Численное исследование черновских аппроксимаций решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Денис Минеев

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ"

НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ

Научный руководитель: Иван Дмитриевич Ремизов, к.ф-м.н., доцент кафедры ФМ

15 мая 2023 г.

Введение

Известно, что нахождение решений дифференциальных уравнений является распространенной математической задачей. В процессе решения дифференциальных уравнений не всегда получается найти решение в виде короткой формулы в элементарных функциях (или в каком-то не слишком обширном классе специальных функций). В силу этого широко используются приближенные методы, предъявляющие вместо решения другую функцию, в некотором смысле мало отличающуюся от решения. Эта функция называется приближенным решением, а также аппроксимацией для решения. Одним из методов нахождения аппроксимаций является формула Фейнмана.

Общая формула

Основной целью этой курсовой работы является численное и аналитическое исследования формулы Фейнмана представленной в статье Ивана Ремизова . Данная формула находит решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффицентами вида:

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda) = -g(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

Введем формулу черновской аппроксимации, основанной на формуле предложенной в статье Бутко-Гротхауса-Смолянова.

Формула нахождения точного решения имеет вид:

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}}}_{n}\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(c(x_{j-1})-\frac{b(x_{j-1})^2}{4a(x_{j-1})}\right)\right)\times\right.$$

$$\times\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{b(x_{j-1})(x_j-x_{j-1})}{2a(x_{j-1})}\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n\left(\prod_{j=0}^{n-1}a(x_j)\right)^{-1\backslash 2}\times$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{n}{4t}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x_j-x_{j+1})^2}{a(x_j)}\right)f(x_n)dx_1\dots dx_n\right]dt$$

Аналитическое исследование Черновских аппроксимаций

Рассмотрим модельный частный случай дифференциального уравнения:

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = -\sin(x)$$

Где коэффиценты:

a(x)=1 b(x)=-1 c(x)=-0,5

$\lambda = 1,5 \quad g(x) = \sin(x) \quad f(x) = \frac{3\sin(x) - \cos(x)}{10}$

Тогда черновская аппроксимация будет иметь вид:

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-1,5t} \left[\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{t}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(-0,5 - \frac{1}{4} \right) \right) \times \right.$$

$$\times \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{-(x_j - x_{j-1})}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4\pi t}} \right)^n \times$$

$$\left. \times exp\left(-\frac{n}{4t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_j - x_{j+1})^2}{1} \right) \sin x_n dx_1 \dots dx_n \right] dt$$

Для удобства введем замену:

$$u_n = \frac{(x_{n-1} - x_n)\sqrt{n}}{2\sqrt{t}}$$

После упрощения и приминения замены формула будет имееть вид:

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-2{,}25t} \left[\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{u_n \sqrt{n}}{2\sqrt{k}} - u_n^2 \right) \right) \times \right.$$

$$\left. \times (\sqrt{\pi})^{-n} \sin\left(x_{n-1} - \frac{2u_n\sqrt{t}}{\sqrt{n}} \right) du_1 \dots du_n \right] dt$$

Для отдельного интеграла значение будет равняться:

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{u_n\sqrt{n}}{2\sqrt{k}} - u_n^2 \right) \sin\left(x_{n-1} - \frac{2u_n\sqrt{t}}{\sqrt{n}} \right) du_n =$$

$$= \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{-3t}{4n} \right) \sin\left(x_{k-1} - \frac{t}{n} \right)$$

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-2{,}25t} \left[(\sqrt{\pi})^{-n} (\sqrt{\pi})^{n} \exp \frac{-3t}{4} \sin(x_0 - t) \right] dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-3t} \sin(x_0 - t) dt = \frac{3\sin(x) - \cos(x)}{10}$$

С помощью аппроксимации получилось найти точное решение, из этого следует для уравнений с постоянными коэфициентами не получится найти связь точного решения с приближеннным решением.

Функция Чернова приведенная в статье Бутко-Гротхауса-Смолянова

Так как приближенное решение получилось не зависящим от n, скорее всего операторы с такми условиями являются операторной полугруппой, проверим это для произвольных постоянных a, b, c. Рассмотрим оператор, предложенный в статье Бутко-Гротхауса-Смолянова, с заменой, как в прошлом примере.

$$S(t)f(x) = \exp\left(t\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-u^2 - u\frac{b\sqrt{2t}}{\sqrt{a}}\right) f(x - u\sqrt{2at})du$$

Необходимо проверить три условия сильно непрерывной операторной полугруппы для оператора S.

1. $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$,

2. $S(0) = I$, где I единичный оператор,

3.$\lim\limits_{t \to 0} ||S(t)f - S(0)f|| = 0$, для любого фиксированного f.

Проверив эти свойста можно сказать, что множество операторов с такими свойствами образуют сильно непрерывную операторную полугруппу.

Черновские аппроксимации удобный интсрумент, для нахождения приближенного решения, но для данной формулы очень сложно находить решение, как аналитичиски, так и численно, известными мне методами. В исследовании рассмотрены и получены результаты приближенных и точных решений для постоянных коэффицентов.

Список литературы

Chernoff P.R. Note on product formulas for operator semigroups. // J. Funct. Anal. 2:2 (1968), 238–242.

Engel, K.-J., Nagel, R. One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations // Springer —2000.

Ya. A. Butko , Martin G., Smolyanov O.G Lagrangian Feyman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains // 2010

Ya.A. Butko. The method of Chernoff approximation. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Volume 325. —- Springer, Cham, 2020. Pp. 19–46. *Ivan D. Remizov* Chernoff approximations as a way of finding the resolvent operator with applications to finding the solution of linear ODE with variable coefficients // 2023