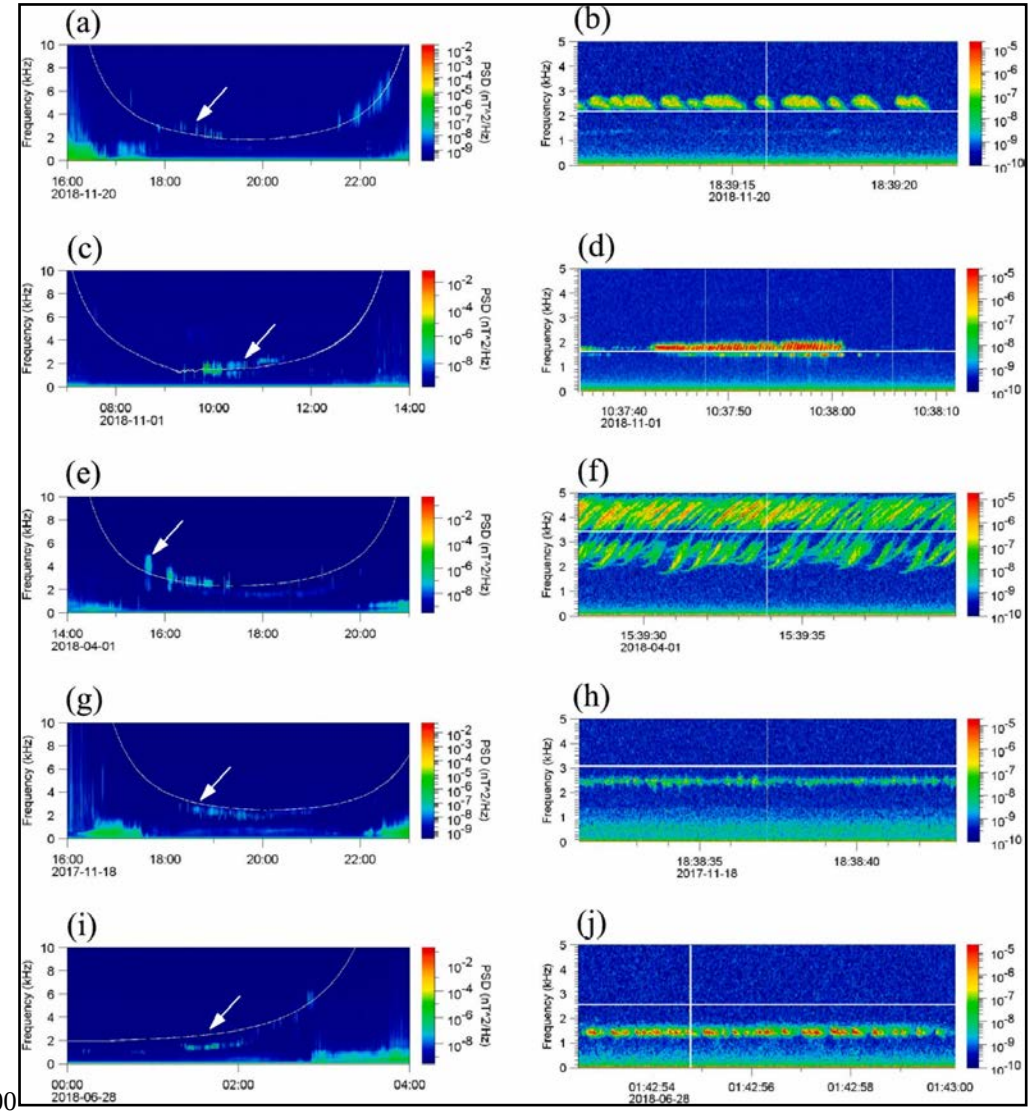
A quantitative study complexity of electromagnetic VLF chorus by means of the modern mathematical apparatus was carried out. From the huge observational data set accumulated during the Van Allen probe mission, typical examples of chorus emissions for which high-resolution data are available were selected. To eliminate the influence propagation effects on the results, we used data obtained in the region of chorus excitation near the local minimum of the magnetic field outside the plasmasphere. The original code for calculating the Hausdorf dimension of a long numerical sequence is used in the study. The complexity of calculating this dimension is compensated by the fact that important theorems have been proved for it, allowing one to draw conclusions about the limitations of the mathematical description of the process under study. In all cases, the dimension turned out to be non-integer, which indicates the complex dynamics of the system. In the calculations, jumps in dimension were noted, including a halving of it within the burst of chorus. The obtained results are important as confirmation for the beam pulse amplifier mechanisms of chorus excitation, for a quantitative comparison of the analytical results and numerical simulations with experimental data, and for automatic separation of different types of electromagnetic emissions.

