

Смотр выпускных квалификационных работ
математиков России 2023

СБОРНИК ДИПЛОМНЫХ РАБОТ



Нижний Новгород

2023

Смотр выпускных квалификационных работ математиков России 2023.
Сборник дипломных работ. Составитель А.В. Веденин.

Кафедра фундаментальной математики НИУ ВШЭ, Нижний Новгород,
10 июня 2023 г.

Объём 866 с.

Тираж: 1 электронный экземпляр, опубликованный на сайте Смотра
<https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr2023> и свободно распространяемый под
лицензией, описанной в стандарте Creative Commons Attribution-NoDerivs

Оглавление

Вступительное слово _____	7
Обращение к оценщикам _____	8

ВКР бакалавров

1. Абдрахимова К. Р. Бифуркации в множествах Мандельброта (ВКР бакалавра, Башкирский государственный университет, Уфа, 2022) _____ 9
2. Баранов. Д. А. Об устойчивости гомотопической связности изотопных тождественному градиентно-подобных диффеоморфизмов тора (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) _____ 33
3. Денисова Н. С. О классификации градиентно-подобных потоков на четырехмерных многообразиях с одним седлом индекса два (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) _____ 51
4. Зеленова В. К. Релейная модель замирающего осциллятора (ВКР бакалавра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль 2023) _____ 74
5. Корякин В. А. Разработка эффективных методов исследования гомоклинических бифуркаций многомерных потоков (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) _____ 99
6. Ошмарина О. А. Инварианты Заузленных графов (ВКР бакалавра, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, 2023) _____ 128
7. Родионова Е. К. Реализация классов топологической сопряженности каскадов Морса-Смейла, допускающих комбинаторное описание (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) _____ 159
8. Солдаткин К. А. Гиперхаотическая динамика трехмерных эндоморфизмов (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) _____ 186
9. Тонышева Н. С. Хаотические группы гомеоморфизмов компактных двумерных топологических многообразий с краем (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) _____ 208
10. Трегубов А. С. Вероятностные распределения для конечных ансамблей нерегулярных волн (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) _____ 234

11. Усманова Д. Р. Непрерывные динамические системы с эффектом Олли (ВКР бакалавра, Башкирский государственный университет, Уфа, 2022) _ 292
12. Чилина Е. Е. О динамике 3-гомеоморфизмов с неблуждающим множеством, состоящим из двумерных аттракторов и репеллеров (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023)_____ 331

ВКР магистров

13. Багаутдинова Э. Р . Семейство моделей типа Ходжкина–Хаксли демонстрирующих бистабильность (ВКР магистра, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, 2023) _____353
14. Габдрахманов Р. И. Бифуркации в модели Лэнгфорда (ВКР магистра, ВКР бакалавра, Башкирский государственный университет, Уфа, 2022) _____405
15. Гаврилов О. А. Итерационный метод решения нелокальных задач для некоторых эволюционных уравнений (ВКР магистра, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2023) __ 454
16. Злобин А. А. Синхронизация фазовых осцилляторов Курамото с запаздыванием (ВКР магистра, «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2023) _____496
17. Кондратьев С.В. Динамика уравнения с двумя запаздываниями и финитной нелинейностью (ВКР магистра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль 2023) _____524
18. Кораблина Ю.В. Непрерывность классических операторов в весовых банаховых пространствах голоморфных функций (ВКР магистра, Южный федеральный университет, институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Ростов-на-Дону, 2021)_____ 547
19. Костенко Е. И. Исследование слабой разрешимости дробной модели Фойгта с бесконечной памятью (ВКР магистра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2021) _____597
20. Суроегина А. Е. Forecasting of the waves of Covid-19 using the logistic models (ВКР магистра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) _____634
21. Фисенко К. И. Метод построения решений интегрируемых систем в частных разностях (ВКР магистра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль 2023) _____677
22. Чужинев Б. Б. Локальные представления групп плоских виртуальных кос автоморфизмами свободной группы (ВКР магистра, Новосибирский

ВКР специалистов

23. Завадский К. Г. Об условиях существования простых ростков эквивариантных отображений (ВКР специалиста, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2023) __739
24. Зосимов С. О. Анализ типичных бифуркаций в параметрической модели Виландера океанических циркуляций (ВКР специалиста, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2023) __760
25. Казаков А. А. Вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана (ВКР специалиста, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2023) _____788
26. Онуфриенко М. В. Классификация особенностей гладких функций с конечной циклической группой симметрий (ВКР специалиста, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2023) __815

Положение о смотре _____ 856

Постер Смотра _____ 866

Erratum (14.06.2023). Тема работы Денисовой Н.С. не была указана в оглавлении. В этой версии сборника ошибка исправлена.

Вступительное слово

Уважаемые коллеги! От лица всего Оргкомитета благодарю вас за участие в Смотре. С вашей помощью и поддержкой мы с 2019 года создаём новый важный элемент в системе математического образования в России.

Мы хотим сделать нормой ситуацию, в которой каждый сильный студент-математик будет делать диплом с мыслью о том, чтобы представить его на Смотр и заявить о себе в математическом сообществе. Мы надеемся, что уйдёт в прошлое ситуация, в которой единственными читателями хорошей дипломной работы являются научный руководитель и рецензент. И, конечно, мы надеемся, что Смотр станет удобной площадкой для общения студентов, выпускников, преподавателей, научных работников и работодателей.

На Смотр в 2023 году подано 26 работ, приём работ завершён и настала фаза собственно смотра - все желающие приглашаются посмотреть работы и оценивать их. О том, как это делать, и кто может быть оценщиком, сказано в обращении к оценщикам - оно следует далее. Здесь напомним лишь, что Оргкомитет ожидает, что перед выставлением оценки оценщик уделит изучению работы хотя бы 30 минут своего времени. Мы понимаем, что глубоко изучить работу за это время невозможно, поэтому просим авторов работ отнестись к оценкам снисходительно. Всё же это именно смотр, а не конкурс, в котором каждая работа изучается подробно.

Также стоит отметить, что сборник дипломных работ не является рецензируемым изданием, поэтому публикация научного результата в составе сборника не является препятствием для публикации этого результата в составе научной статьи. Тем не менее, сборник датируется, поэтому он может быть использован для определения научного приоритета.

В заключение хочу ещё раз поблагодарить всех участников, представивших работы на Смотр, и всех оценщиков, готовых уделить время просмотру и оценке работ.

С уважением,

Иван Ремизов

Председатель оргкомитета Смотра выпускных
квалификационных работ математиков России 2023

К.ф.-м.н., доцент кафедры фундаментальной математики
НИУ ВШЭ - Нижний Новгород

Обращение к оценщикам Смотра дипломных работ математиков России 2023

Уважаемые коллеги!

Приглашаю вас принять участие в Смотре дипломных работ математиков России 2023. На Смотр представлены 26 дипломных работ (выпускных квалификационных работ) бакалавров, специалистов, магистров со всех уголков нашей необъятной страны. С 10 июня 2023 по 1 июля 2023 проходит фаза оценки работ. Оценщик – это тот, кто ставит оценки за работы. Для удобства оценщиков работы свёрстаны в сборник, который с 10 июня 2023 доступен на сайте Смотра <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr2022>

Существует три группы оценщиков:

1. Авторы работ, представившие свои работы на Смотр (выпускники)
2. Сотрудники научно-исследовательских и образовательных организаций (учёные и преподаватели)
3. Сотрудники любых организаций, иногда нанимающих на работу математиков (работодатели)

Каждому оценщику выдаются номера 5 работ случайным образом, и ещё от 2 до 5 работ он должен выбрать себе для оценки самостоятельно из общего списка, отправляясь от сферы своих интересов.

При оценке работ участников оценщик Смотра руководствуется следующими критериями:

1. Понятность постановки задачи. После прочтения работы должно быть ясно, какая задача решалась автором.
2. Доступность введения для неспециалистов. Базовые термины и факты исследуемой области должны быть изложены в форме, доступной для понимания широкой математической аудиторией.
3. Качество изложения основного научного результата, полученного автором.
4. Качество обоснования основного научного результата, полученного автором.
5. Качество оформления работы - стилистическое единство, качество вёрстки текста, наличие необходимых частей в работе.
6. Наличие и уровень публикаций автора по теме работы.

Оценивание проводится по бинарной шкале (0 или 1 балл), где «0» – «работа имеет существенные недостатки и в представленном на Смотр виде не может считаться достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно», а «1» – «работа является достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно». Иными словами, нравится «1», или не нравится «0».

Оценки по каждой из групп оценщиков суммируются, в результате каждая работа получает трёхмерный вектор оценки: три числа, по одному от каждой из групп оценщиков.

Обращаю ваше внимание на то, что писать рецензии или как-то обосновывать своё мнение не требуется. Это Смотр, а не конкурс, подробного разбора работ не предполагается. Тем не менее, количество положительных оценок косвенно свидетельствует о том, что работа написана на интересную тему и выполнена хорошо. Оргкомитет ожидает, что каждый оценщик посвятит изучению каждой работы как минимум 30 минут. **Таким образом, минимально достаточное для участия в оценке время составляет три с половиной часа – 7 работ, по 30 минут на каждую.**

Чтобы стать оценщиком, нужно написать письмо на почту hseennconfmath@gmail.com и указать в нём:

- Имя, Отчество, Фамилию
- Учёную степень (если имеется) или уровень образования (бакалавр, специалист, магистр), с указанием специальности
- Должность и место работы
- Согласие на публикацию представленных выше данных – они будут указаны в общем списке оценщиков и мы просим подтвердить, что Вы не против.
- Согласие или отсутствие согласия на публикацию Вашего адреса электронной почты.
- Согласие или отсутствие согласия на публикацию выставленных оценок «1» в неанонимном виде. Оценки «0» опубликованы не будут в любом случае.
- Личный номер телефона (не публикуется, используется только для оперативной связи с оргкомитетом в случае необходимости)

Оргкомитет отметит грамотами участников Смотра, набравших максимальное количество баллов по каждой из трёх групп оценщиков, а также участников, набравших максимальное общее число баллов.

Ваша организация тоже может принять участие в награждении: предоставить всем участниками или победителям сувенирную продукцию с логотипом организации, грамоты, книги, денежные и любые другие призы, а также принять участие в торжественном закрытии Смотра в июле 2022 в Нижнем Новгороде. Вы также можете отметить авторов отдельных работ по любому удобному вам критерию.

От одной организации Оргкомитет будет рад принять до 5 оценщиков включительно. Для образовательных учреждений организацией считается факультет, а не весь университет.

Просим завершить оценку работ к 1 июля 2023 и выслать оценки на почту hseennconfmath@gmail.com Вы поможете организаторам, если завершите оценку раньше этого крайнего срока.

Вся информация о ходе Смотра доступна на сайте <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr2023>

Ответы на частые вопросы:

Вопрос. Как сравнивать бакалаврскую работу с магистерской? Они же разные по уровню.

Ответ. Их не нужно сравнивать между собой. Нужно сравнивать бакалаврские работы с уровнем, который Вы считаете хорошим для бакалаврской работы. А работы магистров сравнивать с уровнем, который Вы считаете хорошим уровнем для магистерской работы. Если приглядеться, то видно, что это написано в обращении к оценщикам, хоть и не так явно.

С уважением,
Иван Ремизов

Доцент кафедры фундаментальной математики ВШЭ
Председатель оргкомитета Смотра
<https://www.hse.ru/org/persons/215573332>

P.S.: Для обсуждения любых вопросов в связи с изложенным выше можно связаться со мной напрямую по следующим контактными данным:

ivremizov@yandex.ru 89263595145 vk.com/ivan_remizov

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от *Абрахимовой Карина
Робертовна*

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Бифуркации в множествах Мандельброта» являются: доказательство леммы 1, пункты 3.1, 3.2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена переписка с профессором кафедры дифференциальных уравнений факультета математики Уфимского университета науки и технологий Юмагуловым Маратом Гаязовичем.
- В период с 01 января по 15 февраля 2022 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google по следующим ключевым словам: фракталы и хаос, динамические системы, множество Мандельброта. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 23 июня 2022 г.. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись

Абрахимова
Карина Робертовна

30.05.2023 г.
Уфа, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ПО ПРОГРАММЕ БАКАЛАВРИАТА

АБДРАХИМОВА КАРИНА РОБЕРТОВНА

БИФУРКАЦИИ В МНОЖЕСТВАХ МАНДЕЛЬБРОТА

Выполнил:
Студент(ка) 4 курса очной формы обучения
Направление подготовки (специальность)
01.03.01 «Математика»
Направленность (профиль) Дифференциальные
уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Допущено к защите в ГЭК и проверено на
объем заимствования:

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Руководитель
д.ф.-м.н., профессор

_____ / М.Г. Юмагулов

_____ / М.Г. Юмагулов

УФА – 2022

Содержание

Введение	3
§1. Краткие сведения из теории динамических систем	4
1.1 Точки равновесия и циклы	4
1.2 Устойчивость точек равновесия и циклов	5
1.3. Гиперболические точки равновесия.	5
1.4 Точки бифуркаций	6
1.5 Сценарии бифуркаций	7
1.6 Комплексные динамические системы.....	8
§2. Множество Мандельброта	9
2.1 Множество Мандельброта.....	9
2.2 Постановка задачи	10
2.3 Свойства подобластей множества Мандельброта.....	10
§3. Бифуркационные свойства множества Мандельброта.....	14
3.1 Точки соприкосновения подобластей	14
3.2 Все точки всех границ подобластей являются точками бифуркаций	19
3.3 Переход к хаосу.....	21
Заключение	22
Список литературы	23

Введение

Множество Мандельброта – один из самых известных фракталов в математике. Оно имеет занимательную форму, а самая большая его часть имеет форму сердца.

Большой интерес представляет изучение множества Мандельброта с точки зрения теории бифуркаций. В этом и заключается цель моей дипломной работы.

Сперва вводятся основные понятия из теории динамических систем и нелинейной динамики и проводится анализ множества Мандельброта.

§1. Краткие сведения из теории динамических систем

Приведем вспомогательные определения из общей теории динамических систем и нелинейной динамики (см. [1-4]).

Рассмотрим вещественную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_n \in \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Предполагается, что функция $f(x)$ определена во всем \mathbb{R}^N и непрерывна.

1.1 Точки равновесия и циклы

Определение 1. Точками равновесия или неподвижными точками системы (1) называются постоянные решения этой системы, т.е. решения вида

$$x_0, x_0, x_0, \dots, x_0, \dots$$

Чтобы найти точки равновесия необходимо и достаточно решить следующее уравнение

$$x = f(x). \quad (2)$$

Определение 2. Решение вида

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_0, \dots$$

называется *периодическим решением* или *p-циклом*; здесь p – натуральное число.

Для нахождения циклов периода p следует решить уравнение

$$x = f^{(p)}(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f(x)) \dots))}_{p \text{ раз}}. \quad (3)$$

Ясно, что точки равновесия системы (1) также будут являться решениями уравнения (3) при любом p .

1.2 Устойчивость точек равновесия и циклов

Продолжим рассматривать систему (1).

Пусть точка x^* будет точкой равновесия системы $x_{n+1} = f(x_n)$, т.е. будет решением уравнения $x = f(x)$. Пусть для простоты система (1) является одномерной, т.е. в ней $x_n \in \mathbb{R}^1$.

Для исследования устойчивости точки равновесия x^* воспользуемся теоремой.

Теорема 1. *Точка равновесия x^* является асимптотически устойчивой в том случае, если $|f'(x^*)| < 1$. Если же $|f'(x^*)| > 1$, то неподвижная точка x^* будет неустойчивой.*

Пусть теперь система (1) будет иметь цикл периода p :

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_0, \dots$$

Введем в рассмотрение число

$$\alpha_0 = |f'(x_0^*)f'(x_1^*) \dots f'(x_{p-1}^*)|$$

Теорема 2. *Цикл периода p будет асимптотически устойчивым, если число α_0 будет меньше 1. Если же α_0 будет больше 1, то p -цикл будет неустойчив.*

1.3. Гиперболические точки равновесия.

Теперь рассмотрим линейную систему

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_n \in \mathbb{R}^N. \quad (4)$$

где A – квадратная матрица $N \times N$.

Точки равновесия системы (4) найдем, решив уравнение

$$x = Ax . \tag{5}$$

Одно из решений уравнения (5), очевидно, будет нулевым. А ненулевыми решениями будут собственные вектора матрицы A , соответствующие собственному значению $\lambda = 1$.

Пусть матрица A не имеет собственных значений, равных 1 по модулю. В этом случае систему (4) называют *гиперболической*. В гиперболическом случае уравнение (5) не имеет ненулевых решений.

Если же матрица A имеет хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю, то систему (4) называют *негиперболической*.

1.4 Точки бифуркаций

Пусть задана система с параметром μ

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_n, \mu \in \mathbb{R}^N \tag{6}$$

Пусть при некотором $\mu = \mu_0$ система (6) имеет точку равновесия $x = x^*$.

Определение 3. Значение μ_0 называют *точкой бифуркации* системы (6), если при $\mu = \mu_0$ точка равновесия x^* является негиперболической. А именно, значение μ_0 будет точкой бифуркации, если матрица Якоби $A_0 = f'_x(x^*, \mu_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение равное 1 по модулю.

Замечание. Пусть система (6) является одномерной и вещественной. Пусть она имеет точку равновесия $x = x^*$ при $\mu = \mu_0$, т.е. $x^* = f(x^*, \mu_0)$. Тогда μ_0 будет являться точкой бифуркации системы (6) в окрестности точки равновесия x^* , если

$$f'_x(x^*, \mu_0) = 1 \quad \text{или} \quad f'_x(x^*, \mu_0) = -1$$

1.5 Сценарии бифуркаций

Бифуркации – ситуации, в которых небольшое изменение параметров приводит к качественному изменению поведения решений.

Пусть x^* - точка равновесия системы (6) при $\mu = \mu_0$, т. е. $x^* = f(x^*, \mu_0)$, $A_0 = f'_x(x^*, \mu_0)$ – матрица Якоби.

μ_0 – точка бифуркации системы (6), если x^* - негиперболическая, т.е. если матрица Якоби A_0 имеет хотя бы одно собственное значение $|\lambda| = 1$.

Основные сценарии бифуркаций:

H1) Матрица Якоби A_0 имеет простое собственное значение $\lambda = 1$;

H2) Матрица Якоби A_0 имеет простое собственное значение $\lambda = -1$;

H3) Матрица Якоби A_0 имеет пару простых собственных значений $\lambda = e^{\pm i\varphi}$;

Случай H1:

В этом случае при переходе μ через μ_0 в окрестности точки равновесия x^* возникают новые точки равновесия x^{**} (*бифуркация кратного равновесия*)

Случай H2:

В этом случае при переходе μ через μ_0 в окрестности точки равновесия x^* возникает новый цикл периода 2 (*бифуркация удвоения периода*)

Случай H3:

В этом случае при переходе μ через μ_0 в окрестности точки равновесия x^* возникают циклы больших периодов или ограниченные решения (*бифуркация Андронова-Хопфа*)

1.6 Комплексные динамические системы

В пунктах 1.1–1.5 были рассмотрены дискретные динамические системы в пространстве \mathbb{R}^N .

Аналогично мы можем рассматривать комплексную динамическую систему

$$z_{n+1} = f(z_n) \quad (7)$$

где $f(z)$ - функция комплексного переменного. Все вышеприведенные понятия и построения естественным образом переносятся и на систему (7).

§2. Множество Мандельброта

2.1 Множество Мандельброта

Рассмотрим комплексную динамическую систему

$$z_{n+1} = f(z_n, \mu) , \quad (8)$$

в которой

$$f(z, \mu) = z^2 + \mu \quad (9)$$

где z и $\mu \in \mathbb{C}$.

Анализ динамики системы (8) в зависимости от параметра μ приводит нас к множеству Мандельброта.

Дадим ему определение (см. [3, 4, 6, 8]).

Множество Мандельброта – это множество таких μ :

$$M = \{ \mu : \text{решение } z_n \text{ системы (8) при } z_0 = 0 \text{ ограничено} \}$$

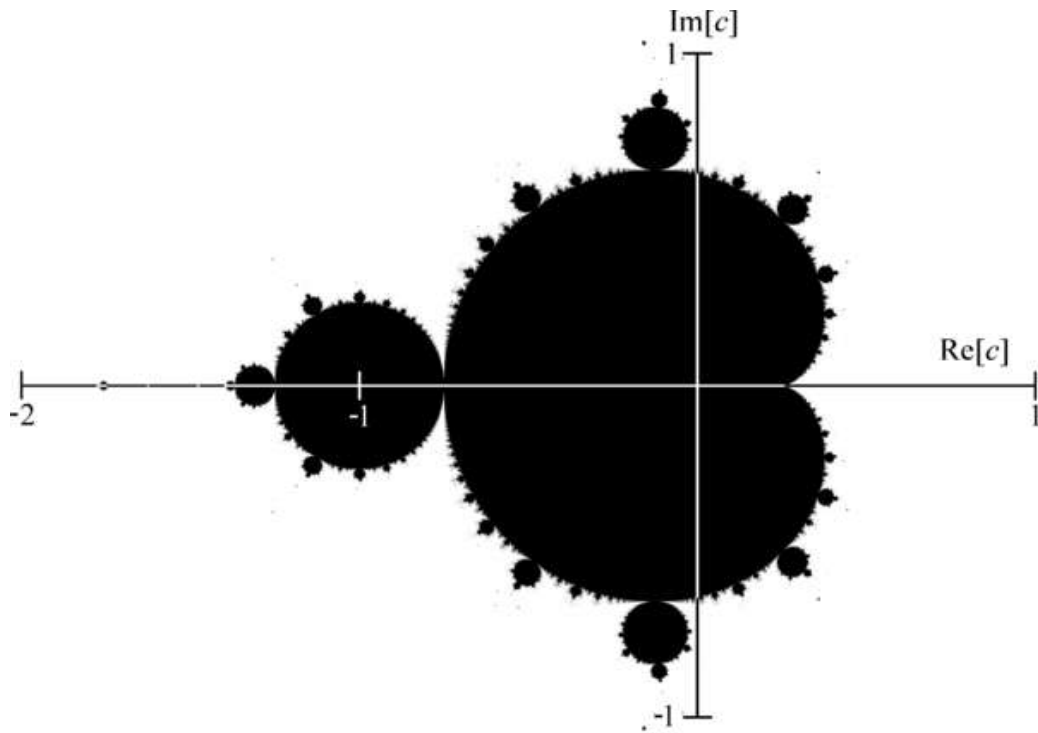


Рисунок 1. Множество Мандельброта.

2.2 Постановка задачи

Целью моей дипломной работы являются следующие исследования:

- 1) Показать, что подобласти множества Мандельброта являются областями устойчивости тех или иных решений системы (8).
- 2) Показать, что точки соприкосновения подобластей множества Мандельброта являются точками бифуркаций системы (8).
- 3) Показать, что все точки всех границ подобластей множества Мандельброта являются точками бифуркаций системы (8).

2.3 Свойства подобластей множества Мандельброта

Будем так же рассматривать функцию (9), а соответственно, и комплексную динамическую систему (8):

$$z_{n+1} = z_n^2 + \mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad z_n \in \mathbb{C}, \quad (10)$$

зависящую от комплексного параметра μ .

Проведем анализ динамики системы (10).

Точки равновесия найдем, решив уравнение

$$z = z^2 + \mu \quad (11)$$

или

$$z^2 - z + \mu = 0$$

Решим его:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 * 1 * \mu = 1 - 4\mu$$

Получим два решения

$$z_1^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2};$$
$$z_2^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}{2};$$

Полученные z_1^* и z_2^* и есть точки равновесия системы (10).

Исследуем их на устойчивость.

Для начала нужно взять производную от функции (9): $f'_z(z, \mu) = 2z$.

Подставим по очереди в полученную производную наши точки равновесия.

$$f'_z(z_1^*, \mu) = 2 * \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2} = 1 - \sqrt{1 - 4\mu}$$

$$f'_z(z_2^*, \mu) = 2 * \frac{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}{2} = 1 + \sqrt{1 - 4\mu}$$

Для дальнейшего анализа устойчивости воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. Верно следующее утверждение:

$$|1 + \sqrt{1 - 4\mu}| > 1 \Leftrightarrow \mu \neq \frac{1}{4};$$

Доказательство.

Доказывать будем для аналогичной функции $|1 + \sqrt{z}| > 1$, где $z = a + ib$.

Для этого воспользуемся следующей формулой:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, & \text{если } b \geq 0 \\ \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, & \text{если } b < 0 \end{cases}$$

Начнем с того, что из $z \neq 0 \Rightarrow a + ib \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$.

Приведем вспомогательные формулы.

$$u = \alpha + i\beta$$

$$|u| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (*)$$

$$|u|^2 = \alpha^2 + \beta^2 > 1$$

$$1 + \sqrt{z} = 1 + \underbrace{\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}}_{\alpha} + i \underbrace{\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}}_{\beta}$$

Из (*) следует, что

$$\left(1 + \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right)^2 > 1$$

Раскроем скобки.

$$1 + 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} > 1$$

$$1 + 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} > 1$$

Сократим некоторые слагаемые и упростим выражение.

$$1 + 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{a^2 + b^2} > 1$$

Получим: $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$, $2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} > 0$.

Что и требовалось доказать.

Таким образом, из теоремы 1 получим, что точка равновесия z_1^* является неустойчивой при всех μ , кроме $\mu = \frac{1}{4}$, где характер устойчивости неясен.

Другая же точка равновесия z_2^* может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

В силу теоремы 1 точка z_2^* будет асимптотически устойчивой при $|1 - \sqrt{1 - 4\mu}| < 1$, и неустойчивой при $|1 - \sqrt{1 - 4\mu}| > 1$. Отсюда следует, что область устойчивости нашей точки равновесия z_2^* будет определяться первым неравенством.

$$M = \{\mu: |1 - \sqrt{1 - 4\mu}| < 1\}$$

Для построения этой области нам достаточно решить уравнение

$$|1 - \sqrt{1 - 4\mu}| = 1.$$

Возьмем ему эквивалентное уравнение

$$|1 - \sqrt{1 - 4\mu}| = e^{\varphi i} \tag{12}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$1 - \sqrt{1 - 4\mu} = e^{\varphi i}$$

$$\sqrt{1 - 4\mu} = 1 - e^{\varphi i}$$

$$1 - 4\mu = (1 - e^{\varphi i})^2$$

$$1 - 4\mu = 1 - 2e^{\varphi i} + e^{2\varphi i}$$

$$4\mu = 2e^{\varphi i} - e^{2\varphi i}$$

$$\mu = \frac{e^{\varphi i}}{2} - \frac{e^{2\varphi i}}{4}$$

В зависимости от изменения $\varphi \in [0, 2\pi]$ данное решение описывает кардиоиду, первую, самую большую область множества Мандельброта.

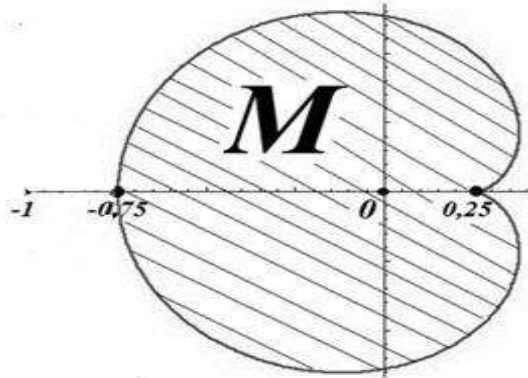


Рисунок 2. Область устойчивости точки равновесия z_2^*

§3. Бифуркационные свойства множества Мандельброта

3.1 Точки соприкосновения подобластей

Точка μ будет точкой бифуркации системы (10), когда выполнено равенство

$$|1 - \sqrt{1 - 4\mu}| = 1$$

что равносильно уравнению (12).

Возможны 3 сценария бифуркаций:

$$H1) f'_z(z^*, \mu_0) = 1$$

$$H2) f'_z(z^*, \mu_0) = -1$$

$$H3) f'_z(z^*, \mu_0) = e^{\varphi i}$$

Рассмотрим каждый из сценариев по очереди.

$$H1) \quad 1 - \sqrt{1 - 4\mu} = 1$$

$$\sqrt{1 - 4\mu} = 0$$

$$1 - 4\mu = 0$$

$$1 = 4\mu$$

$$\mu_0 = \frac{1}{4}$$

Значение $\mu_0 = \frac{1}{4}$ является точкой бифуркации кратного равновесия (в окрестности точки z_1^* возникают новые точки равновесия).

Если мы подставим $\mu_0 = \frac{1}{4}$ в обе наши точки равновесия z_1^* и z_2^* , то

получим одну точку равновесия равную $z = \frac{1}{2}$.

Отсюда следует, что при переходе от μ к $\mu_0 = \frac{1}{4}$ в окрестности точки $z = \frac{1}{2}$ возникают две новые точки z_1^* и z_2^* .

$$\text{H2)} \quad 1 - \sqrt{1 - 4\mu} = -1$$

$$\sqrt{1 - 4\mu} = 2$$

$$1 - 4\mu = 4$$

$$\mu_0 = -\frac{3}{4}$$

Значение $\mu_0 = -\frac{3}{4}$ является точкой бифуркации удвоения периода (вблизи окрестности точки равновесия возникают циклы периода 2).

Найдем эти циклы, для этого решим уравнение

$$z = f^{(2)}(z, \mu) = (z^2 + \mu)^2 + \mu$$

Раскрыв скобки, получим

$$z^4 + 2z^2\mu - z + \mu^2 + \mu = 0 \quad (13)$$

Это уравнение имеет 4 решения, два из которых — это наши точки равновесия z_1^* и z_2^* . Чтобы найти остальные два корня, поделим уравнение (13) на $z = z^2 + \mu$.

Получим разложение на множители.

$$(z^2 - z + \mu)(z^2 + z + \mu + 1) = 0$$

Корни первой скобки это и есть z_1^* и z_2^* .

Найдем корни из второй скобки. Решаем так же, как обычное квадратное уравнение и получим два решения. Обозначим их буквой c .

$$c_1 = \frac{1 - \sqrt{-3 - 4\mu}}{2} \tag{14}$$

$$c_2 = \frac{1 + \sqrt{-3 - 4\mu}}{2}$$

Если подставить $\mu_0 = -\frac{3}{4}$ в значения (14), то получим $c = -\frac{1}{2}$.

И если это же значение мы подставим в точку равновесия z_2^* , то получим $z_2 = -\frac{1}{2}$.

Отсюда следует, что вблизи окрестности точки z_2^* действительно возникают циклы периода 2, при этом их образуют числа (14).

Исследуем устойчивость наших циклов.

Найдем число α_0 .

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= f'_z(c_1, \mu) f'_z(c_2, \mu) = 2 * \frac{1 - \sqrt{-3 - 4\mu}}{2} * 2 * \frac{1 + \sqrt{-3 - 4\mu}}{2} \\ &= (1 - \sqrt{-3 - 4\mu}) * (1 + \sqrt{-3 - 4\mu}) = 1 + 3 + 4\mu = 4 + 4\mu \\ &= 4 * (1 + \mu) \end{aligned}$$

Из теоремы 2 главы 1 следует, что при $|1 + \mu| < \frac{1}{4}$ цикл (14) будет асимптотически устойчивым, а при $|1 + \mu| > \frac{1}{4}$ неустойчивым.

Неравенство $|1 + \mu| < \frac{1}{4}$ описывает на комплексной плоскости окружность с центром в точке -1 и радиусом $\frac{1}{4}$.

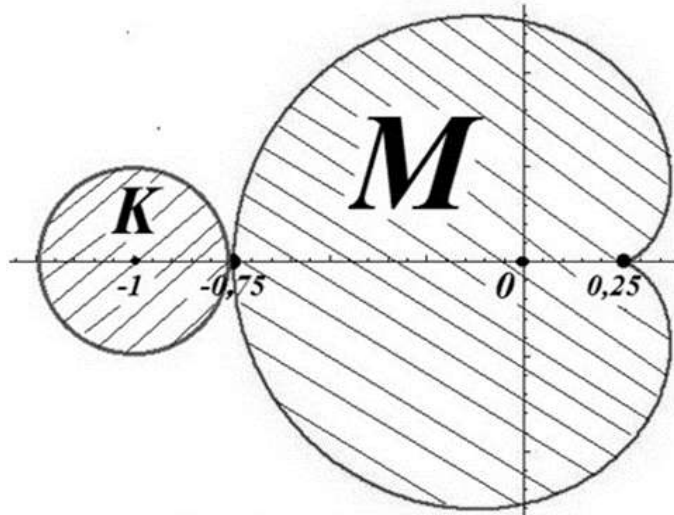


Рисунок 3

НЗ)
$$1 - \sqrt{1 - 4\mu} = e^{2\pi\varphi i}$$

где $\varphi \in [0,1]$.

Динамика системы (10) в этом случае существенно зависит от того, каким будет число φ : рациональным или иррациональным. Если число φ является рациональным, т.е. φ представимо в виде $\varphi = \frac{l}{m}$, где l и m взаимно простые числа, то в окрестности точки z^* возникают циклы периода m . Если число φ является иррациональным, то в окрестности точки z^* возникает замкнутая инвариантная кривая $\Gamma(\mu)$, динамика которой достаточно сложна.

Для исследования возьмем число $\varphi = \frac{1}{4}$.

В этом случае числа 1 и 4 являются взаимно простыми (НОД (1,4) = 1).

Отсюда следует, что при $\varphi = \frac{1}{4}$ возникают циклы периода 4.

Покажем, что задача о бифуркациях в окрестности цикла (14) системы (10) в случае Н2) приводит к точке бифуркации $\mu_0 = -\frac{5}{4}$, при переходе через которую в системе (10) возникают циклы периода 4.

Перейдем от системы (10) к системе

$$z_{n+1} = (z_n^2 + \mu)^2 + \mu \quad (15)$$

Найдем производную.

$$\begin{aligned} f'_z(z_n, \mu) &= ((z_n^2 + \mu)^2 + \mu)' = ((z_n^2 + \mu)^2)' = (z_n^4 + 2z_n^2\mu + \mu^2)' \\ &= 4z_n^3 + 4z_n\mu \end{aligned}$$

Подставляем (14).

$$\begin{aligned} 4 * \left(\frac{1 - \sqrt{-3 - 4\mu}}{2} \right)^3 + 4 * \left(\frac{1 - \sqrt{-3 - 4\mu}}{2} \right) * \mu &= 1 \\ 4 * \frac{(1 - \sqrt{-3 - 4\mu})^3}{8} + 2\mu(1 - \sqrt{-3 - 4\mu}) &= 1 \\ \frac{4\mu\sqrt{-3 - 4\mu} - 12\mu - 8}{2} + 2\mu - 2\mu\sqrt{-3 - 4\mu} &= 1 \\ 2\mu\sqrt{-3 - 4\mu} - 6\mu - 4 + 2\mu - 2\mu\sqrt{-3 - 4\mu} &= 1 \\ -4\mu &= 5 \\ \mu_0 &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Значение $\mu_0 = -\frac{5}{4}$ является точкой бифуркации удвоения периода.

Поскольку мы исследовали задачу в окрестности цикла периода 2, то получается, что в окрестности этого цикла появляется новый цикл периода 4.

3.2 Все точки всех границ подобластей являются точками бифуркаций

До этого мы рассматривали точки только на вещественной прямой.

Посмотрим, что же происходит на мнимой оси.

$$1 - \sqrt{1 - 4\mu} = i$$

$$\sqrt{1 - 4\mu} = 1 - i$$

$$1 - 4\mu = (1 - i)^2$$

$$1 - 4\mu = -2i$$

$$4\mu = 1 + 2i$$

$$\mu = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

Если приравнять $1 - \sqrt{1 - 4\mu}$ к $-i$, то получим комплексно сопряженное число $\mu = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i$.

Покажем, что число $\mu = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$ лежит на границе кардиоиды.

Приравняем уравнение кардиоиды и значение $\mu = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$.

$$\mu = \frac{e^{\varphi i}}{2} - \frac{e^{2\varphi i}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

$$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2} - \frac{\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

$$2(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \cos 2\varphi - i\sin 2\varphi = 1 + 2i$$

Выпишем отдельно действительную и мнимую части уравнения и получим следующую систему

$$\begin{cases} 2\cos\varphi - \cos 2\varphi = 1 \\ 2\sin\varphi - \sin 2\varphi = 2 \end{cases}$$

Найдем отдельно решения каждого уравнения системы и потом найдем их пересечение.

$$2\cos\varphi - \cos 2\varphi = 1$$

$$\varphi_1 = \pi n - \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

У уравнения $2\sin\varphi - \sin 2\varphi = 2$ все корни иррациональные, кроме одного

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Найдем пересечение.

$$\pi n - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\pi n - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 2\pi n = 0$$

$$\pi n - \pi - 2\pi n = 0$$

$$-\pi - \pi n = 0$$

Равенство выполняется при $n = -1$. Это значит, что в этой точке решения системы пересекаются. Подставим -1 в $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$$

Таким образом, значение $\mu = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$ лежит на кардиоиде под углом $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$ и является точкой бифуркации Андронова-Хопфа.

3.3 Переход к хаосу

Приведенный анализ показал существование точек бифуркаций

$$\mu_1 = \frac{1}{4}, \quad \mu_2 = -\frac{3}{4}, \quad \mu_3 = -\frac{5}{4}, \dots$$

при переходе через которые поведение системы (10) качественное изменяется.

При дальнейшем увеличении параметра μ через μ_1 возникают новые точки равновесия, при переходе μ через μ_2 возникает новый устойчивый цикл периода 2, при переходе μ через μ_3 возникает новый устойчивый цикл периода 4 и т.д.

При этом для значений μ из промежутков $\mu_n < \mu < \mu_{n+1}$ динамика системы (10) относительно проста и предсказуема: за исключением двух точек равновесия и конечного числа циклов, остальные решения системы стремятся к устойчивому циклу периода 2^{n-1} .

При увеличении параметра μ и достаточно большом числе итераций решение z_n системы (10)

- сначала стремится к точкам равновесия z_1^* и z_2^* ;
- потом стремится к циклу периода 2;
- затем стремится к циклу периода 4;
- и т.д.

Такой процесс называют переходом к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода, а сам сценарий перехода к хаосу называют сценарием Фейгенбаума.

Заключение

Основные результаты моей дипломной работы:

- 1) Было показано, что подобласти множества Мандельброта являются областями устойчивости точек равновесия и циклов системы (10).
- 2) Было доказано, что точки соприкосновения подобластей являются точками бифуркаций системы (10).
- 3) В ходе исследования выяснили, что все точки всех границ подобластей являются точками бифуркаций системы (10).

Таким образом, мы показали, что множество Мандельброта можно изучить с точки зрения теории бифуркаций.

Я подтверждаю, что настоящая работа написана мною лично и не нарушает интеллектуальные права третьих лиц

_____ *Абдрахимова Карина Робертовна*
(подпись)

Список литературы

1. Кроновер, Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Москва: Постмаркет, 2000. – 352 с.
2. Юмагулов, М. Г. Введение в теорию динамических систем: учебное пособие для вузов / М. Г. Юмагулов. - Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 272 с.
3. Множество Мандельброта [Электронный ресурс]/ Википедия. Свободная энциклопедия/Режим доступа URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Множество_Мандельброта
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: «Институт компьютерных исследований», 2002.
5. Юмагулов М.Г., Фазлытдинов М.Ф. Бифуркационные формулы и алгоритмы построения центральных многообразий дискретных динамических систем: научная статья/ М.Г.Юмагулов - Уфа:Известия вузов. Математика, 2019. – с.56-73.
6. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. — М.: «Мир», 1993.
7. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем/А.Б. Каток, Б.Хасселблат – Москва:МЦНМО, 2005.
8. Мандельброт Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса // Бенуа Мандельброт. — Ижевск,: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 392 с.
9. Мардсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения/Дж.Мардсен, М. Мак-Краке - Москва:Мир, 1980.
- 10.Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла/Б.Хэссард, Н.Казаринов, И.Вэн – Москва:Мир, 1985

_____Абдрахимова Карина Робертовна
(подпись)

Приложение
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Баранова Д.А.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием “Об устойчивой изотопической связности изотопных тождественному градиентно-подобных диффеоморфизмов тора” является теорема о соединении устойчивой дугой между диффеоморфизмами тора.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: поиск в Интернете, выступления на семинарах.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась в июне 2023. На Смотри представлен проект текста/окончательный текст работы.



Подпись

ФИО полностью
Баранов Денис Алексеевич
Дата 23.05.23
город, страна Нижний Новгород, Россия

**Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет»
«Высшая школа экономики»
Нижегородский филиал**

Факультет математики, информатики и компьютерных наук
Кафедра фундаментальной математики

**Выпускная квалификационная работа - БАКАЛАВРСКАЯ
РАБОТА**

**ОБ УСТОЙЧИВОЙ ИЗОТОПИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ
ИЗОТОПНЫХ ТОЖДЕСТВЕННОМУ
ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ТОРА**

Выполнил:
Студент 4 курса группы 19ФМ
Баранов Денис Алексеевич

Научный руководитель:
Профессор кафедры
фундаментальной математики
Починка Ольга Витальевна

Рецензент:
к.ф.-м.н., доцент ННГУ
Махрова Елена Николаевна

Нижний Новгород
2023 г.

Аннотация

В настоящей работе рассматриваются изотопные тождественному градиентно-подобные диффеоморфизмы двумерного тора. Модельным (простейшим) представителем в рассмотренном классе являются косые произведения грубых преобразований окружности. Мы покажем, что любой изотопный тождественному градиентно-подобный диффеоморфизм тора соединяется устойчивой (качественно не меняющей своих свойств при малых шевелениях) дугой с некоторым модельным диффеоморфизмом, являющимся косым произведением грубых преобразований окружности.

1 Введение и формулировка результата

Во всей работе мы будем иметь дело с замкнутыми связными ориентируемыми n -многообразиями M^n и сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами или диффеоморфизмами, заданными на них. Изотопность диффеоморфизмов $f_0, f_1 : M^n \rightarrow M^n$ означает существование некоторой дуги $\{f_t : M^n \rightarrow M^n, t \in [0, 1]\}$, соединяющей их в пространстве диффеоморфизмов. Если изотопные диффеоморфизмы являются *структурно устойчивыми* (качественно не меняющими своих свойств при малых шевелениях), то естественно ожидать существования *устойчивой дуги* (качественно не меняющей своих свойств при малых шевелениях) их соединяющей (см. точное определение в разделе 2.3). В этом случае, говорят, что диффеоморфизмы $f_0, f_1 : M^n \rightarrow M^n$ *устойчиво изотопны* или принадлежат одному и тому же классу *устойчивой изотопической связности*.

Простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами являются *градиентно-подобные* преобразования, имеющие конечное гиперболическое неблуждающее множество, инвариантные многообразия различных седловых точек которого либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально по множеству положительной размерности (см. точное определение в разделе 2.1). Однако, даже градиентно-подобные изотопные диффеоморфизмы в общем случае не являются устойчиво изотопными. Уже на окружности, где все диффеоморфизмы попарно изотопны, появляется счетное множество классов устойчивой изотопической связности, каждый из которых однозначно определяется числом вращения $\frac{k}{m}$, где $k \in (\mathbb{N} \cup 0), m \in \mathbb{N}, k < m, (k, m) = 1$ грубого преобразования окружности [5].

Аналогичная ситуация имеет место для градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-сферы. Именно, рассмотрим \mathbb{S}^1 как экватор сферы \mathbb{S}^2 . Тогда диффеоморфизм окружности $\phi_{\frac{k}{m}}$ в точности с двумя периодическими орбитами периода m и числом вращения $\frac{k}{m}$ может быть продолжен до диффеоморфизма $F_{\frac{k}{m}} : S^2 \rightarrow S^2$, имеющего два неподвижных источника в северном и южном полюсах. Обозначим через $F_0 : S^2 \rightarrow S^2$ диффеоморфизм “источник-сток”. В работе [4] показано, что любой градиентно-подобный диффеоморфизм 2-сферы соединяется устойчивой дугой в точности с одним

из диффеоморфизмов $F_0, F_{\frac{k}{m}}, F_{\frac{k}{m}}^{-1}, m \geq 3, k < m/2$, устойчивые изотопические классы которых попарно не пересекаются.

Полученный результат тесно переплетается с теорией Нильсена-Терстона гомеоморфизмов поверхностей, в частности с классификацией периодических гомеоморфизмов двумерной сферы, полученной Керекьярто [16]. Класс топологической сопряженности *периодического преобразования* 2-сферы периода m (гомеоморфизм, степень m которого является тождественным отображением) также полностью определяется числом вращения $\frac{k}{m}$ вокруг оси северный полюс-южный полюс. Эта связь не случайна и объясняется тем, что любой градиентно-подобный диффеоморфизм поверхности топологически сопряжен композиции периодического гомеоморфизма со сдвигом на единицу времени градиентно-подобного потока [9]. Более того, динамика градиентно-подобного диффеоморфизма на неблуждающем множестве совпадает с динамикой периодического гомеоморфизма. Так, из результатов работы [4] следует, что устойчивый изотопический класс градиентно-подобного диффеоморфизма 2-сферы без неподвижных стоков полностью определяется классом топологической сопряженности его периодической компоненты.

В настоящей работе мы покажем, что на двумерном торе \mathbb{T}^2 картина принципиально другая.

Рассмотрим класс G изотопных тождественному градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-тора \mathbb{T}^2 . Модельными примерами таких диффеоморфизмов являются косые произведения диффеоморфизмов $\phi_{\frac{k_1}{m_1}}, \phi_{\frac{k_2}{m_2}}$ (см. построение модельных диффеоморфизмов в разделе 3), обозначим через GM класс модельных диффеоморфизмов. Непосредственно вычисляется, что периодическая компонента модельного диффеоморфизма имеет период $m = \text{НОК}(m_1, m_2)$ и, следовательно, такой же период имеют все периодические точки такого диффеоморфизма. При этом, все изотопные тождественному периодические преобразования тора, отличные от тождественного отображения, топологически сопряжены повороту вдоль параллели с числом вращения $\frac{1}{m}$ [7]. То есть класс топологической сопряженности периодического изотопного тождественному преобразования тора полностью определяется периодом гомеоморфизма.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется устойчивой дугой с одним из диффеоморфизмов $F_f \in GM$.*

2 Вспомогательные сведения

2.1 Диффеоморфизмы Морса-Смейла

Пусть диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ задан на гладком замкнутом (компактном без края) n -многообразии ($n \geq 1$) M^n с метрикой d .

Два диффеоморфизма $f, f' : M^n \rightarrow M^n$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M^n$ такой, что

$$fh = hf'.$$

Точка $x \in M^n$ называется *блуждающей* для f , если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f .

Например, неблуждающими являются все предельные точки диффеоморфизма. Напомним, что точка $y \in M^n$ называется ω -*предельной* точкой для точки $x \in M^n$, если существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, $t_k \in \mathbb{Z}$, такая, что $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} d(f^{t_k}(x), y) = 0$. Множество $\omega(x)$ всех ω -предельных точек для точки x называется ее ω -*предельным множеством*. Заменой $+\infty$ на $-\infty$ определяется α -*предельное множество* $\alpha(x)$ точки x . Множество $L_f = \text{cl}(\bigcup_{x \in M^n} \omega(x) \cup \alpha(x))$ называется *предельным множеством* диффеоморфизма f .

Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $p \in \Omega_f$ является периодической, обозначим через $m_p \in \mathbb{N}$ период периодической точки p . С любой периодической точкой p связаны *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, определяемые следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\},$$

$$W_p^u = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}.$$

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Говорят, что периодические орбиты $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$ образуют *цикл*, если $W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_{i+1}}^u \neq \emptyset$ для $i \in \{1, \dots, k\}$ и $\mathcal{O}_{k+1} = \mathcal{O}_1$.

Периодическая точка $p \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)|_p$ по модулю не равны единице. Если все собственные значения по модулю меньше (больше) единицы, то p называют *стоковой* (*источниковой*) *точкой*. Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является *узловой*, то она называется *седловой точкой*.

Из гиперболической структуры периодической точки p следует, что ее устойчивое W_p^s и неустойчивое W_p^u многообразия являются образами относительно инъективных иммерсий пространств \mathbb{R}^{q_p} и \mathbb{R}^{n-q_p} , где q_p – число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы. Число ν_p , равное $+1(-1)$, если отображение $f^{m_p}|_{W_p^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию W_p^u , называется *типом ориентации* точки p . Компонента линейной связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$) называется *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой* точки p .

Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность

U_A при этом называется захватывающей, или изолирующей. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} . Дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность дуального репеллера.

Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;
- 2) многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q .

Диффеоморфизм Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^u$.

2.2 Периодические гомеоморфизмы и их связь с градиентно-подобными диффеоморфизмами поверхностей

Гомеоморфизм $\varphi : S_p \rightarrow S_p$ называется *периодическим*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом φ . Точка x_0 называется *точкой меньшего периода* $n_0 < n$ гомеоморфизма φ , если $\varphi^{n_0}(x_0) = x_0$.

Согласно результатам Я. Нильсена [17] (см. также [18]) для любого сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма $\varphi : S_p \rightarrow S_p$ множество B точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия гомеоморфизма φ на S_p является сферой с g ручками (модульной поверхностью). В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi \frac{\delta_0}{\lambda_0}$, где $\lambda_0 = \frac{n}{n_0}$.

Обозначим через $X_i, i = 1, \dots, k$ орбиты точек меньшего периода, их периоды – через n_i и положим $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$, а за B обозначим множество точек периода меньшего, чем n . Обозначим через $\frac{\delta_i}{\lambda_i}$ соответствующее число вращения и определим число d_i из условия $d_i \delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$. Набор параметров

$$(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$$

периодического гомеоморфизма φ называется его *полной характеристикой*.

Утверждение 1 ([7]). *Для сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ периода $n \in \mathbb{N}$ следующие условия эквивалентны:*

1. φ – гомотопен тождественному отображению;
2. $B = \emptyset$;
3. $g = 1$;
4. φ топологически сопряжен диффеоморфизму $\Psi_n(e^{i2x\pi}, e^{i2y\pi}) = (e^{i2\pi(x+\frac{1}{n})}, e^{i2y\pi})$.

Утверждение 2 ([9], Theorems 3.1, 3.3). Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм $f : S_p \rightarrow S_p$ представляется в виде композиции $f = \varphi \circ \xi^1$, где ξ^1 есть сдвиг на единицу времени вдоль траекторий градиентного потока ξ^t некоторой функции Морса¹, а φ — периодический гомеоморфизм. При этом:

- точки меньшего периода гомеоморфизма φ являются также периодическими точками диффеоморфизма f , причём их периоды совпадают;
- период сепаратрисы любой седловой точки диффеоморфизма f совпадает с периодом гомеоморфизма φ .

Следующий факт непосредственно следует из утверждений 1, 2.

Следствие 1. Все периодические точки и сепаратрисы изотопного тождественному градиентно-подобного диффеоморфизма тора имеют одинаковый период, равный периоду периодической компоненты.

2.3 Понятие устойчивости дуги диффеоморфизмов

Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов (дугу) $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n, t \in [0, 1]$. Дуга φ_t называется *гладкой*, если отображение $F : M^n \times [0, 1] \rightarrow M^n$, заданное формулой $F(x, t) = \varphi_t(x)$, является *диффеотопией* — гладким отображением, которое при каждом фиксированном t является диффеоморфизмом. В топологической категории такое отображение называется *изотопией*.

Гладкая дуга φ_t называется *гладким произведением* гладких дуг ϕ_t и ψ_t таких, что $\phi_1 = \psi_0$, если $\varphi_t = \begin{cases} \phi_{2\tau(t)}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi_{2\tau(t)-1}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ где $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — гладкое монотонное отображение такое, что $\tau(t) = 0$ для $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ и $\tau(t) = 1$ для $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$. Будем писать

$$\varphi_t = \phi_t * \psi_t.$$

Согласно [12], гладкая дуга φ_t называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги φ_t, φ'_t называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1], H_t : M \rightarrow M$ такие, что $H_t \varphi_t = \varphi'_{h(t)} H_t, t \in [0, 1]$, и H_t непрерывно зависит от t .

Обозначим через \mathcal{Q} множество гладких дуг $\varphi_t, t \in [0, 1]$ такое, что каждая дуга из этого множества начинается и заканчивается в диффеоморфизмах Морса-Смейла и любой диффеоморфизм φ_t имеет конечное предельное множество.

В работе [12] также установлено, что дуга $\varphi_t \in \mathcal{Q}$, где $t \in [0, 1]$ является устойчивой тогда и только тогда, когда все ее точки являются структурно

¹ C^2 -гладкая функция с невырожденными критическими точками.

устойчивыми диффеоморфизмами за исключением конечного числа бифуркационных точек $\varphi_{b_i}, i = 1, \dots, q$, таких, что:

- 1) предельное множество диффеоморфизма φ_{b_i} содержит единственную негиперболическую периодическую орбиту, которая является седло-узлом или флипом;
- 2) диффеоморфизм φ_{b_i} не имеет циклов;
- 3) инвариантные многообразия всех периодических точек диффеоморфизма φ_{b_i} пересекаются трансверсально;
- 4) φ_{b_i} имеет одну негиперболическую периодическую орбиту, которая является орбитой не критического седло-узла или флипа и бифурцирует общим образом².

3 Косые произведения грубых преобразований окружности

В настоящем разделе мы построим модельный, изотопный тождественному диффеоморфизм двумерного тора на основе двух грубых преобразований окружности. Для этого рассмотрим пару натуральных чисел m_1, m_2 и неотрицательные целые числа k_1, k_2 , взаимно простые с m_1, m_2 , соответственно, и такие, что $\frac{k_1}{m_1} \leq \frac{k_2}{m_2}$. Обозначим через μ наибольший общий делитель чисел m_1, m_2 и выберем целое число $\nu \in [0, \mu)$, взаимно простое с μ ($\nu = 0$, если $\mu = 1$). Определим диффеоморфизм $\bar{\phi}_{\frac{k_i}{m_i}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ формулой:

$$\bar{\phi}_{\frac{k_i}{m_i}}(x_i) = x_i + \frac{1}{4m_i\pi} \sin(2m_i\pi x_i) + \frac{k_i}{m_i}.$$

Положим

$$\bar{F}_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, 0}(x_1, x_2) = \left(\bar{\phi}_{\frac{k_1}{m_1}}(x_1), \bar{\phi}_{\frac{k_2}{m_2}}(x_2) \right).$$

Определим диффеоморфизм $\bar{h}_{\frac{\nu}{\mu}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой

$$\bar{h}_{\frac{\nu}{\mu}}(x_1, x_2) = \left(x_1 + \frac{\nu}{\mu}x_2, x_2 \right).$$

Положим

$$\bar{F}_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{\nu}{\mu}} = \bar{h}_{\frac{\nu}{\mu}} \circ \bar{F}_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, 0} \circ \bar{h}_{\frac{\nu}{\mu}}^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Непосредственно проверяется, что диффеоморфизм $\bar{F}_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{\nu}{\mu}}$ обладает свойством

$$\bar{F}_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{\nu}{\mu}}(x_1 + 1, x_2 + 1) = \bar{F}_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{\nu}{\mu}}(x_1, x_2) + (1, 1) \quad (1)$$

и, следовательно, проектируется посредством накрытия

$$\pi(x_1, x_2) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2,$$

²Для точных определений всех упомянутых объектов см., например, [5].

в изотопный тождественному диффеоморфизм тора

$$F_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{\nu}{\mu}} = \pi \bar{F}_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{\nu}{\mu}} \pi^{-1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

Построенный диффеоморфизм имеет четыре периодических орбиты периода $m = \frac{m_1 m_2}{\mu}$, одну стоковую, одну источниковую и две седловых (см. Рис. 1).

Напомним, что *алгебраическим автоморфизмом* $\widehat{L} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм, определенный матрицей $L = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, принадлежащей множеству $GL(2, \mathbb{Z})$ *унимодулярных целочисленных матриц* – матриц с определителем ± 1 . То есть

$$\widehat{L}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \pmod{1}.$$

Пусть $J = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$ – целочисленная матрица с определителем $\mu \in \mathbb{N}$.

Тогда существует единственная целочисленная матрица $S_J = \begin{pmatrix} \nu_1 & \gamma \\ \mu_1 & \delta \end{pmatrix}$ с единичным определителем такая, что $S_J^{-1}(\langle \nu_2, \mu_2 \rangle) = \langle \nu, \mu \rangle$, где $\nu \in [0, \mu)$ (см., например, [11]). Положим

$$F_J = \widehat{S}_J F_{\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}, \frac{\nu}{\mu}} \widehat{S}_J^{-1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

Будем называть диффеоморфизм F_J *косым произведением грубых преобразований окружности* $\phi_{\frac{k_1}{m_1}}, \phi_{\frac{k_2}{m_2}}$ (см. Рис. 1).

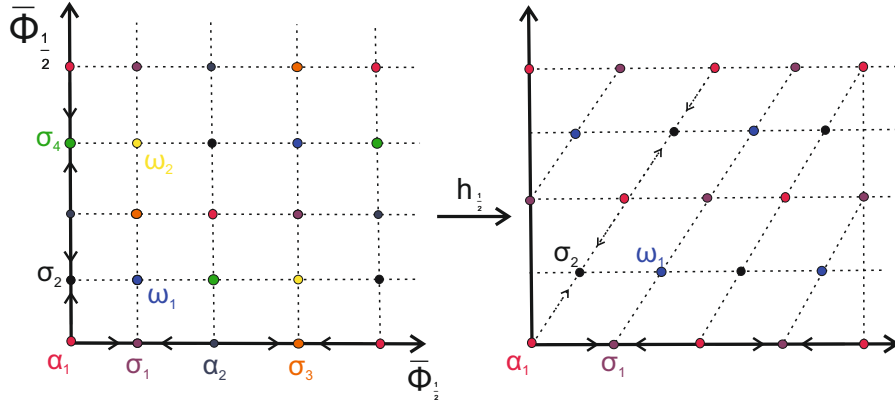


Рис. 1: Косое произведение диффеоморфизмов $\phi_{\frac{1}{2}}, \phi_{\frac{1}{2}}$

4 Связное характеристическое пространство диффеоморфизма $f \in G$

Рассмотрим сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм f , заданный на гладкой ориентируемой замкнутой поверхности M^2 .

Обозначим через Ω_f^0 , Ω_f^1 , Ω_f^2 множество стоков, седел и источников диффеоморфизма f . Для любого (возможно пустого) f -инвариантного множества $\Sigma \subset \Omega_f^1$ положим

$$A_\Sigma = \Omega_f^0 \cup W_\Sigma^u, R_\Sigma = \Omega_f^2 \cup W_{\Omega_f^1 \setminus \Sigma}^s.$$

Из работы [13] следует, что A_Σ и R_Σ – аттрактор и репеллер³ диффеоморфизма f , которые называются *дуальными*. Множество

$$V_\Sigma = M^2 \setminus (A_\Sigma \cup R_\Sigma)$$

называется *характеристическим пространством*. Обозначим через \hat{V}_Σ пространство орбит действия диффеоморфизма f на характеристическом пространстве V_Σ и через $p_\Sigma : V_\Sigma \rightarrow \hat{V}_\Sigma$ естественную проекцию. Согласно работе [19], каждая компонента связности многообразия \hat{V}_Σ гомеоморфна двумерному тору.

Утверждение 3 ([10], Теорема 1.1). *Для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма $f : M^2 \rightarrow M^2$ существует такое множество Σ , что пространство орбит \hat{V}_Σ связно.*

Для любого диффеоморфизма f и множества Σ , удовлетворяющего условиям предложения 3, положим

$$A_f = A_\Sigma, R_f = R_\Sigma, V_f = V_\Sigma, \hat{V}_f = \hat{V}_\Sigma, p_f = p_\Sigma.$$

Тогда множество \hat{V}_f связно и гомеоморфно тору, тогда как множество V_f не связно в общем случае, обозначим через m_f число компонент связности множества V_f . Тогда множество V_f гомеоморфно $(\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_{m_f}$ и ограничение диффеоморфизма f на V_f топологически сопряжено, посредством некоторого гомеоморфизма $h_f : V_f \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_{m_f}$ периодическому сжатию $a_{m_f} : (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_{m_f} \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{Z}_{m_f}$, заданному формулой

$$a_{m_f}(x, y, i) = \begin{cases} (x, y, i + 1), & i = 0, \dots, m_f - 2, \\ (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0), & i = m_f - 1. \end{cases}$$

³Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей

или изолирующей. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} . Аттрактор и репеллер называются *дуальными*, если дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность репеллера.

Для $i \in \{0, \dots, m_f - 1\}$ положим

$$W_i = h_f^{-1}((\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \{i\}), \quad c_i = h_f^{-1}(S^1 \times \{i\}),$$

$$W_i^+ = h_f^{-1}((\mathbb{D}^2 \setminus O) \times \{i\}), \quad W_i^- = \text{cl}(W_i \setminus W_i^+),$$

$$W^\pm = W_0^\pm \cup \dots \cup W_{m_f-1}^\pm, \quad c = c_0 \cup \dots \cup c_{m_f-1}.$$

Тогда $U = W^+ \cup A_f$, $V = W^- \cup R_f$ – захватывающие окрестности аттрактора A_f и репеллера R_f , соответственно, то есть

$$f(U) \subset U, \quad A_f = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^j(U); \quad f^{-1}(V) \subset V, \quad R_f = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(V).$$

Лемма 1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ (с точностью до рассмотрения диффеоморфизма f^{-1}) верно следующее:*

1. множество U состоит из $m_f \in \mathbb{N}$ попарно не пересекающихся дисков $D_f, f(D_f), \dots, f^{m_f-1}(D_f)$ таких, что $f^{m_f}(\text{cl } D_f) \subset \text{int } D_f$;
2. аттрактор A_f состоит из m_f компонент связности $A, f(A), \dots, f^{m_f-1}(A)$ таких, что $A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^{jm_f}(D_f)$ и $f^{m_f}(A) = A$;
3. репеллер R_f является связным.

Доказательство: По построению кривые множества c делят несущую поверхность $M^2 \cong \mathbb{T}^2$ на две непустые части U, V , границей которых эти кривые являются. При этом $f(c) \cap V = \emptyset$. Поскольку диффеоморфизм f изотопен тождественному отображению, то все кривые множества c попарно гомотопны. Предположим, что эти кривые не являются тривиальными, тогда $M^2 \setminus c$ состоит из m_f компонент связности, при этом $f(c)$ пересекается с каждой из этих компонент. Откуда следует, что множество V пусто и, следовательно, предположение не верно.

Таким образом, каждая кривая c_i множества c ограничивает диск d_i , положим $D_f = d_0$. Для определенности будем считать, что диск D_f является компонентой связности множества U (в противном случае, это выполняется для диффеоморфизма f^{-1}). Поскольку ограничение диффеоморфизма f^{m_f} на $D_f \cap V_f$ сопряжено с линейным сжатием, то $f^{m_f}(\text{cl } D_f) \subset \text{int } D_f$. Таким образом, множество $A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^{jm_f}(D_f)$ является связным. Поскольку

$A_f = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^{jm_f}(U)$, то A является компонентой связности аттрактора A_f и $D_f = (D_f \cap V_f) \cup A$. Рассмотрим далее отдельно два случая: (1) $m_f = 1$, (2) $m_f > 1$.

(1) Если $m_f = 1$, то $A_f = A$, $R_f = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(T^2 \setminus D_f)$ являются связными аттрактором и репеллером и лемма доказана.

(2) Если $m_f > 1$, то $f(c) \cap (D_f \cap V_f) = \emptyset$ в силу сопряжения периодическому сжатию, и $f(c) \cap A = \emptyset$, поскольку $f(c) \subset V_f$. Таким образом,

$f(D_f) \cap D_f = \emptyset$ поскольку $f(c) \cap D_f = \emptyset$. Следовательно, в диске $f(D_f)$ лежит компонента связности $f(A)$ аттрактора A_f , не пересекающаяся с A (см. Рис. 2). Рассуждая аналогично, получим m_f различные компоненты связности $A, f(A), \dots, f^{m_f-1}(A)$ аттрактора A_f , это означает, что аттрактор A_f состоит из одной орбиты периода m_f . Таким образом, множество U является объ-

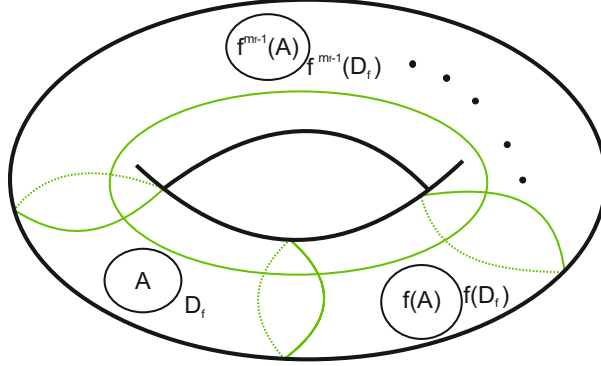


Рис. 2: Иллюстрация к доказательству леммы 1

единением попарно не пересекающихся дисков $D_f, f(D_f), \dots, f^{m_f-1}(D_f)$. Откуда следует, что множество $V = T^2 \setminus U$ связно, что влечет за собой связность репеллера R_f . \square

5 Построение устойчивой дуги от диффеоморфизма $f \in G$ к диффеоморфизму $F_f \in GM$

5.1 Тривиализация аттрактора A_f

В настоящем разделе мы покажем, что, в силу леммы 1 и доказанной ниже леммы 2, не уменьшая общности можно считать, что диффеоморфизм f имеет одну стоковую орбиту \mathcal{O}_ω .

Пусть S – замкнутая поверхность, $f : S \rightarrow S$ – градиентно-подобный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, для которого существует 2-диск D такой, что $f^m(D) \subset \text{int}(D)$, $f^n(D) \cap D = \emptyset$ для любого $0 < n < m$ и диск D не содержит источников точек диффеоморфизма f . Положим $\mathcal{D} = D \cup f(D) \cup \dots \cup f^{m-1}(D)$.

Лемма 2. *Существует устойчивая дуга $f_t : S \rightarrow S$ такая, что $f_0 = f$, $f_t|_{S \setminus \mathcal{D}} = f|_{S \setminus \mathcal{D}}$ и $\Omega_{f_t}|_{\mathcal{D}}$ – стоковая орбита периода m .*

Доказательство. Положим $\tilde{f} = f^m$. Тогда $\tilde{f}(D) \subset \text{int} D$ и, следовательно, диффеоморфизм \tilde{f} продолжается до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ такого, что $\Omega_{\tilde{f}}|_{\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{D}} = \alpha$, где α – источник (см.

Рис. 3). Таким образом, \tilde{f} градиентно-подобный диффеоморфизм на сфере,

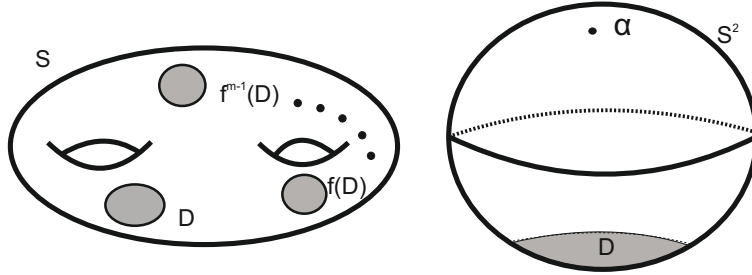


Рис. 3: Иллюстрация к доказательству леммы 2

имеющий единственный источник в своем неблуждающем множестве. Согласно [4, Theorem 1.1] существует устойчивая дуга \tilde{f}_t такая, что $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$, \tilde{f}_1 – диффеоморфизм источник-сток и $\tilde{f}_t|_{S^2 \setminus D} = \tilde{f}|_{S^2 \setminus D}$. Тогда искомая дуга f_t совпадает с диффеоморфизмом f вне $f^{m-1}(D)$ и определяется формулой $f^{m-1}(d) = \tilde{f}_t(d)$ для $d \in D$. \square

5.2 Тривиализация репеллера R_f

В силу результатов предыдущего раздела, не уменьшая общности можно считать, что диффеоморфизм f имеет одну стоковую орбиту \mathcal{O}_ω . В настоящем разделе мы докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $g \in G$, который имеет единственную источниковую орбиту.*

Доказательство. Пусть $V_\omega = W_{\mathcal{O}_\omega}^s \setminus \mathcal{O}_\omega$. Обозначим через $\hat{V}_\omega = V_\omega/f$ пространство орбит действия группы $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$ на V_ω , а через $p_\omega : V_\omega \rightarrow \hat{V}_\omega$ естественную проекцию. В силу [9, Proposition 2.5, p. 35] пространство \hat{V}_ω диффеоморфно двумерному тору, естественная проекция $p_\omega : V_\omega \rightarrow \hat{V}_\omega$ является накрытием. Тогда в силу [9] неустойчивые сепаратрисы седловых точек диффеоморфизма f проектируются в узлы на торе \hat{V}_ω . В силу следствия 1 множество $\hat{W}_\sigma^u = p_\omega(W_\sigma^u \setminus \sigma)$, $\sigma \in \Omega_f^1$ состоит из пары существенных узлов. Тогда, в силу [11], множество $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}_\sigma^u$ состоит из двух колец. Обозначим через $Q_f \subset \Omega_f^1$ множество таких седловых точек σ , для которых хотя бы одна из компонент связности (обозначим ее K_σ) не пересекается с множеством $p_\omega(W_{\Omega_f^1}^u \setminus \Omega_f^1)$ (см. Рис. 4).

Покажем, что диффеоморфизм f соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $f_1 \in G$, имеющим единственную стоковую орбиту \mathcal{O}_ω и для которого множество Q_{f_1} пусто.

Пусть точка σ лежит в множестве Q_f . Рассмотрим аттрактор $A_\sigma = \mathcal{O}_\omega \cup W_{\mathcal{O}_\omega}^s$. Положим $\hat{V}_\sigma = (W_{\omega \cup \mathcal{O}_\sigma}^s \setminus A_\sigma)/f$. Тогда \hat{V}_σ диффеоморфно двум

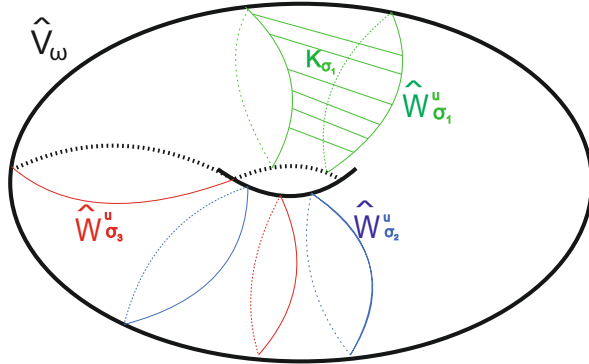


Рис. 4: Седло σ принадлежит множеству Q_f

двумерным торами, причем один из них содержит единственный узел, который является проекцией устойчивой сепаратрисы γ_σ^s седла σ . Согласно [4] диффеоморфизм f соединяется устойчивой дугой с одной седло-узловой бифуркацией с диффеоморфизмом g , у которого в множестве Q_g на одну седловую орбиту меньше, чем в множестве Q_f . Продолжая процесс, мы получим искомый диффеоморфизм f_1 .

Поскольку f_1 – градиентно-подобный диффеоморфизм 2-тора, то множество $\Omega_{f_1}^1$ содержит хотя бы две седловые периодические орбиты. Покажем, что можно выбрать седла $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{f_1}^1$ так, что $\hat{W}_{\sigma_2}^u$ пересекается с обеими компонентами связности $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}_{\sigma_1}^u$. Проведем доказательство от противного.

Выберем произвольное седло $\sigma_0 \in \Omega_{f_1}^1$. Пусть K_0 – компонента связности множества $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}_{\sigma_0}^u$. Поскольку множество Q_{f_1} пусто, то кольцо K_0 содержит проекции неустойчивых многообразий орбит седловых точек. Для любого такого седла σ обозначим через κ_σ компоненту связности множества $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}_\sigma^u$, принадлежащую K_0 (см. Рис. 5). В рамках предположения, любые

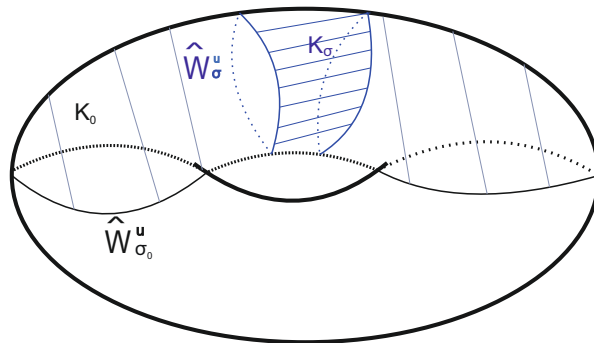


Рис. 5: Кольцо K_0

два таких кольца $\kappa_\sigma, \kappa_{\sigma'}$ либо не пересекаются, либо одно является собственным подмножеством другого. Ввиду конечности седловых орбит мы найдем седло σ_* , для которого кольцо κ_{σ_*} не содержит других колец κ_σ , что противоречит пустоте множества Q_{f_1} .

Выберем седла $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{f_1}^1$ так, что $\hat{W}_{\sigma_2}^u$ пересекается с обеими компонентами связности $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}_{\sigma_1}^u$. Тогда $\text{cl}(W_{\sigma_i}^u) \setminus W_{\sigma_i}^u = \omega \cup f_1^{l_i}(\omega)$, $l_i \leq m_f$. Пусть $M_i = \text{НОК}(l_i, m_f)$ и $m_i = \frac{M_i}{l_i}$. Тогда множество

$$C_i = \bigcup_{i=0}^{m_i-1} f_1^{jk_1}(\text{cl}(W_{\sigma_i}^u))$$

гомеоморфно окружности и является f^{l_i} -инвариантным. Поскольку отображение f^{l_i} индуцирует тождественное отображение в фундаментальной группе тора, то $f^{l_i}|_{C_i}$ сохраняет ориентацию и, следовательно, диффеоморфизм $f^{l_i}|_{C_i}$ топологически сопряжен грубому преобразованию окружности $\phi_{\frac{k_i}{m_i}}$, $k_i l_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Тогда каждая точка в пересечении $C_1 \cap C_2$ имеет один и тот же индекс, откуда следует, что узлы C_1, C_2 существенны на торе \mathbb{T}^2 (см. Рис. 6).

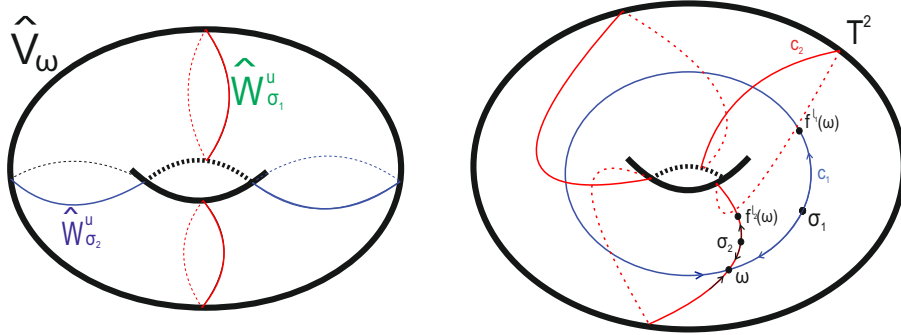


Рис. 6: Седла σ_1, σ_2

Обозначим через μ индекс пересечения этих узлов. Тогда $m_f = \frac{m_1 m_2}{\mu}$. Положим

$$C = \bigcup_{j=0}^{m_2-1} f^{l_2 j}(C_1) \cup \bigcup_{j=0}^{m_1-1} f^{l_1 j}(C_2).$$

Тогда каждая компонента связности Δ множества $Q = \mathbb{T}^2 \setminus C$ (см. Рис. 7) является открытым двумерным диском (см., например [3]) таким, что

$$Q = \bigsqcup_{j=0}^{m_f-1} f^j(\Delta).$$

Согласно [13] множество $\text{cl}(W_{\Omega_{f_1}^1}^u)$ является аттрактором диффеомор-

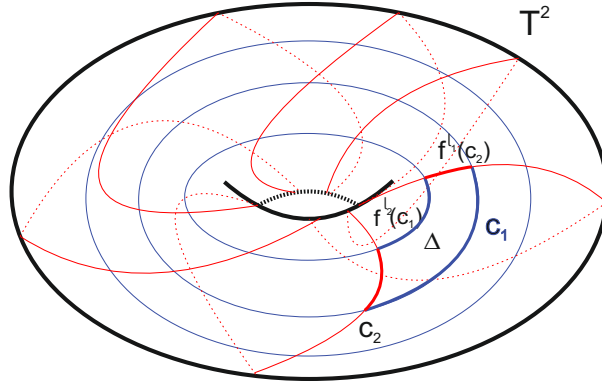


Рис. 7: Множество Δ

физма f_1 . Более того, существует его захватывающая окрестность U_C такая, что множество $D = \Delta \setminus \text{int}(U_C)$ гомеоморфно двумерному диску такому, что $f^{-m_f}(D) \subset \text{int } D$. В силу леммы 2, диффеоморфизм f_1 соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $g \in G$, имеющим единственную источниковую орбиту в $\mathbb{T}^2 \setminus \text{int}(U_C)$. \square

На рисунке 8 схематично изображены шаги доказательства теоремы 1 на примере диффеоморфизма $\phi_{\frac{1}{2}} \times \phi_{\frac{1}{2}}$.

5.3 Выпрямление кривых C_1, C_2

В силу результатов двух предыдущих разделов, не уменьшая общности можно считать, что диффеоморфизм f имеет одну стоковую орбиту \mathcal{O}_ω и одну источниковую орбиту \mathcal{O}_α , то есть является полярным. Не уменьшая общности будем считать, что $\frac{k_1}{m_1} \leq \frac{k_2}{m_2}$ для диффеоморфизма f (в противном случае изменим нумерацию кривых C_1, C_2). Обозначим через (ν_i, μ_i) гомотопический тип кривой C_i , положим $J = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$. Тогда диффеоморфизм f топологически сопряжен диффеоморфизму F_J (см., например, [2, Theorem 1]) посредством гомотопного тождественному гомеоморфизма. Аналогично [1, Lemma 5.1] доказывается, что существует дуга без бифуркаций, соединяющая диффеоморфизм f с диффеоморфизмом F_J .

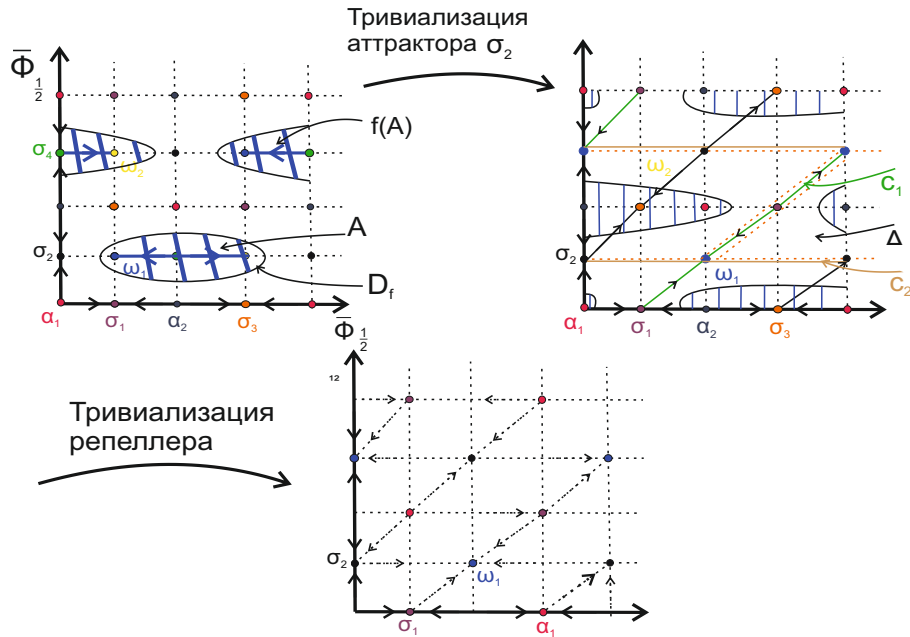


Рис. 8: Иллюстрация к доказательству теоремы 1

Список литературы

- [1] Nozdrinova E. V., Pochinka O. V. *Bifurcations changing the homotopy type of the closure of an invariant saddle manifold of a surface diffeomorphism* //Sbornik: Mathematics. – 2022. – Т. 213. – №. 3. – С. 357.
- [2] Grines V. Z., Kapkaeva S. K., Pochinka O. V. *A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces* //Sbornik: Mathematics. – 2014. – Т. 205. – №. 10. – С. 1387.
- [3] Kosnevski C. *Initial Course in Algebraic Topology*. – 1983.
- [4] Nozdrinova E. V., Pochinka O. V. *On the solution of the 33rd Palis–Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a 2-sphere* //Russian Mathematical Surveys. – 2020. – Т. 75. – №. 2. – С. 383.
- [5] Medvedev T. V., Nozdrinova E. V., Pochinka O. V. *Components of Stable Isotopy Connectedness of Morse–Smale Diffeomorphisms* //Regular and Chaotic Dynamics. – 2022. – Т. 27. – №. 1. – С. 77-97.
- [6] Ноздринова Е. В., Починка О. В. *О классах устойчивой изотопической связности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей* //Нелинейные дни в Саратове для молодых-2021. – 2021. – С. 46-47.

- [7] Baranov D., Grines V., Chilina E., Pochinka O. *On classification of periodic maps on the 2-torus* //arXiv preprint arXiv:2112.01256. – 2021.
- [8] Grines V., Zhuzhoma E., Medvedev V, *Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms* //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – Т. 271. – С. 103-124.
- [9] Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V. *Dynamical systems on 2-and 3-manifolds*. – Cham : Springer, 2016. – Т. 46.
- [10] Ноздринова Е. В. *Существование связного характеристического пространства у градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей*. //Журнал Средневолжского математического общества. – 2017. – Т. 19. – №. 2. – С. 91-97.
- [11] Rolfsen D. *Knots and links*. – American Mathematical Soc., 2003. – Т. 346.
- [12] Newhouse S., Palis J., Takens F. *Stable arcs of diffeomorphisms*. – 1976.
- [13] Grines V. Z. et al. *Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms*. //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – Т. 271. – С. 103-124.
- [14] Grines V. Z., Pochinka O. V., Van Strien S. *On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli* //arXiv preprint arXiv:1608.00439. – 2016.
- [15] Nozdrinova E. V. *Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle* //Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Т. 14. – №. 4. – С. 543-551.
- [16] Kerekjarto B. *Topologische charakterisierung der linearen Abbildungen*. – Az Egytem es a Rothermere-Alap Tamogatasaval Kiadja, 1934.
- [17] Nielsen J. *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen*. – Levin Munksgaard, 1937. – Т. 15. – №. 1.
- [18] Баранов Д. А., Починка О. В. *Классификация периодических преобразований ориентируемой поверхности рода два* //Журнал Средневолжского математического общества. – 2021. – Т. 23. – №. 2. – С. 147-158.
- [19] Pixton D. *Wild unstable manifolds*. //Topology. – 1977. – Т. 16. – №. 2. – С. 167-172.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Денисовой Натальи Сергеевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе под названием «О классификации градиентно-подобных потоков на четырехмерных многообразиях с одним седлом индекса два» являются: Лемма 2, доказательство Леммы 2, Теорема 1, Теорема 2.


Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- 1) В период с 11 января по 25 февраля 2023 г. мною был произведен поиск в следующих поисковых системах: Google, Яндекс по следующим ключевым словам: Топологическая классификация градиентно-подобных потоков, градиентно-подобные потоки без гетероклинических пересечений. В выдаче поисковиков было исследовано несколько статей и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. Также были исследованы статьи и книга научного руководителя и соавторов по данной теме. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [3-5], [8-11], [13] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- 2) Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Гуревич Еленой Яковлевной, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук НИУ ВШЭ НН.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с научным руководителем следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 14.06.2023. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  Денисова Наталья Сергеевна
05.06.2023, Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук
Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика

Денисова Наталья Сергеевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

О КЛАССИФИКАЦИИ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ НА
ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ОДНИМ СЕДЛОМ ИНДЕКСА
ДВА

Рецензент
доцент кафедры ДУМЧА
ННГУ им. Н.И. Лобачевского,
к. ф.-м. н. Е. В. Круглов

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Е. Я. Гуревич

Нижний Новгород, 2023 г.

Содержание

Введение	2
1 Формулировка результатов	3
2 Вспомогательные определения и утверждения	5
2.1 Динамика	5
2.2 Топология	7
2.3 Необходимые сведения из теории графов	7
3 Структура неблуждающего множества потоков из класса $G_{g,1}(M^4)$ и топология вложения двумерных сепаратрис	8
4 Свойства двухцветного графа потока $f^t \in G_{g,1}(M^4)$	11
5 Доказательство теоремы 1	12
6 Реализация классов топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^4)$	17
7 Заключение	18
Список литературы	19

Введение

Градиентно-подобные потоки — это структурно-устойчивые потоки (динамические системы с непрерывным временем) с конечным неблуждающим множеством. Смейл доказал, что на любом замкнутом многообразии M^n существует функция Морса, градиентный поток которой сколь угодно близко можно аппроксимировать градиентно-подобным потоком (то есть добиться трансверсальности пересечения инвариантных многообразий седловых состояний равновесия). Поэтому градиентно-подобные потоки существуют на любом многообразии, а структура множества состояний равновесия таких потоков тесно связана с топологией многообразия. Топологическая классификация градиентно-подобных потоков, заданных на многообразиях размерности 1, 2 и 3 следует из классических работ А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, М. Пейшото и Я.Л. Уманского. Для размерности $n > 3$ известно немного результатов, большая часть которых касается классификации потоков, седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса (размерность неустойчивого многообразия), равный единице или $(n - 1)$, см., для ссылок, например [10]. Фактически, топологическая классификация градиентно-подобных потоков, допускающих седловые состояния равновесия, имеющие индексы Морса отличные от 1 и $(n - 1)$, сделана лишь для потоков на комплексной проективной плоскости в недавних работах Е.В. Жужомы, В.С. Медведева, В.З. Гринеса и Е.Я. Гуревич [8], [9]. В частности, доказано, что при условии отсутствия пересечений инвариантных многообразий различных седел (гетероклинических пересечений), неблуждающее множество таких потоков содержит ровно одно седло, индекс Морса которого равен двум, замыкание его сепаратрис являются локально плоскими сферами, и все такие потоки допускают классификацию в комбинаторных терминах. С другой стороны, класс четырехмерных многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки без гетероклинических пересечений, имеющих одно седло индекса два, значительно шире. А именно, в силу [13], такие потоки существуют на четырехмерном многообразии тогда и только тогда, когда многообразие гомеоморфно связной сумме комплексной проективной плоскости и некоторого числа (возможно, равного нулю) копий прямых произведений сферы и окружности. В настоящей выпускной квалификационной работе получена полная топологическая классификация таких потоков.

1 Формулировка результатов

Гладкий поток $f^t : M^n \rightarrow M^n$, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n , называется *градиентно-подобным потоком*, если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество Ω_{f^t} потока f^t состоит из конечного числа состояний равновесия, все они гиперболические;
- инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия или замкнутых траекторий пересекаются трансверсально.

Размерность неустойчивого многообразия гиперболического состояния равновесия p называется его *индексом Морса*. Состояния равновесия, индекс Морса которого равен $n(0)$ называется *источником (стоком)*, состояние равновесия, индекс Морса которого меньше n , но больше нуля, называется *седловым*. Обозначим через $\Omega_{f^t}^i$ множество всех состояний равновесия градиентно-подобного потока f^t , размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0, \dots, n\}$, через c_i число таких состояний равновесия и положим $m_{f^t} = c_2 + \dots + c_{n-2}$.

Из хорошо известной формулы Пуанкаре-Хопфа следует, что сумма $c_0 - c_1 + \dots + (-1)^n$ равна эйлеровой характеристике $\chi(M^n)$ многообразия M^n . Из работ [3], [13] следует, что при некоторых дополнительных условиях топология многообразия M^n уточняется следующим образом.

