

Численное исследование скорости сходимости  
черновских аппроксимаций к решению  
уравнения теплопроводности

Ксения Драгунова

# Введение

Черновские аппроксимации — гибкий и мощный инструмент функционального анализа, с помощью которого можно, в частности, находить численно приближённые решения некоторых дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Например, для задачи Коши

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = a(x)u''_{xx}(t, x) + b(x)u'_x(t, x) + c(x)u(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}^1 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

не известна явная формула, выражающая решение через коэффициенты  $a, b, c, u_0$ . Однако, в 2018 году Иван Ремизов построил черновские аппроксимации к решению, а именно, такие функции  $u_n : [0; +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) = u(t, x)$

## Введение

Черновская аппроксимация  $u_n$  задаётся явной формулой в элементарных функциях, содержащей коэффициенты  $a, b, c, u_0$ . В предположении, что функции  $a, b, c, u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ограничены и равномерно непрерывны (т.е. принадлежат пространству  $UCb(\mathbb{R})$ ), И.Ремизов для каждого  $t_0$  построил линейный непрерывный оператор:

$$(W(t)f)(x) = \frac{1}{4}f(x + 2\sqrt{ta(x)}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt{ta(x)}) + \frac{1}{2}f(x + 2b(x)t) + tc(x)f(x)$$

Тогда черновская аппроксимация  $u_n$  задаётся равенством

$$u_n(t, x) = (W(t/n)^n u_0)(x),$$

где  $W(t/n)^n$  это композиция  $n$  линейных ограниченных операторов  $W(t/n)$ . При этом для каждого  $T > 0$  верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(t, x) - u(t, x)| = 0$$

# Введение

История вопроса (кратко):

- 1968 – Пол Чернов (Paul Chernoff) в своей кандидатской диссертации в Гарвардском университете доказывает формулу, пригодную для аппроксимации операторных полугрупп. Эта формула называется теперь формулой Чернова.
- 2000 – Олег Георгиевич Смолянов в Московском университете начинает систематически использовать теорему Чернова для математического обоснования конструкции интеграла Фейнмана
- 2016 – И.Ремизов (ученик О.Г.Смолянова и научный руководитель авторов доклада) впервые строит функцию Чернова на основе операторов сдвига (она была приведена в докладе выше), и ставит вопрос о скорости сходимости черновских аппроксимаций

## Введение

История вопроса (кратко):

- 2017 – И.Ремизов (при участии Д.Тураева) формулирует гипотезы о том, какими свойствами должна обладать функция Чернова, чтобы порождённые ею черновские аппроксимации сходились быстро
- 2019 – А.Веденин (ученик И.Ремизова) на основе этих гипотез для уравнения теплопроводности строит функцию Чернова, которая могла бы давать быстро сходящиеся аппроксимации
- 2020 – авторы доклада численным экспериментом подтверждают факт быстрой сходимости аппроксимаций, построенных А.Ведениным для уравнения теплопроводности
- 2021 – И.Ремизов и О.Е.Галкин доказывают теорему, дающую оценку на скорость сходимости в общем случае

## Введение

Об истории метода черновских аппроксимаций и имевшихся результатах по состоянию на 2018 год можно прочитать в обзоре:

Ya.A. Butko. The method of Chernoff approximation.// Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer, Cham. 2020. Vol. 325. P.19–46.

## Постановка задачи

Работа посвящена построению примеров к теореме Галкина-Ремизова, иллюстрирующих скорость сходимости черновских аппроксимаций к решению задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = u''_{xx}(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

Известно, что при  $u_0 \in UC_b(\mathbb{R})$  решением является непрерывная и ограниченная функция  $u(t, x)$ , заданная формулой:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy, \quad \text{где } \Phi(x, t) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

**Цель исследования** для этого уравнения с известным решением исследовать скорость сходимости черновских аппроксимаций для начальных условий, не удовлетворяющих теореме Галкина-Ремизова.

