Численное исследование черновских аппроксимаций решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Денис Минеев

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”

НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ

Научный руководитель: Иван Дмитриевич Ремизов, к.ф-м.н., доцент кафедры ФМ

29 мая 2023 г.

Введение

Известно, что нахождение решений дифференциальных уравнений является распространенной математической задачей. В процессе решения дифференциальных уравнений не всегда получается найти решение в виде короткой формулы в элементарных функциях (или в каком-то не слишком обширном классе специальных функций). В силу этого широко используются приблеженные методы, предъявляющие вместо решения другую функцию, в некотором смысле мало отличающуюся от решения. Эта функция называется приближенным решением, а также аппроксимацией для решения. Одним из методов нахождения аппроксимаций является формула Фейнмана.

Общая формула

Основной целью этого исследования является численное и аналитическое исследования формулы Фейнмана представленной в статье Ивана Ремизова . Данная формула находит решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффицентами вида:

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda) = -g(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

Введем формулу черновской аппроксимации, основанной на формуле предложенной в статье Бутко-Гротхауса-Смолянова.

Формула нахождения точного решения имеет вид:

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Bigg[\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_{n} \exp\left(\frac{t}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(c(x_{j-1}) - \frac{b(x_{j-1})^2}{4a(x_{j-1})} \right) \right) \times$$

$$\times \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})}{2a(x_{j-1})} \right) \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi t}} \right)^n \left(\prod_{j=0}^{n-1} a(x_j) \right)^{-1\backslash 2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{n}{4t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_j - x_{j+1})^2}{a(x_j)} \right) f(x_n) dx_1 \dots dx_n \Bigg] dt$$

Численное исследование Черновских аппроксимаций

Так как аналитически вычислить интеграл с переменными коэфициентами a, b, c является очень сложной задачей, воспользуемся численными методами. Воспользуемся численным интегрирования с использованием метода Монте-Карло. Значение черновской аппроксимации в точке x_0 будем находить таким методом:

$$\int_a^b f(x_0, y)dy \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_0, y_i) \tag{1}$$

Где y_i произвольные точки из области интегрирования. С помощью Python и библиотек NumPy получилось построить графики приближенного значения для различных n.

Основной проблемой данного метода является то, что Чернвкие аппроксимации и метод Монте-Карло имеют собственную ошибку приближения, связать которые является очень трудной задачей, поэтому качественно оценить данный метод не является возможным.

Полученные графики отображают аппроксимацию для различных n.

В качестве первого теста рассмотрим вариант с постоянными коэфициентами a, b, c.

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

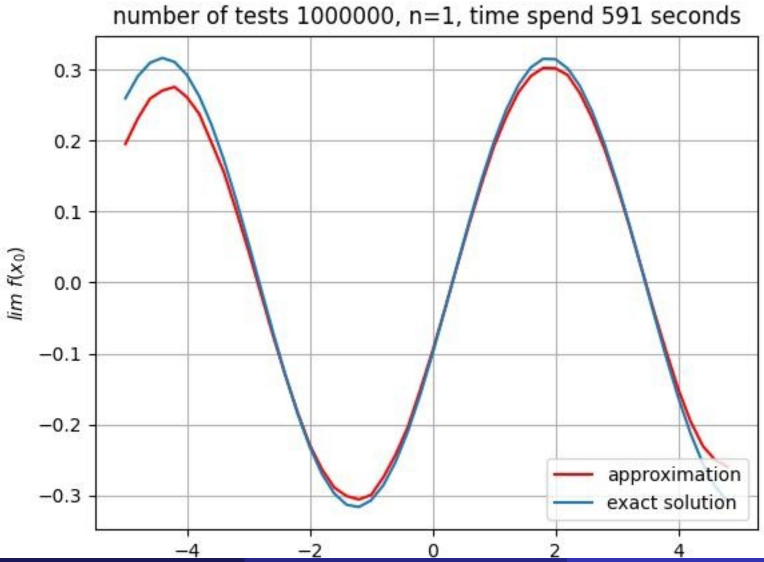
$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = -\sin(x)$$

Где коэффиценты:

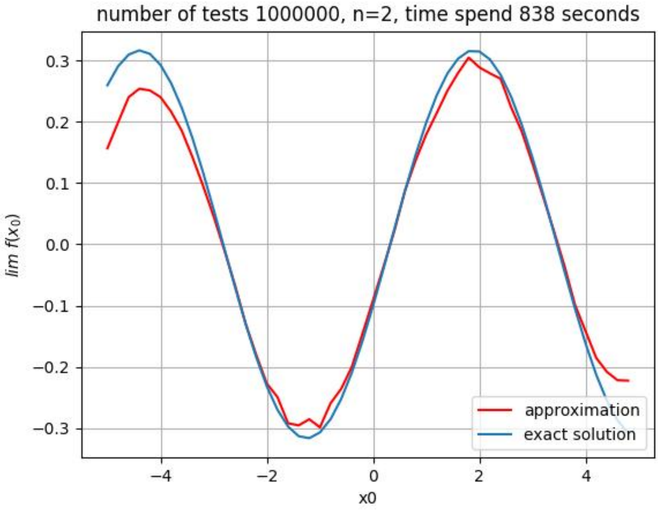
a(x)=1 b(x)=-1 c(x)=-0,5

$\lambda = 1,5 \quad g(x) = sin(x) \quad f(x) = \frac{3\sin(x) - \cos(x)}{10}$

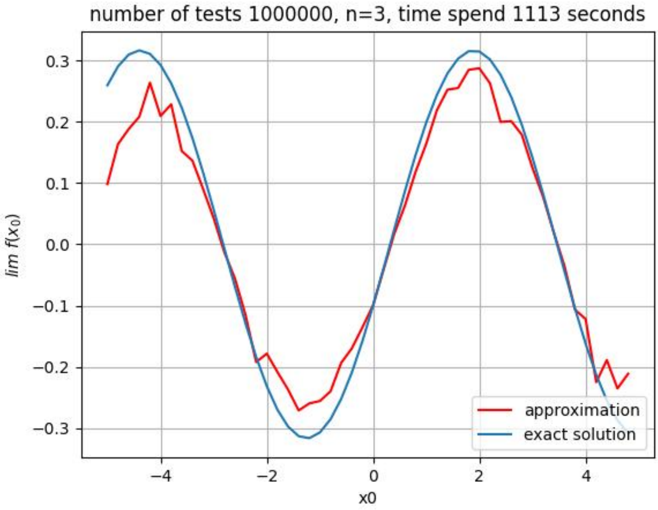
Заметим, что в тестах с постоянными коэффицентами точным решением является значеним аппроксимации. $1)n = 1, N = 1000000$:



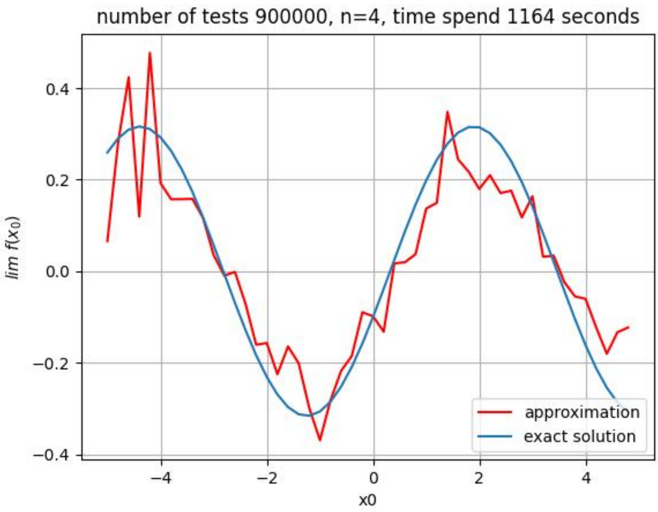
2)$n = 2, N = 1000000$:



3)$n = 3, N = 1000000$:



4)$n = 4, N = 900000$:



number of tests 900000, n=4, time spend 1164 seconds
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
lim f(x0)
−4
−2
0
2
4
x0
approximation
exact solution

Ошибка метода Монте-Карло для интеграла по всей вещественной прямой столь велика, что на её фоне ошибку черновских аппроксимаций, мы не увидим, поэтому методы Монте-Карло для этой задачи применять не целесообразно.

Черновские аппроксимации удобный интсрумент, для нахождения приближенного решения, но для данной формулы очень сложно находить решение, как аналитичиски, так и численно, известными мне методами. В докладе рассмотрены и получены результаты приближенных и точных решений для постоянных коэффицентов.

Список литературы

Chernoff P.R. Note on product formulas for operator semigroups. // J. Funct. Anal. 2:2 (1968), 238–242.

Engel, K.-J., Nagel, R. One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations // Springer —2000.

Ya. A. Butko , Martin G., Smolyanov O.G Lagrangian Feyman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains // 2010

Ya.A. Butko. The method of Chernoff approximation. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Volume 325. —- Springer, Cham, 2020. Pp. 19–46. *Ivan D. Remizov* Chernoff approximations as a way of finding the resolvent operator with applications to finding the solution of linear ODE with variable coefficients // 2023