Утверждение 1. Пусть f^t — градиентно-подобный поток на замкнутом многообразии M^n такой, что для инвариантные многообразия седловых состояний равновесия $p \in \Omega_{f^t}^{n-1}$, $q \in \Omega_{f^t}^1$ не пересекаются с инвариантными многообразиями седловых состояний равновесия, отличных от p, q , соответственно. Тогда

1. $g_{f^t} = \frac{c_{n-1} + c_1 - c_0 - c_n + 2}{2}$ является целым неотрицательным числом;
2. Если $m_{f^t} = 0$, то M^n гомеоморфно связной сумме $\mathcal{S}_{g_{f^t}}^n$ сферы S^n и g_{f^t} копий прямых произведений $S^{n-1} \times S^1$ сферы S^{n-1} и окружности S^1 ;
3. Если $m_{f^t} > 0$, то M^n гомеоморфно связной сумме $\mathcal{S}_{g_{f^t}}^n$ и некоторого односвязного многообразия \mathcal{N}^n , более того;

4. Если $m_{ft} = 1$, то $n \in \{4, 8, 16\}$ и при $n = 4$ многообразие \mathcal{N}^n гомеоморфно комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

В настоящей работе рассматривается класс $G_{g,1}(M^4)$ градиентно-подобных потоков на гладком замкнутом многообразии M^4 , отличном от $\mathbb{C}P^2$ такой, что для любого $f^t \in G_{g,1}(M^4)$ инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются и множество седловых состояний равновесия содержит ровно одно седло, индекс Морса которого равен двум. В силу утверждения 1, многообразие M^4 , допускающее такие потоки, гомеоморфно связной сумме комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ и $g = g_{ft} > 0$ копий прямых произведений $S^{n-1} \times S^1$.

По аналогии с работами [9], [11] каждому потоку $f^t \in G_{g,1}(M^4)$ поставим в соответствие двухцветный граф Γ_{ft} следующим образом.

Обозначим через \mathcal{L}_{ft} множество всех сфер $\{cl W_p^s, p \in \Omega_{ft}^1\}$ и $\{cl W_q^u, q \in \Omega_{ft}^3\}$, через ν_{ft} число этих сфер, и через \mathcal{D}_{ft} множество компонент связности $M^4 \setminus (\bigcup_{p \in \Omega_{ft}^1} cl W_p^s \cup \bigcup_{q \in \Omega_{ft}^3} cl W_q^u)$.

Двухцветным графом потока $G_{g,1}(M^4)$ назовем граф Γ_{ft} такой, что:

1. множество $V(\Gamma_{ft})$ вершин графа Γ_{ft} находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством \mathcal{D}_{ft} , множество $E(\Gamma_{ft})$ ребер графа Γ_{ft} находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством \mathcal{L}_{ft} ;
2. вершины v_i, v_j инцидентны ребру $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие им области D_i, D_j имеют общую граничную сферу;
3. ребро $e_{i,j}$ имеет цвет $s (u)$ если оно соответствует многообразию $cl W_p^s \in \mathcal{L}_{ft}$ ($cl W_q^u \in \mathcal{L}_{ft}$).
4. граф Γ_{ft} имеет одну отмеченную вершину v_* , соответствующую области $D_* \subset \mathcal{D}_{ft}$, содержащей седловое состояние равновесия, индекс Морса которого равен двум.

Графы $\Gamma_{ft}, \Gamma_{f^t}$ потоков $f^t, f^t \in G_{g,1}(M^4)$ будем называть *изоморфными*, если существует изоморфизм $\xi : \Gamma_{ft} \rightarrow \Gamma_{f^t}$, сохраняющий цвета ребер и отмеченную вершину.

Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Потоки $f^t, f^{t'} \in G_{g,1}(M^4)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их двухцветные графы $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f^{t'}}$ изоморфны.*

Простой связный граф Γ , ребра которого окрашены в цвета s и u , называется *допустимым*, если он имеет $g \geq 0$ простых непересекающихся циклов, на каждом цикле имеется по крайней мере по одному ребру цвета s и по одному ребру цвета u , и никакое ребро не принадлежит двум циклам одновременно.

Лемма 1. *Для любого $f^t \in G_{g,1}(M^4)$ его двухцветный граф Γ_{f^t} является допустимым.*

Теорема 2. *Для любого допустимого графа Γ существует поток $f^t \in G_{g,1}(M^4)$, граф Γ_{f^t} которого изоморфен Γ .*

2 Вспомогательные определения и утверждения

2.1 Динамика

Непрерывной динамической системой или потоком на метрическом пространстве (X, d) (называемом фазовым пространством) называется непрерывное отображение $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ с групповыми свойствами

- 1) $f(x, 0) = x$; для любого $x \in X$;
- 2) $f(f(x, t), s) = f(x, t + s)$ для любых $x \in X, s, t \in \mathbb{R}$.

Будем обозначать $f(x, t)$, как $f^t(x)$.

Множество $\mathcal{O}(x) = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$ называется *орбитой (траекторией)* точки $x \in M^n$.

Потоки $f^t, f^{t'}$ на многообразии M^n называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока $f^{t'}$ с сохранением ориентации на траекториях.

Точка $x \in M^n$ называется *состоянием равновесия* потока f^t , если $f^t(x) = x$.

Состояние равновесия $p \in M^n$ потока f^t на M^n называется *гиперболическим*, если матрица Якоби $(\frac{\partial F}{\partial x}|_p)$ поля скоростей $F = \partial f^t(x)/\partial t|_{t=0}$ в точке p не имеет собственных значений, вещественная часть которых равна нулю.

Устойчивым многообразием гиперболического состояния равновесия p называется множество $W_p^s = \{y \in M^n | d(p, f^k(y)) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty\}$.

Неустойчивое многообразие W_p^u гиперболической точки p определяется как устойчивое многообразие этого состояния равновесия относительно потока f^{-t} .

Неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой седлового состояния равновесия p называется компонента связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$).

Следующее утверждение непосредственно вытекает из [7, Theorem 2.3].

Утверждение 2. Пусть f^t — градиентно-подобный поток на замкнутом многообразии M^n , $n \geq 1$. Тогда

$$1. M^n = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^s = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^u;$$

2. для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ многообразие W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^n ;

3. для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ и любой компоненты связности l_p^u множества $W_p^u \setminus p$ верно равенство $cl\ l_p^u \setminus (l_p^u \cup p) = \bigcup_{q \in \Omega_f: W_q^s \cap l_p^u \neq \emptyset} W_q^u$.

Напомним, что дважды дифференцируемая функция $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ на гладком замкнутом ориентируемом многообразии M^n называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, то есть для любой критической точки $p \in M^n$ определитель матрицы Гессе $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Big|_p$ в этой точке отличен от нуля.

В силу [7] (Theorem B) и [6] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Для любого градиентно-подобного потока f^t на замкнутом многообразии M^n существует самоиндексирующаяся энергетическая функция $\varphi : M^n \rightarrow [0, n]$ — функция Морса со следующим свойством:

1. φ строго убывает вдоль незамкнутых траекторий потока f^t ;

2. любое состояние равновесия $p \in \Omega_{f^t}$ является критической точкой функции φ индекс которой равен $\dim W_p^u$; при этом $\varphi(p) = \dim W_p^u$;

3. для любого не критического значения $c \in (0, n)$ функции φ множество $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ является гладким подмногообразием многообразия M^n , трансверсальным к траекториям потока f^t .

2.2 Топология

Простая замкнутая кривая $c \in S^3$ (узел) называется тривиальным узлом, если существует гомеоморфизм h из S^3 на стандартную единичную сферу S^3 такой, что $h(c) = S^3 \cap Ox_1x_2$.

Пусть $\mathcal{C} \subset S^3$ — узел и $\Pi_{\mathcal{C}} \subset S^3$ — его трубчатая окрестность. *Хирургией Дена* вдоль узла $\mathcal{C} \subset S^3$ называется операция получения нового многообразия путем склеивания многообразий с краем $S^3 \setminus \text{int } \Pi_{\mathcal{C}}$ и $S^1 \times \mathbb{B}^2$ по некоторому гомеоморфизму $\varphi : \partial(S^1 \times \mathbb{B}^2) \rightarrow \partial\Pi_{\mathcal{C}}$.

Пусть $m \subset \partial(S^1 \times \mathbb{B}^2)$ — стандартный меридиан и $[\phi(m)] = (p, q)$. Отношение p/q называется *коэффициентом хирургии*. Из [9, Утверждение 5] следует, что тривиальная хирургия не меняет топологию многообразия.

2.3 Необходимые сведения из теории графов

Графом называется совокупность Γ двух конечных множеств — множества вершин $V(\Gamma)$ и множества ребер $E(\Gamma)$.

Граф Γ называется *простым*, если для любого его ребра концевые вершины не совпадают.

Простым путем или маршрутом, соединяющим вершины (v, ω) называется последовательность попарно-различных ребер $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{l-1}, v_l)$ такая, что $v_0 = v, v_l = \omega$.

Простым циклом называется простой путь, соединяющий вершину v с самой собой.

Граф, не имеющий циклов, называется *ациклическим*.

Связный ациклический граф называется *деревом*.

Следующее утверждение определяет основные свойства деревьев (см. [14, Теорема 13.1]).

Утверждение 4. Пусть Γ - граф с k^1 ребрами и k^0 вершинами. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Γ - дерево;
2. Γ - связный граф и $k^0 = k^1 + 1$;

3. Γ - ациклический граф и $k^0 = k^1 + 1$;
4. любые две несовпадающие вершины соединяют единственный простой путь;
5. Γ - ациклический граф такой, что если к любой паре его различных вершин добавить ребро, соединяющее их, то полученный граф будет иметь ровно один цикл.

3 Структура неблуждающего множества потоков из класса $G_{g,1}(M^4)$ и топология вложения двумерных сепаратрис

Пусть $f^t \in G_{g,1}(M^4)$ и $\varphi : M^4 \rightarrow [0, 4]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция потока f^t . Положим $M_c = \varphi^{-1}([0, c])$, $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$, $A_{f^t} = W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup \Omega_{f^t}^0$, $R_{f^t} = W_{\Omega_{f^t}^3}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^2}^s \cup \Omega_{f^t}^4$, $\tilde{R}_{f^t} = W_{\Omega_{f^t}^3}^s \cup \Omega_{f^t}^4$ и $V_{f^t} = M^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$.

Следующее предложение доказывается аналогично [10, Лемма 3.1].

Предложение 3.1. A_{f^t}, R_{f^t} являются связными аттрактором и репеллером потока f^t со связными захватывающими окрестностями $V_a = M_{3/2}, V_r = M^4 \setminus \text{int } M_{3/2}$ соответственно, ограниченными многообразием $\Sigma_{f^t} = \varphi^{-1}(\frac{3}{2})$.

Следствие 3.1. \tilde{R}_{f^t} является связным репеллером потока f^t с захватывающей окрестностью $\tilde{V}_r = M^4 \setminus \text{int } M_{5/2}$.

Каждое из множеств A_{f^t}, \tilde{R}_{f^t} отождествим со связным графом, множество вершин которого совпадает с множеством узловых состояний равновесия потока f^t (стоковых и источниковых соответственно), а множество ребер совпадает с множеством одномерных неустойчивых и устойчивых, соответственно, инвариантных многообразий седловых состояний равновесия. Пусть μ_a, μ_r — число циклов в графе A_{f^t}, R_{f^t} . Тогда $c_1 = c_0 - 1 + \mu_a$, $c_3 = c_4 - 1 + \mu_r$. Отсюда следует, что $\mu_a + \mu_r = 2g_{f^t}$. Так как $g_{f^t} > 0$ по предположению, то $\mu_a + \mu_r > 0$. Ниже мы показываем, что $\mu_a = \mu_r = g_{f^t}/2$.

Из свойств функции Морса следует, что многообразие $M_{3/2}$ представляется в виде объединения c_0 шаров B^4 с приклеенными c_1 ручками индекса 1, а множество $M_{5/2}$ гомеоморфно многообразию $M_{3/2}$ с одной приклеенной ручкой индекса 2. Из результатов [4] следует, что топология $M_{5/2}$ полностью определяет топологию многообразия M^4 . В свою очередь, топология многообразия

$M_{5/2}$ полностью определяется *диаграммой Курби*, представляющей собой следы подошв приклеиваемых ручек индекса 1 и 2 на некоторой сфере S_{ft}^3 (см., например, [5, Гл. 3]). Ниже мы показываем, что сферу S_{ft}^3 можно выбрать таким образом, чтобы она пересекала траектории потока f^t трансверсально, а следы подошв приклеиваемых ручек определялись следами инвариантных многообразий седловых состояний равновесия потока f^t и что для любого потока $f^t \in G(M^4)$ пересечение сферы S_{ft}^3 и двумерного неустойчивого многообразия соответствующего седлового состояния равновесия является тривиальным узлом.

Из связности аттрактора A_{ft} следует, что $c_1 \geq c_0 - 1$. Если $c_1 = c_0 - 1$, то A_{ft} не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности и $M_{3/2}$ гомеоморфно шару. Если $c_1 > c_0 - 1$, то $M_{3/2}$ гомеоморфно шару с приклеенными $m_a = c_1 - c_0 + 1$ ручками. В первом случае положим $B = M_{3/2}$. Во втором случае существует подмножество $\tilde{\Omega}_{ft}^1$ множества Ω_{ft}^1 , состоящее из $(c_0 - 1)$ точек, такое, что объединение $\tilde{A}_{ft} = \bigcup_{p \in \Omega_{ft}^0 \cup \tilde{\Omega}_{ft}^1} W_p^u$ связно и не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности. Так как инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия потока f^t не пересекаются, то можно выбрать набор N попарно-непересекающихся замкнутых трубчатых окрестностей устойчивых инвариантных многообразий точек из множества $\Omega_{ft}^1 \setminus \tilde{\Omega}_{ft}^1$ таким образом, чтобы они не пересекались с инвариантными многообразиями седел, отличных от точек из $\Omega_{ft}^1 \setminus \tilde{\Omega}_{ft}^1$. Пересечение множества N с $M_{3/2}$ является объединением m_a ручек индекса 1. Удалим из множества $M_{3/2}$ эти ручки и обозначим через B замыкание полученного множества. Как и в случае $c_1 = c_0 - 1$, множество B гомеоморфно шару.

Положим

$$\begin{aligned} S_{ft}^3 &= \partial B, \mathcal{C}_{ft}^0 = S_{ft}^3 \cap \bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1 \setminus \tilde{\Omega}_{ft}^1} W_{\sigma_1}^u, \mathcal{C}_{ft}^1 = S_{ft}^3 \cap W_{\sigma_2}^u, \text{ где } \sigma_2 \in \Omega_{ft}^2, \\ \mathcal{C}_{ft}^3 &= S_{ft}^3 \cap \bigcup_{\sigma_3 \in \Omega_{ft}^3} W_{\sigma_3}^u, \text{ и} \\ \mathcal{C}_{ft}^s &= \bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1} (W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{ft}), \mathcal{C}_{ft}^u = \bigcup_{\sigma_{n-1} \in \Omega_{ft}^{n-1}, \sigma_2 \in \Omega_{ft}^2} (W_{\sigma_{n-1}}^u \cap W_{\sigma_2}^u \cap \Sigma_{ft}). \end{aligned}$$

Лемма 2. 1. Множество \mathcal{C}_{ft}^1 является тривиальным узлом с оснащением 1.

$$2. c_1 - c_0 + 1 = c_3 - c_4 + 1 = g.$$

Доказательство. Тот факт, что множество \mathcal{C}_{ft}^1 является узлом, доказывается аналогично [9, Предложение 8]. Докажем, что узел \mathcal{C}_{ft}^1 является тривиальным и одновременно докажем равенство $c_1 - c_0 + 1 = c_3 - c_4 + 1$. Так как $g = g_{ft} > 0$ для рассматриваемого класса потоков, то из первого пункта утверждения 1 следует, что хотя бы одно из чисел $m_a = c_1 - c_0 + 1$, $m_r = c_3 - c_4 + 1$ отлично от нуля. Докажем равенство $m_a = m_r$, отсюда будет следовать, что $m_a = m_r = g_{ft} = g$. Отметим, что множество $M_{5/2}$ является шаром B с приклеенными m_a ручками индекса 1 и одной ручкой индекса 2, при этом ручки индекса 1 приклеиваются по попарно непересекающимся замкнутым шарам с центрами в точках из множества \mathcal{C}_{ft}^0 , а ручка индекса 2 приклеивается по трубчатой окрестности узла \mathcal{C}_{ft}^2 . Поскольку множество $S_{ft}^3 \setminus \mathcal{C}_{ft}^1$ линейно связно, а множество \mathcal{C}_{ft}^0 состоит из конечного числа пар точек, то найдется трехмерный замкнутый шар $D^3 \in S_{ft}^3 \setminus \mathcal{C}_{ft}^1$ такой, что $\mathcal{C}_{ft}^0 \subset \text{int } D^3$. Поэтому множество $M_{5/2}$ является связной суммой двух многообразий $X \sharp Y$, первое из которых получено приклеиванием к шару m_a ручек индекса 1 (следовательно, гомеоморфна связной сумме m_a копий $B^{n-1} \times S^1$), а второе получено приклеиванием к шару одной ручки индекса 1. Тогда граница $\Sigma_{5/2}$ множества $M_{5/2}$ гомеоморфна связной сумме m_a копий $S^{n-2} \times S^1$ и границы многообразия Y .

В то же время $\Sigma_{5/2}$ является границей многообразия $M^4 \setminus \text{int } M_{5/2}$, которое гомеоморфно шару с приклеенными m_r ручками индекса 1, поэтому $\Sigma_{5/2}$ гомеоморфна связной сумме m_r копий $S^2 \times S^1$. В силу теоремы Милнора-Кнезера разложение трехмерного ориентируемого многообразия в связную сумму единственно, поэтому возможны два случая: а) Y гомеоморфно $S^2 \times S^1$ и тогда $m_a - 1 = m_r$; б) Y гомеоморфно сфере S^3 и $m_a = m_r$. В случае а) $c_1 - c_0 = c_3 - c_4 + 1$, тогда $g = (c_1 + c_3 - c_0 - c_4 + 2)/2 = (2c_3 - 2c_4 + 3)/2$ не является целым, что противоречит утверждению 1. Рассмотрим случай б). В силу [1] никакая нетривиальная хирургия вдоль узла не дает сферу. Аналогично [9, Предложение 11] доказывается, что приклеивающее ручку отображение, индуцируемое потоком f^t , определяет нетривиальную хирургию. Следовательно, узел \mathcal{C}_{ft}^0 является тривиальным. \diamond

Следствие 3.2. Σ_{ft} гомеоморфна связной сумме g_{ft} копий $S^{n-2} \times S^1$.

$$\text{Пусть } \lambda_{\sigma_1}^s = W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{ft}, \lambda_{\sigma_{n-1}}^u = W_{\sigma_{n-1}}^u \cap \Sigma_{ft}$$

Следствие 3.3. Существует максимальный неразбивающий s -набор сфер $\lambda_1^s, \dots, \lambda_g^s \in \mathcal{C}_{ft}^s$ такой, что множество $\tilde{\Sigma}_{ft} = \Sigma_{ft} \setminus \bigcup_{i=1}^g \lambda_i^s$ связно, и для любой сферы $\lambda \in \mathcal{C}_{ft}^s \cup \mathcal{C}_{ft}^u \setminus \bigcup_{i=1}^g \lambda_i^s$ множество $\tilde{\Sigma}_{ft} \setminus \lambda$ несвязно. Аналогично, существует максимальный неразбивающий u -набор сфер $\lambda_1^u, \dots, \lambda_g^u$, принадлежащий множеству \mathcal{C}_{ft}^u .

4 Свойства двухцветного графа потока $f^t \in G_{g,1}(M^4)$

Предложение 4.1. Пусть $f^t \in G(\mathcal{S}_{g^t}^n)$. Если $g > 0$, то двухцветный граф Γ_{ft} связан и содержит в точности g простых непересекающихся циклов таких, что:

1. никакое ребро не принадлежит одновременно двум циклам;
2. каждый цикл графа Γ_{ft} содержит как ребро, окрашенное в цвет s , так и ребро, окрашенное в цвет u , и эти ребра соответствуют сферам $\lambda^s \in \mathcal{C}_{ft}^s, \lambda^u \in \mathcal{C}_{ft}^u$, принадлежащим максимальным неразбивающим s - и u - наборам соответственно.

Доказательство. Согласно Следствию 3.3 существует максимальный неразбивающий s -набор сфер $\lambda_1^s, \dots, \lambda_g^s \in \mathcal{C}_{ft}^s$ такой, что множество $\tilde{\Sigma}_{ft} = \Sigma_{ft} \setminus \bigcup_{i=1}^g \lambda_i^s$ связно, и для любой сферы $\lambda \in \mathcal{C}_{ft}^s \cup \mathcal{C}_{ft}^u \setminus \bigcup_{i=1}^g \lambda_i^s$ множество $\tilde{\Sigma}_{ft} \setminus \lambda$ несвязно. Пусть e_1^s, \dots, e_g^s, e — ребра графа Γ_{ft} , соответствующие сферам $\lambda_1^s, \dots, \lambda_g^s, \lambda$ соответственно. Граф $\tilde{\Gamma}_{ft} = \Gamma_{ft} \setminus \bigcup_{i=1}^g e_i^s$ связан, а граф $\tilde{\Gamma}_{ft} \setminus \lambda$ несвязен. Таким образом, граф $\tilde{\Gamma}_{ft}$ является связным и не имеет циклов, следовательно, является деревом. Тогда из утверждения 4 следует, что каждое ребро e_1^s, \dots, e_g^s лежит на простом цикле графа Γ_{ft} . Никакие два ребра $e_i^s, e_j^s, i \neq j$, не лежат на одном и том же цикле, в противном случае граф $\Gamma_{ft} \setminus (e_i^s \cup e_j^s)$ имел бы две компоненты связности. Кроме того, никакое ребро не принадлежит двум циклам одновременно, в противном случае граф $\tilde{\Gamma}_{ft}$ был бы несвязным. Таким образом, граф Γ_{ft} имеет по крайней мере g попарно различных простых циклов, каждый из которых содержит ребро e_i^s , окрашенное в цвет s . Поскольку граф $\tilde{\Gamma}_{ft}$ ациклический, то граф Γ_{ft} содержит в точности g циклов.

Наряду с максимальным неразбивающим s -набором существует так же и максимальный неразбивающий u -набор сфер $\lambda_1^u, \dots, \lambda_g^u$, принадлежащий множеству \mathcal{C}_{ft}^u . Каждой сфере λ_i^u из этого набора соответствует ребро e_i^u графа Γ_{ft} , окрашенное в цвет u . Заменяя в предыдущих рассуждениях s на u , получим, что каждый из g простых циклов графа Γ_{ft} наряду с ребром e_i^s , окрашенным в цвет s , содержит ребро e_i^u , окрашенное в цвет u . \diamond

5 Доказательство теоремы 1

Из определения топологической эквивалентности непосредственно следует необходимость условий теоремы. Докажем достаточность. Предположим, что графы потоков $f^t, f'^t \in G(M^4)$ изоморфны посредством изоморфизма $\zeta : \Gamma_{ft} \rightarrow \Gamma_{f't}$, сохраняющего цвета ребер и переводящего отмеченную вершину графа Γ_{ft} в отмеченную вершину графа $\Gamma_{f't}$, и докажем топологическую сопряженность этих потоков (отсюда будет следовать и топологическая эквивалентность этих потоков).

В силу определения графа Γ_{ft} существуют взаимно однозначное отображение

$$\xi_{ft} : \mathcal{D}_{ft} \cup \mathcal{L}_{ft} \rightarrow V(\Gamma_{ft}) \cup E(\Gamma_{ft})$$

такое, что $\xi_{ft}(\mathcal{D}_{ft}) = V(\Gamma_{ft})$, $\xi_{ft}(\mathcal{L}_{ft}) = E(\Gamma_{ft})$ и вершины $\xi_{ft}(D_i), \xi_{ft}(D_j)$ инцидентны ребру $\xi_{ft}(L)$ тогда и только тогда, когда области $D_i, D_j \in \mathcal{D}_{ft}$ имеют общую границу $L \in \mathcal{L}_{ft}$.

Из наличия изоморфизма $\zeta : \Gamma_{ft} \rightarrow \Gamma_{f't}$ следует, что эти графы имеют одинаковое количество вершин, ребер и циклов, поэтому $g_{ft} = g_{f't}$. Более того, изоморфизм $\zeta : \Gamma_{ft} \rightarrow \Gamma_{f't}$ индуцирует взаимно однозначное соответствие ζ_* между множествами $\mathcal{D}_{ft} \cup \mathcal{L}_{ft}, \mathcal{D}_{f't} \cup \mathcal{L}_{f't}$ следующим образом:

$$\zeta_*(D) = \xi_{f't}^{-1} \zeta(\xi_{ft}(D)), \zeta_*(L) = \xi_{f't}^{-1} \zeta(\xi_{ft}(L))$$

для любых $D \in \mathcal{D}_{ft}, L \in \mathcal{L}_{ft}$.

Взаимно однозначное соответствие ζ_* продолжается до взаимно однозначного соответствия между множествами Ω_{ft} и $\Omega_{f't}$ следующим образом:

1. Пусть $\sigma \in \Omega_{ft}^1$. Тогда существует единственная точка $\alpha \in \Omega_{f't}^n$ такая, что $cl W_\sigma^s = W_\sigma^s \cup \alpha$. Кроме того, существует единственная пара точек $\sigma' \in$

$\Omega_{f^{t'}}^1, \alpha' \in \Omega_{f^{t'}}^n$ такая, что $cl W_{\sigma'}^s = W_{\sigma'}^s \cup \alpha'$ и $\zeta_*(cl W_{\sigma'}^s) = cl W_{\sigma'}^s$. Положим $\zeta_*(\sigma) = \sigma', \zeta_*(\alpha) = \alpha'$.

2. Пусть $\sigma \in \Omega_{f^t}^{n-1}$. Тогда существует единственная точка $\omega \in \Omega_{f^t}^0$ такая, что $cl W_{\sigma}^u = W_{\sigma}^u \cup \omega$ и единственная пара точек $\sigma' \in \Omega_{f^{t'}}^{n-1}, \omega' \in \Omega_{f^{t'}}^0$ такая, что $cl W_{\sigma'}^u = W_{\sigma'}^u \cup \omega'$ и $\zeta_*(cl W_{\sigma}^u) = cl W_{\sigma'}^u$. Положим $\zeta_*(\sigma) = \sigma', \zeta_*(\omega) = \omega'$.
3. Пусть $\omega \in \Omega_{f^t}^0$ ($\alpha \in \Omega_{f^t}^n$) — такая точка, что W_{ω}^s (W_{α}^u) не пересекается ни с одной трехмерной сепаратрисой седловых состояний равновесия потока f^t . Тогда ω (α) принадлежит единственной области $D \in \mathcal{D}_{f^t}$, содержащей замыкания одномерных сепаратрис тех седловых состояний равновесия, чьи трехмерные инвариантные многообразия составляют границу области D . Более того, в области $\zeta_*(D)$ найдется единственная стоковая (источниковая) точка ω' (α') потока $f^{t'}$, которая также не пересекается ни с одной трехмерной сепаратрисой седловых состояний равновесия потока $f^{t'}$. Положим $\omega' = \zeta_*(\omega)$ ($\alpha' = \zeta_*(\alpha)$).

Всюду ниже для произвольного состояния равновесия $p \in \Omega_{f^t}$ будем обозначать через p' состояние равновесия из множества $\Omega_{f^{t'}}$ такое, что $p' = \zeta_*(p)$.

Построим гомеоморфизм $H : M^4 \rightarrow M^4$, удовлетворяющий соотношению $f^t = H^{-1}f^{t'}H$ (и, следовательно, переводящий траектории потока f^t в траектории потока $f^{t'}$) по шагам.

Напомним, что $A_{f^t} = W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup \Omega_{f^t}^0, R_{f^t} = W_{\Omega_{f^t}^3}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^2}^s \cup \Omega_{f^t}^4$, и $V_{f^t} = M^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$, и обозначим через $A_{f^{t'}}, R_{f^{t'}}, V_{f^{t'}}$ аналогичные множества потока $f^{t'}$.

В силу [9, Утверждение 11] для любой точки $\sigma_i \in \Omega_{f^t}^i, i \in \{1, 2, 3\}$, существует компактная каноническая окрестность V_{σ_i} , которая может быть представлена как прямое произведение двух дисков $B_{\sigma_i}^s \subset W_{\sigma_i}^s, B_{\sigma_i}^u \subset W_{\sigma_i}^u$ размерностей $(4 - i), i$ соответственно. Граница окрестности V_{σ_i} представляется в виде объединения двух множеств с общей границей следующим образом:

$$\partial V_{\sigma_i} = \partial B_{\sigma_i}^s \times B_{\sigma_i}^u \cup B_{\sigma_i}^s \times \partial B_{\sigma_i}^u.$$

В случае $i = 1$ ($i = 3$) множество $\partial B_{\sigma_i}^s \times B_{\sigma_i}^u$ ($B_{\sigma_i}^s \times \partial B_{\sigma_i}^u$) гомеоморфно кольцу $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$, а множество $B_{\sigma_i}^s \times \partial B_{\sigma_i}^u$ ($\partial B_{\sigma_i}^s \times B_{\sigma_i}^u$) является объединением двух трехмерных дисков. В случае $i = 2$ оба множества $\partial B_{\sigma_i}^s \times B_{\sigma_i}^u, B_{\sigma_i}^s \times \partial B_{\sigma_i}^u$ являются полноториями.

Шаг 1. Сферы S_{ft}^3, S_{ft}^3 можно модифицировать таким образом, что полученные в результате локально-плоские сферы (которые будем обозначать теми же символами) обладают следующими свойствами:

1. любая траектория $l_x \in V_{ft}(l_{x'} \in V_{ft})$ пересекается с $S_{ft}^3(S_{ft}^3)$ в единственной точке;
2. для любых седловых точек $\sigma_i \in \Omega_{ft}^i, \sigma'_i \in \Omega_{ft}^i$ пересечения $V_{\sigma_i} \cap S_{ft}^3, V_{\sigma'_i} \cap S_{ft}^3$ непусты и состоят из следующих множеств:
 - (a) $V_{\sigma_i} \cap S_{ft}^3 = B_{\sigma_i}^s \times \partial B_{\sigma_i}^u, V_{\sigma'_i} \cap S_{ft}^3 = B_{\sigma'_i}^s \times \partial B_{\sigma'_i}^u$, если $i = 1$ и $\sigma_1 \in \tilde{\Omega}_{ft}^1$;
 - (b) $W_{\sigma_1} \cap S_{ft}^3 = B_{\sigma_1}^s \times \partial B_{\sigma_1}^u, W_{\sigma'_1} \cap S_{ft}^3 = B_{\sigma'_1}^s \times \partial B_{\sigma'_1}^u$, если $\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1 \setminus \tilde{\Omega}_{ft}^1$;
 - (c) $V_{\sigma_i} \cap S_{ft}^3 = \partial B_{\sigma_i}^u \times B_{\sigma_i}^s, V_{\sigma'_i} \cap S_{ft}^3 = \partial B_{\sigma'_i}^u \times B_{\sigma'_i}^s$, если $i \in \{2, 3\}$.

Пусть $i = 1$. Положим $\Pi = \partial B_{\sigma_1}^s \times B_{\sigma_1}^u$. Предположим, что $V_{\sigma_1} \cap S_{ft}^3 \neq \Pi$. Соединим множество Π со сферой S_{ft}^3 отрезками траекторий потока f^t и обозначим через $\tilde{\Pi}$ геометрическое место концов этих траекторий, так что $\tilde{\Pi} \subset S_{ft}^3$. По определению $\tilde{\Pi}$ является подмногообразием сферы S_{ft}^3 , поэтому существует вложение $e : \partial \tilde{\Pi} \times [0, 1] \rightarrow S_{ft}^3$ такое, что $e(\partial \tilde{\Pi} \times [0, 1]) \cap \tilde{\Pi} = e(\partial \tilde{\Pi} \times \{0\})$ и $e(\partial \tilde{\Pi} \times [0, 1]) \cap V_{\sigma} = \emptyset$ для любого седлового состояния равновесия, отличного от σ_1 . На множестве $\tilde{\Pi}$ определена непрерывная функция $T : \tilde{\Pi} \rightarrow \mathbb{R}$, ставящая каждой точке $x \in \tilde{\Pi}$ время t_x такое, что $f^{t_x}(x) \subset \Pi$. Продолжим эту функцию непрерывно на множество $K = e(\partial \tilde{\Pi} \times [0, 1])$ так, чтобы $T(x) = 0$ для всех точек $x \in e(\partial \tilde{\Pi} \times \{1\})$. В качестве новой секущей возьмем следующую сферу:

$$\tilde{S}_{ft}^3 = (S_{ft}^3 \setminus (\tilde{\Pi} \cup K)) \cup \left(\bigcup_{x \in \tilde{\Pi} \cup K} f^{T(x)}(x) \right).$$

Аналогичную процедуру проделаем для всех оставшихся седловых точек, в результате получим секущую с требуемыми свойствами, которую снова обозначим через S_{ft}^3 . Аналогично модифицируем сферу S_{ft}^3 .

Шаг 2. Определение гомеоморфизма $h_{\sigma_i, \sigma'_i} : V_{\sigma_i} \rightarrow V_{\sigma'_i}$ такого, что

$$h_{\sigma_i, \sigma'_i} f^t|_{V_{\sigma_i}} = f^t h_{\sigma_i, \sigma'_i}|_{V_{\sigma'_i}}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, при которых правая и левая части равенства определены.

В силу [10, Предложение 2.3] существует гомеоморфизм $h_{\sigma_i} : V_{\sigma_i} \rightarrow \mathbb{B}^{n-i} \times \mathbb{B}^i$, сопрягающий поток $f^t|_{V_{\sigma_i}}$ с линейным потоком $b_i^t(x, y) = (e^{-t}x, e^ty)$, $x \in \mathbb{R}^{n-i}, y \in \mathbb{R}^i$.

Определим искомый гомеоморфизм формулой $h_{\sigma_i, \sigma'_i} = h_{\sigma'_i}^{-1} h_{\sigma_i}$.

Для состояния равновесия $\sigma_1 \in \tilde{\Omega}_{ft}^1$ положим $l_{\sigma_1}^s = W_{\sigma_1}^s \cap S_{ft}^3$, для состояния равновесия $\sigma_i \in \Omega_{ft}^i, i \in \{2, 3\}$ положим $l_{\sigma_i}^u = W_{\sigma_i}^u \cap S_{ft}^3$.

Для состояния равновесия $\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1 \setminus \tilde{\Omega}_{ft}^1$ положим $l_{\sigma_1}^s = B_{\sigma_1}^s \cap \partial B_{\sigma_1}^u$. Сделаем аналогичные обозначения для седловых состояний равновесия $\sigma'_i, i \in \{1, 2, 3\}$, потока f^{ft} .

Шаг 3. Построение гомеоморфизма $\Phi : S_{ft}^3 \rightarrow S_{ft}^3$ такого, что:

1. $\Phi(l_{\sigma_1}^s) = l_{\sigma'_1}^s$ для любой пары седловых точек $\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1, \sigma'_1 = \zeta_*(\sigma_1) \in \Omega_{ft}^1$;
2. $\Phi(l_{\sigma_i}^u) = l_{\sigma'_i}^u$ для любой пары седловых точек $\sigma_i \in \Omega_{ft}^i, \sigma'_i = \zeta_*(\sigma_i) \in \Omega_{ft}^i, i \in \{2, 3\}$.

Пусть $\sigma_2 \in \Omega_{ft}^2, \sigma'_2 \in \Omega_{ft}^2$. Тогда $\sigma'_2 = \zeta_*(\sigma_2)$. В силу [9, Предложение 9,11] множества $l_{\sigma_2}^u, l_{\sigma'_2}^u$ являются тривиальными узлами. Из определения тривиального узла следует, что существует гомеоморфизм $\Psi : S_{ft}^3 \rightarrow S_{ft}^3$ такой, что $\Psi(l_{\sigma_2}^u) = l_{\sigma'_2}^u$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве [10, Теорема 5.5], построим гомеоморфизм $\Psi' : S_{ft}^3 \rightarrow S_{ft}^3$ такой, что $\Phi'(\Psi(l_{\sigma_1}^s)) = l_{\sigma'_1}^s, \Phi'(\Psi(l_{\sigma_i}^u)) = l_{\sigma'_i}^u$ для любых пар точек $\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1, \sigma'_1 = \zeta_*(\sigma_1) \in \Omega_{ft}^1, \sigma_i \in \Omega_{ft}^i, \sigma'_i = \zeta_*(\sigma_i) \in \Omega_{ft}^i$. Тогда суперпозиция $\Psi'\Psi$ будет искомым гомеоморфизмом.

Шаг 4. Построение гомеоморфизма $H_{S_{ft}^3, S_{ft}^3} : S_{ft}^3 \rightarrow S_{ft}^3$ такого, что $H_{S_{ft}^3, S_{ft}^3}|_{V_\sigma} = h_{\sigma, \sigma'}|_{V_\sigma}$ для любых седловых точек $\sigma \in \Omega_{ft}, \sigma' \in \Omega_{ft}$.

Пусть $\Phi : S_{ft}^3 \rightarrow S_{ft}^3$ — гомеоморфизм, построенный на шаге 3. Положим $\Pi_\sigma = \Phi(V_\sigma \cap S_{ft}^3)$ для любой седловой точки $\sigma \in \Omega_{ft}, \Pi_{\sigma'} = V_{\sigma'} \cap S_{ft}^3$ для точки $\sigma' \in \Omega_{ft}$ и определим гомеоморфизм $h'_{\sigma, \sigma'} : \Pi_\sigma \rightarrow \Pi_{\sigma'}$ соотношением

$$h'_{\sigma, \sigma'}|_{\Pi_\sigma} = h_{\sigma, \sigma'} \Phi^{-1}|_{\Pi_\sigma}.$$

Пусть $\sigma_1 \in \Omega_{ft}^1, \sigma'_1 = \zeta_*(\sigma_1) \in \Omega_{ft}^1$. Каждое из множеств $\Pi_{\sigma_1}, \Pi_{\sigma'_1}$ гомеоморфно паре шаров $\mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^0$. Пусть $\Pi_{\sigma'_1}^0 \subset S_{ft}^3$ — пара 3-шаров такая, что:

1. $\Pi_{\sigma_1}, \Pi_{\sigma'_1} \subset \text{int } \Pi_{\sigma'_1}^0,$

2. $\Pi_{\sigma'_1}^0 \cap \Pi_\sigma = \emptyset, \Pi_{\sigma'_1}^0 \cap \Pi_{\sigma'} = \emptyset$ для любых седловых точек σ, σ' потоков f^t, f'^t соответственно, отличных от точек σ_1, σ'_1 .

В силу [9, Предложение 8] существует гомеоморфизм $\Psi_1 : S_{f^t}^3 \rightarrow S_{f'^t}^3$ со следующими свойствами:

1. $\Psi_1|_{S_{f^t}^3 \setminus \text{int}\Pi_{\sigma_1}^0} = id$;
2. $\Psi_1|_{\Pi_{\sigma_1}} = h'_{\sigma_1, \sigma'_1}|_{\Pi_{\sigma_1}}$.

Построим аналогичный гомеоморфизм для каждой седловой точки индекса 1 и обозначим через Ψ_1 суперпозицию построенных гомеоморфизмов.

Пусть $\sigma_2 \in \Omega_{f^t}^2, \sigma'_2 = \zeta_*(\sigma_2), l_{\sigma'_2}^u = W_{\sigma'_2}^u \cap S_{f'^t}^3$. В этом случае множества $\Pi_{\sigma_2}, \Pi_{\sigma'_2}$ являются полноториями. Пусть $\Pi_{\sigma'_2}^0 \subset S_{f'^t}^3$ — трубчатая окрестность узла $l_{\sigma'_2}^u$ такая, что $\Pi_{\sigma_2}, \Pi_{\sigma'_2} \subset \text{int}\Pi_{\sigma'_2}^0, \Pi_{\sigma'_2}^0 \cap \Pi_\sigma = \emptyset, \Pi_{\sigma'_2}^0 \cap \Pi_{\sigma'} = \emptyset$ для любых седловых точек σ, σ' , отличных от точек σ_2, σ'_2 . По определению гомеоморфизм $h'|_{\sigma_2, \sigma'_2}$ переводит параллель и меридиан полнотория Π_{σ_2} в параллель и меридиан полнотория $\Pi_{\sigma'_2}$ соответственно. Следовательно, в силу [9, Предложение 8], существует гомеоморфизм $\Psi_2 : S_{f^t}^3 \rightarrow S_{f'^t}^3$ со следующими свойствами:

1. $\Psi_2|_{S_{f^t}^3 \setminus \text{int}\Pi_{\sigma'_2}^0} = id$;
2. $\Psi_2|_{\Pi_{\sigma_2}} = h'_{\sigma_2, \sigma'_2}|_{\Pi_{\sigma_2}}$.

Пусть $\sigma_3 \in \Omega_{f^t}^3, \sigma'_3 = \zeta_*(\sigma_3) \in \Omega_{f'^t}^3$. Множества $\Pi_{\sigma_3}, \Pi_{\sigma'_3}$ гомеоморфны прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$. Пусть $\Pi_{\sigma'_3}^0$ — трубчатая окрестность множества $l_{\sigma'_3}^u = W_{\sigma'_3}^u \cap S_{f'^t}^3$ со свойствами, аналогичными свойствам множеств $\Pi_{\sigma'_1}^0, \Pi_{\sigma'_2}^0$. В силу [9, Предложение 4] существует гомеоморфизм $\Psi_3 : S_{f^t}^3 \rightarrow S_{f'^t}^3$ со следующими свойствами:

1. $\Psi_3|_{S_{f^t}^3 \setminus \text{int}\Pi_{\sigma'_3}^0} = id$;
2. $\Psi_3|_{\Pi_{\sigma_3}} = h'_{\sigma_3, \sigma'_3}|_{\Pi_{\sigma_3}}$.

Построим аналогичный гомеоморфизм для каждой седловой точки индекса 3 и обозначим через Ψ_3 суперпозицию построенных гомеоморфизмов.

Теперь искомым гомеоморфизм $H_{S_{f^t}^3, S_{f'^t}^3}$ определяется как суперпозиция $\Psi_3\Psi_2\Psi_1\Phi$.

Шаг 5. Продолжение гомеоморфизма $H_{S_{f^t}^3, S_{f^{t'}}^3} : S_{f^t}^3 \rightarrow S_{f^{t'}}^3$ до гомеоморфизма $H : M^4 \rightarrow M^4$ такого, что $Hf^t = f^{t'}H$.

Для каждой седловой точки $\sigma(\sigma')$ потока $f^t(f^{t'})$ положим $\mathbb{V}_\sigma = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(V_\sigma)$, $\mathbb{V}_{\sigma'} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^{t'}(V_{\sigma'})$ и определим гомеоморфизм $H_{\sigma, \sigma'} : \mathbb{V}_\sigma \rightarrow \mathbb{V}_{\sigma'}$ соотношением

$$H_{\sigma, \sigma'}(x) = f'^{-t_x}(h_{\sigma, \sigma'}(f^{t_x}(x))),$$

где $t_x \in \mathbb{R}$ — такое время, что $f^{t_x}(x) \in V_\sigma$.

Напомним, что $V_{f^t} = M^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$, $V_{f^{t'}} = M^4 \setminus (A_{f^{t'}} \cup R_{f^{t'}})$. Каждой точке $x \in V_{f^t}$ поставим в соответствие время $t_x \in \mathbb{R}$ такое, что $f^{t_x}(x) \in S_{f^t}^3$ и положим

$$H_{V_{f^t}, V_{f^{t'}}}(x) = f'^{-t_x}(H_{S_{f^t}^3, S_{f^{t'}}^3}(f^{t_x}(x))).$$

Положим

$$H(x) = \begin{cases} H_{\sigma, \sigma'}(x), & x \in \mathbb{V}_\sigma, \sigma \in \Omega_{f^t}^1 \cup \Omega_{f^t}^2 \cup \Omega_{f^t}^3; \\ H_{V_{f^t}, V_{f^{t'}}}(x), & x \in V_{f^t} \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega_{f^t}^i, i \in \{1, 2, 3\}} \mathbb{V}_\sigma. \end{cases} \quad (1)$$

По построению гомеоморфизм $H_{V_{f^t}, V_{f^{t'}}$ совпадает с гомеоморфизмом $H_{\sigma, \sigma'}$ на пересечении $V_{f^t} \cap \mathbb{V}_\sigma$, поэтому формула 1 корректно определяет гомеоморфизм

$$H : M^4 \setminus (\Omega_{f^t}^0 \cup \Omega_{f^t}^4) \rightarrow M^4 \setminus (\Omega_{f^{t'}}^0 \cup \Omega_{f^{t'}}^4),$$

который однозначно продолжается на множество $\Omega_{f^t}^0 \cup \Omega_{f^t}^4$.

6 Реализация классов топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^4)$

Докажем теорему реализации 2. Не уменьшая общности предположим, что отмеченная вершина инцидентна хотя бы одному ребру цвета s . Если это не так, то обратим цвета ребер, то есть заменим s на u и наоборот, и реализуем поток f^t по полученному графу. Поток f^{-t} будет искомым потоком.

Обозначим через $f_0^t \in G(M^4)$ поток, множество седловых точек которого состоит в точности из одного седла, индекс Морса которого равен двум. Алгоритм построения такого потока описан в работах [8], [15]. Пусть $\omega \in \Omega_{f_0^t}^0$, $\sigma_* \in \Omega_{f_0^t}^2$.

Обозначим через g^t градиентно-подобный поток на $\mathcal{S}_{g^{ft}}^n$ двуцветный граф которого Γ_{g^t} изоморфен графу Γ . Алгоритм построения таких потоков описан в работе [11]. Пусть $D \in \mathcal{S}_{g^{ft}}^n$ — область, соответствующая отмеченной вершине графа Γ . По предположению в границу области входит по крайней мере одно устойчивое многообразие размерности $(n - 1)$ седловой точки $\sigma \in \Omega_{g^t}^1$. Следовательно, в границу области D входит и источниковое состояние равновесия α , принадлежащее замыканию многообразия W_σ^s .

Обозначим через $S_\omega^3 \subset W_\omega^s$, $S_\alpha^3 \subset W_\alpha^u$ сферы без контакта для ограничения потоков f_0^t, g^t на множества $W_\omega^s \setminus \omega$, $W_\alpha^u \setminus \alpha$ соответственно (такие сферы можно выбрать как гиперповерхности равного уровня энергетических функций Морса для потоков f_0^t, g^t) и через B_ω^4, B_α^4 шары, ограниченные сферами S_ω^3, S_α^3 , такие, что $\omega \in B_\omega^4, \alpha \in B_\alpha^4$. Ориентируем сферы S_ω^3, S_α^3 как границы шаров B_ω^4, B_α^4 .

Обозначим через $\varphi : S_\omega^3 \rightarrow S_\alpha^3$ обращающий выбранную ориентацию диффеоморфизм, такой, что $\varphi(S_\omega^3 \cap W_{\sigma_*}^s) \subset D \cap S_\alpha^3$, склеим многообразия $\mathbb{C}P^2 \setminus \text{int } B_\omega^4, \mathcal{S}_{g^{ft}}^n \setminus \text{int } B_\alpha^4$ по диффеоморфизму φ , обозначим через \widetilde{M}^4 полученное многообразие и через $p : (\mathbb{C}P^2 \setminus \text{int } B_\omega^4) \cup (S^{n-1} \times S^1 \setminus \text{int } B_\alpha^4)$ естественную проекцию. Многообразие \widetilde{M}^4 является связной суммой проективно-подобного многообразия $\mathbb{C}P^2$ и $\mathcal{S}_{g^{ft}}^n$, поэтому гомеоморфно $\mathbb{C}P^2$. Небольшая модификация потоков f_0^t, g^t в окрестности сфер S_ω^3, S_α^3 позволяет определить на многообразии \widetilde{M}^4 поток $f^t \in G_{g,1}(\widetilde{M}^4)$ такой, что f^t совпадает потоком f_0^t на множестве $p(\mathbb{C}P^2 \setminus \text{int } B_\omega^4)$ и с потоком g^t на множестве $S^{n-1} \times S^1 \setminus \text{int } B_\alpha^4$. По построению граф Γ_{f^t} изоморфен графу Γ .

7 Заключение

В настоящей работе получена полная топологическая классификация градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений на четырехмерных многообразиях с одним седлом индекса 2, то есть получены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности таких потоков и описан алгоритм построения канонического представителя каждого класса топологической эквивалентности.

Список литературы

- [1] C. McA. Gordon, J. Luecke *Knots are determined by their complements*, Journal of the American Mathematical Society, 1989, V. 2, P. 371 - 415.
- [2] V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, O. V. Pochinka, D. Malyshev *On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere $S^n(n > 3)$* , Nonlinearity, 2020, issue 33.
- [3] V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, O. V. Pochinka *Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections*, Journal of Mathematical Sciences, 2015, V. 208 (1), P. 81-90.
- [4] F. Laudenbach, V. Po‘enaru *A note on 4 – dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France, 1972, P. 337-344.
- [5] R. Mandelbaum *Four-dimensional topology: an introduction*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Bull. Amer. Math. Soc., 1980, V. 2(1), P. 1 - 159.
- [6] K. R. Meyer *Energy functions for Morse-Smale systems*. Amer. J. Math., 1968, V. 90, P. 1031 - 1040.
- [7] S. Smale *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., 1967, V. 73 (6), P. 747 - 817.
- [8] E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev *Morse-Smale systems with few non-wandering points*. *Topology and its Applications*, 2013, V. 160(3), P. 498 - 507.
- [9] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич *О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях*, Известия РАН. Серия математическая, 2022, Т. 86 (5), С. 43-72.
- [10] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич *Проблемы топологической классификации многомерных систем Морса-Смейла*, Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2022.
- [11] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич *Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме $S^{n-1} \times S^1$* , 2023 (в печати).

- [12] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, В. С. Медведев *О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки с заданным неблуждающим множеством*, Siberian Advances in Mathematics, 2018, Т. 21 (2), С. 163-180.
- [13] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев *О структуре несущего многообразия для систем Морса Смейла без гетероклинических пересечений*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН, 2017, Т. 297, С. 201-210.
- [14] В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич *Лекции по теории графов*, М.-Наука, Физматлит, 1990.
- [15] Е. В. Жужома, В. С. Медведев *Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия*, Математический сборник, 2016, Т. 207(5), С. 69-92.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Релейная модель замирающего осциллятора» являются: Теорема 1 и её доказательство, Теорема 2, Леммы 1-3 и их доказательства, следствие Леммы 3 и вспомогательный факт.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

1. В период с 20 марта по 30 мая 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Web of Science, elibrary.ru по следующим ключевым словам: феноменологическая модель нейрона, дифференциальное уравнение с запаздыванием, релейное уравнение, метод шагов, область параметров, устойчивость. В выдаче поисковиков было исследовано 18 статей, и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работе [1], чьим продолжением является данная работа, проведено меньше исследования с объектами представленной работы.

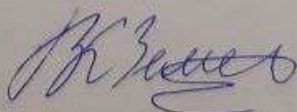
2. Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Преображенской Маргаритой Михайловной, кандидатом физико-математических наук, доцентом кафедры математического анализа математического факультета Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

3. Проведено два выступления с докладами на конференциях: школа-конференция «Математическая весна – 2023» в Нижнем Новгороде, XXX всероссийская конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2023» в Саратове по теме выпускной квалификационной работы.

4. Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанным выше специалистом следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 19 июня 2023. На Смотр представлен проект текста работы.



Зеленова Вера Константиновна
31.05.2023, Ярославль, Россия.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра математического анализа

Сдано на кафедру
«8» июня 2023 г.
Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент
_____ Невский М.В.

Выпускная квалификационная работа

Релейная модель замирающего осциллятора

направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
_____ Преображенская М.М.
«8» июня 2023 г.

Студент группы ПМИ-41БО
_____ Зеленова В.К.
«8» июня 2023 г.

Ярославль, 2023 г.

Реферат

Работа состоит из 23 страниц. В работе 3 главы, 12 изображений, 5 источников.

Феноменологическая модель нейрона, дифференциальное уравнение с запаздыванием, релейное уравнение, метод шагов, область параметров, устойчивость

Рассмотрена феноменологическая модель замирающего нейро-осциллятора. Она имеет вид дифференциального уравнения с запаздыванием:

$$\dot{R} = \lambda \left[\mathcal{F}(R(t-h)) + \mathcal{H}(X_*(t)) \right] R(t).$$

Поставлена задача поиска области параметров, в которой существуют режимы специального вида. Для решений, соответствующих режимам специального вида, стояла задача изучения их свойств устойчивости. При исследовании в исходном уравнении сделана экспоненциальная подстановка для перехода к более простому релейному уравнению. Для него был сформулирован отыскиваемый вид решения, соответствующий специальному режиму исходной модели. Введено подходящее множество начальных функций. Релейное уравнение изучено с помощью метода шагов и введения вспомогательных функций, поэтапно наложены требуемые ограничения на параметры. В результате работы была найдена область параметров, в которой исходное уравнение имеет решения описанного специального вида. Доказано, что данные решения являются устойчивыми.

Содержание

Введение	3
1 Постановка задачи	5
2 Результат	7
3 Исследование уравнения (3)	9
3.1 Типы решения уравнения (3) на отрезке	9
3.2 Вспомогательные функции	10
3.3 Изучение функции $r(t)$ на 1 этапе	12
3.4 Изучение функции $r(t)$ на 2 этапе	14
3.5 Изучение функции $r(t)$ на 3 этапе	17
3.6 Исследование решения уравнения (3) на устойчивость	19
3.7 Численные результаты	21
Заключение	22
Список литературы	23

Введение

Данное исследование является продолжением работы [1], идея которой заключалась в объединении подходов, связанных с искусственными нейронными сетями и моделированием биологических нейронов с использованием дифференциальных уравнений.

В настоящее время нейромоделирование является востребованной задачей и представляет большой интерес в науке. Выбор удобной, биологически правдоподобной модели нейрона составляет определенную сложность. В связи с этим активно развиваются феноменологические модели, более или менее точно отражающие его динамику, но достаточно простые для аналитического или численного исследования. Более подробно о построении и изучении моделей нейрона с помощью дифференциальных уравнений с запаздыванием написано в [2].

В статье [1] была изучена феноменологическая модель нейронной сети в виде перцептрона, она представляет собой систему дифференциально-разностных уравнений, где неизвестные функции описывают изменения нормированных мембранных потенциалов нейронов с течением времени. В модели участвуют три типа нейронов: сенсорные, ассоциативные и реагирующие.

Для реагирующего нейрона предложена модель:

$$\dot{R} = \lambda \left[\mathcal{F}(R(t-h)) + \mathcal{H}(X_*(t)) \right] R(t). \quad (1)$$

Здесь $R(t)$ — нормированный мембранный потенциал, $\lambda > 0$ — скорость электрических процессов в нервной клетке, \mathcal{F} — пороговая функция, характеризующая внутреннее поведение нейрона,

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} 1, & 0 < u \leq 1, \\ -\alpha, & u > 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(u) = \begin{cases} -\eta, & 0 < u \leq \theta, \\ \xi, & u > \theta, \end{cases}$$

$X_*(t) = e^{\lambda x_*(t)}$, $x_*(t)$ — периодическая функция с периодом T_* (см. Рис. 1), в концах периода и в некоторой точке t_* принимающая нулевое значение, до точки t_* на периоде имеющая положительные значения, а после t_* — отрицательные значения до конца периода:

$$x_*(t) \begin{cases} = 0, & t = 0, \\ > 0, & 0 < t < t_*, \\ = 0, & t = t_*, \\ < 0, & t_* < t < T_*, \end{cases}$$

параметры $\eta, \xi, \alpha, \theta$ — положительные, $h > 0$ — запаздывание.

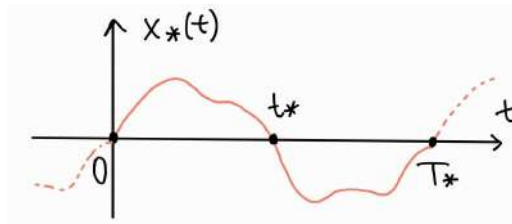


Рис. 1: Схематичный график функции $x_*(t)$.

Уравнение (1) — это модификация обобщенного уравнения Хатчинсона [3]:

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u, \quad (2)$$

предложенного в статье [4]. Здесь $u = u(t) \geq 0$, $\lambda \gg 1$, функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на полуоси $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ и такая, что $f(0) = 1$, $f(x) \rightarrow -\alpha$ при $x \rightarrow +\infty$. В данной статье для уравнения (2) доказано, что при большом параметре λ уравнение имеет асимптотически орбитально устойчивый релаксационный цикл $u_*(t, \lambda) > 0$ периода $\tilde{T}(\lambda)$, удовлетворяющий предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{T}(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq \tilde{T}(\lambda)} |\tilde{x}(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где $T_0 = (1 + \alpha)t_0$, $t_0 = 1 + 1/\alpha$, $\tilde{x}(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln u_*(t, \lambda)$, а T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 1 - \alpha(t - 1), & t \in [1, t_0 + 1], \\ t - T_0, & t \in [t_0 + 1, T_0], \end{cases}$$

$$x_0(t + T_0) \equiv x_0(t).$$

В настоящее время уравнение (2) лежит в основе ряда феноменологических нейромоделей.

В работе [1] для уравнения (1) доказано существование решений специального вида: на некотором начальном промежутке существует любое наперед заданное количество одинаково высоких всплесков, после которых решение сразу переходит в периодическое с малыми колебаниями. Здесь и далее под термином «высокие всплески», будем понимать значения функции $R(t)$ порядка e^λ , под термином «малые колебания» — порядка $e^{-\lambda}$. Такой нейрон назван «умирающим». Также численно было показано существование решений, где после начального промежутка с одинаково высокими всплесками решение к малым колебаниям переходит постепенно, всплески некоторое время уменьшают свою амплитуду. Такой нейрон назван «стареющим».

В настоящей работе получим обобщение данных результатов в том смысле, что аналитически покажем существование решения и найдем область параметров, при которых решение от высоких периодических всплесков переходит к малым колебаниям сразу или постепенно с уменьшением амплитуды, что объединит виды поведения «стареющего» и «умирающего» нейрона (см. Рис. 2). Данное обобщение назовем «замирающим» нейроном, где под термином «замирание» будем иметь ввиду переход к малым колебаниям.

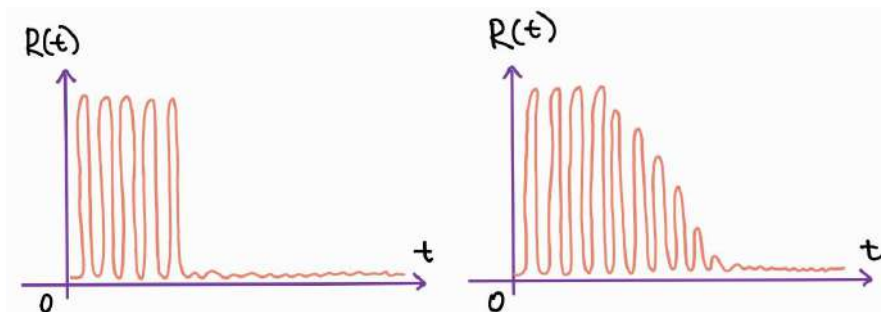


Рис. 2: Схематичное изображение «умирающего» и «стареющего» нейронов соответственно .

1 Постановка задачи

Для уравнения (1) докажем существование и устойчивость режимов специального вида (см. Рис. 3): решений, обладающих любым наперед заданным количеством одинаковых высоких всплесков, после которых происходит постепенное затухание всплесков и устанавливаются колебания с малой амплитудой. Для этого в

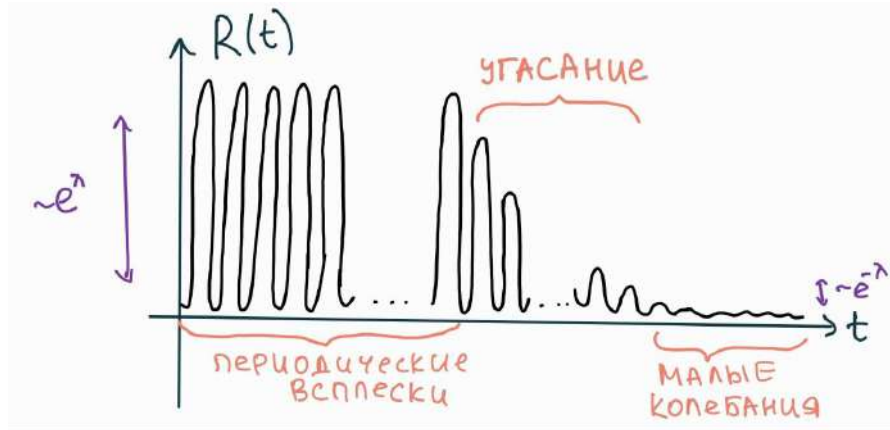


Рис. 3: Схематичное изображение специального вида функции $R(t)$.

уравнении (1) сделаем экспоненциальную подстановку $R(t) = e^{\lambda r(t)}$ (см. Рис. 4). Получим релейное уравнение:

$$\dot{r} = F(r(t-h)) + H(x_*(t)), \quad (3)$$

$$F(x) = \mathcal{F}(e^{\lambda x}) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -\alpha, & x > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$H(x) = \mathcal{H}(e^{\lambda x}) = \begin{cases} -\eta, & x \leq 0, \\ \xi, & x > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение (3) является центральным объектом исследования данной работы.

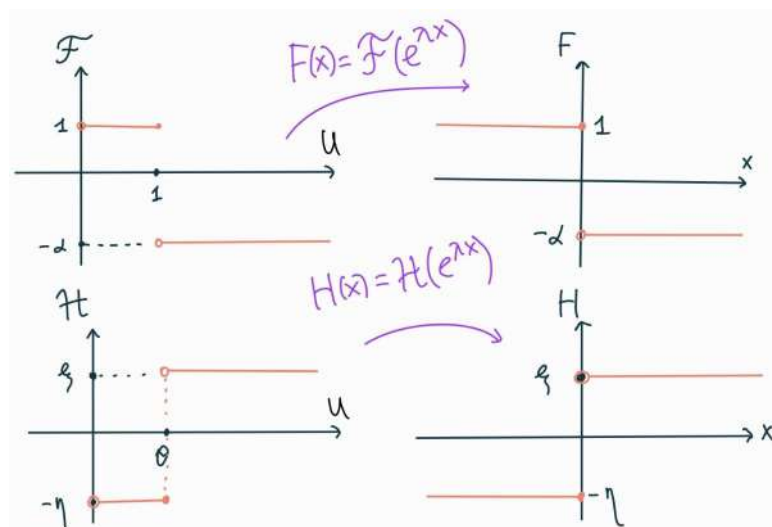


Рис. 4: Графики функций $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{H}(u)$, $F(x)$, $H(x)$.

Для уравнения (3) режим специального вида соответствует существованию следующего решения (см. Рис. 5): периодического с положительными и отрицательными значениями на промежутке до некоторой точки, после чего происходит уменьшение положительных значений и длин отрезков положительности, и с некоторого момента устанавливается периодическое решение с только отрицательными значениями.

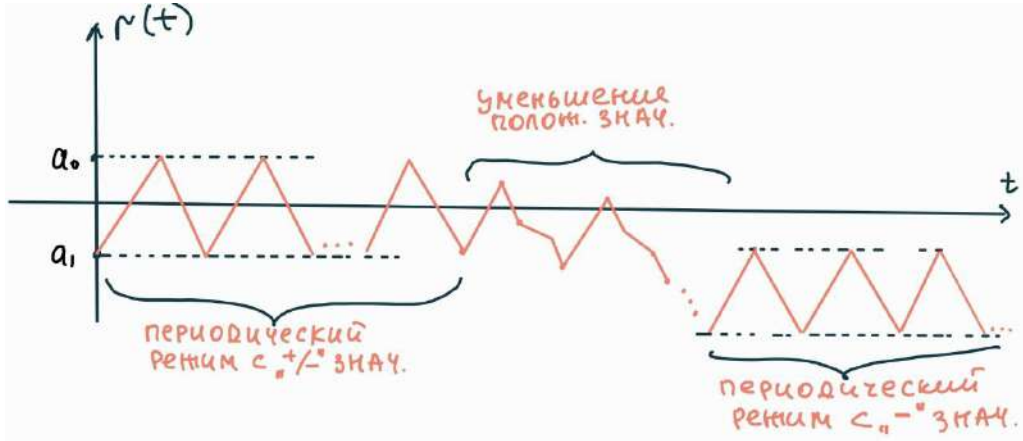


Рис. 5: Схематичное изображение специального вида функции $r(t)$.

Введем множество начальных функций (см. Рис. 6)

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(t) \in C[-h, 0], \varphi(t) < 0, \varphi(0) = -d\}, \quad (6)$$

где d – положительный параметр, ограничения на который будут уточнены в дальнейшем.

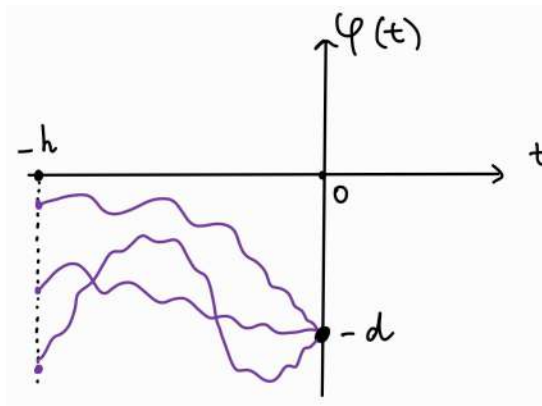


Рис. 6: Схематичное изображение функций из множества S .

2 Результат

Теорема 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует область параметров α, ξ, η, h

$$nT_* \leq h < (n+1)T_*, \quad (7)$$

$$\xi > 0, \quad \eta = \frac{T_* + \xi t_*}{T_* - t_*}, \quad \alpha > \max\left\{\frac{(1+\xi)t_*}{nT_*} - 1, 0\right\}, \quad (8)$$

такая, что уравнение (3) с начальной функцией из множества S при

$$0 < d < (1+\xi)t_* \quad (9)$$

имеет устойчивое решение следующего вида.

1. На отрезке $[0, h + \frac{d}{1+\xi}]$ совпадающее с T_* -периодической функцией

$$r^{(1)}(t) = \begin{cases} (1+\xi)t - d, & 0 < t < t_*, \\ (1-\eta)(t-t_*) + (1+\xi)t_* - d, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (10)$$

$$r^{(1)}(t + T_*) = r^{(1)}(t),$$

помещающей на этом промежутке n полных периодов, причем на периоде у данной функции есть положительные и отрицательные значения.

2. На отрезке $[h + \frac{d}{1+\xi}, h + \frac{(1+\xi)t_* - d}{(\eta-1)} + t_* + (n-1)T_*]$ совпадающее с функцией

$$r^{(2)}(t) = \begin{cases} r^{(1)}(t) - (1+\alpha)t + c_{k_1+}, & h + \frac{d}{1+\xi} + k_1T_* \leq t \leq h + \frac{(1+\xi)t_* - d}{(\eta-1)} + t_* + k_1T_*, \\ r^{(1)}(t) + c_{k_2-}, & h + \frac{(1+\xi)t_* - d}{(\eta-1)} + t_* + k_2T_* \leq t \leq h + \frac{d}{1+\xi} + (k_2+1)T_*, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$c_{k_1+} = -k_1 \frac{(1+\alpha)(\eta+\xi)}{(\eta-1)(1+\xi)} ((1+\xi)t_* - d) + (1+\alpha)(h + \frac{d}{1+\xi} + k_1T_*), \quad (12)$$

$$c_{k_2-} = -(k_2+1) \frac{(1+\alpha)(\eta+\xi)}{(\eta-1)(1+\xi)} ((1+\xi)t_* - d), \quad (13)$$

$$k_1 = 0, 1, \dots, n-1, \quad k_2 = 0, 1, \dots, n-2.$$

Причем с некоторого момента $\tilde{t} \in [h + \frac{d}{1+\xi}, h + \frac{(1+\xi)t_* - d}{(\eta-1)} + t_* + (n-1)T_*]$ все значения функции $r^{(2)}(t)$ становятся отрицательными.

3. На отрезке $[h + \frac{(1+\xi)t_* - d}{(\eta-1)} + t_* + (n-1)T_*, h + \tilde{t}]$ продолжается решение типа предыдущего пункта

$$r^{(2)}(t) = \begin{cases} r^{(1)}(t) - (1+\alpha)t + const_{i+}, & a_i \leq t \leq b_i, \\ r^{(1)}(t) + const_{i-}, & b_i \leq t \leq a_{i+1}, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \dots, l$, $l < n$, $const_{i-} \leq c_{(n-2)-}$ и $const_{i+} \leq c_{(n-1)+}$ — некоторые константы, $h + \frac{(1+\xi)t_* - d}{(\eta-1)} + t_* + (n-1)T_* < a_i, b_i < \tilde{t}$.

И с момента $\tilde{t} + h$ решение совпадает с функцией

$$r^{(3)}(t) = \begin{cases} (1 + \xi)t - d - \tilde{\Delta}, & 0 < t < t_*, \\ (1 - \eta)(t - t_*) + (1 + \xi)t_* - d - \tilde{\Delta}, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (14)$$

$$r^{(3)}(t + T_*) = r^{(3)}(t),$$

где $\tilde{\Delta} > (1 + \xi)t_* - d$. То есть решение совпадает с T_* -периодической функцией с только отрицательными значениями на периоде.

Теорема 2. (Следствие Теоремы 1.) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует область параметров α, ξ, η, h , определенная в Теореме 1 такая, что модель (1) имеет устойчивые режимы типа «замирающего» нейро-осциллятора.

Перейдем к доказательству теорем.

3 Исследование уравнения (3)

Будем строить решение уравнения (3), соответствующее решению специального вида уравнения (1), описанное во введении. Для удобства разобьем построение функции $r(t)$ на этапы. Построение периодической части с положительными и отрицательными значениями назовем 1 этапом, доказательство наличия переходного процесса — 2 этапом, установление периодической части, имеющей только отрицательные значения — 3 этапом (см. Рис. 7).



Рис. 7: Схематическое обозначение этапов построения функции $r(t)$.

Выберем натуральное число n , соответствующее количеству всплесков на 1 этапе. Запоздывание $h > 0$ выберем таким образом: $nT_* \leq h < (n + 1)T_*$, что соответствует формуле (7).

Функции $F(x)$ и $H(x)$, заданные равенствами (4) и (5), кусочно-постоянные, следовательно, функция $r(t)$ будет кусочно-линейной. Комбинаций пар значений функций $F(x)$ и $H(x)$ всего 4, рассмотрим все варианты решения.

3.1 Типы решения уравнения (3) на отрезке

Рассмотрим некоторый отрезок $[t_1, t_2]$ на положительной полуоси, на котором правая часть уравнения (3) постоянна. Типов таких отрезков всего 4. Найдем значения функции $r(t)$ на этом отрезке, решая задачу Коши в каждом из случаев с предположением, что начальное значение известно, обозначим его $r_1 = r(t_1)$.

Первый тип отрезка соответствует предположению

$$\begin{cases} [t_1, t_2] \in (kT_*, kT_* + t_*), & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ r(t) \leq 0, & t \in [t_1 - h, t_2 - h]. \end{cases} \quad (15)$$

Тогда $F(r(t - h)) = 1$, $H(x_*(t)) = \xi$, задача Коши выглядит так

$$\dot{r} = 1 + \xi, \quad r(t_1) = r_1.$$

Следовательно, решение на отрезке $[t_1, t_2]$ с начальным значением $r_1 = r(t_1)$ и предположением (15) будет иметь вид:

$$r(t) = (1 + \xi)(t - t_1) + r_1. \quad (16)$$

Аналогично, **второй тип** отрезка соответствует предположению

$$\begin{cases} [t_1, t_2] \in [kT_* + t_*, (k+1)T_*], & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ r(t) \leq 0, & t \in [t_1 - h, t_2 - h]. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда $F(r(t-h)) = 1$, $H(x_*(t)) = -\eta$, задача Коши выглядит следующим образом

$$\dot{r} = 1 - \eta, \quad r(t_1) = r_1.$$

Следовательно, решение на отрезке $[t_1, t_2]$ с начальным значением $r_1 = r(t_1)$ и предположением (17) будет иметь вид

$$r(t) = (1 - \eta)(t - t_1) + r_1. \quad (18)$$

Также, **третий тип** отрезка соответствует предположению

$$\begin{cases} [t_1, t_2] \in (kT_*, kT_* + t_*), & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ r(t) > 0, & t \in [t_1 - h, t_2 - h]. \end{cases} \quad (19)$$

Тогда $F(r(t-h)) = -\alpha$, $H(x_*(t)) = \xi$, задача Коши выглядит так

$$\dot{r} = -\alpha + \xi, \quad r(t_1) = r_1.$$

Следовательно, решение на отрезке $[t_1, t_2]$ с начальным значением $r_1 = r(t_1)$ и предположением (19) будет иметь вид

$$r(t) = (-\alpha + \xi)(t - t_1) + r_1. \quad (20)$$

Предположение для **четвертого типа** отрезка

$$\begin{cases} [t_1, t_2] \in [kT_* + t_*, (k+1)T_*], & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ r(t) > 0, & t \in [t_1 - h, t_2 - h]. \end{cases} \quad (21)$$

Тогда $F(r(t-h)) = -\alpha$, $H(x_*(t)) = -\eta$, задача Коши выглядит

$$\dot{r} = -\alpha - \eta, \quad r(t_1) = r_1.$$

Следовательно, решение на отрезке $[t_1, t_2]$ с начальным значением $r_1 = r(t_1)$ и предположением (21) будет иметь вид

$$r(t) = (-\alpha - \eta)(t - t_1) + r_1. \quad (22)$$

3.2 Вспомогательные функции

В данном пункте введем и изучим две вспомогательные функции, связанные с функцией $r(t)$. В дальнейшем они сыграют важную роль в доказательстве основного результата. Рассмотрим функции $r_-(t)$ и $r_+(t)$ такие что

$$\dot{r}_-(t) = 1 + H(x_*(t)), \quad (23)$$

$$\dot{r}_+(t) = -\alpha + H(x_*(t)). \quad (24)$$

Уравнения (23) и (24) – варианты уравнения (3) с постоянным (1 или $-\alpha$) значением функции $F(r(t-h))$. Для функций $r_-(t)$ и $r_+(t)$ введем начальные условия

$$r_-(0) = -d, \quad r_+(0) = -d.$$

Заметим, что при $t \in (kT_*, kT_* + t_*)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функция $H(x_*(t)) = \xi$. Тогда задачи Коши на данном интервале для уравнений (23) и (24) с начальными значениями, обозначенными a_{1-} , a_{1+} выглядят соответственно так

$$\begin{aligned} \dot{r}_- &= 1 + \xi, \quad r_-(kT_*) = a_{1-}, \\ \dot{r}_+ &= -\alpha + \xi, \quad r_+(kT_*) = a_{1+}. \end{aligned}$$

Следовательно, решения здесь будут иметь вид

$$r_-(t) = (1 + \xi)(t - kT_*) + a_{1-}, \quad r_+(t) = (-\alpha + \xi)(t - kT_*) + a_{1+},$$

которые совпадают соответственно с первым и третьим типами решения уравнения (3) при $t_1 = kT_*$, $r_1 = a_{1-}$ и $r_1 = a_{1+}$.

Аналогично, при $t \in [kT_* + t_*, (k+1)T_*]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функция $H(x_*(t)) = -\eta$. Значит, задачи Коши на данном отрезке для уравнений (23) и (24) с начальными условиями $r_-(kT_* + t_*) = a_{2-}$ и $r_+(kT_* + t_*) = a_{2+}$ соответственно выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{r}_- &= 1 - \eta, \quad r_-(kT_* + t_*) = a_{2-}, \\ \dot{r}_+ &= -\alpha - \eta, \quad r_+(kT_* + t_*) = a_{2+}. \end{aligned}$$

Следовательно, решения будут иметь виды

$$r_-(t) = (1 - \eta)(t - kT_* - t_*) + a_{2-}, \quad r_+(t) = (-\alpha - \eta)(t - kT_* - t_*) + a_{2+},$$

которые совпадают со вторым и четвертым типами решения уравнения (3) при $t_1 = kT_* + t_*$, $r_1 = a_{2-}$ и $r_1 = a_{2+}$ соответственно.

Таким образом, кусочно-линейная функция $r(t)$ на каждом линейном отрезке представима в виде $r(t) = r_*(t) - c$, где символ «*» означает один из возможных индексов «-» или «+», а c – некоторая константа, зависящая от отрезка рассмотрения. Причем символ «*» на некотором отрезке $[t_3, t_4]$ будет нести смысл индекса «-», если $r(t) \leq 0$ при $t \in [t_3 - h, t_4 - h]$, и смысл индекса «+», если $r(t) > 0$ при $t \in [t_3 - h, t_4 - h]$.

Выпишем полные решения уравнений (23) и (24) соответственно

$$r_-(t) = \begin{cases} (1 + \xi)(t - kT_*) + r_-(kT_*), & kT_* \leq t < kT_* + t_*, \\ (1 - \eta)(t - kT_* - t_*) + r_-(kT_* + t_*), & kT_* + t_* \leq t \leq (k+1)T_*, \end{cases} \quad (25)$$

$$r_+(t) = \begin{cases} (-\alpha + \xi)(t - kT_*) + r_+(kT_*), & kT_* \leq t < kT_* + t_*, \\ (-\alpha - \eta)(t - kT_* - t_*) + r_+(kT_* + t_*), & kT_* + t_* \leq t \leq (k+1)T_*, \end{cases} \quad (26)$$

где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r_-(0) = r_+(0) = -d$.

Изучим, как растет разница значений введенных функций.

Лемма 1. Рассмотрим произвольный отрезок $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ на положительной полуоси. На нем верно: $r_-(\tilde{t}_2) - r_+(\tilde{t}_2) = (1 + \alpha)(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1) + r_-(\tilde{t}_1) - r_+(\tilde{t}_1)$.

Доказательство. Вычтем из левой и правой части равенства (23) соответственно левую и правую части равенства (24)

$$\dot{r}_-(t) - \dot{r}_+(t) = 1 + H(x_*(t)) - \left(-\alpha + H(x_*(t)) \right) = 1 + \alpha,$$

проинтегрируем на отрезке $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$, подставим в полученную функцию значение $t = \tilde{t}_2$ и получим утверждение Леммы 1.

3.3 Изучение функции $r(t)$ на 1 этапе

Будем считать, что на отрезке $[-h, 0]$ функция $r(t)$ совпадает с одной из функций множества S , описанного формулой (6). Начнем построение функции $r(t)$ методом шагов.

Первый шаг – построение функции на интервале: $(0, t_*)$. При таких t функция $r(t-h) < 0$, так как на интервале $(-h, t_*-h)$ функция $r(t)$ совпадает с функцией $\varphi(t)$ из множества S . Следовательно, данные условия полностью соответствуют предположению (15), а значит, решение на данном интервале имеет вид (16). Известно, что в этом случае $t_1 = 0$, $r(t_1) = r(0) = \varphi(0) = -d$. Получаем

$$r(t) = (1 + \xi)t - d, \text{ при } t \in (0, t_*). \quad (27)$$

Второй шаг – построение функции на отрезке $[t_*, T_*]$. При таких t функция $r(t-h) < 0$, так как на интервале (t_*-h, T_*-h) функция $r(t)$ совпадает с функцией $\varphi(t)$ из множества S . Следовательно, данные условия являются частным случаем предположения (17), а значит, решение на данном интервале имеет вид (18). Известно, что в данном случае $t_1 = t_*$, и из (27) $r(t_1) = r(t_*) = (1 + \xi)t_* - d$. Получаем

$$r(t) = (1 - \eta)(t - t_*) + (1 + \xi)t_* - d, \text{ при } t \in [0, t_*]. \quad (28)$$

Заметим, что до точки $t = nT_*$ функция $r(t-h)$ совпадает с функцией $\varphi(t-h)$ из начального множества S , т.к. $nT_* \leq h$. Тогда значения функции $r(t-h) < 0$ при $t \in [0, nT_*]$, и функция $F(r(t-h)) = 1$ при тех же значениях t . Следовательно, решение уравнения (3) продолжается первым и вторым типами решений

$$r(t) = \begin{cases} (1 + \xi)(t - kT_*) + r(kT_*), & kT_* \leq t < kT_* + t_*, \\ (1 - \eta)(t - kT_* - t_*) + r(kT_* + t_*), & kT_* + t_* \leq t \leq (k + 1)T_*, \end{cases} \quad (29)$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$. Для достижения специального вида функции $r(t)$ необходимо, чтобы на 1 этапе построения выполнялись следующие условия.

1. Периодичность функции $r(t)$ при $t \leq nT_*$. Это условие выполняется при равенстве начальных условий задач Коши на каждом интервале $(kT_*, kT_* + t_*)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, то есть необходимое условие $r(kT_*) = r(0) = -d$, $k = 0, 1, \dots, n$, равенство достижимо при введении ограничения $r(T_*) = -d \Leftrightarrow (1 - \eta)T_* + (\eta + \xi)t_* = 0 \Leftrightarrow$

$$\eta = \frac{T_* + \xi t_*}{T_* - t_*}. \quad (30)$$

2. Возрастание значений функции $r(t)$ на интервалах $(kT_*, kT_* + t_*)$ и убывание значений на отрезках $[kT_* + t_*, (k + 1)T_*]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Данное условие эквивалентно положительному значению коэффициента $1 + \xi$ (выполняется автоматически, т.к. $\xi > 0$) и отрицательному значению коэффициента $1 - \eta$, что

верно при $\eta > 1$, которое в свою очередь выполнено автоматически из ограничения (30).

3. Существование положительных и отрицательных значений на периоде. Отрицательные значения мы уже имеем из условия периодичности функции $r(t)$; положительные значения должны достигаться в концах отрезков, на которых функция $r(t)$ возрастает, из второго условия известно, что это точки $kT_* + t_*$, $k = 0, 1, \dots, n-1$; также из условия периодичности достаточно, чтобы $r(t_*) > 0 \Leftrightarrow (1 + \xi)t_* - d > 0$, то есть

$$0 < d < (1 + \xi)t_*. \quad (31)$$

Таким образом, достаточные условия существования специального вида функции $r(t)$ на первом этапе — это (30) и (31), которые соответствуют ограничениям (8) и (9) Теоремы 1. Решение уравнения (3) при $t \in [0, nT_*]$ выглядит так (см. Рис. 8)

$$r(t) = \begin{cases} (1 + \xi)t - d, & 0 \leq t < t_*, \\ (1 - \eta)(t - t_*) + (1 + \xi)t_* - d, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (32)$$

$$r(t + T_*) = r(t).$$

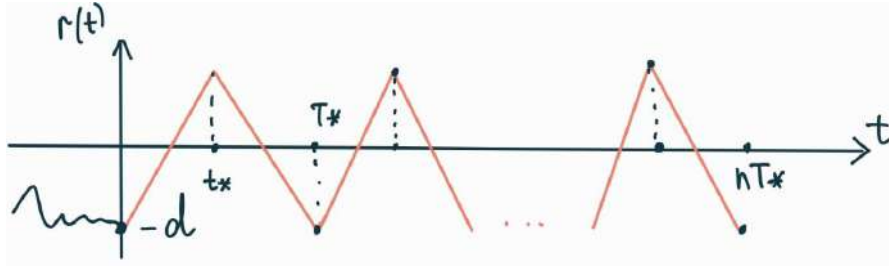


Рис. 8: Схематичное изображение функции $r(t)$ на 1 этапе.

Несложно видеть, что решения (25) и (29) при $t \in [0, nT_*]$ совпадают. Тогда из добавленных ограничений на решение уравнения (3) на первом этапе и вида решения (32) при всех $t \geq 0$ верно

$$r_-(t) = \begin{cases} (1 + \xi)t - d, & 0 \leq t < t_*, \\ (1 - \eta)(t - t_*) + (1 + \xi)t_* - d, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (33)$$

$$r_-(t + T_*) = r_-(t),$$

то есть функция $r_-(t)$ T_* -периодическая на всей области определения.

Учитывая вид решения (33) уравнения (23) и применяя Лемму 1, получаем вид решения уравнения (24)

$$r_+(t) = \begin{cases} (-\alpha + \xi)t - d, & 0 \leq t < t_*, \\ (-\alpha - \eta)(t - t_*) + (-\alpha + \xi)t_* - d, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases}$$

$$r_+(t + T_*) = r_+(t) - (1 + \alpha)T_*.$$

Вспомогательный факт. Для любого $t > 0$ на отрезке $[0, t]$ по Лемме 1 верно

$$r_-(t) - r_+(t) = (1 + \alpha)(t - 0) + r_-(0) - r_+(0) = (1 + \alpha)t - d - (-d) = (1 + \alpha)t,$$

отсюда следует, что верны формулы, связывающие функции $r_-(t)$ и $r_+(t)$

$$r_+(t) = r_-(t) - (1 + \alpha)t, \quad r_-(t) = r_+(t) + (1 + \alpha)t.$$

3.4 Изучение функции $r(t)$ на 2 этапе

В данном пункте рассмотрим изменение поведения функции $r(t)$ на втором этапе построения. Заметим, что при постоянном значении функции $F(r(t-h)) = 1$ решение уравнения (3) совпадало бы с решением (32) на всей оси, но это не верно, т.к. функция $F(r(t-h))$ изменяет свое значение на $-\alpha$, если ее аргумент $r(t-h)$ становится положительным. В связи с этим рассмотрим влияние положительнозначных отрезков первого этапа на построение решения уравнения (3) на втором этапе. Для этого найдем нули функции $r(t)$ на 1 этапе. Первый нуль функции $r(t)$ при $t \in (0, t_*)$ находится из уравнения (27): $(1 + \xi)t_0^{(1)} - d = 0$.

$$t_0^{(1)} = \frac{d}{(1 + \xi)} \quad (34)$$

Так как на 1 этапе функция периодическая, то еще $(n-1)$ нуль равен:

$$t_k^{(1)} = t_0^{(1)} + kT_*, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Нуль функции $r(t)$ при $t \in [t_*, T_*]$ из уравнения (28): $(1 - \eta)t_0^{(2)} + (1 + \xi)t_* - d = 0$.

$$t_0^{(2)} = \frac{(1 + \xi)t_* - d}{(\eta - 1)} + t_* \quad (35)$$

Также из периодичности функции $r(t)$ находится еще $(n-1)$ нуль:

$$t_k^{(2)} = t_0^{(2)} + kT_*, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Отметим, что все нули функции $r(t)$ на 1 этапе строго упорядочены (см. Рис. 9):

$$t_0^{(1)} < t_0^{(2)} < t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < \dots < t_{n-1}^{(1)} < t_{n-1}^{(2)}.$$

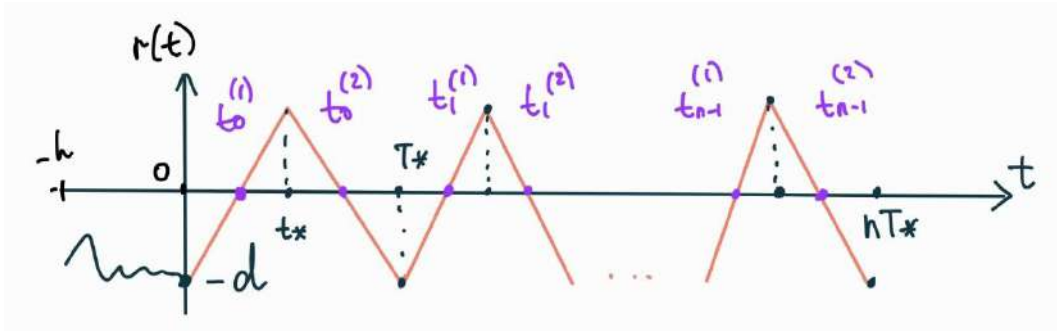


Рис. 9: Схематическое изображение нулей функции $r(t)$ на 1 этапе.