2. Исследуемые случаи

Фрагмент типичной осциллограммы B_U компоненты волнового поля



0000

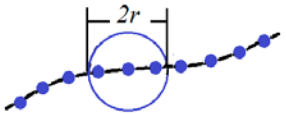

(a)
Frequency (kHz)
PSD (nT²/Hz)
16:00
2018-11-20
18:00
20:00
22:00
(b)
18:39:15
2018-11-20
18:39:20
(c)
08:00
2018-11-01
10:00
12:00
14:00
(d)
10:37:40
2018-11-01
10:37:50
10:38:00
10:38:10
(e)
14:00
2018-04-01
16:00
18:00
20:00
(f)
15:39:30
2018-04-01
15:39:35
(g)
16:00
2017-11-18
18:00
20:00
22:00
(h)
18:38:35
2017-11-18
18:38:40
(i)
00:00
2018-06-28
02:00
04:00
(j)
01:42:54
2018-06-28
01:42:56
01:42:58
01:43:00

00

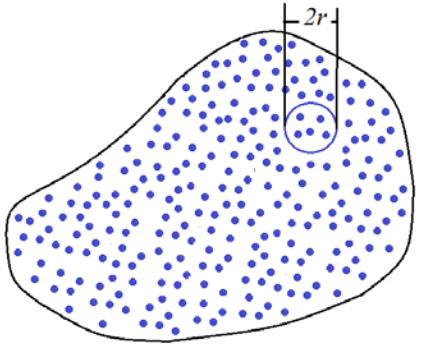
3. Алгоритм вычисления размерности Хаусдорфа

Согласно общей теории, для экспериментального определения размерности Хаусдорфа достаточно проанализировать зависимость от времени одной из переменных, участвующих в процессе. Процесс, пригодный для анализа, характеризуется плавной, дифференцируемой и неповторяющейся зависимостью от времени. Данные с космического аппарата Van Allen probe A с периодической оцифровкой и высокой частотой дискретизации позволяют подобрать оптимальный материал для анализа.

$$C \simeq a \cdot r$$



$$C \simeq b \cdot r^2 .$$



$$\mathbf{dim} = \mathbf{lim}_{r \to 0} \frac{\left|\mathbf{log}\, C(r)\right|}{\left|\mathbf{log}\, r\right|}$$

Для определения размерности Хаусдорфа, необходимо реконструировать фазовое пространство рассматриваемой системы. Вводится в рассмотрение реконструированное m-мерное Евклидово пространство, размерность которого больше ожидаемого значения размерности. Использовав $B_U^1, B_U^2, B_U^3, \ldots$ последовательные, регулярно разнесенные во времени измерения магнитного поля, мы формируем векторы следующего вида:

$$u^i = \left[B_U^i,\ B_U^{i+1}, \ldots, B_U^{i+m-1}\right]$$

Пусть общее число таких векторов N. Для вычисления размерности Хаусдорфа необходимо вычислить число точек в реконструированном пространстве, расстояние между которыми не превышает параметра r. Эта величина определяет корреляционную сумму, которая записывается в виде:

$$C(m,r) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (1 - \delta_{ij}) H(r - |u^i - u^j|)$$