## Постановка задачи

В работе И.Ремизова содержится гипотеза о более высокой скорости убывания погрешности черновских приближений с помощью функции  $S(t)$  по сравнению с аналогичной погрешностью для функции  $G(t)$ .

$$(G(t)f)(x) = \frac{1}{4}f(x + 2\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt{t}) + \frac{1}{2}f(x),$$

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x + \sqrt{6t}) + \frac{1}{6}f(x - \sqrt{6t}).$$

Функция Чернова  $G(t)$  была построена И.Ремизовым, где приведена формула Чернова для общего случая уравнения с переменными коэффициентами.

Функция Чернова  $S(t)$  была построена в дипломной работе А.Веденина (НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, 2019).



# Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sin x$$

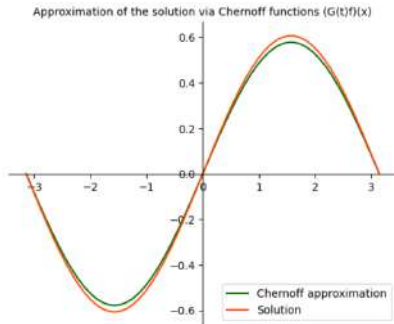
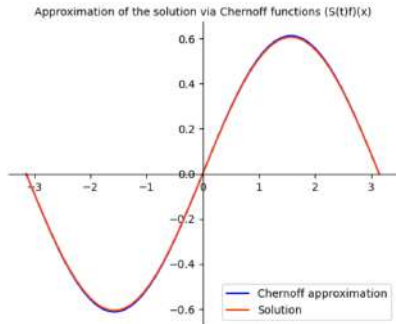


рис. 1.1,  $u_0(x) = \sin x$ ,  $t = \frac{1}{2}$

На рисунке 1.1 изображены точное решение, которое совпадает с графиком функции  $y = \sin x$ , и приближенные решения для функций  $S(t)$  (слева) и  $G(t)$  (справа) при  $n = 1$

# Анализ аппроксимации для начального условия $u_0(x) = \sin x$

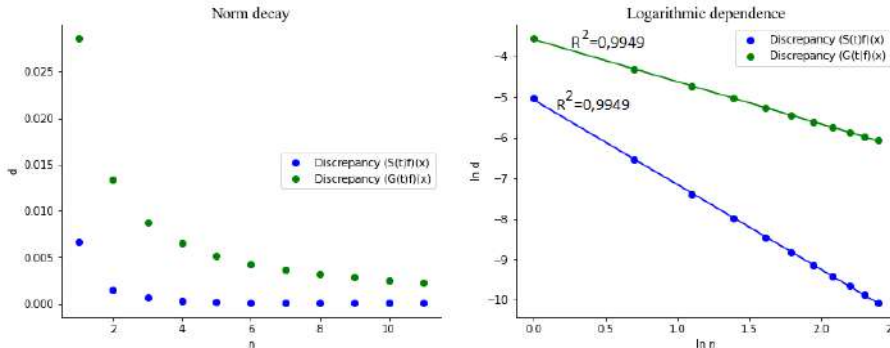


рис. 1.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = \sin x$ ,  $t = \frac{1}{2}$

На рисунке 1.2 представлены графики убывания погрешности черновских приближений в зависимости от  $n$ , где  $1 \leq n \leq 11$ .

## Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sin x$$

Слева изображены графики убывания ошибки для функций Чернова  $S(t)$  (синим) и  $G(t)$  (зеленым) в обычной шкале, справа — эти же графики в логарифмической шкале. График в логарифмической шкале позволяет оценить, насколько скорость сходимости для функции  $G(t)$  меньше скорости сходимости для функции  $S(t)$ . Используя метод наименьших квадратов мы нашли уравнения этих прямых. Округляя коэффициенты, видим, что для синей прямой уравнение получилось следующее:

$$\ln(d) = -2.092 \ln(n) - 5.0671, \text{ т.е. } d = n^{-2.092} e^{-5.0671} = \frac{0.0063}{n^{2.092}}.$$