На 1 этапе функция $r(t)$ принимает положительные значения на отрезках: $[t_0^{(1)}, t_0^{(2)}]$, $[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}]$, \dots , $[t_{n-1}^{(1)}, t_{n-1}^{(2)}]$. Заметим, что $r(t-h) < 0$ при $t < h + t_0^{(1)}$, так как функция $r(t)$ впервые принимает неотрицательное значение в точке $t_0^{(1)}$. Следова-

тельно, до точки $t = h + t_0^{(1)}$ функция $F(r(t-h)) = 1$, значит, решение уравнения (3) совпадает с решением уравнения (23) до данной точки, что соответствует формуле (10) Теоремы 1, и верно $r(h + t_0^{(1)}) = r_-(h + t_0^{(1)})$. Будем считать точку $h + t_0^{(1)}$ окончанием первого этапа. На втором этапе $[h + t_0^{(1)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ разобьем все точки на два вида.

1. Точки на отрезках $[h + t_k^{(1)}, h + t_k^{(2)}]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. На них функция $r(t-h) > 0 \Rightarrow F(r(t-h)) = -\alpha$, тогда согласно пункту 3.2 верно, что на данных отрезках функция $r(t)$ представима в виде $r(t) = r_+(t) + c_{k+}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, где c_{k+} — некоторые константы.
2. Точки на отрезках $[h + t_k^{(2)}, h + t_{k+1}^{(1)}]$, $k = 1, 2, \dots, n-2$. На данных отрезках функция $r(t-h) \leq 0 \Rightarrow F(r(t-h)) = 1$, тогда аналогично предыдущему случаю здесь верно, что функция $r(t)$ представима в виде $r(t) = r_-(t) + c_{k-}$, $k = 1, 2, \dots, n-2$, где c_{k-} — некоторые константы.

Уточним значения констант c_{k-} , $k = 1, 2, \dots, n-1$ и c_{k+} , $k = 1, 2, \dots, n-2$. По показанному выше на $[h + t_0^{(1)}, h + t_0^{(2)}]$ функция $r(t)$ представима в виде $r(t) = r_+(t) + c_{0+}$. При этом известно, что $r(h + t_0^{(1)}) = r_-(h + t_0^{(1)}) = r_+(h + t_0^{(1)}) + (1 + \alpha)(h + t_0^{(1)})$ (последнее равенство следует из вспомогательного факта). Отсюда получаем, что $c_{0+} = (1 + \alpha)(h + t_0^{(1)})$, функция $r(t) = r_+(t) + (1 + \alpha)(h + t_0^{(1)})$ и значение в последней точке отрезка $r(h + t_0^{(2)}) = r_+(h + t_0^{(2)}) + (1 + \alpha)(h + t_0^{(1)})$.

Аналогично, на отрезке $[h + t_0^{(2)}, h + t_1^{(1)}]$ верно $r(t) = r_-(t) + c_{0-}$. Тогда с помощью вспомогательного факта получаем $r(h + t_0^{(2)}) = r_+(h + t_0^{(2)}) + (1 + \alpha)(h + t_0^{(1)}) = r_-(h + t_0^{(2)}) - (1 + \alpha)(h + t_0^{(2)}) + (1 + \alpha)(h + t_0^{(1)}) = r_-(h + t_0^{(2)}) - (1 + \alpha)(t_0^{(2)} - t_0^{(1)})$. Отсюда верно $c_{0-} = -(1 + \alpha)(t_0^{(2)} - t_0^{(1)})$.

Лемма 2. Для констант c_{k+} и c_{k-} верны формулы $c_{0+} = (1 + \alpha)(h + t_0^{(1)})$

$$c_{k+} = - \sum_{i=0}^{k-1} (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) + (1 + \alpha)(h + t_k^{(1)}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (36)$$

$$c_{k-} = - \sum_{i=0}^k (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2. \quad (37)$$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции. Базовые утверждения ММИ доказаны выше при $k = 0$. Предположим, что при некотором $k = m < n - 2$ утверждение верно. Тогда на $[h + t_m^{(1)}, h + t_m^{(2)}]$ функция $r(t) = r_+(t) - \sum_{i=0}^{m-1} (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) + (1 + \alpha)(h + t_m^{(1)})$, а на $[h + t_m^{(2)}, h + t_{m+1}^{(1)}]$ верно $r(t) = r_-(t) - \sum_{i=0}^m (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)})$.

Проверим утверждения для $k = m + 1$. По показанному выше на $[h + t_{m+1}^{(1)}, h + t_{m+1}^{(2)}]$ функция $r(t)$ представима в виде $r(t) = r_+(t) + c_{(m+1)+}$. Из предположения индукции и вспомогательного факта верно $r(h + t_{m+1}^{(1)}) = r_-(h + t_{m+1}^{(1)}) + c_{m-} = r_+(h + t_{m+1}^{(1)}) + (1 + \alpha)(h + t_{m+1}^{(1)}) + c_{m-}$. Отсюда получаем, что $c_{(m+1)+} = (1 + \alpha)(h + t_{m+1}^{(1)}) + c_{m-} = -\sum_{i=0}^m (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) + (1 + \alpha)(h + t_{m+1}^{(1)})$ — подтверждает формулу (36) Леммы 2. Функция $r(t) = r_+(t) + c_{(m+1)+}$ и значение в последней точке отрезка $r(h + t_{m+1}^{(2)}) = r_+(h + t_{m+1}^{(2)}) + c_{(m+1)+}$.

Аналогично, на отрезке $[h + t_{m+1}^{(2)}, h + t_{m+2}^{(1)}]$ верно $r(t) = r_-(t) + c_{(m+1)-}$. Тогда с помощью предыдущего шага и вспомогательного факта получаем $r(h + t_{m+1}^{(2)}) = r_+(h + t_{m+1}^{(2)}) + c_{(m+1)+} = r_-(h + t_{m+1}^{(2)}) - (1 + \alpha)(h + t_{m+1}^{(2)}) + c_{(m+1)+}$. Отсюда верно $c_{(m+1)-} = -\sum_{i=0}^m (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) + (1 + \alpha)(h + t_{m+1}^{(1)}) - (1 + \alpha)(h + t_{m+1}^{(2)}) = -\sum_{i=0}^{m+1} (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)})$ — подтверждает формулу (37) Леммы 2. Утверждение Леммы 2 доказано. Отметим, что формулы (36) и (37) подтверждают формулы (12) и (13) Теоремы 1.

Таким образом, получаем вид решения уравнения (3) на 2 этапе при $t \in [h + t_0^{(1)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$

$$r(t) = \begin{cases} r_+(t) + c_{k+}, & h + t_k^{(1)} \leq t \leq h + t_k^{(2)}, \\ r_-(t) + c_{k-}, & h + t_k^{(2)} \leq t \leq h + t_{k+1}^{(1)}. \end{cases} \quad (38)$$

Рассмотрим значение функции $r(t)$ в последней точке второго этапа

$$r(h + t_{n-1}^{(2)}) = r_+(h + t_{n-1}^{(2)}) + c_{(n-1)+} = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - (1 + \alpha)(h + t_{n-1}^{(2)}) + c_{(n-1)+},$$

$$r(h + t_{n-1}^{(2)}) = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}).$$

Получаем общую формулу для разности значений функции $r_-(t)$ и $r(t)$ в последней точке второго этапа, обозначим ее Δ (см. Рис. 10):

$$\Delta = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - r(h + t_{n-1}^{(2)}) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha)(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}). \quad (39)$$

Подставим в формулу (39) значения нулей первого этапа (34) и (35) функции $r(t)$:

$$\Delta = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - r(h + t_{n-1}^{(2)}) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha) \left(\frac{(1 + \xi)t_* - d}{(\eta - 1)} + t_* + kT_* - \frac{d}{(1 + \xi)} - kT_* \right) = n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \left((1 + \xi)t_* - d \right).$$

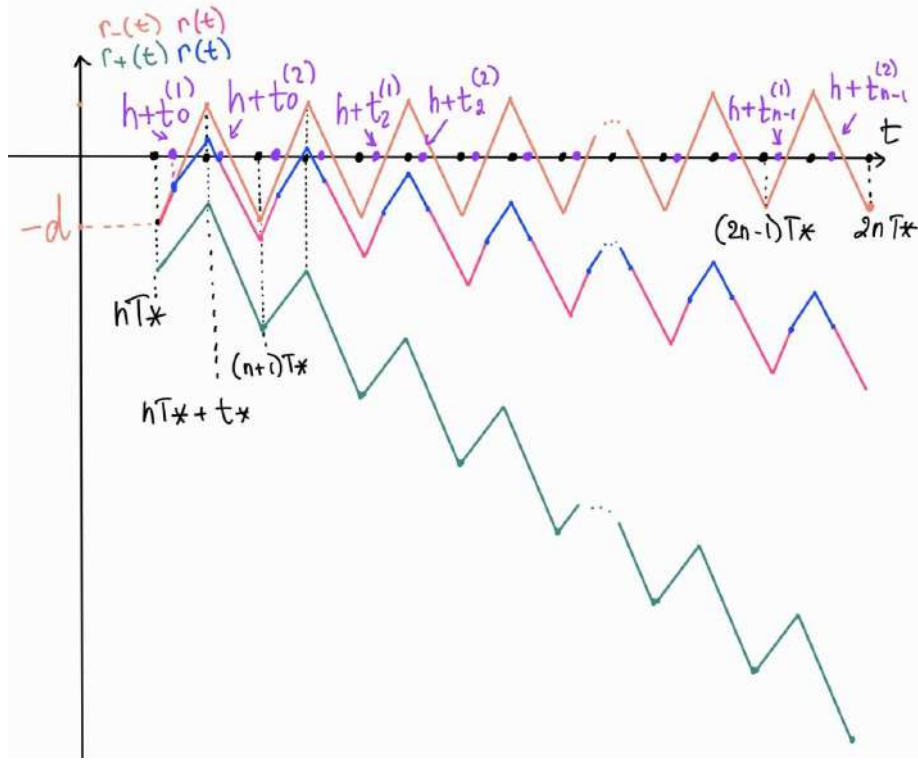


Рис. 10: Схематическое изображение изменения функции $r(t)$ на 2 этапе.

3.5 Изучение функции $r(t)$ на 3 этапе

На 3 этапе решения необходимо получить отрицательные значения функции $r(t)$ при всех t . С помощью вспомогательного факта и формулы (38) выразим функцию $r(t)$ только через функцию $r_-(t)$

$$r(t) = \begin{cases} r_-(t) - (1 + \alpha)t + c_{k_1+}, & h + t_{k_1}^{(1)} \leq t \leq h + t_{k_1}^{(2)}, \\ r_-(t) + c_{k_2-}, & h + t_{k_2}^{(2)} \leq t \leq h + t_{k_2+1}^{(1)}, \end{cases}$$

$k_1 = 0, 1, \dots, n-1, k_2 = 0, 1, \dots, n-2$. Применим к полученному выражению Лемму 2 для коэффициентов c_{k_+} и c_{k_-} , получим

$$r(t) = \begin{cases} r_-(t) - (1 + \alpha)(t - h - t_0^{(1)}), & h + t_0^{(1)} \leq t \leq h + t_0^{(2)}, \\ r_-(t) - (1 + \alpha)(t - h - t_{k_3}^{(1)}) + c_{(k_3-1)-}, & h + t_{k_3}^{(1)} \leq t \leq h + t_{k_3}^{(2)}, \\ r_-(t) + c_{k_4-}, & h + t_{k_4}^{(2)} \leq t \leq h + t_{k_4+1}^{(1)}, \end{cases}$$

здесь $k_3 = 1, \dots, n-1, k_4 = 0, 1, \dots, n-2$, причем все $c_{k_i-} < 0$ по формулам (37), $i = 1, 2, 3, 4$. Отметим, что данный вид соответствует, также формуле (11) Теоремы 1.

Также из предыдущего пункта известно, что $r(h+t_{n-1}^{(2)}) = r_-(h+t_{n-1}^{(2)}) - \Delta$. Введем ограничения, при которых $r(h+t_{n-1}^{(2)}) < 0$. Для этого нужно, чтобы $r_-(h+t_{n-1}^{(2)}) - \Delta < 0$. Максимальное значение функции $r_-(t)$ достигается в точках $kT_* + t_*$, $k \in \mathbb{N} \cup 0$ и равен $r_{max-} = (1 + \xi)t_* - d$. Так как мы не знаем точного расположения точки $h + t_{n-1}^{(2)}$ относительно периода функции $r_-(t)$, то достаточное условие отрицательного значения в этой точке: $r_{max-} - \Delta < 0$. Подставим в это неравенство значения параметров r_{max-} и Δ и сделаем некоторые преобразования

$$\begin{aligned} (1 + \xi)t_* - d - n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \left((1 + \xi)t_* - d \right) &< 0, \\ \left(n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} - 1 \right) \left((1 + \xi)t_* - d \right) &> 0, \\ n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} - 1 &> 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Подставим вместо η значение из равенства (30), получим ограничение на параметр α :

$$\frac{n(1 + \alpha)T_*}{(1 + \xi)t_*} - 1 > 0, \quad \alpha > \frac{(1 + \xi)t_*}{nT_*} - 1. \quad (41)$$

Отметим, что при достаточно больших n , это условие выполняется автоматически, так как $\alpha > 0$. Данное условие соответствует ограничениям (8) Теоремы 1.

Лемма 3. При ограничении (41) функция $r(t) < 0$ при всех $t > h + t_{n-1}^{(2)}$.

Доказательство. Рассмотрим первый случай, при котором для всех $t \in [t_{n-1}^{(2)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t) \leq 0$. Тогда на 3 этапе при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t - h) \leq 0$ и $F(r(t - h)) = 1$, из чего следует, что функцию $r(t)$ можно представить в виде $r(t) = r_-(t) - c_-$, где c_- — некоторая константа. Из условий выше известно, что $r(h + t_{n-1}^{(2)}) = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - \Delta$, следовательно, при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t) = r_-(t) - \Delta$. По введенному условию Леммы 3 максимальное значение функции $r_-(t)$ меньше Δ , следовательно, при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t) < 0$. Тогда заметим, что все рассуждения для отрезка $[t_{n-1}^{(2)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ теперь можно повторить для отрезка $[h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ и далее для каждого отрезка $[kh + t_{n-1}^{(2)}, (k+1)h + t_{n-1}^{(2)}]$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, функция $r(t) < 0$ при всех $t > h + t_{n-1}^{(2)}$. Первый случай доказан.

Пусть теперь на отрезке $[t_{n-1}^{(2)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ существуют l пар ($l \in \mathbb{N}$, $l < n$) таких упорядоченных точек $\{a_i, b_i\}$, $i = 1, \dots, l$, что при $t \in [a_i, b_i]$ функция $r(t) > 0$ (данные точки существуют обязательно парами на данном отрезке, т.к значения в его концах меньше или равны нулю). Тогда аналогично пункту 3.4 и Лемме 2 получаем формулу для $r(t)$ на при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$

$$r(t) = \begin{cases} r_-(t) - \Delta, & h + t_{n-1}^{(2)} \leq t \leq h + a_1, \\ r_-(t) - (1 + \alpha)(t - h - a_{k_5}) - \Delta - \sum_{i=1}^{k_5-1} (1 + \alpha)(b_i - a_i), & h + a_{k_5} \leq t \leq h + b_{k_5}, \\ r_-(t) - \Delta - \sum_{i=1}^{k_6} (1 + \alpha)(b_i - a_i), & h + b_{k_6} \leq t \leq h + a_{k_6+1}, \\ r_-(t) - \Delta - \sum_{i=1}^l (1 + \alpha)(b_i - a_i), & h + b_l \leq t \leq 2h + t_{n-1}^{(2)}, \end{cases} \quad (42)$$

здесь $k_5 = 1, \dots, l$, $k_6 = 1, \dots, l-1$. Следовательно, при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t) \leq r_-(t) - \Delta < 0$. Значит, с данным отрезком можно провести рассуждения первого случая (на нем нет положительных значений функции $r(t)$) и далее для

каждого отрезка $[kh + t_{n-1}^{(2)}, (k+1)h + t_{n-1}^{(2)}]$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, функция $r(t) < 0$ при всех $t > h + t_{n-1}^{(2)}$. Второй случай доказан.

Следствие Леммы 3. При ограничении (41) функция $r(t)$ при $t > h + t_{n-1}^{(2)}$ имеет вид T_* -периодической функции с только отрицательными значениями

$$r(t) = r_-(t) - \Delta - \sum_{i=1}^l (1 + \alpha)(b_i - a_i), \quad l \in \mathbb{N} \cup 0, \quad l < n, \quad (43)$$

Доказательство. По Лемме 3 верно, что при $t > h + t_{n-1}^{(2)}$ функция $r(t) < 0$, значит, при $t > 2h + t_{n-1}^{(2)}$ функция $r(t - h) < 0$ и функция $F(r(t - h)) = 1$. Тогда при $t > 2h + t_{n-1}^{(2)}$ функцию $r(t)$ можно представить в виде $r(t) = r_-(t) + const$. Из формулы (43) получаем, что $r(2h + t_{n-1}^{(2)}) = r_-(2h + t_{n-1}^{(2)}) - \Delta - \sum_{i=1}^l (1 + \alpha)(b_i - a_i)$, $l \in \mathbb{N} \cup 0$, $l < n$ (если $l = 0$, то последнего слагаемого просто нет). Тогда при $t > 2h + t_{n-1}^{(2)}$ функция $r(t) = r_-(t) - \Delta - \sum_{i=1}^l (1 + \alpha)(b_i - a_i)$, $l \in \mathbb{N} \cup 0$, $l < n$. Причем, функция $r_-(t)$ является T_* -периодической функцией, а при добавлении константы $-\Delta$ является отрицательной. Результат подтверждает формулу (14) Теоремы 1.

Таким образом, функция $r(t)$ поэтапно построена в соответствии с желаемым режимом.

1. На первом этапе мы получили формулу для функции $r(t)$ (32), где она является T_* -периодической функцией с положительными и отрицательными значениями.
2. На втором этапе получили формулу (38) для функции $r(t)$, где происходит переходный процесс.
3. На третьем этапе получили формулы (42) и (43) для функции $r(t)$, где по Лемме 3 и следствию из нее функция $r(t)$ переходит в периодический режим с только отрицательными значениями.

3.6 Исследование решения уравнения (3) на устойчивость

Докажем устойчивость решения уравнения (3). Пусть $\|\cdot\|$ — стандартная норма в $C[-h, 0]$, то есть

$$\|r(t)\| = \max_{t \in [-h, 0]} |r(t)|.$$

Будем следовать определению устойчивости для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом из книги [5]. Выберем $\varepsilon > 0$ и покажем существование такого $\delta(\varepsilon) > 0$, что для начальных функций $\psi(t) \in C[-h, 0]$ и $\varphi(t) \in S$ неравенство $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \delta(\varepsilon)$ влечет за собой неравенство $\|r_\psi(t) - r_\varphi(t)\| < \varepsilon$ для построенных по ним решений при $t > 0$. Зафиксируем $\varphi(t) \in S$, обозначим возмущение этой начальной функции через $\theta(t)$, будем считать, что $\|\theta(t)\| < M\varepsilon$ и константа $M > 0$ в нашем распоряжении. Обозначим значение функции $\theta(t)$ в точке ноль через $\tilde{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \theta(0)$. Из предполагаемой малости нормы добавки $\theta(t)$ следует, что введенная константа $\tilde{\theta}$ удовлетворяет неравенству $|\tilde{\theta}| < M\varepsilon$.

Рассмотрим решение с начальной функцией $\psi(t) = \varphi(t) + \theta(t)$. Мы интересуемся малыми ε , поэтому будем считать, что выполняется неравенство $\psi(t) < 0$ на $[-h, 0]$ (т.к. $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \delta(\varepsilon)$, то δ можно выбрать из условия $\delta < \min_{t \in [-h, 0]} |\varphi(t)|$). Тогда функция $\psi(t)$ отличается от функций из множества S только «подправленным» значением в точке ноль: $\psi(0) = -d + \tilde{\theta}$. Следовательно, решение уравнения (3)

с начальной функцией $\psi(t)$ отличается от решения с начальной функцией из множества S только заменой параметра $-d$ на $-d + \tilde{\theta}$. Тогда, на первом этапе

$$r_\psi(t) = \begin{cases} (1 + \xi)t - d + \theta, & 0 < t < t_*, \\ (1 - \eta)(t - t_*) + (1 + \xi)t_* - d + \theta, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (44)$$

$$r_\psi(t + T_*) = r_\psi(t).$$

Выполнение $(1 + \xi)t - d + \theta > 0$ следует из ограничения (31) и малости ε . Также отметим, что из формул (32) и (44) верно $|r_\varphi(t) - r_\psi(t)| = |\theta|$ для всех $t \in [0, nT_*]$, следовательно, $\|r_\psi(t) - r_\varphi(t)\| = |\theta|$ на первом этапе.

Для изучения нормы разности значений функций $r_\psi(t)$ и $r_\varphi(t)$ на втором этапе необходимо получить значение Δ_ψ . Проведем рассуждения, аналогичные пункту 3.5 и получим

$$\Delta_\psi = n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \left((1 + \xi)t_* - d + \tilde{\theta} \right).$$

Отдельно подчеркнем, что ограничение (41) не зависит от параметра d , поэтому его выполнение остается верным. Разница значений функций $r_\psi(t)$ и $r_\varphi(t)$ растет с увеличением параметра t на 2 этапе (по построению), а значит, достигает максимума в конечных точках этапа, то есть

$$\|r_\varphi(t) - r_\psi(t)\| = \max_{t \in [nT_*, h + t_{n-1}^{(2)}]} |r_\varphi(t) - r_\psi(t)| \leq |\theta + \Delta - \Delta_\psi| \leq \left(1 + n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \right) |\tilde{\theta}|.$$

Теперь рассмотрим третий этап. На нем все значения строго отрицательны. Заметим, что с момента установления периодического решения с только отрицательными значениями у обеих функций $r_\psi(t)$ и $r_\varphi(t)$, разница их значений останется постоянной. До этого момента влияний положительнозначных отрезков из второго этапа может быть не больше n штук, причем длины не больше длин положительнозначных отрезков первого этапа. Следовательно,

$$\|r_\varphi(t) - r_\psi(t)\| = \max_{t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 3h]} |r_\varphi(t) - r_\psi(t)| \leq \left(1 + 2n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \right) |\tilde{\theta}|.$$

Из ограничения (40) верно, что

$$\left(1 + 2n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \right) |\tilde{\theta}| > \left(1 + n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \right) |\tilde{\theta}| > |\tilde{\theta}|.$$

Откуда следует, что константу M нужно выбирать исходя из ограничений на норму разности функций $r_\psi(t)$ и $r_\varphi(t)$ на третьем этапе. Значит, необходимо

$$\left(1 + 2n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \right) |\tilde{\theta}| < \left(1 + 2n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \right) M\varepsilon \leq \varepsilon,$$

тогда, константу M нужно выбрать из условия

$$1 + 2n \frac{(1 + \alpha)(\eta + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi)} \leq \frac{1}{M},$$

например, $M = \frac{(\eta - 1)(1 + \xi)}{(\eta - 1)(1 + \xi) + 2n(1 + \alpha)(\eta + \xi)}$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) = M\varepsilon$ такая, что выполнено условие устойчивости решения уравнения (3). Следовательно, Теорема 1 полностью доказана.

3.7 Численные результаты

В данном пункте приведем численные примеры решений с конкретными параметрами, подобранными по найденным ограничениям.

Например, решения уравнений (3) и (1) при $d = 2$, $\alpha = 0.06$, $\xi = 2$, $t_* = 1$, $T_* = 2$, $n = 5$, $h = 1.3$, $\lambda = 1$ (см. Рис. 11).

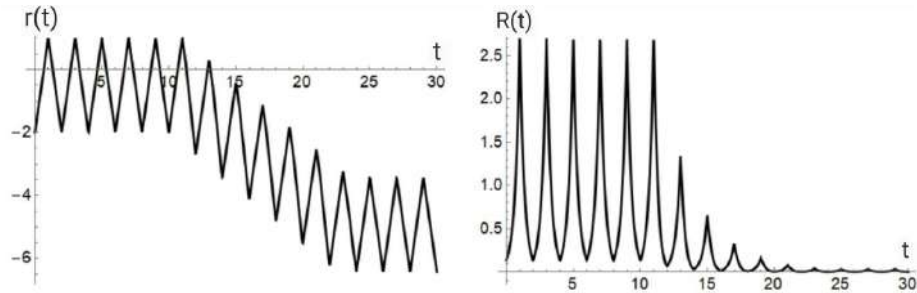


Рис. 11: Графики функций $r(t)$ и $R(t)$ демонстрирующие поведение «стареющего» нейрона.

Другой пример, решения уравнений (3) и (1) при $d = 2$, $\alpha = 2.5$, $\xi = 2$, $t_* = 1.5$, $T_* = 3$, $n = 5$, $h = 1.3$, $\lambda = 1$ (см. Рис. 12).

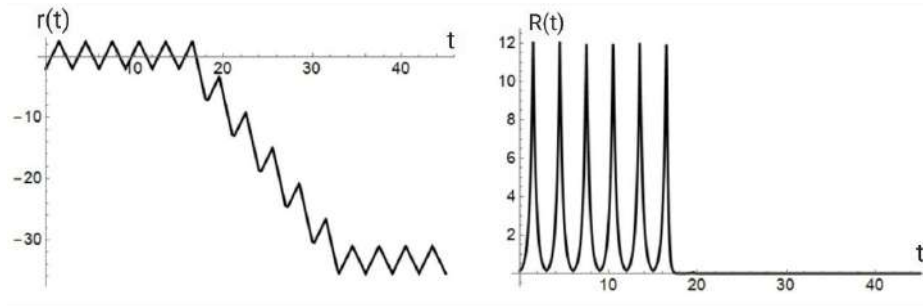


Рис. 12: Графики функций $r(t)$ и $R(t)$ демонстрирующие поведение «умирающего» нейрона.

Заключение

В настоящей работе получено обобщение результатов [1] в том смысле, что аналитически показано существование и устойчивость решения, и поэтапно найдена область параметров, при которых решение от высоких периодических всплесков переходит к малым колебаниям, т.е. существуют решения вида «замирающего» нейрона.

Для уравнения (3) доказана Теорема 1. Для уравнения (1) доказана Теорема 2, являющаяся следствием Теоремы 1. Результаты работы численно иллюстрированы.

В дальнейшем планируется построить асимптотические приближения полученных решений и рассмотреть непрерывную правую часть, как это сделано в [4].

Список литературы

1. *Preobrazhenskaia, M.M.* (2023). Relay System of Differential Equations with Delay as a Perceptron Model. In: Kryzhanovsky, B., Dunin-Barkowski, W., Redko, V., Tiumentsev, Y. (eds) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI. NEUROINFORMATICS 2022. Studies in Computational Intelligence*, vol 1064. Springer, Cham.
2. *С. А. Кащенко, В. В. Майоров*, Модели волновой памяти, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009, 288 с.
3. *G. E. Hutchinson*, «Circular causal systems in ecology», *Ann. New York Acad. Sci.*, 50, New York Acad. Sci., New York, NY, 1948, 221–246.
4. *А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов*, «Об одной модификации уравнения Хатчинсона», *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 50:12 (2010), 2099–2112; *Comput. Math. Math. Phys.*, 50:12 (2010), 1990–2002.
5. *Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин*, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1971, 296 с.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Разработка эффективных методов исследования гомоклинических бифуркаций многомерных потоков» является улучшение существующих методов для построения диаграмм гомоклинических и гетероклинических бифуркаций. Также показана эффективность предложенных методов на системах: трехмерная нормальная форма Симо, в которой был проверен критерий Шильникова и доказано существование настоящего аттрактора Лоренца. В шестимерной системе лазера, были исследованы области возможного существования аттрактора Лоренца, однако для них не выполняется критерий Шильникова. Для шестимерной системы являющейся физически обоснованным расширением классической системы Лоренца, было проведено сравнение шестимерной и классической системы на основании чего, была предложена гипотеза о существовании аттрактора Лоренца в данной системе.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Казаковым Алексеем Олеговичем, профессором кафедры математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Нижегородского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 13.06.2023 г. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись

Корякин Владислав Андреевич

4 июня 2023 г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика

Корякин Владислав Андреевич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Разработка эффективных методов исследования гомоклинических
бифуркаций многомерных потоков

Руководитель работы
д. физ.-мат. наук,
профессор

А.О. Казаков

Нижний Новгород, 2023 г.

Содержание

1 Введение	2
1.1 Актуальность	3
1.2 Цели и задачи	4
2 Описание методов	5
2.1 Описание алгоритма нидинг инвариант	5
2.2 Метод поиска гомоклинических и гетероклинических траекторий	6
3 Критерий Шильникова	7
4 Система Симо	8
5 Система Лазера	14
6 Шестимерная система Лоренца.	18
7 Заключение	23

1 Введение

В данной работе изучается поведение потоковых динамических систем с помощью численных методов бифуркационного анализа. В процессе изучения планируется испытать полученные методы на ряде многомерных систем, а именно шестимерная система лазера [7] и шестимерная система являющаяся физическим расширением классической системы Лоренца [8]. Также эффективность разработанных методов показана на трехмерном потоке Симо [6].

Для разработки предлагаемых методов был выбран язык программирования C++, из-за его быстродействия и возможности использовать CUDA Toolkit, позволяющий многократно ускорить вычисления за счет графических ядер, путем одновременного подсчета нескольких тысяч траекторий. Для обработки и визуализации выбран python, так как для него существует множество библиотек, позволяющих ускорить разработку, в нашем случае это NumPy, SymPy из-за встроенных методов и эффективности. Matplotlib для визуализации графиков и диаграмм, работы с цветом, размером карт. Для удобства использования методов разработан пользовательский интерфейс с использованием tkinter.

Для изучения природы аттрактора Лоренца [17], [20] необходимо уметь находить области псевдогиперболической динамики [15], [18], а также отслеживать моменты бифуркации [13]. С разработанным нами программным комплексом, который позволяет строить карты Ляпуновских показателей для определения хаотической динамики и поведения траекторий, а также диаграммы нидинг инвариант, которые наглядно классифицируют траектории и дают возможность определять моменты бифуркаций и как они располагаются на двухпараметрической карте.

Используя, предложенные методы, можно быстро понять динамику системы и выделить множество областей интереса, которые стоит исследовать дальше. Например, карта нидинг инвариант 1000 на 1000 точек, считается порядка 10-20 секунд, и дает много информации, на основании которой можно при-

менять более точные методы, которые занимают на порядок больше времени или детальнее изучать области интереса. Как будет показано дальше нидинг инварианты, определяют моменты бифуркации, с помощью них можно найти Быковский гетероклинический контур [9], который представляет точку на диаграмме, кроме того, нидинги могут косвенно указывать на бифуркации ко-размерности два.

1.1 Актуальность

В данной работе с помощью численных методов исследуются потоковые динамические системы с хаотической динамикой. Демонстрируются примеры, которые доказывают, что использование численных методов позволяет доказывать математические критерии, и на их основании делать вывод о существовании псевдогиперболичности и аттрактора Лоренца в данных системах. Кроме того, предложенные методы позволяют находить и изучать ранее неизвестную динамику, для будущих математических выкладок.

1.2 Цели и задачи

Основная цель данной работы – демонстрация эффективности предложенных методов для изучения новых систем или доказательство критерия Шильникова для уже известных систем. Рассмотрим каждую систему по отдельности:

1. *Система Симо.* Данная система содержит аттрактор Лоренца, на ней будет показано, как используя наши методы можно определять и доказывать существование гиперхаоса и бифуркаций коразмерности два.
2. *Система Лазера.* Известно что модели лазеров нередко демонстрируют нелинейные колебания, в том числе и хаотическую динамику похожую на систему Лоренца. Система шестимерного Лазера [7], также не является исключением и демонстрирует похожую гомоклиническую структуру.
3. *Шестимерная система Лоренца.* Данная система является физическим расширением классической системы Лоренца, и демонстрирует схожую динамику при некоторых параметрах. Что и будет показано с помощью разработанных алгоритмов.

2 Описание методов

2.1 Описание алгоритма нидинг инвариант

Метод был придуман профессором Шильниковым и его студентами, и впервые появился в статье [10]. Главная задача алгоритма классифицировать различные траектории, таким образом, чтобы близкие, схожие по поведению траектории попадали в один класс, на итоговой карте этот класс получает уникальный цвет. Таким образом, при правильной настройке метода прорисовываются линии разделения цветов, на каждой из которых происходит определенная бифуркация. За счет простой реализации метод можно адаптировать под любую систему, которая содержит седловое состояние равновесия, а благодаря скорости алгоритма можно проводить множество численных экспериментов и сразу получать результат. Подробнее о методе в статье [16].

Реализация метода: Для корректной работы необходимо задать одинаковые стартовые условия для каждой траектории, но так как седло может менять свое положение с изменением параметров, фиксированная точка не подойдет. Однако седловое состояние равновесие всегда имеет положительное собственное число, которому соответствует неустойчивая сепаратриса, используем ее для определения начального направления траектории, чтобы получить стартовую точку, нужно нормировать вектор направления сепаратрисы и домножить на заранее определенный отступ.

Для численного продолжения траектории, используется метод интегрирования Вернера 6 порядка или Дормана-Принса 5 порядка с автоматической регулировкой шага интегрирования. Данные методы можно подробнее изучить в [11], также в данной книге можно найти описание алгоритма ляпуновских показателей [14], [19].

Близкие траектории определяются с помощью последовательности символов, алфавит состоит из символов 1 и 0, 1 добавляется в последовательность, если x достигает своего максимума или минимума в положительной части оси Ox , 0 ставится если x достигает своего максимума или минимума в отрицательной части оси Ox (2.1).

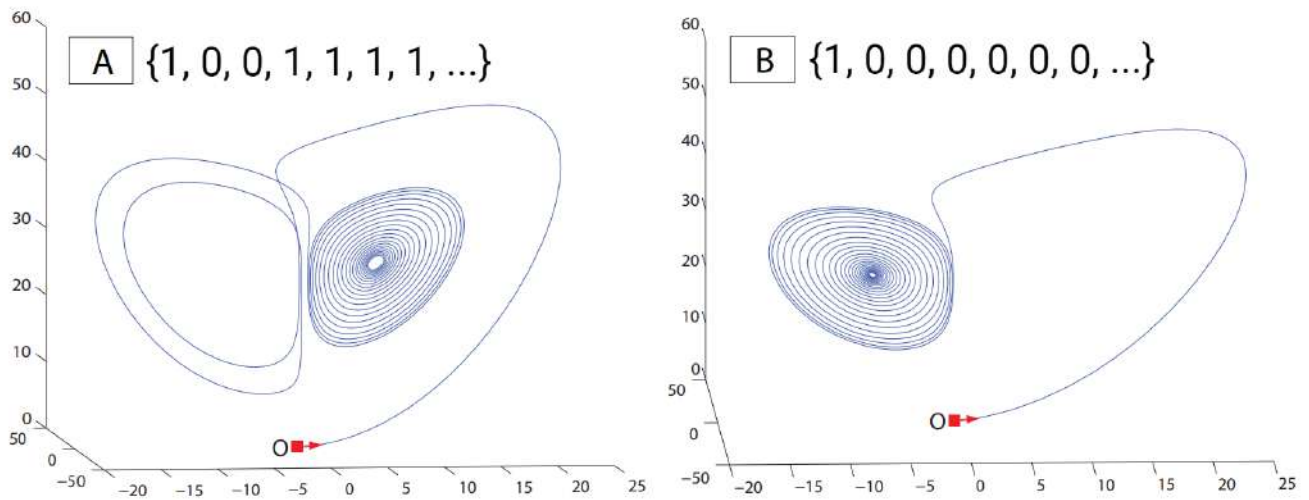


Рис. 2.1: Пример классификации траекторий методом нидинг инвариант [10].

2.2 Метод поиска гомоклинических и гетероклинических траекторий

Для поиска гомоклинических и гетероклинических траекторий можно использовать диаграмму нидингов для примерного расположения нужной бифуркации, после этого методом половинного деления отрезка на основе численной последовательности нидинг инвариант, приблизить гомо или гетероклиническую траекторию. Таким образом, на каждой итерации алгоритма у нас есть отрезок, точки которого принадлежат разным классам траекторий. Метод закончит работу когда найдет новую последовательность, которая не входила в отрезок изначально или не достигнет заданой точности.

3 Критерий Шильникова

Для того доказательства существования аттрактора Лоренца, применяется критерий Шильникова [4] для систем с Лоренцевской симметрией. Для проверки выполнения данного критерия необходимо проверить три условия: Пусть седловое состояние равновесия O , имеет собственные числа $\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, при этом $\gamma > 0 > \lambda_1 > \text{Re}(\lambda_i), i \geq 2$.

- 1) Обе неустойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 соответствующие γ , возвращаются в O при $t \rightarrow +\infty$,
- 2) В данной точке происходит зануление сепаратрисной величины вдоль петли сепаратрисы, также эта бифуркация называется inclination flip.
- 3) Седловой индекс ν точки O , равный $\nu = \frac{-\lambda_1}{\gamma}, \frac{1}{2} < \nu < 1$.

Выполнение критерия Шильникова, гарантирует, что к точке в которой выполнены условия 1–3 прилежит открытая область в которой существует аттрактор Лоренца, который удовлетворяет геометрической модели Абрамовича, Быкова, Шильникова [5]. Также данные условия гарантируют что аттрактор является робастно хаотическим, что значит хаос не исчезает при изменении параметров, псевдогиперболическим [3] – любая его траектория имеет положительный показатель Ляпунова.

Подробнее о критериях и их применениях можно узнать в статьях [2].

4 Система Симо

Будем рассматривать данную систему, в виде предложенном в статье [6]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - \beta y - \frac{1}{2}z(x - y) + \frac{1}{2}(x^2 y + xy^2) + \frac{3}{8}z^2 x - \frac{1}{8}z^2 y, \\ \dot{y} = \beta x - \alpha y + \frac{1}{2}z(x + y) + \frac{1}{2}(x^2 y - xy^2) + \frac{1}{8}z^2 x + \frac{3}{8}z^2 y, \\ \dot{z} = \mu z + x^2 - y^2 - \frac{1}{4}z^3 - \frac{1}{2}z(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Данный поток имеет три состояния равновесия, нулевое и симметричные относительно z состояния с координатами $(0, 0, \pm 2\sqrt{\mu})$.

В нашем случае параметр μ фиксирован на значении 0.04, поэтому в системе всегда существуют три состояния равновесия с координатами $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, \pm 0.4)$.

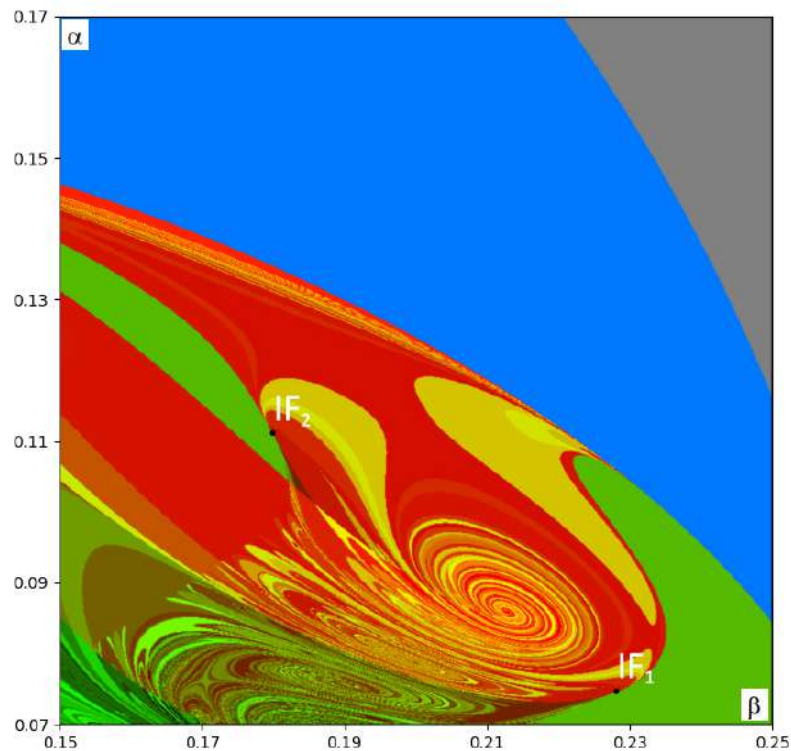


Рис. 4.1: Бифуркационная диаграмма для системы Симо. В данном случае $\alpha \in [0.07, 0.17]$, $\beta \in [0.15, 0.25]$, $\mu = 0.04$, с использованием коротких последовательностей символов $\{k_i\}_{i=1}^{16}$, в данном случае в качестве стартовой точки выбрано седловое состояние равновесия $(0, 0, -0.4)$.

На бифуркационной карте (4.1) точками IF_1 и IF_2 отмечены бифуркации коразмерности два, а именно inclination flip. На двухпараметрической карте, подобную динамику можно определить, если заметить, что данные точки разделяют переход одного "веера" цветов в другой, например для IF_2 выше данной точки красные и желтые оттенки, а ниже уже коричневые и зеленые. Такое взаимодействие цветов нередко намекает на зануление сепаратрисной величины вдоль петли сепаратрисы.

Для подтверждения представленной выше теории, необходимо проверить выполнение критерия Шильникова в IF_1 и IF_2 .

Подробнее изучим данный феномен, рассмотрим эти точки ближе, для этого необходимо перенести точку в начало координат и выполнить растяжение системы, поперек касательной линии к каждой из точек.

Для IF_1 замена будет следующего вида:

$$\begin{cases} \alpha = (0.3408269a - 0.940126\frac{b}{1000}) + 0.07493, \\ \beta = (0.940126a + 0.3408269\frac{b}{1000}) + 0.2281. \end{cases}$$

На карте (4.2) указана точка зануления сепаратрисной величины вдоль петли сепаратрисы, а также нанесены бифуркационные кривые Hom_2 , которая соответствует двухобходной гомоклинике и Hom_4 , которая соответствует четырехобходной гомоклинике.

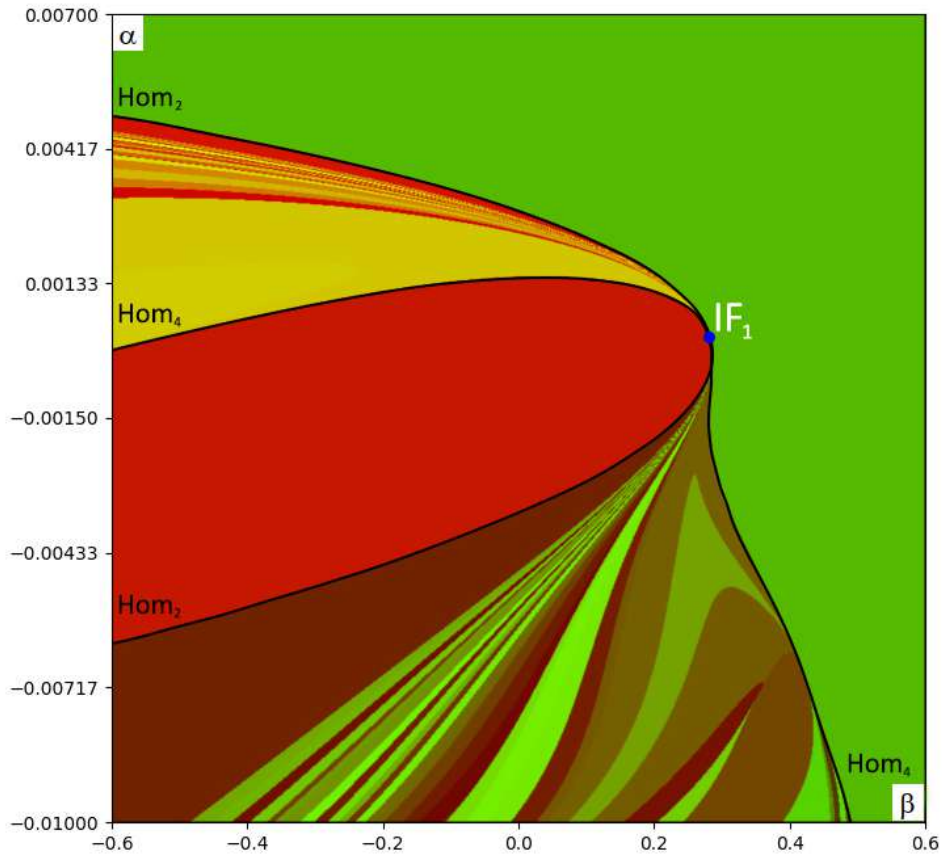


Рис. 4.2: Увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы системы Симо после замены координат, с использованием коротких последовательностей символов $\{k_i\}_{i=1}^{16}$ для точки IF_1 , стартовая точка $(0, 0, -0.4)$.

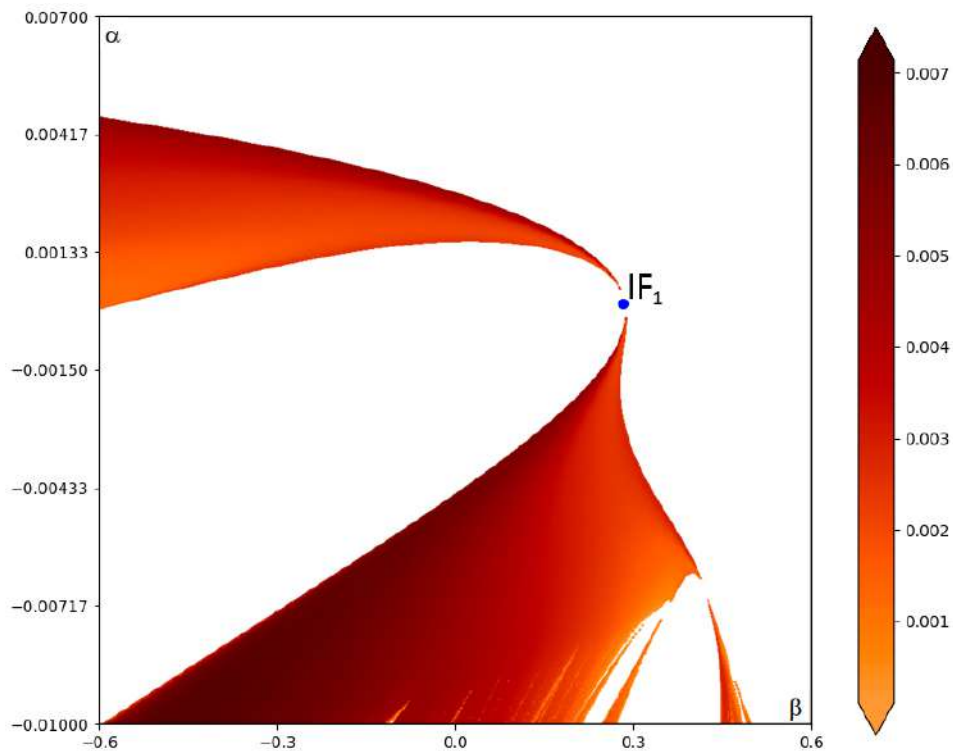


Рис. 4.3: Диаграмма старшего Ляпуновского показателя для 4.2.

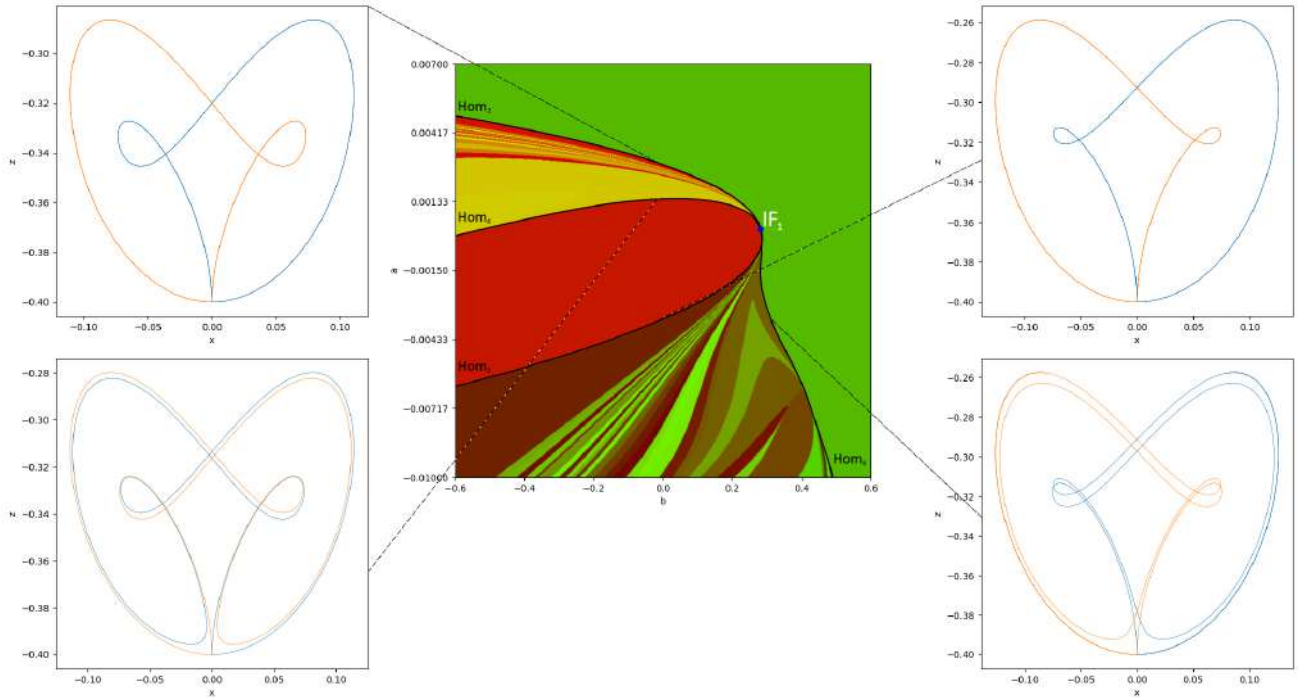


Рис. 4.4: Примеры гомоклинических траекторий на кривых Hom_2 и Hom_4 .

Рассмотрим выполнение каждого пункта критерия Шильникова в данном случае:

- 1) Выполняется судя по карте [4.4](#),
- 2) Численно найдено в MatCont, также отмечена на карте [4.4](#),
- 3) Седловой индекс в точке $IF_1 \approx 0.66263$.

Таким образом, численно проверяя несложные условия, можно убедиться в существовании аттракторов Лоренца в областях, прилегающих к точке IF_1 , кроме того, это робастно хаотический и псевдогиперболический аттрактор.

Благодаря программному комплексу, можно быстро проводить анализ таких областей, карта старшего Ляпуновского показателя ([4.3](#)) поможет определить хаотическую область аттрактора, а бифуркационная карта или нидинг диаграмма, позволяет отследить такие области на общей карте и понять где находятся бифуркационные кривые Hom_n и Hom_{2n} .

Перейдем к IF_2 , для нее замена будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha = (0.879874354468833a + 0.475206397629551b) + 0.11167, \\ \beta = (-0.475206397629551a - 0.879874354468833b) + 0.17972. \end{cases}$$

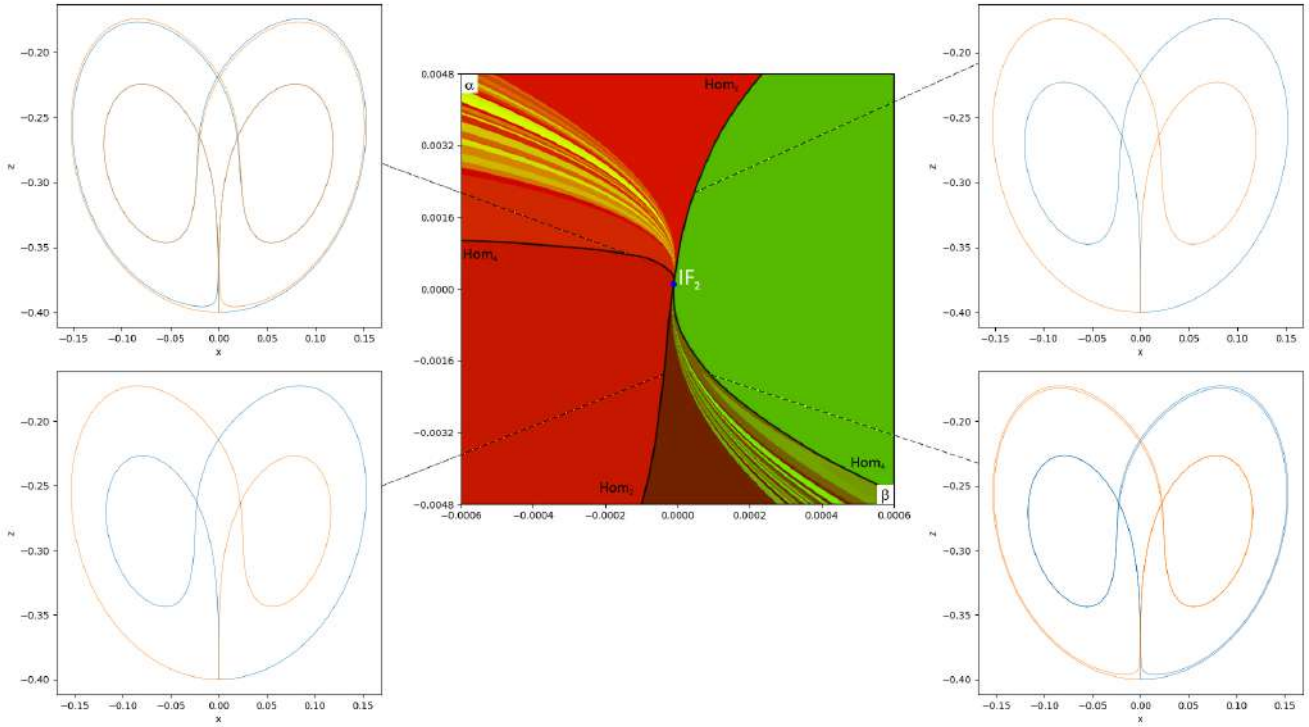


Рис. 4.5: Увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы системы Симо после замены координат, с использованием коротких последовательностей символов $\{k_i\}_{i=1}^{16}$ для точки IF_2 , стартовая точка $(0, 0, -0.4)$.

Для IF_2 , ситуация очень похожа на IF_1 , поэтому сразу рассмотрим критерий.

- 1) Выполняется судя по карте [4.5](#),
- 2) Численно найдено в MatCont, также отмечена на карте [4.5](#),
- 3) Седловой индекс в точке $IF_2 \approx 0.53847$.

Таким образом, в IF_2 также выполняется критерий Шильникова, а значит области прилегающие к данной точке также содержат робастнохаотический, псевдогиперболический аттрактор Лоренца, о чем также свидетельствует равномерность карты старшего Ляпуновского показателя [4.6](#).

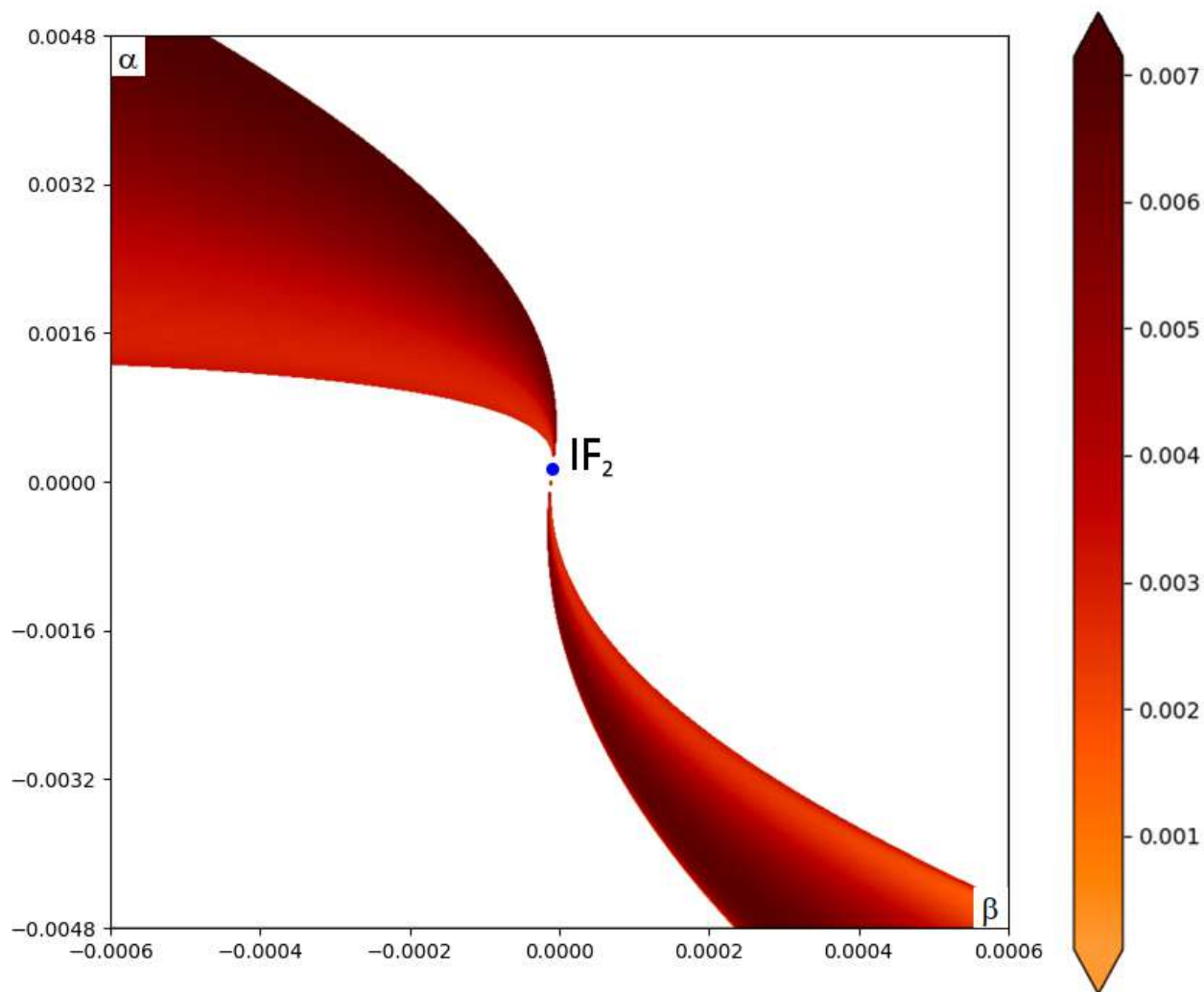


Рис. 4.6: Диаграмма старшего ляпуновского показателя для 4.5.

5 Система Лазера

Первоначальное представление системы можно взять из статей [7], [12]:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -\sigma\beta + gp_{23}, \\ p_{21}\dot{=} -p_{21} - \beta p_{31} + aD_{21}, \\ p_{23}\dot{=} -p_{23} - \beta D_{23} - ap_{31}, \\ p_{31}\dot{=} -p_{31} - \beta p_{21} - ap_{23}, \\ \dot{D}_{21} = -b(D_{21} - D_{21}^0) - 4ap_{21} - 2\beta p_{23}, \\ \dot{D}_{23} = -b(D_{23} - D_{23}^0) - 2ap_{21} - 4\beta p_{23}. \end{cases}$$

где $\{\beta, p_{21}, p_{23}, p_{31}, D_{21}, D_{23}\}$ – фазовые переменные,

$\{a, b, g, D_{21}^0, D_{23}^0, \sigma\}$ – параметры.

В нашем случае пара a, b – управляющие параметры, $g = 50$, $D_{21}^0 = -1$, $D_{21}^0 = -1$, $D_{23}^0 = 0$, $\sigma = 2$ – фиксированные параметры.

Система обладает симметрией, стандартной для систем с аттрактором Лоренца $\{\beta, p_{21}, p_{23}, p_{31}, D_{21}, D_{23}\} \longleftrightarrow \{-\beta, p_{21}, -p_{23}, -p_{31}, D_{21}, D_{23}\}$.

Будем изучать эту систему вблизи состояния равновесия

$\{0, \frac{-a}{4a^2+b}, 0, 0, -\frac{b}{4a^2+b}, \frac{2a^2}{4a^2+b}\}$, перенесем эту точку в начало координат для упрощения, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -\sigma\beta + gp_{23}, \\ p_{21}\dot{=} -p_{21} - \beta p_{31} + aD_{21}, \\ p_{23}\dot{=} \beta(D_{23} + \frac{2a^2}{4a^2+b}) - p_{23} - ap_{31}, \\ p_{31}\dot{=} ap_{23} - p_{31} - \beta(p_{21} - \frac{ab}{4a^2+b}), \\ \dot{D}_{21} = b(1 - D_{21} + D_{21}^0) - 4ap_{21} - 2\beta p_{23}, \\ \dot{D}_{23} = -b(D_{23} - D_{23}^0) - 2ap_{21} - 4\beta p_{23}. \end{cases}$$

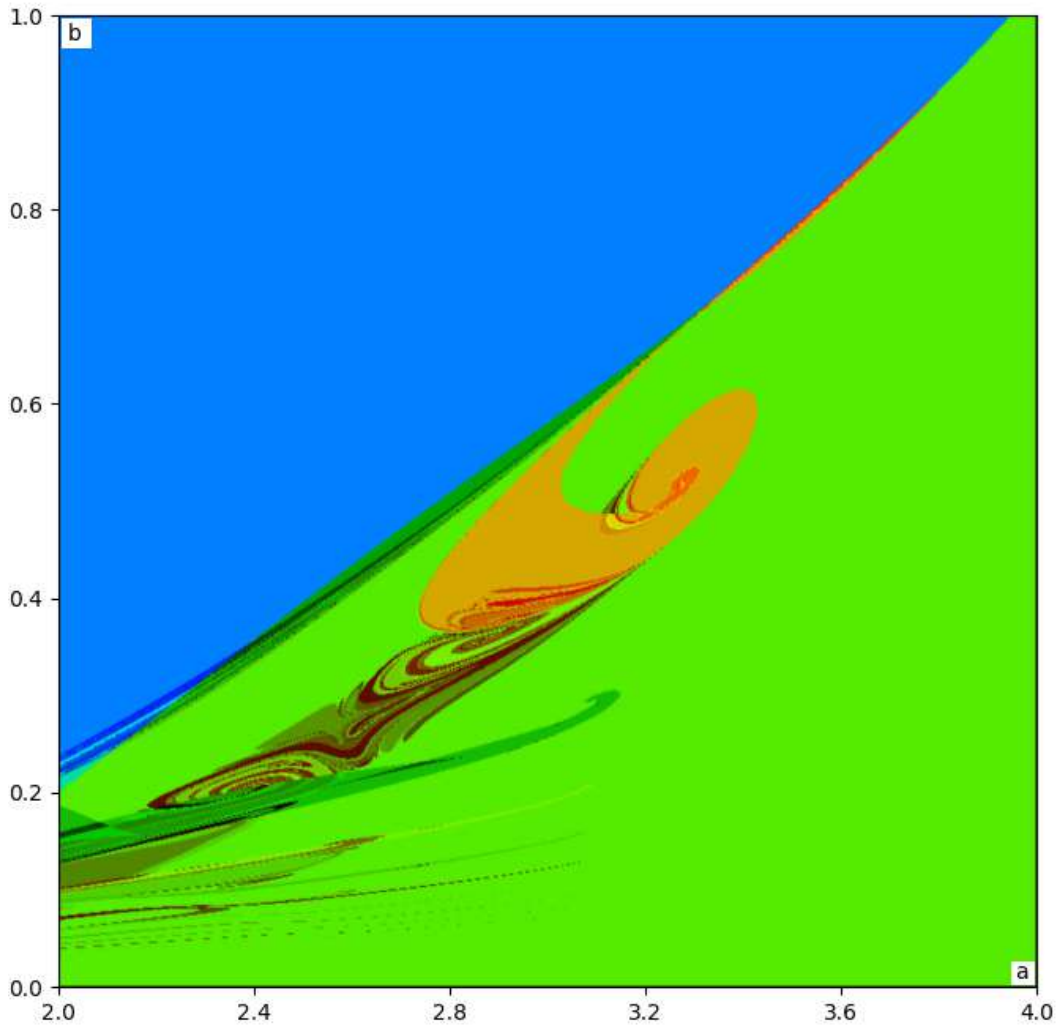


Рис. 5.1: Бифуркационная диаграмма для системы лазера, с использованием коротких последовательностей символов $\{k_i\}_{i=1}^{16}$.

Для данной системы нужно проверить выполнения критерия Шильникова, поэтому рассмотрим интересные фрагменты ближе [5.2](#).

Диаграмма нидинг инвариант [5.2](#), похожа на случай в системе Симо. Также были найдены однообходные гомоклинические бабочки, которые приведены на рисунках [5.3](#) а) и б).

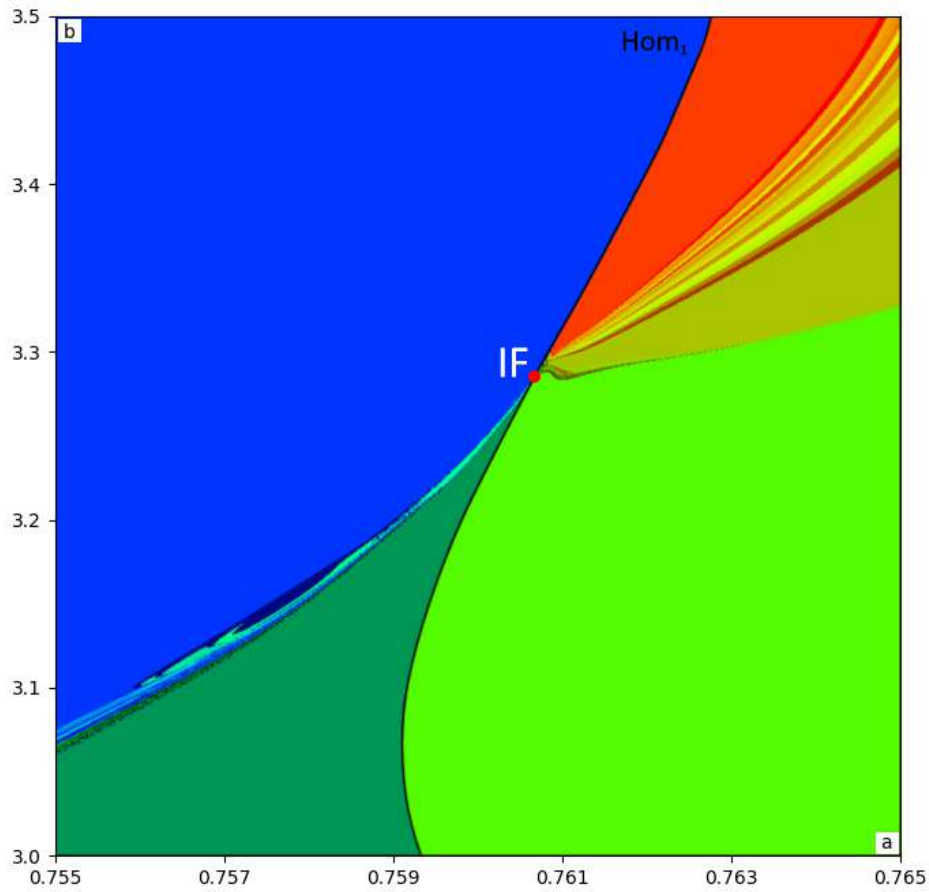


Рис. 5.2: Бифуркационная диаграмма для системы лазера, с использованием коротких последовательностей символов $\{k_i\}_{i=1}^8$. На данной карте также нанесена линия, соответствующая гомоклинической бабочке.

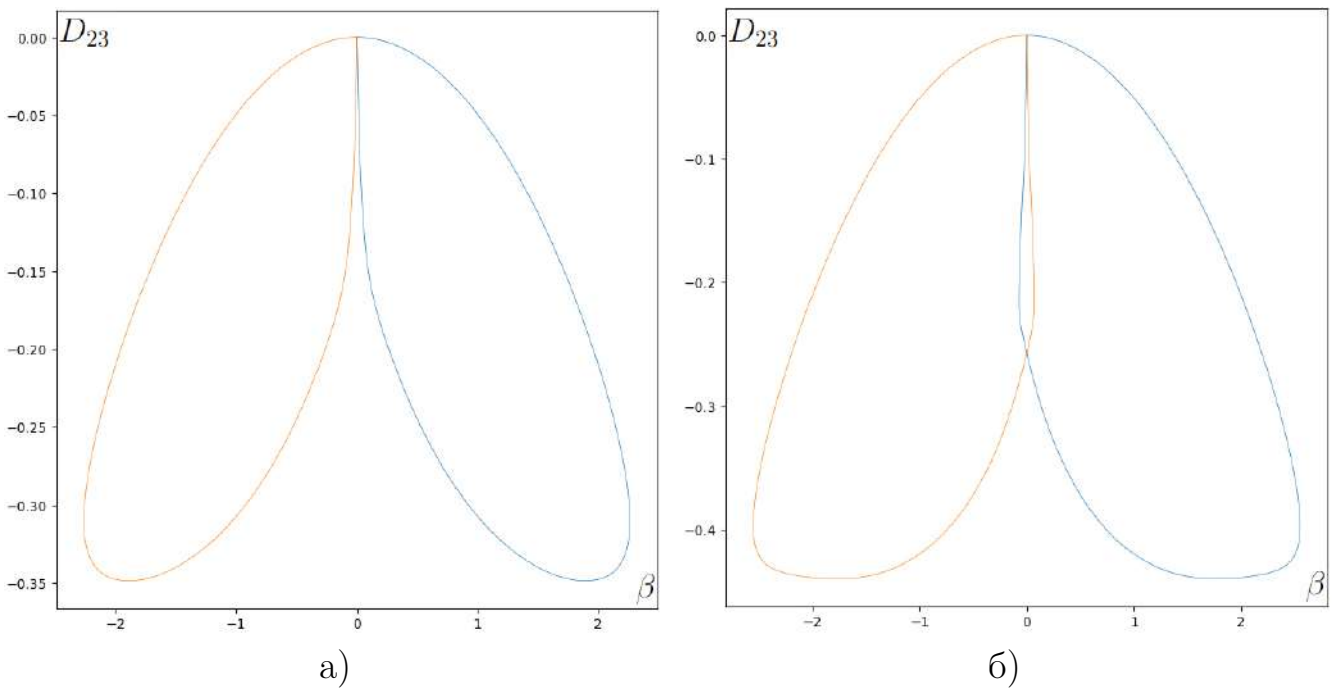


Рис. 5.3: а) $a \approx 0.76195, b = 3.4$, находится между синей и красной областью на [5.2](#). б) $a \approx 0.75918, b = 3.1$, соответствует линии на границе темно и светло зеленого на [5.2](#).

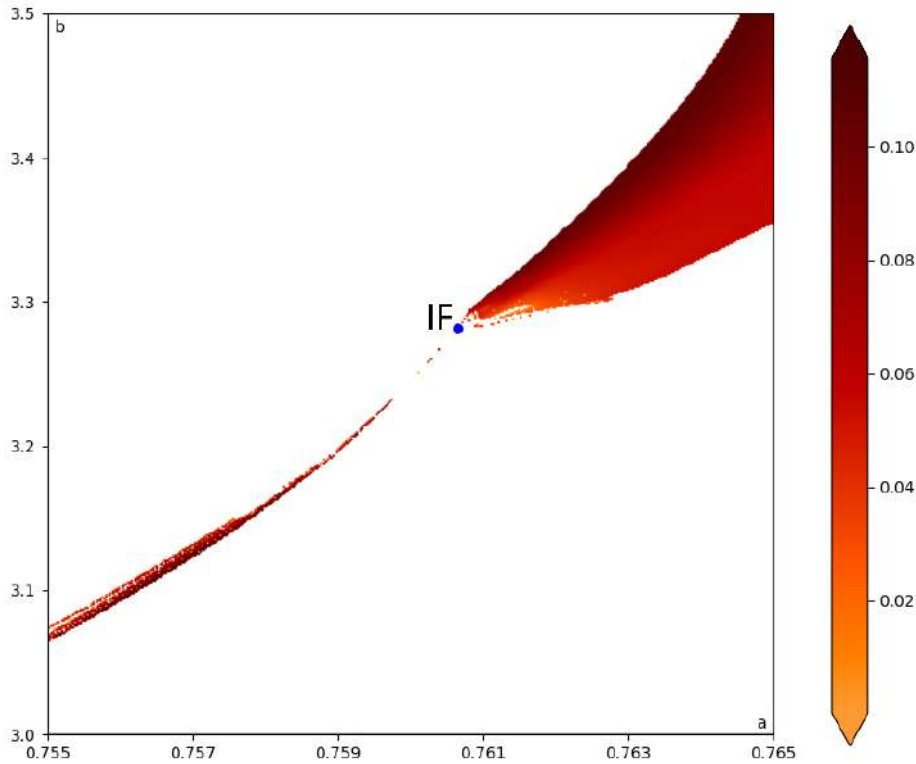


Рис. 5.4: Диаграмма старшего Ляпуновского показателя для системы Лазера, в пределах бифуркационной диаграммы [5.2](#).

Из диаграммы старшего Ляпуновского показателя [5.4](#) видно, что рассматриваемых областях, присутствуют пустоты, неравномерности и не все траектории обладают положительным ляпуновским показателем. Может показаться, что хаотическая область выходит из точки IF (зануление сепаратрисной величины вдоль петли сепаратрисы), однако седловой индекс в данной точке, оказался неподходящим для критерия Шильникова, а именно $\nu \approx 0.404$, в точке $a \approx 0.76067, b \approx 3.28003$.

Все эти факты в совокупности говорят о том, что данный аттрактор не является Лоренцовским, но это тоже является удовлетворительным результатом, так как наши методы, помогли найти особенную динамику, которая будет изучена в будущем.

6 Шестимерная система Лоренца.

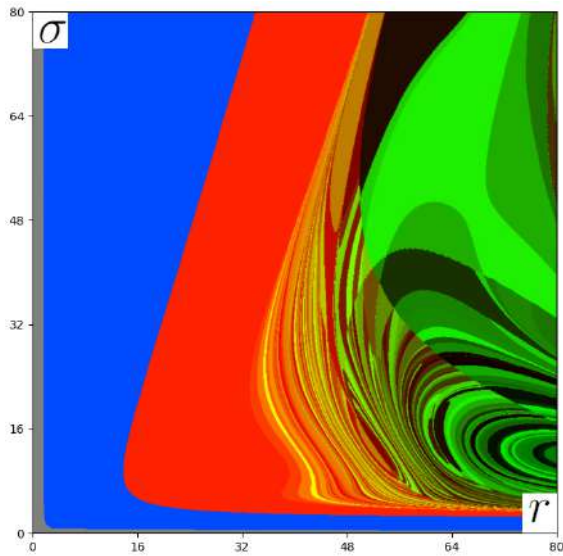
Данная система была предложена в 2019 году в статье [8], как физически обоснованное расширение классической системы Лоренца [1], в данной работе также изучались некоторые бифуркации, но не в контексте аттрактора Лоренца, наш интерес к этой системе заключается в возможном существовании настоящего аттрактора Лоренца, который удовлетворяет геометрической модели Абрамовича, Быкова, Шильникова [5]. Также для нас интересно изучить какие еще бывают хаотические аттракторы в данной системе и испытать наши методы на предложенной модели.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) - \sigma Le^{-1}w + sv, \\ \dot{y} = -xz + r_T x - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{v} = -x - \sigma v, \\ \dot{w} = -xu + r_C x - Le^{-1}w, \\ \dot{u} = xw - Le^{-1}bu. \end{cases}$$

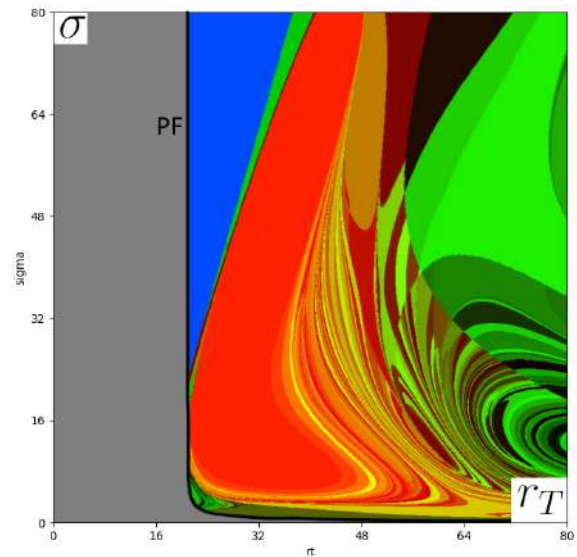
где $\{x, y, z, v, w, u\}$ – фазовые переменные,

$\{\sigma, r_T, r_C, b, s, Le^{-1}\}$ – параметры.

Пара σ, r_T – управляющие параметры, $r_C = 20$, $b = \frac{8}{3}$, $s = 10$, $Le^{-1} = 0.1$ – фиксированные параметры.



а)



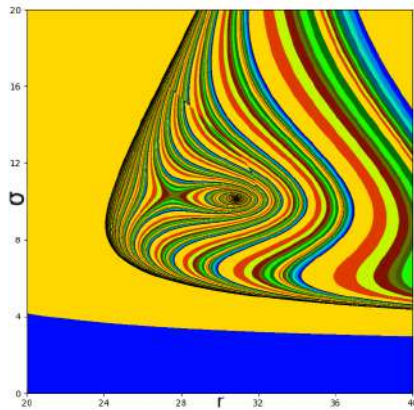
б)

Рис. 6.1: а) Бифуркационная диаграмма для классической системы Лоренца, $b = \frac{8}{3}$, $\{k_i\}_{i=1}^{12}$. б) Бифуркационная диаграмма для шестимерного Лоренца, $\{k_i\}_{i=1}^{12}$.

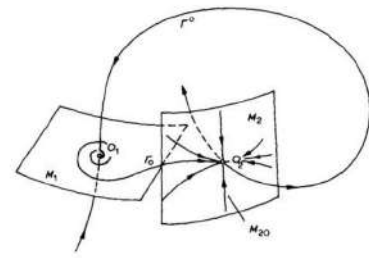
Для корректной работы методов, изучение расширенной системы Лоренца проводится справа от бифуркации вилка (отмечена на карте [6.1 б](#)), как PF). В этот момент в системе нулевое состояние равновесия O является седлом $(5,1)$ – пятимерным устойчивым многообразием и одномерным неустойчивым. До вилки нулевое состояние равновесия седло $(4, 2)$, а также около нулевого с.р. появляются еще два седловых состояния равновесия.

Как видно из диаграммы [6.1](#), бифуркационные карты очень похожи, поэтому попробуем найти Быковский гетероклинический контур в расширенной системе. Быковский контур – это гетероклиника, которая соединяет седло с фокусом, на двухпараметрической карте это точка. В моих прошлых работах был представлен алгоритм для поиска этого контура.

Для примера, быковский контур в системе Лоренца:



а)



Bykov, V. V. [1993] "The bifurcations of separatrix contours and chaos"

б)

Рис. 6.2: а) Бифуркационная диаграмма для классической системы Лоренца, с использованием алгоритма для поиска гетероклинического контура, $b = \frac{8}{3}$. б) Гетероклинический контур, найденный Быковым в [9].

Теперь вернемся к шестимерной системе:

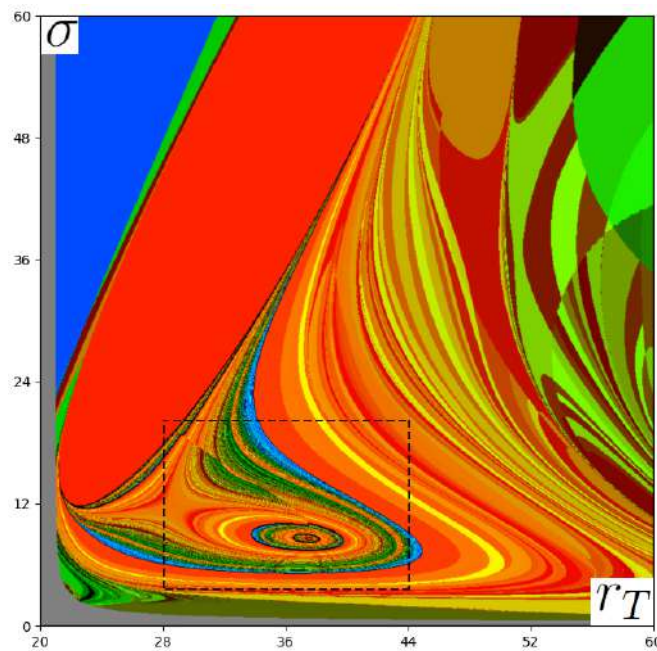
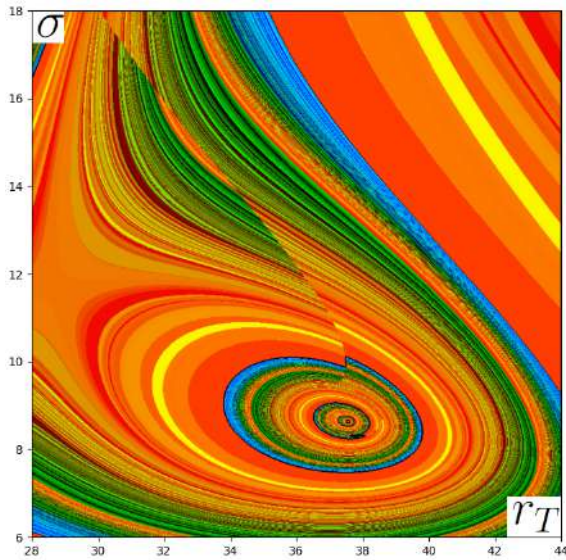
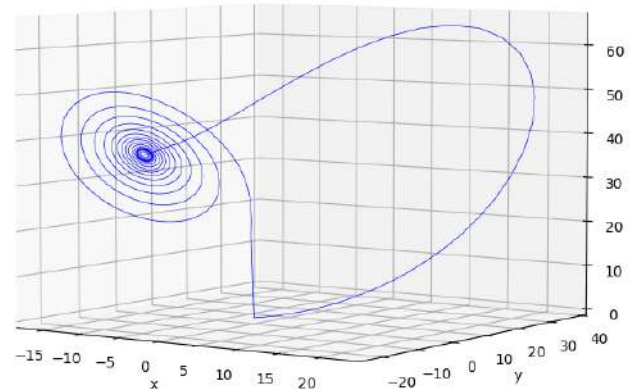


Рис. 6.3: Бифуркационная диаграмма для расширенной системы Лоренца, с использованием метода для поиска Быковской точки. Длина цветовых кодировок на этой карте отличается, карта построена на основе $\{k_i\}_{i=1}^{12}$, при пересечении черных линий добавляется еще по 12 символов.

Рассмотрим область, выделенную на [6.3](#) ближе:



а)



б)

Рис. 6.4: а) Увеличенный фрагмент Бифуркационной диаграммы [6.3](#) с использованием алгоритма для поиска гетероклинического контура. б) Гетероклинический контур, найденный с помощью алгоритма $\sigma \approx 8.64476$, $r_T \approx 37.53486$.

Диаграммы нидинг инвариант [6.1](#), являются косвенным доказательством о схожести природы данных аттракторов, из-за похожего поведения траекторий и бифуркаций происходящих в системах. Кроме того, есть подозрения что, слева от кривой PF, также присутствуют области с аттрактором Лоренца, это видно из диаграммы Ляпуновских показателей [6.5](#), в выделенной прямоугольником области также присутствует хаотическая динамика. Для дальнейшего изучения данной системы необходимо адаптировать алгоритм нидинг инвариант, для построения диаграмм гомоклинических бифуркаций с несимметричными седлами, которые существуют слева от бифуркации вилка.

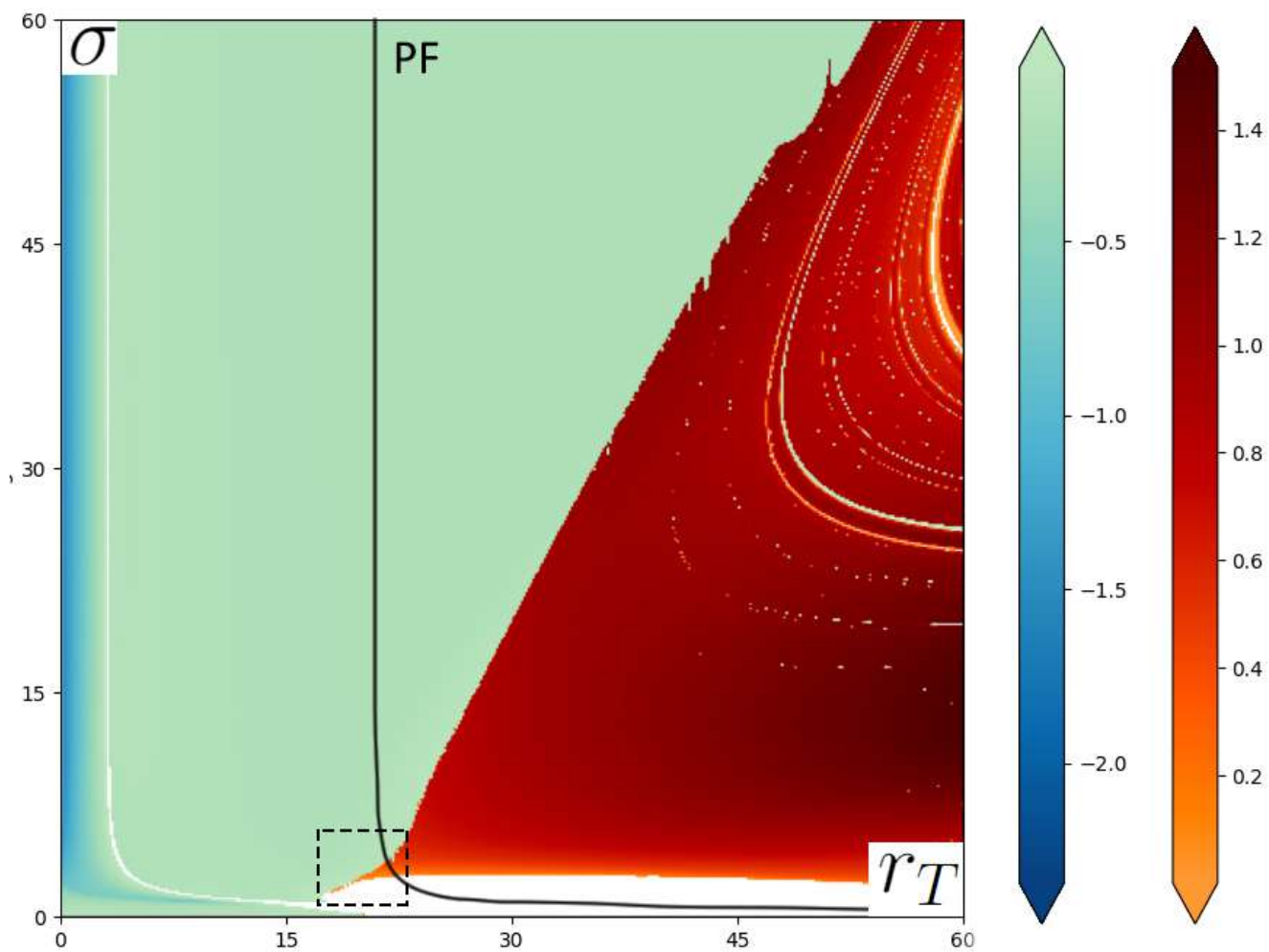


Рис. 6.5: Диаграмма старшего Ляпуновского показателя для шестимерной системы Лоренца. Прямоугольником отмечена область с хаотической динамикой слева от бифуркации вилка.