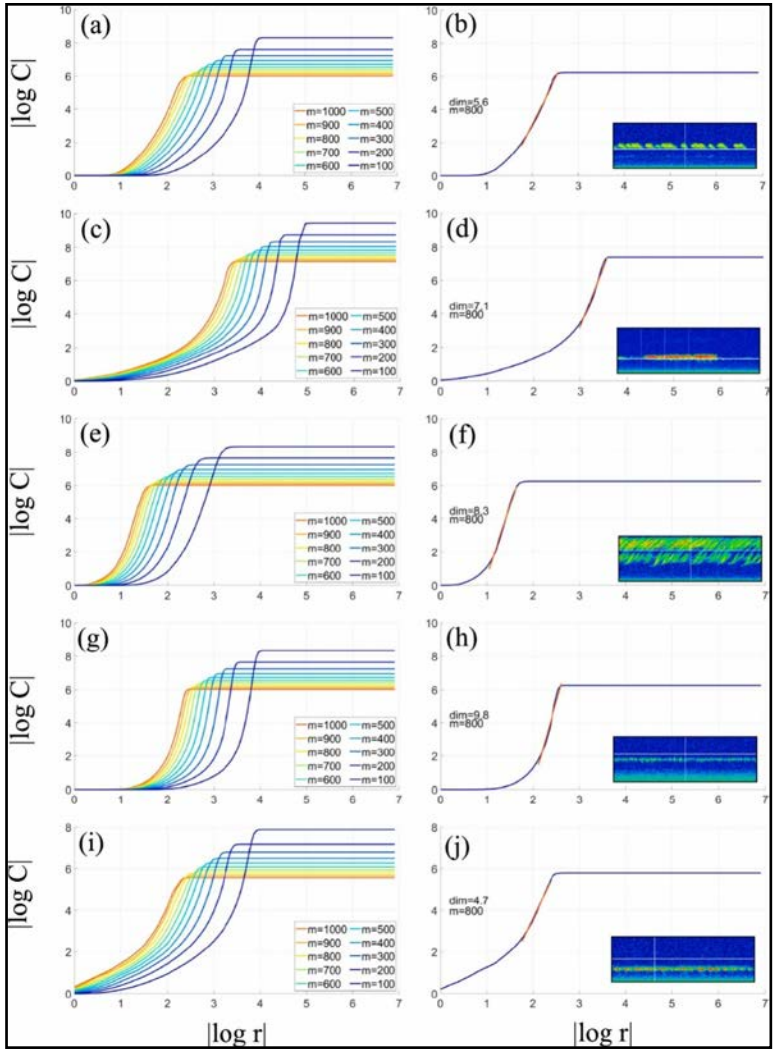
Здесь

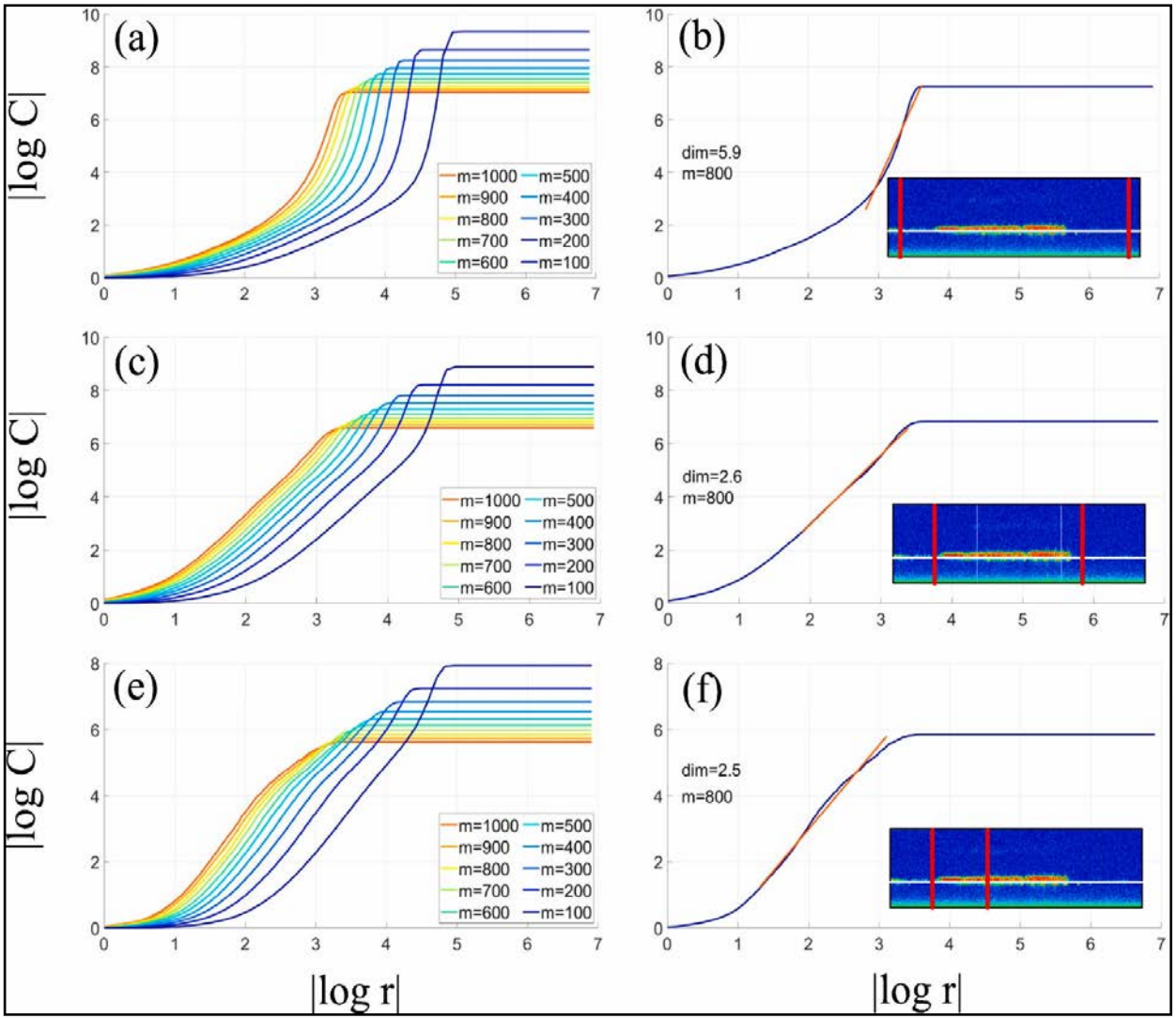
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad H(\varsigma) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn}(\varsigma)),$$