Аналогично, для зелёной прямой уравнение

$$\ln(d) = -1.0416 \ln(n) - 3.5796, \text{ i.e.}$$

$$d = n^{-1.0416} e^{-3.5796} = \frac{0.0279}{n^{1.0416}}.$$

## Анализ аппроксимации для начального условия $u_0(x) = \sin x$ – какие выводы можно сделать

Напомним, что

$$(G(t)f)(x) = \frac{1}{4}f(x + 2\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt{t}) + \frac{1}{2}f(x),$$

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x + \sqrt{6t}) + \frac{1}{6}f(x - \sqrt{6t})$$

При численном моделировании видно, что на бесконечно гладком начальном условии  $u_0(x) = \sin(x)$  функция Чернова  $G(t)$  даёт скорость убывания ошибки  $\sim 1/n$ , функция Чернова  $S(t)$  даёт скорость убывания ошибки  $\sim 1/n^2$ .

# Анализ аппроксимации для начального условия $u_0(x) = |\sin x|$

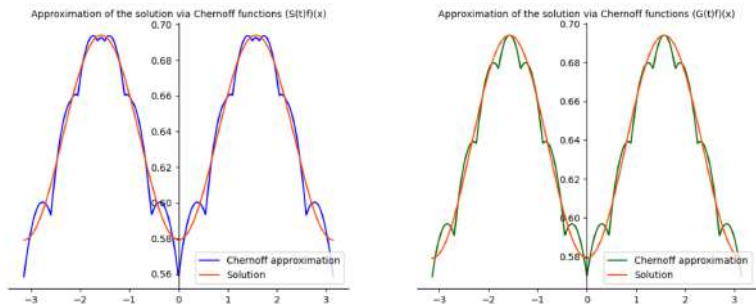


рис. 2.1,  $n = 10$   $u_0(x) = |\sin x|$ ,  $t = \frac{1}{2}$

На рисунке 2.1 изображены два графика приближенного решения для изучаемых нами функций при  $n = 10$ , и точное решение при начальном условии  $u_0(x) = |\sin x|$

# Анализ аппроксимации для начального условия $u_0(x) = |\sin x|$

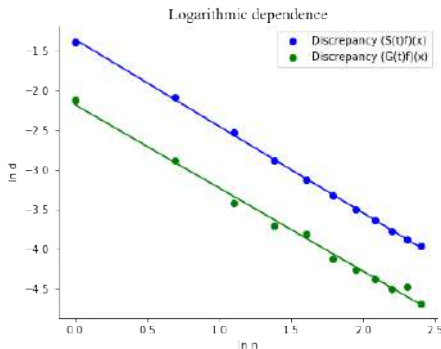
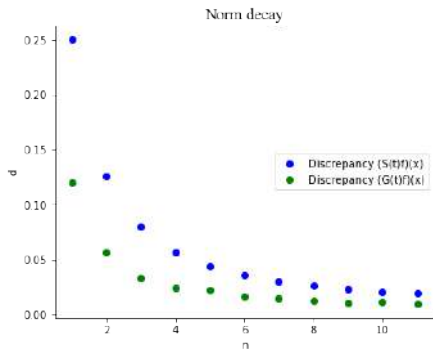


Рис. 2.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = |\sin x|$ ,  $t = \frac{1}{2}$

## Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = |\sin x|$$

Округляя коэффициенты, видим, что для синей прямой (см. Рис. 2.2) уравнение получилось следующее:

$$\ln(d) = -1.0948 \ln(n) - 1.355, \text{ т.е. } d = n^{-1.0948} e^{-1.355} = \frac{0.2579}{n^{1.0948}}.$$

Аналогично, для зелёной прямой уравнение

$$\ln(d) = -1.0508 \ln(n) - 2.1782, \text{ т.е. } d = n^{-1.0508} e^{-2.1782} = \frac{0.1132}{n^{1.0508}}.$$

# Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sqrt{|\sin x|}$$

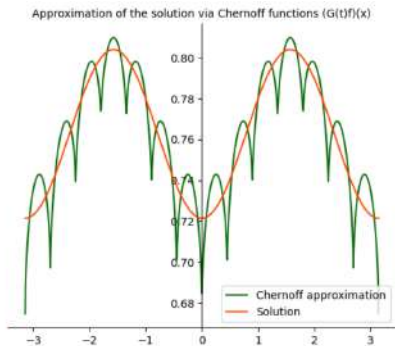
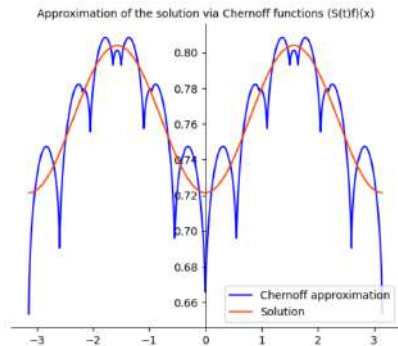


Рис. 3.1,  $n = 10$ ,  $u_0(x) = \sqrt{|\sin x|}$ ,  $t = \frac{1}{2}$



# Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sqrt{|\sin x|}$$

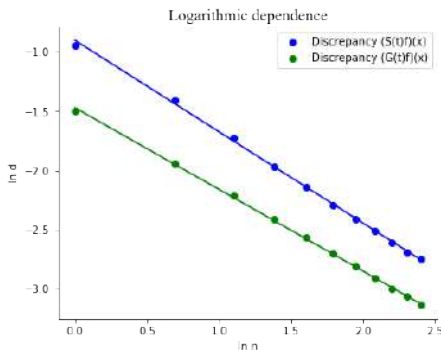
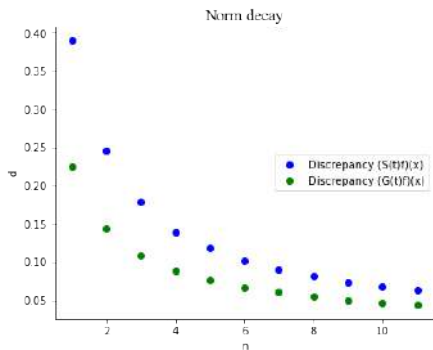


Рис. 3.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = \sqrt{|\sin x|}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

## Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sqrt{|\sin x|}$$

Для синей прямой (см. Рис. 3.2, справа) уравнение получилось следующее:  $\ln(d) = -0.7723 \ln(n) - 0.9013$ , т.е.

$$d = n^{-0.7723} e^{-0.9013} = \frac{0.4060}{n^{0.7723}}.$$

Аналогично, для зелёной прямой (см. Рис. 3.2, справа) уравнение  $\ln(d) = -0.6905 \ln(n) - 1.4709$ , т.е.

$$d = n^{-0.6905} e^{-1.4709} = \frac{0.2297}{n^{0.6905}}.$$

# Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sqrt[2]{|\sin x|^3}$$

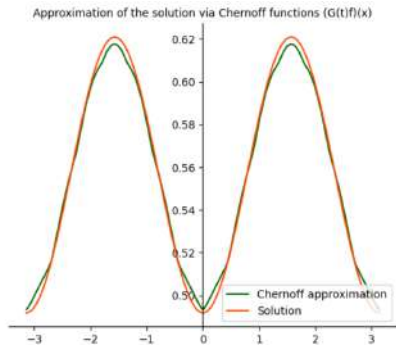
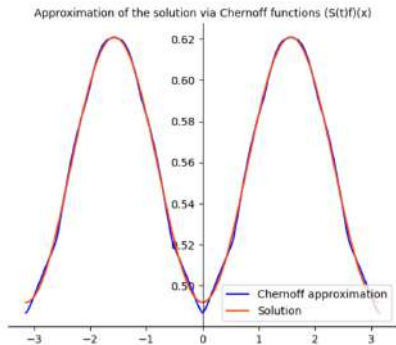


Рис. 4.1,  $n = 10$ ,  $u_0(x) = \sqrt[4]{|\sin x|^3}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

# Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sqrt[2]{|\sin x|^3}$$

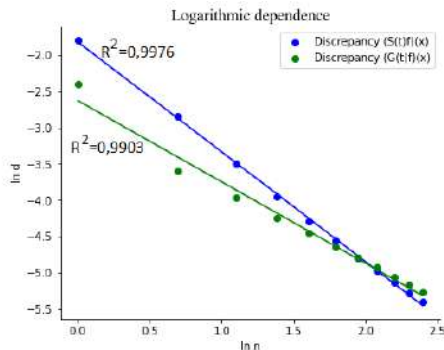
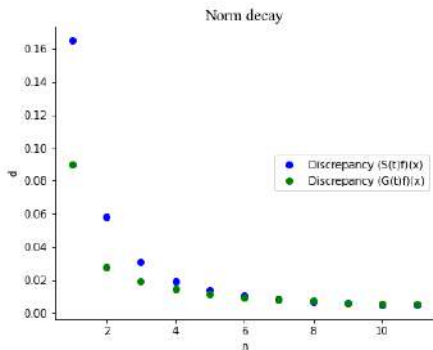


Рис. 4.2,  $1 \leq n \leq 11, u_0(x) = \sqrt[2]{|\sin x|^3}, t = \frac{1}{2}$

## Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sqrt[2]{|\sin x|^3}$$

Для зелёной прямой (см. Рис. 6.2, справа) уравнение  $\ln(d) = -0.9785 \ln(n) - 2.8973$ , т.е.  $d = n^{-0.9785} e^{-2.8973} = \frac{0.0552}{n^{0.9785}}$ . Аналогично, для синей прямой (см. Рис. 6.2) уравнение получилось следующее:  $\ln(d) = -1.5109 \ln(n) - 1.8234$ , т.е.  $d = n^{-1.5109} e^{-1.8234} = \frac{0.1615}{n^{1.5109}}$ .

# Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sqrt[2]{|\sin x|^7}$$

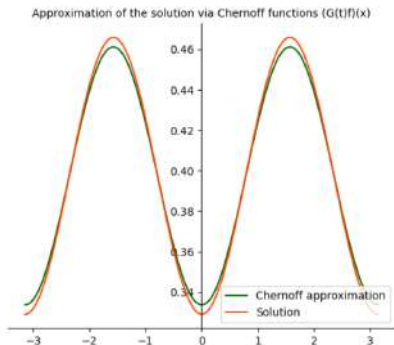
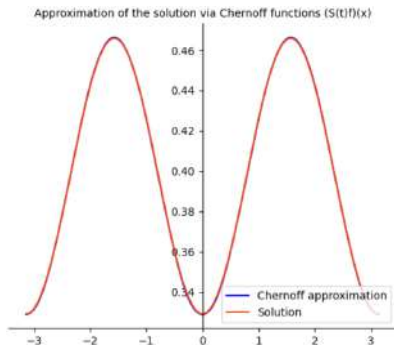


Рис. 5.1,  $n = 10$ ,  $u_0(x) = \sqrt[2]{|\sin x|^7}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

# Анализ аппроксимации для начального условия

$$u_0(x) = \sqrt[2]{|\sin x|^7}$$

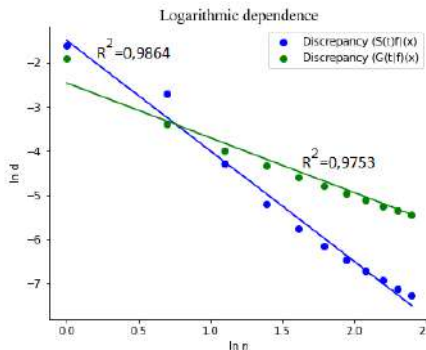
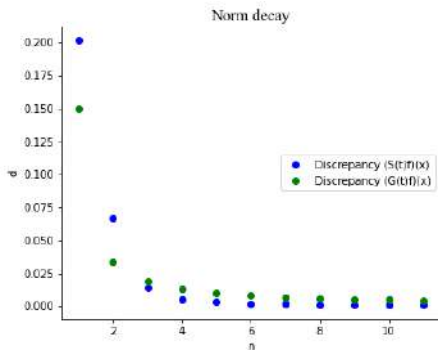


Рис. 5.1,  $n = 10$ ,  $u_0(x) = \sqrt[2]{|\sin x|^7}$ ,  $t = \frac{1}{2}$