7 Заключение

В данной работе изучается поведение потоковых динамических систем с помощью численных методов бифуркационного анализа. В процессе изучения полученные методы были опробованы на нескольких динамических системах, а именно в шестимерной системе лазера была выявлена необычная динамика, в шестимерной системе Лоренца было преведено первоначальное исследование системы, выявлена схожесть с классической системой. В трехмерной системе Симо, с помощью разработанных методов было доказано существование аттрактора Лоренца.

Список литературы

- [1] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of atmospheric sciences. – 1963. – Т. 20. – №. 2. – С. 130-141.
- [2] Kazakov A. On bifurcations of Lorenz attractors in the Lyubimov–Zaks model //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – Т. 31. – №. 9. – С. 093118.
- [3] Turaev D. V., Shil’nikov L. P. Pseudohyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-type attractors //Doklady Mathematics. – SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2008. – Т. 77. – С. 17-21.
- [4] Shilnikov L. P. The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors //Uspehi Mat. Nauk. – 1981. – Т. 36. – С. 240-241.
- [5] Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. On the origin and structure of the Lorenz attractor //Akademiia Nauk SSSR Doklady. – 1977. – Т. 234. – С. 336-339.
- [6] Gonchenko S. V., Karatetskaia E. Y., Kazakov A. O., Turaev D. V., Safonov K. A. Four-winged and two-winged Lorenz attractors emerge due to bifurcations of a periodic orbit with multipliers $(1, i, i)$. (in preparation)
- [7] Pusuluri K., Meijer H. G. E., Shilnikov A. L. Homoclinic puzzles and chaos in a nonlinear laser model //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2021. – Т. 93. – С. 105503.
- [8] Moon, S., Seo, J. M., Han, B. S., Park, J., Baik, J. J. (2019). A physically extended Lorenz system. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 29(6), 063129.
- [9] Bykov V. V. The bifurcations of separatrix contours and chaos //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1993. – Т. 62. – №. 1-4. – С. 290-299.

- [10] Barrio R., Shilnikov A., Shilnikov L. Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2012. – Т. 22. – №. 04. – С. 1230016.
- [11] Кузнецов С. П. Динамический хаос. – 2001.
- [12] Pusuluri K., Shilnikov A. Homoclinic chaos and its organization in a nonlinear optics model //Physical Review E. – 2018. – Т. 98. – №. 4. – С. 040202.
- [13] Shilnikov L. P. Bifurcation theory and the Lorenz model //Appendix to Russian edition of “The Hopf Bifurcation and Its Applications.” Eds. J. Marsden and M. McCracken. – 1980. – С. 317-335.
- [14] Benettin G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory //Meccanica. – 1980. – Т. 15. – С. 9-20.
- [15] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction //Regular and Chaotic Dynamics. – 2018. – Т. 23. – С. 908-932.
- [16] Xing, T., Wojcik, J., Barrio, R., Shilnikov, A. (2014). Symbolic toolkit for chaos explorations. In International Conference on Theory and Application in Nonlinear Dynamics (ICAND 2012) (pp. 129-140). Springer International Publishing.
- [17] Shil’nikov A. L., Shil’nikov L. P., Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1993. – Т. 3. – №. 05. – С. 1123-1139.
- [18] Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos //Physical Review E. – 2012. – Т. 85. – №. 1. – С. 015203.
- [19] Bobrovsky A.A., Lyapunov Plotter on Python (NRU HSE Publishing, Moscow, 2021).

- [20] Bykov V. V., Shilnikov A. L. On the boundaries of the domain of existence of the Lorenz attractor //Methods of qualitative theory and theory of bifurcations. – 1989. – С. 151-159.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Ошмариной Ольги Андреевны
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Инварианты заузленных графов» являются: вычисления в разделе 3.1, Теорема 5, Предложение 3, Теорема 6.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 мая по 20 мая 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, arxiv.org по следующим ключевым словам: Associated link for complete graph, Yamada polynomial for associated link, в выдаче поисковиков было исследовано 15 статей, 4 препринта (больше не было найдено материала, содержащего необходимую информацию) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом работа [6] (см. «Список использованных источников» в работе) 2022 года содержит аналогичные результаты для θ -кривых, которые использовались при доказательстве фактов в выпускной квалификационной работе для заузленного графа K_4 .
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Весниным Андреем Юрьевичем, профессором кафедры геометрии и топологии механико-математического факультета Новосибирского государственного университета.
- Проведено выступление на научно-исследовательском семинаре механико-математического факультета Новосибирского государственного университета (руководитель семинара член-корреспондент РАН Веснин Андрей Юрьевич), а также на научной конференции МНСК-2023.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 21.06.2022. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Ошмарина Ольга Андреевна
31 мая 2023 г. Новосибирск, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет Механико-математический факультет

Кафедра Геометрии и топологии

Направление подготовки Математика (01.03.01)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Ошмарина Ольга Андреевна

Тема работы: «Инварианты заузленных графов»

«К защите допущен»

Научный руководитель

Заведующий кафедрой,

д.ф.-м.н., проф. кафедры геометрии

д.ф.-м.н., академик РАН

и топологии, чл.-кор. РАН

Тайманов И.А. / _____

Веснин А.Ю. / _____

(Фамилия И.О.) / (Подпись, МП)

(Фамилия И.О.) / (Подпись, МП)

«...» 2023 г.

«...» 2023 г.

Дата защиты: «...» июня 2023 г.

Новосибирск, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ	5
1.1 Основные определения	5
1.2 Полином Джонса	9
1.3 Полином Егера	10
2 ПОСТРОЕНИЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПО ДИАГРАММЕ ГРАФА	14
2.1 Зацепление, построенное по диаграмме тэта-кривой	14
2.2 Зацепление, построенное по диаграмме K_4 -кривой	16
3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	19
3.1 Вычисление полинома Джонса	19
3.2 Полином Егера для K_4 -кривой	22
3.3 Связь двух инвариантов	26
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	28
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	29

ВВЕДЕНИЕ

Теория узлов является разделом топологии, который изучает свойства и структуру гладких вложений окружностей в трёхмерные многообразия (в частности, в трёхмерное пространство). Фундаментальное изучение узлов началось ещё в 19-м веке с Карла Гаусса. Интерес к ним возрос в 20-м веке в связи с исследованием заузленностей в ДНК, протеинах и других полимерах (например, работы [3] и [4]). Основная теория изложена в таких книгах, как [1] и [2], а также многих других.

Теория заузленных графов как раздел трёхмерной топологии использует методы, пришедшие из теории узлов и теории графов. Так, немалую роль в изучении заузленных графов играют полиномиальные инварианты, такие как полином Ямады [14] и полином Егера [7].

Л. Кауффман в работе [11] описал построение зацепления по диаграмме пространственного графа, а также доказал единственность такого зацепления для тэта-кривой и K_4 -кривой. Хо Ён Сик в [5] показал, как выражается полином Ямады через полином Егера. Используя этот факт и результаты работы Л. Кауффмана, он исследовал связь полинома Ямады для θ -кривой и полинома Джонса для построенного по ней зацепления.

Целью этой работы является изучение связи полинома Ямады для K_4 -кривой и полинома Джонса построенного по ней зацепления. Таким образом, **объектом** данного исследования является K_4 -кривая.

Актуальность. Наряду с узлами и зацеплениями, заузленные графы активно используются для моделирования в естественных науках. Таким образом, выбранная тема является актуальной не только в части теоретических исследований, но и в связи с возможными приложениями.

Методами исследования послужили методы классической теории узлов

и теории заузленных графов.

Апробация результатов. Результаты работы были представлены на научно-исследовательском семинаре «Инварианты трёхмерных многообразий», а также были изложены в форме доклада на 61-й научно-практической конференции МНСК-2023 (был получен диплом 3-й степени).

Структура работы. В первой главе сформулированы основные определения теории узлов и теории заузленных графов, а также описаны полином Джонса и полином Егера (Ямады).

Во второй главе описан алгоритм построения зацепления по диаграмме тэта-кривой и диаграмме K_4 -кривой и введены некоторые необходимые обозначения.

В третьей главе представлены результаты работы. В ней показано вычисление полинома Джонса (раздел 3.1), доказана инвариантность нормированного полинома Егера для K_4 -кривой (теорема 5), приведено вычисление этого полинома (предложение 3) и исследована связь двух инвариантов (теорема 6).

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Основные определения

Определение 1. *Зацеплением* называется гладкое вложение одной или нескольких попарно не пересекающихся окружностей в \mathbb{R}^3 (причём зацеплением называют как само отображение, так и его образ). Когда вкладывается одна окружность, такое вложение называется *узлом*.

Примеры зацеплений приведены на рисунке 1.

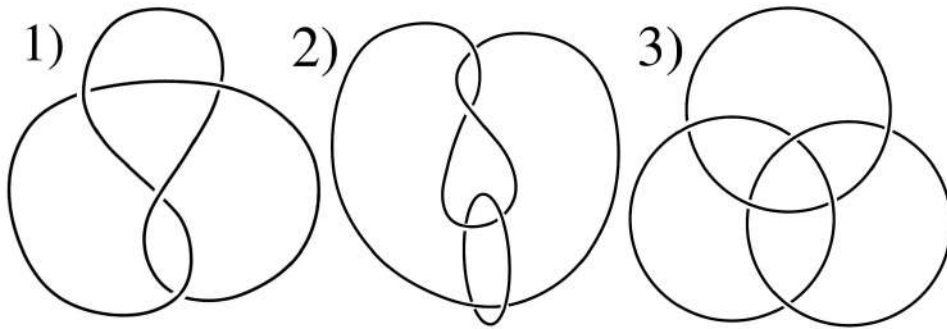


Рисунок 1 — Примеры зацеплений: 1) узел восьмёрка, 2) зацепление Уайтхеда, 3) кольца Борромео

Определение 2. *Графом* G называется пара (V, E) , состоящая из множества вершин V и множества рёбер $E \subseteq V \times V$.

Определение 3. Гладкое вложение (а также его образ) $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *заузленным (пространственным) графом*.

На множествах заузленных графов и зацеплений задаётся отношение эквивалентности — *(пространственная) изотопия*.

Определение 4. Два зацепления L и L' (соответственно, пространственных графа G и G') называют *изотопными*, если существует изотопия $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($0 \leq t \leq 1$), такая, что $h_0 = id$ и $h_1(L) = L'$ (соответственно, $h_1(G) = G'$).

Для заузленных графов, так же, как и для узлов, составляются таблицы, где указываются отличные друг от друга вложения графов (например, [12]).

Определим, что такое тэта-кривая и K_4 -кривая — объекты, с которыми мы будем работать.

Определение 5. Граф, состоящий из двух вершин и трёх рёбер, соединяющих эти вершины, называется *тэта-графом*. Вложение этого графа в пространство называется *тэта-кривой*.

Определение 6. Полный граф с четырьмя вершинами без кратных рёбер называется *графом K_4* . Его вложение в пространство называется *K_4 -кривой*.

На рисунке 2 приведены примеры тэта-кривых и K_4 -кривых.

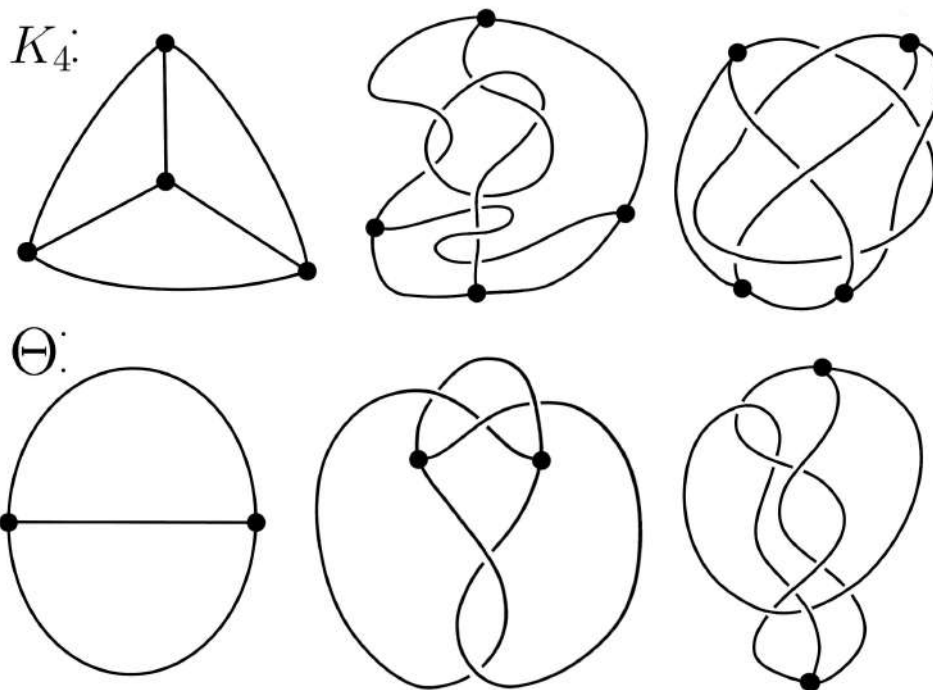


Рисунок 2 — Примеры диаграмм заузленных графов

Рассмотрим пространственный тэта-граф Θ , который является образом вложения $f : \theta \rightarrow \mathbb{R}^3$ тэта-графа θ . Обозначим рёбра θ через e_1, e_2, e_3 . Заметим, что в Θ содержатся три узла $K_1 = f(e_2 \cup e_3)$, $K_2 = f(e_1 \cup e_3)$, $K_3 = f(e_1 \cup e_2)$. Оказывается, верна следующая теорема:

Теорема 1 ([13]). Для любых заданных узлов K_1, K_2, K_3 существует такой пространственный тэта-граф Θ , что эти узлы реализуются как образы циклов тэта-графа. Более того, такой Θ не единственен.

Аналогичный результат существует и для K_4 -кривой:

Теорема 2 ([15]). Пусть c_1, \dots, c_7 — семь циклов в графе K_4 . Для любых заданных узлов K_1, \dots, K_7 существует такое вложение K_4 , что образы c_1, \dots, c_7 являются узлами K_1, \dots, K_7 соответственно.

Определение 4 не всегда бывает удобным для использования, поэтому полезно описать это отношение эквивалентности на языке диаграмм.

Пусть G — пространственный граф. Рассмотрим проекцию $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Определение 7. Проекция $\pi(G)$ заузленного графа G называется *регулярной*, если выполняются следующие условия:

1. все точки пересечения дуг (они же *перекрёстки*) трансверсальны;
2. все кратные точки являются двойными;
3. кратные точки не совпадают с проекциями вершин.

Аналогично определяется регулярная проекция зацепления, с тем лишь отличием, что нет необходимости в условии 3. Заметим, что для любой проекции $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно добиться регулярности малыми шевелениями пространственного графа G .

Определение 8. Регулярную проекцию заузленного графа G (соответственно, зацепления L), наделённую информацией в перекрёстках, какая дуга находится выше, а какая ниже, называют *диаграммой* G (соответственно, *диаграммой* L).

Примеры диаграмм зацеплений приведены на рисунке 1, а диаграмм заузленных графов на рисунке 2.

На диаграммах зацеплений и диаграммах пространственных графов задаются локальные движения (рисунок 3, (I)-(III) и (I)-(VI) соответственно). Заметим, что движения (I)-(III) называются также *преобразованиями Рейдемейстера*.

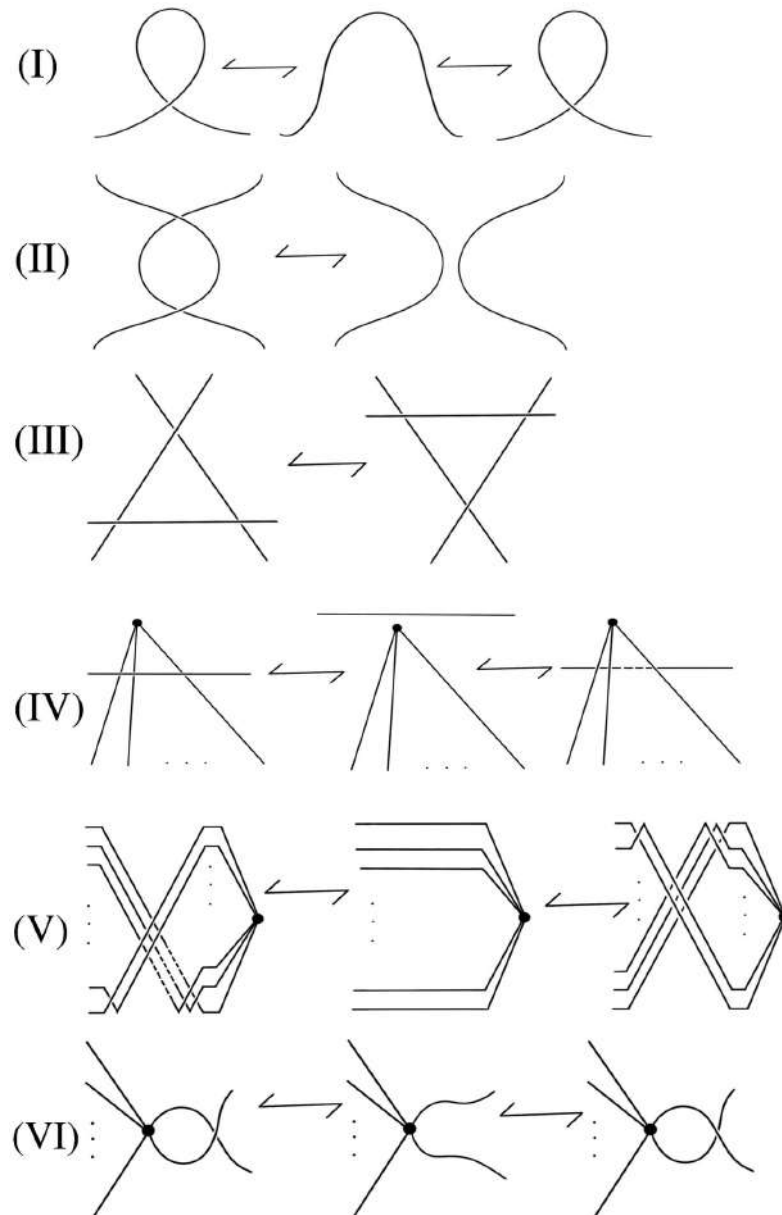


Рисунок 3 — Локальные движения на диаграммах заузленных графов

В работе [9] был доказан следующий аналог известной теоремы для зацеплений (например, теорема 1.7 в [2]):

Лемма 1 ([9]). *Два заузленных графа G и G' изотопны тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность движений (I)-(VI), переводящая диаграмму G в диаграмму G' .*

Таким образом, эквивалентность заузленных графов можно определять с помощью локальных движений на диаграммах.

1.2 Полином Джонса

Полином Джонса был определён в работе [8]. Мы будем придерживаться подхода Кауффмана, который был представлен в [10].

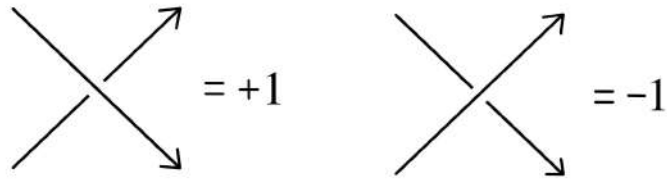
Пусть дана диаграмма D некоторого зацепления \mathcal{L} . *Скобочный полином Кауффмана* $\langle L \rangle : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$, где \mathcal{L} — множество всех неориентированных зацеплений, определяется рекуррентно следующими тремя соотношениями:

- (1) $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$;
- (2) $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$;
- (3) $\langle \bigcirc \rangle = 1$.

Здесь в равенствах \bigcirc обозначает незаузленную окружность. В первом соотношении (оно также называется *распутывающим соотношением*) картинки в скобках обозначают диаграммы, совпадающие всюду вне нарисованного участка, а в нём устроенные так, как изображено в скобках.

Скобочный полином инвариантен относительно 2-го и 3-го движений Рейдеместера, но неинвариантен относительно 1-го [10]. Поэтому его необходимо нормировать, чтобы получить инвариант зацепления.

Пусть \mathcal{L} — ориентируемое зацепление. Зададим ориентацию на нём, а после для каждого перекрёстка диаграммы D определим *знак* согласно правилу:



Пусть $Cr(D)$ — множество всех перекрёстков диаграммы D . Введём число $w(D) = \sum_{i \in Cr(D)} \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = 1$ или $\varepsilon_i = -1$ в зависимости от знака i -го перекрёстка.

Определение 9. Нормированный скобочный полином $V(\mathcal{L}) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ называется *полиномом Джонса*.

Теорема 3 ([10]). *Полином Джонса $V(\mathcal{L})$ является инвариантом ориентированного зацепления.*

1.3 Полином Егера

Напомним конструкцию полинома Егера, который был представлен в работе [7].

Пусть G — пространственный граф, а D — его диаграмма. Для того чтобы определить полином Егера, вначале построим для D *диаграмму с чёрточками* B_D . Каждую вершину в D и инцидентные ей рёбра будем заменять в небольшой окрестности вершины так, как указано на рисунке 4-(а). Каждый перекрёсток преобразуем к виду, изображённом на рисунке 4-(а), а остальные части диаграммы графа (то есть дуги, не включающие вершины и перекрёстки) удвоим, образовав ленты с чёрточками (рисунок 4-(b)). На рисунке 4-(с) приведён пример преобразования диаграммы заузленного графа K_4 к диаграмме с чёрточками.

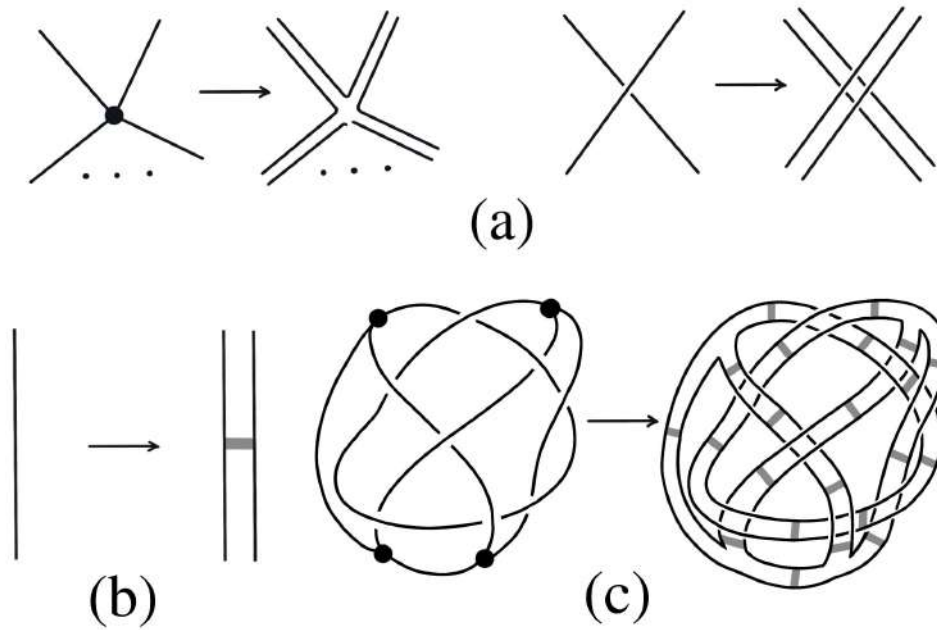


Рисунок 4 - Построение диаграммы с чёрточками

Для диаграммы без чёрточек (зацепления) B определим лорановский полином R двух переменных a и t :

$$R(B) = \mathfrak{D}(B; a, z = t - t^{-1}), \quad (1)$$

где \mathfrak{D} — Дубровник-полином Кауффмана для зацеплений [10].

Обозначим через B_{D_+} , B_{D_0} и B_{D_∞} диаграммы, которые получаются из диаграммы с чёрточками B_D заменой одного участка с чёрточкой на перекрёсток, этот же участок без чёрточки и разведение дуг соответственно, а именно:

$$B_D = \text{---} \text{---} \rightarrow B_{D_+} = \text{X}, B_{D_0} = \text{---} \text{---}, B_{D_\infty} = \text{---} \text{---}.$$

Здесь картинки снова, как и в определении скобочного полинома, обозначают диаграммы, совпадающие всюду, кроме нарисованного участка. Заметим, что в диаграммах B_{D_+} , B_{D_0} и B_{D_∞} на одну чёрточку меньше, чем в B_D .

Для диаграммы с чёрточками B_D доопределим полином R с помощью следующего соотношения:

$$R(B_D) = \frac{1}{t + t^{-1}} \left(R(B_{D_+}) + t^{-1} R(B_{D_0}) + \frac{t - t^{-1}}{1 - at} R(B_{D_\infty}) \right). \quad (2)$$

Таким образом, применяя это соотношение итеративно, в итоге мы получим выражение, где будут фигурировать только полиномы R для диаграмм без чёрточек — зацеплений. А для них у нас уже определена формула (1).

Полином Егера $J(D; a, t) : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{Z}[a, t]$, где \mathfrak{G} — множество всех заузленных графов, определяется как

$$J(D) = R(B_D).$$

Мы будем работать со следующей версией полинома Егера:

$$\mathfrak{J}(D) = J(D, a = -A^3, t = A) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}].$$

Заметим, что после такой замены Дубровник-полином преобразуется к скобочному полиному для зацеплений. В [7] была доказана

Лемма 2 ([7]).

(1) $\mathfrak{J}(D; A)$ — инвариант пространственных графов с точностью до множителя $(-A^4)^n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

(2) При замене $a = -A^3$ и $t = A$ соотношение (2) преобразуется к виду:

$$R(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}) = R(\begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array}) + \frac{1}{A^2 + A^{-2}} R(\begin{array}{c} \vee \\ \wedge \end{array}).$$

Полином Егера $\mathfrak{J}(D)$ связан с полиномом Ямады [14] — известным инвариантом пространственных графов — соотношением, которое приведено в следующей лемме:

Лемма 3 ([5]). Пусть G — планарный граф, D — диаграмма его пространственного вложения. Тогда:

$$Y(D; A^4) = -(A^2 + A^{-2})^{|E(G)| - |V(G)| + 1} \mathfrak{J}(D; A),$$

где $E(G)$, $V(G)$ — множество рёбер и множество вершин G соответственно.

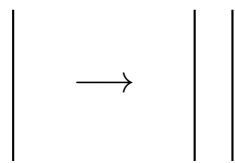
2. ПОСТРОЕНИЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПО ДИАГРАММЕ

ГРАФА

2.1 Зацепление, построенное по диаграмме тэта-кривой

Пусть D_Θ — диаграмма некоторой тэта-кривой Θ . Диаграмма состоит из вершин v_1 и v_2 и рёбер e_1, e_2, e_3 , соединяющих эти вершины. Зададим ориентацию на рёбрах вдоль направления от v_1 до v_2 . Знак ε для каждого перекрёстка определяется по тем же правилам, что и знак для перекрёстков диаграмм зацеплений.

Построим ленточную диаграмму по правилу (а) на рисунке 4 и немного изменённому правилу (b): дуги мы будем только удваивать, не добавляя чёрточек:



Полученную диаграмму-ленту обозначим L_Θ , она состоит из трёх кривых l_1, l_2, l_3 . Зададим на них ориентацию так, как указано на рисунке 5-(a).

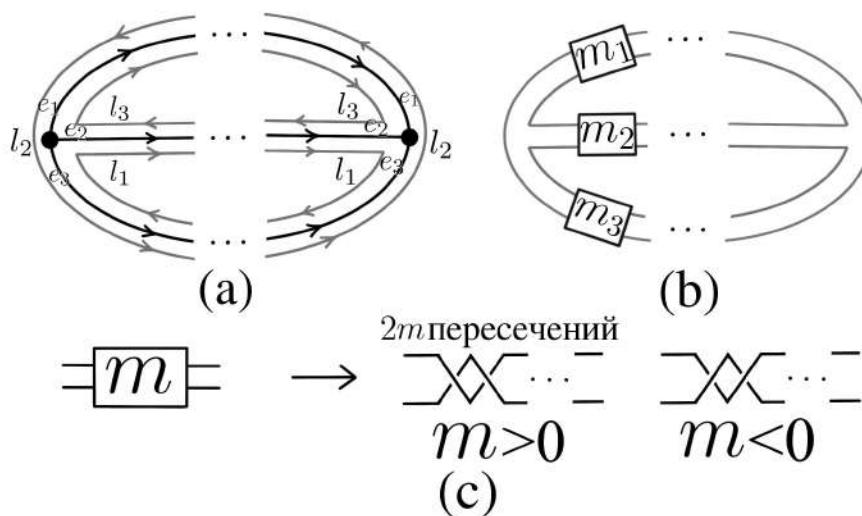


Рисунок 5 — Построение зацепления по диаграмме θ -графа

Пусть v_{ij} — это сумма знаков пересечений между e_i и e_j ($i, j = 1, 2, 3$) в соответствии с ориентацией, заданной на Θ . Введём числа m_i :

$$m_i = -v_{ii} + \frac{v_{ij} + v_{ik} - v_{jk}}{2}, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Заметим, что это целые числа. Действительно, предположим, $v_{ij} + v_{ik} - v_{jk}$ являются нечётными числами. Тогда $v_{12} + v_{13} + v_{23}$ — нечётное. Но также верно, что

$$m_1 + m_2 = -(v_{11} + v_{22} - v_{12}),$$

$$m_1 + m_3 = -(v_{11} + v_{33} - v_{13}),$$

$$m_2 + m_3 = -(v_{22} + v_{33} - v_{23}),$$

откуда получаем, что

$$2(m_1 + m_2 + m_3) = -2(v_{11} + v_{22} + v_{33}) + v_{12} + v_{13} + v_{23}.$$

То есть левая часть — чётная, а правая — нечётная. Противоречие. Значит, m_i — целые числа.

Добавим к L_Θ m_i полных оборотов к ленте, соответствующей рёбру e_i , $i = 1, 2, 3$ (рисунок 5-(b) и (c)). Полученную диаграмму обозначим $L_\Theta(m_1, m_2, m_3)$ — она является диаграммой зацепления, построенного по тэта-кривой (подробнее см. в [11]).

Заметим, что ленточную диаграмму можно рассматривать и как поверхность S_Θ с границей $\partial S_\Theta = L_\Theta$. А для каждой ориентируемой поверхности S определена форма Зейферта $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$, задающаяся формулой:

$$\langle x, y \rangle = lk(x^+, y).$$

Здесь x^+ обозначает результат выталкивания цикла x в $\mathbb{R}^3 \setminus S$ на малую величину вдоль положительного направления нормали к S , а $lk(\cdot, \cdot)$ — индекс

зацепления. $lk(K_1, K_2)$ для двух ориентированных узлов (циклов) K_1 и K_2 определяется так: если ω — сумма знаков пересечений между K_1 и K_2 , то $lk(K_1, K_2) = \frac{\omega}{2}$.

Добавив полные обороты к S , мы сделали форму Зейферта равной нулю, что обеспечивает единственность зацепления, построенного по графу [11].

Пусть $\varphi = A^2 + A^{-2}$. Введём полином $\tilde{\mathfrak{J}}(\Theta) = A^{8(m_1+m_2+m_3)}\mathfrak{J}(\Theta)$. В [5], [6] было показано, что $\tilde{\mathfrak{J}}(\Theta)$ — инвариант для тэта-кривых, а также были представлены следующие результаты:

Предложение 1. *Имеет место соотношение:*

$$V(L_\Theta(m_1, m_2, m_3)) = A^{8(m_1+m_2+m_3)}[\langle L_\Theta \rangle + \sum_{i=1}^3 \frac{1 - (A^{-8})^{m_i}}{\varphi} \langle l_i^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi^2}(2 - \sum_{i=1}^3 A^{-8m_i} + A^{-8(m_1+m_2+m_3)})].$$

Предложение 2. *Справедливо равенство:*

$$\tilde{\mathfrak{J}}(D_\Theta) = A^{8(m_1+m_2+m_3)}\{\langle L_\Theta \rangle + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^3 \langle l_i^{(2)} \rangle + \frac{2}{\varphi}\}.$$

Теорема 4. *Пусть Θ — некоторая тэта-кривая, содержащая подузлы $\mathcal{K}_1 = e_2 \cup e_3, \mathcal{K}_2 = e_1 \cup e_3, \mathcal{K}_3 = e_1 \cup e_2, \mathcal{L}_\Theta$ — построенное по Θ зацепление. Тогда*

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\Theta) - V(\mathcal{L}_\Theta) = \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathfrak{J}}(\mathcal{K}_i) - \frac{1}{\varphi^2}.$$

2.2 Зацепление, построенное по диаграмме K_4 -кривой

Пусть D_Ω — диаграмма некоторой K_4 -кривой Ω . Обозначим через a_1, a_2, \dots, a_6 рёбра графа и зададим ориентацию на них так, как изображено на рисунке 6-(а). Построим для D_Ω ленточную диаграмму по тем же правилам, что и для диаграммы тэта-кривой. Обозначим её L и зададим

на ней ориентацию так, чтобы края полученной ленты были направлены в противоположные стороны (рисунок 6-(a)).

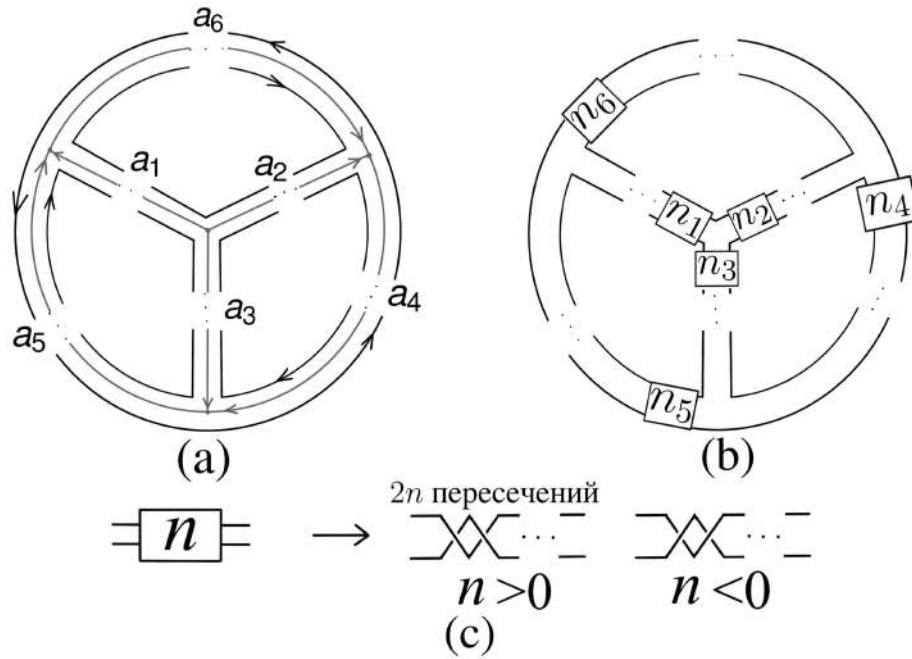


Рисунок 6 — Построение зацепления по диаграмме K_4 -кривой

Пусть w_{ij} — сумма знаков пересечений между a_i и a_j ($i, j = 1, \dots, 6$) в соответствии с ориентацией, заданной на Ω . Введём числа n_i , определяемые системой:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = -w_{11} + \frac{1}{2}(-w_{23} - w_{25} + w_{21} + w_{13} + w_{15} + w_{36} - w_{16} + w_{56}); \\ n_2 = -w_{22} + \frac{1}{2}(-w_{24} + w_{14} + w_{46} + w_{23} - w_{13} - w_{36} + w_{12} + w_{26}); \\ n_3 = -w_{33} + \frac{1}{2}(w_{34} - w_{14} + w_{45} + w_{23} + w_{25} - w_{12} + w_{13} - w_{35}); \\ n_2 + n_3 + n_4 = -w_{24} + w_{34} + w_{23} - w_{44} - w_{33} - w_{22}; \\ n_1 + n_3 + n_5 = -w_{35} + w_{15} + w_{13} - w_{11} - w_{33} - w_{55}; \\ n_1 + n_2 + n_6 = w_{12} - w_{16} + w_{26} - w_{11} - w_{22} - w_{66}. \end{array} \right.$$

Заметим, что n_i — целые числа. Доказательство этого факта аналогично доказательству в разделе 2.1 того, что m_i — целые.

Добавим n_i полных оборотов к L к ленте, соответствующей ребру a_i , где $i = 1, \dots, 6$, по правилам (b)-(c) на рисунке 6 и получим

$L(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ — диаграмму построенного по графу зацепления (подробнее см. в [11]).

Добавление n_i полных оборотов вновь обусловлено необходимостью занулять форму Зейферта для однозначности построения зацепления.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1 Вычисление полинома Джонса

В этом разделе мы вычислим полином Джонса для зацепления, построенного по K_4 -кривой.

Напомним, что $V(D; A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$, где $w(D)$ — сумма всех знаков перекрёстков диаграммы D некоторого зацепления.

Пусть, как и выше, $L(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ — диаграмма зацепления, построенного по K_4 -кривой. В силу того, что края этого ленточного зацепления ориентированы в противоположные стороны, вклад в w вносят только добавленные к L полуобороты. Значит, $w = -2 \sum_{i=1}^6 n_i$.

Обозначим $b_n = \langle \boxed{n} \rangle$ и $b_\infty = \langle \rangle \langle \rangle$.

В работе [5] было показано, что имеет место равенство:

$$b_n = A^{2n} b_0 + f_n b_\infty, \quad (3)$$

где $f_n = \frac{A^{2(n-1)}(1 - A^{-8n})}{1 + A^{-4}}$, n — произвольное целое число. Используя соотношение (3), вычислим скобочный полином $\langle L(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle L(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle &= A^{2n_1} \langle L(0, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle + \\ &+ f_{n_1} \langle L(\infty, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle = A^{2n_1} (A^{2n_2} \langle L(0, 0, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle + \\ &+ f_{n_2} \langle L(0, \infty, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle) + f_{n_1} \langle L(\infty, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle = \\ &= A^{2(n_1+n_2)} (A^{2n_3} \langle L(0, 0, 0, n_4, n_5, n_6) \rangle + f_{n_3} \langle L(0, 0, \infty, n_4, n_5, n_6) \rangle) + \\ &+ A^{2n_1} f_{n_2} \langle L(0, \infty, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle + f_{n_1} \langle L(\infty, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle = \dots = \\ &= A^{2(n_1+n_2+\dots+n_6)} \langle L(0, 0, 0, 0, 0, 0) \rangle + A^{2(n_1+n_2+\dots+n_5)} f_{n_6} \langle L(0, 0, 0, 0, 0, \infty) \rangle + \\ &+ A^{2(n_1+n_2+n_3+n_4)} f_{n_5} \langle L(0, 0, 0, 0, \infty, n_6) \rangle + A^{2(n_1+n_2+n_3)} f_{n_4} \langle L(0, 0, 0, \infty, n_5, n_6) \rangle + \\ &+ A^{2(n_1+n_2)} f_{n_3} \langle L(0, 0, \infty, n_4, n_5, n_6) \rangle + A^{2n_1} f_{n_2} \langle L(0, \infty, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle + \\ &+ f_{n_1} \langle L(\infty, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \rangle. \end{aligned}$$

Пусть Θ_i — тэта-кривая, получающаяся из L удалением ребра a_i . Тогда обозначим через $\Theta_i^{(2)}$ ленточную диаграмму, полученную из Θ_i , с ориентацией, индуцированной ориентацией L , а через $\Theta_i^{(2)}(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3})$ — диаграмму $\Theta_i^{(2)}$ с добавленными k_{ij} полными оборотами на ленте, соответствующей j -му ребру.

Используя эти обозначения, можно переписать слагаемые, участвующие в предыдущем выражении:

$$L(\infty, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) = \Theta_1^{(2)}(n_5 + n_6, n_2 + n_3, n_4),$$

$$L(0, \infty, n_3, n_4, n_5, n_6) = \Theta_2^{(2)}(n_4 + n_6, n_3, n_5),$$

$$L(0, 0, \infty, n_4, n_5, n_6) = \Theta_3^{(2)}(n_4 + n_5, 0, n_6),$$

$$L(0, 0, 0, \infty, n_5, n_6) = \Theta_4^{(2)}(n_6, 0, n_5),$$

$$L(0, 0, 0, 0, \infty, n_6) = \Theta_5^{(2)}(0, 0, n_6),$$

$$L(0, 0, 0, 0, 0, \infty) = \Theta_6^{(2)}.$$

Заметим, что для $\Theta_i^{(2)}(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3})$ полином Джонса, вновь в силу того, что края ленты направлены в разные стороны, имеет вид

$$V(\Theta_i^{(2)}(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3})) = (-A^3)^{2(k_{i1}+k_{i2}+k_{i3})} \langle \Theta_i^{(2)}(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}) \rangle.$$

В частности, верны следующие формулы:

1. $\langle \Theta_1^{(2)}(n_5 + n_6, n_2 + n_3, n_4) \rangle = (-A^3)^{-2(n_2+n_3+\dots+n_6)} V(\Theta_1^{(2)}(n_5 + n_6, n_2 + n_3, n_4)),$
2. $\langle \Theta_2^{(2)}(n_4 + n_6, n_3, n_5) \rangle = (-A^3)^{-2(n_3+n_4+n_5+n_6)} V(\Theta_2^{(2)}(n_4 + n_6, n_3, n_5)),$
3. $\langle \Theta_3^{(2)}(n_4 + n_5, 0, n_6) \rangle = (-A^3)^{-2(n_4+n_5+n_6)} V(\Theta_3^{(2)}(n_4 + n_5, 0, n_6)),$
4. $\langle \Theta_4^{(2)}(n_6, 0, n_5) \rangle = (-A^3)^{-2(n_5+n_6)} V(\Theta_4^{(2)}(n_6, 0, n_5)),$
5. $\langle \Theta_5^{(2)}(0, 0, n_6) \rangle = (-A^3)^{-2n_6} V(\Theta_5^{(2)}(0, 0, n_6)),$
6. $\langle \Theta_6^{(2)} \rangle = V(\Theta_6^{(2)}).$

Будем обозначать через l_{ijk} циклы K_4 -кривой, полученные объединением рёбер a_i, a_j, a_k , и через l_{ijkl} — рёбер a_i, a_j, a_k, a_l . Обозначим через $l_{ijk}^{(2)}$ и $l_{ijkl}^{(2)}$ построенные по ним ленточные зацепления (ориентация индуцируется ориентацией L). Теперь вычислим полиномы Джонса, представленные выше, используя предложение 1:

1.
$$V(\Theta_1^{(2)}(n_5 + n_6, n_2 + n_3, n_4)) = A^{8(n_2+n_3+\dots+n_6)}[\langle \Theta_1^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi}((1 - A^{-8(n_5+n_6)})\langle l_{234}^{(2)} \rangle + (1 - A^{-8(n_2+n_3)})\langle l_{456}^{(2)} \rangle + (1 - A^{-8n_4})\langle l_{2356}^{(2)} \rangle) + \frac{1}{\varphi^2}(2 - A^{-8(n_5+n_6)} - A^{-8(n_2+n_3)} - A^{-8n_4} + A^{-8(n_2+n_3+\dots+n_6)})],$$
2.
$$V(\Theta_2^{(2)}(n_4 + n_6, n_3, n_5)) = A^{8(n_3+n_4+n_5+n_6)}[\langle \Theta_2^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi}((1 - A^{-8(n_4+n_6)})\langle l_{135}^{(2)} \rangle + (1 - A^{-8n_3})\langle l_{456}^{(2)} \rangle + (1 - A^{-8n_5})\langle l_{1346}^{(2)} \rangle) + \frac{1}{\varphi^2}(2 - A^{-8(n_4+n_6)} - A^{-8n_3} - A^{-8n_5} + A^{-8(n_3+n_4+n_5)})],$$
3.
$$V(\Theta_3^{(2)}(n_4 + n_5, 0, n_6)) = A^{8(n_4+n_5+n_6)}[\langle \Theta_3^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi}((1 - A^{-8(n_4+n_5)})\langle l_{126}^{(2)} \rangle + (1 - A^{-8n_6})\langle l_{1245}^{(2)} \rangle) + \frac{1}{\varphi^2}(1 - A^{-8(n_4+n_5)} - A^{-8n_6} + A^{-8(n_4+n_5+n_6)})],$$
4.
$$V(\Theta_4^{(2)}(n_6, 0, n_5)) = A^{8(n_5+n_6)}[\langle \Theta_4^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi}((1 - A^{-8n_6})\langle l_{135}^{(2)} \rangle + (1 - A^{-8n_5})\langle l_{126}^{(2)} \rangle) + \frac{1}{\varphi^2}(1 - A^{-8n_5} - A^{-8n_6} + A^{-8(n_5+n_6)})],$$
5.
$$V(\Theta_5^{(2)}(0, 0, n_6)) = A^{8n_6}[\langle \Theta_5^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi}(1 - A^{-8n_6})\langle l_{234}^{(2)} \rangle],$$
6.
$$V(\Theta_6^{(2)}) = \langle \Theta_6^{(2)} \rangle.$$

Подставим $\langle \Theta_i^{(2)}(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}) \rangle$, выраженные через $V(\Theta_i^{(2)}(k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}))$, и, приведя подобные слагаемые, получим:

$$V(L(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)) = A^{8(n_1+n_2+\dots+n_6)} \left\{ \langle L \rangle + \sum_{i=1}^6 \frac{f_{n_i}}{A^{2n_i}} \langle \Theta_i^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi} \left[\langle l_{126}^{(2)} \rangle \left(\frac{f_{n_4}}{A^{2n_4}} (1 - A^{-8n_5}) + \frac{f_{n_3}}{A^{2n_3}} (1 - A^{-8(n_4+n_5)}) \right) + \langle l_{234}^{(2)} \rangle \left(\frac{f_{n_5}}{A^{2n_5}} (1 - A^{-8n_6}) + \frac{f_{n_1}}{A^{2n_1}} (1 - A^{-8(n_5+n_6)}) \right) + \langle l_{135}^{(2)} \rangle \left(\frac{f_{n_4}}{A^{2n_4}} (1 - A^{-8n_6}) + \frac{f_{n_2}}{A^{2n_2}} (1 - A^{-8(n_4+n_6)}) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \langle l_{456}^{(2)} \rangle \left(\frac{f_{n_2}}{A^{2n_2}} (1 - A^{-8n_3}) + \frac{f_{n_1}}{A^{2n_1}} (1 - A^{-8(n_2+n_3)}) \right) + \langle l_{1245}^{(2)} \rangle \frac{f_{n_3}}{A^{2n_3}} (1 - A^{-8n_6}) + \\
& + \langle l_{1346}^{(2)} \rangle \frac{f_{n_2}}{A^{2n_2}} (1 - A^{-8n_5}) + \langle l_{2356}^{(2)} \rangle \frac{f_{n_1}}{A^{2n_1}} (1 - A^{-8n_4}) \Big] + \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{f_{n_4}}{A^{2n_4}} (1 - A^{-8n_5} - \right. \\
& - A^{-8n_6} + A^{-8(n_5+n_6)}) + \frac{f_{n_3}}{A^{2n_3}} (1 - A^{-8(n_4+n_5)} - A^{-8n_6} + A^{-8(n_4+n_5+n_6)}) + \\
& \left. + \frac{f_{n_2}}{A^{2n_2}} (2 - A^{-8(n_4+n_6)} - A^{-8n_3} - A^{-8n_5} + A^{-8(n_3+n_4+n_5+n_6)}) + \frac{f_{n_1}}{A^{2n_1}} (2 - \right. \\
& \left. - A^{-8(n_5+n_6)} - A^{-8(n_2+n_3)} - A^{-8n_4} + A^{-8(n_2+n_3+\dots+n_6)}) \Big] \Big\}.
\end{aligned}$$

Используем тот факт, что $\frac{f_n}{A^{2n}} = \frac{1 - A^{-8n}}{\varphi}$, и имеем в итоге:

$$\begin{aligned}
V(L(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)) & = A^{8(n_1+n_2+\dots+n_6)} \left\{ \langle L \rangle + \sum_{i=1}^6 \frac{1 - A^{-8n_i}}{\varphi} \langle \Theta_i^{(2)} \rangle + \right. \\
& + \frac{1}{\varphi^2} \left[\langle l_{126}^{(2)} \rangle (2 - A^{-8n_3} - A^{-8n_4} - A^{-8n_5} + A^{-8(n_3+n_4+n_5)}) + \langle l_{234}^{(2)} \rangle (2 - A^{-8n_1} - \right. \\
& - A^{-8n_5} - A^{-8n_6} + A^{-8(n_1+n_5+n_6)}) + \langle l_{135}^{(2)} \rangle (2 - A^{-8n_2} - A^{-8n_4} - A^{-8n_6} + \\
& + A^{-8(n_2+n_4+n_6)}) + \langle l_{456}^{(2)} \rangle (2 - A^{-8n_1} - A^{-8n_2} - A^{-8n_3} + A^{-8(n_1+n_2+n_3)}) + \\
& + \langle l_{1245}^{(2)} \rangle (1 - A^{-8n_3} - A^{-8n_6} + A^{-8(n_3+n_6)}) + \langle l_{1346}^{(2)} \rangle (1 - A^{-8n_2} - A^{-8n_5} + \\
& + A^{-8(n_2+n_5)}) + \langle l_{2356}^{(2)} \rangle (1 - A^{-8n_1} - A^{-8n_4} + A^{-8(n_1+n_4)}) \Big] + \frac{1}{\varphi^3} \left[6 - \right. \\
& - 2 \sum_{i=1}^6 A^{-8n_i} + \sum_{i=1}^3 A^{-8(n_i+n_{i+3})} + A^{-8(n_3+n_4+n_5)} + A^{-8(n_2+n_4+n_6)} + A^{-8(n_1+n_5+n_6)} + \\
& \left. + A^{-8(n_1+n_2+n_3)} - A^{-8(n_1+n_2+\dots+n_6)} \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы вычислили полином Джонса для зацепления, построенного по K_4 -кривой.

3.2 Полином Егера для K_4 -кривой

Пусть D — диаграмма пространственного вложения графа K_4 . Нормируем полином Егера следующим образом:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(D) = (-A)^{8(n_1+n_2+\dots+n_6)} \mathfrak{J}(D).$$

Теорема 5. $\tilde{\mathfrak{J}}(D)$ является инвариантом для пространственного вложения графа K_4 .

Доказательство. Заметим, что полиному $\tilde{\mathfrak{J}}(D)$ соответствует нормированный полином Ямады $\tilde{Y}(D) = (-A)^{2(n_1+n_2+\dots+n_6)}Y(D)$. Поэтому если мы докажем, что полином Ямады является инвариантом для K_4 , то полином Егера тоже будет обладать этим свойством.

Вначале отметим, что

$$\begin{aligned} w(l_{162}^{(2)}) &= w_{11} + w_{22} + w_{66} + w_{16} - w_{26} - w_{12}, \\ w(l_{243}^{(2)}) &= w_{22} + w_{44} + w_{33} + w_{24} - w_{34} - w_{23}, \\ w(l_{135}^{(2)}) &= w_{11} + w_{33} + w_{55} + w_{35} - w_{13} - w_{15}, \\ w(l_{456}^{(2)}) &= w_{44} + w_{55} + w_{66} + w_{46} + w_{45} + w_{56}, \end{aligned}$$

где $w(\cdot)$ — сумма знаков перекрёстков.

Отсюда получаем, что $\sum_{i=1}^6 n_i = -\sum_{i=1}^6 w_{ii} - \frac{1}{2}(w_{16} + w_{24} + w_{35} + w_{46} + w_{45} + w_{56} - w_{26} - w_{12} - w_{34} - w_{23} - w_{13} - w_{15}) = -\frac{1}{2}(w(l_{126}^{(2)}) + w(l_{234}^{(2)}) + w(l_{135}^{(2)}) + w(l_{456}^{(2)}))$.

Обозначим $\sum_{i=1}^6 n_i = -\nu$. Необходимо показать, что $(-A)^{-2\nu}Y(D)$ инвариантен относительно движений (I)-(VI). Из [14] известно, что $Y(D)$ не меняется при движениях (II)-(IV). Легко видеть, что ν также инвариантно относительно этих движений.

Покажем, что для преобразования (V) это тоже справедливо. Пусть

$$\xi_+ = \text{[diagram]}, \quad \xi = \text{[diagram]}, \quad \xi_- = \text{[diagram]}.$$

Тогда $\nu(\xi_+) = \nu(\xi) + \frac{3}{2}$. По предположению 5 в [14] $Y(\xi_+) = (-A)^3Y(\xi)$.

Получаем

$$\tilde{Y}(\xi_+) = (-A)^{-2(\nu(\xi)+\frac{3}{2})}(-A)^3Y(\xi) = (-A)^{-2\nu(\xi)}Y(\xi) = \tilde{Y}(\xi).$$

Аналогично доказывается равенство с ξ_- . Осталось показать инвариантность относительно движений (I) и (VI). Обозначим

$$c_+ = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \quad c = \wedge, \quad c_- = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}.$$

Из предположения 4 в [14] имеем $Y(c_+) = A^2Y(c)$. Значит, получаем:

$$\tilde{Y}(c_+) = (-A)^{-2(\nu(c)+1)}(-A)^2Y(c) = \tilde{Y}(c).$$

Так же проверяется равенство для второй петли. Теперь пусть

$$\eta_+ = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \quad \eta = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \quad \eta_- = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}.$$

Вновь из предложения 4 в [14] получаем, что $Y(\eta_+) = -AY(\eta)$. Тогда

$$\tilde{Y}(\eta_+) = (-A)^{-2(\nu(\eta)+\frac{1}{2})}(-A)Y(\eta) = \tilde{Y}(\eta).$$

Значит, $\tilde{Y}(D)$ является инвариантом для пространственного вложения графа K_4 . Теорема доказана. \square

Предложение 3. Пусть D — диаграмма пространственного вложения графа K_4 , $\{\Theta_i^{(2)} | i = 1, \dots, 6\}$, $\{t_j^{(2)} | j = 1, \dots, 4\}$, $\{q_k^{(2)} | k = 1, \dots, 3\}$ — ленточные зацепления, соответствующие θ -кривым и циклам, состоящим из 3-х и 4-х рёбер соответственно, в K_4 -кривой. Тогда:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(D) = A^{8(n_1+\dots+n_6)} \left\{ \langle L \rangle + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^6 \langle \Theta_i^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi^2} \left(2 \sum_{j=1}^4 \langle t_j^{(2)} \rangle + \sum_{k=1}^3 \langle q_k^{(2)} \rangle \right) + \frac{6}{\varphi^3} \right\},$$

где $\varphi = A^2 + A^{-2}$.

Доказательство. Вычислим полином $\tilde{\mathfrak{J}}(D)$. Как было указано в разделе 1.3, необходимо вначале построить диаграмму B_D , а затем вычислить $R(B_D)$.

Будем использовать следующие свойства полинома Егера [7]:

$$(R1) \quad R(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) = 0;$$

$$(R2) \quad R(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) = R(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array});$$

$$(R3) \quad R(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) = R(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}).$$

Значит, по свойству $(R3)$ все чёрточки в B_D можно переместить к преобразованным вершинам через перекрёстки. Пользуясь свойством $(R2)$ и постепенно сокращая чёрточки, мы в итоге придём к тому, что B_D будет иметь вид ленточной диаграммы с ровно одной чёрточкой на каждой ленте (рисунок 7).

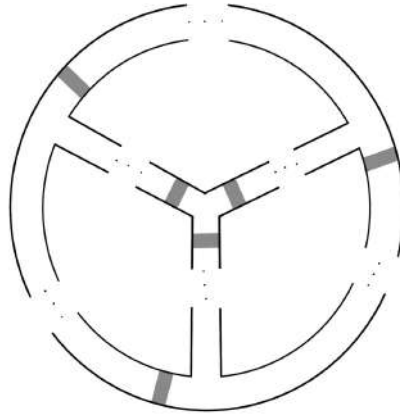


Рисунок 7 — Диаграмма с чёрточками для K_4

Обозначим такую диаграмму $L[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]$, где $\varepsilon_i = \{0, 1\}$ принимает значение 1, если на ленте, соответствующей i -му ребру, есть черточка, и 0 иначе.

Используя свойство (2) из леммы 2, получаем:

$$\begin{aligned}
 R(L[1, 1, 1, 1, 1, 1]) &= R(L[0, 1, 1, 1, 1, 1]) + \varphi^{-1}R(\Theta_1^{(2)}[2, 2, 1]) = \\
 &= R(L[0, 0, 1, 1, 1, 1]) + \varphi^{-1}R(\Theta_2^{(2)}[2, 1, 1]) + \varphi^{-1}R(\Theta_1^{(2)}[1, 1, 1]) = \\
 &= R(L[0, 0, 0, 1, 1, 1]) + \varphi^{-1}R(\Theta_3^{(2)}[1, 0, 1]) + \varphi^{-1}R(\Theta_2^{(2)}[1, 1, 1]) + \\
 &+ \varphi^{-1}R(\Theta_1^{(2)}[1, 1, 1]) = \dots = R(L[0, 0, 0, 0, 0, 0]) + \varphi^{-1}(R(\Theta_6^{(2)}[0, 0, 0]) + \\
 &+ R(\Theta_5^{(2)}[0, 0, 1]) + R(\Theta_4^{(2)}[1, 0, 1]) + R(\Theta_3^{(2)}[1, 0, 1]) + R(\Theta_2^{(2)}[1, 1, 1]) + \\
 &+ R(\Theta_1^{(2)}[1, 1, 1])).
 \end{aligned}$$

Применим это же свойство к $R(\Theta_i^{(2)}[\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \varepsilon_{i3}])$:

$$\begin{aligned}
 R(\Theta_5^{(2)}[0, 0, 1]) &= R(\Theta_4^{(2)}) + \varphi^{-1}R(l_{234}^{(2)}), \\
 R(\Theta_4^{(2)}[1, 0, 1]) &= R(\Theta_4^{(2)}[0, 0, 1]) + \varphi^{-1}R(l_{135}^{(2)}[1]) = R(\Theta_4^{(2)}) + \\
 &+ \varphi^{-1}(R(l_{126}^{(2)}) + R(l_{135}^{(2)})) + \varphi^{-2}R(\bigcirc),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\Theta_3^{(2)}[1, 0, 1]) &= R(\Theta_3^{(2)}) + \varphi^{-1}(R(l_{1245}^{(2)} + R(l_{126}^{(2)})) + \varphi^{-2}R(\bigcirc), \\
R(\Theta_2^{(2)}[1, 1, 1]) &= R(\Theta_2^{(2)}) + \varphi^{-1}(R(l_{1346}^{(2)} + R(l_{456}^{(2)} + R(l_{135}^{(2)})) + 2\varphi^{-2}R(\bigcirc), \\
R(\Theta_1^{(2)}[1, 1, 1]) &= R(\Theta_1^{(2)}) + \varphi^{-1}(R(l_{2356}^{(2)} + R(l_{456}^{(2)} + R(l_{234}^{(2)})) + 2\varphi^{-2}R(\bigcirc).
\end{aligned}$$

Участвующая в формулах картинка \bigcirc обозначает незаузленную окружность. По определению,

$$R(l_i^{(2)}) = \langle l_i^{(2)} \rangle, R(L[0, 0, 0, 0, 0, 0]) = R(L) = \langle L \rangle, R(\bigcirc) = \langle \bigcirc \rangle = 1.$$

Подставляем полученные значения и после приведения подобных слагаемых имеем:

$$\begin{aligned}
R(B_D) &= \langle L \rangle + \varphi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^6 \langle \Theta_i^{(2)} \rangle + \varphi^{-1} (2\langle l_{234}^{(2)} \rangle + 2\langle l_{126}^{(2)} \rangle + 2\langle l_{135}^{(2)} \rangle + 2\langle l_{456}^{(2)} \rangle + \right. \\
&\left. + \langle l_{1245}^{(2)} \rangle + \langle l_{1346}^{(2)} \rangle + \langle l_{2356}^{(2)} \rangle) + 6\varphi^{-2} \right\}.
\end{aligned}$$

Нормируя этот полином, получаем $\tilde{\mathfrak{J}}(D)$. □

3.3 Связь двух инвариантов

Найдём, как связаны полином Егера для K_4 -кривой и полином Джонса для зацепления, построенного по этому заузленному графу.

Теорема 6. Пусть \mathcal{K}_4 — вложение графа K_4 в \mathbb{R}^3 , $\{\Theta_i | i = 1, \dots, 6\}$ — множество Θ -графов в \mathcal{K}_4 , $\{l_j | j = 1, \dots, 7\}$ — множество циклов в \mathcal{K}_4 , \mathcal{L} — построенное по \mathcal{K}_4 зацепление. Тогда:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\mathcal{K}_4) - V(\mathcal{L}) = \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^6 \tilde{\mathfrak{J}}(\Theta_i) - \frac{1}{\varphi^2} \sum_{j=1}^7 \tilde{\mathfrak{J}}(l_j) + \frac{1}{\varphi^3},$$

где $\varphi = A^2 + A^{-2}$.

Доказательство. Вычислим разность полиномов:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{J}}(\mathcal{K}_4) - V(\mathcal{L}) &= A^{8(n_1+n_2+\dots+n_6)} \left\{ \sum_{i=1}^6 \frac{A^{-8n_i}}{\varphi} \langle \Theta_i^{(2)} \rangle - \frac{1}{\varphi^2} [\langle l_{126}^{(2)} \rangle (-A^{-8n_3} - \right. \\
&- A^{-8n_4} - A^{-8n_5} + A^{-8(n_3+n_4+n_5)}) + \langle l_{234}^{(2)} \rangle (-A^{-8n_1} - A^{-8n_5} - A^{-8n_6} + \\
&+ A^{-8(n_1+n_5+n_6)}) + \langle l_{135}^{(2)} \rangle (-A^{-8n_2} - A^{-8n_4} - A^{-8n_6} + A^{-8(n_2+n_4+n_6)}) + \\
&+ \langle l_{456}^{(2)} \rangle (-A^{-8n_1} - A^{-8n_2} - A^{-8n_3} + A^{-8(n_1+n_2+n_3)}) + \langle l_{1245}^{(2)} \rangle (-A^{-8n_3} - A^{n_6} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A^{-8(n_3+n_6)} + \langle l_{1346}^{(2)} \rangle (-A^{-8n_2} - A^{-8n_5} + A^{-8(n_2+n_5)}) + \langle l_{2356}^{(2)} \rangle (-A^{-8n_1} - \\
& - A^{-8n_4} + A^{-8(n_1+n_4)}) - \frac{1}{\varphi^3} \left[-2 \sum_{i=1}^6 A^{-8n_i} + \sum_{i=1}^3 A^{-8(n_i+n_{i+3})} + A^{-8(n_3+n_4+n_5)} + \right. \\
& \left. + A^{-8(n_2+n_4+n_6)} + A^{-8(n_1+n_5+n_6)} + A^{-8(n_1+n_2+n_3)} - A^{-8(n_1+n_2+\dots+n_6)} \right] \}.
\end{aligned}$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{J}}(\mathcal{K}_4) - V(\mathcal{L}) &= \frac{A^{8(n_2+\dots+n_6)}}{\varphi} \left[\langle \Theta_1^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi} (\langle l_{234}^{(2)} \rangle + \langle l_{456}^{(2)} \rangle + \langle l_{2356}^{(2)} \rangle) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{\varphi^2} \right] + \frac{A^{8(n_1+n_3+\dots+n_6)}}{\varphi} \left[\langle \Theta_2^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi} (\langle l_{135}^{(2)} \rangle + \langle l_{456}^{(2)} \rangle + \langle l_{1346}^{(2)} \rangle + \frac{2}{\varphi^2}) \right] + \dots + \\
& + \frac{A^{8(n_1+\dots+n_5)}}{\varphi} \left[\langle \Theta_6^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi} (\langle l_{234}^{(2)} \rangle + \langle l_{135}^{(2)} \rangle + \langle l_{1245}^{(2)} \rangle) + \frac{2}{\varphi^2} \right] - \frac{A^{8(n_1+n_2+n_6)}}{\varphi^2} \left[\langle l_{126}^{(2)} \rangle + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\varphi} \right] - \dots - \frac{A^{8(n_1+n_2+n_4+n_5)}}{\varphi^2} \left[\langle l_{1245}^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi} \right] + \frac{1}{\varphi^3}.
\end{aligned}$$

Будем пользоваться предложением 2, а также тем фактом [6], что:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\mathcal{K}) = A^{-8w(K)} \mathfrak{J}(K) = A^{-8w(K)} (\langle K^{(2)} \rangle + \frac{1}{\varphi}),$$

где K — диаграмма узла \mathcal{K} , $w(K)$ — сумма знаков перекрёстков K .

Учитывая то, что $w(\Theta_i) = -(n_1 + \dots + n_{i-1} + n_{i+1} + \dots + n_6)$ и что

$$w(l_{162}) = w_{11} + w_{22} + w_{66} + w_{16} - w_{26} - w_{12} = -(n_1 + n_6 + n_2),$$

$$w(l_{243}) = w_{22} + w_{44} + w_{33} + w_{24} - w_{34} - w_{23} = -(n_2 + n_4 + n_3),$$

$$w(l_{135}) = w_{11} + w_{33} + w_{55} + w_{35} - w_{13} - w_{15} = -(n_1 + n_3 + n_5),$$

$$w(l_{456}) = w_{44} + w_{55} + w_{66} + w_{46} + w_{45} + w_{56} = (n_4 + n_5 + n_6),$$

$$\begin{aligned}
w(l_{4316}) &= w_{44} + w_{33} + w_{11} + w_{66} + w_{46} + w_{16} - w_{36} + w_{14} - w_{34} - w_{13} = \\
&= -(n_4 + n_3 + n_1 + n_6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(l_{6235}) &= w_{66} + w_{22} + w_{33} + w_{55} - w_{26} + w_{36} + w_{56} - w_{23} - w_{25} + w_{35} = \\
&= -(n_6 + n_2 + n_3 + n_5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(l_{4512}) &= w_{44} + w_{55} + w_{11} + w_{22} + w_{24} + w_{25} - w_{12} + w_{45} - w_{14} - w_{15} = \\
&= -(n_4 + n_5 + n_1 + n_2),
\end{aligned}$$

получим:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\mathcal{K}_4) - V(\mathcal{L}) = \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^6 \tilde{\mathfrak{J}}(\Theta_i) - \frac{1}{\varphi^2} \sum_{j=1}^7 \tilde{\mathfrak{J}}(l_j) + \frac{1}{\varphi^3}.$$

□

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была установлена связь между двумя инвариантами: нормированным полиномом Егера (Ямады) для K_4 -кривой и полиномом Джонса для построенного по K_4 -кривой зацепления. Была доказана инвариантность нормированного полинома Егера для K_4 -кривой, а именно было показано, что для нормированного полинома в лемме $2n = 0$. Были вычислены полином Егера и полином Джонса, а также было найдено выражение полинома Егера через полином Джонса.

В силу активного применения теории заузленных графов для моделирования в естественных науках, данное исследование может быть полезно в различных приложениях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Мантуров В.О. Теория узлов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [2] Прасолов В.В., Сосиснский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
- [3] Alexander K., Taylor A.J., Dennis M.R. Proteins analysed as virtual knots // Scientific reports. 2017. Vol. 7(1). P. 1-10.
- [4] Buck D., Flapan E. Predicting lnot or catenane type of site-specific recombination products // Journal of molecular biology. 2007. Vol. 374(5). P. 1186-1199.
- [5] Huh Y. Yamada polynomial and associated link of θ -curves. URL: <https://arxiv.org/abs/2206.11450>.
- [6] Huh Y., Jin G.T. θ -curve polynomials and finite-type invariants // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2002. Vol. 11(4). P. 555–564.
- [7] Jaeger F. On some graph invariants related to the Kauffman polynomial // Progress in knot theory and related topics. 1997. № 56. P. 69–82.
- [8] Jones V.F.R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras // Bulletin of the American Mathematical Society. 1985. Vol. 12(1). P. 103–111.
- [9] Kauffman L.H. Invariants of graphs in three-space // Transactions of the American Mathematical Society. 1989. Vol. 311(2). P. 697–710.
- [10] Kauffman L.H. State models and the Jones polynomial // Topology. 1987. Vol. 26(3). P. 395–407.

- [11] Kauffman L.H., Simons J., Wolcott K., Zhao P. Invariants of theta-curves and other graphs in 3-space // *Topology and its applications*. 1993. №49. P. 193–216.
- [12] Moriuchi H. An enumeration of theta-curves with up to seven crossings // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. 2009. Vol.18(2). P. 167-197.
- [13] Wolcott K. The knotting of Theta-curves and other graphs in S^3 // *Geometry and Topology. Manifolds: Varieties, and Knots*. 1986. P. 325-346.
- [14] Yamada S. An invariant of spatial graphs // *Graph Theory*. 1989. Vol. 13. P. 537–551.
- [15] Yamamoto M. Knots in spatial embeddings of the complete graph on four vertices // *Topology and its Applications*. 1990. Vol. 36(3). P. 291-298.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Родионовой Елены Константиновны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Реализация классов топологической сопряженности каскадов Морса-Смейла, допускающих комбинаторное описание» являются: Теоремы 1, 2, 3; Предложения 2.1, 4.1, 5.1; Лемма 2.1; Следствие 2.2.

- Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: В период с 1 января по 1 марта 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar по следующим ключевым словам: диффеоморфизмы Морса-Смейла, топологическая классификация, структурно-устойчивые диффеоморфизмы, двухцветный граф, топологическая сопряженность, были исследованы выданные источники и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [3], [5-6], [16], [19], [26] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Гуревич Елена Яковлевна, доцентом кафедры фундаментальной математики, с.н.с. лаборатории «Динамические системы и приложения», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

- Проведено выступление на научной конференции кафедры фундаментальной математики и международной лаборатории динамических систем и приложений «Математическая весна» 2023.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на

мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась 13.06.2023. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.



Родионова Елена
Константиновна

24 мая 2023 г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Родионова Елена Константиновна

**РЕАЛИЗАЦИЯ КЛАССОВ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ
СОПРЯЖЕННОСТИ КАСКАДОВ МОРСА-СМЕЙЛА,
ДОПУСКАЮЩИХ КОМБИНАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ**

Выпускная квалификационная работа - БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
по направлению 01.03.01 Математика
образовательная программа «Математика»

Рецензент

к.ф.-м.н., доцент кафедры
прикладной математики
ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Т.М. Митрякова

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент кафедры
фундаментальной математики
Е.Я. Гуревич

Нижний Новгород, 2023

Содержание

1	Введение и формулировка результатов	3
2	Свойства диффеоморфизмов из рассматриваемого класса	6
2.1	Топология несущего многообразия M^3	7
2.2	Схема диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ как полный топологический инвариант	7
2.3	Свойства схемы диффеоморфизма $f \in G(M^3)$	8
2.4	Взаимосвязь схемы и двухцветного графа	11
3	Граф как полный топологический инвариант для класса $G(M^3)$	13
4	Реализация	14
5	Оценка скорости алгоритмов сравнения двухцветных графов	19
6	Заключение	21
	Список литературы	23

1 Введение и формулировка результатов

Пусть M^n — связное гладкое замкнутое многообразие размерности $n \geq$

1. Дiffeоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

1. неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
2. инвариантные многообразия W_p^s, W_q^u любых точек $p, q \in \Omega_f$ пересекаются трансверсально.

В работах [23], [3] были построены первые примеры каскадов с регулярной динамикой на трехмерных многообразиях, различение которых при помощи комбинаторных инвариантов невозможно. Это связано с нетривиальным вложением сепаратрис седловых периодических точек таких каскадов в объемлющее многообразие. В серии работ 2000-2019 года Х. Бонатти, В.З. Гринеса, О.В. Починки при участии Ф. Лауденбаха и В.С. Медведева получена полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях (см. обзор [5]). Инвариант, который предлагался в этой работе, названный схемой диффеоморфизма, представляет собой набор, включающий пространство орбит ограничения исследуемого каскада на некоторое подмножество несущего многообразия и проекции двумерных сепаратрис в это пространство.

В работе [13] было введено понятие тривиальности схемы и доказано, что диффеоморфизм Морса-Смейла, схема которого тривиальна, включается в топологический поток.

В ходе данной работы планируется выделить класс каскадов Морса-Смейла, которые допускают более простые инварианты.

Пусть $G(M^3)$ — класс диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, вкладывающихся в топологический поток. Положим $\Omega_f^i = \{p \in \Omega_f \mid \dim W_p^u = i\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Обозначим через \mathcal{L}_f множество всех замыканий двумерных инвариантных многообразий седловых точек диффеоморфизма f . Так как $f \in G(M^3)$, то любой элемент множества \mathcal{L}_f является локально плоской сферой. Пусть \mathcal{D}_f обозначает множество всех компонент связности многообразия $M^3 \setminus (\bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_f^1} cl W_{\sigma_1}^s \cup \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_f^2} cl W_{\sigma_2}^u)$.

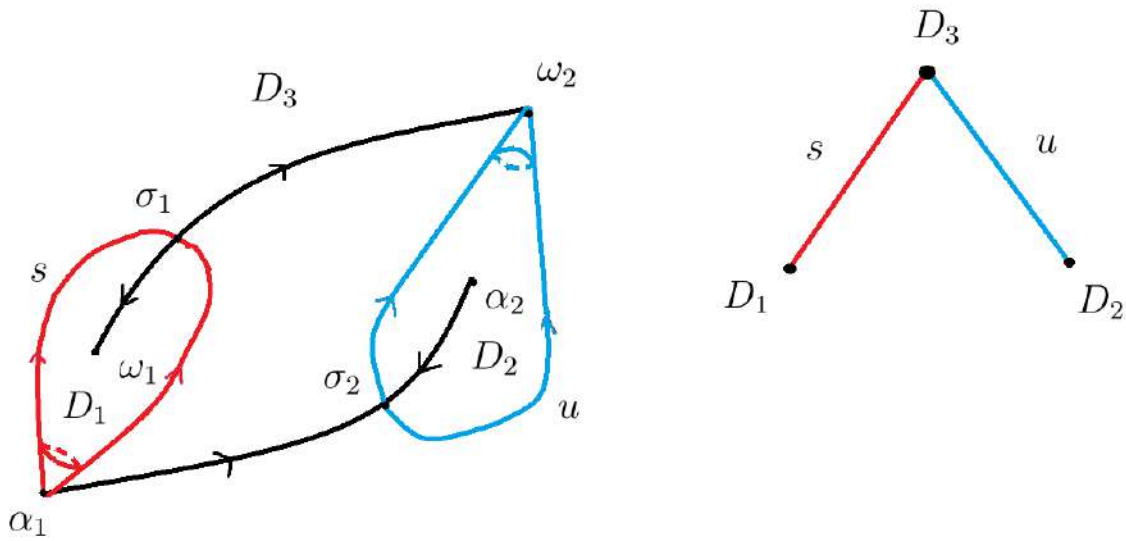


Рис. 1: Двухцветный граф диффеоморфизма f на S^3

Определение 1.1 *Двухцветным графом каскада $f \in G(M^3)$ назовем граф Γ_f со следующими свойствами:*

1. *множество $V(\Gamma_f)$ вершин графа Γ_f находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством \mathcal{D}_f , множество $E(\Gamma_f)$ ребер графа Γ_f находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством \mathcal{L}_f ;*
2. *вершины v_i, v_j инцидентны ребру $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие им области D_i, D_j имеют общую границу;*

3. ребро $e_{i,j}$ имеет цвет s (u) если оно соответствует сфере $cl W_{\sigma_1}^s \in \mathcal{L}_f$ ($cl W_{\sigma_2}^u \in \mathcal{L}_f$).

Определение 1.2 Двухцветные графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ каскадов $f, f' \in G(M^3)$ будем называть изоморфными, если существует биекция $\zeta : V(\Gamma_f) \rightarrow V(\Gamma_{f'})$, сохраняющая отношение смежности и цвет ребер.

Цель работы:

- выделить значимый класс каскадов с регулярной динамикой и трехмерным фазовым пространством, который допускает топологическую классификацию в комбинаторных терминах с использованием двухцветного графа;
- описать алгоритм построения канонического представителя каждого класса топологической сопряженности на множестве таких систем;
- получить оценку скорости различия двух таких графов.

Практическая значимость этих исследований заключается в том, что полученный инвариант будет реализован, а именно, в результате исследований будет предложен алгоритм, позволяющий строить системы, представляющие каждый класс сопряженности и обладающие заранее определенными свойствами - структурой множества периодических точек. Кроме того, будет проведена оценка скорости алгоритмов, которые различают комбинаторные инварианты этих систем.

В настоящей работе доказываются следующие результаты.

В разделе 3 доказывается теорема 1.

Теорема 1 Дiffeоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы Γ_f и $\Gamma_{f'}$ изоморфны.

Определение 1.3 Простой связный граф Γ , ребра которого окрашены в цвета s, u , называется допустимым, если он имеет $g \geq 0$ попарно различных простых циклов, на каждом цикле имеется по крайней мере по одному

ребру цвета s и по одному ребру цвета u , и никакое ребро не принадлежит двум циклам одновременно.

В силу следствия 2.2, доказываемого ниже, граф Γ_f любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ является допустимым. Таким образом, для предъявления канонического представителя каждого класса топологической сопряженности диффеоморфизмов из $G(M^3)$ достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 2 *Для любого допустимого графа Γ существует диффеоморфизм $f \in G(M^3)$, граф Γ_f которого изоморфен графу Γ посредством изоморфизма, сохраняющего раскраску ребер.*

Теорема 2 доказывается в разделе 4.

В разделе 5 доказывается следующая теорема, устанавливающая существование алгоритмов, различающих любые два допустимых двухцветных графа не больше чем за полиномиальное число шагов.

Теорема 3 *Пусть $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ — двухцветные графы диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ с одинаковым числом вершин и циклов, n — число вершин, g — число циклов. Если несущее многообразие является сферой S^3 , то $g = 0$ и существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ за время $O(n)$. Если M^3 отлично от сферы, то $g > 0$ и существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ за время $O(n^{O(g)})$.*

2 Свойства диффеоморфизмов из рассматриваемого класса

В этом разделе мы приводим ряд свойств диффеоморфизмов из рассматриваемого класса, которые будут использоваться при доказательстве основных результатов.

2.1 Топология несущего многообразия M^3

Пусть $f \in G(M^3)$. Обозначим через k_f число его седловых, через l_f — число узловых периодических точек и положим

$$g_f = (k_f - l_f + 2)/2.$$

Из [4] следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.1 Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда если $g_f = 0$, то многообразие M^3 диффеоморфно трехмерной сфере, если $g_f > 0$, то M^3 диффеоморфно связной сумме g_f копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

2.2 Схема диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ как полный топологический инвариант

Представим многообразие M^3 в виде объединения множеств $A_f = (\bigcup_{\sigma \in \Omega^1_f} W^u_\sigma) \cup (\bigcup_{\omega \in \Omega^0_f} \omega)$, $R_f = (\bigcup_{\sigma \in \Omega^2_f} W^s_\sigma) \cup (\bigcup_{\alpha \in \Omega^3_f} \alpha)$, $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f и через $p_f : V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ естественную проекцию. Так как группа $\{f^n|_{V_f}\}$ действует на многообразии V_f свободно и разрывно, то пространство \widehat{V}_f является многообразием, а естественная проекция $p_f : V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ является накрытием.

Проекция p_f индуцирует эпиморфизм $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ по следующему правилу. Пусть $\hat{c} \subset \widehat{V}_f$ — кривая, не гомотопная нулю в \widehat{V}_f , и $[\hat{c}] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ — класс гомотопической эквивалентности кривой \hat{c} . Выберем произвольную точку $\hat{x} \in \hat{c}$, обозначим через $p_f^{-1}(\hat{x})$ полный прообраз \hat{x} и зафиксируем точку $\tilde{x} \in p_f^{-1}(\hat{x})$. Поскольку p_f является накрытием, то существует единственный путь $\tilde{c}(t)$, начинающийся в точке \tilde{x} (т.е. $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$), который накрывает кривую \hat{c} (т.е. $p_f(\tilde{c}(t)) = \hat{c}$). Следовательно, существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $\tilde{c}(1) =$

$f^m(\tilde{x})$. Гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ эпиморфизм $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ ставит в соответствие число m .

Положим $\hat{L}_f^s = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} p_f(W_\sigma^s \setminus \sigma)$, $\hat{L}_f^u = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^2} p_f(W_\sigma^u \setminus \sigma)$.

Следуя работе [3], набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u, \eta_f)$ будем называть *схемой диффеоморфизма* $f \in G(M^3)$.

Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{V}_{f'}$ такой, что $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s$, $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^u) = \hat{L}_{f'}^u$ и $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$.

Из работы [6] вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.2 *Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

2.3 Свойства схемы диффеоморфизма $f \in G(M^3)$

Пусть \mathbb{S}_g обозначает ориентируемую поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода g .

Определение 2.1 *Будем называть схему S_f диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальной схемой, если существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_f : \widehat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ такой, что для каждой компоненты связности $\hat{\ell}$ множества $\hat{L}_f^s \cup \hat{L}_f^u$ найдется простая замкнутая дуга $c_\ell \subset \mathbb{S}_g$ такая, что $\hat{\psi}_f(\hat{\ell}) = c_\ell \times \mathbb{S}^1$.*

В [13] доказано, что тривиальность схемы диффеоморфизма Морса-Смейла, заданного на трехмерном многообразии, является необходимым и достаточным условием включения этого диффеоморфизма в топологический поток. Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.3 *Схема диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальна.*

Из тривиальности схемы, в частности, вытекает справедливость следующих фактов.

Предложение 2.1 Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда

1. ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразие произвольной неподвижной точки является сохраняющим ориентацию;
2. множество Ω_f состоит из неподвижных точек.

Доказательство: Докажем пункт 1. Пусть ω — стоковая периодическая точка диффеоморфизма f . Так как f включается в топологический поток F_ω^t , то ограничение f на множество W_ω^s является сдвигом F_ω^1 на единицу времени вдоль траекторий потока F_ω^t , следовательно, изотопно тождественному отображению (при помощи изотопии F_ω^t). Рассуждения для источниковой точки аналогичны. Поскольку W_ω^s является открытым трехмерным шаром, а многообразие M^3 ориентировано, то диффеоморфизм f сохраняет ориентацию многообразия M^3 .

Покажем, что ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразие произвольной седловой точки σ является сохраняющим ориентацию. Предположим противное. Возможны два случая: $\sigma \in \Omega_f^2$, $\sigma \in \Omega_f^1$. Пусть $\sigma \in \Omega_f^2$ — седловая точка периода m такая, что диффеоморфизм $f^m|_{W_\sigma^u}$ является обращающим ориентацию. Тогда существует гомеоморфизм $h : W_\sigma^u \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что $hf^m|_{W_\sigma^u} = a_-h$, где $a_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное отображение плоскости, задаваемое формулой $a_-(x_1, x_2) = (-2x_1, 2x_2)$.

Кольцо $K = \{(x_1, x_2) | 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ является фундаментальной областью действия a_- на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Пространство орбит $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/a_-$ этого действия получается склейкой компонент края кольца $K(h^{-1}(K))$ по диффеоморфизму $a_-(f)$, следовательно, гомеоморфно бутылке Клейна. Сле-

довательно, и пространство $\hat{\downarrow}_\sigma^u = (\bigcup_{i=1}^m f^i(W_\sigma^u \setminus \sigma))/f = p_f(\bigcup_{i=1}^m f^i(W_\sigma^u \setminus \sigma))$ гомеоморфно бутылке Клейна, что противоречит определению тривиальности схемы, согласно которому множество $\hat{\downarrow}_\sigma^u$ гомеоморфно тору.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\sigma \in \Omega_f^1$ и $f^m|_{W_\sigma^u}$ является меняющим ориентацию. Так как f в целом является сохраняющим ориентацию, то $f^m|_{W_\sigma^s}$ меняет ориентацию на W_σ^s , тогда рассуждениями, аналогичными изложенным выше, приходим к противоречию с тривиальностью схемы.

Докажем пункт 2. Пусть $\sigma \in \Omega_f^1$ — седловая точка периода m . Из определения тривиальной схемы следует, что множество $\hat{\downarrow}_\sigma^s = p_f(W_\sigma^s \setminus \sigma)$ гомеоморфно тору и существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_f : \hat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$ такой, что $\hat{\psi}_f(\hat{\downarrow}_\sigma^s) = c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s} \times \mathbb{S}^1$, где $c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s}$ — простая замкнутая кривая. Пусть $x \in c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s}$ — произвольная точка, тогда $\beta_x = \hat{\psi}_f^{-1}(x \times \mathbb{S}^1)$ — негомотопная нулю замкнутая кривая, принадлежащая тору $\hat{\downarrow}_\sigma^s$. Из определения тривиальной схемы следует, что множество $\tilde{\beta}_x = p_f^{-1}(\beta_x)$ является незамкнутой кривой, гомеоморфной $x \times \mathbb{R}$, и на дуге $\tilde{\beta}_x$ найдутся точки $\tilde{x}, f(\tilde{x})$ такие, что $\hat{\psi}_f(p_f(\tilde{x})) = \hat{\psi}_f(p_f(f(\tilde{x}))) = x$, следовательно, $f(W_\sigma^s \setminus \sigma) = W_\sigma^s \setminus \sigma$ и σ — неподвижная точка. Аналогично доказывается, что любая седловая точка $\sigma \in \Omega_f^2$ также является неподвижной. Отсюда и из пункта 1 следует, что каждая сепаратриса седловой периодической точки является f -инвариантной. Поскольку все стоковые и источниковые точки принадлежат замыканиям сепаратрис седловых периодических точек, из f -инвариантности сепаратрис следует, что все стоковые и источниковые точки диффеоморфизма f являются неподвижными. Таким образом, множество Ω_f состоит из неподвижных точек. \diamond

Отметим, что в силу [22] условия предложения 2.1 являются необходимыми условиями включения диффеоморфизма Морса-Смейла в топологический поток.

2.4 Взаимосвязь схемы и двухцветного графа

Пусть $r \in \mathbb{S}^1$ — произвольная точка и $\Sigma_{ft} \subset V_f$ — связная ориентируемая поверхность такая, что $p_f(\Sigma_{ft}) = \mathbb{S}_g \times \{r\}$.

Определение 2.2 Поверхность Σ_f будем называть *характеристической поверхностью* диффеоморфизма f .

Из тривиальности схемы и определения характеристической поверхности непосредственно вытекает следующий факт.

Предложение 2.2 Для любой сферы $\ell \subset L_f^s \cup L_f^u$ пересечение $\tilde{c}_\ell = \ell \cap \Sigma_f$ гомеоморфно окружности.

Лемма 2.1 Сфера $\ell \in L_f^s \cup L_f^u$ делит многообразие M^3 тогда и только тогда, когда окружность \tilde{c}_ℓ делит характеристическую поверхность.

Доказательство: Из определения множеств V_f, A_f, R_f и \mathcal{L}_f следует, что $M^3 \setminus \mathcal{L}_f = V_f \setminus \mathcal{L}_f$. Из тривиальности схемы S_f следует, что V_f гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{R}$. Отсюда и из предложения 2.2 следует, что для любого элемента $L \in \mathcal{L}_f$ и для любого $r \in \mathbb{R}$ множества $V_f \setminus L$ и $\mathbb{S}_g \times \{r\}$ являются связными либо несвязными одновременно, что доказывает справедливость леммы. \diamond

Непосредственно из леммы 2.1 вытекают следующие утверждения.

Следствие 2.1 Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда

1. Двухцветный граф Γ_f вкладывается в характеристическую поверхность таким образом, что:

(а) каждая компонента связности d множества $\Sigma_f \setminus (L_f^s \cup L_f^u)$ содержит в точности одну точку v , соответствующую вершине графа Γ_f ;

(b) если компоненты связности d_i, d_j множества $\Sigma_f \setminus (L_f^s \cup L_f^u)$ имеют общую граничную окружность $\ell_{i,j}$, то точки $v_i \in d_i, v_j \in d_j$ соединены гладкой дугой $e_{i,j}$, трансверсально пересекающей окружность $\tilde{c}_{\ell_{i,j}}$.

2. Граф Γ_f связан.

3. Граф $\Gamma_f \setminus e_{i,j}$ связан тогда и только тогда, когда множество $\Sigma_f \setminus \tilde{c}_{\ell_{i,j}}$ связно.