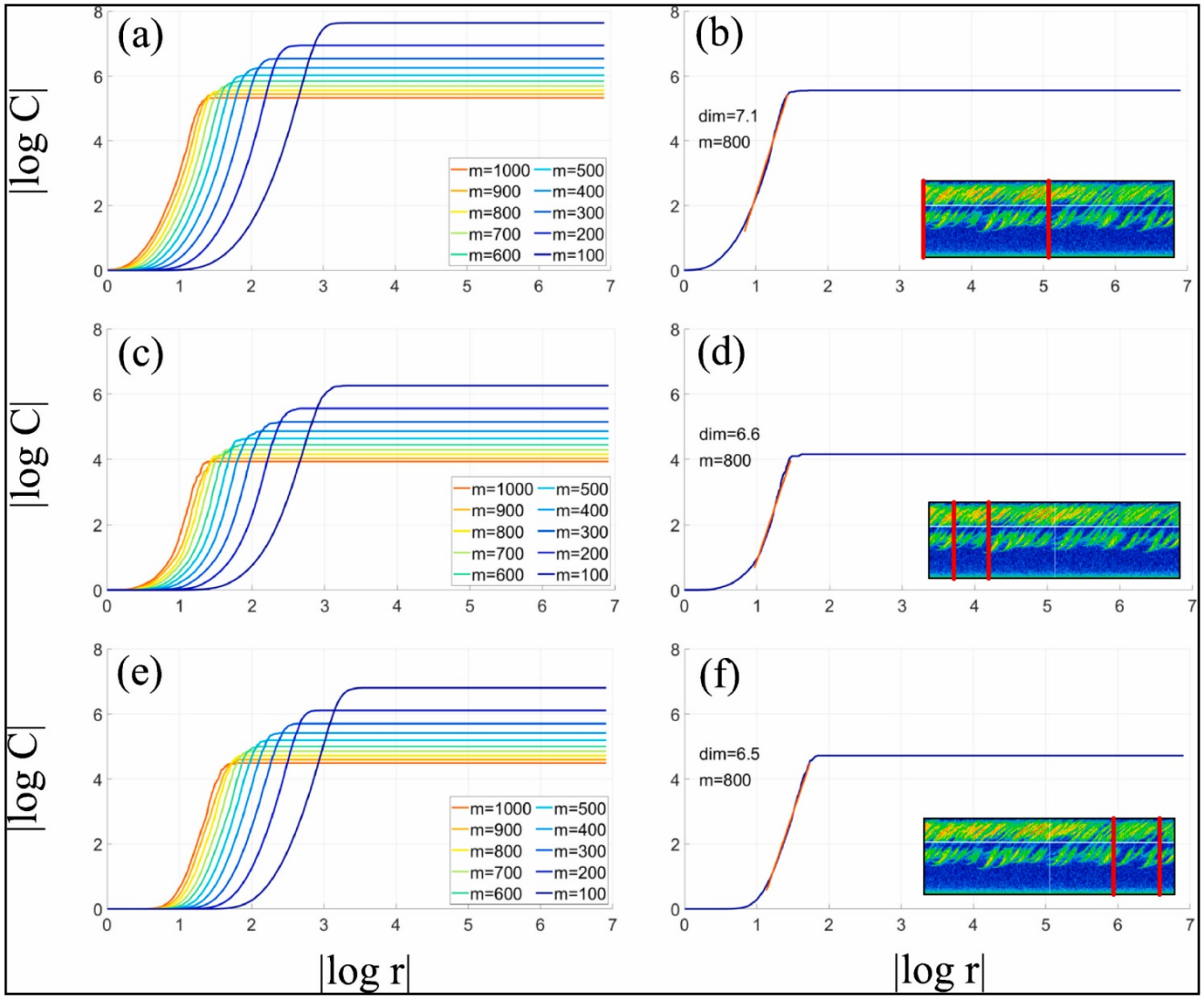
$$|u^i - u^j| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(u_k^i - u_k^j\right)^2}$$ - норма Евклида.