Следствие 2.2 Пусть $f^t \in G(M^3)$. Если $g_f = 0$, то граф Γ_{f^t} является деревом. Если $g_f > 0$, то граф Γ_{f^t} связан и имеет в точности g_f простых попарно различных циклов таких, что:

1. никакое ребро не принадлежит одновременно двум циклам;
2. каждый цикл графа Γ_{f^t} содержит как ребро, окрашенное в цвет s , так и ребро, окрашенное в цвет u .

Доказательство: Из определения рода ориентируемой поверхности следует, что максимальное число попарно непересекающихся замкнутых кривых, не делящих поверхность, равно роду этой поверхности. Отсюда и из пунктов 2, 3 следствия 2.1 непосредственно следует, что при $g_f = 0$ граф Γ_f является деревом. Пусть $g_f > 0$. Из определения характеристической поверхности следует, что многообразие $M^3 \setminus \Sigma_f$ имеет две компоненты связности $Q_a \supset A_f, Q_r \supset R_f$ такие, что A_f, R_f являются деформационными ретрактами замыканий $cl Q_a, cl Q_r$ множеств Q_a, Q_r соответственно. Отсюда следует, что каждое из множеств A_f, R_f содержит в точности g_f подмножеств, гомеоморфных окружности. Пусть $\sigma_1 \in A_f$ — седловая точка, принадлежащая подмножеству множества A_f , гомеоморфному окружности. Тогда $A_f \setminus \sigma_1 = A_f \setminus W_\sigma^s$

связно. Следовательно, $\Sigma_f \setminus W_\sigma^s$ связно. Тогда, с учетом того факта, что устойчивые многообразия разных седловых точек не пересекаются, найдется ровно g_f сфер из множества L_f^s , не делящих Σ_f . Отсюда, в силу следствия 2.1, граф Γ_f имеет в точности g_f ребер, окрашенных в цвет s , принадлежащих непересекающимся циклам. Аналогично доказывается, что граф Γ_f имеет в точности g_f ребер, окрашенных в цвет u , принадлежащих непересекающимся циклам. В тоже время, из определения рода поверхности следует, что не более чем g_f окружностей, являющихся следами сфер $L_f^s \cup L_f^u$, не делит поверхность Σ_f . Отсюда получаем, в силу следствия 2.1, что граф Γ_f имеет не более чем g_f непересекающихся циклов, что и требовалось доказать. \diamond

3 Граф как полный топологический инвариант для класса $G(M^3)$

Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены. Тогда существует гомеоморфизм $h : M^3 \rightarrow M^3$ такой, что $f' = h^{-1}fh$. Гомеоморфизм h отображает инвариантные многообразия диффеоморфизма f в инвариантные многообразия диффеоморфизма f' , откуда следует, что графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны. Таким образом, необходимость условий теоремы 1 доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ изоморфны и докажем, что диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены. В силу утверждения 2.2 достаточно доказать, что из наличия изоморфизма графов f, f' следует эквивалентность их схем $S_f, S_{f'}$.

Отметим, что в силу предложения 2.2 граф Γ_f имеет в точности g_f простых попарно непересекающихся циклов. Так как графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны, то $g_f = g_{f'} = g$. Аналогично [14][§3.4] показывается, что существует гомеоморфизм $h : \Sigma_f \rightarrow \Sigma_{f'}$ такой, что $h(\Sigma_f \cap L_f^\delta) = \Sigma_{f'} \cap L_{f'}^\delta, \delta \in \{s, u\}$. Докажем,

что существует гомеоморфизм $\hat{h} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ такой, что $\hat{h}(\hat{L}_f^\delta) = \hat{L}_{f'}^\delta, \delta \in \{s, u\}$. Пусть $\hat{\psi} : \hat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, \hat{\psi}' : \hat{V}_{f'} \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ — гомеоморфизмы, удовлетворяющие условию определения 2.1 и $r, r' \in \mathbb{S}^1$ — такие точки, что $p_f(\Sigma_f) = \mathbb{S}_2 \times \{r\}, p_{f'}(\Sigma_{f'}) = \mathbb{S}_g \times \{r'\}$. Обозначим через $\eta_{r'-r}$ поворот окружности \mathbb{S}^1 , перемещающий точку r' в точку r . Гомеоморфизм $h : \Sigma_f \rightarrow \Sigma_{f'}$, определенный на шаге 2, индуцирует гомеоморфизм $h_r : \mathbb{S}_g \times r \rightarrow \mathbb{S}_g \times r$ такой, что $p_f h_r = h p_{f'} \eta_{r'-r}$. Положим $\theta(x, r) = (x, h_r)$. Тогда соотношение $\hat{h} = \hat{\psi}'^{-1} \theta \hat{\psi}$ определяет искомый гомеоморфизм.

4 Реализация

Предложение 4.1 Пусть $\Gamma(g)$ — допустимый граф с g циклами. Тогда

1. граф $\Gamma(g)$ вкладывается в ориентируемую поверхность \mathbb{S}_g рода g ;
2. существует набор попарно непересекающихся гладко вложенных окружностей $c_1, \dots, c_k \subset \mathbb{S}_g$ со следующими свойствами:
 - (a) k равно числу ребер графа $\Gamma(g)$;
 - (b) для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ окружность c_i пересекает ровно одно ребро e_i графа $\Gamma(g)$, пересечение $c_i \cap e_i$ состоит из единственной точки, отличной от вершины графа $\Gamma(g)$;
 - (c) окружность c_i окрашена в цвет ребра e_i ;
 - (d) каждая компонента связности множества $\mathbb{S}_g \setminus \bigcup_{i=1}^k c_i$ содержит в точности одну вершину графа $\Gamma(g)$.

Доказательство: Докажем пункт 1 индукцией по числу g . Если $g = 0$, то граф $\Gamma(g)$ является деревом и, следовательно, является планарным и вкладывается в сферу $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_0$. Предположим, что при $g > 0$ любой допусти-

мый граф $\Gamma(g)$ вкладывается в поверхность \mathbb{S}_g и докажем, что допустимый граф $\Gamma(g+1)$ вкладывается в поверхность \mathbb{S}_{g+1} . Пусть ребро e принадлежит циклу графа $\Gamma(g+1)$ и вершины v, w инцидентны ребру e . Тогда граф $\Gamma'(g) = \Gamma(g+1) \setminus e$ связан и вкладывается в поверхность \mathbb{S}_g . Выберем два непересекающихся диска B_v, B_w , не пересекающиеся с вершинами графа $\Gamma(g)$, отличными от v, w и такие, что $v \in \text{int } B_v, w \in B_w$, приклеим к \mathbb{S}_g ручку по дискам B_v, B_w и соединим вершины v, w дугой, проходящей по ручке. В результате получим граф $\Gamma'(g+1)$, изоморфный графу $\Gamma(g+1)$, вложенный в поверхность \mathbb{S}_{g+1} .

Докажем пункт 2. Поскольку циклы графа $\Gamma(g)$ не пересекаются, то существует набор c_1, \dots, c_g попарно непересекающихся гладко вложенных в поверхность \mathbb{S}_g окружностей со следующими свойствами: а) каждая окружность $c_i, i \in \{1, \dots, g\}$ пересекает граф $\Gamma(g)$ в единственной точке, принадлежащей одному из его циклов, и отличной от вершины, б) существует набор попарно непересекающихся трубчатых окрестностей T_1, \dots, T_g такой, что многообразие $S' = \mathbb{S}_g \setminus \bigcup_{i=1}^g \text{int } T_i$ гомеоморфно поверхности, получаемой из сферы \mathbb{S}^2 удалением внутренности объединения $2g$ попарно непересекающихся двумерных дисков. Тогда любая окружность c' делит многообразие S' на две компоненты связности. Пусть e_i — ребро, пересекающееся с окружностью c_i . Тогда граф $\Gamma' = \Gamma(g) \setminus \bigcup_{i=1}^g e_i$ является деревом, и построение оставшихся окружностей проводится последовательно, начиная с ребер, инцидентных листьям дерева Γ' и заканчивая ребрами, инцидентными центральной вершине или вершинам. \diamond

Пусть $c_1, \dots, c_k \subset \mathbb{S}_g$ — окружности, удовлетворяющие заключению предложения 4.1. Перейдем к пространству $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ и для окружности $c_i(c_j)$, окрашенной в цвет $s(u)$ положим $\hat{\ell}^s = c_i \times \mathbb{S}^1, \hat{\ell}^u = c_j \times \mathbb{S}^1$. Обозначим через \hat{L}^s, \hat{L}^u

совокупности всех торов $\hat{\ell}^s, \hat{\ell}^u$ соответственно.

Построим диффеоморфизм $f \in G(M^3)$, схема которого эквивалентна тройке $\{\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, \hat{L}^s, \hat{L}^u\}$. Тогда двухцветный граф Γ_f диффеоморфизма f будет изоморфен допустимому графу Γ_g . Построение диффеоморфизма f проведем по шагам, следуя алгоритму, предложенному в [2][Proposition 2.2].

Шаг 1. *Определение вспомогательного диффеоморфизма $a_g : \mathbb{S}_g \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{R}$.*

Положим $a_g(x, r) = (x, r + 1)$. Для дуги $c_i \in \mathbb{S}_g$, окрашенной в цвет $\delta \in \{s, u\}$, положим $l^\delta = c_i \times \mathbb{R}$, обозначим через L^δ совокупность всех цилиндров l^δ и через $N_{L^\delta} = \{N_{l^\delta}\}$ множество попарно непересекающихся гладких трубчатых окрестностей цилиндров из множества L^δ таких, что $N_{l^\delta} = K_{c_i} \times \mathbb{R}$, где $K_{l^\delta} \subset \mathbb{S}_g$ — гладкое двумерное кольцо, содержащее окружность c_i .

Шаг 2. *Добавление седел индекса 1.* В пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим подмножество $\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 \leq 1\}$ и зададим на нем диффеоморфизм поток b формулой $b(x_1, x_2, x_3) = (2^{-1}x_1, 2^{-1}x_2, 2x_3)$. Положим $\hat{\mathbb{N}}^s = (\mathbb{U} \setminus Ox_3)/b$. По построению многообразие $\hat{\mathbb{N}}^s$ диффеоморфно $K \times \mathbb{S}^1$, где K — стандартное двумерное кольцо, то есть диффеоморфно $K_{l^\delta} \times \mathbb{S}^1$. Тогда для любого $l^s \in L^s$ существует диффеоморфизм $\mu_{l^s}^s : N_{l^s} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3)$, сопрягающий диффеоморфизмы $a_g|_{N_{l^s}}$ и $b|_{\mathbb{U} \setminus Ox_3}$. Пусть k^s — число всех элементов множества L^s . Обозначим через $\mu_s : N_{L^s} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{k^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_{l^s}^s$. Положим $Q^s = (\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}) \cup_{\mu_s} (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s})$. Пространство Q^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^s = (\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s})$ и обозначим через $p_s : \bar{Q}^s \rightarrow Q^s$ естественную проекцию. Положим $p_{s,1} = p_s|_{\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}}$, $p_{s,2} = p_s|_{\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s}}$. Определим диффеоморфизм \tilde{f}_s на многообразии Q^s формулой

$$\tilde{f}_s(x) = \begin{cases} p_{s,1}(a_g(p_{s,1}^{-1}(x))), & x \in p_{s,1}(\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}); \\ p_{s,2}(b(p_{s,2}^{-1}(x))), & x \in p_{s,2}(\mathbb{U} \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{k^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество диффеоморфизма \tilde{f}_s состоит из k^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице.

Шаг 3. *Добавление седел индекса 2.* Будем обозначать образы множеств L^u , N_{L^u} и их элементов относительно проекции p_s теми же буквами, что и оригиналы. Пусть k^u — число элементов множества L^u . Рассуждениями, аналогичными примененным на шаге 1, доказывается существование диффеоморфизма $\mu_{l^u}^u : N_{l^u} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3)$, сопрягающего диффеоморфизмы $\tilde{f}_s|_{N(l_i^u)}$ и $b^{-1}|_{\mathbb{U} \setminus Ox_3}$. Как и в шаге 2 обозначим через $\mu^u : N_{L^u} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{k^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_{l^u}^u$, и положим $Q^u = Q^s \cup_{\mu^u} (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u})$. Пространство Q^u является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^u = Q^s \cup (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u})$ и обозначим через $p_u : \bar{Q}^u \rightarrow Q^u$ естественную проекцию. Положим $p_{u,1} = p_u|_{Q^u}$, $p_{u,2} = p_u|_{\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u}}$. Определим диффеоморфизм \tilde{f}_u на многообразии Q^u формулой

$$\tilde{f}_u(x) = \begin{cases} p_{u,1}(\tilde{f}_s(p_{u,1}^{-1}(x))), & x \in p_{u,1}(Q^s); \\ p_{u,2}(b^{-1}(p_{u,2}^{-1}(x))), & x \in p_{u,2}(\mathbb{U} \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{k^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока \tilde{f}_u состоит из k^s седловых неподвижных точек с индексом Морса, равным единице, и k^u неподвижных точек с индексом Морса, равным двум.

Шаг 4. *Добавление стоков.* Обозначим через $W_{\Omega_{\tilde{f}_u}}^s$ объединение устойчивых многообразий всех неподвижных точек диффеоморфизма \tilde{f}_u , поло-

жим $R^s = Q^u \setminus W_{\Omega_{\tilde{f}_u}}^s$ и обозначим через $\rho_1^s, \dots, \rho_{n^s}^s$ компоненты связности множества R^s . Из конструкции следует, что каждая компонента ρ_i^s диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Отсюда следует, что существует диффеоморфизм $\nu_i^s : \rho_i^s \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, гладко сопрягающий $\tilde{f}_u|_{\rho_i^s}$ с диффеоморфизмом $a_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}}$, заданным формулой $a_0(x_1, x_2, x_3) = (2^{-1}x_1, 2^{-1}x_2, 2^{-1}x_3)$. Обозначим через $\nu^s : R^s \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus O x_3) \times \mathbb{Z}_{n^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\nu_1^s, \dots, \nu_{n^s}^s$. Положим $M^s = Q^u \cup_{\nu^s} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$. Пространство M^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{M}^s = Q^u \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$ и обозначим через $q_s : \bar{M}^s \rightarrow M^s$ естественную проекцию. Положим $q_{s,1} = q_s|_{Q^u}$, $q_{s,2} = q_s|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s}}$ и определим диффеоморфизм f_s на многообразии M^s формулой

$$f_s(x) = \begin{cases} q_{s,1}(\tilde{h}_u(q_{s,1}^{-1}(x))), & x \in q_{s,1}(Q^u); \\ q_{s,2}(a_0(q_{s,2}^{-1}(x))), & x \in q_{s,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{n^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока f_s состоит из k^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, k^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум и n^s стоковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 5. Добавление источников. Положим $R^u = M^s \setminus W_{\Omega_{\tilde{h}_s}}^u$ и обозначим через $\rho_1^u, \dots, \rho_{n^u}^u$ компоненты связности множества R^u . Каждая компонента ρ_i^u диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и диффеоморфизм $f_s|_{\rho_i^u}$ гладко сопряжен с диффеоморфизмом $a_0^{-1}|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν_i^u . Обозначим через $\nu^u : R^u \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus O x_3) \times \mathbb{Z}_{n^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\nu_1^u, \dots, \nu_{n^u}^u$. Положим $M^u = M^s \cup_{\nu^u} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$. Пространство M^u является гладким связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Положим $\bar{M}^u = M^s \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$ и обозначим через $q_u : \bar{M}^u \rightarrow M^u$ естественную проекцию. Положим $q_{u,1} = q_u|_{M^s}$, $q_{u,2} = q_u|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u}}$. Определим

диффеоморфизм f_u на многообразии M^u формулой

$$f_u(x) = \begin{cases} q_{u,1}(f_s(q_{u,1}^{-1}(x))), & x \in q_{u,1}(M^s); \\ q_{u,2}(a_0^{-t}(q_{u,2}^{-1}(x))), & x \in q_{u,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{n^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество диффеоморфизма f_u состоит из k^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, k^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум, n^s стоковых неподвижных гиперболических точек и n^u источниковых неподвижных гиперболических точек, а его ограничение на множество V_f топологически сопряжено с потоком a_g , построенном на первом шаге. Отсюда следует, что схема диффеоморфизма f_u эквивалентна тройке $\{\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, L^s, L^u\}$, следовательно, диффеоморфизм f_u является искомым.

5 Оценка скорости алгоритмов сравнения двухцветных графов

Результаты этого раздела основываются на следующем утверждении, доказанном в [26], [19].

Утверждение 5.1 *Пусть Γ_1, Γ_2 – графы с одинаковым числом вершин n , вкладывающиеся в поверхность рода $g \geq 0$. Тогда существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов Γ_1, Γ_2 за время $O(n^{O(g)})$. Если $g = 0$, то существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов Γ_1, Γ_2 за время $O(n)$.*

Для сведения проблемы различения двухцветных графов к утверждению 5.1 будем пользоваться идеями, предложенными Д.С. Малышевым в ра-

боте [16]. Справедливость теоремы 3 будет следовать из утверждения 5.1 и следующего предложения.

Предложение 5.1 *Для любого допустимого двухцветного графа Γ с g циклами существует неоснащенный граф Γ' , вложенный в поверхность \mathbb{S}_g , и такой, что допустимые графы Γ_1, Γ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы Γ'_1, Γ'_2 .*

Доказательство: Пусть теперь Γ_1, Γ_2 – допустимые двухцветные графы с одинаковым числом вершин n и одинаковым числом циклов g . К каждой вершине графов Γ_1, Γ_2 добавим по четыре висячие вершины. Далее, удалим каждое ребро $e_i = (a_i, b_i)$ цвета u , добавим ребра $(a_i, c_i), (b_i, c_i)$ и висячую вершину, смежную с c_i . Для ребра цвета s делаем то же самое, только добавим две висячие вершины, каждая из которых смежная с c_i (см. рис 2). В результате этих действий получим графы Γ'_1 и Γ'_2 , имеющие g циклов.

Осталось доказать, что графы Γ'_1 и Γ'_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы Γ_1 и Γ_2 . Необходимость следует из построения графов Γ'_1 и Γ'_2 . Покажем, что из изоморфности Γ'_1 и Γ'_2 следует изоморфность Γ_1 и Γ_2 . Действительно, вершины графов Γ'_1 и Γ'_2 степени не менее единицы и не более четырех соответствуют ребрам Γ_1 и Γ_2 , причем степень вершины однозначно определяет цвет ребра. Для определения вершины графа Γ_i нужно найти вершину графа Γ'_i степени выше четырех и удалить все соседние с ней висячие вершины и смежные им ребра. Таким образом, по графу Γ'_i однозначно восстанавливается граф Γ_i .

Поскольку связный граф с n вершинами и g циклами имеет ровно $n - 1 - g$ ребер, то графы Γ'_1 и Γ'_2 имеют не более $n + 4n + 4(n - 1 - g) < 9n$ вершин. Следовательно, предложение 5.1 справедливо и для двухцветных графов Γ_1, Γ_2 .

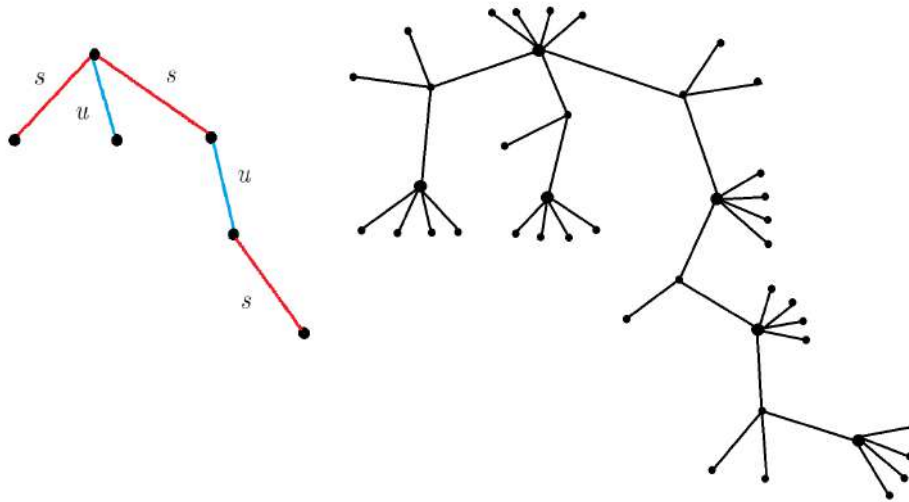


Рис. 2: Двухцветный граф Γ и соответствующий ему неоснащенный граф Γ'

6 Заключение

В работе выделен содержательный класс каскадов с регулярной динамикой и трехмерным фазовым пространством, допускающих топологическую классификацию в комбинаторных терминах, построен канонический представитель каждого класса топологической сопряженности на множестве таких систем и получена оценка эффективности комбинаторного инварианта. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Дiffeоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы Γ_f и $\Gamma_{f'}$ изоморфны.

Теорема 2. Для любого допустимого графа Γ существует диффеоморфизм $f \in G(M^3)$, граф Γ_f которого изоморфен графу Γ посредством изоморфизма, сохраняющего раскраску ребер.

Теорема 3. Пусть $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ — двухцветные графы диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ с одинаковым числом вершин и циклов, n — число вершин, g — число циклов. Если несущее многообразие является сферой S^3 , то $g = 0$ и существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ за время $O(n)$. Если M^3 отлично от сферы, то $g > 0$ и существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ за время $O(n^{O(g)})$.

Список литературы

- [1] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I, II // Горький: ГГУ. – 1987. – С. 24-32.
- [2] Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds // *Topology*. – 2004. – Т. 43. – №. 2. – С. 369-391.
- [3] Bonatti C., Grines V. Z. Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // *Journal of dynamical and control systems*. – 2000. – Т. 6. – №. 4. – С. 579-602.
- [4] Bonatti C. et al. Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // *Topology and its Applications*. – 2002. – Т. 117. – №. 3. – С. 335-344.
- [5] Bonatti C., Grines V., Pochinka O. Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds. – 2019.
- [6] Бонатти К., Гринес В. З., Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // *Труды Математического института имени В.А. Стеклова*. – 2005. – Т. 250. – №. 0. – С. 5-53.
- [7] Brouwer L. E. J. Uber abbildung von mannigfaltigkeiten // *Mathematische annalen*. – 1911. – Т. 71. – №. 1. – С. 97-115.
- [8] Brown M. A proof of the generalized Schoenflies theorem. – 1960.

- [9] Brown M. Locally flat imbeddings of topological manifolds //Annals of Mathematics. – 1962. – С. 331-341.
- [10] Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях //Математические заметки. – 1993. – Т. 54. – №. 3. – С. 3-17.
- [11] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три //Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований. – 2011.
- [12] Гринес, В. З., Жужома, Е. В., Медведев, В. С., Починка, О. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2010. – Т. 271. – №. 0. – С. 111-133.
- [13] Гринес В. З. и др. О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток //Математический сборник. – 2012. – Т. 203. – №. 12. – С. 81-104.
- [14] Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме $S^{n-1} \times S^1$ //Математический сборник. – 2023. – Т. 214. – №. 5. – С. 97-127.
- [15] Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V. Dynamical systems on 2-and 3-manifolds. Switzerland. – 2016.

- [16] Grines V., Malyshev D., Pochinka O., Zinina S. Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms //Regular and Chaotic Dynamics. – 2016. – Т. 21. – С. 189-203.
- [17] Grobman D. M. Homeomorphism of systems of differential equations //Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1959. – Т. 128. – №. 5. – С. 880-881.
- [18] Jordan C. Sur les assemblages de lignes. – 1869.
- [19] Miller G. Isomorphism testing for graphs of bounded genus //Proceedings of the twelfth annual ACM symposium on Theory of computing. – 1980. – С. 225-235.
- [20] Junior J. P., De Melo W. Geometric theory of dynamical systems: an introduction. – Springer-Verlag, 1982.
- [21] Палис Ж., Димелу В. Геометрическая теория динамических систем. – 1986.
- [22] Palis J., Smale S. Structural stability theorems //The Collected Papers of Stephen Smale: Volume 2. – 2000. – С. 739-747.
- [23] Pixton D. Wild unstable manifolds //Topology. – 1977. – Т. 16. – №. 2. – С. 167-172.
- [24] Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию. – 1974.
- [25] Smale S. Morse inequalities for a dynamical system. – 1960.
- [26] Hopcroft J. E., Wong J. K. Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (preliminary report) //Proceedings of the sixth annual ACM symposium on Theory of computing. – 1974. – С. 172-184.
- [27] Хирш М. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – Т. 280.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Солдаткина Константина Алексеевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Гиперхаотическая динамика трехмерных эндоморфизмов» являются: предложенные сценарии возникновения гиперхаотических аттракторов с тремя положительными показателями Ляпунова, а также сценарий гомоклинического аттрактора, содержащего неподвижную точку типа $(0, 3)$, то есть с тремя мультипликаторами по модулю больше единицы.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Казаковым Алексеем Олеговичем, профессором кафедры математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Нижегородского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьевки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 13.06.2023 г. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись



Солдаткин Константин Алексеевич

3 июня 2023 г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук
Программа подготовки бакалавров по направлению 01.03.01
Математика

Солдаткин Константин

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Гиперхаотическая динамика трехмерных
эндоморфизмов

Руководитель работы:
Д. физ.-мат. наук, профессор
Казаков Алексей Олегович

Нижний Новгород, 2023 г.

Содержание

1 Введение	2
2 Устойчивость неподвижных точек и основные бифуркации	4
3 Двупараметрический анализ	7
4 Однопараметрический бифуркационный анализ	9
5 Гомоклинический аттрактор	15
6 Заключение	18

1 Введение

Гиперхаотические системы привлекают внимание исследователей из-за их сложного поведения и широкого спектра приложений в различных областях науки. В данной работе рассматривается трехмерный эндоморфизм, который является примером гиперхаотической системы. В теории дискретных отображений эндоморфизмы могут проявлять сложное поведение, включая хаос и гиперхаос, что делает их интересными объектами для исследования.

Цель данной работы – изучить гиперхаотические аттракторы, возникающие в трехмерном эндоморфизме, и описать сценарии их возникновения. Результаты исследования могут быть полезными для понимания сложных динамических систем и их приложений в различных областях. Термин «гиперхаотический аттрактор» был введен Рёсслером в [4] для странных аттракторов с (по крайней мере) двумя направлениями экспоненциальной неустойчивости. Гиперхаотические аттракторы характеризуются наличием более одного положительного показателя Ляпунова, этот факт обычно устанавливается численным экспериментом.

Недавно в статье [5] рассматривались сценарии возникновения гиперхаотических аттракторов. Был предложен простейший трехмерный диффеоморфизм Мира:

$$\begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = z, \\ \bar{z} = M_1 + Bx + M_2z - y^2 \end{cases}$$

Эта карта является хорошо изученной «гомоклинической картой», которая была введена в [10, 11], см. также [12, 13, 14]. Также в работе рассмотрели двумерный эндоморфизм Мира $\bar{y} = z, \bar{z} = M_1 + M_2z - y^2$. К. Мира [6] ввел и изучил этот двумерный эндоморфизм еще в 1960 году. Поэтому, следуя [7], трехмерный диффеоморфизм, продемонстрированный выше, называют отобра-

жением Мира. Авторы данной статьи [5] отмечали, что для отображений можно изучать гиперхаос в эндоморфизмах меньшей размерности. Более того, предложенные авторами сценарии показали себя как универсальные, они реализовались в четырехмерных потоках и других моделях [3] и [8]. Среди недавних исследований отображения Мира стоит также отметить работы [17, 18, 19], где представлены обширные теоритические и численные исследования регулярной и хаотической динамики.

Если теория гиперхаотических аттракторов, обладающих двумя положительными ляпуновскими показателями, считается достаточно изученной, то до недавнего времени было совершенно непонятно, как могут возникать аттракторы с тремя положительными показателями. Также неизвестны простейшие модели (отображения) минимальной размерности, допускающие такие аттракторы.

В настоящей работе мы исследуем отображение Канеко [2]:

$$\begin{cases} \bar{x} = Ax + (1 - A)(1 - Dy^2), \\ \bar{y} = z, \\ \bar{z} = x \end{cases} \quad (1.1)$$

и рассматриваем сценарии возникновения хаотических аттракторов с тремя положительными показателями Ляпунова. В частности, мы демонстрируем, что такие сценарии могут возникать в результате тройных каскадов бифуркаций удвоения периода и чередующихся бифуркаций удвоения периода с бифуркацией Неймарка–Сакера.

А также мы рассмотрим сценарий возникновения гомоклинического аттрактора нового типа, содержащего вполне неустойчивую точку. Гомоклинический аттрактор – это аттрактор, который содержит только одну неподвижную точку см. [15, 16]. Напомним, что в такой точке множители Якоби являются одновременно стабильными и нестабильными.

2 Устойчивость неподвижных точек и основные бифуркации

В этом разделе мы изучаем основные бифуркации и устойчивость неподвижных точек трехмерного отображения Канеко. А также построим диаграмму, на которой отобразим основные бифуркационные кривые и область устойчивости неподвижной точки. Эндоморфизм содержит две неподвижные точки $O_+ = (x_+, y_+, z_+)$ и $O_- = (x_-, y_-, z_-)$ с координатами:

$$O_{\pm} = x_0 = y_0 = z_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4D}}{2D}$$

Можно заметить, что существование этих точек зависит от того, является ли корневое выражение неотрицательным. Далее основные сценарии будут связаны с неподвижной точкой O_+ . Матрицей Якоби для данной системы будет являться матрица вида:

$$J = \begin{pmatrix} A & 2(A-1)Dy_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее найдем основные бифуркации, составив характеристическое уравнение:

$$|(J - \lambda E)| = \lambda^3 - A\lambda^2 - 2(A-1)Dy_0 = 0$$

Благодаря формулам Виета составляем следующую систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = A, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2(A-1)Dy_0 \end{cases}$$

1. Бифукация удвоения периода возникает, когда неподвижная точка становится неустойчивой и около нее рождается точка периода 2. Условием бифуркации

является равенство одного из мультипликаторов -1.

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = A + 1, \\ \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 \lambda_3 = -2(A - 1)Dy_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$D = \frac{1}{(1 - A)^2} - \frac{1}{4}, \text{ если } D \geq -\frac{1}{4}$$

2. В результате седло-узловой бифуркации в системе появляется седло-узел, который в дальнейшем распадается на устойчивую и неустойчивые точки.

Данная бифуркация происходит, когда $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = A - 1, \\ \lambda_2 \lambda_3 = -(\lambda_2 + \lambda_3) \\ -\lambda_2 \lambda_3 = 2(1 - A)Dy_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - 1) = 2D(1 - A)y_0 \Rightarrow \pm\sqrt{1 + 4D} = \frac{A - 1}{1 - A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{(1 - A)^2} - \frac{1}{4} \Rightarrow D = -\frac{1}{4}$$

3. Бифуркации Неймарка-Сакера возникает, когда у неподвижной точки пара мультипликаторов становится комплексно-сопряжёнными, модуль которых больше 1 ($\lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$):

$$\begin{cases} 2 \cos \phi + \lambda_3 = A - 1, \\ 1 + 2 \cos \phi \lambda_3 = 0 \\ 2(1 - A)Dy_0 = -\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3^2 - A\lambda_3 - 1 = 0, \\ \lambda_3 = -2(1 - A)Dy_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2} = -2D(1 - A)y_0 = -(-1 \pm \sqrt{1 + 4D})(1 - A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3A - 2 \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2(A - 1)} = \pm \sqrt{1 + 4D}$$

$$D = \frac{3A^2 - 2A + 2 \pm (3A - 2)\sqrt{A^2 + 4}}{8(A - 1)^2}$$

$$A \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty), \text{ если } y_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4D}}{2D}$$

$$A \in (-\infty, 1) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right), \text{ если } y_0 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4D}}{2D}$$

Отообразим кривые, полученные аналитически, с кривыми, посчитанными с помощью пакета MatContM на карте параметров (A, D) см. рис. 2.1. Область устойчивости точки O_+ ограничена бифуркационными кривыми PD^1 и NS^1 :

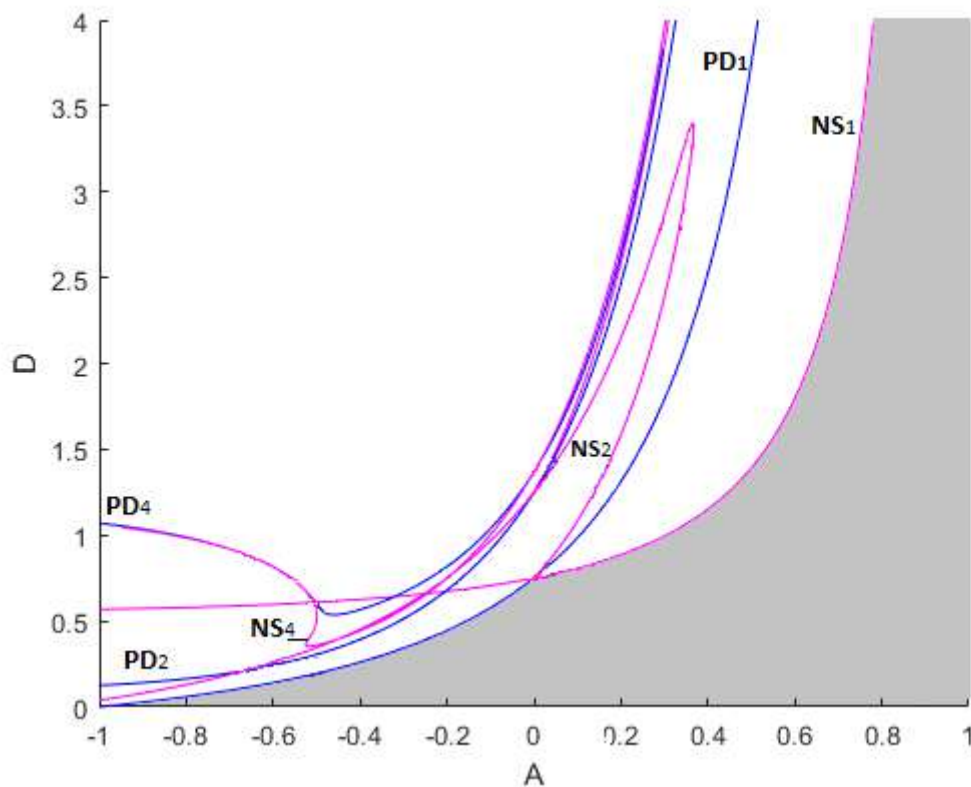


Рис. 2.1: Бифуркационные кривые для отображения Канеко. Кривые NS,PD соответствуют бифуркациям Неймарка-Сакера и удвоения периода. В серый цвет окрашена область устойчивости точки O_+ .

3 Двупараметрический анализ

В этой части работы мы проведем двупараметрический анализ, построим бифуркационную диграмму со схематично отмеченными точками и карту ляпуновских показателей. На рис. 3.2 для вычисления показателей Ляпунова мы берем орбиту на аттракторе и оцениваем ее показатели на 200000 итераций. В зависимости от значений LE мы используем следующую цветовую кодировку: синий - периодический режим ($L_1 < 0$); зеленый - квазипериодический режим ($L_1 = 0, L_2 < 0$); желтый - хаотические аттракторы ($L_1 > 0, L_2 < 0$); красный - гиперхаос с двумя положительными показателями Ляпунова ($L_1 > 0, L_2 > 0$); серый - гиперхаос с тремя положительными показателями Ляпунова ($L_1 > 0, L_2 > 0, L_3 > 0$). Стоит еще раз отметить, что интересующие нас режимы связаны с неподвижной точкой O_+

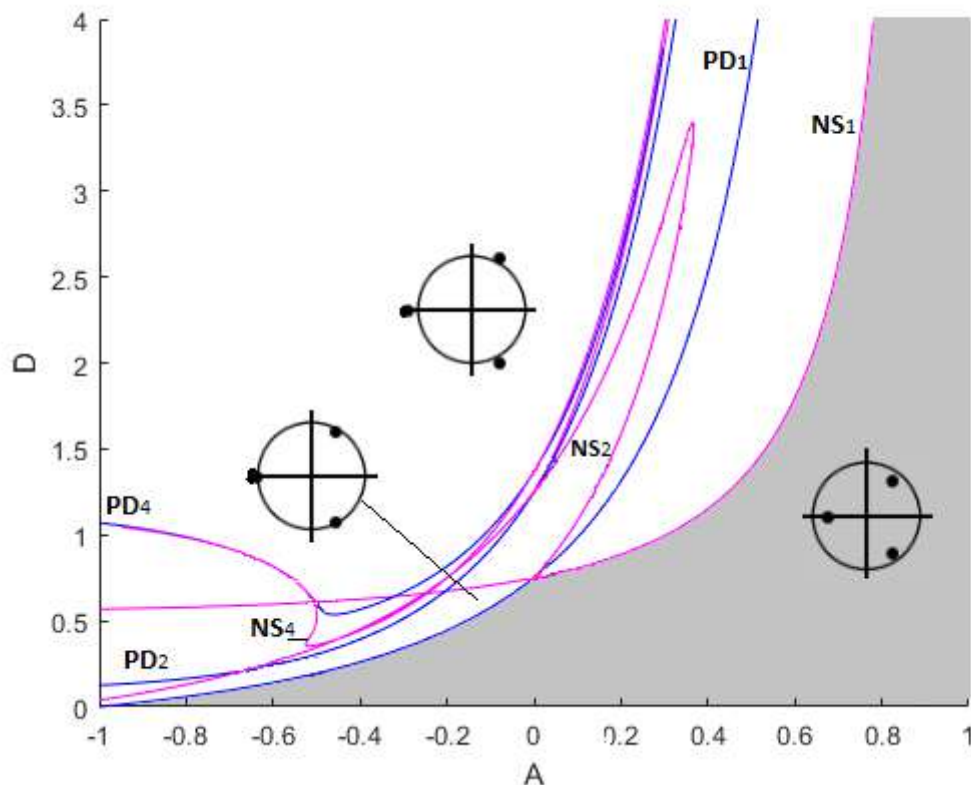


Рис. 3.1: Бифуркационная диаграмма для карты (1). Кривые удвоения периода и Неймарка-Сакера обозначены PD, NS соответственно. На графике выделена область, в которой система устойчива. Также представлены точки, расположенные вблизи единичных окружностей на компл. пл-ти, которые схематически показывают расположение мультипликаторов O_+ в различных областях.

На рис. 3.2 пунктирной линией отмечен маршрут EF, проходящий через интересующую нас серую область, в которой все три показателя становятся положительными.

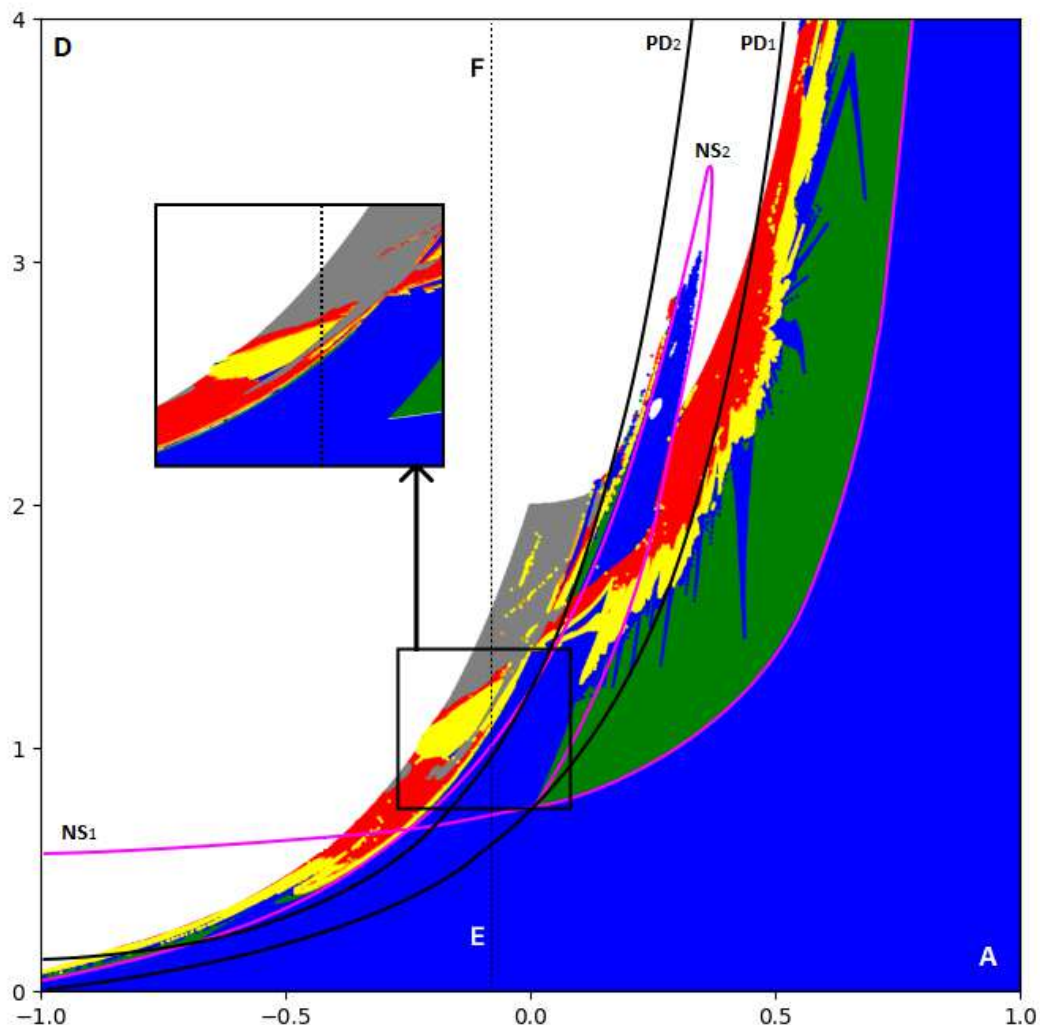


Рис. 3.2: Диаграмма спектра ляпуновских показателей для отображения (1). Наложенная на кривые бифуркаций SN^1 , PD^1 , SN^2 и PD^2 . Мы используем следующую цветовую кодировку: синий – периодический режим ($L_1 < 0$); зеленый – квазипериодический режим ($L_1 = 0, L_2 < 0$); желтый - хаотические аттракторы ($L_1 > 0, L_2 < 0$); красный – гиперхаос с двумя положительными показателями Ляпунова ($L_1 > 0, L_2 > 0$); серый – гиперхаос с тремя положительными показателями Ляпунова ($L_1 > 0, L_2 > 0, L_3 > 0$).

4 Однопараметрический бифуркационный анализ

В этом разделе мы выполним однопараметрический бифуркационный анализ эндоморфизма Канеко. Зафиксировав параметр $A = -0.11$, будем двигаться вдоль маршрута EF и рассмотрим бифуркации, которые приводят к возникновению гиперхаотической динамики.

Сценарий начинается с бифуркации удвоения периода, после которой в системе рождается неподвижная точка периода 2. После периодическая точка претерпевает вторую бифуркацию удвоения: неподвижная точка периода 4. Потом мы проходим через бифуркацию Неймарка-Сакера и точка периода 4 становится типа $(1, 2)$ с одномерно устойчивым и двумерно неустойчивыми многообразиями. Вокруг нее возникает четырехкомпонентная инвариантная кривая [4.1a](#). Инвариантная кривая хаотизируется, и образуется гиперхаотический аттрактор с двумя положительными показателями Ляпунова [4.1b](#). При дальнейшем увеличении параметра D мы приходим к гиперхаотическому аттрактору с тремя показателями Ляпунова см. рис. [4.1d](#). На пути к этому аттрактору точки периода 2 и периода 4, участвующие в этом сценарии, становятся вполне неустойчивыми и становятся частью этого аттрактора, это можно увидеть на рис. [4.1\(g\)-\(h\)](#). Более подробный сценарий от устойчивой неподвижной точки до гиперхаотического аттрактора с тремя положительными ляпуновскими показателями можно увидеть на рис. [4.2](#).

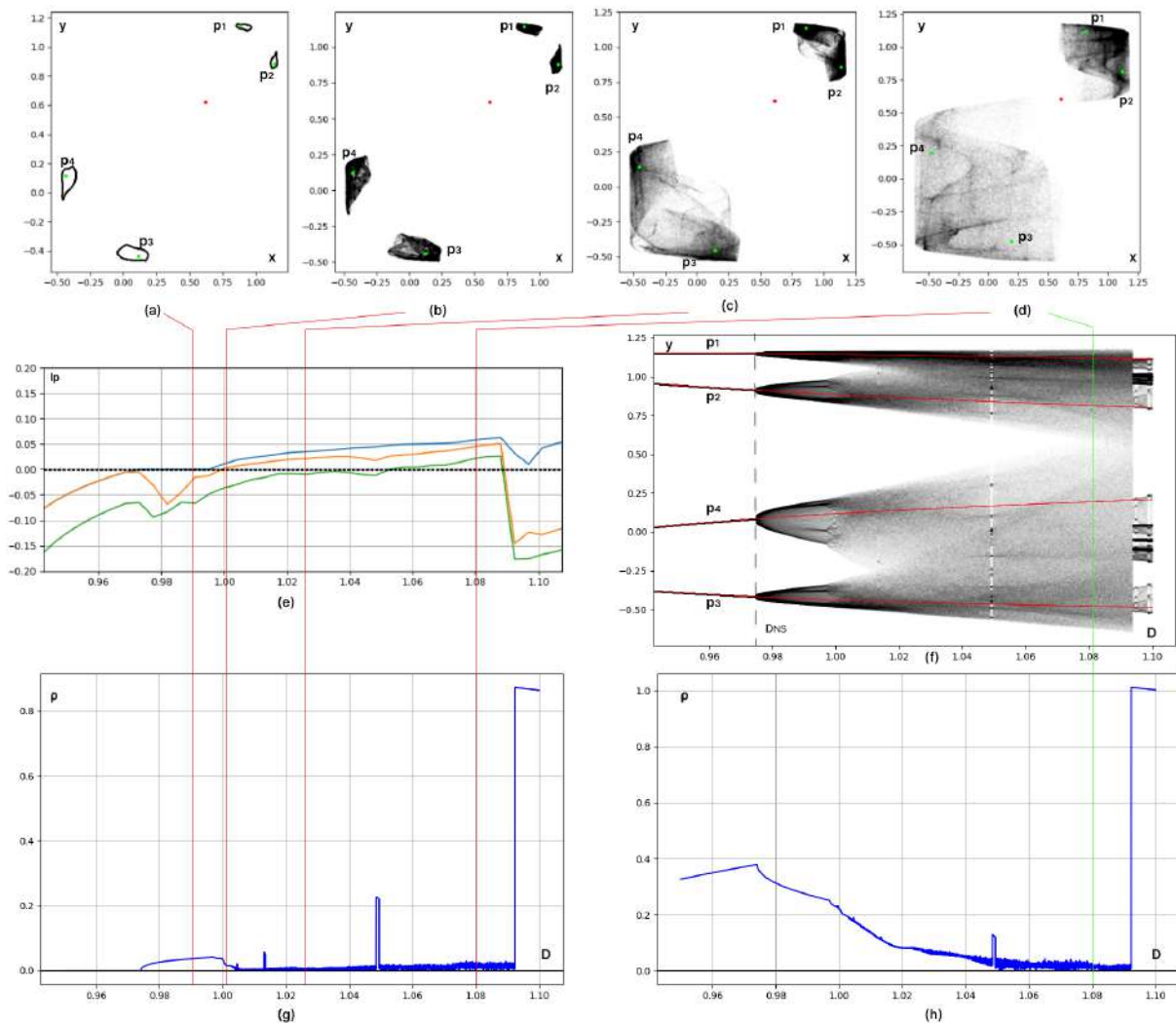


Рис. 4.1: Развитие аттрактора вдоль маршрута EF , указанного на рис. 3.2; (a) – (d) – проекции аттракторов на плоскость (x, y) при $D = 0.99, D = 1.003, D = 1.025, D = 1.08$; (g)– (h) – графики расстояния от точки p_1 до аттрактора и от неподвижной точки O_+ до аттрактора; На (e) продемонстрированы ляпуновские показатели, они показывают, что при $D < 1.06$ образуется гиперхаотический аттрактор; На (f) бифуркационное дерево для точки периода 4. Этот рисунок показывает, что точка 4 претерпевает бифуркацию Неймарка-Сакера и хаотизируется, а аттрактор, развивающийся из этой точки, впоследствии затягивает образовавшиеся периодические точки типа $(0, 3)$.

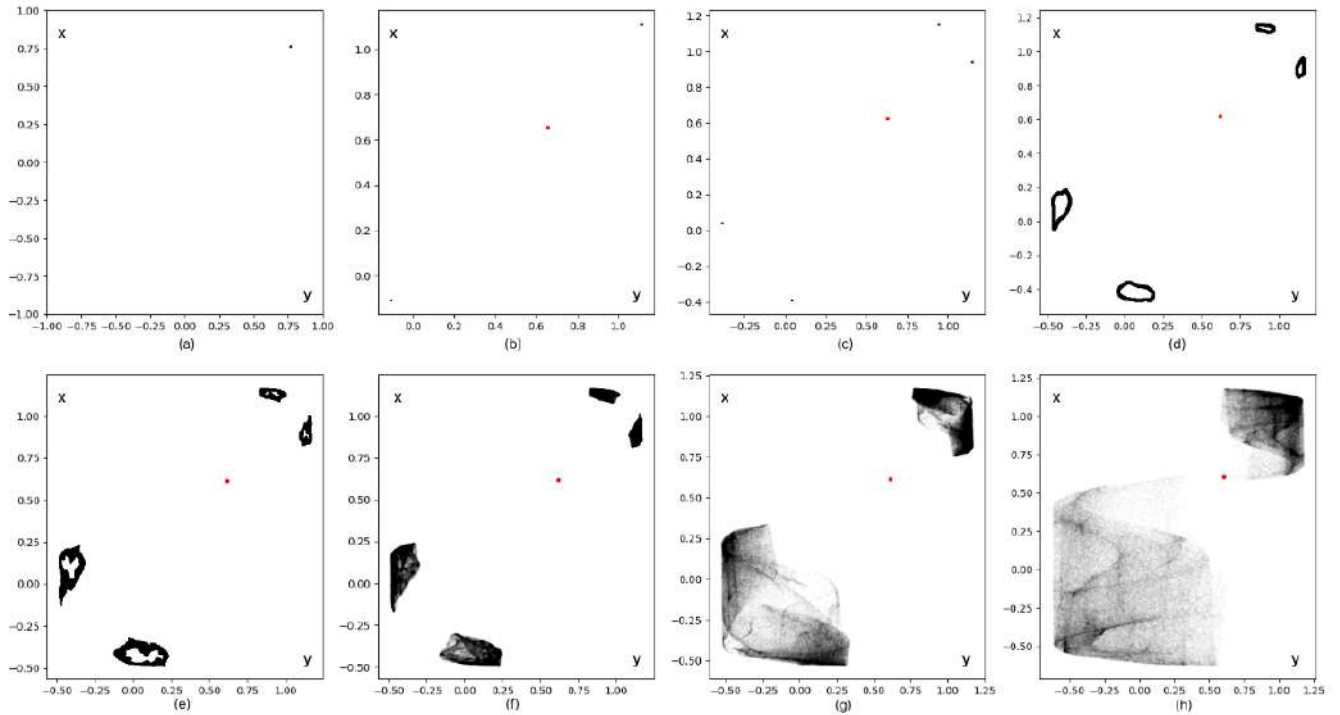


Рис. 4.2: Фазовые портреты вдоль пути EF . На рисунках (a) – (c) происходит удвоение периодических точек. Далее на (d) – (e) образуется четырехкомпонентная инвариантная кривая, и она хаотизируется. На рис.(f) мы наблюдаем четырехкомпонентный гиперхаотический аттрактор с двумя положительными показателями Ляпунова. Дальше аттрактор становится двухкомпонентным и его третье направление также становится экспоненциально неустойчивым рис.(g) – (h).

После $D = 1.09$ гиперхаотический аттрактор претерпевает кризис и траектория уходит на сосуществующий аттрактор. Это можно увидеть на рисунке [4.3](#). Образование гиперхаотического аттрактора после кризиса происходит по аналогичному сценарию.

Теперь зафиксируем $A = 0.05$ и рассмотрим возникновение гиперхаотической динамики вдоль нового маршрута MN . Этот путь тоже проходит через серую область гиперхаоса на карте ляпуновских показателей см. рисунок [4.4](#) но отличием этого сценария будет заключаться в том, что устойчивая точка O_+ пройдет сначала через бифуркацию Неймарка-Сакера.

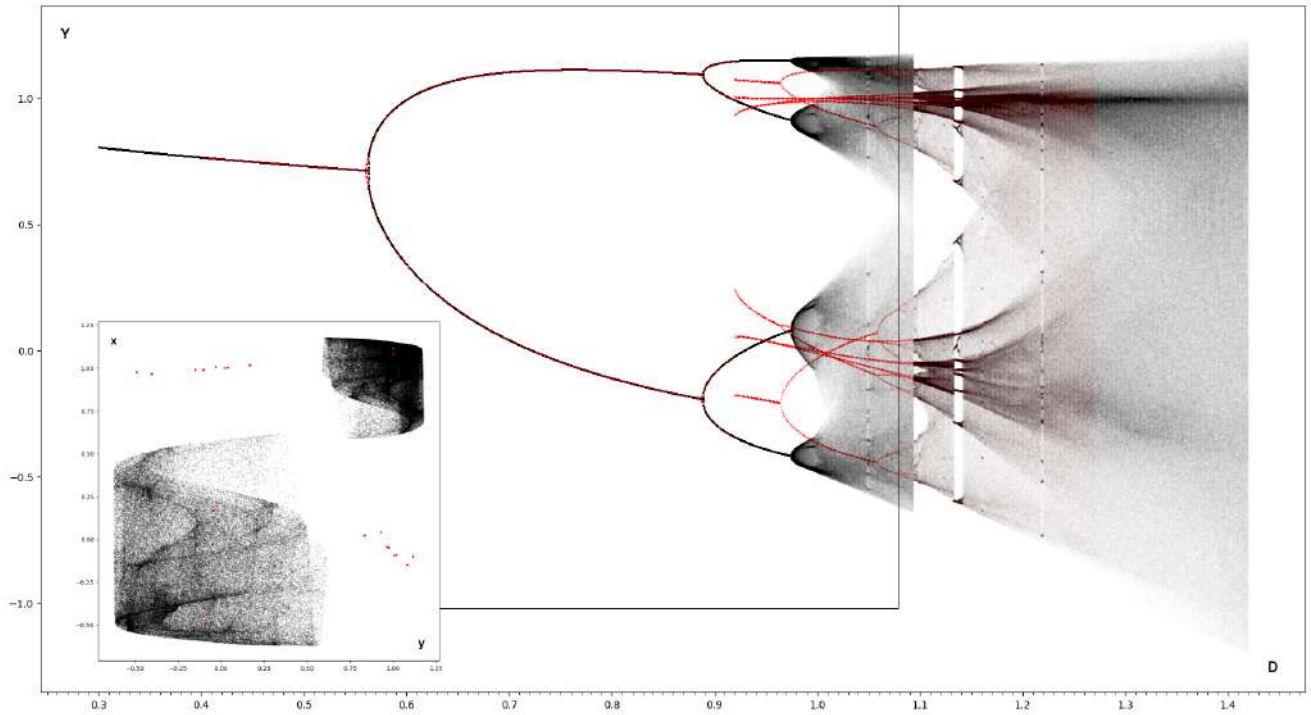


Рис. 4.3: Бифуркационное дерево вдоль пути EF . Красный аттрактор - аттрактор, который сосуществует с гиперхаотическим. Фазовый портрет показывает бистабильность в системе.

На рисунках 4.5(g) и 4.5(h) показаны соответственно бифуркационное дерево и график спектра показателей Ляпунова вдоль пути MN . Устойчивая неподвижная точка проходит бифуркацию Неймарка-Сакера, и возникает квазипериодический режим, который соответствует замкнутой устойчивой инвариантной кривой см. рис. 4.5(a), а точка O_+ становится седловой типа $(1, 2)$. Кривая деформируется, теряя свою гладкость, после чего мы попадаем в область резонанса и наблюдаем точку периода 6 см. рис. 4.5(b)-(c). Данная точка проходит каскад бифуркаций удвоения периода и хаотизируется, образуя гиперхаотический аттрактор с двумя положительными ляпуновскими показателями см. рис. 4.5(d). После компоненты аттрактора сливаются, и мы приходим к гиперхаотическому аттрактору с тремя направлениями экспоненциальной неустойчивости рис. 4.5(e).

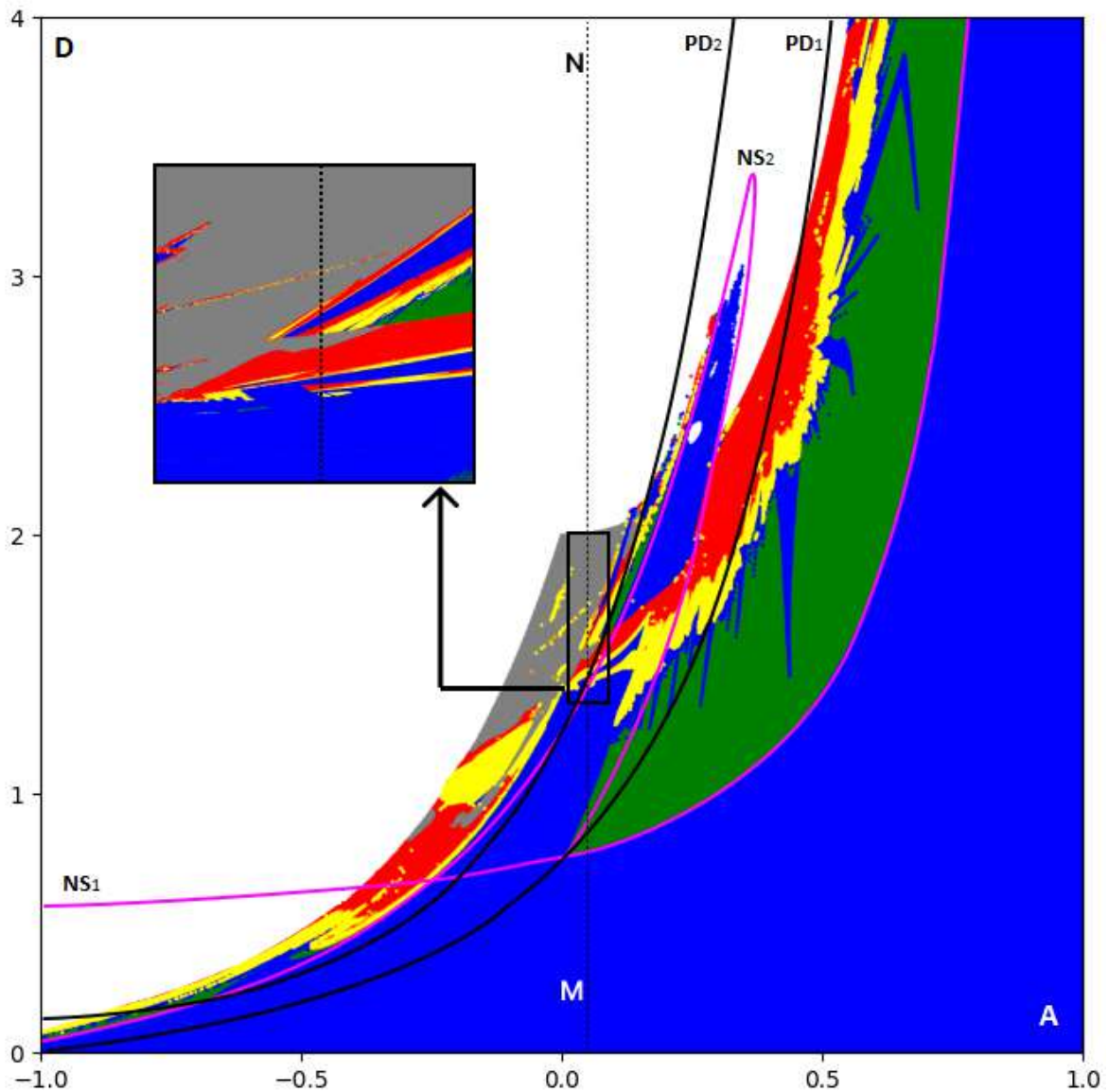


Рис. 4.4: Диаграмма спектра ляпуновских показателей для отображения (1), наложенная на кривые бифуркаций SN^1 , PD^1 , SN^2 и PD^2 . Мы используем следующую цветовую кодировку: синий - периодический режим ($L_1 < 0$); зеленый - квазипериодический режим ($L_1 = 0$, $L_2 < 0$); желтый - хаотические аттракторы ($L_1 > 0$, $L_2 < 0$); красный - гиперхаос с двумя положительными показателями Ляпунова ($L_1 > 0$, $L_2 > 0$); серый - гиперхаос с тремя положительными показателями Ляпунова ($L_1 > 0$, $L_2 > 0$, $L_3 > 0$).

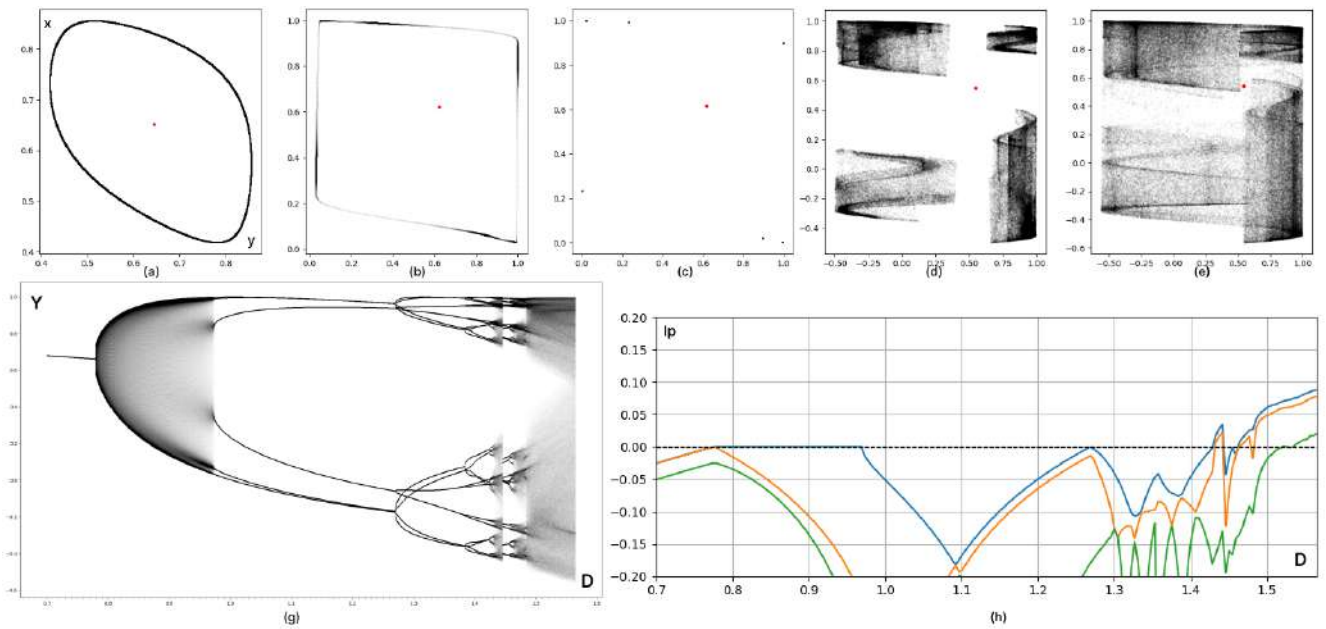


Рис. 4.5: Развитие аттрактора вдоль маршрута MN , указанного на рис. 4.4; (a)–(e) – проекции аттракторов на плоскость (y, x) при $D = 0.8$, $D = 0.975$, $D = 1$, $D = 1.5$, $D = 1.565$; (g) - бифуркационное дерево. (h) - спектр показателей Ляпунова, который показывает, что при $D > 1.56$ аттрактор действительно становится гиперхаотическим.

5 Гомоклинический аттрактор

Для обнаружения гомоклинического аттрактора мы можем начать с создания карты минимальных расстояний от точки O_+ до аттрактора. Мы обращаем внимание на черные участки, которые находятся за пределами области устойчивости, как показано на рисунке [5.1](#)

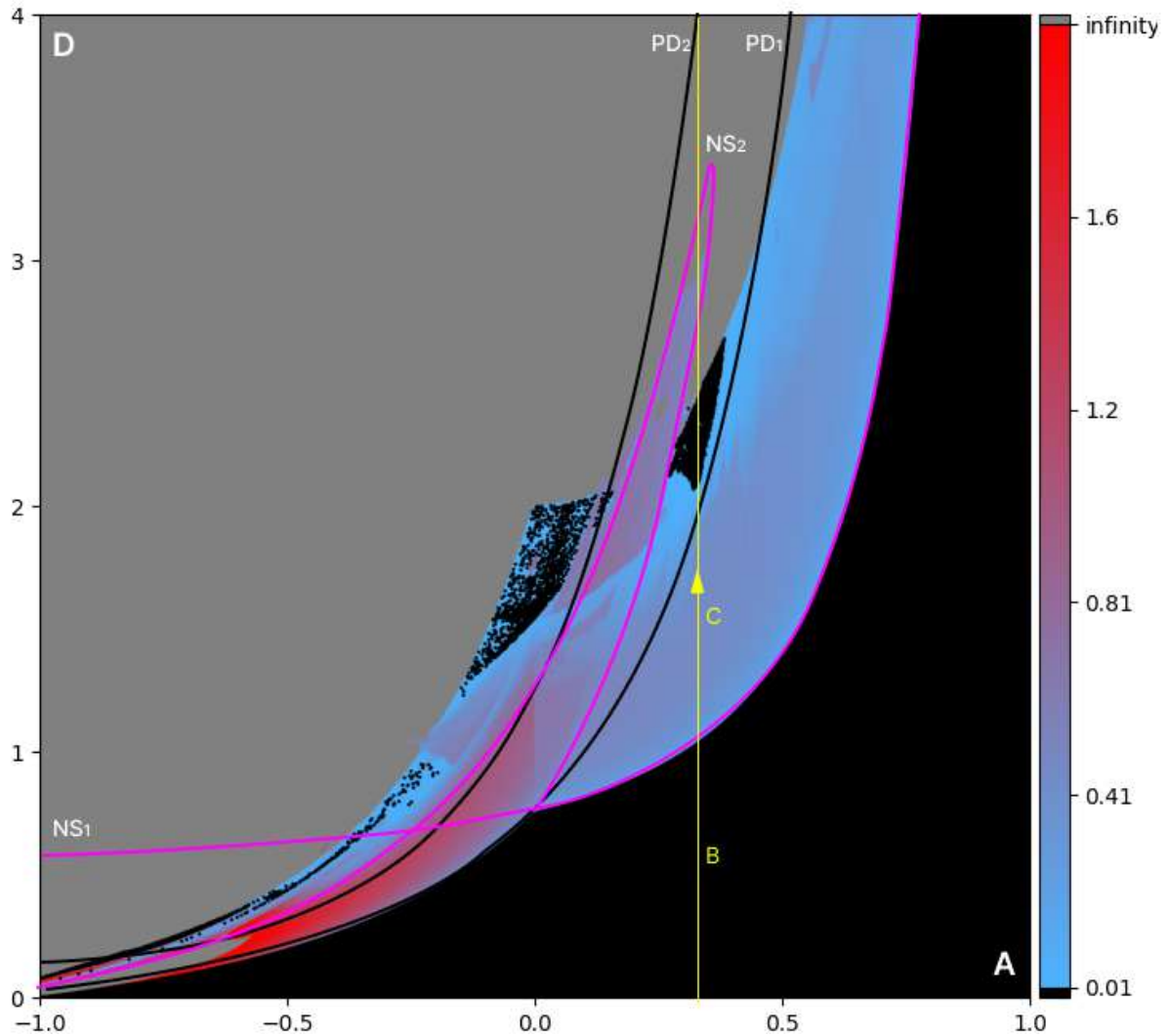


Рис. 5.1: Карта минимальных расстояний от аттрактора системы до неподвижной точки. Черный цвет на диаграмме соответствует ситуации, когда расстояние между аттрактором и точкой O_+ стремится к нулю.

Проведем анализ фазовых портретов и изучим процесс возникновения гомоклинического аттрактора, который содержит неподвижную точку типа $(0, 3)$. В начале наблюдается стабильная неподвижная точка в системе, затем она проходит через бифуркацию Неймарка-Сакера, в результате которой она становится седловой точкой типа $(1, 2)$. Вокруг нее формируется замкнутая

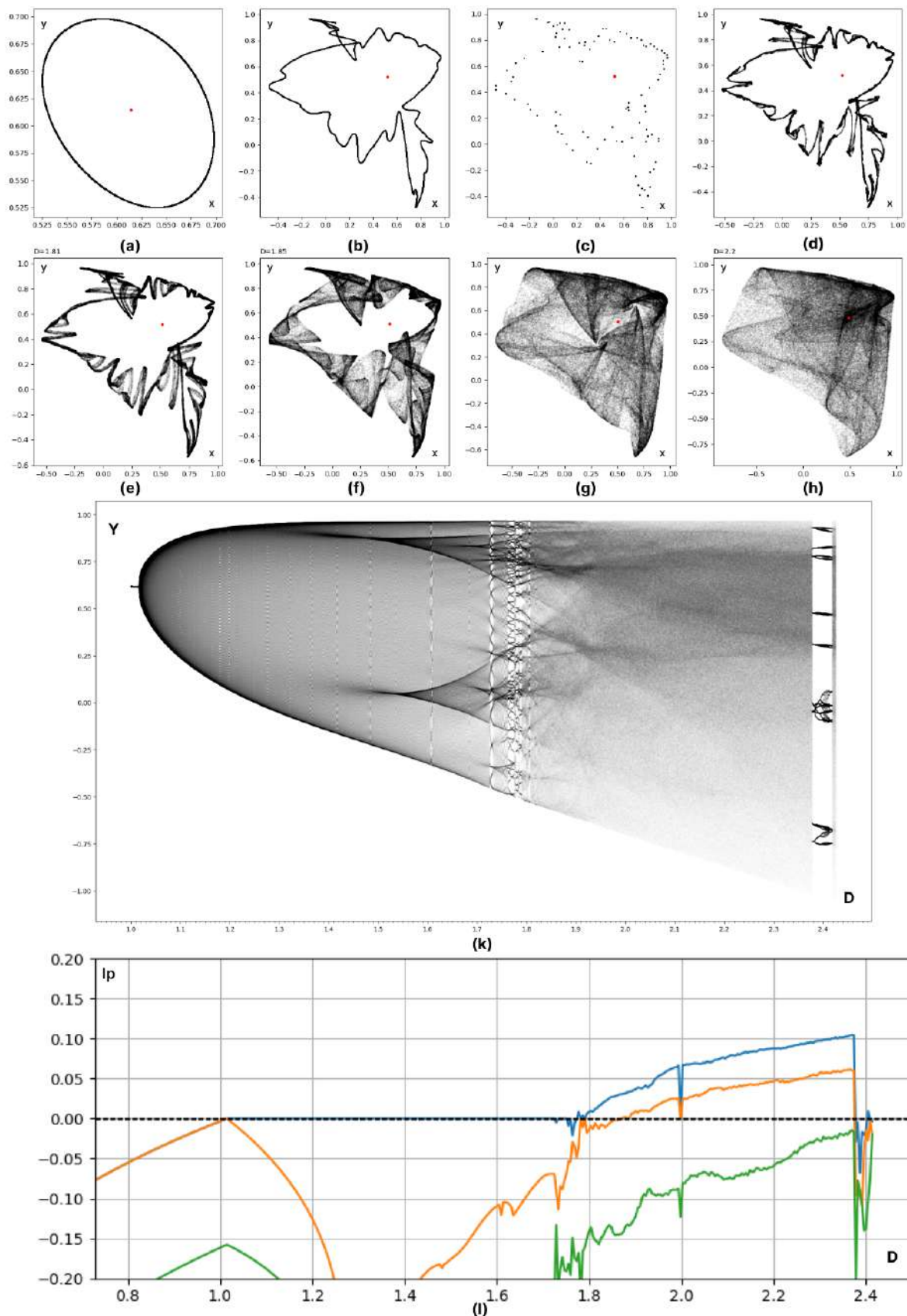


Рис. 5.2: Реализация сценария возникновения гомоклинического аттрактора. На рисунках (a) – (h) проекции траекторий на плоскость (x, y) при параметрах: $a - D = 1.02, b - D = 1.75, c - D = 1.77, d - D = 1.8, e - D = 1.81, f - D = 1.85, g - D = 1.95, h - D = 2.2$. (k) - бифуркационное дерево и (l) - спектр показателей Ляпунова в вдоль маршрута MN .

устойчивая инвариантная кривая L см. рис. 5.2(a). Увеличивая параметр, кривая претерпевает высокопериодический резонанс см. рис. 5.2(c), после которого теряет гладкость. Покидая резонансную область мы наблюдаем тор-хаос см. рис. 5.2(e). Затем тор порождает хаотический аттрактор (рис. 5.2(f)), и, наконец, появляется гиперхаотический гомоклинический дискретный аттрактор Шильникова см. рис. 5.2(h). Аттрактор Шильникова содержит неподвижную точку, которая, пройдя через бифуркацию удвоения периода при $D \approx 1.89$, стала вполне неустойчивой. Из анализа графика минимальных расстояний (рис. 5.3) можно заметить, что с увеличением количества итераций расстояние между точками аттрактора и неподвижной точкой O_+ уменьшается. Это свидетельствует о том, что наш аттрактор поглощает неустойчивую неподвижную точку и становится гомоклиническим.

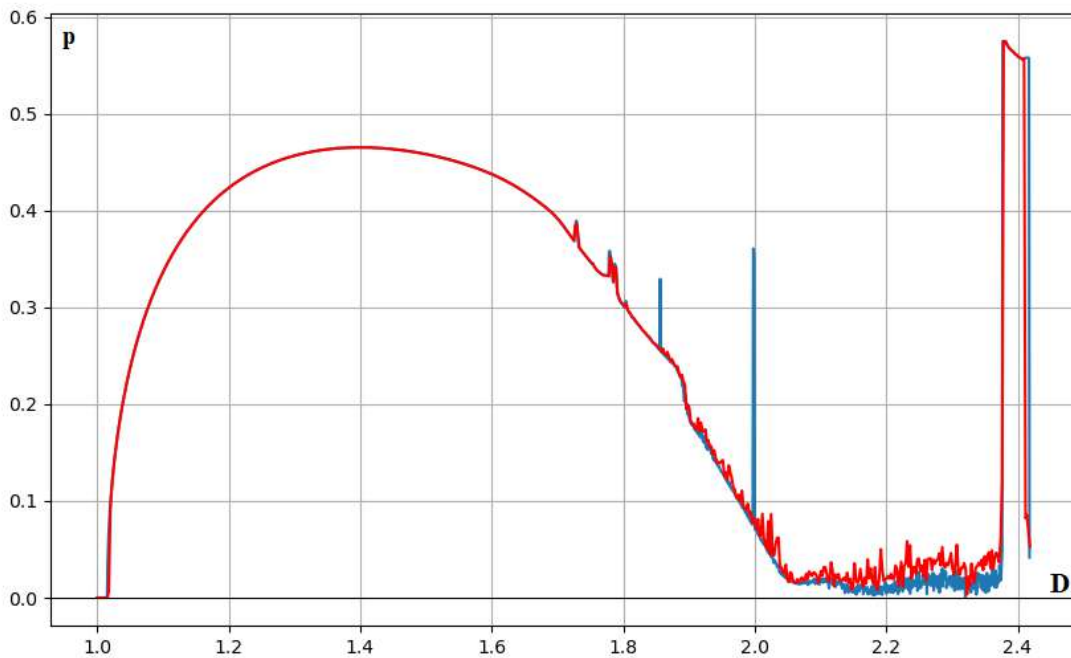


Рис. 5.3: Данный график демонстрирует уменьшение расстояния от неподвижной точки O_+ до аттрактора. Синему графику соответствует большее количество итераций.

6 Заключение

В процессе написания выпускной квалификационной работы были получены новые результаты в области динамического хаоса, а именно в теории гиперхаотических и гомоклинических аттракторов на основе трехмерного отображения Канеко. В частности, были обнаружены новые аттракторы: гиперхаотический с тремя положительными показателями Ляпунова и гомоклинический аттрактор, содержащий вполне неустойчивую точку.

Список литературы

- [1] Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. Бифуркации отображений - Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2012, 196 с.
- [2] К.Канеко "Doubling of Torus"(1983)
- [3] Alexey Kazakov, Aikan Shykhmamedov, Efrosiniia Karatetskaia. "Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps".(2021)
- [4] Rossler O. E. An equation for hyperchaos //Physics Letters A. – 1979. – Т. 71. – №. 2-3. – С. 155-157.
- [5] Alexey Kazakov, Aikan Shykhmamedov, Efrosiniia Karatetskaia, Natalia Stankevich. "Scenarios for the Creation of Hyperchaotic Attractors of 3D Maps".(2022)
- [6] Mira C. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. – World Scientific, 1996. – Т. 20.
- [7] Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A. On discrete pseudohyperbolic attractors of Lorenz type //arXiv preprint arXiv:2005.02778. – 2020.
- [8] Stankevich N., Kazakov A., Gonchenko S. Scenarios of hyperchaos occurrence in 4D Rössler system //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2020. – Т. 30. – №. 12. – С. 123129.
- [9] Garashchuk I. R. et al. Hyperchaos and multistability in the model of two interacting microbubble contrast agents //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019. – Т. 29. – №. 6. – С. 063131.
- [10] Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shilnikov L. P. Dynamical phenomena in multidimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve //Dokl. Akad. Nauk. – 1993. – Т. 330. – №. 2. – С. 144-147.

- [11] Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shilnikov L. P. On the existence of Newhouse regions in a neighborhood of systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve (the multidimensional case) //Doklady Akademii Nauk. – Russian Academy of Sciences, 1993. – T. 329. – №. 4. – C. 404-407.
- [12] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions: I //Nonlinearity. – 2008. – T. 21. – №. 5. – C. 923.
- [13] Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 1996. – T. 6. – №. 1. – C. 15-31.
- [14] Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Shilnikov L. P. On a homoclinic origin of Hénon-like maps //Regular and Chaotic Dynamics. – 2010. – T. 15. – C. 462-481.
- [15] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Shilnikov L. P. Towards Scenarios of Chaos Appearance in Three-Dimensional Maps, Nelin. – 2012.
- [16] Gonchenko A. et al. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2014. – T. 24. – №. 08. – C. 1440005.
- [17] Hampton A. E., Meiss J. D. The three-dimensional generalized Hénon map: Bifurcations and attractors //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2022. – T. 32. – №. 11. – C. 113127.
- [18] Zhang X. Chaotic polynomial maps //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2016. – T. 26. – №. 08. – C. 1650131.
- [19] Zhao M. et al. Bifurcation analysis of the three-dimensional Hénon map //Discrete and Continuous Dynamical Systems-S. – 2017. – T. 10. – №. 3. – C. 625-645.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Тонышевой Николь Сергеевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Хаотические группы гомеоморфизмов компактных двумерных топологических многообразий с краем» являются: доказательство Предложений 3.1-3.4, доказательство Теоремы 4.2, доказательство Теоремы 5.1.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Ниной Ивановной Жуковой, профессором кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук НИУ ВШЭ.
- Проведено выступление на Геометрическом семинаре, проводимом Международной лабораторией динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (руководитель семинара – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник МЛ ДСП НИУ ВШЭ Жукова Нина Ивановна).
- Результаты были частично представлены на VII Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ – Нижний Новгород (25-26 апреля 2023 года).

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится в июне 2023 г. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Тонышева Николь Сергеевна

31.05.2023

Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

**Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика**

Тоньшева Николь Сергеевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Хаотические группы гомеоморфизмов компактных двумерных топологических
многообразий с краем

Рецензент
к. физ.-мат. наук, доцент

А. В. Багаев

Руководитель работы
д. физ.-мат. наук, профессор

Н. И. Жукова

Нижний Новгород, 2023 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Топологические поверхности	4
2.1	Топологические многообразия с краем	4
2.2	Классификация компактных поверхностей с краем	4
3	Понятие хаотической группы гомеоморфизмов	6
3.1	Хаотический каскад в смысле Дивани	6
3.2	Хаотическая группа гомеоморфизмов многообразия	8
3.3	Топологическая сопряженность отображений и групп гомеоморфизмов . .	10
4	Хаотические группы гомеоморфизмов диска \mathbb{B}^2	12
4.1	Торальные скручивающие отображения и их свойства	12
4.2	Пространство орбит группы гомеоморфизмов	16
4.3	Индукцированные гомеоморфизмы диска \mathbb{B}^2	17
5	Хаотические группы гомеоморфизмов поверхностей	22
5.1	Хаотические группы гомеоморфизмов компактных поверхностей с краем .	22
5.2	Хаотические группы гомеоморфизмов замкнутых поверхностей	23
	Литература	24

1 Введение

Цель выпускной квалификационной работы — построение семейств попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов произвольной компактной топологической поверхности как с краем, так и без края.

Ключевыми понятиями в данной работе являются: многообразие с краем, поверхность, торальное скручивающее отображение (toral linked twist map, [6]), хаотическая группа гомеоморфизмов, топологически сопряженные группы.

Конструкция конкретного хаотического гомеоморфизма любой компактной поверхности, в которой применяется торальное скручивающее отображение, известна из [3]. Отличительной особенностью данной работы является конструкция бесконечного семейства хаотических групп гомеоморфизмов, которые попарно топологически не сопряжены.

Торальное скручивающее отображение является основным объектом исследования работы [6], где устанавливается связь этих отображений с ановскими диффеоморфизмами тора. Торальные скручивающие отображения находят применение в изучении движения и перемешивания жидкостей [13]. Например, оно задает траектории движения жидкости при попеременном включении двух миксеров, оси которых взаимно перпендикулярны. По построению торальное скручивающее отображение является композицией двух фиксированных скручиваний Дена [7].

В данной работе к решению вопроса о топологической сопряженности торальных скручивающих отображений применяется подход, отличный от предлагаемого в [6]. А именно, нами исследуется и применяется структура топологического пространства неподвижных точек групп, порожденных торальными скручивающими отображениями, и индуцированных ими групп гомеоморфизмов поверхностей.

Работа организована следующим образом.

В разделе 2.1 данной работы приводятся определения многообразия с краем, компактной и замкнутой топологической поверхности. В разделе 2.2 напоминаются теоремы о классификации замкнутых поверхностей и компактных поверхностей с краем и метод их доказательства.

В данной работе используется следующее определение хаотической группы гомеоморфизмов, которое предложено в [3].

Определение. Группа гомеоморфизмов G топологического многообразия X называется *хаотической*, если:

- (1) существует всюду плотная орбита группы G ;
- (2) объединение конечных орбит всюду плотно в X .

Это определение является аналогом широко известного понятия хаотической динамической системы в смысле Дивани. Их связь отражается в разделах 3.1-3.2.

Раздел 3.3 содержит определения квазисопряженных, полусопряженных, топологически сопряженных отображений и топологически сопряженных групп гомеоморфизмов. Доказываются утверждения о хаотичности групп, порожденных квазисопряженными, полусопряженными и топологически сопряженными гомеоморфизмами. Отмечается, что пространство неподвижных точек группы гомеоморфизмов является инвариантом относительно топологической сопряженности групп.

Целью раздела 4 является построение хаотических групп гомеоморфизмов двумерного диска \mathbb{B}^2 . Для этого в разделе 4.1 исследуются свойства торального скручивающего отображения. Далее в разделе 4.2 упоминается определение пространства орбит группы

гомеоморфизмов, существенно используемое в работе. В разделе 4.3 совершается переход от торальных скручивающих отображений к гомеоморфизмам диска \mathbb{B}^2 . Доказывается, что группы, порожденные этими гомеоморфизмами, являются хаотическими. Выясняется структура пространства неподвижных точек полученных групп.

Раздел 5 посвящен построению хаотических групп гомеоморфизмов на компактных поверхностях с краем и без края с помощью построенных ранее групп гомеоморфизмов двумерного диска \mathbb{B}^2 . Основным результатом работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. Пусть M — произвольная компактная поверхность с краем. Пусть \tilde{G}_σ , где $\sigma = \sigma(a)$, $a \in \mathbb{N}$, — группа гомеоморфизмов поверхности M , определенная в разделе 5.1. Тогда

$$\{\tilde{G}_\sigma \mid \sigma = \sigma(a), a \in \mathbb{N}\}$$

— семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов M , изоморфных группе \mathbb{Z} .

Теорема 2. Пусть M — произвольная замкнутая поверхность. Пусть \tilde{G}_σ , где $\sigma = \sigma(a)$, $a \in \mathbb{N}$, — группа гомеоморфизмов поверхности M , определенная в разделе 5.2. Тогда

$$\{\tilde{G}_\sigma \mid \sigma = \sigma(a), a \in \mathbb{N}\}$$

— семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов M , изоморфных группе \mathbb{Z} .

2 Топологические поверхности

2.1 Топологические многообразия с краем

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Множество $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = \overline{1, k}\}$, наделенное обычной топологией τ_{ob} , называется k -мерным арифметическим пространством.

Его подпространство $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$ с индуцированной топологией называется k -мерным арифметическим полупространством.

Подпространство $\partial\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k \mid x_k = 0\}$ называется *краем* арифметического полупространства \mathbb{R}_+^k .

Определение 2.1. Хаусдорфово топологическое пространство (M, τ) со счетной базой называется *топологическим многообразием размерности k с краем*, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность $U \subset M$, гомеоморфная либо \mathbb{R}^k , либо \mathbb{R}_+^k , причем образ точки x принадлежит $\partial\mathbb{R}_+^k$.

Точки многообразия M называются *внутренними*, если для них существует окрестность, гомеоморфная \mathbb{R}^k . Множество всех таких точек называется *внутренностью* многообразия M и обозначается через $Int(M)$.

Точки многообразия M называются *краевыми*, если для них существует окрестность, гомеоморфная \mathbb{R}_+^k , и образ этой точки принадлежит $\partial\mathbb{R}_+^k$. Множество всех таких точек называется *краем* многообразия M и обозначается через ∂M . Если $\partial M = \emptyset$, то M называется многообразием *без края*.

Известно, что внутренность $Int(M)$ k -мерного многообразия M является k -мерным подмногообразием в M без края, а также край ∂M k -мерного многообразия M является $(k - 1)$ -мерным подмногообразием в M без края.

Определение 2.2. *Топологической поверхностью* называется связное двумерное топологическое многообразие.

Компактное топологическое многообразие без края называется *замкнутым*. Поверхность называется *замкнутой*, если она замкнута как топологическое многообразие.

Пример 2.1. 1. Стандартная сфера \mathbb{S}^2 является замкнутой поверхностью.

2. Диск \mathbb{B}^2 является компактной топологической поверхностью с краем $\partial\mathbb{B}^2 \cong \mathbb{S}^1$.

3. Плоскость \mathbb{R}^2 является некомпактной поверхностью без края.

2.2 Классификация компактных поверхностей с краем

Имеет место следующая классификационная теорема для компактных поверхностей с краем [11, Теорема 10.1].

Теорема 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Любая компактная поверхность с краем (возможно, пустым) гомеоморфна одной из следующих поверхностей:

(1) сфера с n компонентами края $\mathbb{S}_{0,n}^2$;

(2) сфера с p ручками и n компонентами края $\mathbb{S}_{p,n}^2$;

(3) сфера с q пленками Мёбиуса и n компонентами края $N_{q,n}^2$.

Если $n = 0$, то перечисленные в данной теореме поверхности являются замкнутыми, и теорема о классификации замкнутых поверхностей является следствием теоремы 2.1.

Следствие 2.1. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$. Любая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из следующих поверхностей:

- (1) сфера \mathbb{S}^2 ;
- (2) сфера с p ручками \mathbb{S}_p^2 ;
- (3) сфера с q пленками Мёбиуса N_q^2 .

Замкнутые поверхности, перечисленные в следствии 2.1, называются *каноническими*.

Доказательство теоремы о классификации компактных поверхностей проводится с помощью понятия схемы представления поверхности.

Рассмотрим некоторый многоугольник Π на плоскости \mathbb{R}^2 и ограничиваемое им открытое подмножество $D^0 \subset \mathbb{R}^2$. Объединение $D := D^0 \sqcup \Pi$ является компактным подпространством плоскости \mathbb{R}^2 и гомеоморфно диску \mathbb{B}^2 , причем $D^0 \cong \text{Int}(\mathbb{B}^2)$ и $\Pi \cong \partial\mathbb{B}^2 = \mathbb{S}^1$.

Пусть некоторая компактная поверхность M получается из D в результате склейки сторон многоугольника Π . Иными словами, определено отношение эквивалентности, отождествляющее точки некоторой пары сторон Π в определенном фиксированном направлении. Поверхность M является фактор-пространством по заданному отношению эквивалентности, и определено фактор-отображение $\lambda : D \rightarrow M$, называемое отображением склейки.

Обозначим каждую из сторон многоугольника Π некоторой буквой, причем одной и той же буквой обозначим отождествляемые стороны. Склеиваемых сторон может быть не более двух; для получения замкнутой поверхности каждая сторона многоугольника должна иметь парную сторону для склейки. Стороны, не имеющие пары, являются компонентами края поверхности M .

Зафиксируем направление обхода сторон многоугольника Π . Выпишем в строчку все стороны Π : если направление обхода совпадает с направлением склейки данной стороны, то эта сторона указывается в степени $+1$, иначе — в степени -1 .

Полученная запись называется *схемой представления* поверхности M .

Указанные в теореме 2.1 поверхности имеют следующие схемы представления:

- (1) схема $c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_n d_n c_n^{-1}$ соответствует сфере с n компонентами края $\mathbb{S}_{0,n}^2$;
- (2) схема $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_n d_n c_n^{-1}$, соответствует сфере с p ручками и n компонентами края $\mathbb{S}_{p,n}^2$;
- (3) схема $a_1 a_1 \dots a_q a_q c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_n d_n c_n^{-1}$ соответствует сфере с q пленками Мёбиуса и n компонентами края $N_{q,n}^2$.

Следующие схемы представления задают канонические замкнутые поверхности, перечисленные в следствии 2.1:

- (1) схема aa^{-1} соответствует сфере \mathbb{S}^2 ;
- (2) схема $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$, соответствует сфере с p ручками \mathbb{S}_p^2 ;
- (3) схема $a_1 a_1 \dots a_q a_q$ соответствует сфере с q пленками Мёбиуса N_q^2 .

Отметим, что каноническая замкнутая поверхность получается из диска \mathbb{B}^2 при отождествлении его края $\partial\mathbb{B}^2$ с некоторым $2n$ -угольником, $n \in \mathbb{N}$, и склейке его сторон согласно одной из указанных схем.

Пример 2.2. Сфера с 3 ручками и 2 компонентами края $\mathbb{S}_{3,2}^2$ имеет следующую схему представления: $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}c_1d_1c_1^{-1}c_2d_2c_2^{-1}$. Процесс склейки этой поверхности из диска \mathbb{B}^2 , край которого $\partial\mathbb{B}^2$ отождествлен с 18-угольником, представлен на рисунке 1. Направления склейки соответствующих сторон отмечены стрелками.

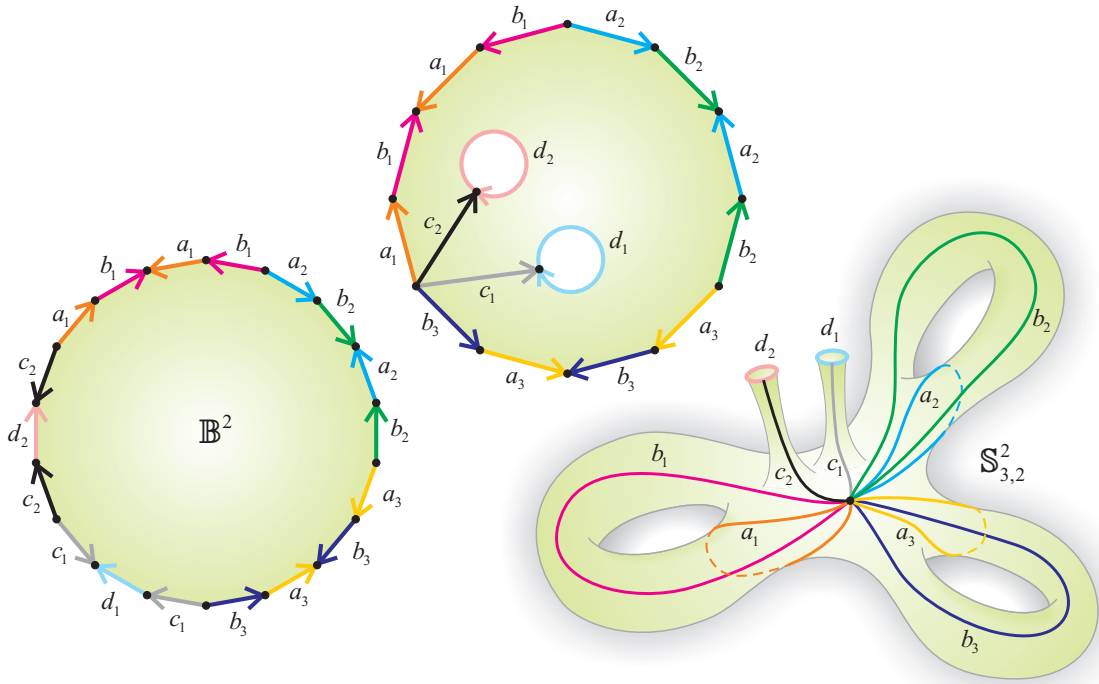


Рис. 1: Сфера с 3 ручками и 2 компонентами края $\mathbb{S}_{3,2}^2$.

3 Понятие хаотической группы гомеоморфизмов

3.1 Хаотический каскад в смысле Дивани

Пусть $f : X \rightarrow X$ — непрерывное отображение метрического пространства (X, d) в себя. Положим $f^0 = id_X$ и $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}$ — композиция n экземпляров отображения f .

Семейство $\{f^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ называется *каскадом* и обозначается как пара (X, f) . Множество $\mathcal{O}.x := \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(x)$ называется *орбитой* точки $x \in X$.

Определение 3.1. Каскад (X, f) называется *топологически транзитивным*, если для любых непустых открытых подмножеств $U, V \subset X$ существует такое число $k \geq 0$, что

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Если существует всюду плотная орбита $\mathcal{O}.x$ относительно каскада (X, f) и в пространстве X нет изолированных точек, то этот каскад топологически транзитивен [8,

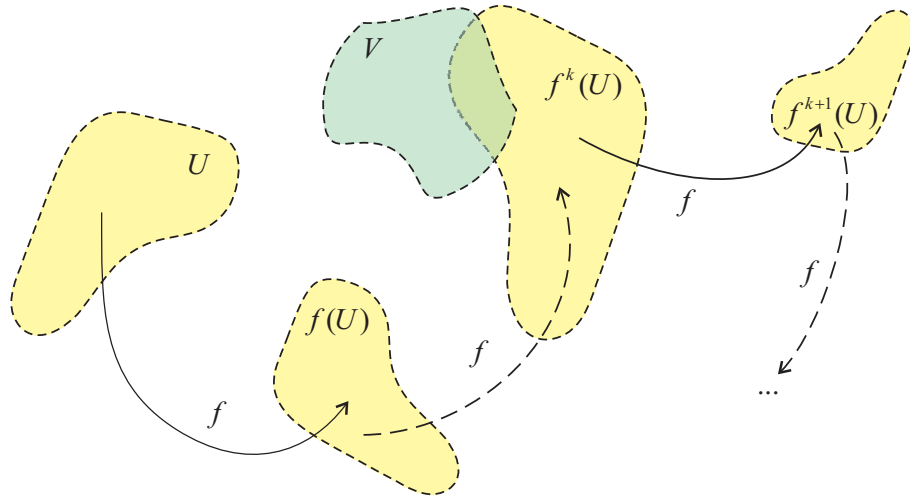


Рис. 2: Иллюстрация понятия топологической транзитивности.

Proposition 1.15]. Для обратного утверждения необходимы дополнительные условия, накладываемые на пространство X .

Напомним, что топологическое пространство называется *польским*, если оно является полным сепарабельным метрическим пространством. Известно [8, Theorem 1.16], что в польских пространствах без изолированных точек топологическая транзитивность каскада эквивалентна существованию всюду плотной орбиты. Это утверждение называется теоремой Биркгофа.

Определение 3.2. Точка $x \in X$ называется *периодической* точкой каскада (X, f) , если существует число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n(x) = x$. Минимальное из таких чисел n называется периодом точки x . Точка $x \in X$, период которой равен 1, называется *неподвижной* точкой каскада (X, f) .

Заметим, что если x — периодическая точка с периодом n , то $\mathcal{O}.x$ — конечное множество, причем количество точек этой орбиты $|\mathcal{O}.x|$ равно n . Если же орбита некоторой точки конечна и содержит n точек, то в этой орбите существует периодическая точка с периодом не более, чем n .

Определение 3.3. Каскад (X, f) называется *чувствительным к начальным условиям*, если существует действительное число $\delta > 0$ такое, что для любого открытого подмножества $U \subset X$ существует целое число $n \geq 0$, при котором выполняется неравенство

$$\text{diam}(f^n(U)) \geq \delta.$$

Изначально центральной идеей хаоса была чувствительность динамической системы к начальным условиям. Этим свойством обладают такие системы, в которых малые сдвиги исходных параметров влекут существенные изменения состояния системы с течением времени. Иначе чувствительность к начальным условиям называют «эффектом бабочки». Такое название возникло благодаря докладу Э. Н. Лоренца (E. N. Lorenz) *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*, представленному на 139-м собрании Американской ассоциации содействия развитию науки в 1972 году в Вашингтоне. Сам термин «чувствительность к начальным условиям» был предложен Д. Рюэллем (D. Ruelle) в 1977 году.

Определение, сформулированное Р. Л. Дивани (R. L. Devaney), является одним из наиболее известных определений хаотической динамической системы.

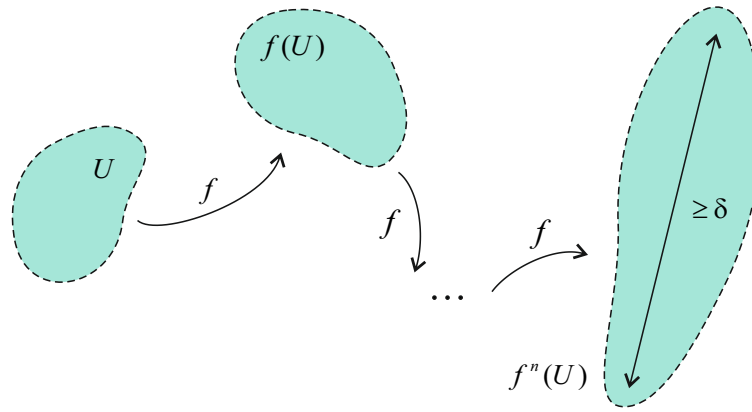


Рис. 3: Иллюстрация понятия чувствительности к начальным условиям.

Определение 3.4 (Devaney, [6]). Каскад (X, f) называется *хаотическим*, если:

- (1) (X, f) топологически транзитивен;
- (2) множество периодических точек (X, f) всюду плотно в X ;
- (3) (X, f) чувствителен к начальным условиям.

В работе [2] доказано, что одновременное выполнение условий топологической транзитивности каскада и всюду плотности его периодических точек влечет чувствительность этого каскада к начальным условиям, то есть условие (3) является избыточным в определении 3.4. В заметке [1] отмечено, что ни топологическая транзитивность, ни всюду плотность периодических точек не следуют из двух оставшихся условий в определении 3.4.

3.2 Хаотическая группа гомеоморфизмов многообразия

Пусть X — топологическое многообразие, $\text{Homeo}(X)$ — семейство всех гомеоморфизмов многообразия X . Отметим, что $\text{Homeo}(X)$ является группой относительно композиции отображений; единицей этой группы является тождественное отображение id_X . Далее *группой гомеоморфизмов* G топологического многообразия X называется любая подгруппа $G \subset \text{Homeo}(X)$. *Орбитой* точки $x \in X$ относительно группы G называется множество $G \cdot x := \{g(x) \mid g \in G\}$.

В данной работе используется следующее определение хаотической группы гомеоморфизмов топологического многообразия, известное из [3].

Определение 3.5. Группа гомеоморфизмов G топологического многообразия X называется *хаотической*, если:

- (1) существует всюду плотная орбита группы G ;
- (2) объединение конечных орбит всюду плотно в X .

Так как в [2] доказано, что условие (3) является следствием условий (1) и (2) в определении 3.4, данном Дивани для хаотичности каскада, то определение 3.5 можно рассматривать как аналог для групп гомеоморфизмов указанного определения Дивани. Для того, чтобы показать связь этих определений, приводятся понятия топологической транзитивности и чувствительности к начальным условиям для групп гомеоморфизмов.

Определение 3.6. Группа гомеоморфизмов G топологического многообразия X называется *топологически транзитивной*, если для любых непустых открытых подмножеств $U, V \subset X$ существует такой элемент группы $g \in G$, что

$$g(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Имеет место аналог теоремы Биркгофа для групп гомеоморфизмов многообразий.

Предложение 3.1. *Топологическая транзитивность группы гомеоморфизмов G топологического многообразия X эквивалентна существованию всюду плотной орбиты группы G .*

Доказательство. Пусть X — k -мерное топологическое многообразие и G — группа гомеоморфизмов многообразия X .

Напомним, что топологическое пространство называется локально компактным, если для каждой его точки существует окрестность, замыкание которой компактно. В любой точке многообразия X существует окрестность, гомеоморфная либо открытому шару $Int(\mathbb{B}^k)$ в \mathbb{R}^k , либо его следу $Int(\mathbb{B}^k) \cap \mathbb{R}_+^k$ в \mathbb{R}_+^k . Замыкание $Int(\mathbb{B}^k)$ в \mathbb{R}^k и замыкание $Int(\mathbb{B}^k) \cap \mathbb{R}_+^k$ в \mathbb{R}_+^k гомеоморфны k -мерному шару \mathbb{B}^k , который является компактным подпространством в \mathbb{R}^k и в \mathbb{R}_+^k . Следовательно, многообразие X является локально компактным пространством. По определению 2.1 многообразие X является хаусдорфовым пространством со счетной базой, поэтому из [9, Theorem 5.3] вытекает, что X метризуемо полной метрикой и является польским пространством. Из теоремы Бэра [12, Theorem 20.16] следует, что любое польское пространство является пространством Бэра. Поэтому X — пространство Бэра со счетной базой.

Известно [4, Proposition 1], что из топологической транзитивности группы гомеоморфизмов G топологического пространства X , которое является пространством Бэра со счетной базой, следует существование всюду плотной орбиты группы G .

Пусть $G.x$ — всюду плотная орбита группы G . Тогда для любых непустых открытых подмножеств $U, V \subset X$ выполняется $G.x \cap U \neq \emptyset, G.x \cap V \neq \emptyset$, то есть существуют гомеоморфизмы $g_1, g_2 \in G$ такие, что $g_1(x) \in U, g_2(x) \in V$. Отсюда получаем, что $x \in g_1^{-1}(U)$ и $g_2(x) \in g_2(g_1^{-1}(U))$. Композиция гомеоморфизмов $g := g_2 \circ g_1^{-1}$ является элементом группы G . Следовательно, $g_2(x) \in g(U) \cap V$, и для произвольной пары открытых подмножеств $U, V \subset X$ существует элемент $g \in G$ такой, что $g(U) \cap V \neq \emptyset$. Согласно определению 3.6, группа G топологически транзитивна.

Таким образом, группа гомеоморфизмов G топологического многообразия X топологически транзитивна тогда и только тогда, когда существует всюду плотная орбита группы G . \square

Определение 3.7. Группа гомеоморфизмов G топологического многообразия X называется *чувствительной к начальным условиям*, если существует действительное число $\delta > 0$ такое, что для любого открытого подмножества $U \subset X$ существует элемент группы $g \in G$, при котором выполняется неравенство

$$\text{diam}(g(U)) \geq \delta.$$

Э. Конторовичем и М. Мегрелишвили доказано [10, Theorem 5.7], что если C -полугруппа S польского пространства X удовлетворяет условиям:

- (1) топологическая транзитивность;
- (2) всюду плотность множества всех почти периодических точек;

(3) не минимальность или не эквинепрерывность,

то она чувствительна к начальным условиям.

Любая группа гомеоморфизмов G топологического многообразия X может быть представлена как топологическая группа с дискретной топологией, непрерывно действующая на X . Следовательно, группа G является C -полугруппой [10, Example 2.2]. Как доказано ранее, топологическое многообразие X является польским пространством.

Пусть X — хаусдорфово пространство, S — топологическая полугруппа, которая непрерывно действует на X . В работе [10] динамической системой называется пара (S, X) .

Система (S, X) называется минимальной, если орбита $S.x$ любой точки $x \in X$ всюду плотна в X , то есть $\overline{S.x} = X$; точка $x \in X$ называется почти периодической, если подсистема $(\overline{S.x}, S)$ минимальна и компактна; точка $x \in X$ называется периодической, если ее орбита $S.x$ конечна [10, Definition 4.1]. Согласно этой терминологии, любая периодическая точка системы (S, X) является почти периодической.

Пусть $G.x_0$ — конечная орбита группы гомеоморфизмов G , тогда орбита $G.y$ каждой точки $y \in G.x_0$ совпадает с $G.x_0$ и является конечной. По условию, объединение конечных орбит группы всюду плотно в X , следовательно, множество всех почти периодических точек всюду плотно в X .

Замыкание любого конечного подмножества A многообразия X совпадает с самим A , поэтому $\overline{G.x_0} = G.x_0$ — конечное множество. Поскольку многообразие X содержит бесконечное количество точек, оно не может совпадать с конечным множеством $\overline{G.x_0}$. Следовательно, группа G не минимальна.

Таким образом, из результатов Э.Конторовича и М.Мегрелишвили вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Группа гомеоморфизмов G топологического многообразия X , удовлетворяющая определению 3.5, является чувствительной к начальным условиям.*

Следовательно, определение 3.5 хаотичности группы гомеоморфизмов является обобщением определения Дивани 3.4 хаотичности каскада на группы гомеоморфизмов многообразий.

3.3 Топологическая сопряженность отображений и групп гомеоморфизмов

Напомним определения квазисопряженных, полусопряженных и топологически сопряженных отображений [8, Definition 1.5].

Определение 3.8. Пусть X, Y — топологические пространства, $g : X \rightarrow X$ и $h : Y \rightarrow Y$ — непрерывные отображения. Если существует непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ такое, что образ $f(X)$ всюду плотен в Y и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{h} & Y, \end{array} \quad (1)$$

то g называется *квазисопряженным* с h посредством f .

Если отображение g квазисопряжено с отображением h посредством непрерывного сюръективного отображения, то g называется *полусопряженным* с h .

Если отображение g квазисопряжено с отображением h посредством гомеоморфизма, то g и h называются *топологически сопряженными* отображениями.

Следующее утверждение является аналогом предложения 1.31 из работы [8] для групп гомеоморфизмов.

Предложение 3.3. Пусть $G = \langle g \rangle$ и $H = \langle h \rangle$ — группы гомеоморфизмов топологических многообразий X и Y , порожденные гомеоморфизмами $g : X \rightarrow X$ и $h : Y \rightarrow Y$, причем g квазисопряжен с h посредством отображения $f : X \rightarrow Y$. Тогда хаотичность группы G влечет хаотичность группы H .

Доказательство. Пусть $A \subset X$ — всюду плотное подмножество в X , то есть $\bar{A} = X$. Так как $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. В силу свойств замыкания имеем $\overline{f(\bar{A})} \subset \overline{f(A)}$, то есть $\overline{f(X)} \subset \overline{f(A)}$. По определению квазисопряжения имеем $\overline{f(X)} = Y$, тогда $Y \subset \overline{f(A)}$. Но $f(A) \subset Y$, поэтому $\overline{f(A)} = Y$. Следовательно, образ $f(A)$ всюду плотного подмножества A в X есть всюду плотное подмножество в Y .

Пусть $G.x$, $x \in X$, — орбита группы G в X , то есть $G.x = \{g^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. В силу коммутативности диаграммы (1) и ассоциативности композиции отображений имеют место равенства: $f \circ g = h \circ f$ и $f \circ g^n = h^n \circ f$. Применяя их, получаем цепочку равенств:

$$f(G.x) = \{f(g^n(x)) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{h^n(f(x)) \mid n \in \mathbb{Z}\} = H.f(x),$$

где $H.f(x)$ — орбита точки $f(x) \in Y$ относительно группы H . Следовательно, любая орбита $G.x$ при отображении f переходит в орбиту $H.f(x)$.

Пусть G — хаотическая группа гомеоморфизмов многообразия X . Тогда существует всюду плотная орбита $G.x$, $x \in X$, и объединение $\bigcup_{i \in I} G.x_i$ конечных орбит всюду плотно в X . При этом образ орбиты $f(G.x)$, всюду плотной в X , является орбитой $H.f(x)$, всюду плотной в Y . Также $f(G.x_i) = H.f(x_i)$ — конечная орбита, $f(\bigcup_{i \in I} G.x_i) = \bigcup_{i \in I} H.f(x_i)$ — объединение конечных орбит, всюду плотное в Y . Следовательно, H — хаотическая группа гомеоморфизмов многообразия Y . \square

Следствие 3.1. Пусть $G = \langle g \rangle$ и $H = \langle h \rangle$ — группы гомеоморфизмов топологических многообразий X и Y , порожденные гомеоморфизмами $g : X \rightarrow X$ и $h : Y \rightarrow Y$, причем g полусопряжен с h . Тогда хаотичность группы G влечет хаотичность группы H .

Следствие 3.2. Пусть $G = \langle g \rangle$ и $H = \langle h \rangle$ — группы гомеоморфизмов топологических многообразий X и Y , порожденные топологически сопряженными гомеоморфизмами $g : X \rightarrow X$ и $h : Y \rightarrow Y$. Тогда хаотичность группы G эквивалентна хаотичности группы H .

Напомним определение топологически сопряженных групп гомеоморфизмов.

Определение 3.9. Группы гомеоморфизмов G и H топологических многообразий X и Y , соответственно, называются *топологически сопряженными*, если существуют гомеоморфизм многообразий $f : X \rightarrow Y$ и изоморфизм групп $\rho : G \rightarrow H$ такие, что для любого элемента $g \in G$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\rho(g)} & Y. \end{array} \quad (2)$$

Пусть $Fix(G) := \{x \in X \mid g(x) = x \ \forall g \in G\}$ — множество неподвижных точек группы гомеоморфизмов G топологического многообразия X . Будем рассматривать $Fix(G)$ как подпространство в X с индуцированной топологией и называть *пространством неподвижных точек* группы G .

Предложение 3.4. *Пространства неподвижных точек топологически сопряженных групп гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть гомеоморфизм $f : X \rightarrow Y$ и изоморфизм групп $\rho : G \rightarrow H$ реализуют топологическую сопряженность групп гомеоморфизмов G и H многообразий X и Y , соответственно.

Пусть $x \in \text{Fix}(G)$. Тогда для любого $g \in G$ верно равенство $g(x) = x$. В силу коммутативности диаграммы (2), верно равенство $f \circ g = \rho(g) \circ f$. Следовательно,

$$f(g(x)) = f(x) = \rho(g)(f(x)) \quad \forall g \in G. \quad (3)$$

Так как ρ — изоморфизм групп, то $\rho(G) = H$ и для любого элемента $h \in H$ существует единственный элемент $g \in G$ такой, что $\rho(g) = h$. Тогда из равенства (3) следует, что $h(f(x)) = f(x) \quad \forall h \in H$, поэтому $f(x) \in \text{Fix}(H)$, и $f(\text{Fix}(G)) \subset \text{Fix}(H)$. Поскольку f — биекция, имеет место равенство $f(\text{Fix}(G)) = \text{Fix}(H)$. Следовательно, сужение $f|_{\text{Fix}(G)} : \text{Fix}(G) \rightarrow \text{Fix}(H)$ — биекция. Сужение гомеоморфизма также является гомеоморфизмом, поэтому $f|_{\text{Fix}(G)} : \text{Fix}(G) \rightarrow \text{Fix}(H)$ является гомеоморфизмом пространств неподвижных точек $\text{Fix}(G)$ и $\text{Fix}(H)$. \square

4 Хаотические группы гомеоморфизмов диска \mathbb{B}^2

4.1 Торальные скручивающие отображения и их свойства

Целью данного раздела является построение счетных семейств хаотических групп гомеоморфизмов двумерного диска \mathbb{B}^2 . Для этой цели исследуется специальное отображение, называемое торальным скручивающим отображением.

Рассмотрим стандартный двумерный тор \mathbb{T}^2 как квадрат $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ в декартовой системе координат на плоскости \mathbb{R}^2 с отождествленными в соответствующих направлениях противоположными сторонами.

Для натуральных $k, m > 2$ положим $W := [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и $S := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$ — подмножества тора \mathbb{T}^2 , $R := W \cup S$ — их объединение.

Каждое из подмножеств W и S тора \mathbb{T}^2 гомеоморфно цилиндру. Подмножество $R \subset \mathbb{T}^2$ гомеоморфно ручке. Указанные подмножества тора \mathbb{T}^2 изображены на рисунке 4.

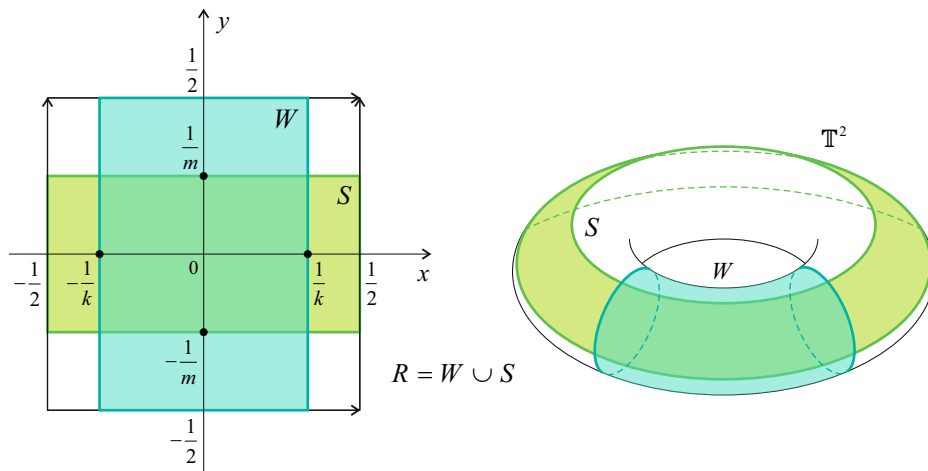


Рис. 4: Подмножества W , S и R тора \mathbb{T}^2 .

Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. На поверхности R введем следующие отображения:

$$\omega_{a,k}(x, y) = \begin{cases} (x, y + akx), & (x, y) \in W; \\ (x, y), & (x, y) \notin W, \end{cases}$$

$$\nu_{b,m}(x, y) = \begin{cases} (x + bmy, y), & (x, y) \in S; \\ (x, y), & (x, y) \notin S. \end{cases}$$

Заметим, что отображения $\omega_{a,k} : R \rightarrow R$ и $\nu_{b,m} : R \rightarrow R$ являются гомеоморфизмами.

Определение 4.1. Композиция $T_\sigma := \nu_{b,m} \circ \omega_{a,k}$, где $\sigma = (a, b, k, m)$ — четверка натуральных чисел, причем $k, m > 2$, называется *торальным скручивающим отображением*.

Введенная терминология является традиционной; на самом деле, торальное скручивающее отображение $T_\sigma : R \rightarrow R$ есть гомеоморфизм, так как является композицией гомеоморфизмов.

Замечание 4.1. В данной работе исследуются торальные скручивающие отображения, которые задаются линейными функциями скручивания $\alpha : [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \rightarrow [-a, a]$, $x \mapsto akx$ и $\beta : [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \rightarrow [-b, b]$, $y \mapsto bmy$. Р. Л. Дивани в [6] изучал торальные скручивающие отображения, заданные более общими непрерывными функциями. Согласно терминологии [6], введенное в определении 4.1 торальное скручивающее отображение образовано положительными сдвигами, поскольку $\alpha'(x) = ak > 0$ и $\beta'(y) = bm > 0$ при натуральных параметрах a, b, k, m . Это позволяет далее применять результаты Дивани, полученные в статье [6].

На рисунке 5(1) показано, как действует отображение $\omega_{a,k} : R \rightarrow R$. Образом горизонтального отрезка, выделенного розовым цветом на рисунке (1) слева, является объединение неподвижных отрезков в S и наклонной прямой с коэффициентом наклона ak , также выделенное розовым цветом на рисунке (1) справа. Эта наклонная прямая является частью конечной обмотки тора \mathbb{T}^2 , поскольку имеет рациональный угол наклона. На рисунке 5(2) показано, как действует отображение $\nu_{b,m} : R \rightarrow R$. Здесь слева фиолетовым цветом отмечена вертикальная прямая, ее образом является объединение вертикальных отрезков в W и наклонной прямой с коэффициентом наклона bm справа. Эта наклонная прямая также является частью конечной обмотки тора \mathbb{T}^2 .

Предложение 4.1. Группа $G_\sigma := \langle T_\sigma \rangle$, порожденная торальным скручивающим отображением $T_\sigma : R \rightarrow R$, является хаотической группой гомеоморфизмов поверхности R .

Доказательство. Дивани доказано [6, Theorem A], что торальное скручивающее отображение $T : R \rightarrow R$, образованное положительными сдвигами, является топологически перемешивающим и множество всех его периодических точек всюду плотно в R .

Как указано в замечании 4.1, торальное скручивающее отображение T_σ образовано положительными сдвигами. Любая периодическая точка гомеоморфизма T_σ задает конечную орбиту группы $G_\sigma = \langle T_\sigma \rangle$. Следовательно, объединение конечных орбит группы G_σ всюду плотно в R .

Напомним, что непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ топологического пространства X называется топологически перемешивающим, если для любых непустых открытых подмножеств $U, V \subset X$ существует такое целое число $n_0 \geq 0$, что $f^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$ [8, Definition 1.38].

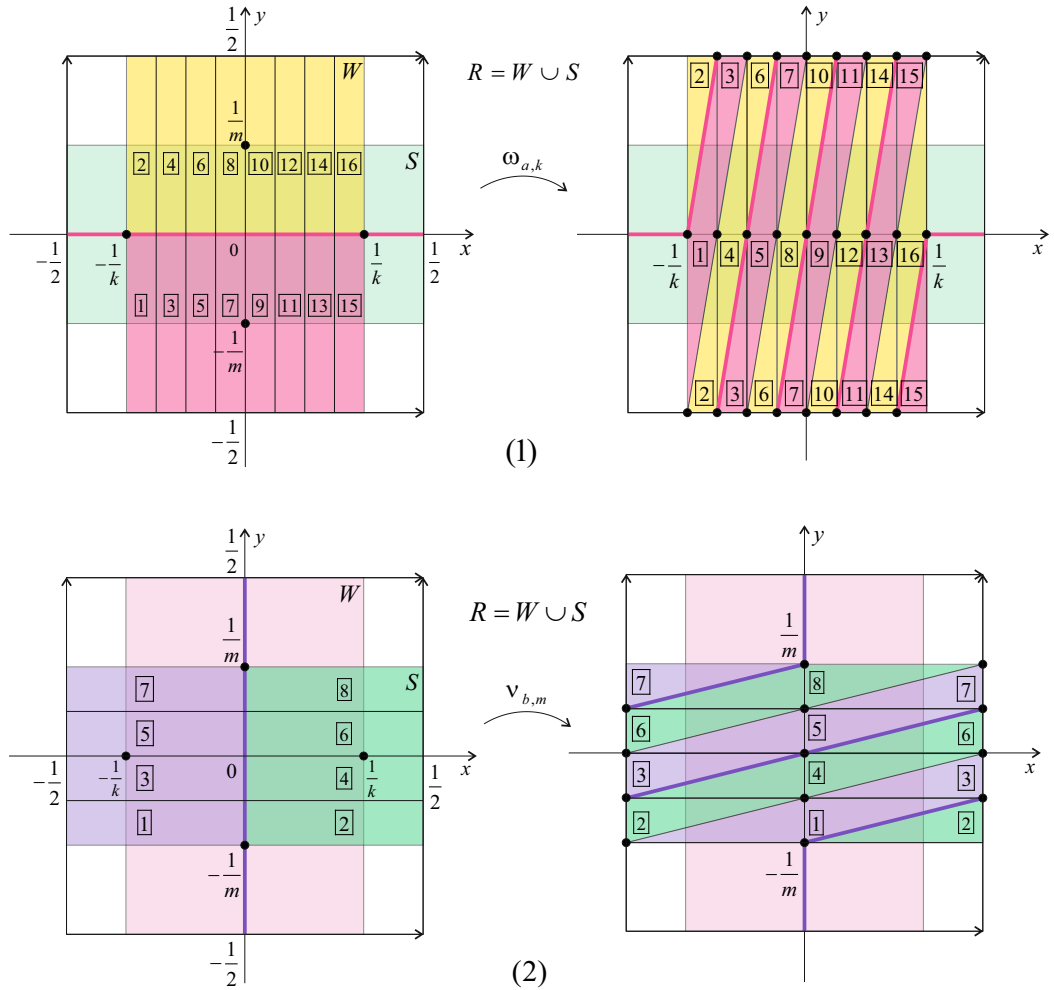


Рис. 5: (1) Действие $\omega_{a,k} : R \rightarrow R$ при $a = 2$; (2) действие $\nu_{b,m} : R \rightarrow R$ при $b = 1$.

Зафиксируем пару произвольных открытых подмножеств $U, V \subset X$. Так как T_σ — топологически перемешивающее отображение, то для U, V существует целое число $n_0 \geq 0$, при котором $T_\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$. Степень T_σ^n является элементом группы G_σ . Следовательно, для непустых открытых подмножеств $U, V \subset X$ существует элемент $g = T_\sigma^{n_0}$ группы G_σ , при котором $g(U) \cap V \neq \emptyset$. Тогда, согласно определению 3.6, G_σ — топологически транзитивная группа гомеоморфизмов поверхности R . Учитывая предложение 3.1, получаем, что существует всюду плотная орбита группы G_σ .

Таким образом, G_σ удовлетворяет определению 3.5 и является хаотической группой гомеоморфизмов поверхности R . \square

Теорема 4.1. Пусть $G_\sigma = \langle T_\sigma \rangle$ — группа гомеоморфизмов поверхности R , порожденная торальным скручивающим отображением $T_\sigma : R \rightarrow R$, и $\sigma = (a, b, k, m)$ — четверка фиксированных натуральных чисел, где $k, m > 2$. Пространство неподвижных точек $Fix(G_\sigma)$ группы G_σ имеет ровно $(2a - 1) \cdot (2b - 1)$ изолированных точек.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in Fix(G_\sigma)$ — неподвижная точка группы G_σ . Тогда $T_\sigma(x, y) = (x, y)$, поскольку $T_\sigma \in G_\sigma$. Если же $T_\sigma(x, y) = (x, y)$, то $(x, y) \in Fix(G_\sigma)$, поскольку группа G_σ порождена гомеоморфизмом T_σ .

Случай 1: $(x, y) \in W$, $\omega_{a,k}(x, y) \in S$. Так как отображение $\omega_{a,k}$ меняет координату y и фиксирует координату x , а потом отображение $\nu_{b,m}$ меняет x и фиксирует y , и $T_\sigma(x, y) = \nu_{b,m}(\omega_{a,k}(x, y)) = (x, y)$, то точка (x, y) изначально принадлежит пересечению $W \cap S$.

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$T_\sigma(x, y) = \nu_{b,m}(\omega_{a,k}(x, y)) = \nu_{b,m}(x, y + akx) = (x + bm(y + akx), y + akx).$$

При этом $T_\sigma(x, y) = (x, y)$, поэтому существуют числа $p, q \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\begin{cases} x + bm(y + akx) = x + p \\ y + akx = y + q \end{cases} \quad (4)$$

Системе (4) удовлетворяют точки $(\frac{q}{ak}, \frac{p}{bm} - q)$, на торе \mathbb{T}^2 они совпадают с точками $(\frac{q}{ak}, \frac{p}{bm})$ при $|\frac{q}{ak}| \leq \frac{1}{k}$ и $|\frac{p}{bm}| \leq \frac{1}{m}$. Следовательно, все неподвижные точки группы G_σ , лежащие в пересечении $W \cap S$, образуют множество

$$\left\{ \left(\frac{q}{ak}, \frac{p}{bm} \right) \mid q = 0, \pm 1, \dots, \pm a; \ p = 0, \pm 1, \dots, \pm b \right\}. \quad (5)$$

Случай 2: $(x, y) \in W$, $\omega_{a,k}(x, y) \notin S$. По определению T_σ мы имеем $(x, y) \in R \setminus S$.

Имеет место цепочка равенств:

$$T_\sigma(x, y) = \nu_{b,m}(\omega_{a,k}(x, y)) = \nu_{b,m}(x, y + akx) = (x, y + akx).$$

Так как $T_\sigma(x, y) = (x, y)$, то существует $q \in \mathbb{Z}$ такое, что $y + akx = y + q$. Следовательно,

$$\left\{ \left(\frac{q}{ak}, y \right) \mid q = 0, \pm 1, \dots, \pm a; \ y \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{m} \right) \cup \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (6)$$

— множество всех неподвижных точек группы G_σ в $R \setminus S$.

Случай 3: $(x, y) \in R \setminus W$. При этом верна цепочка равенств:

$$T_\sigma(x, y) = \nu_{b,m}(\omega_{a,k}(x, y)) = \nu_{b,m}(x, y) = (x + bmy, y).$$

Поскольку $T_\sigma(x, y) = (x, y)$, существует $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $x + bmy = x + p$. Тогда

$$\left\{ \left(x, \frac{p}{bm} \right) \mid x \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{k} \right) \cup \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2} \right]; \ p = 0, \pm 1, \dots, \pm b \right\} \quad (7)$$

— множество всех неподвижных точек группы G_σ в $R \setminus W$.

Объединение множеств (5), (6) и (7) образует пространство неподвижных точек группы G_σ . Перераспределив точки множеств (5), (6) и (7) между собой, мы получим, что

$$Fix(G_\sigma) = \partial R \sqcup DF(G_\sigma) \sqcup I(G_\sigma),$$

где

$$\partial R = \left\{ \left(\pm \frac{1}{k}, y \right) \mid y \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{m} \right] \cup \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right] \right\} \cup \left\{ \left(x, \pm \frac{1}{m} \right) \mid x \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{k} \right] \cup \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{2} \right] \right\}$$

— край поверхности R ,

$$DF(G_\sigma) := \left\{ \left(\frac{q}{ak}, \frac{p}{bm} \right) \mid q = 0, \pm 1, \dots, \pm(a-1); \ p = 0, \pm 1, \dots, \pm(b-1) \right\} \quad (8)$$

— множество изолированных неподвижных точек группы G_σ ,

$$I(G_\sigma) := \left\{ \left(\frac{q}{ak}, y \right) \mid q = 0, \pm 1, \dots, \pm(a-1); \ y \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{m} \right] \cup \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right] \right\} \cup \left\{ \left(x, \frac{p}{bm} \right) \mid x \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{k} \right] \cup \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{2} \right]; \ p = 0, \pm 1, \dots, \pm(b-1) \right\}$$

— неподвижные отрезки группы G_σ .

Множество изолированных неподвижных точек $DF(G_\sigma)$ является максимальным дискретным подмножеством в пространстве $Fix(G_\sigma)$. Это множество конечно и содержит $(2a - 1) \cdot (2b - 1)$ точек.

□

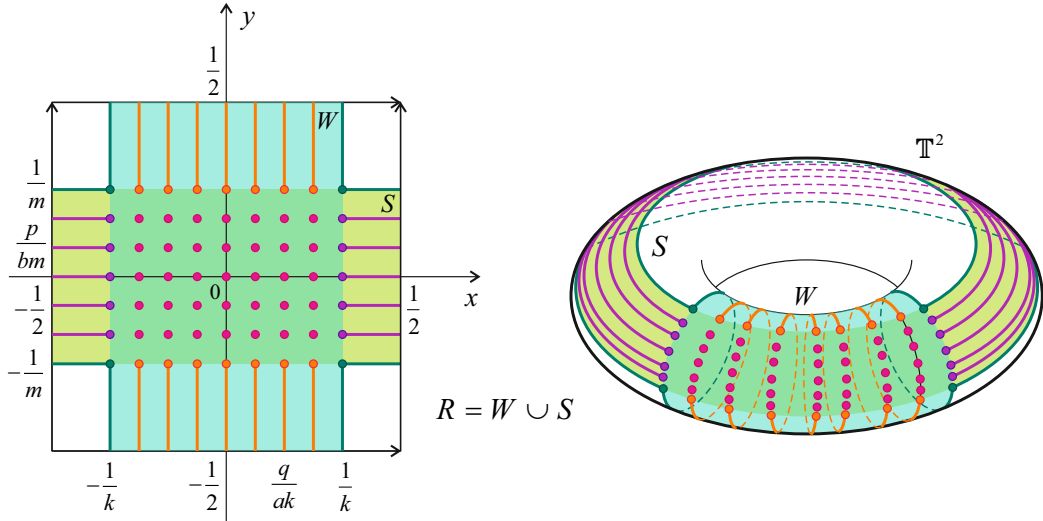


Рис. 6: Пространство неподвижных точек $Fix(G_\sigma)$ группы G_σ .

Замечание 4.2. Утверждение теоремы 4.1 включено в работу [16]. Отметим, что количество изолированных неподвижных точек группы, порожденной торальным скручивающим отображением T_σ , где $\sigma = (a, b, k, m)$, не зависит от параметров k и m .

4.2 Пространство орбит группы гомеоморфизмов

Пусть G — группа гомеоморфизмов топологического многообразия X .

Введем на X следующее отношение: $x \sim x' \Leftrightarrow x' \in G.x$. Проверим, что \sim является отношением эквивалентности.

Так как $e = id_X \in G$, то $x \in G.x \ \forall x \in X$. То есть, отношение \sim рефлексивно.

Если $x \sim x'$, то $x' \in G.x$ и существует элемент группы $g \in G$ такой, что $x' = g(x)$. По определению группы, $g^{-1} \in G$. Тогда $x = g^{-1}(x')$, и $x \in G.x'$, то есть $x' \sim x$, и отношение \sim симметрично.

Если $x \sim x'$ и $x' \sim x''$, то существуют $g_1, g_2 \in G$ такие, что $x' = g_1(x)$ и $x'' = g_2(x')$. Тогда $x'' = g_2(g_1(x)) = g_2 \circ g_1(x)$, что влечет $x'' \in G.x$, то есть $x'' \sim x$, и отношение \sim транзитивно.

Таким образом, определено фактор-пространство X/\sim , точками которого являются классы эквивалентности $[x] = \{y \in X \mid y \in G.x\}$, $x \in X$.

Определение 4.2. Фактор-пространство X/\sim по введенному выше отношению эквивалентности \sim называется *пространством орбит* группы гомеоморфизмов G многообразия X и обозначается через X/G . Фактор-отображение $\mu : X \rightarrow X/G$, $\mu(x) = [x]$, $x \in X$, называется *проекцией* на пространство орбит.

4.3 Индуцированные гомеоморфизмы диска \mathbb{B}^2

Пусть стандартный двумерный тор \mathbb{T}^2 представлен на плоскости \mathbb{R}^2 в декартовой системе координат как квадрат $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ со склеенными соответствующим образом противоположными сторонами.

Зададим диффеоморфизм $\gamma : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ равенством $\gamma(x, y) = -(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{T}^2$. При этом определены группа диффеоморфизмов $\Gamma := \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, порожденная γ , и пространство орбит $\mathcal{P} := \mathbb{T}^2/\Gamma$ с проекцией $\vartheta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{P}$.

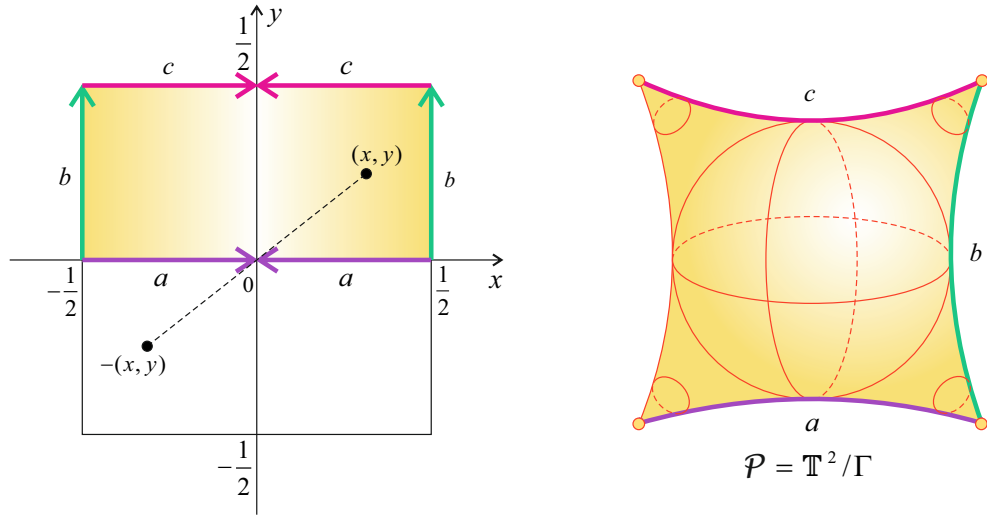


Рис. 7: Пространство орбит $\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$.

Полученное пространство орбит \mathcal{P} является гладким орбифолдом [14], который называется «Подушка» (см. рис. 7). Топологическое пространство орбифолда \mathcal{P} гомеоморфно стандартной двумерной сфере \mathbb{S}^2 , поэтому далее «Подушка» \mathcal{P} и сфера \mathbb{S}^2 отождествляются. Проекция $\vartheta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{P}$ на пространство орбит является непрерывным и открытым сюръективным отображением [15, Лемма 3.3].

Образ $\vartheta(R)$ поверхности R , определенной в разделе 4.1, относительно проекции ϑ есть компактное двумерное подмногообразие сферы \mathbb{S}^2 с одной компонентой края, гомеоморфной окружности \mathbb{S}^1 (см. рис. 8). Поэтому $\vartheta(R)$ — поверхность, гомеоморфная двумерному диску \mathbb{B}^2 . Отождествим $\vartheta(R)$ с \mathbb{B}^2 по этому гомеоморфизму.

Пусть $\widehat{T}_\sigma : \vartheta(R) \rightarrow \vartheta(R)$ — отображение, индуцированное торальным скручивающим отображением согласно соотношению $\widehat{T}_\sigma([(x, y)]) = [T_\sigma(x, y)] \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2$. При этом коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{T_\sigma} & R \\
 \vartheta \downarrow & & \downarrow \vartheta \\
 \vartheta(R) & \xrightarrow{\widehat{T}_\sigma} & \vartheta(R).
 \end{array} \tag{9}$$

Покажем, что отображение \widehat{T}_σ не зависит от выбора представителя в классе $[(x, y)]$.

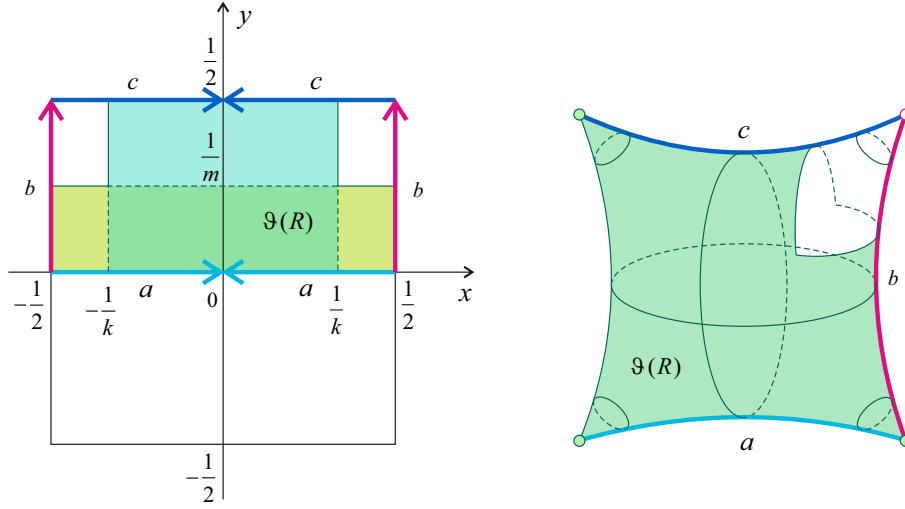


Рис. 8: Образ $\vartheta(R)$ поверхности R на «Подушке» \mathcal{P} .

Пусть $(x', y') \in \Gamma.(x, y)$ и $(x', y') = -(x, y)$. При этом

$$\omega_{a,k}(x', y') = \omega_{a,k}(-x, -y) = \begin{cases} (-x, -y - akx) = -(x, y + akx), & (x, y) \in W; \\ (-x, -y) = -(x, y), & (x, y) \notin W, \end{cases} = -\omega_{a,k}(x, y),$$

$$\nu_{b,m}(x', y') = \nu_{b,m}(-x, -y) = \begin{cases} (-x - bmy, -y) = -(x + bmy, y), & (x, y) \in S; \\ (-x, -y) = -(x, y), & (x, y) \notin S, \end{cases} = -\nu_{b,m}(x, y).$$

Тогда $T_\sigma(-x, -y) = \nu_{b,m}(\omega_{a,k}(-x, -y)) = \nu_{b,m}(-\omega_{a,k}(x, y)) = -\nu_{b,m}(\omega_{a,k}(x, y)) = -T_\sigma(x, y)$. Поэтому $[T_\sigma(x, y)] = [T_\sigma(-x, -y)]$, и отображение \widehat{T}_σ определено корректно.

Предложение 4.2. *Группа $\widehat{G}_\sigma := \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$, порожденная отображением $\widehat{T}_\sigma : \vartheta(R) \rightarrow \vartheta(R)$, является группой гомеоморфизмов двумерного диска \mathbb{B}^2 , причем \widehat{G}_σ оставляет неподвижным край $\partial\mathbb{B}^2$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{T}_\sigma([(x_1, y_1)]) = \widehat{T}_\sigma([(x_2, y_2)])$, тогда $[T_\sigma(x_1, y_1)] = [T_\sigma(x_2, y_2)]$. Следовательно,

$$\{T_\sigma(x_1, y_1), -T_\sigma(x_1, y_1)\} = \{T_\sigma(x_2, y_2), -T_\sigma(x_2, y_2)\}.$$

Так как отображение T_σ инъективно, то либо $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, либо $(x_1, y_1) = -(x_2, y_2)$. При этом $[(x_1, y_1)] = [(x_2, y_2)]$, то есть отображение \widehat{T}_σ инъективно.

Для любой точки $[(x, y)] \in \vartheta(R)$ в силу сюръективности отображения T_σ существует точка $[T_\sigma^{-1}(x, y)] \in R$, образ которой при отображении \widehat{T}_σ равен

$$\widehat{T}_\sigma([T_\sigma^{-1}(x, y)]) = [T_\sigma(T_\sigma^{-1}(x, y))] = [(x, y)].$$

Следовательно, отображение \widehat{T}_σ сюръективно и является биекцией.

Поскольку диаграмма (9) коммутативна и отображения T_σ, ϑ непрерывны и открыты, композиция $\vartheta \circ T_\sigma = \widehat{T}_\sigma$ также является непрерывным и открытым отображением. Таким образом, $\widehat{T}_\sigma : \vartheta(R) \rightarrow \vartheta(R)$ — гомеоморфизм.

Так как $\vartheta(R)$ отождествлено с \mathbb{B}^2 , то \widehat{T}_σ — гомеоморфизм двумерного диска \mathbb{B}^2 . Согласно построению \widehat{T}_σ , все точки края $\partial(\vartheta(R)) \cong \partial\mathbb{B}^2$ являются неподвижными относительно \widehat{T}_σ , поскольку они неподвижны относительно T_σ . Следовательно, $\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ — группа гомеоморфизмов двумерного диска \mathbb{B}^2 , оставляющая неподвижным край $\partial\mathbb{B}^2$. \square

Предложение 4.3. *Группа гомеоморфизмов $\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ двумерного диска \mathbb{B}^2 является хаотической.*

Доказательство. Гомеоморфизм $\widehat{T}_\sigma : \vartheta(R) \rightarrow \vartheta(R)$ компактного подмножества $\vartheta(R) \subset \mathcal{P}$ индуцирован гомеоморфизмом $T_\sigma : R \rightarrow R$ поверхности R . Согласно предложению 4.1, $G_\sigma = \langle T_\sigma \rangle$ — хаотическая группа гомеоморфизмов R . В силу коммутативности диаграммы (9), гомеоморфизм T_σ полусопряжен с гомеоморфизмом \widehat{T}_σ посредством сужения $\vartheta|_R : R \rightarrow \vartheta(R)$, которое является непрерывным сюръективным отображением. Тогда выполняются условия следствия 3.1 из предложения 3.3, и $\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ является хаотической группой гомеоморфизмов $\vartheta(R) \cong \mathbb{B}^2$. \square

Следующее утверждение является обобщением теоремы 3.2, доказанной в [16]. В данной работе рассматривается случай произвольных параметров $a, b, k, m \in \mathbb{N}$, $k, m \geq 5$.

Теорема 4.2. *Пусть \widehat{G}_σ — группа гомеоморфизмов диска \mathbb{B}^2 , определенная выше, и $\sigma = (a, b, k, m)$ — четверка фиксированных натуральных чисел, где $k, m \geq 5$. Пространство неподвижных точек $Fix(\widehat{G}_\sigma)$ группы \widehat{G}_σ содержит ровно $4ab - a - b + 1$ изолированных неподвижных точек.*

Доказательство. Точка является неподвижной относительно группы $\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ тогда и только тогда, когда она неподвижна относительно гомеоморфизма \widehat{T}_σ согласно определению группы, порожденной гомеоморфизмом.

Точка $[z] \in \vartheta(R)$ является неподвижной относительно индуцированного гомеоморфизма \widehat{T}_σ тогда и только тогда, когда $T_\sigma(z) = \pm z$. Поэтому пространство неподвижных точек $Fix(\widehat{G}_\sigma)$ группы \widehat{G}_σ имеет вид

$$Fix(\widehat{G}_\sigma) = \vartheta(Fix(G_\sigma)) \cup \vartheta(N),$$

где $N = \{z \in R \mid T_\sigma(z) = -z\}$.

Выясним структуру множества N .

Точка $(x, y) \in N \cap Fix(G_\sigma)$ удовлетворяет соотношению $(x, y) = (-x, -y) + (p, q)$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Z}$. Тогда $(x, y) = (\frac{p}{2}, \frac{q}{2}) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$, следовательно

$$N \cap Fix(G_\sigma) = \{(0, 0), (0, \pm \frac{1}{2}), (\pm \frac{1}{2}, 0)\}.$$

Так как $T_\sigma(-x, -y) = -T_\sigma(x, y)$, то $T_\sigma(-x, -y) = (x, y) = -(-x, -y)$, и для каждой точки $(x, y) \in N$ противоположная ей точка $(-x, -y)$ тоже принадлежит N . Поэтому $N := N_0 \sqcup N_+ \sqcup N_-$, где $N_+ = \{(x, y) \in N \mid 0 < y < \frac{1}{2}\}$, $N_- = \{-(x, y) \mid (x, y) \in N_+\}$, $N_0 = N \cap Fix(G_\sigma)$. Заметим, что $\vartheta(N_+) = \vartheta(N_-)$, при этом

$$Fix(\widehat{G}_\sigma) = \vartheta(Fix(G_\sigma)) \sqcup \vartheta(N_+),$$

и достаточно изучить только точки множества N_+ .

Пусть $(x, y) \in R$, $T_\sigma(x, y) = -(x, y)$.

Случай 1: $(x, y) \in W$, $\omega_{a,k}(x, y) \notin S$. Тогда $(x, y) \in R \setminus S$, согласно определению отображений $\omega_{a,k}$ и $\nu_{b,m}$.

Верно равенство: $T_\sigma(x, y) = (x, y + akx)$. Так как $T_\sigma(x, y) = -(x, y)$, то существуют целые числа p, q , при которых $x = -x + p$ и $y + akx = -y + q$. Следовательно, $x = \frac{p}{2}$, причем $|x| \leq \frac{1}{k}$, поэтому $x = 0$ и $y = \frac{q}{2}$, $\frac{1}{m} < |y| \leq \frac{1}{2}$. Таким образом, получены точки $(0, \pm \frac{1}{2}) \in N$. Но $(0, \pm \frac{1}{2}) \in Fix(G_\sigma)$, поэтому эти точки принадлежат пересечению $N_0 = Fix(G_\sigma) \cap N$.

Случай 2: $(x, y) \in R \setminus W$. Аналогично случаю 1 находим точки $(\pm \frac{1}{2}, 0) \in N_0$.

Случай 3: $(x, y) \in W$, $\omega_{a,k}(x, y) \in S$. Тогда $(x, y) \in W \cap S$ в силу определения отображений $\omega_{a,k}$ и $\nu_{b,m}$.

Верна следующая цепочка равенств:

$$T_\sigma(x, y) = \nu_{b,m}(\omega_{a,k}(x, y)) = \nu_{b,m}(x, y + r k x) = (x + b m(y + a k x), y + a k x).$$

Так как $T_\sigma(x, y) = -(x, y)$, то существуют числа $p, q \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\begin{cases} x + b m(y + a k x) = -x + p \\ y + a k x = -y + q \end{cases} \quad (10)$$

Положим $r := p - b m q \in \mathbb{Z}$, тогда система (10) примет вид:

$$\begin{cases} x - b m y = -x + r \\ y + a k x = -y + q \end{cases} \quad (11)$$

Системе (11) удовлетворяют точки $(x, y) \in W \cap S$, которые имеют следующие координаты:

$$x = \frac{2r + b m q}{4 + a b k m}, \quad y = \frac{2q - a k r}{4 + a b k m}.$$

Эти координаты связаны соотношением

$$x = \frac{1}{2}(b m y + r).$$

Так как $(x, y) \in W \cap S$, то $-\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} &\leq \frac{1}{2}(b m y + r) \leq \frac{1}{k} \quad | \cdot 2 \\ -\frac{2}{k} &\leq b m y + r \leq \frac{2}{k} \quad | - \{b m y\} \\ \{b m y\} - \frac{2}{k} &\leq [b m y] + r \leq \{b m y\} + \frac{2}{k}, \end{aligned}$$

где $[b m y]$ и $\{b m y\}$ — целая и дробная части числа $b m y$, и $b m y = [b m y] + \{b m y\}$.

Целое число $[b m y] + r$ лежит в отрезке $[\{b m y\} - \frac{2}{k}, \{b m y\} + \frac{2}{k}]$, длина которого равна $\frac{4}{k}$, и при $k \geq 5$ она меньше 1.

По определению дробной части числа имеем $0 \leq \{b m y\} < 1$, поэтому целыми числами в отрезке $[\{b m y\} - \frac{2}{k}, \{b m y\} + \frac{2}{k}]$ могут быть только

$$0, \text{ если } \{b m y\} - \frac{2}{k} \leq 0; \quad 1, \text{ если } \{b m y\} + \frac{2}{k} \geq 1.$$

Тогда

$$r = -[b m y], \text{ если } \{b m y\} \leq \frac{2}{k}; \quad r = 1 - [b m y], \text{ если } \{b m y\} \geq 1 - \frac{2}{k}.$$

Так как $(x, y) \in W \cap S$ и $y > 0$, то $0 < y \leq \frac{1}{m}$. Положим $s := 2q - a k r \in \mathbb{Z}$, тогда $y = \frac{s}{4 + a b k m}$, $1 \leq s \leq a b k$. При этом y удовлетворяет одному из следующих представлений:

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= \frac{a k \eta + \xi}{4 + a b k m}, \quad 0 \leq \eta \leq b - 1, \quad 1 \leq \xi \leq a k - 1; \\ (2) \quad y &= \frac{a k(\eta + 1)}{4 + a b k m}, \quad 1 \leq \eta + 1 \leq b. \end{aligned}$$

Если y имеет вид (1), то

$$bmy = \frac{abkm\eta + bm\xi}{4 + abkm} = \frac{(4 + abkm)\eta + bm\xi - 4\eta}{4 + abkm} = \eta + \frac{bm\xi - 4\eta}{4 + abkm};$$

$$[bmy] = \eta, \quad \{bmy\} = \frac{bm\xi - 4\eta}{4 + abkm}.$$

При $1 \leq \xi \leq 2a$ выполняется $\{bmy\} \leq \frac{2}{k}$, тогда $r = -\eta$, где $0 \leq \eta \leq b - 1$, и

$$s = 2q - akr = 2q + ak\eta = ak\eta + \xi \Rightarrow q = \frac{\xi}{2} \in \mathbb{Z},$$

следовательно, $1 \leq q \leq a$ и $-b + 1 \leq r \leq 0$.

Если $a(k - 2) + 1 \leq \xi \leq ak - 1$, то $\{bmy\} \geq 1 - \frac{2}{k}$, при этом $r = 1 - \eta$, где $0 \leq \eta \leq b - 1$,

$$s = 2q - akr = 2q - ak(1 - \eta) = ak\eta + \xi \Rightarrow q = \frac{\xi + ak}{2} \in \mathbb{Z},$$

тогда $a(k - 1) + 1 \leq q \leq a(k - 1) + (a - 1)$ и $-b + 2 \leq r \leq 1$.

Если y имеет вид (2), то

$$bmy = \frac{abkm(\eta + 1)}{4 + abkm} = \frac{(4 + abkm)\eta - 4(\eta + 1)}{4 + abkm} = \eta + 1 - \frac{4(\eta + 1)}{4 + abkm};$$

$$[bmy] = \eta, \quad \{bmy\} = 1 - \frac{4(\eta + 1)}{4 + abkm}.$$

Для всех η , $0 \leq \eta \leq b - 1$, имеет место неравенство $\{bmy\} \geq 1 - \frac{2}{k}$, поэтому $r = 1 - \eta$ и

$$s = 2q - akr = 2q - ak(1 - \eta) = ak(\eta + 1) \Rightarrow q = ak \in \mathbb{Z},$$

и $-b + 2 \leq r \leq 1$.

Таким образом, множество N_+ принадлежит пересечению $W \cap S$, и его мощность равна $|N_+| = ab + (a - 1)b + b = 2ab$. Поскольку координата y всех точек множества N_+ положительна, то сужение $\vartheta|_{N_+} : N_+ \rightarrow \vartheta(N_+)$ — биекция, и $|\vartheta(N_+)| = |N_+| = 2ab$.

Мощность множества $DF(\widehat{G}_\sigma)$ всех изолированных точек пространства $Fix(\widehat{G}_\sigma)$ равна $|DF(\widehat{G}_\sigma)| = |\vartheta(DF(G_\sigma))| + |\vartheta(N_+)|$. В равенстве (8) доказательства теоремы 4.1 перечислены все точки множества $DF(G_\sigma)$. По определению проекции $\vartheta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{P}$, множество $\vartheta(DF(G_\sigma))$ имеет следующий вид:

$$\vartheta(DF(G_\sigma)) = \left\{ \left(0, \frac{p}{bm} \right) \mid p = 0, 1, \dots, (b - 1) \right\} \cup$$

$$\left\{ \left(\frac{q}{ak}, \frac{p}{bm} \right) \mid q = 1, \dots, (a - 1); p = 0, \pm 1, \dots, \pm(b - 1) \right\},$$

и $|\vartheta(DF(G_\sigma))| = b + (a - 1)(2b - 1) = 2ab - a - b + 1$.

Таким образом, $|DF(\widehat{G}_\sigma)| = 2ab + 2ab - a - b + 1 = 4ab - a - b + 1$. □

Замечание 4.3. Количество изолированных неподвижных точек группы гомеоморфизмов \widehat{G}_σ , где $\sigma = (a, b, k, m)$, $a, b, k, m \in \mathbb{N}$ и $k, m \geq 5$, не зависит от параметров k и m .

5 Хаотические группы гомеоморфизмов поверхностей

5.1 Хаотические группы гомеоморфизмов компактных поверхностей с краем

Перейдем к построению хаотических групп гомеоморфизмов компактных поверхностей с краем.

Группа $\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ оставляет неподвижными все точки края $\partial\mathbb{B}^2$, согласно предложению 4.2. Тогда мы можем склеивать край $\partial\mathbb{B}^2$ произвольным образом и получать новые поверхности, на которых индуцируются хаотические группы гомеоморфизмов.

Отождествим $\partial\mathbb{B}^2$ с $3n$ -угольником, $n \in \mathbb{N}$, на плоскости \mathbb{R}^2 и склеим его стороны согласно схеме $c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_n d_n c_n^{-1}$. В результате склейки из диска \mathbb{B}^2 получается сфера с n компонентами края $\mathbb{S}_{0,n}^2$.

Если же представить $\partial\mathbb{B}^2$ как $4p + 3n$ -угольник, $p, n \in \mathbb{N}$, и склеить его стороны по схеме $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_n d_n c_n^{-1}$, то из диска \mathbb{B}^2 мы получаем сферу с p ручками и n компонентами края $\mathbb{S}_{p,n}^2$.

Наконец, если отождествить $\partial\mathbb{B}^2$ с $2q + 3n$ -угольником, $q, n \in \mathbb{N}$, и склеить его стороны согласно схеме $a_1 a_1 \dots a_q a_q c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_n d_n c_n^{-1}$, из диска \mathbb{B}^2 получается сфера с q пленками Мёбиуса и n компонентами края $N_{q,n}^2$.

На каждой компактной поверхности M , полученной таким способом, гомеоморфизм $\widehat{T}_\sigma : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ индуцирует отображение $\widetilde{T}_\sigma : M \rightarrow M$, и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^2 & \xrightarrow{\widehat{T}_\sigma} & \mathbb{B}^2 \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ M & \xrightarrow{\widetilde{T}_\sigma} & M, \end{array}$$

где $\lambda : \mathbb{B}^2 \rightarrow M$ — отображение склейки.

Индукционное отображение $\widetilde{T}_\sigma : M \rightarrow M$ также является гомеоморфизмом. Так как λ является фактор-отображением, то λ непрерывно и сюръективно. Следовательно, гомеоморфизм \widetilde{T}_σ полусопряжен с гомеоморфизмом \widehat{T}_σ посредством λ , и группа гомеоморфизмов $\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ является хаотической (предложение 4.3). Тогда хаотичность группы гомеоморфизмов $\widetilde{G}_\sigma := \langle \widetilde{T}_\sigma \rangle$ поверхности M следует из хаотичности группы $\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ диска \mathbb{B}^2 согласно следствию 3.1 предложения 3.3.

Обозначим через M_0 образ $\lambda(Int(\mathbb{B}^2))$ относительно отображения склейки λ . Сужение $\lambda|_{Int(\mathbb{B}^2)} : Int(\mathbb{B}^2) \rightarrow M_0$ отображения λ на внутренность диска $Int(\mathbb{B}^2)$ является биекцией, поскольку при склейке отождествляются только точки края диска $\partial\mathbb{B}^2$. Это сужение является непрерывным и открытым отображением согласно правилам склейки. Следовательно, сужение $\lambda|_{Int(\mathbb{B}^2)} : Int(\mathbb{B}^2) \rightarrow M_0$ является гомеоморфизмом.

Множество изолированных неподвижных точек $DF(\widehat{G}_\sigma)$ группы \widehat{G}_σ лежит во внутренности диска $Int(\mathbb{B}^2)$. Следовательно, $DF(\widehat{G}_\sigma)$ гомеоморфно отображается посредством $\lambda|_{Int(\mathbb{B}^2)}$ в множество изолированных неподвижных точек $DF(\widetilde{G}_\sigma)$ группы \widetilde{G}_σ . Количество точек подмножеств $DF(\widehat{G}_\sigma)$ и $DF(\widetilde{G}_\sigma)$ одинаково и равно $4ab - a - b + 1$ (теорема 4.2).

Зафиксируем числа $b, k, m \in \mathbb{N}$, $k, m \geq 5$. Пусть $\sigma = (a, b, k, m)$ и $\sigma' = (a', b, k, m)$, где $a \neq a'$, $a, a' \in \mathbb{N}$. Из теоремы 4.2 вытекает, что пространства неподвижных точек $Fix(\widetilde{G}_\sigma)$ и $Fix(\widetilde{G}_{\sigma'})$ групп \widetilde{G}_σ и $\widetilde{G}_{\sigma'}$ содержат разное число изолированных неподвижных точек. Следовательно, пространства $Fix(\widetilde{G}_\sigma)$ и $Fix(\widetilde{G}_{\sigma'})$ не гомеоморфны. Тогда, соглас-

но предложению 2, группы гомеоморфизмов \tilde{G}_σ и $\tilde{G}_{\sigma'}$ поверхности M топологически не сопряжены.

Поскольку любая компактная поверхность с краем гомеоморфна одной из перечисленных в теореме 2.1 поверхностей, мы получим попарно топологически не сопряженные хаотические группы гомеоморфизмов \tilde{G}_σ любой компактной поверхности, где $\sigma = (a, b, k, m)$, натуральные числа b, k, m фиксированы, а параметр a пробегает множество натуральных чисел \mathbb{N} . Следовательно, на каждой компактной поверхности с краем определено счетное семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов.

Каждая хаотическая группа гомеоморфизмов $G = \langle g \rangle$ многообразия X , порожденная гомеоморфизмом $g : X \rightarrow X$, изоморфна группе целых чисел \mathbb{Z} . Действительно, поскольку существует всюду плотная орбита группы G , ни при каком $n \in \mathbb{Z}$ не будет равенства $g^n = id_X$, следовательно, G является бесконечной циклической группой.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть M — произвольная компактная поверхность с краем. Пусть \tilde{G}_σ , где $\sigma = \sigma(a)$, $a \in \mathbb{N}$, — группа гомеоморфизмов поверхности M , определенная выше. Тогда

$$\{\tilde{G}_\sigma \mid \sigma = \sigma(a), a \in \mathbb{N}\}$$

— семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов M , изоморфных группе \mathbb{Z} .

5.2 Хаотические группы гомеоморфизмов замкнутых поверхностей

Замкнутые поверхности получаются из диска \mathbb{B}^2 путем отождествления его края $\partial\mathbb{B}^2$ с одним из следующих многоугольников:

- (1) двуугольник;
- (2) $4p$ -угольник;
- (3) $2q$ -угольник,

и склейки сторон этого многоугольника согласно соответствующей схеме:

- (1) aa^{-1} ;
- (2) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$;
- (3) $a_1 a_1 \dots a_q a_q$.

В результате получают соответствующие замкнутые поверхности:

- (1) сфера \mathbb{S}^2 ;
- (2) сфера с p ручками \mathbb{S}_p^2 ;
- (3) сфера с q пленками Мёбиуса N_q^2 .

Дальнейшие рассуждения идентичны приведенным в доказательстве теоремы 5.1. На замкнутых канонических поверхностях также индуцируются семейства попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов, изоморфных группе \mathbb{Z} . Таким образом, доказана следующая теорема; фактически, она является следствием теоремы 5.1, если число n компонент края равно нулю.

Теорема 5.2. Пусть M — произвольная замкнутая поверхность. Пусть \tilde{G}_σ , где $\sigma = \sigma(a)$, $a \in \mathbb{N}$, — группа гомеоморфизмов поверхности M , определенная выше. Тогда

$$\{\tilde{G}_\sigma \mid \sigma = \sigma(a), a \in \mathbb{N}\}$$

— семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов M , изоморфных группе \mathbb{Z} .

Список литературы

- [1] D. Assaf, S. Gadbois, “Definition of chaos,” *Am. Math. Mon.* **99**, no. 9, 865 (1992).
- [2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, “On Devaney’s definition of chaos,” *Am. Math. Mon.* **99**, no. 4, 332–334 (1992).
- [3] G. Cairns, G. Davis, E. Elton, A. Kolganova, and P. Perversi, “Chaotic group actions,” *Enseign. Math.* **41**, no. 1-2, 123–133 (1995).
- [4] G. Cairns, A. Kolganova and A. Nielsen, “Topological transitivity and mixing notions for group actions,” *Rocky Mt. J. Math.* **37**, no. 2, 371–397 (2007).
- [5] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. 3rd edition*, Chapman and Hall/CRC, NY (2021).
- [6] R. L. Devaney, “Linked Twist Mappings are Almost Anosov,” In: *Global Theory of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics **819**, pp. 121–145, Springer, Berlin, Heidelberg (1980).
- [7] B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton University Press, Princeton, NJ (2011).
- [8] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Springer, Berlin (2011).
- [9] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag, Berlin (1995).
- [10] E. Kontorovich and M. Megrelishvili, “A note on sensitivity of semigroup actions,” *Semigroup Forum* **76**, no. 1, 133–141 (2008).
- [11] W. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace & World Inc., New York-Chicago-San Francisco-Atlanta (1967).
- [12] E. Schechter, *Handbook of Analysis and Its Foundations*, Academic Press, San Diego, CA (1996).
- [13] R. Sturman, J.M. Ottino, S. Wiggins, *The Mathematical Foundations of Mixing*, Cambridge Univ. Press., Cambridge (2006).
- [14] E.V. Bogolepova, N.I. Zhukova, “Anosov actions of isometry groups on Lorentzian 2-orbifolds,” *Lobachevskii J. Math.* **43**, no. 2, 264–275 (2022).
- [15] N.I. Zhukova, G.S. Levin, N.S. Tonysheva, “Chaos in topological foliations,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions* **68**, no. 3, 424–450 (2022).
- [16] Н.И. Жукова, Н.С. Тоньшева, “Хаотические надстроечные слоения топологических многообразий”, *Проблемы математического анализа* **125** (2023) (принято к печати).

Приложение
В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от 01.05.23

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием Вероятностное распределение для
являются: конечных ансамблей перпендикулярных волн

1. методика работы с численной моделью полей ветровых волн на поверхности воды:
 - 1.1. ускорение работы и повышение эффективности алгоритма численного моделирования полей ветровых волн;
 - 1.2. уточнение параметров для моделей с использованием двух разных спектров волнения с целью сравнения полученных результатов с теоретическими оценками и натурными измерениями в дальнейшем.
2. методика работы с натурными измерениями: восстановление действительных смещений волновой поверхности по данным датчика придонного давления с использованием точечной коррекции данных, алгоритмов интерполяции и избавления от «шума», прямого и обратного преобразования Фурье.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: поиск в Интернете, консультация с коллегами из Института прикладной физики Российской академии наук, выступления на конференциях и участие в семинарах.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 13.06.23. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Трегубов Андрей Сергеевич

Подпись: 

30.05.2023, Нижний Новгород

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Трегубова Андрея Сергеевича
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Вероятностные распределения для конечных ансамблей нерегулярных волн» являются: Методика работы с численной моделью поля ветровых волн на воде (ускорение работы алгоритмов и уточнение параметров); Методика работы с натурными измерениями реального волнения; Функции распределения высот и длин волн, наблюдавшихся в Охотском море в районе о. Сахалин (мыс Свободный), а также сравнение этих функций с модельными данными.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 марта по 30 мая 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arXiv.org по следующим ключевым словам: вероятностные распределения для поля ветровых волн с широким спектром/спектром Пирсона-Московица, моделирование случайного поля ветровых волн, probability distributions for a wind wave field with a wide spectrum/Pearson-Moskowitz spectrum, modeling a random wind wave field, статистический анализ волнения Охотского моря, волны-убийцы в Охотском море. В выдаче поисковиков было исследовано 9 статей, 1 каталог волн-убийц, 3 монографии, (список статей и монографий см. в списке литературы ВКР, каталог волн-убийц расположен по адресу <https://ipfran.ru/institute/structure/240605316/catalogue-of-rogue-waves>) и все они не содержали материала, заявляемого мной в выпускной квалификационной работе в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1-2], [11], [12] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с сотрудниками Института прикладной физики из сектора моделирования экстремальных волновых явлений в океане: с моим научным руководителем, кандидатом ф.м. наук, Диденкуловой Екатериной Геннадьевной; а также с научным сотрудником Кокориной Анной Витальевной; с профессором кафедры фундаментальной математики, профессором РАН, Слюняевым Алексеем Викторовичем.

- Проведено выступление на научной конференции «Нелинейные волны 2022» (Нижний Новгород) с постерным докладом, на конференции была представлена часть работы, посвященная численному моделированию.

- Проведено выступление на научной конференции «VII Всероссийская научная студенческая конференция НИУ ВШЭ — Нижний Новгород» с постерным докладом, на конференции была представлена готовая работа.

- Проведено выступление на научной конференции «Комплексные исследования Мирового океана» (КИМО-2023, Санкт-Петербург) с постерным докладом, на конференции была представлена готовая работа.


Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, по результатам участия в конференциях, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной

квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 13.06.2023. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись



Трегубов Андрей Сергеевич

30 мая 2023 г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

**Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика**

Трегубов Андрей Сергеевич

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Вероятностные распределения для конечных ансамблей нерегулярных волн

Рецензент:

Доктор физико-математических наук,

Талипова Татьяна Георгиевна

Научный руководитель:

Кандидат физико-математических наук,
доцент, с.н.с., PhD,

Диденкулова Екатерина Геннадьевна

Нижний Новгород, 2023

Введение

Волны-убийцы - принятое в русскоязычной литературе название неожиданных аномально высоких волн в море. В англоязычной литературе за ними закрепились термины «freak waves» или «rogue waves» [1-3]. Такие волны, как правило, возникают внезапно без видимых причин, и имеют небольшое время жизни от нескольких минут до десятков секунд. В океанографии волны-убийцы более точно определяются как волны, высота которых более чем в два раза превышает значительную высоту волны, которая в свою очередь определяется как среднее значение трети наибольших волн в волновой записи. Следовательно, волны-убийцы не обязательно являются самыми большими волнами на воде; это, скорее, необычно большие волны для данного состояния моря. Такие волны несут в себе серьезную опасность для судов, нефтегазовых платформ, прибрежной инфраструктуры и людей, отдыхающих на берегу, поэтому в настоящее время являются объектом для изучения.

В результате обширных наблюдений постепенно накапливается статистика волн-убийц, которая позволяет исследовать механизмы их образования, характерную форму, время жизни и вероятность их появления в разных условиях. Многочисленные натурные данные измерения поверхностных волн в различных акваториях демонстрируют большую распространенность волн-убийц в Мировом океане [6-10]. Данная работа посвящена численному моделированию поля ветровых волн с использованием двух разных волновых спектров, получению их вероятностных распределений и анализу долговременных записей поверхностных волн вблизи острова Сахалин на основе данных, полученных в результате численного моделирования.

В работе собрана и проанализирована статистика долговременных волновых записей: модельных и натуральных, исследованы возникающие в них волны-убийцы, представлены их профили и проведено сравнение вероятности появления таких волн с теоретическими значениями. Проанализированы статистические моменты волновых полей и функции распределения высот и амплитуд волн.

Оглавление

Введение	1
1. Моделирование волнового поля	3
2. Ширина спектров и распределение Рэля	10
3. Функции распределения амплитуд и высот волн в численных экспериментах	13
4. Обработка натуральных данных	33
5. Контроль качества данных.....	37
6. Анализ статистики натуральных данных.....	42
7. Функции распределения для натуральных данных	47
Заключение.....	53
Список литературы	54

1. Моделирование волнового поля

Для анализа статистики имеющихся натуральных долговременных записей поверхностных волн необходимо выполнить компьютерное моделирование волновых полей для сравнения полученных данных с теоретическими.

В численных экспериментах случайное волновое поле, как правило, задают с помощью суперпозиции спектральных компонент (гармоник) со случайными фазами [4]:

$$\eta(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t - k_i x + \varphi_i), \quad (1)$$

где спектральные амплитуды $a_i = \sqrt{2S(\omega)\Delta\omega}$, $\Delta\omega$ есть интервал дискретизации спектра, $\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$, L – длина записи, $L = N\Delta t$, $\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega}$, N – общее число гармоник, $\Omega = \max(\omega_i)$, $\omega_i = i\Delta\omega$, $k_i = \frac{\omega_i^2}{g}$ – дисперсионное отношение для волн на глубокой воде. Фазы φ_i распределены равномерно и задаются с помощью генератора случайных чисел в пределах от 0 до 2π . $S(\omega)$ – энергетический спектр волнения. Поле содержит в себе приблизительно $N_w \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ индивидуальных волн, ω_0 – абсцисса пикового значения спектра, каждое поле рассматривается в точке $x = 0$. В данной работе для моделирования волновых полей используются два спектра: спектр Пирсона–Московица, выведенный на основе реального ветрового волнения, и модельный спектр Гаусса.

Для начала воспользуемся спектром Пирсона–Московица, он задается уравнением с некоторыми эмпирическими параметрами:

$$S_{PM}(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} e^{-\beta g^4 \omega^{-4}}, \quad (2)$$

где параметр α отвечает за высоту спектра; зависящий от скорости ветра параметр β отвечает за пиковое значение спектра и его ширину; g – ускорение свободного падения.

Данный спектр – один из самых простых спектров, задающих распределение энергии в рамках реального волнения. В его основе лежит предположение о том, что при длительном воздействии ветра с постоянной скоростью на большой акватории через некоторое время волны достигнут точки равновесия с ветром. Волновое поле, реализованное этим спектром, считается полностью развитым. На основе наблюдений Пирсона и Московица в Северной Атлантике в течение 1964 года спектр был разработан и тщательно повторно анализировался в последующие года, в результате чего подтвердились некоторые значения и были установлены параметры начальных наблюдений [7].

Значительная высота волн H_s в записи определяется как среднее от трети наибольших волн в записи и оценивается как $H_s = 4\sigma$, где σ^2 – дисперсия колебаний уровня моря, которая является интегралом от спектра:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (3)$$

Таким образом оценивается интенсивность волнения через общее значение энергии, распределенное по гармоникам.

Затем проведем аналогичный численный эксперимент с использованием гауссового (модельного) спектра и сравним результаты. Формы двух представленных спектров представлены на рис. 1. Данный спектр базируется на гауссовой функции плотности распределения вероятности (нормального распределения энергии по гармоникам в данном случае).

$$S_G(\omega) = Q e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2K^2}}, \quad Q = \frac{\sigma^2}{K\sqrt{2\pi}} \quad (4)$$

Параметр K отвечает за ширину спектра, и был выбран равным $K=0.04$. Выбор пиковой частоты ω_0 , равной пиковой частоте предыдущего спектра $S_{PM}(\omega)$, позволяет совместить пики двух спектров, а значение Q , определяемое через интеграл от $S_{PM}(\omega)$, позволяет сохранить одинаковую площадь под графиками спектров (соответственно и одинаковые H_s) для релевантности сравнения.

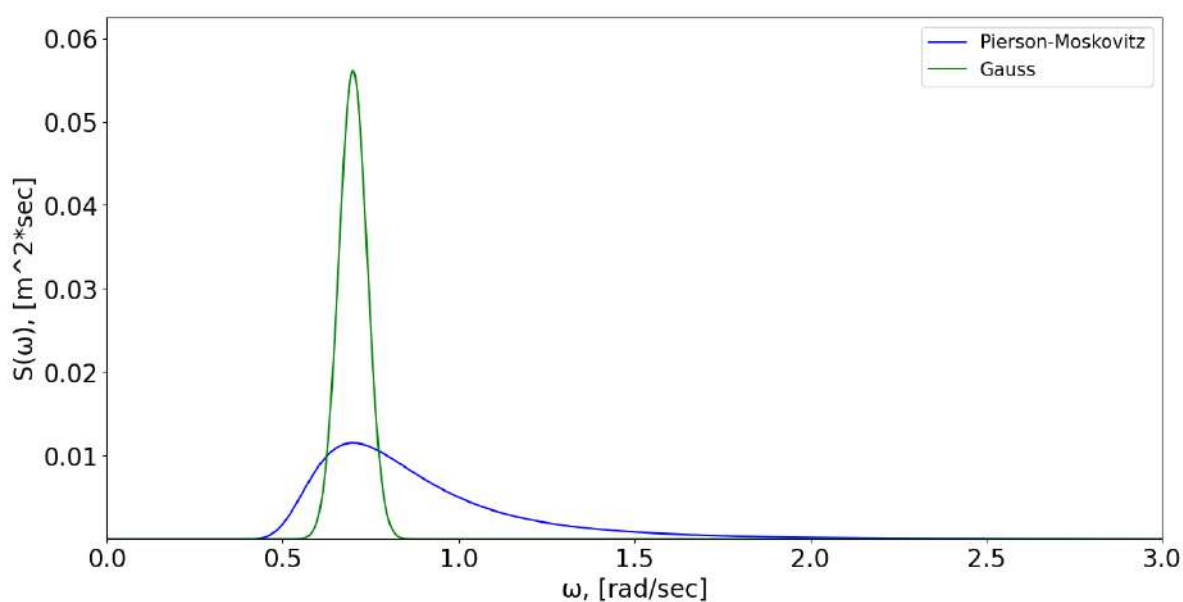


Рис.1. Спектр Пирсона-Московица и гауссовый спектр.

Далее, по формуле (1) считаются реализации волновых полей. Каждая реализация представляет собой набор точек, определенных двумя координатами. Значения Ω для спектров определяются так, чтобы интервал дискретизации Δt позволял описывать каждую индивидуальную волну достаточным количеством точек на период. На рис. 2 показаны реализации, построенные с использованием спектра Пирсона-Московица для разных Ω (а, следовательно, с разными интервалами Δt), откуда очевидно, что малые значения Ω не позволяют хорошо описать каждую индивидуальную волну: малые интервалы дискретизации дают «срезанные» волны, что делает невозможным оценку их реальной высоты.

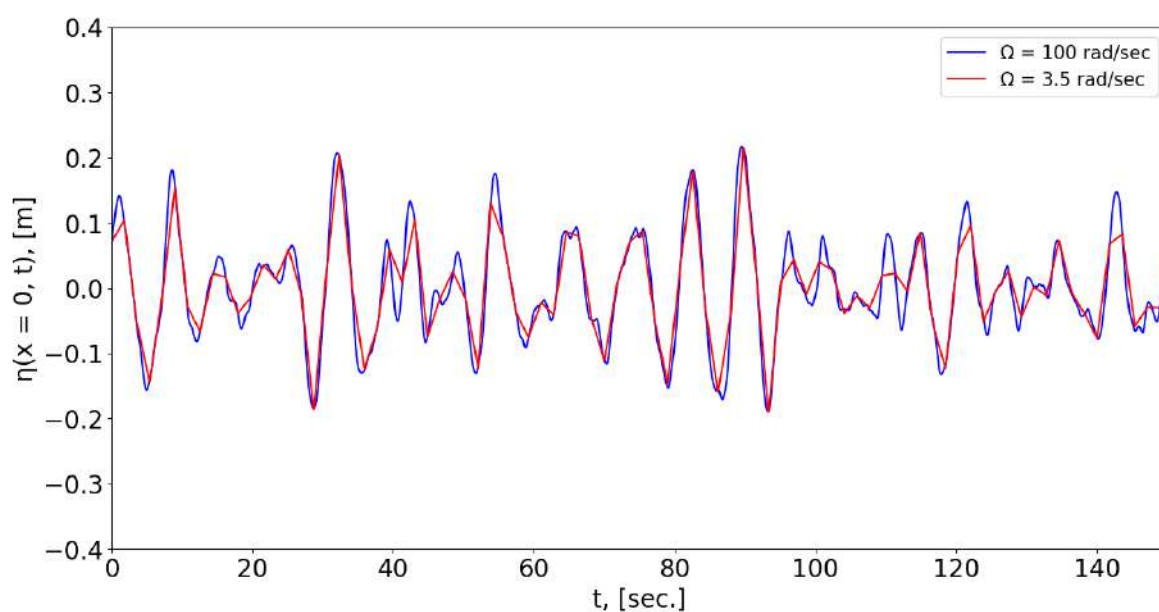


Рис. 2 Смещения водных поверхностей, реализованные разным числом точек.