Искомая размерность определяется следующим образом: мы строим зависимости $|\log(C(m,r))|$ от $|\log(r)|$ для r от 0.999 до 0.001 с шагом (-0.001). Мы выбираем такое большое значение m, при котором угол наклона кривых на этом графике стабилизируется. Тангенс угла наклона такой кривой мы принимаем за оценку размерности Хаусдорфа. Во всех случаях корректное покрытия значимых фрагментов сигнала и стабилизация угла наклона было достигнуто при $m = 800$. Для работы с длинными числовыми последовательностями был разработан и протестирован код.

4. Результаты расчета размерности




(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
|log C|
|log r|
m=1000
m=900
m=800
m=700
m=600
m=500
m=400
m=300
m=200
m=100
dim=5.9
m=800
dim=2.6
m=800
dim=2.5
m=800


(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
|log C|
|log r|
m=1000
m=900
m=800
m=700
m=600
m=500
m=400
m=300
m=200
m=100
dim=7.1
m=800
dim=6.6
m=800
dim=6.5
m=800

5. Проверка *ВРА* механизма возбуждения хоров

Для хоров преимущественно в верхней частотной полосе с некоторыми элементами в нижней частотной полосе $2 < \mathbf{dim} < 3$ и $5 < \mathbf{dim} < 6$. Первый случай, вероятно, отвечает излучениям, распространяющимся в одну сторону, и для описания такого "простейшего" процесса достаточно системы трех нелинейных автономных уравнений первого порядка

$$\frac{du_1}{dt} = F_1(u_1, u_2, u_3)$$

$$\frac{du_2}{dt} = F_2(u_1, u_2, u_3)$$

$$\frac{du_3}{dt} = F_3(u_1, u_2, u_3)$$

Система уравнений должна иметь состояние равновесия, так как часто хоры начинаются со слабых эмиссий. Это состояние равновесия неустойчиво, так как хоры плавно не переходят в шипения.

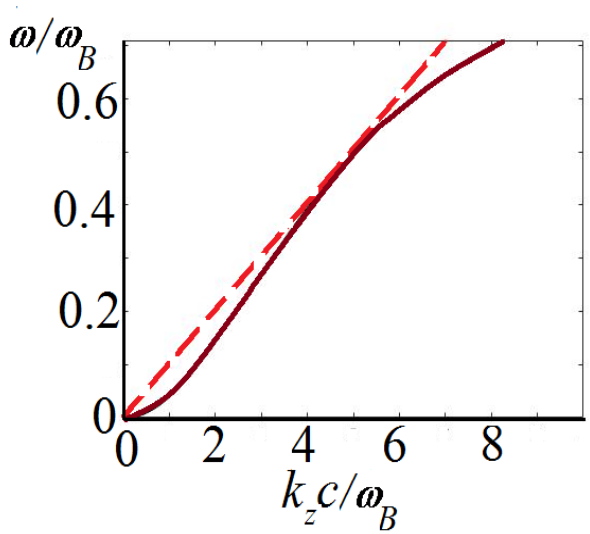
Запишем систему уравнений вблизи стационарного состояния и перейдем от координат Лагранжа к координатам Эйлера, предполагая процесс одномерным в координатном пространстве

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} u_{1\sim} \\ u_{2\sim} \\ u_{3\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1\sim} \\ u_{2\sim} \\ u_{3\sim} \end{pmatrix}$$

где a_{ij} - числовые коэффициенты, $u_{i\sim} = u_i - u_{i0}$.