Одна из реализаций волнового поля (1) в точке $x = 0$ с каждым из данных спектров представлена на рис. 3 и 4. Увеличенный масштаб волнового поля дан на рис. 5 и 6.

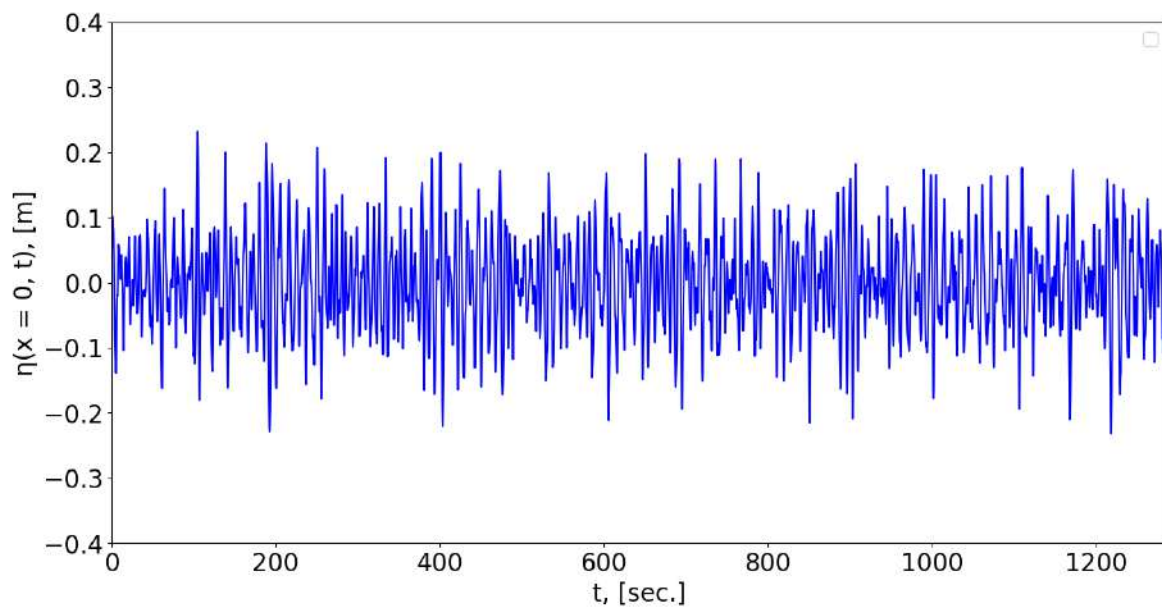


Рис. 3 Поле ветровых волн со спектром Пирсона-Московица при $x = 0$.

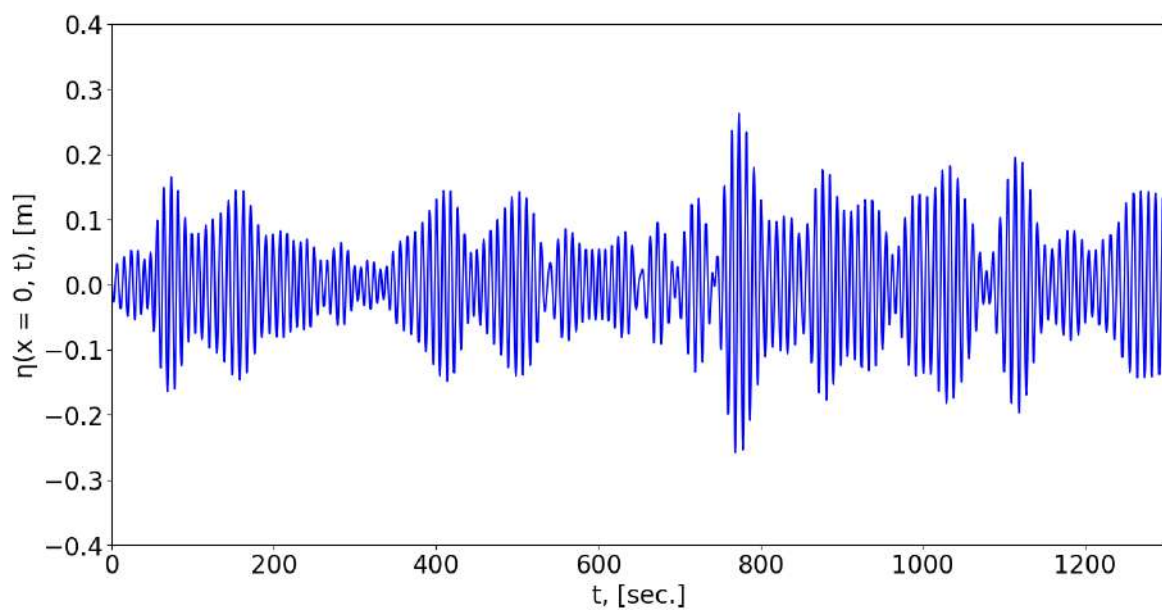


Рис. 4 Поле ветровых волн с гауссовым спектром при $x = 0$.

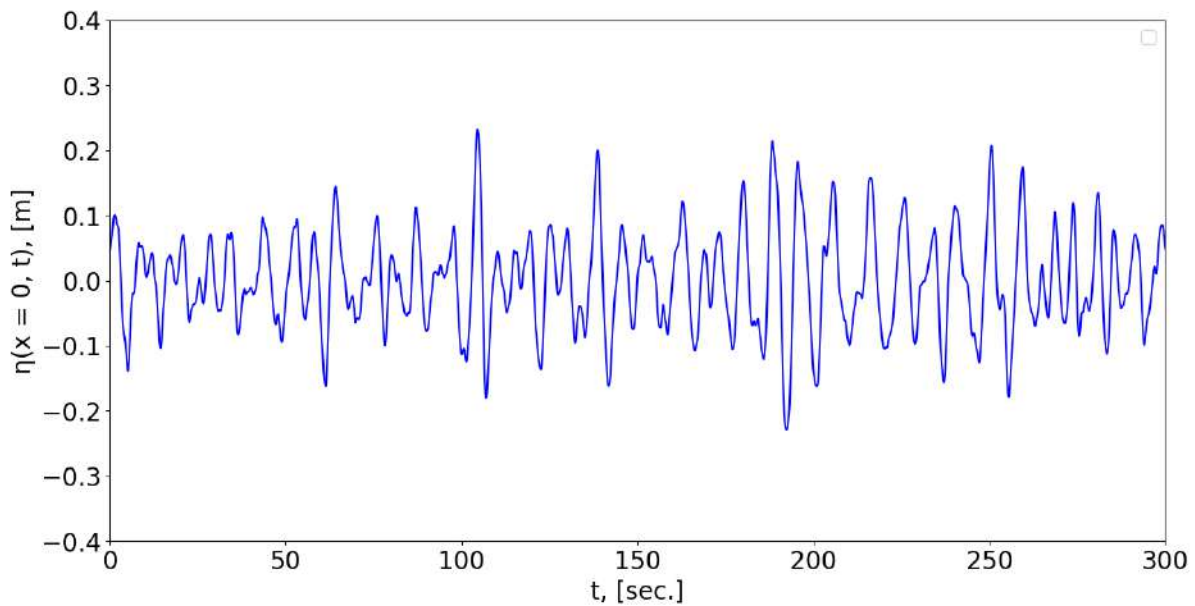


Рис. 5 Смещение водной поверхности со спектром Пирсона-Московица, пятиминутная запись.

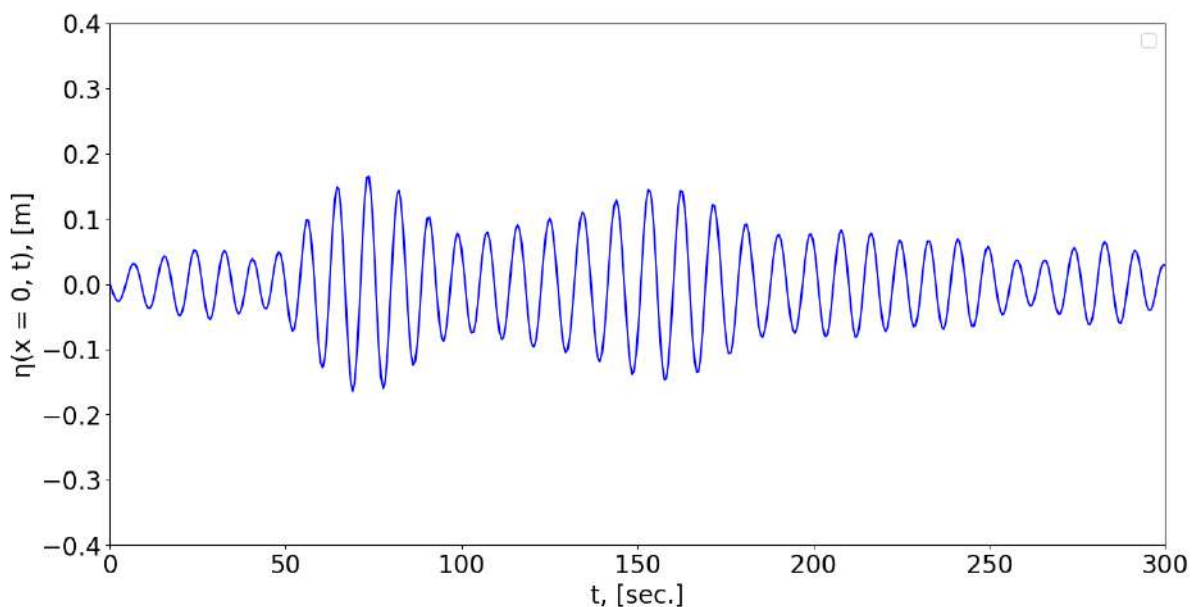


Рис. 6 Смещение водной поверхности с гауссовым спектром, пятиминутная запись.

Для дальнейшей работы необходимо научиться выделять индивидуальные волны в подобных записях. Положительные (отрицательные) амплитуды волн определялись как максимумы (минимумы) между соседними нулями функции $\eta(t)$. Высоты волн в волновом поле удобно вычислять как расстояние от соседнего минимума до соседнего максимума. Схема выделения амплитуд и высот волн показана на рис. 7.

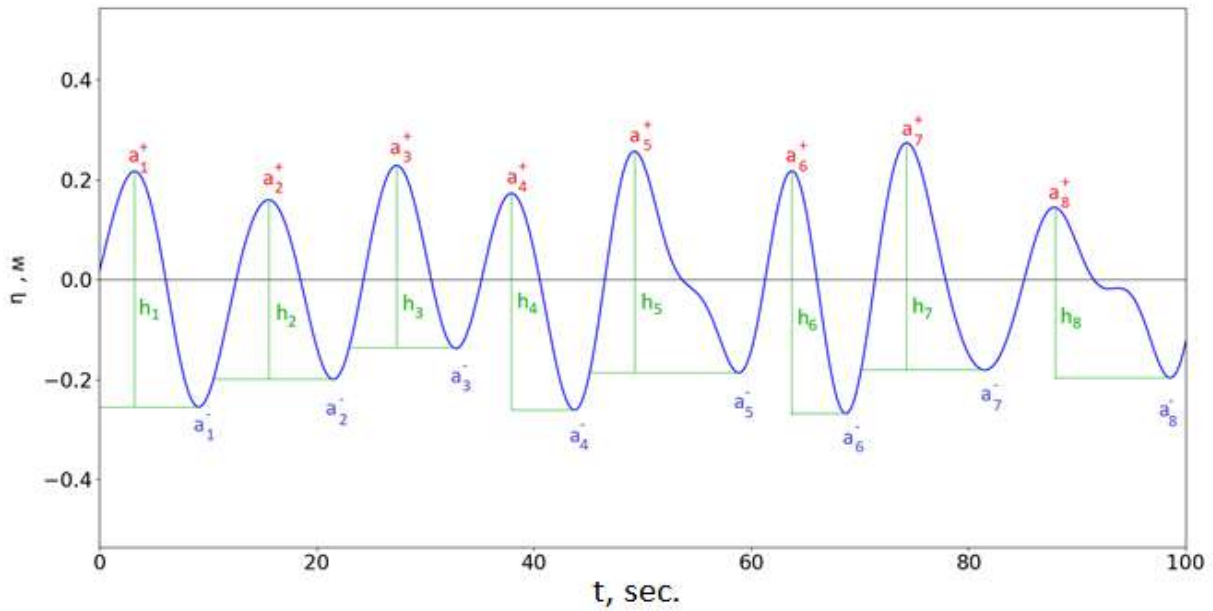


Рис. 7 Схема выделения амплитуд и высот волн на примере волнового поля с гауссовым спектром.

Для представительной статистики волн разной величины и, в частности, волн-убийц, требуется обработать большое количество индивидуальных волн, поскольку, как известно, волна-убийца является достаточно редким событием. Волна считается волной-убийцей, если ее высота $H > 2H_s$ по высотному критерию, или если ее амплитуда $a > 2a_s$ по амплитудному (a_s - значительная амплитуда волнения и определяется аналогично значительной высоте, как среднее одной трети наибольших амплитуд). Теоретическое значение H_s , определяемое через интеграл от спектра, является довольно грубой оценкой интенсивности волнения и не всегда сходится с практическим значением, поэтому для каждого поля оно считается отдельно, по определению.

С точки зрения времени вычисления реализаций удобнее рассматривать большое число реализаций N_r с малым числом индивидуальных волн N_w в них. К примеру, на одну реализацию, содержащую N гармоник, требуется выполнить N^2 операций, а на две реализации, содержащих вдвое меньше гармоник, требуется $2 \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2}$ операций, а поскольку $N_w \approx \frac{L}{L_0}$, $L_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, то число индивидуальных волн в одной реализации размера L и в двух реализациях размера $\frac{L}{2}$ примерно одинаково.

Определим среднеквадратичное отклонение и среднее поле (математическое ожидание) для волновых записей как:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L (\eta(t))^2 dt - \langle \eta \rangle^2}, \quad \langle \eta \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \eta(t) dt, \quad (5)$$

Как хорошо видно из формулы (1), смещение водной поверхности в любой момент времени представляет собой суперпозицию большого числа не связанных между собой гармонических волн. Таким образом, каждая компонента суммы является случайной величиной с конечным (нулевым) средним $\langle \eta \rangle$ и конечным ненулевым среднеквадратичным отклонением σ , все компоненты суммы взаимно независимы, поэтому при достаточно большом значении N выполняются условия центральной предельной теоремы и смещение водной поверхности представляет из себя случайный процесс, плотность распределения $f(\eta)$ которого хорошо совпадает с плотностью нормального распределения. Для того чтобы выбрать оптимальное значение N (следственно и N_r) были построены графики в логарифмическом масштабе (рис. 8) плотности нормального распределения в сравнении с плотностью распределения смещений η , нормированных на среднеквадратичное отклонение σ . В результате на оси абсцисс представлена безразмерная величина.

Также на графиках отмечена область 4σ , и всё, что находится за этой областью, соответствует аномально большим выбросам. В каждом случае рассматривается ~ 3200 индивидуальных волн.

Плотность нормального распределения в данном случае задается формулой:

$$f(\eta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\eta-\langle\eta\rangle)^2}{2\sigma^2}}, \quad (6)$$

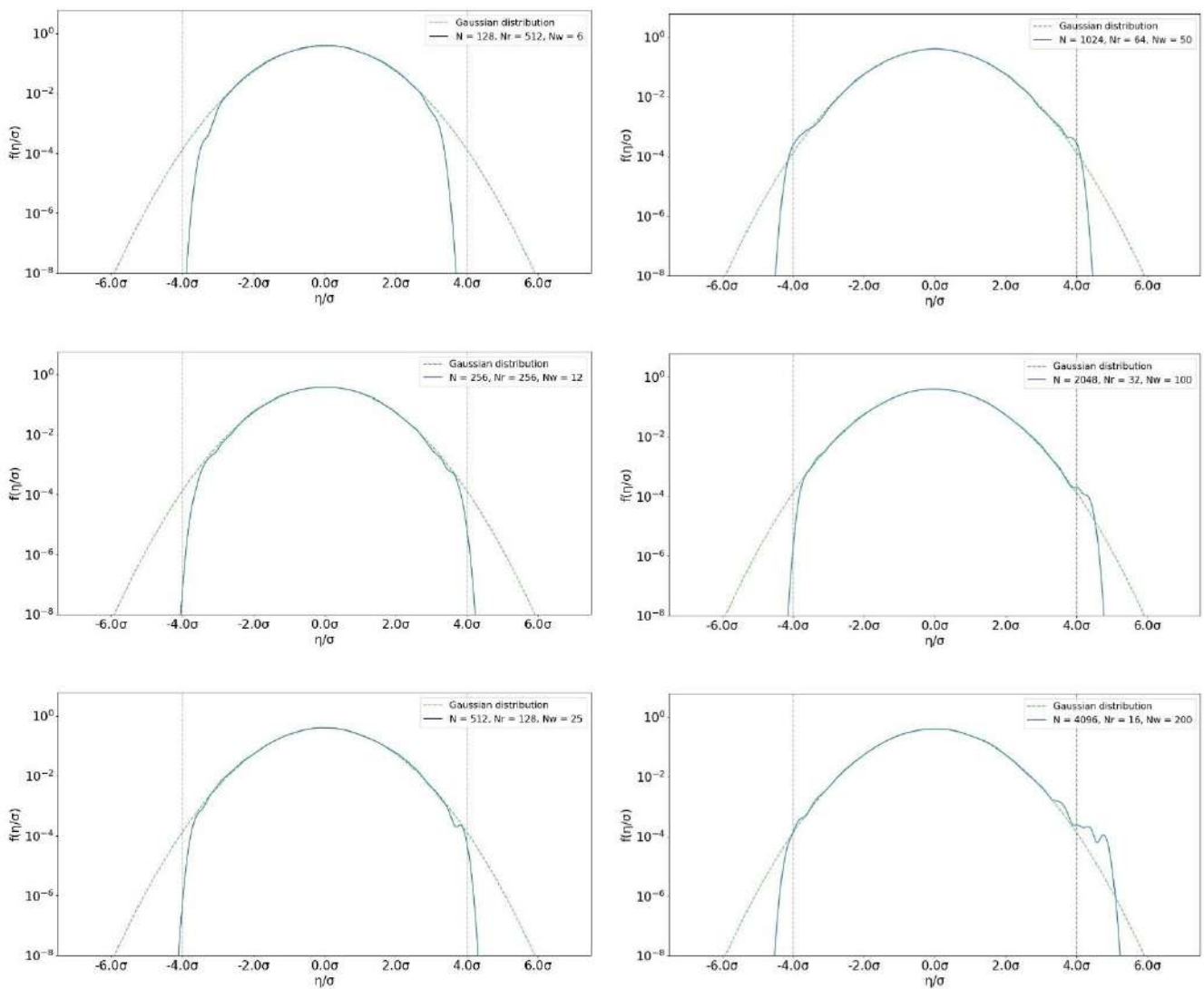


Рис. 8 Плотность распределения водной поверхности в зависимости от числа реализаций и гармоник.

Хорошее совпадение плотности распределения с гауссовой во всей области достигается уже при рассмотрении 64 реализаций (содержащих в сумме 3200 индивидуальных волн), полученных суперпозицией 1024 гармоник каждая. Дальнейшее разбиение на большее число реализаций, как видно, не позволяет описывать смещения выше 4σ , так как размеры доменов становятся слишком малы для получения в них волны-убийцы (даже при фазировании максимумов всех гармоник, на коротких записях не получится наблюдать anomalно высокие волны).

Исходя из этого, установим для дальнейшей работы оптимальную длину одной реализации в 40 минут, содержащую в среднем 200 индивидуальных волн.

2. Ширина спектров и распределение Рэлея

Перепишем формулу (1) в другом виде, положив также $n \rightarrow \infty$ и $x = 0$:

$$\eta(t) = A_c(t) \cos(\omega_p t) - A_s(t) \sin(\omega_p t) \quad (7)$$

Такая комплексная форма записи смещений водной поверхности может быть представлена как набегание двух волн друг на друга. При этом каждая из волн может быть представлена комплексным амплитудно-фазовым уравнением (5), (6). Также сместим начало системы координат к пиковой частоте ω_p :

$$A_c(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos[(\omega_i - \omega_p)t - \varphi_i] , \quad (8)$$

$$A_s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin[(\omega_j - \omega_p)t - \varphi_j] , \quad (9)$$

Предположим, что рассматриваемый спектр S достаточно узкий, имеет один пик и задает конечное распределение энергии. Тогда длины наиболее интенсивных компонент в нем не сильно различаются, это означает, что разность $\omega_i - \omega_p$ стремится к нулю, тогда функции $A_c(t)$ и $A_s(t)$ медленно меняются во времени. Перейдем к полярной системе координат при помощи замены $A_c(t) = A(t)\cos[\epsilon(t)]$, $A_s(t) = A(t)\sin[\epsilon(t)]$:

$$\eta(t) = A(t) \cos(\omega_p t + \epsilon(t)), \quad A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \epsilon(t) = \arctg\left(\frac{A_c(t)}{A_s(t)}\right) \quad (10)$$

В силу центральной предельной теоремы каждая из величин A_c и A_s нормально распределена, так как они, аналогично уже рассмотренному случаю, представляют собой бесконечную сумму независимых компонент, имеющие нулевые мат. ожидания $\langle A_c \rangle = \langle A_s \rangle = 0$ и конечную ненулевую дисперсию σ^2 .

Мат. ожидание произведения этих двух величин $\langle A_c(t) \cdot A_s(t) \rangle$ можно расписать как:

$$A_c(t) \cdot A_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos[(\omega_i - \omega_p)t - \varphi_i] \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin[(\omega_j - \omega_p)t - \varphi_j] , \quad (11)$$

$$\langle A_c(t) \cdot A_s(t) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \langle \cos[(\omega_i - \omega_p)t - \varphi_i] \cdot \sin[(\omega_j - \omega_p)t - \varphi_j] \rangle \quad (12)$$

Поскольку фазы φ_i распределены равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \cos[(\omega_i - \omega_p)t - \varphi_i] \cdot \sin[(\omega_j - \omega_p)t - \varphi_j] \rangle = 0 \quad (13)$$

Получаем $\langle A_c(t) \cdot A_s(t) \rangle$. Следовательно, их ковариация может быть найдена как:

$$\text{cov} = \langle A_c A_s \rangle - \langle A_c \rangle \langle A_s \rangle \geq 0 \quad (14)$$

А значит и коэффициент их корреляции равен нулю, поэтому величины A_c и A_s взаимно независимы. Выполнение данных условий означает, что для нахождения плотности совместного распределения этих величин можно использовать формулу:

$$f(A_c, A_s) = f(A_c) f(A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{A_c^2 + A_s^2}{2\sigma^2}\right] \quad (15)$$

Вычислив якобиан выполненного преобразования $J = \frac{\partial(A_c, A_s)}{\partial(A, \epsilon)} = A$, найдем плотность совместного распределения $f(A, \epsilon)$:

$$f(A, \epsilon) = f(A_c(A, \epsilon), A_s(A, \epsilon)) \cdot J = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{2\pi} \quad (16)$$

Проинтегрируем $f(A, \epsilon)$ по A и ϵ соответственно:

$$f(A) = \int_0^{2\pi} \frac{A}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{2\pi} d\epsilon = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right], \quad (17)$$

что в точности есть плотность распределения Рэлея,

$$f(\epsilon) = \int_0^{\infty} \frac{A}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{2\pi} dA = \frac{1}{2\pi}, \quad (18)$$

что в точности есть равномерное распределение.

Отсюда можно сделать вывод, что в численном моделировании смещений волновой поверхности для получения сходных с рэлеевской кривой распределений высот и амплитуд необходимо использовать достаточно узкие спектры, вне зависимости от их формы, то есть такие спектры, величина которых быстро убывает вне некоторого узкого диапазона частот.

Численно ширина спектров ν вычисляется по формуле (19) через спектральные моменты m_0, m_1, m_2 , которые в свою очередь вычисляются по формуле (20):

$$\nu = \sqrt{\frac{m_2}{m_0 \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2}} \quad (19)$$

$$m_0 = \int S(\omega)d\omega, \quad m_1 = \int \omega S(\omega)d\omega, \quad m_2 = \int \left(\omega - \frac{m_1}{m_0}\right)^2 S(\omega)d\omega \quad (20)$$

Для используемых в этой работе спектров значения параметра ν для модельного спектра: $\nu_g = 0.057$ и для спектра Пирсона-Московица $\nu_{PM} = 0.424$.

Также можно оценить используемые спектры при помощи «параметра пиковатости», также известного как параметр Года, большая величина которого подразумевает более остроконечный волновой спектр (вертикальную узкополосность) и наоборот:

$$\nu^p = \frac{2}{m_0^2} \int \omega S^2(\omega)d\omega \quad (21)$$

Вычисленные для используемых спектров параметры: $\nu_g^p = 9.9$ и $\nu_{PM}^p = 0.125$.

Опираясь на численную оценку параметров спектра, заметим, что относительная ширина реалистичного спектра более чем в 7 раз превосходит ширину модельного, а «пиковатость» модельного спектра в 79 раз больше Пирсона-Московица.

3. Функции распределения амплитуд и высот волн в численных экспериментах

Далее проанализируем полученные волновые поля с определенными ранее параметрами их длительности с точки зрения вероятности возникновения в них волн определенных амплитуд и высот. На рис. 9, 11, 13-16, 18 и 19 показаны в логарифмическом масштабе «хвосты» функций распределения амплитуд (положительных и отрицательных) волновых полей, реализованных гауссовым спектром, усредненные по реализациям и нормированные на a_s , в зависимости от числа реализаций. Поскольку получить представительную статистику имея всего одну реализацию, очевидно, невозможно, число реализаций будем увеличивать. Отрицательные амплитуды на всех представленных графиках взяты по абсолютному значению. На рис. 22, 25 и 26 аналогично в логарифмическом масштабе приведены «хвосты» функций распределения высот, нормированные на H_s . Для всех распределений приведено сравнение с распределением Рэля, которое в данном случае задается формулами, полученными выше:

$$F_r(a) = \exp\left[-2 \frac{a^2}{(a_s^*)^2}\right], \quad F_r(H) = \exp\left[-2 \frac{H^2}{(H_s^*)^2}\right], \quad (22)$$

где a_s^* и H_s^* - практические (посчитанные по определению для каждой реализации и усредненные по ним) значения значительных амплитуд и высот соответственно. Также на графиках указаны

области их двойного превышения, которые соответствуют anomalно большим волнам по строгому математическому критерию.

Также графики функций распределения в линейных координатах приведены на рис. 10, 12, 17, 20 и 21 для положительных и отрицательных амплитуд, и на рис. 23, 24 и 27 для высот.

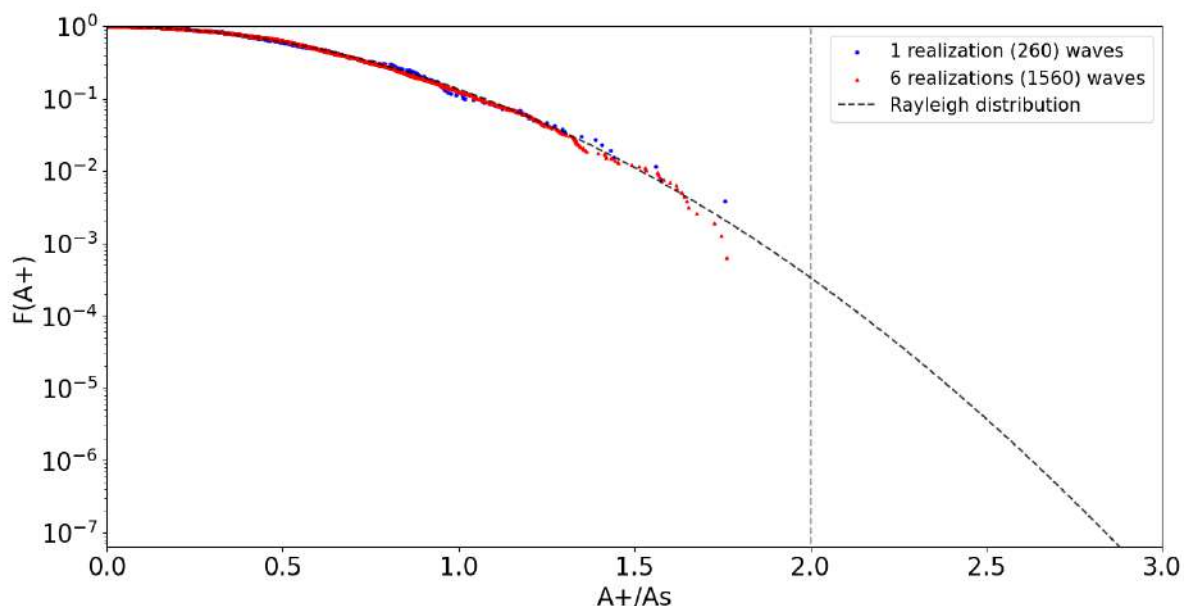


Рис. 9 «Хвосты» функций распределения положительных амплитуд (модельный спектр), усреднение по одной и шести реализациям.

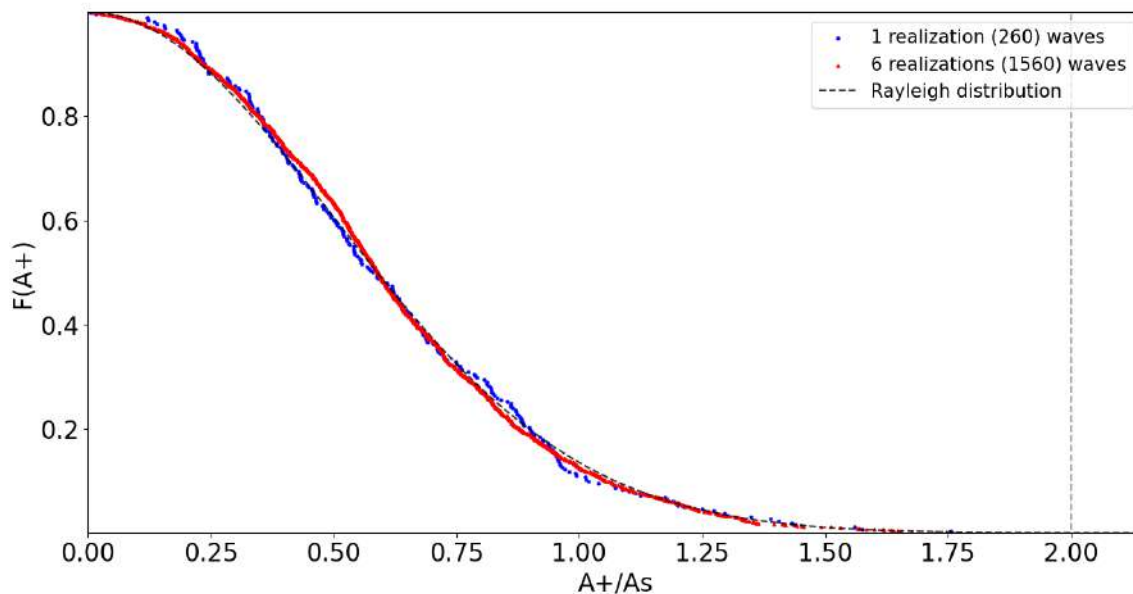


Рис. 10 Функция распределения положительных амплитуд (модельный спектр), усреднение по одной и шести реализациям.

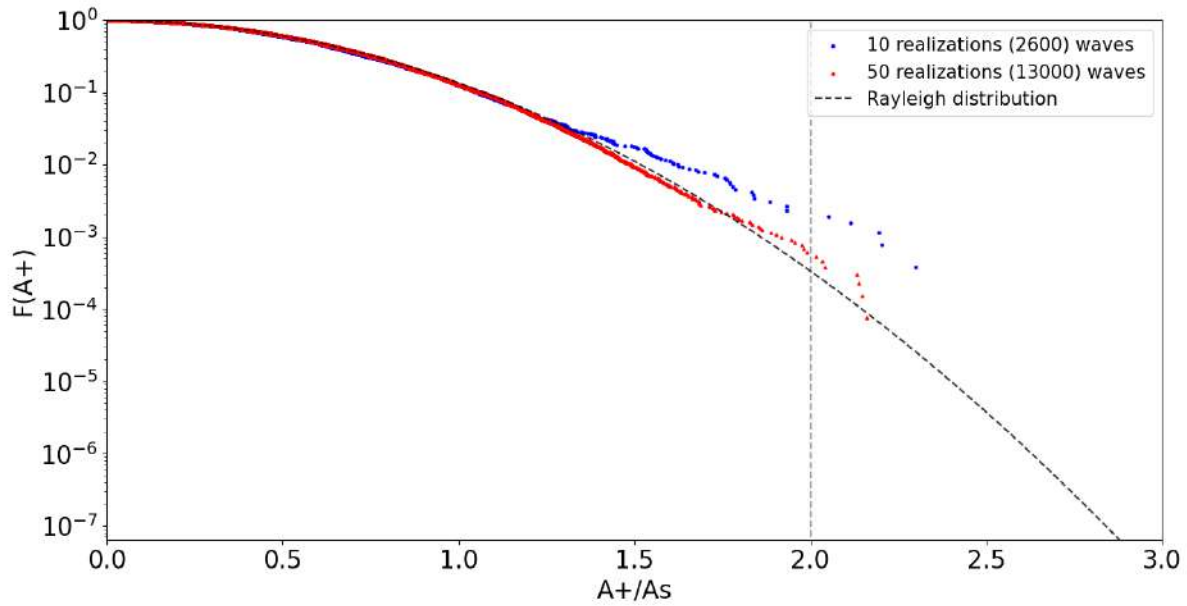


Рис. 11 «Хвосты» функций распределения положительных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 10 и 50 реализациям.

В этом случае возможно говорить об устойчивой статистике только до значений $1-1.2A_s$, поведение «хвостов», то есть поведение функции распределения в области выше этих значений будет сильно меняться в зависимости от конкретного набора реализаций, поэтому необходимо далее увеличивать число реализаций, входящих в расчет функции.

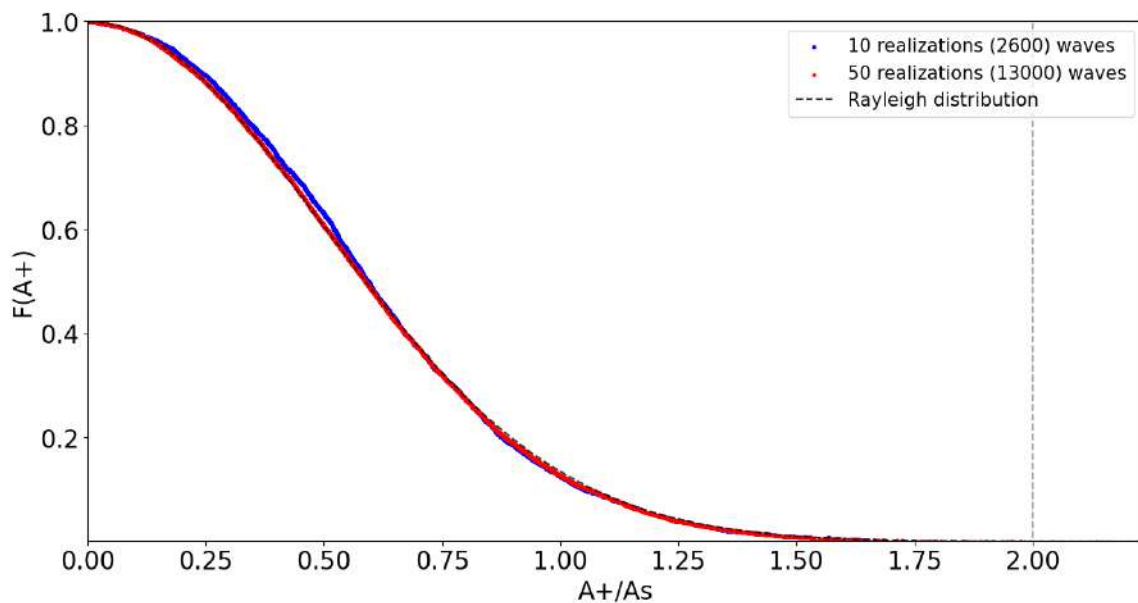


Рис. 12 Функция распределения положительных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 10 и 50 реализациям.

Можно отметить хорошее совпадение функции распределения с рэлеевской кривой в линейном масштабе (то есть основной массы волн) при усреднении по 13 тысячам индивидуальных волн.

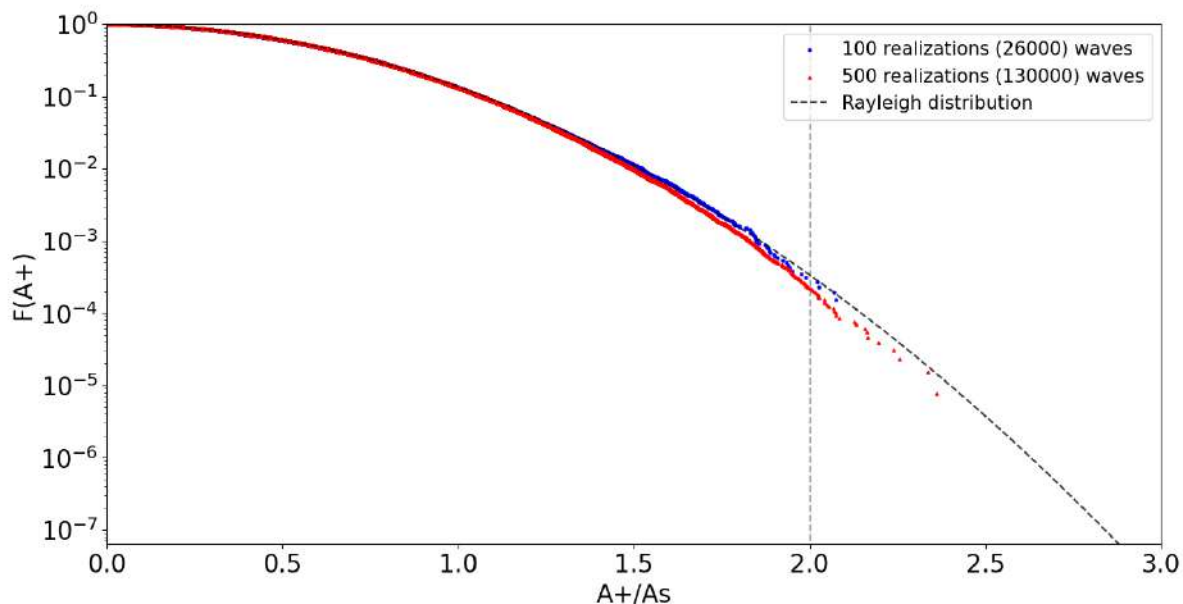


Рис. 13 «Хвосты» функций распределения положительных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 100 и 500 реализациям.

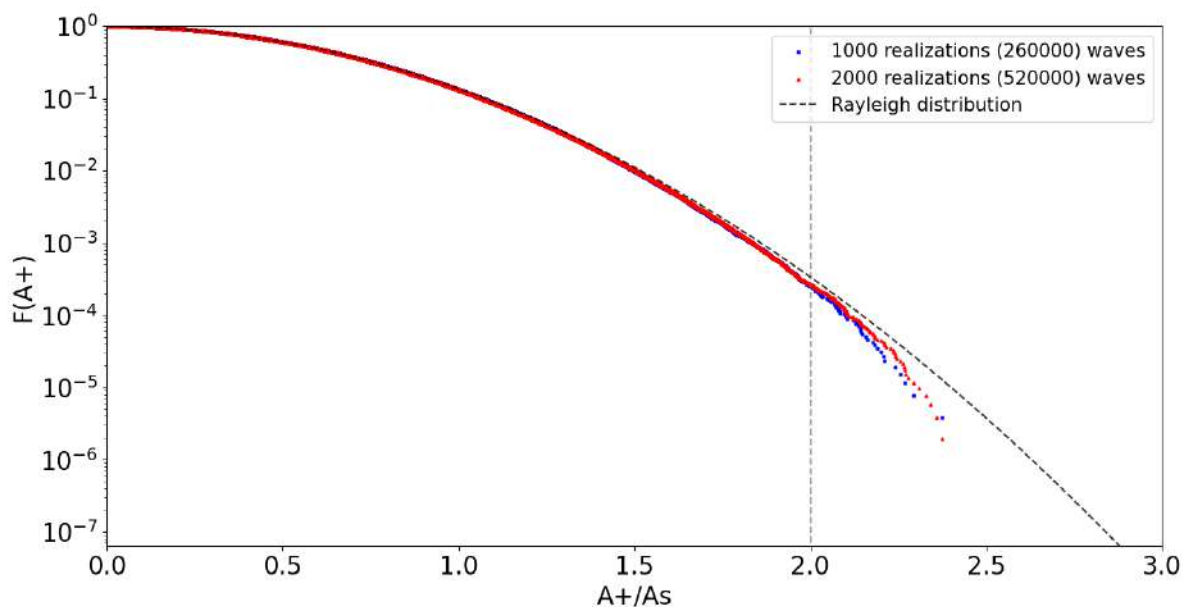


Рис. 14 «Хвосты» функций распределения положительных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 1000 и 2000 реализациям.

При рассмотрении 500 тысяч волн имеем репрезентативную статистику вплоть до значений $2.25A_s$, и как можно отметить из визуализаций, функция распределения в области двойного превышения лежит ниже функции распределения Рэля.

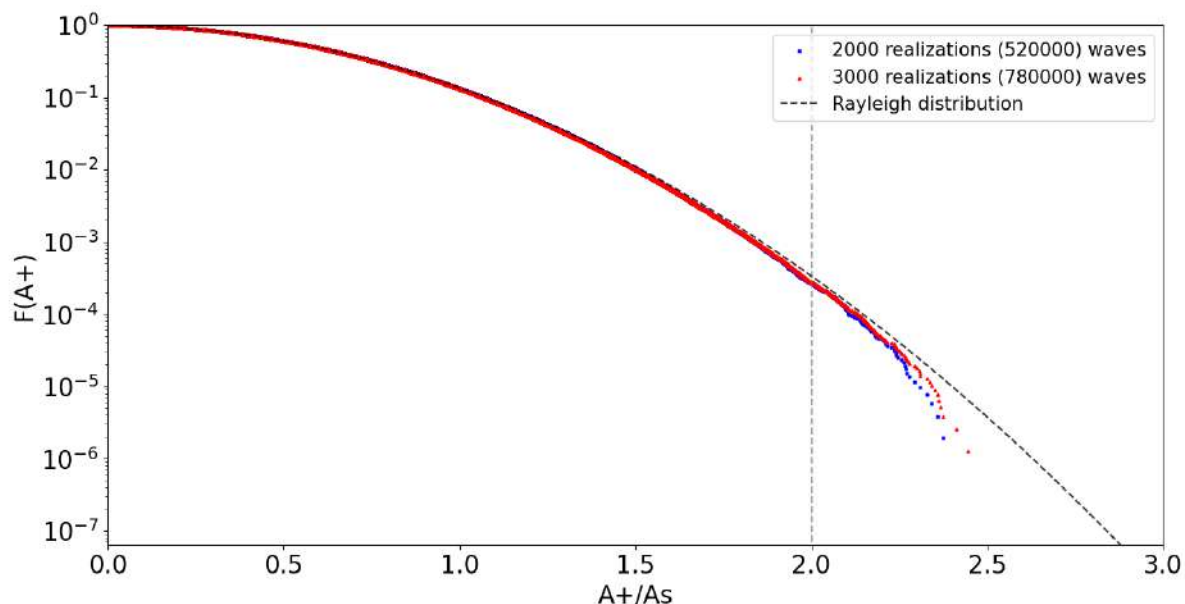


Рис. 15 «Хвосты» функций распределения положительных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 2000 и 3000 реализациям.

Очевидно, дальнейшее увеличение числа рассматриваемых индивидуальных волн существенно не меняет качественную картину поведения функции распределения. «Хвост» распределения всегда будет лежать ниже рэлеевской кривой, что говорит о завышении данным распределением вероятности возникновения больших положительных амплитуд волн в рамках волновых полей с модельным спектром. Выполним аналогичные построения для отрицательных амплитуд:

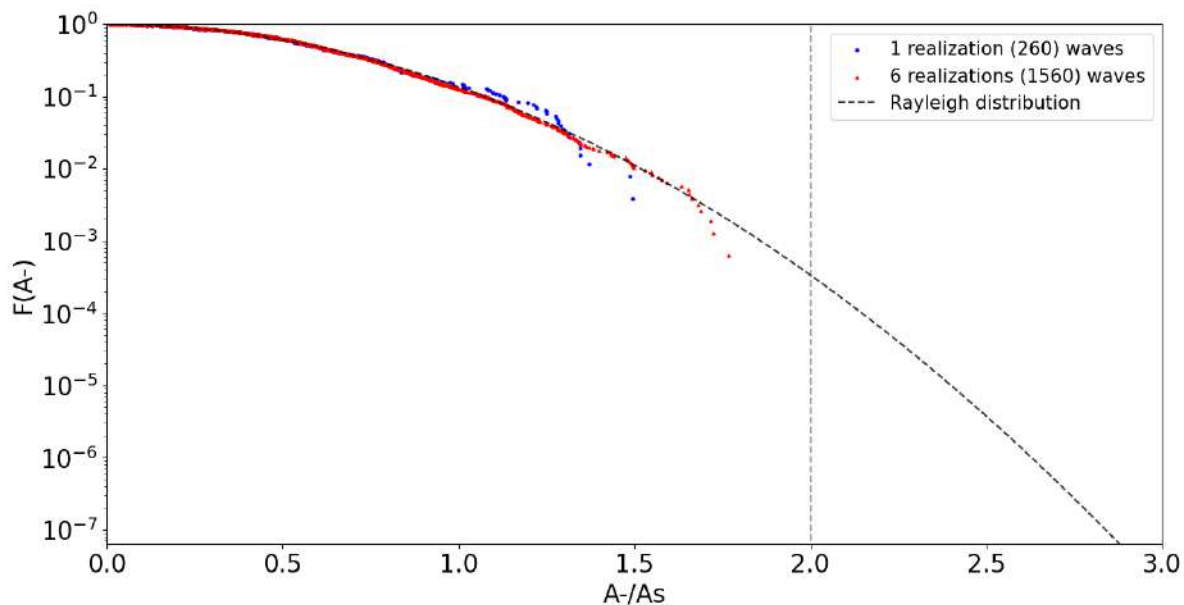


Рис. 16 «Хвосты» функций распределения отрицательных амплитуд (модельный спектр), усреднение по одной и шести реализациям.

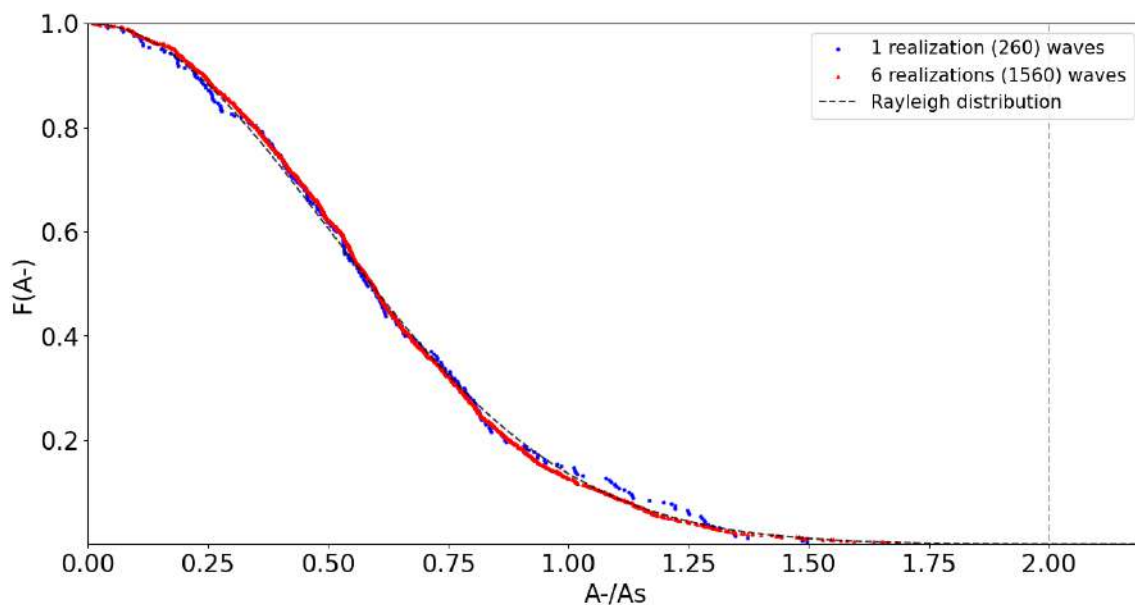


Рис. 17 Функция распределения отрицательных амплитуд (модельный спектр), усреднение по одной и шести реализациям.

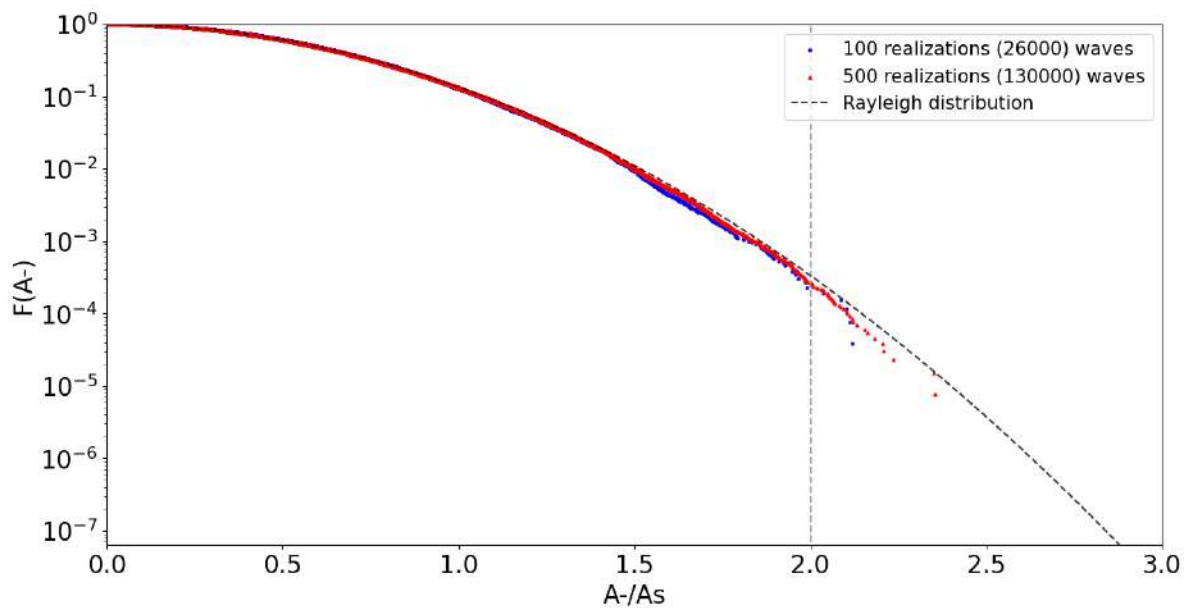


Рис. 18 «Хвосты» функций распределения отрицательных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 100 и 500 реализациям.

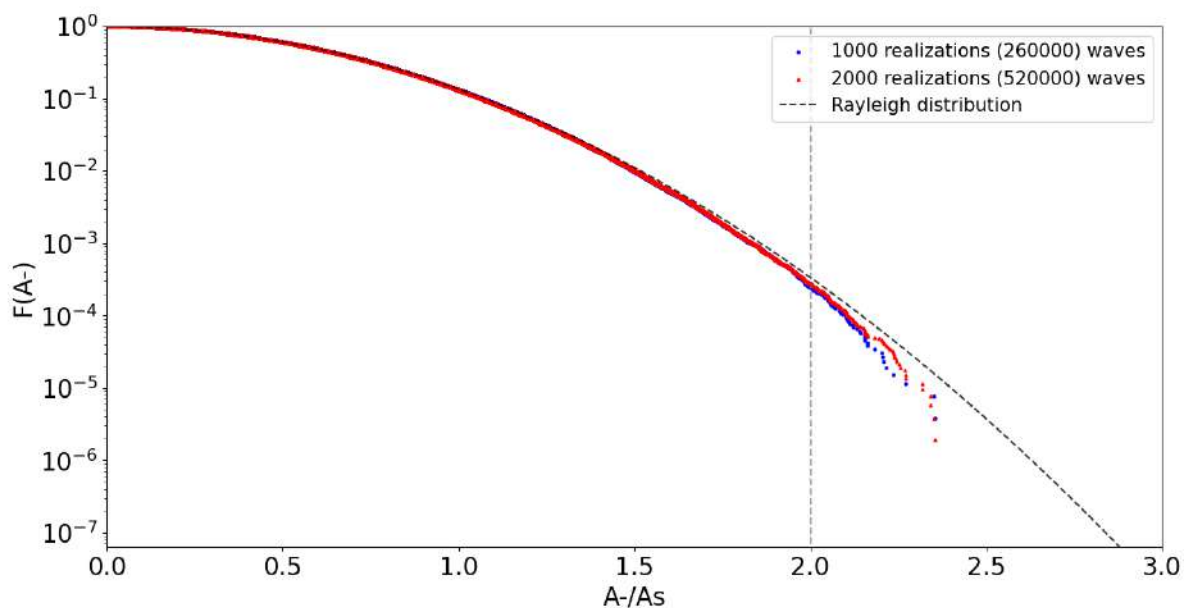


Рис. 19 «Хвосты» функций распределения отрицательных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 1000 и 2000 реализациям.

Функция распределения отрицательных амплитуд ведет себя аналогично функции распределения положительных амплитуд.

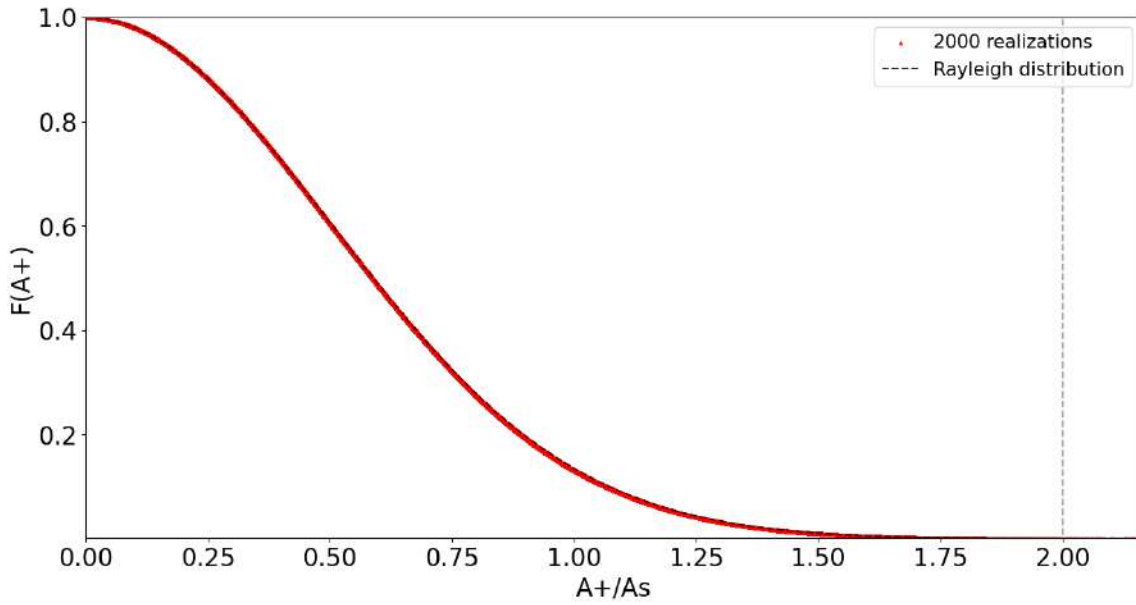


Рис. 20 Функции распределения положительных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 2000 реализациям, линейный масштаб.

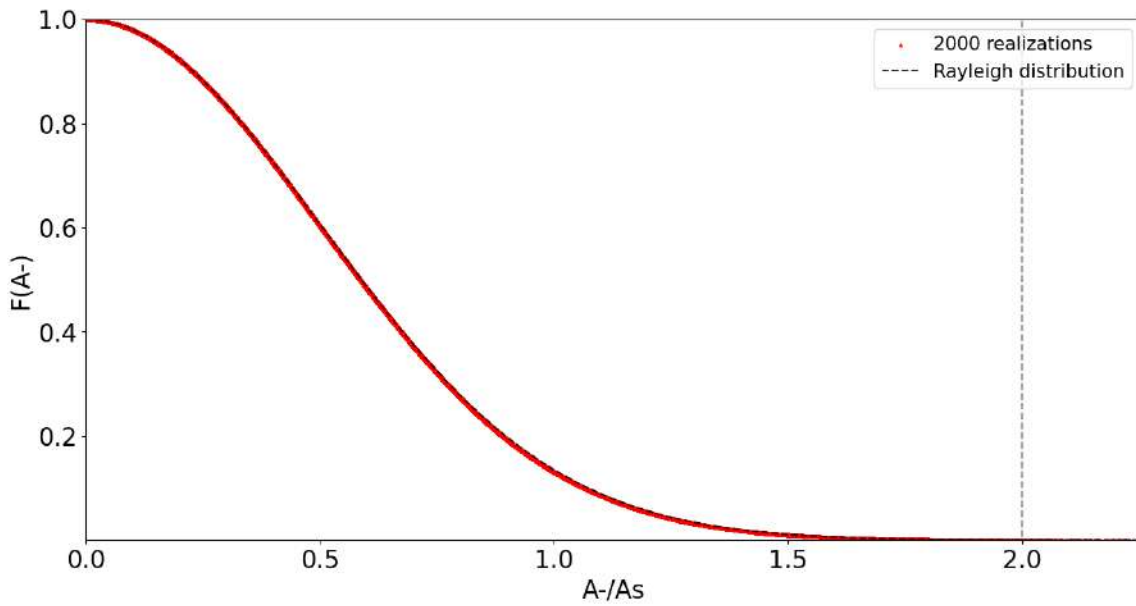


Рис. 21 Функции распределения отрицательных амплитуд (модельный спектр), усреднение по 2000 реализациям, линейный масштаб.

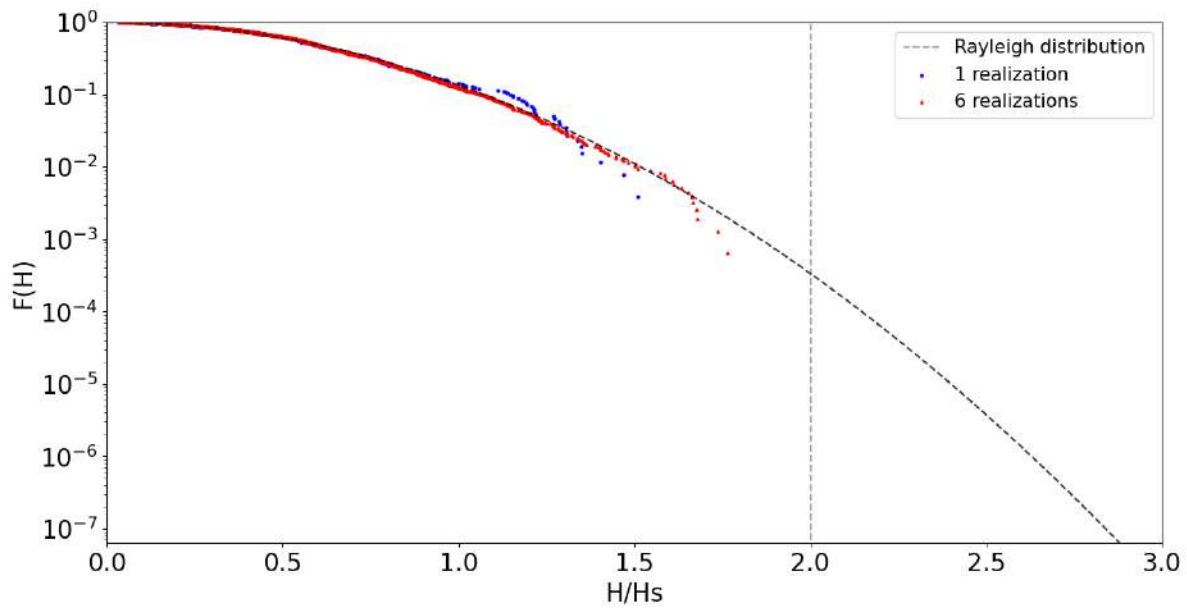


Рис. 22 «Хвосты» функций распределения высот (модельный спектр), усреднение по одной и шести реализациям.

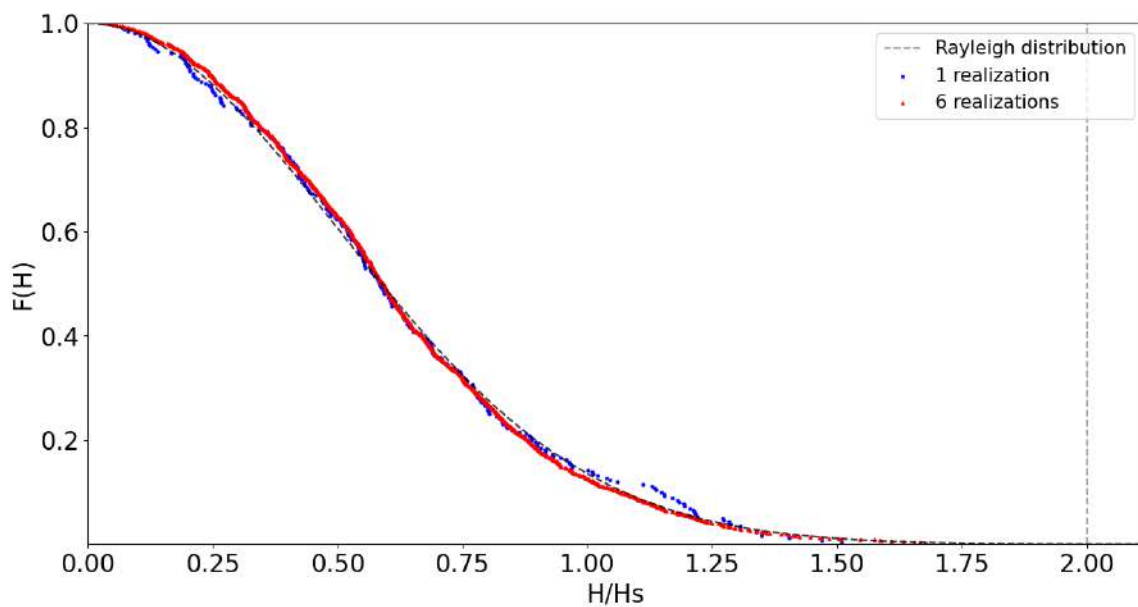


Рис. 23 Функция распределения высот (модельный спектр), усреднение по одной и шести реализациям.

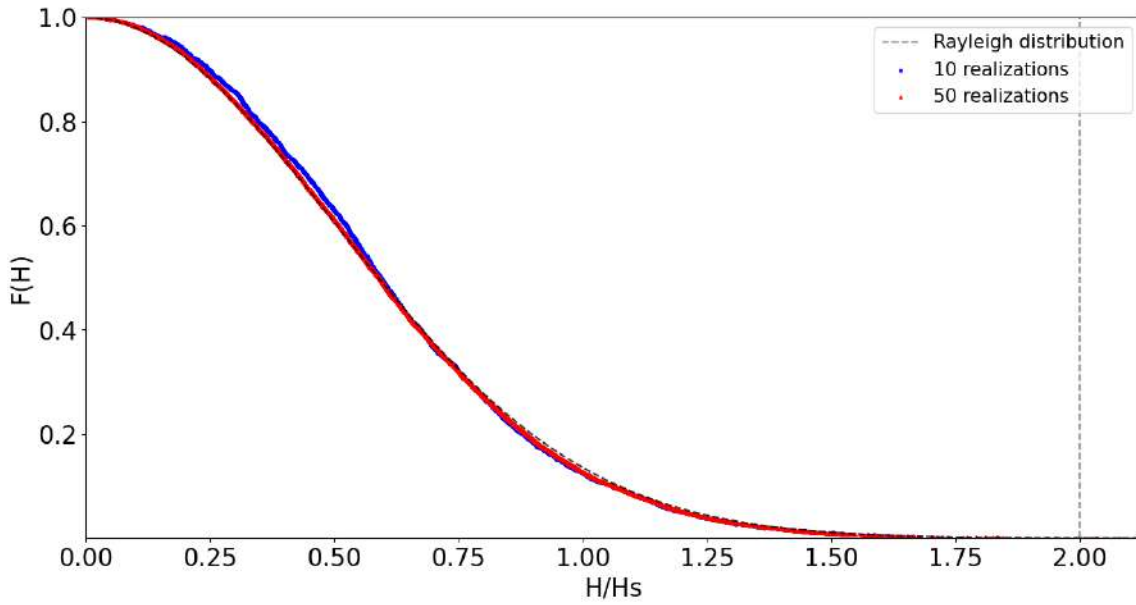


Рис. 24 Функция распределения высот (модельный спектр), усреднение по 10 и 50 реализациям.

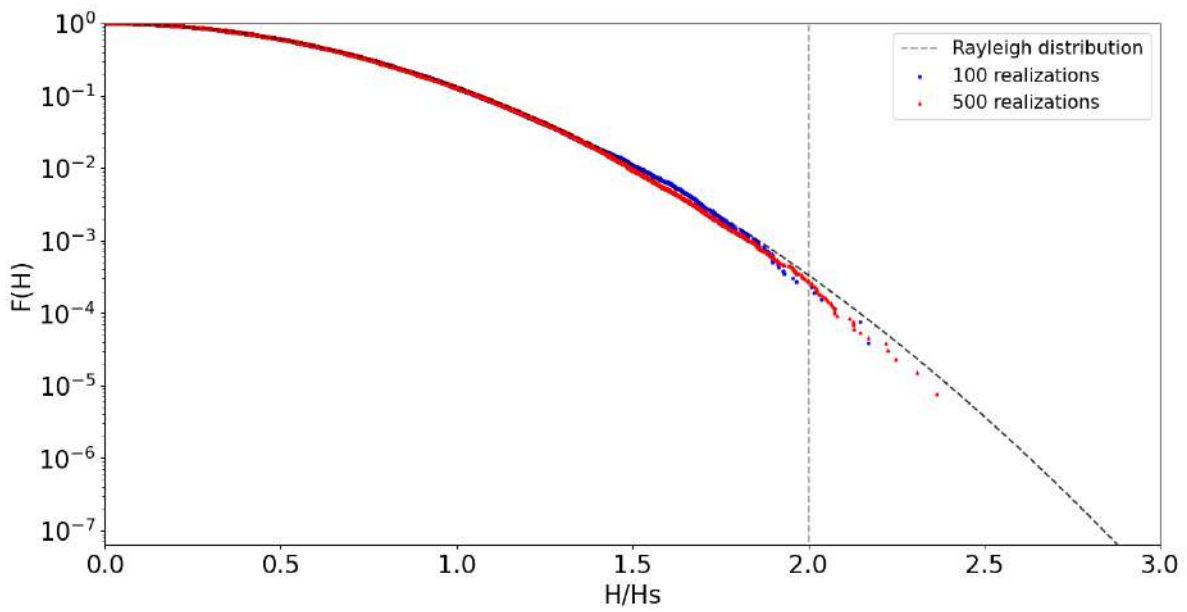


Рис. 25 «Хвосты» функций распределения высот (модельный спектр), усреднение по 100 и 500 реализациям.

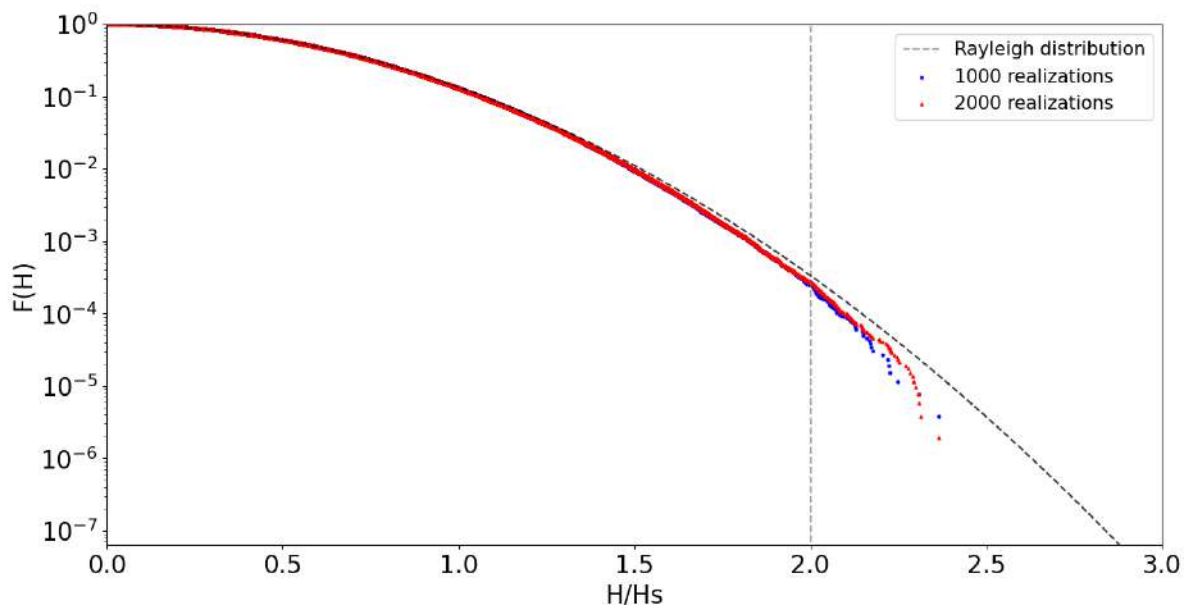


Рис. 26 «Хвосты» функций распределения высот (модельный спектр), усреднение по 1000 и 2000 реализациям.

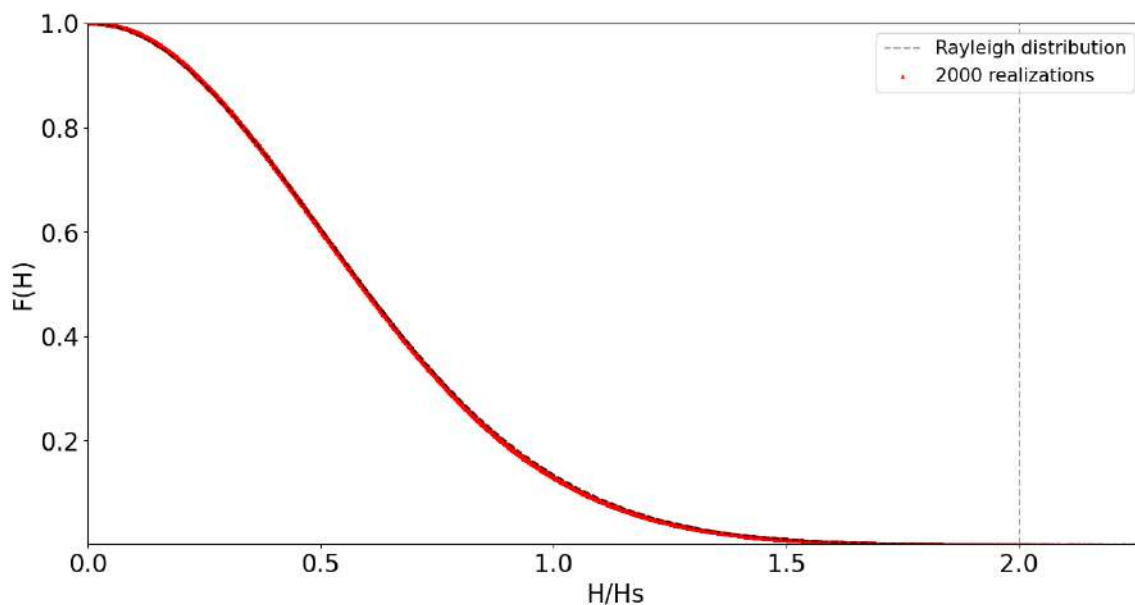


Рис. 27 Функции распределения высот (модельный спектр), усреднение по 2000 реализациям, линейный масштаб.

Как видно из построенных графиков, все амплитуды и высоты волн с гауссовым спектром имеют одинаковое поведение, и основная масса значений распределена в точности по Рэлею. Также выявлено, что $N_r = 2\,000$ реализаций (в которых в сумме содержится порядка $N_w = 520\,000$ индивидуальных волн) достаточно для необходимого нам описания поведения «хвостов»

распределений, которые отображают область anomalно больших волн, а для описания поведения основной массы волн, не превышающих $2H_s$ достаточно всего 50 реализаций, содержащих 13 тысяч индивидуальных волн. Однако в области двойного превышения стабильно наблюдается значительное завышение рэлеевским распределением вероятности появления anomalных волн: как по высоте, так и по амплитуде. Это может объясняться тем, что рассмотренный спектр хоть и выбран достаточно узким, но всё же имеет некоторую ненулевую ширину ν .

Далее на рис. 28-33 в линейном и логарифмическом масштабах приведены распределения для волновых полей в случае спектра Пирсона-Московица, используя полученные ранее параметры N_r и N_w (усреднение взято по 2000 реализациям), и проведено их сравнение со случаем модельного спектра, а также с Рэлеевским распределением.

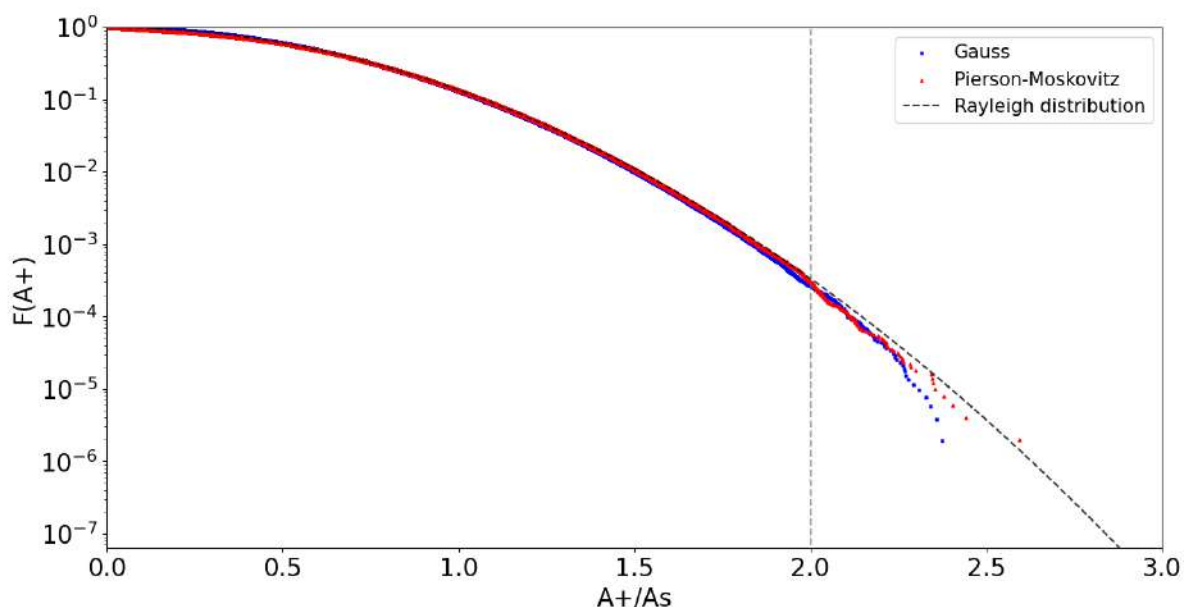


Рис. 28 Сравнение функций распределения положительных амплитуд двух спектров, логарифмический масштаб.

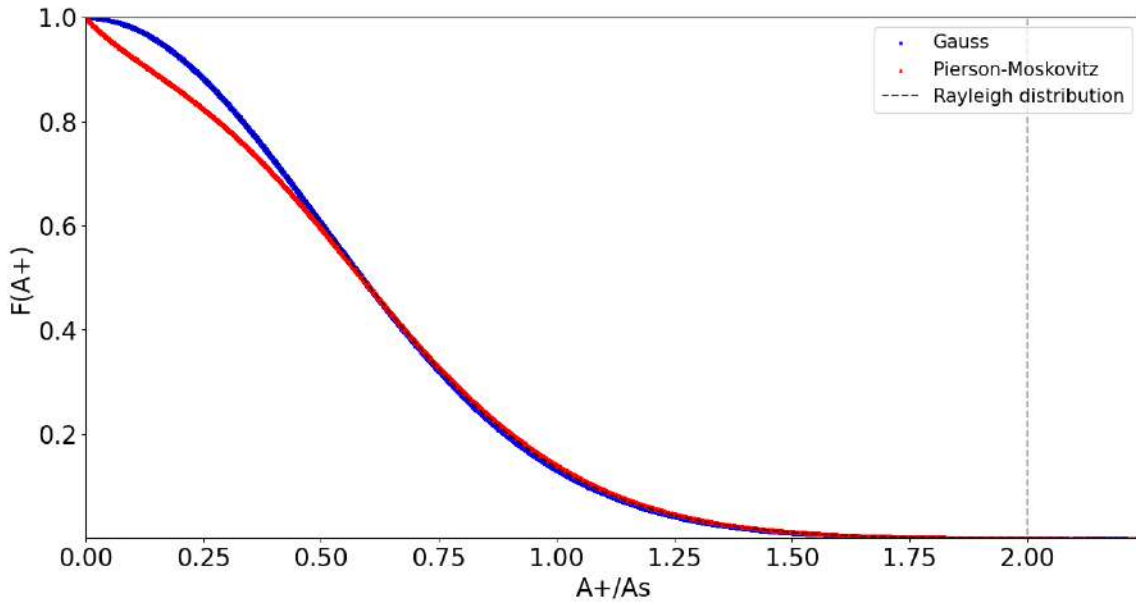


Рис. 29 Сравнение функций распределения положительных амплитуд двух спектров, линейный масштаб.

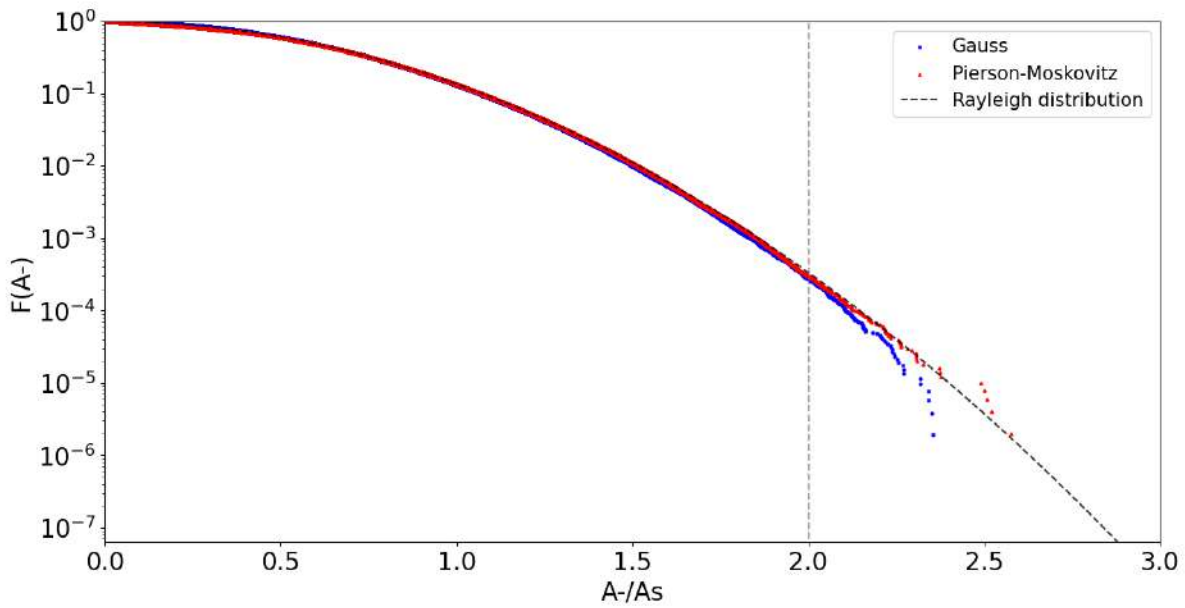


Рис. 30 Сравнение функций распределения отрицательных амплитуд двух спектров, логарифмический масштаб.

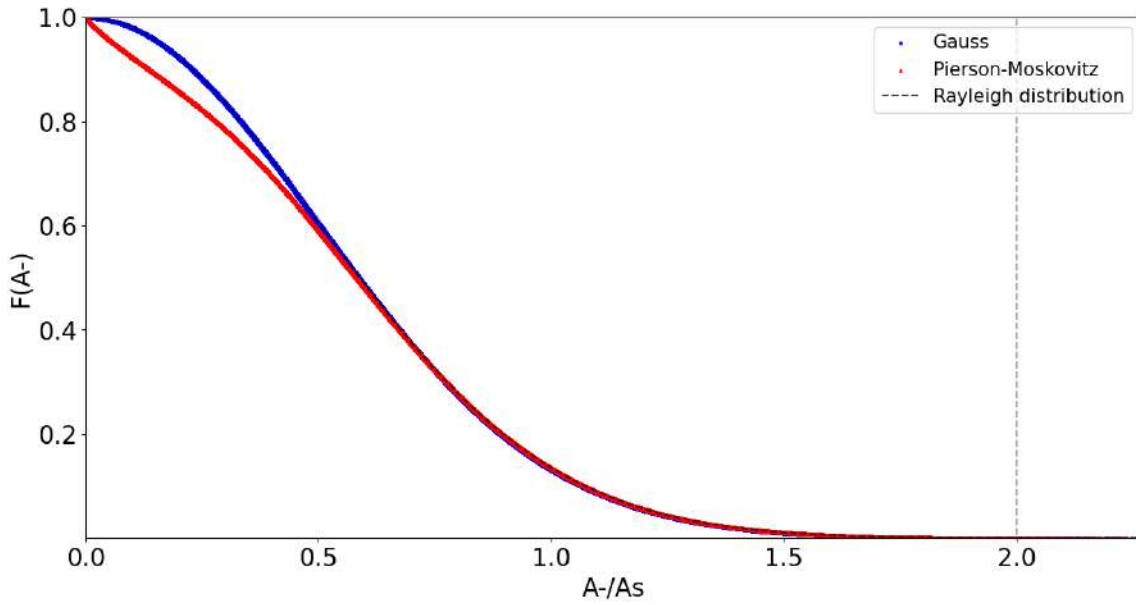


Рис. 31 Сравнение функций распределения отрицательных амплитуд двух спектров, линейный масштаб.

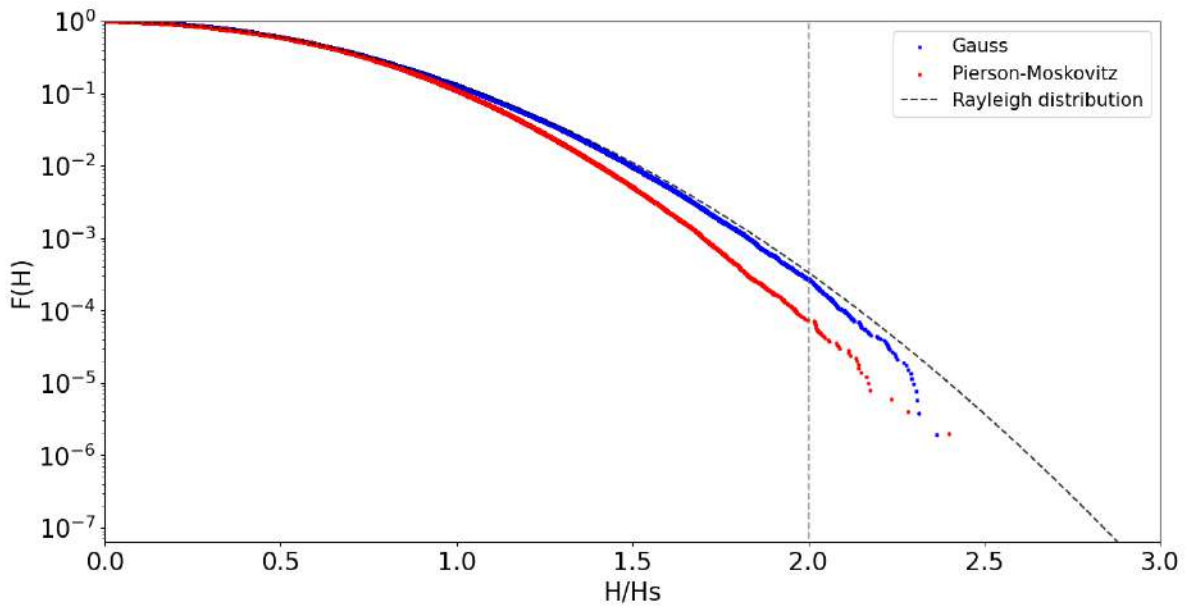


Рис. 32 Сравнение функций распределения высот волн двух спектров, логарифмический масштаб.

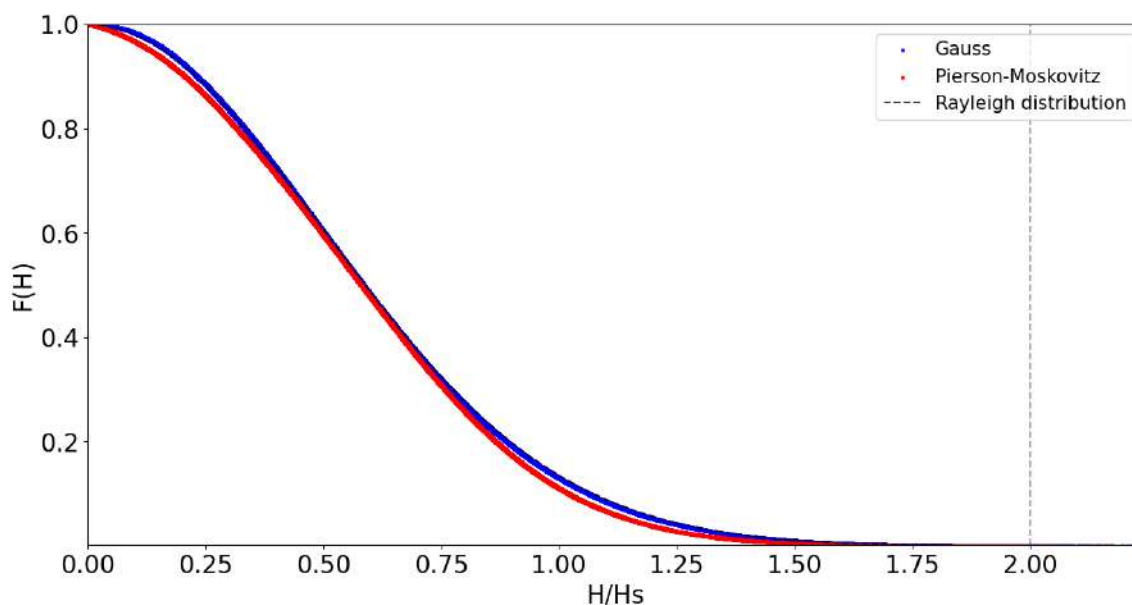


Рис. 33 Сравнение функций распределения высот волн двух спектров, линейный масштаб.

Полученную статистику можно назвать устойчивой на промежутке от 0 до 2.2 A_s или H_s . Ниже приведены графики, показывающие для каждого описанного случая величину отклонения полученных функций распределения F от рэлеевской F_r : модуль отклонения $|F_r - F|$ в логарифмическом масштабе на рис. 34-36; и относительное отклонение $\frac{|F_r - F|}{F_r} \cdot 100\%$ в линейном масштабе на рис. 37-39. Это позволяет более конкретно увидеть поведение функций за областью двойного превышения.