В наших работах было показано, что при реализации *BPA* механизма за пределами плазмосферы в дакте разрежения короткие шумовые электромагнитные импульсы с подходящей несущей частотой вблизи $(1/2)\omega_B$, углом волновой нормали порядка 20° и правой круговой поляризацией усиливаются с предельно высоким темпом. Для спектральных компонент волновых пакетов

$$V_{phz} = V_{grz} = u_G = c\omega_B / 2\omega_p$$



Электромагнитный импульс из таких компонент близок к стационарной волне

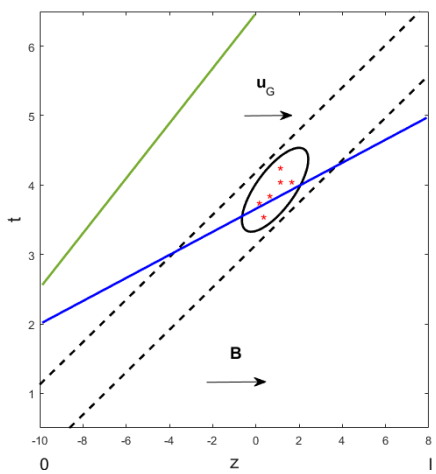
$$\vec{E}_{\sim}(z - u_G t),\ \vec{B}_{\sim}(z - u_G t)$$

С коротким импульсом в виде стационарной волны вдоль трассы взаимодействует только облако активных электронов, влетевших вместе с импульсом в пространство взаимодействия, и для которых

$$\Delta V_z \simeq u_G^2 t_p \,/\, l \ll u_G$$

Концентрация активных частиц

$$n_b \simeq \iint 2\pi V_\perp f dV_\perp dV_z$$



Уравнения движения облака активных электронов и уравнения Максвелла в фоновой плазме образуют самосогласованную систему уравнений. Пространственно-временная эволюция облака активных электронов, взаимодействующих с электромагнитным импульсом, может быть описана уравнениями квазигидродинамики, которые в линейном приближении имеют следующий вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_G\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}V_{z\sim}\\ n_{b\sim}\\ E_{z\sim}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -(e\,/\,m)\\ -in_b(\omega_p\,/\,c)cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \omega_B^3(mc\,/\,32n_pe\omega_p)\,\mathbf{sin}^2\,\theta\,\mathbf{cos}^2\,\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{z\sim}\\ n_{b\sim}\\ E_{z\sim}\end{pmatrix}$$

Эта система уравнений укладывается в рамки, очерченные теорией размерности при $dz\,/\,dt=u_G$ и подходящих величинах в матрице. Для процесса $\mathbf{exp}(-i\omega t+ik_zz)$ системе соответствует характеристическое уравнение, определяющее эволюцию спектральных компонент импульса

$$(\omega-k_zu_G)^3=\frac{n_b\omega_B^3}{32n_b}\mathbf{sin}^2\,\theta\left|\mathbf{cos}\,\theta\right|^3$$

Такое кубичное уравнение имеет неустойчивое решение с инкрементом, величина которого после подстановки значений всех величин, объясняет темп изменения спектральных форм электромагнитных излучений

$$\gamma=\frac{\sqrt{3}}{4}\omega_B\left(\frac{n_b}{4n_p}\mathbf{sin}^2\,\theta\right)^{1/3}\left|\mathbf{cos}\,\theta\right|$$

6. Заключение

• Мы вычислили величину размерности Хаусдорфа для нескольких типичных примеров электромагнитных излучений с хоровой структурой динамического спектра. Во всех случаях размерность оказалась нецелой, что указывает на сложность наблюдаемого явления.

• Результаты показали, что размерность хоров лежит в интервале $2 < dim < 10$ и для аналитического описания этих излучений требуется небольшое число переменных и нелинейных автономных дифференциальных уравнений.

• Обнаружены скачки величины размерности при изменении временного интервала.

• Для описания возбуждения хоровых излучений в одном направлении преимущественно в верхней частотной полосе с некоторыми элементами в нижней частотной полосе требуется 3 уравнения.

• Полученные результаты не противоречат выводам теории, основанной на *BPA* (Beam Pulse Amplifier) механизме возбуждения хоров.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда по проекту № 20-12-00268

Список литературы

- Bespalov P.A., Savina O.N., Neshchetkin G.M. Hausdorf dimension of electromagnetic chorus emissions in their excitation region according to Van Allen probe data. *Results in Physics*, 2022, v. 35,article id. 105295.
- Bell TF., Inan US., Haque N., Pickett JS. Geophys Res Lett, 36 (11) (2009), p. L11101.
- Eckman JP., Ruelle D. Rev Modern Phys, 57 (3) (1985), pp. 617-656.
- Takens F. Lect Notes Math, 898 (1981), pp. 366-381.
- Henon M. Comm Math Phys, 50 (1) (1976), pp. 69-77.