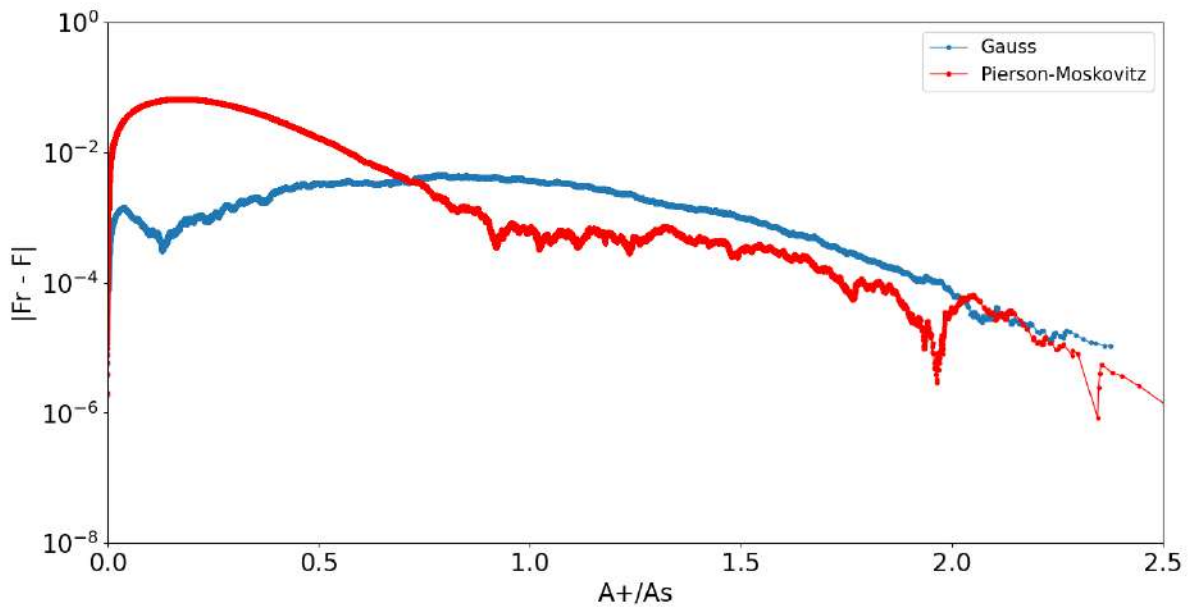


Рис. 34 График отклонения распределения положительных амплитуд от Рэлеевского, логарифмический масштаб.

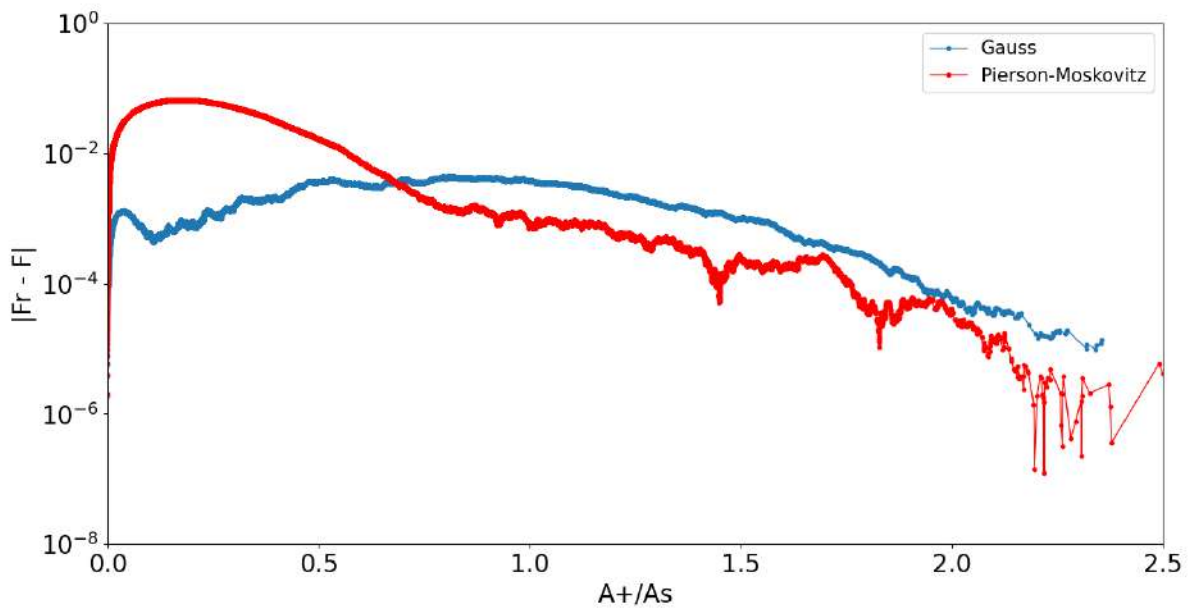


Рис. 35 График отклонения распределения отрицательных амплитуд от Рэлеевского, логарифмический масштаб.

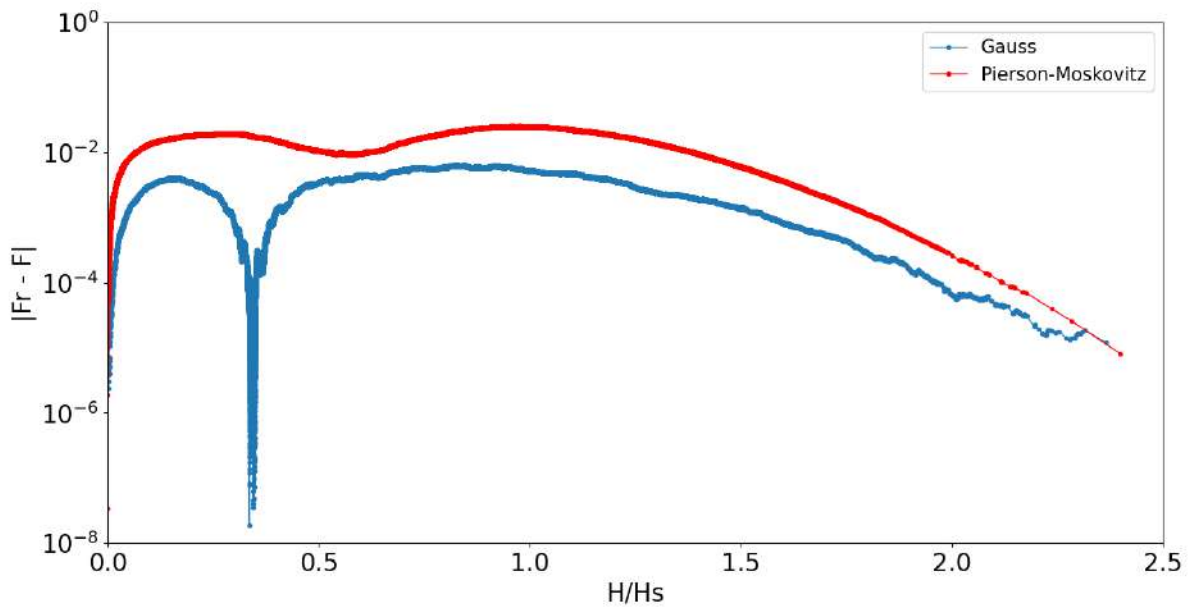


Рис. 36 График отклонения распределения высот от Рэлеевского, логарифмический масштаб.

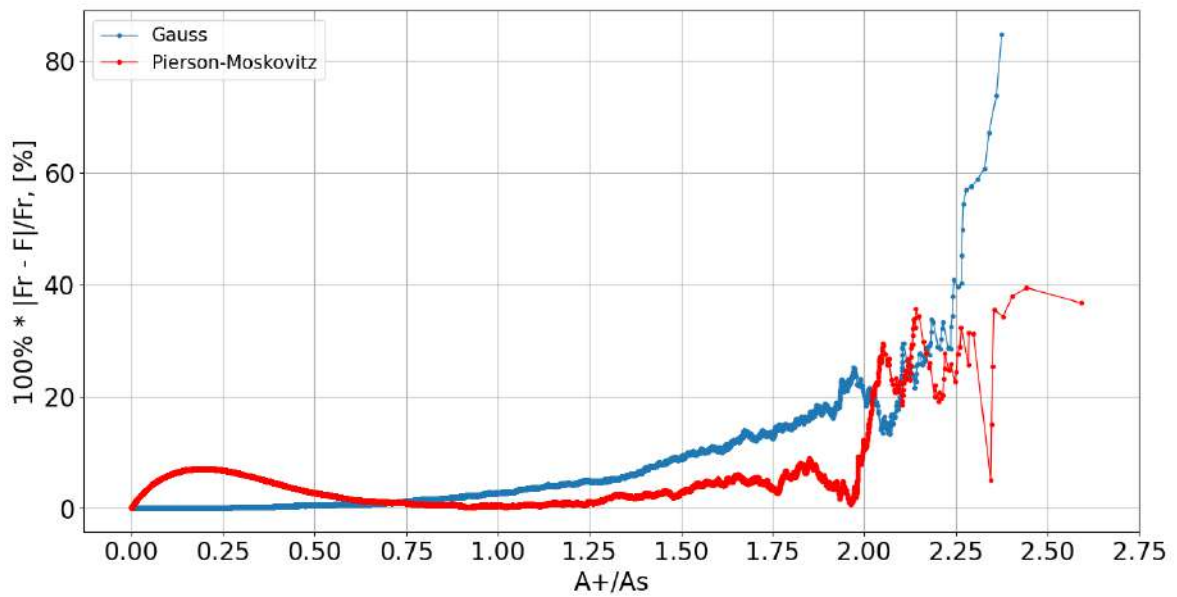


Рис. 37 График отклонения (в процентах) распределения положительных амплитуд от Рэлеевского.

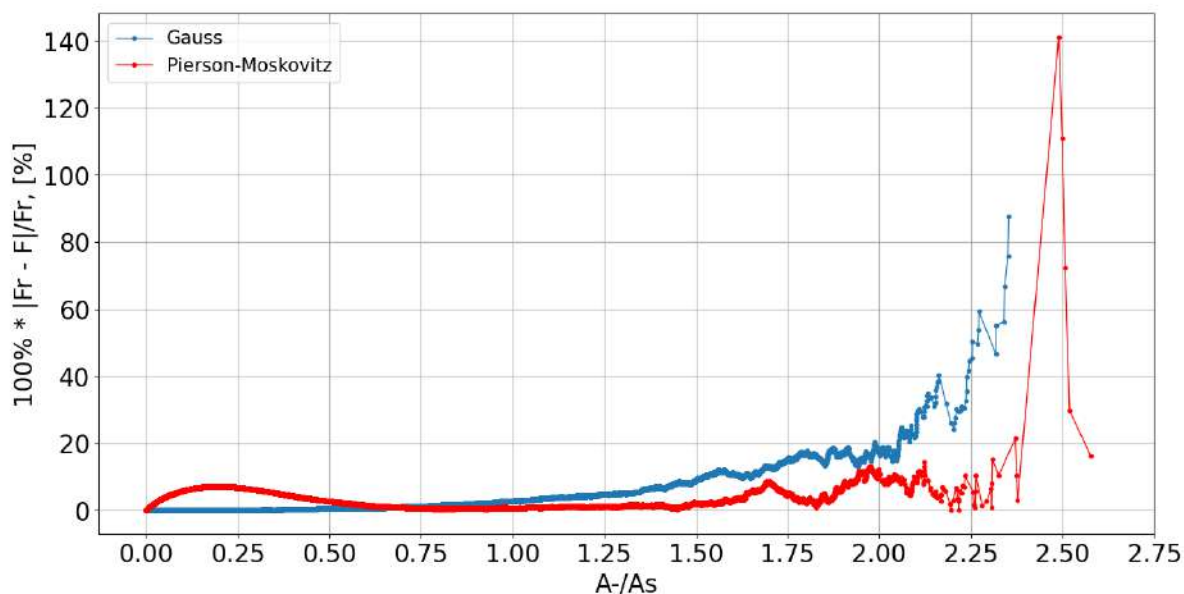


Рис. 38 График отклонения (в процентах) распределения отрицательных амплитуд от Рэлеевского.

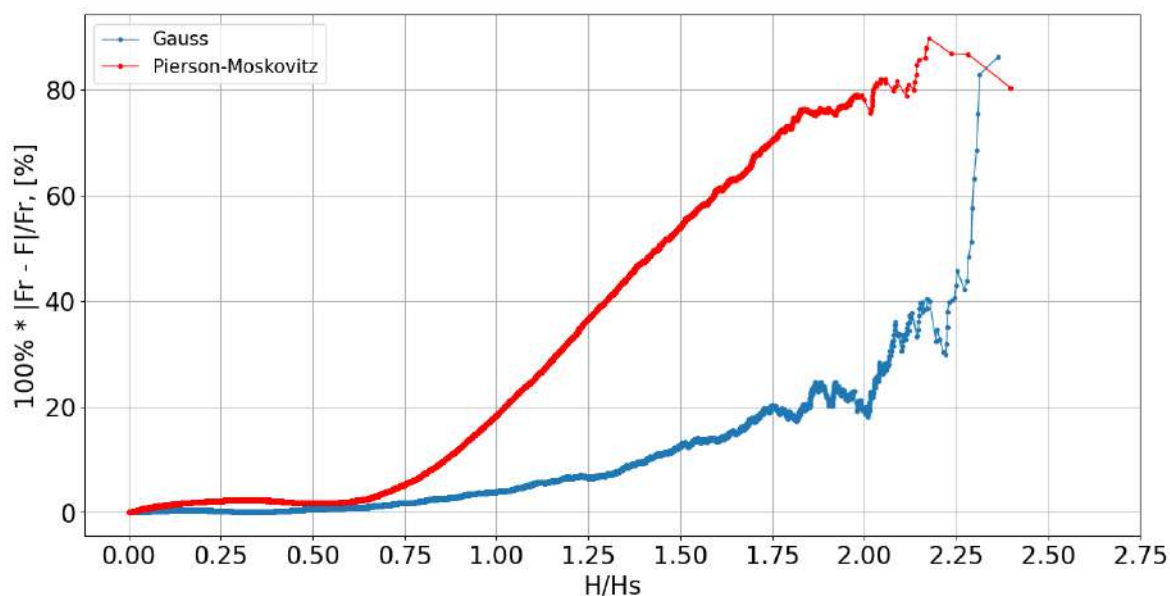


Рис. 39 График отклонения (в процентах) распределения высот от Рэлеевского.

Поскольку спектр Пирсона-Московица широкий, величина отклонения от Рэлея в этом случае значительная: она выше в области малых амплитуд и в области больших и средних высот. Модельный спектр показывает отличное совпадение с рэлеевской кривой в области малых и средних амплитуд в каждом случае, также наблюдаются отклонения в хвостах распределений. Такое завышение в рамках логарифмического масштаба может казаться незначительным, но, например, согласно распределению Рэлея, вероятность появления волны, высота которой в 2 раза

превосходит значительную высоту волнения, равна $3.3 \cdot 10^{-4}$, это означает, что стоит ожидать появление одной такой волны один раз в 3030 волн, а согласно распределению, полученному моделью со спектром Пирсона-Московица, вероятность появления такой же волны равна $7 \cdot 10^{-5}$, и можно увидеть ее лишь раз в 14 300 волн.

Как видно из построенных функций распределения, в проведенном моделировании полей ветровых волн наблюдаются волны, превышающие значительные величины более чем в 2.5 раза. На рис. 40-43 для обоих спектров показаны профили волн-убийц с наибольшим превышением a_s^* и H_s^* .

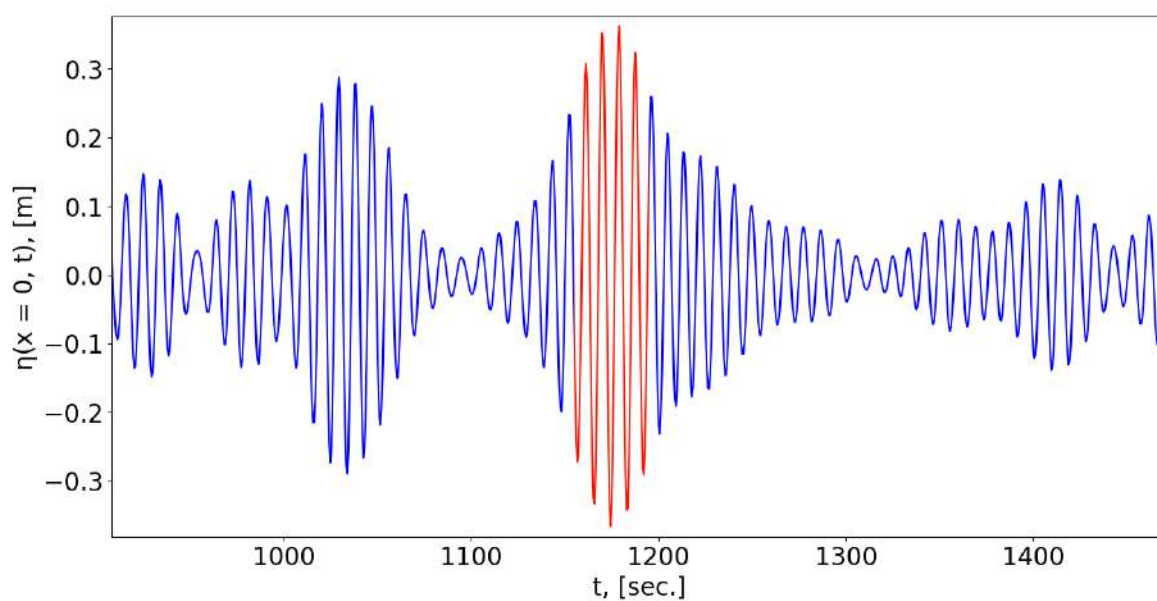


Рис. 40 Группа экстремальных волн, спектр гаусса, превышение a_s^* и H_s^* в 2.4 раза.

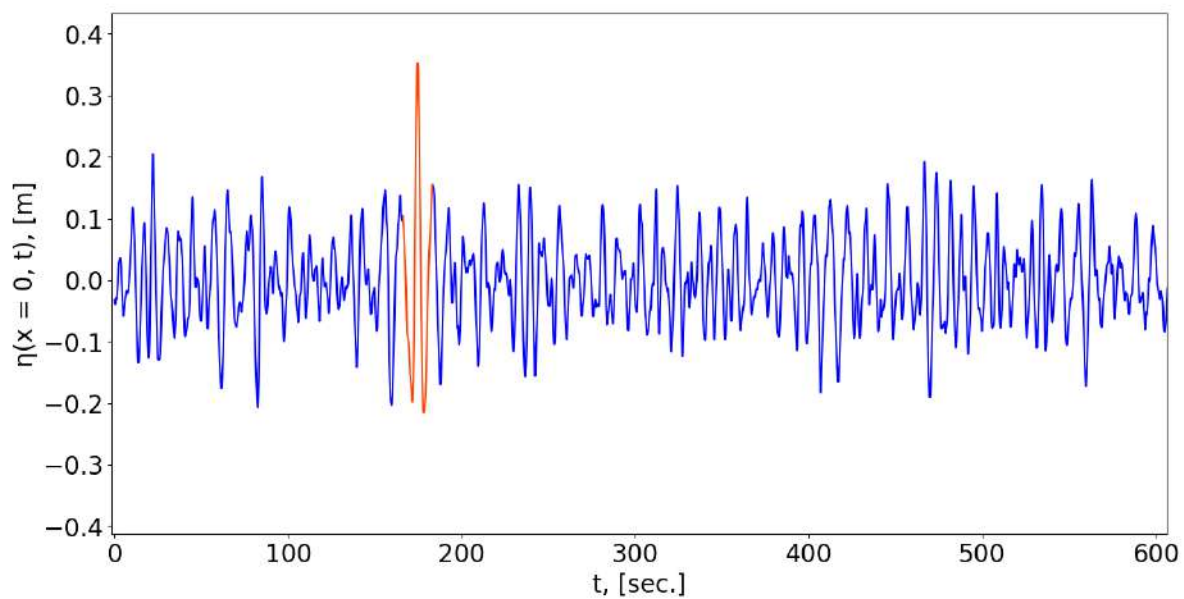


Рис. 41 Экстремальный гребень волны, спектр Пирсона-Московица, превышение a_{ζ}^* в 2.3 раза.

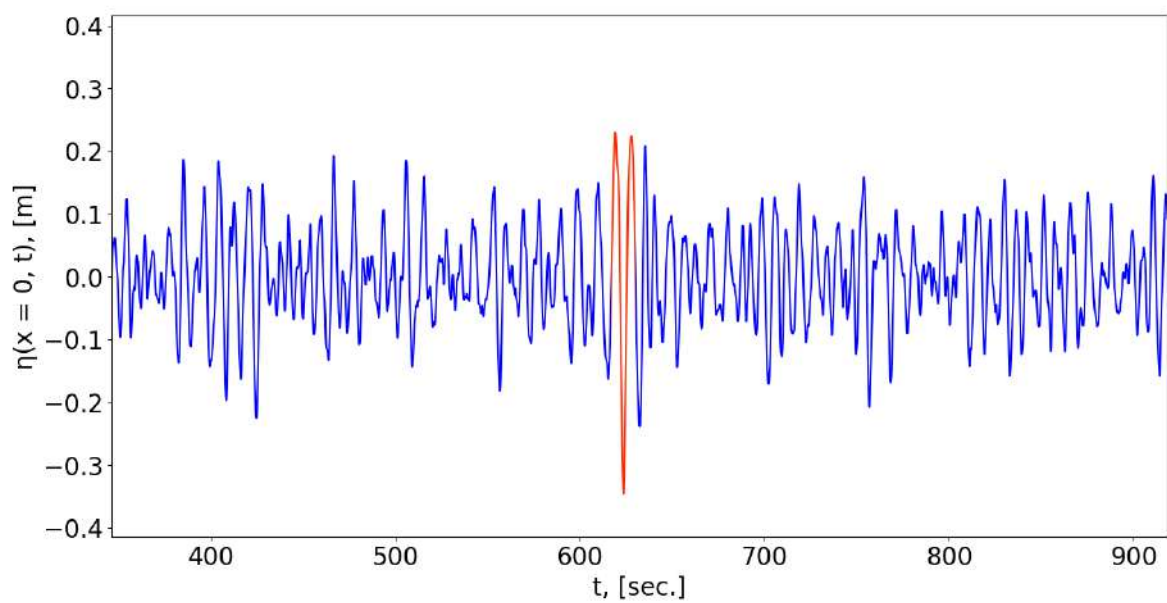


Рис. 42 Экстремальная впадина волны, спектр Пирсона-Московица, превышение a_{ζ}^* в 2.3 раза.

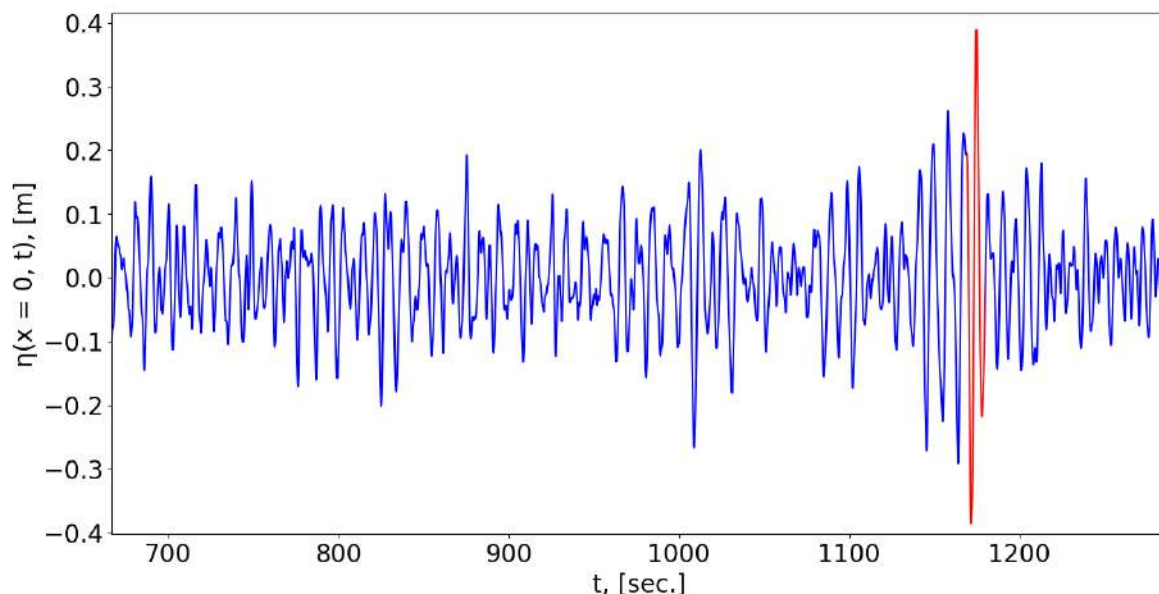


Рис. 43 Экстремальная знакопеременная волна, спектр Пирсона-Московица, превышение H_s^* в 2.6 раза.

Можно отметить, что волны-убийцы в численных экспериментах в рамках симметричного модельного спектра появляются группами, причем для наибольших из этих групп выполняется одновременно превышение в два раза её положительной и отрицательной амплитудами значительной амплитуды волнения, и её высотой значительной высоты волнения. В случае несимметричного реалистичного спектра для волн в записи перестает выполняться равенство $H = 2a$, в результате волны-убийцы могут быть найдены отдельно как по превышению амплитудного, так и по превышению высотного критерия.

4. Обработка натуральных данных

Начиная с 2009 года Специальным конструкторским бюро средств автоматизации морских явлений ДВО РАН проводятся непрерывные измерения колебаний уровня моря у южных берегов острова. В настоящей работе для обработки используются данные, полученные с сентября 2012г. по май 2015г. автономными донными регистраторами гидростатического давления [11-12] установленными в Охотском море в районе мыса Свободный. Приборы измеряют пульсации придонного давления, индуцированного поверхностными волнами.

Глубина погружения датчика – $h = 9$ м (погрешность 10%), точность по давлению – 0,06%, дискретность измерений одна секунда [12]. Сами данные представляют из себя ежесекундные записи температуры воды и суммы гидростатического и атмосферного давления (мм. рт. ст.), действующего на датчик. Из-за малой глубины ветровые волны мелководные, для их измерения может быть использована формула гидростатического пересчета:

$$p = p_{atm} + \rho g(h + \eta), \quad (23)$$

где p – давление на датчик, p_{atm} – атмосферное давление, ρ – плотность воды, η – смещение водной поверхности.

В данных условиях величины ρ , p_{atm} и h не постоянны и могут значительно изменяться в зависимости от текущих изменений в атмосфере, наличия приливов, отливов и сезонных изменений уровня воды в море, связанных со стоком рек и осадками, поэтому формулу (23) для получения записи уровня смещения морской поверхности можно переписать в виде:

$$\eta(t) = \frac{p(t) - p_{atm}(t) - \rho(t)gh(t)}{\rho(t)g} \quad (24)$$

Величина изменения плотности в связи с малым водообменом залива (уровень солености почти постоянен) обуславливается только температурой воды, в зимнее время года плотность воды составляет 1 027 кг/м³, в летнее 1 024 кг/м³.

Изменения глубины погружения датчика h происходят в значительном диапазоне, это обуславливается несколькими факторами: приливной активностью и синоптической изменчивостью, которые значительно меняют уровень воды в течение суток и недель; сезонными изменениями уровня моря, меняющими уровень воды в масштабах нескольких месяцев.

Следовательно, колебаниям уровня плотности, атмосферного давления, а также уровня погружения датчика h при разложении смещения водной поверхности в ряд Фурье соответствуют длинные гармоники, имеющие большой период колебаний T и малую частоту ω . Нулевая гармоника соответствует горизонтальной прямой вида $\eta(t) = const$ и является средней глубиной погружения датчика за всё время.

На рис. 44 представлена 15-минутная запись, полученная с датчика в летний период, на рис. 45 полугодичная запись с сентября 2012 г. по март 2013 г. Из визуализации можно отметить, что имеет место значительная неоднородность: присутствуют эпизоды штормовых ветров и периоды, в которые водоем покрыт льдом, видны колебания среднего уровня $\langle \eta \rangle$ морской поверхности (рис. 46). Из-за относительно небольшой частоты записи оборудования в некоторых случаях при описании индивидуальных волн возникают «срезанные» волны (рис. 47), абсолютное значение величины амплитуды в таком случае может быть занижено. Также имеют место высокие остроконечные волны (рис. 48), определяющиеся одной точкой, такие волны, очевидно, не могли появиться в реальных условиях, и скорее всего обусловлены сбоями датчика, а наличие подобных фрагментов может оказать негативное влияние на статистику аномальных волн.

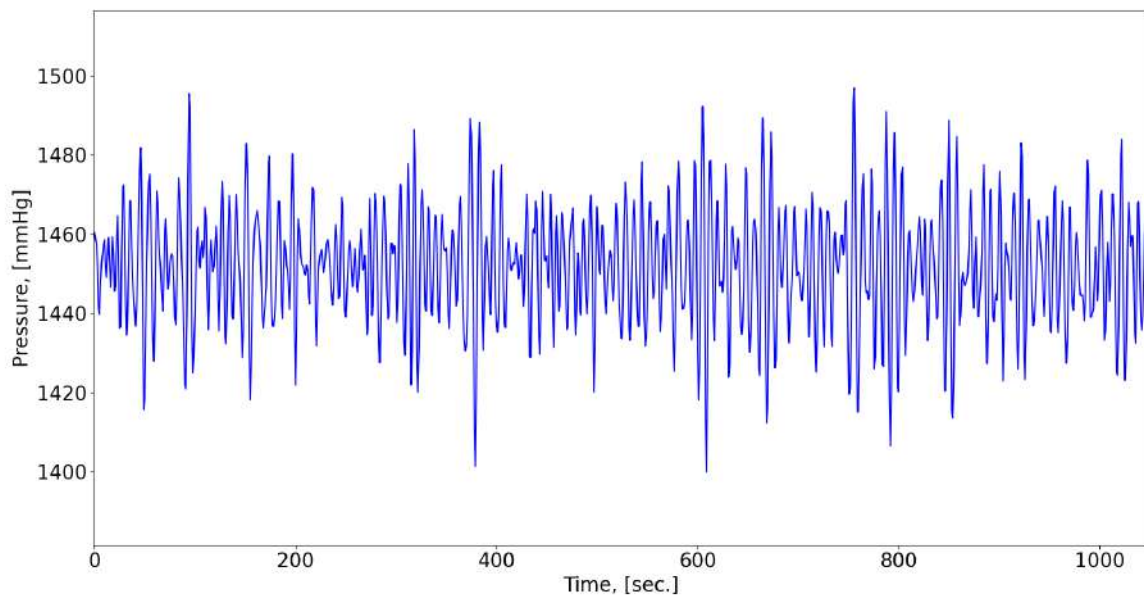


Рис. 44 15-минутная запись колебаний суммы атмосферного и гидростатического давления, действующего на датчик.

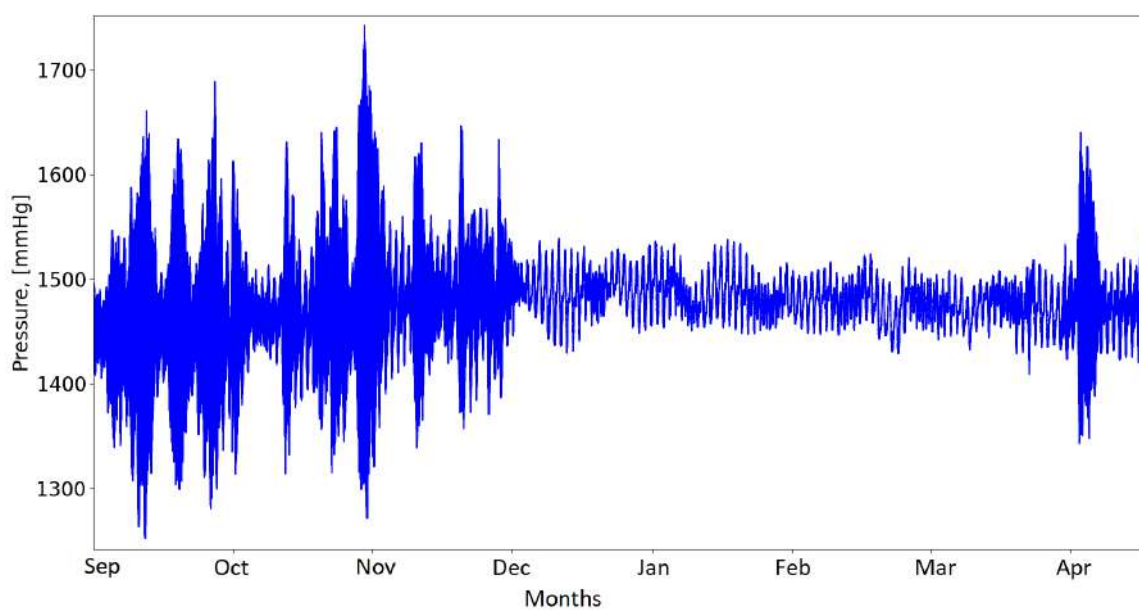


Рис. 45 Полугодовая волновая запись.

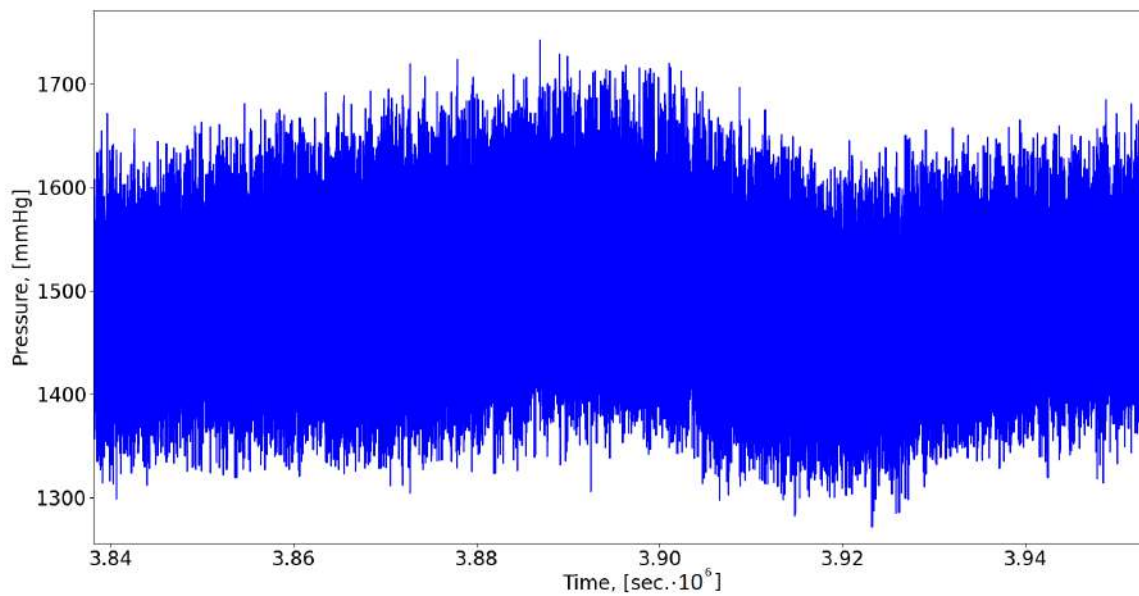


Рис. 46 Колебания среднего уровня морской поверхности.

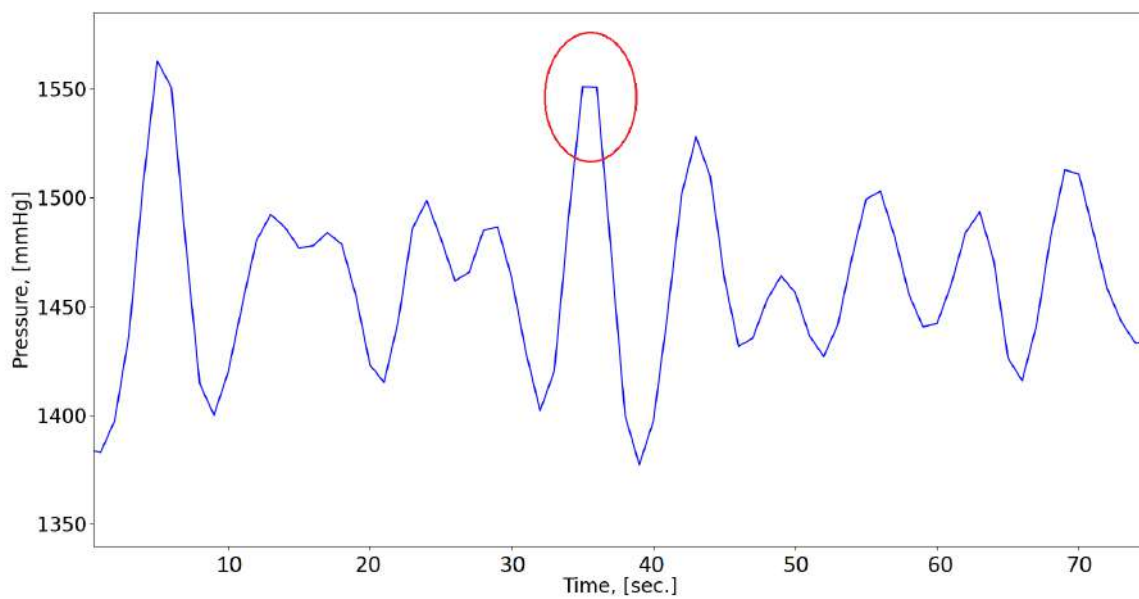


Рис. 47 «Срезанный» гребень волны.

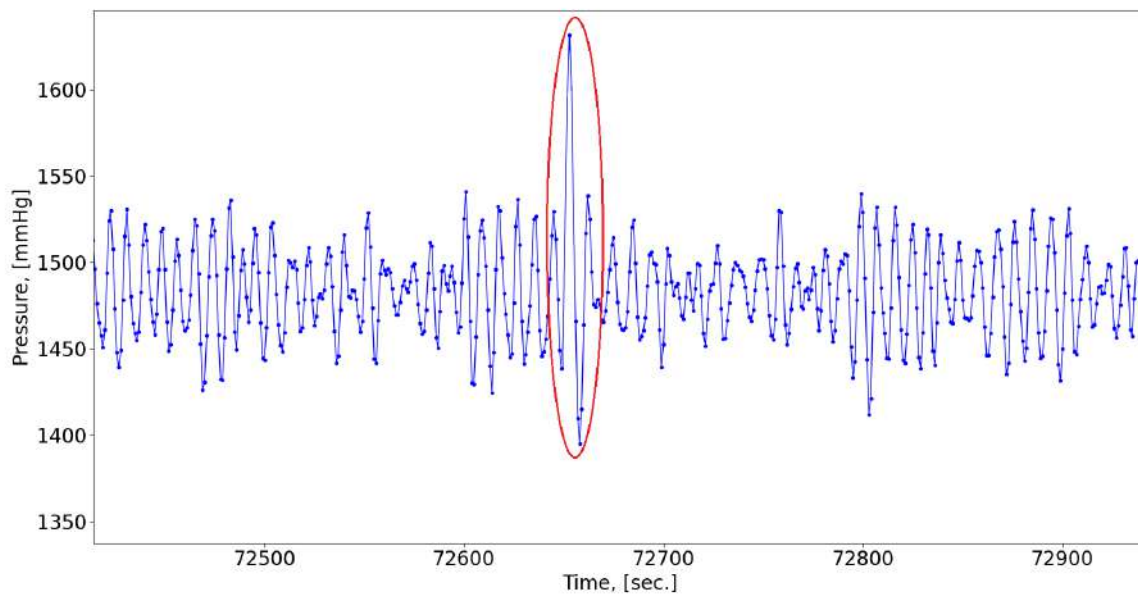


Рис. 48 Остроконечная волна, описанная одной точкой.

5. Контроль качества данных

Перед началом работы с данными, очевидно, необходимо повысить их качество. В первую очередь удалим первые несколько часов каждой годовой записи (рис. 49), поскольку они содержат данные еще не погруженного в воду датчика (отражающие, соответственно, только текущее атмосферное давление, действующее на него).

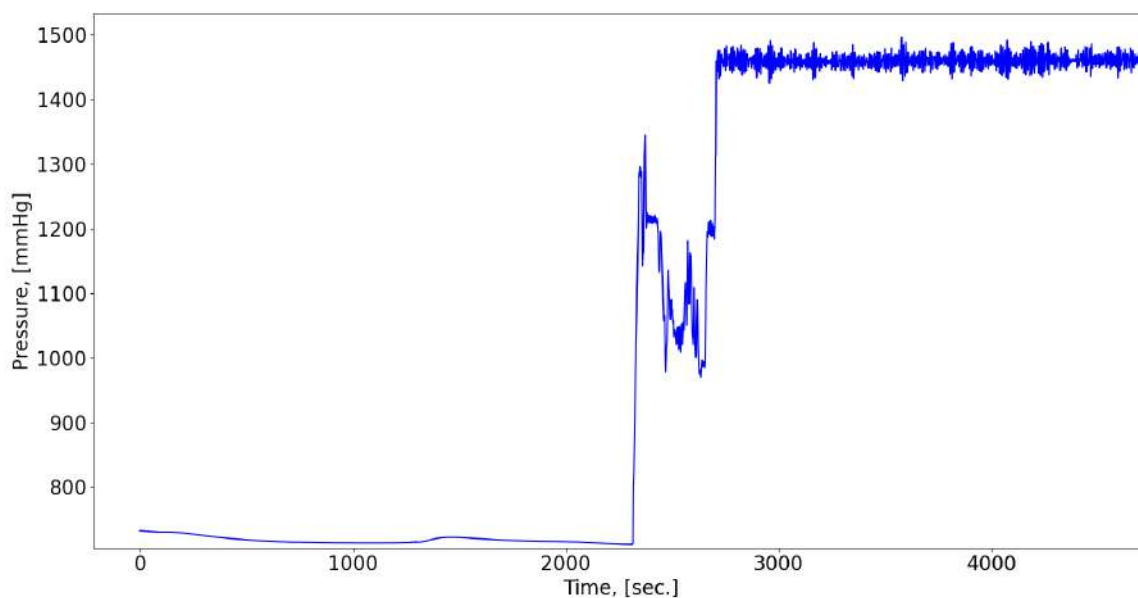


Рис. 49 Начальные моменты времени каждой годовой записи.

На рис. 50 представлена годовая (август 2014 – май 2015) запись после применения формулы гидростатического пересчета:

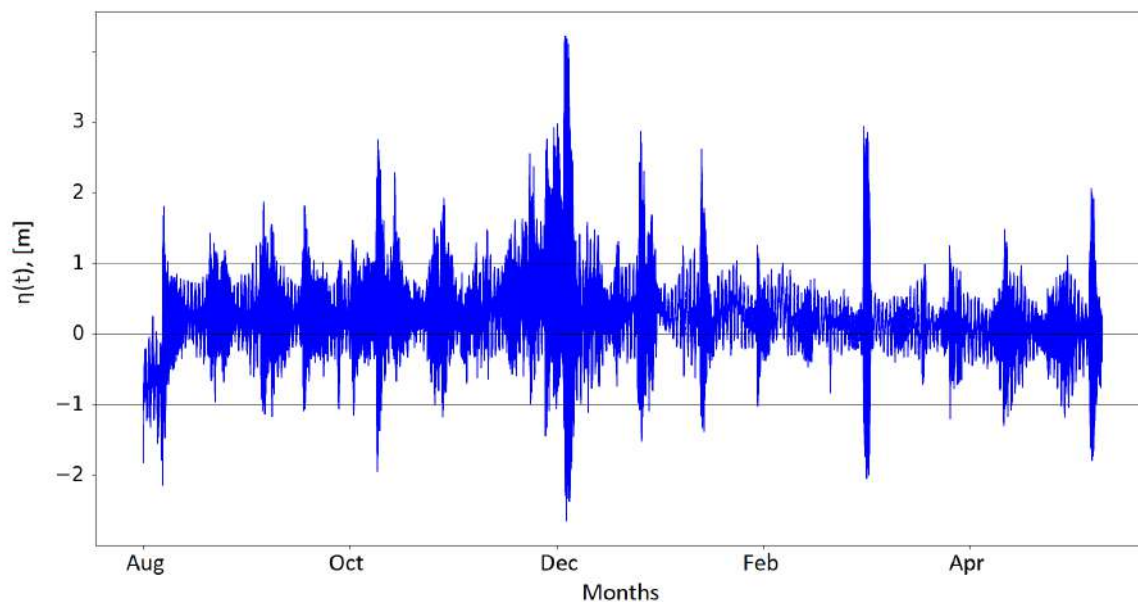


Рис. 50 Годовая запись смещений морской поверхности $\eta(x = const, t)$

Из визуализации очевидно, что средний уровень смещений водной поверхности отличен от нуля, что делает невозможным корректное определение амплитуд и высот индивидуальных ветровых волн. Найдем частотный Фурье-спектр каждой полугодовой записи, используя FFT (Fast Fourier Transform), они представлены на рис. с 51 по 53. Такие спектры комплексны и симметричны относительно вертикальной оси, но для понимания формы спектра удобно брать от него модуль и рассматривать его график только в первом квадранте. В данном случае показано какое значение амплитуды (в метрах) соответствует каждой гармонике из частотного домена.

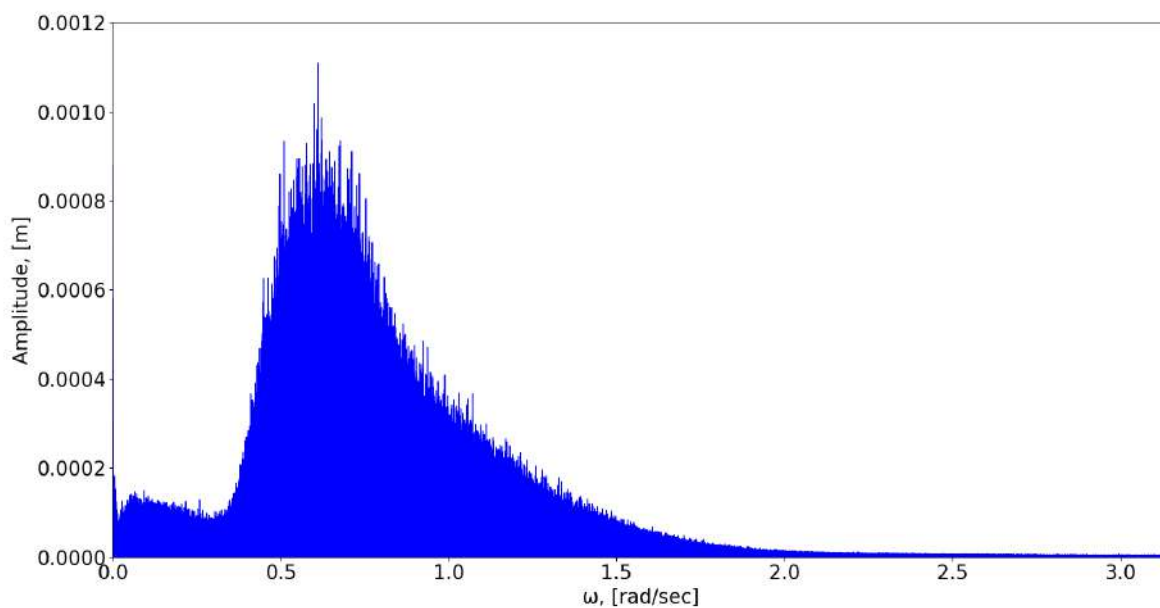


Рис. 51 Частотный спектр волнения для записи 26.09.2012-19.03.2013

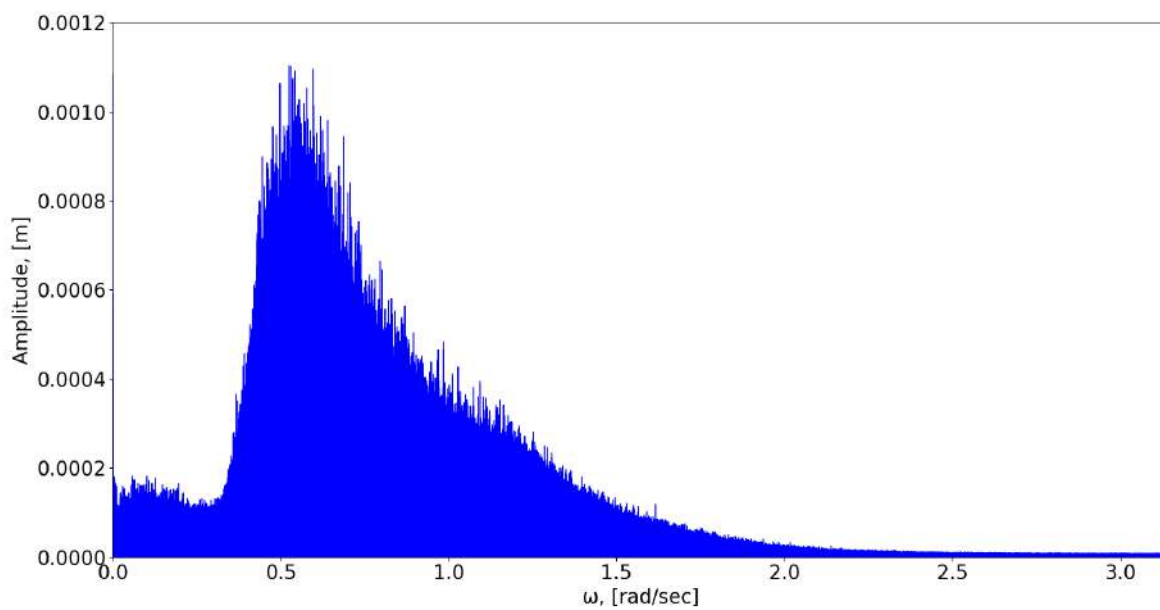


Рис. 52 Частотный спектр волнения для записи 12.11.2013-05.05.2014

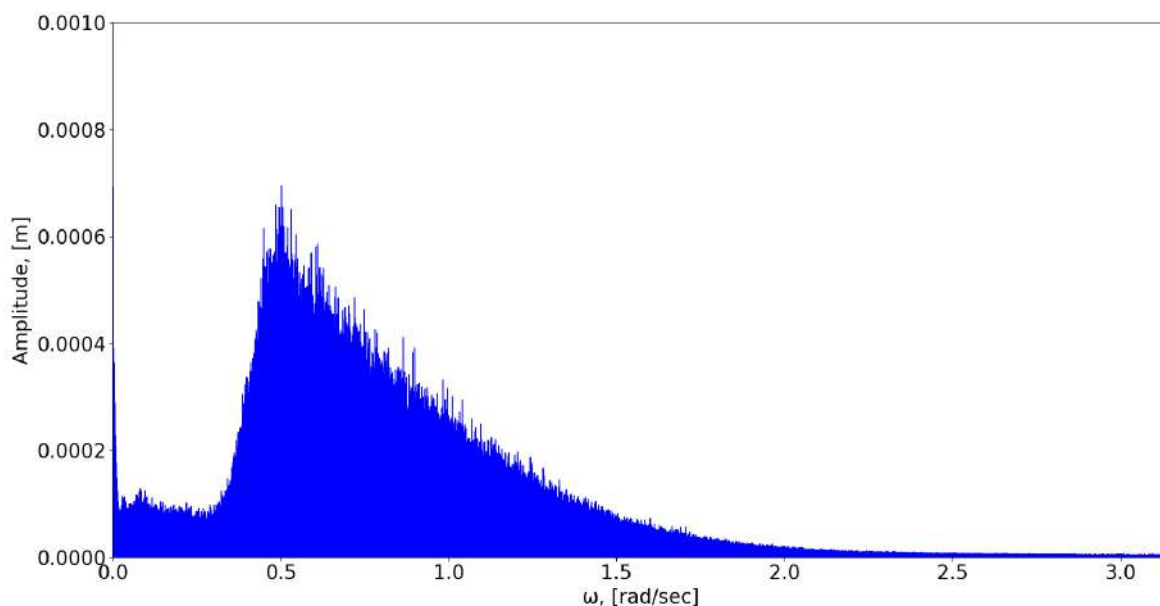


Рис. 53 Частотный спектр волнения для записи 05.08.2014-16.05.2015

Формы спектров для каждой полугодовой записи совпадают, это может говорить об устойчивости условий волнообразования в рассматриваемом районе. Также можно отметить, что спектр имеет один выраженный пик и по форме гораздо ближе к спектру Пирсона-Московица, чем к гауссовому спектру.

Удалим из спектров компоненты, соответствующие волнам с периодом более 10 минут, как уже было сказано, именно они отвечают приливным и сезонным колебаниям уровня воды. Затем выполним обратное преобразование Фурье. Получим записи, содержащие ветровые волны с близким к нулю средним уровнем. На рис. 54 представлено сравнение двух записей, синим цветом – исходная, оранжевым – после удаления низкочастотных компонент. Это делает возможным корректное определение каждой индивидуальной волны по уже описанному методу пересечения нуля.

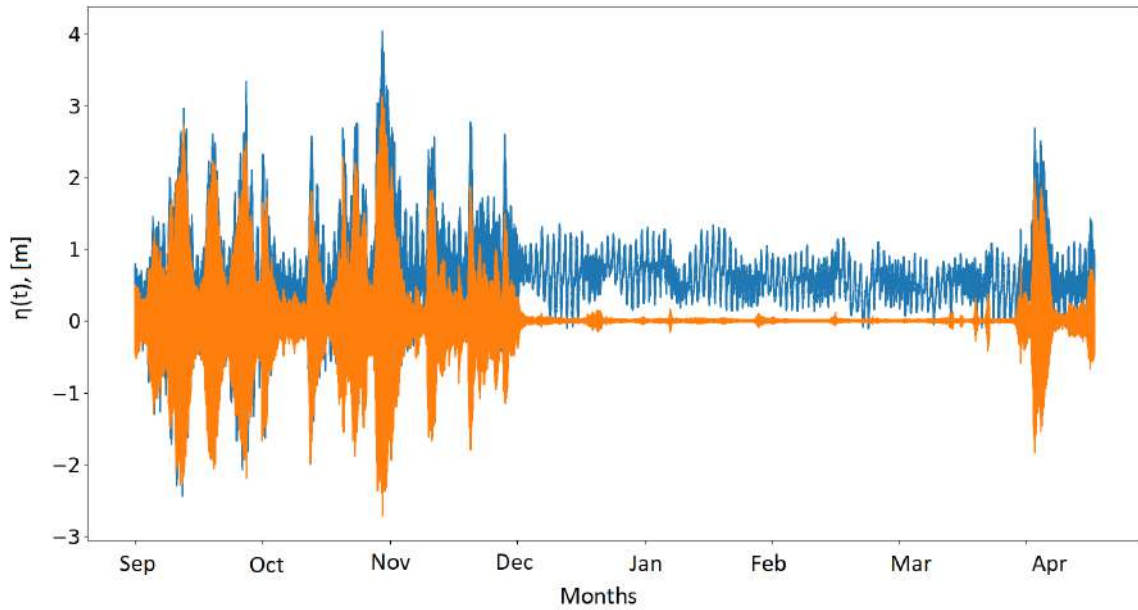


Рис. 54 Сравнение двух записей: до и после удаления низкочастотных компонент.

Затем для решения проблемы неоднородности разбиваем записи на 20-минутные статистически однородные фрагменты, предполагается, что в рамках такого отрезка времени не может произойти никаких качественных изменений в характере волнения. Всего имеем около 30 тысяч записей, каждую из которых теперь можно классифицировать, например классом штормовых волн, умеренных волн или ледовым промежутком, в котором величина волн и вовсе незначительна.

Для каждой 20-минутной записи вычислим величину η_{rms} по формуле:

$$\eta_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2} \quad (25)$$

и отбраковываем записи с $\eta_{rms} < 0.05$ м, предполагаем, что на поверхности лежит лёд и рассматривать столь малые колебания смещений водной поверхности не имеет практического смысла.

Затем переходим к удалению остроконечных волн, эта задача сводится к замене в записях одиночных точек, удовлетворяющих неравенству (8):

$$|\eta^{i+1} - \eta^i| > 1.5H_s^* \quad (26)$$

Замена производится следующим образом:

$$\eta^{i+1} = \frac{\eta^i + \eta^{i+2}}{2} \quad (27)$$

Далее применим метод сплайн-интерполяции (Cubic Spline) для улучшения качества записей, этот метод позволяет описывать волны с большим числом точек на период, тем самым решая проблему «срезанных» волн. На рис. 55 показан пример волновой записи в случае применения сплайн-интерполяции и без неё.

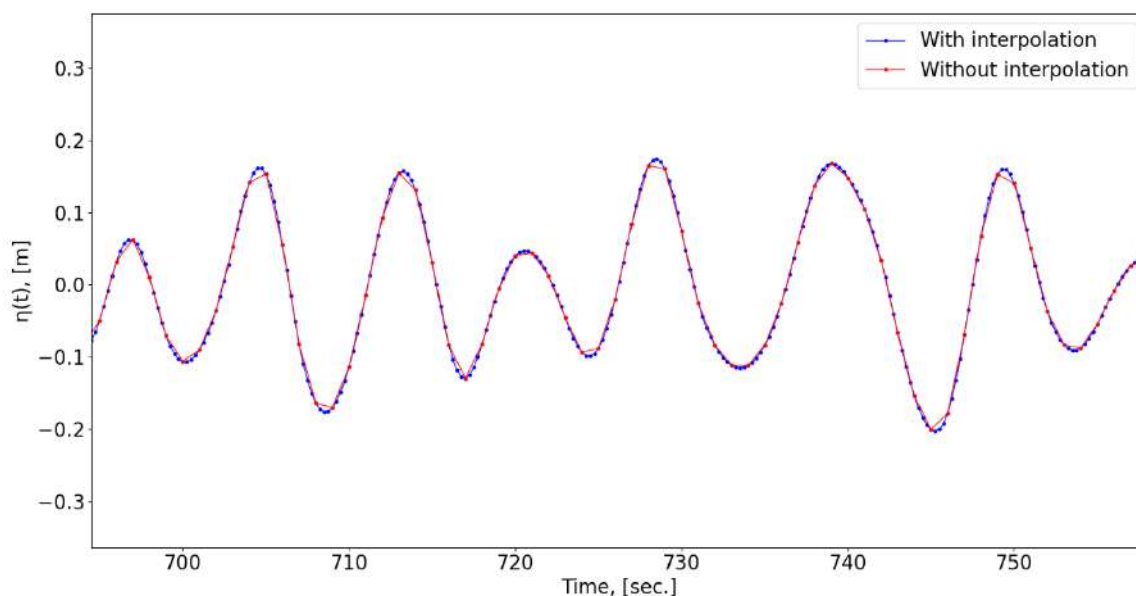


Рис. 55 Применение сплайн-интерполяции, приближение 20-минутной записи, число точек данных увеличено в 4 раза.

6. Анализ статистики натуральных данных

После реализации всех указанных процедур данные полностью готовы к обработке. Выделим в них индивидуальные волны: вычислим их амплитуды и высоты. Выделение происходит по схеме, аналогичной случаю численного моделирования, но теперь рассмотрим два способа: up-crossing и down-crossing, определяющие индивидуальные волны по пересечению нуля вверх и вниз соответственно. Чтобы перейти от одного способа к другому достаточно выполнить проход по отраженному относительно оси x смещению водной поверхности, то есть $-1 \cdot \eta(t)$. Волны, полученные пересечением нуля вверх, характеризуются крутым задним фронтом, а волны, полученные пересечением нуля вниз - крутым передним фронтом.

В таблице 1 отражено общее количество индивидуальных волн, выделенных двумя способами: up-crossing и down-crossing.

Индивидуальные волны по пересечению нуля вверх	3 204 922
Индивидуальные волны по пересечению нуля вниз	3 205 063

Табл. 1 Общее количество индивидуальных волн

Также вычислим практические значения a_s^* , H_s^* и T_z . В данном случае удобно вычислять значительные амплитуды и высоты через значения среднеквадратического отклонения, вычисленные непосредственно для каждой 20-минутной записи: $a_s^* = 2\sigma^*$, $H_s^* = 4\sigma^*$. Период по пересечению нуля T_z вычисляется по формуле:

$$T_z = \frac{T_r}{N_z}, \quad (28)$$

где T_r – длина записи, а N_z – количество пересечений нуля в ней. Проведем селекцию записей по режимам волнения, исходя из значений H_s^* и T_z в каждой из них (рис. 56).

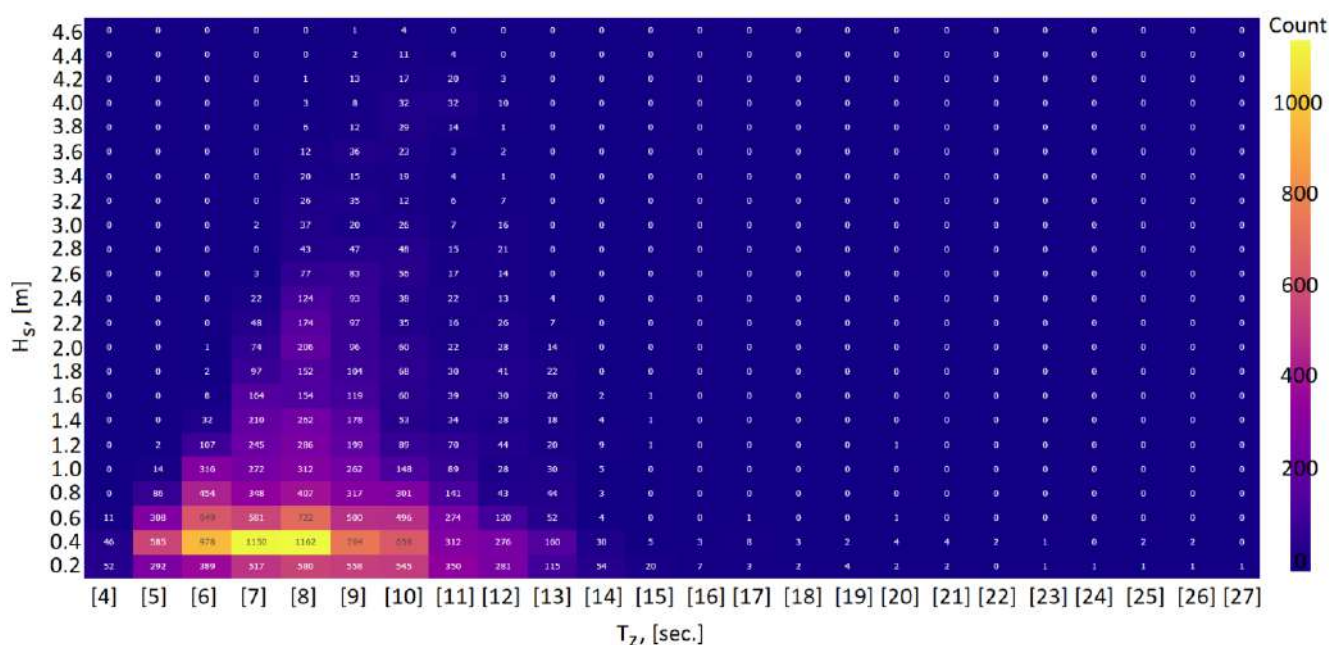


Рис. 56 Селекция записей по режимам волнения. Числа в ячейках – число подходящих по заданным на осях параметрам записей.

Данная визуализация в рамках проведенных натуральных измерений позволяет отметить характерный период пересечения нуля – 7-8 секунд, характерную высоту волн – половина метра. Наблюдаются периоды сильного волнения с характерной высотой волнения от одного до 2.4 метров, при этом в таком случае длительность волн меняется не сильно. Также содержатся эпизоды штормового режима волнения, значительная высота волн в котором достигала 2.4 - 4.6 метров, период пересечения нуля в таком режиме возрастал на 3 – 4 секунды пропорционально высоте волн.

Теперь вычислим основные статистические характеристики записей: среднее поле, дисперсию, асимметрию и эксцесс, определяющиеся формулами (5) и (29) соответственно:

$$Sk = \frac{1}{L\sigma^3} \int_0^L (\eta(x) - \langle \eta \rangle)^3 dx, \quad Kur = \frac{1}{L\sigma^4} \int_0^L (\eta(x) - \langle \eta \rangle)^4 dx - 3 \quad (29)$$

Усредненные по всем записям значения представлены в таблице 2, проведено сравнение с статистическими моментами, вычисленными для случая численных экспериментов:

	$\langle \eta \rangle$	σ^2	Sk	Kur
Натурные данные	$-5 \cdot 10^{-6}$	0.077	0.009	-0.092
Численное моделирование, спектр Пирсона-Московица	$2 \cdot 10^{-9}$	0.006	$-3 \cdot 10^{-4}$	-0.011
Численное моделирование, модельный спектр	$-1 \cdot 10^{-18}$	0.006	$5 \cdot 10^{-14}$	-0.015

Табл. 2 Усредненные по всем записям статистические моменты.

Волны, рассматриваемые в случае глубокой воды (численный эксперимент), как правило, имеют большую амплитуду и более низкую частоту, а волны, рассматриваемые на мелкой воде (натурные наблюдения), наоборот имеют меньшую амплитуду и более высокую частоту, этим объясняется различие в значениях асимметрии. По этой же причине на мелкой воде более вероятно, что волна будет иметь крутой передний фронт.

Теперь проанализируем данные на предмет наличия в них экстремальных волн, используя высотный и амплитудный критерии волны убийцы. Формы таких волн представлены на рис. 57-60.

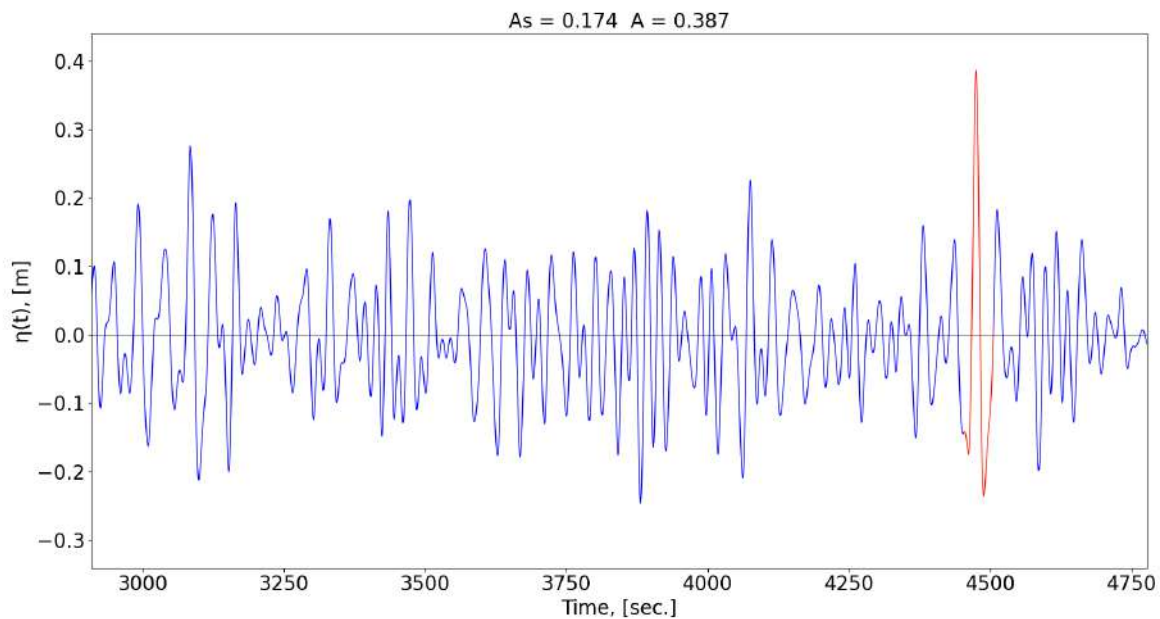


Рис. 57 Аномально большой гребень волны, превышение в 2.2 раза.

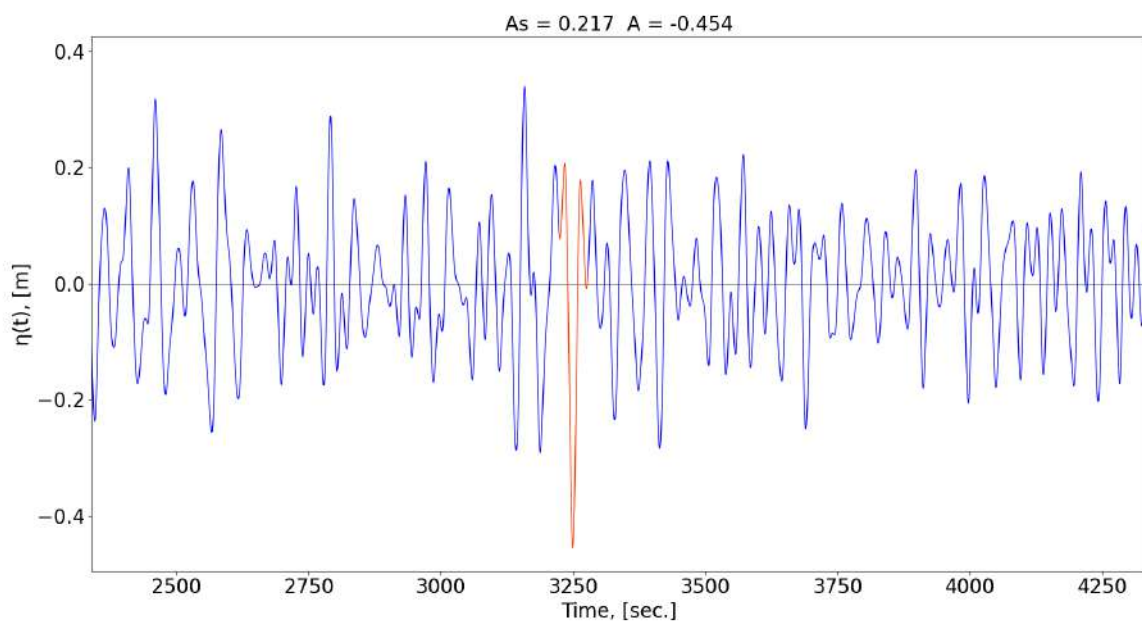


Рис. 58 Аномально большая впадина волны, превышение в 2.1 раза.

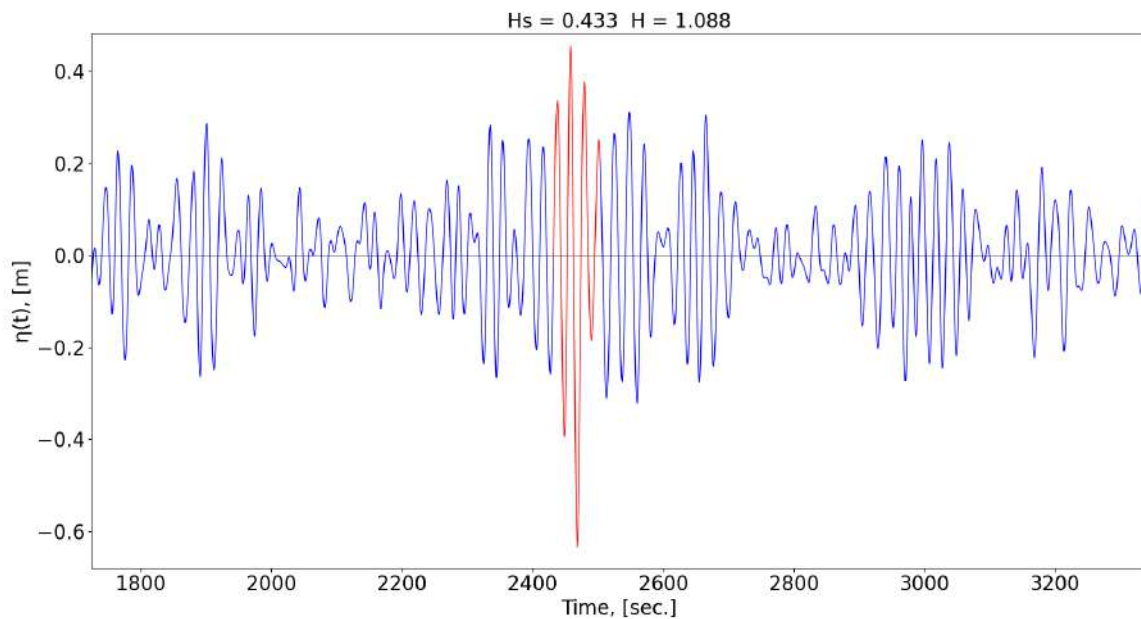


Рис. 59 Аномально высокая волна, превышение в 2.5 раза.

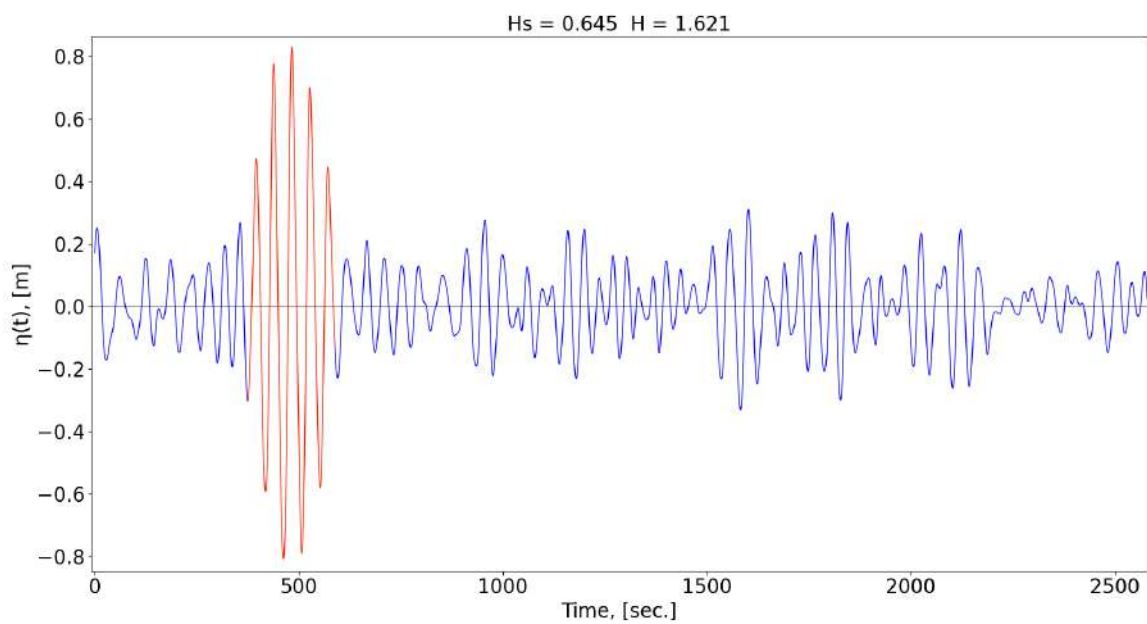


Рис. 60 Группа аномально высоких волн, превышение в 2.5 раза.

Как правило, аномальные события в данных наблюдениях появлялись вне штормового режима волнения, на фоне невысоких волн.

В таблице 3 отражено количество экстремальных волн, найденных обоими критериями:

Амплитудный критерий $A > 2.2A_s^*$, гребни	85
Амплитудный критерий $A < -2.2A_s^*$, впадины	159
Высотный критерий $H > 2H_s^*$	182

Табл. 3 Общее количество волн-убийц.

Волн, чья высота в 2.5 раза превосходит H_s^* всего в записях 9 штук, 8 из них появляются на фоне слабого волнения, когда на поверхности воды лёд, и такие волны всегда сопровождаются группами сразу из нескольких больших волн. Особенно выделяется запись февраля 2014 года, в которой при значительной высоте волнения $H_s^* = 0.33$ м возникло сразу две группы аномально больших волн (рис. 61), это значит, что за короткий промежуток времени в одной точке волна-убийца возникла сразу несколько раз.

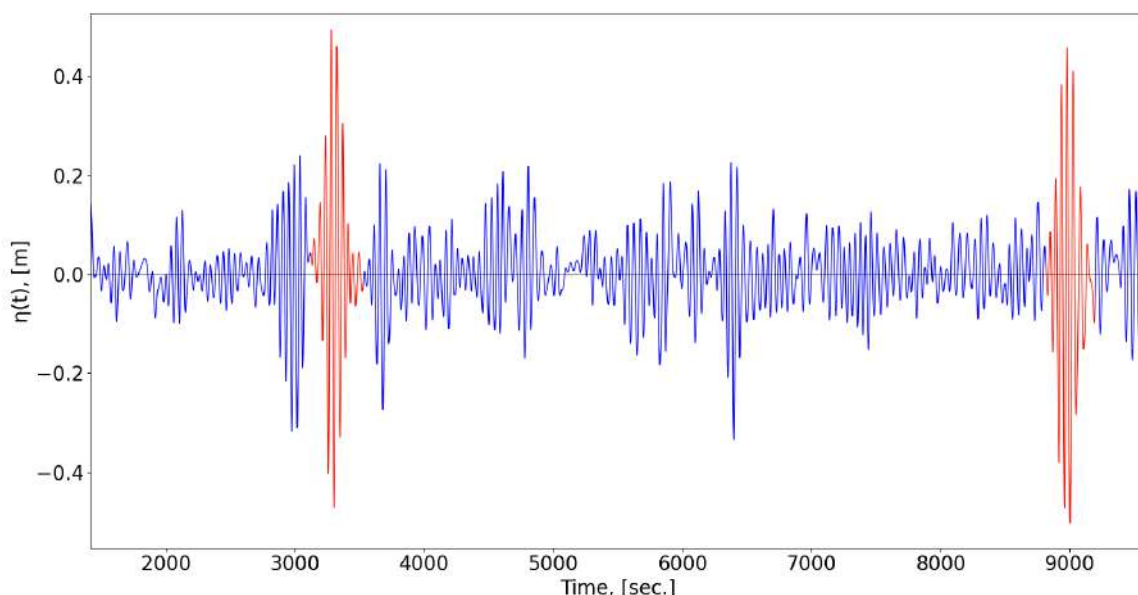


Рис. 61 Две группы аномально больших волн, превышение в 2.8 раза.

7. Функции распределения для натуральных данных

После того, как выполнено численное моделирование и произведена обработка натуральных данных, можно приступить к сравнению полученных результатов. Наиболее интересно и наглядно смотреть на статистику вероятности появления волн тех или иных размеров (как для высот, так и для амплитуд), то есть рассмотреть сравнение функций распределения. На рис. 62, 65 и 68 эти функции построены в логарифмическом масштабе, на рис. 63, 66 и 69 отображены «хвосты» распределений, на рис. 64, 67 и 70 – графики функций в линейном масштабе.

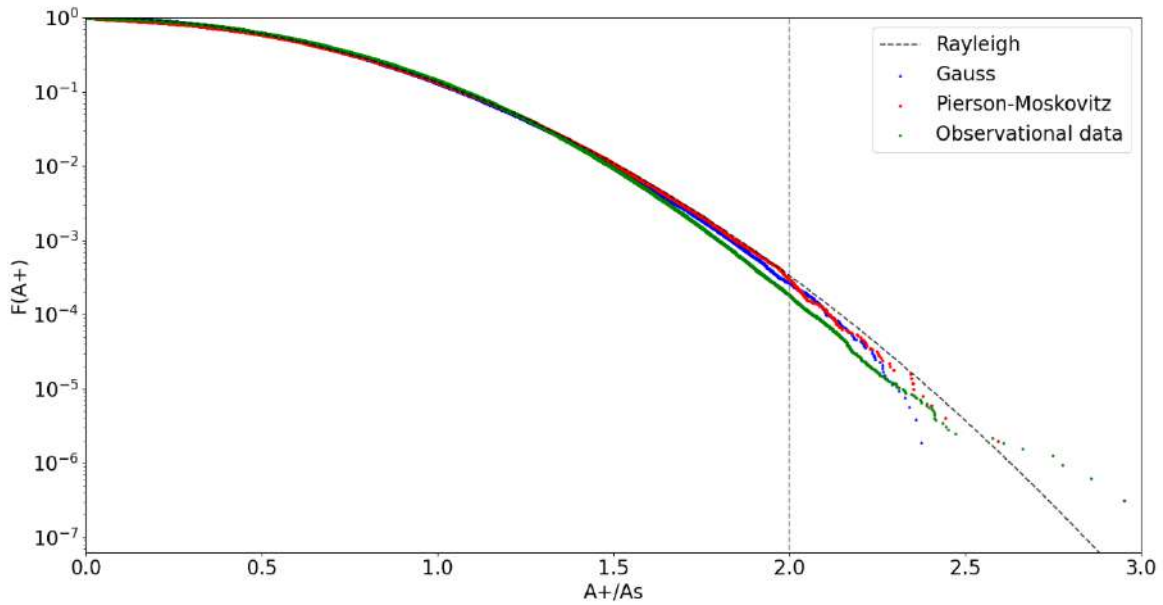


Рис. 62 Сравнение функций распределения положительных амплитуд волн численных экспериментов и натуральных данных, логарифмический масштаб.

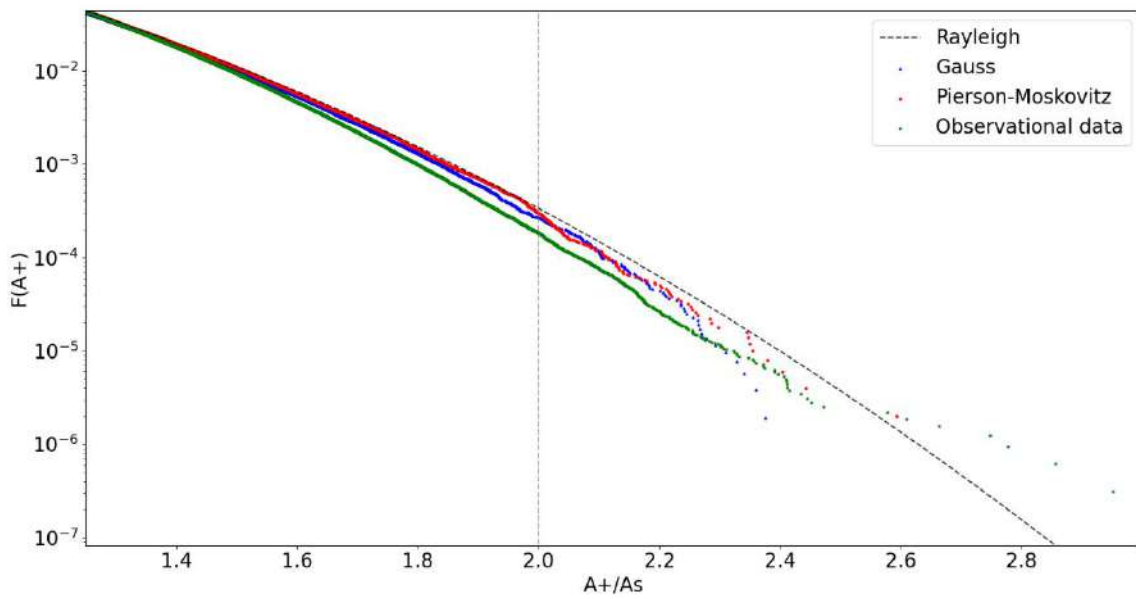


Рис. 63 Сравнение функций распределения положительных амплитуд волн численных экспериментов и натуральных данных, логарифмический масштаб, «хвосты» распределений.

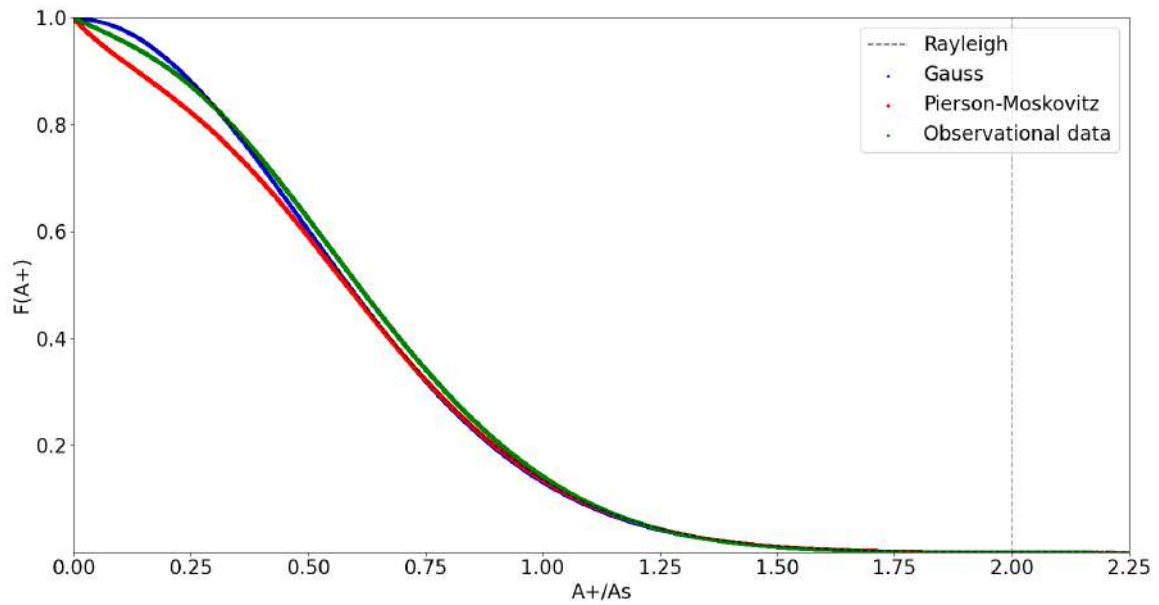


Рис. 64 Сравнение функций распределения положительных амплитуд волн численных экспериментов и натуральных данных, линейный масштаб.

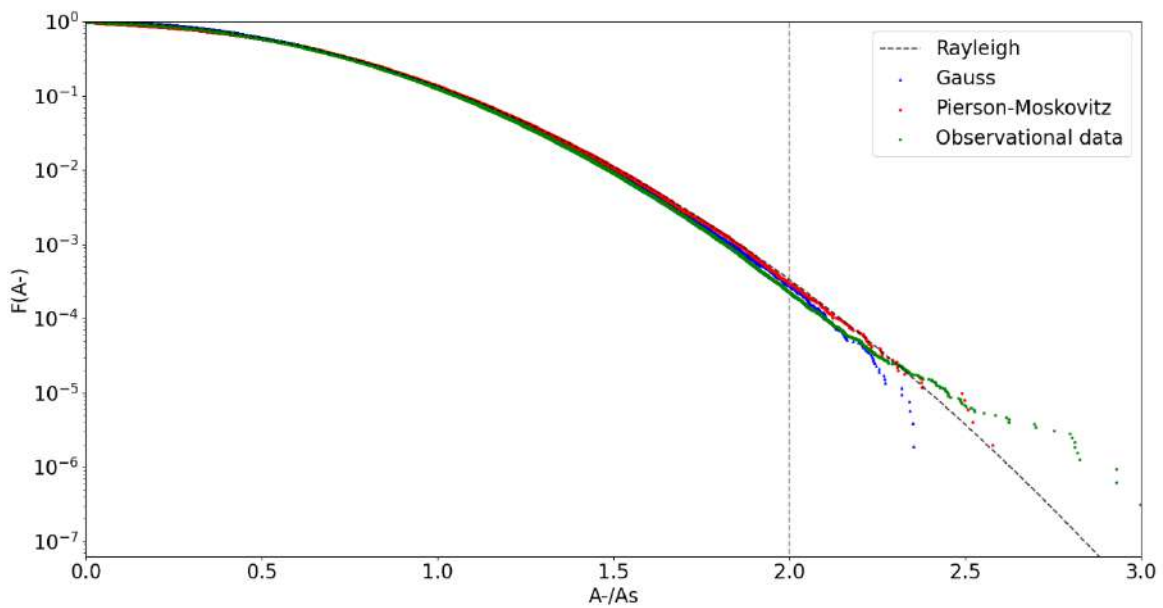


Рис. 65 Сравнение функций распределения отрицательных амплитуд волн численных экспериментов и натуральных данных, логарифмический масштаб.

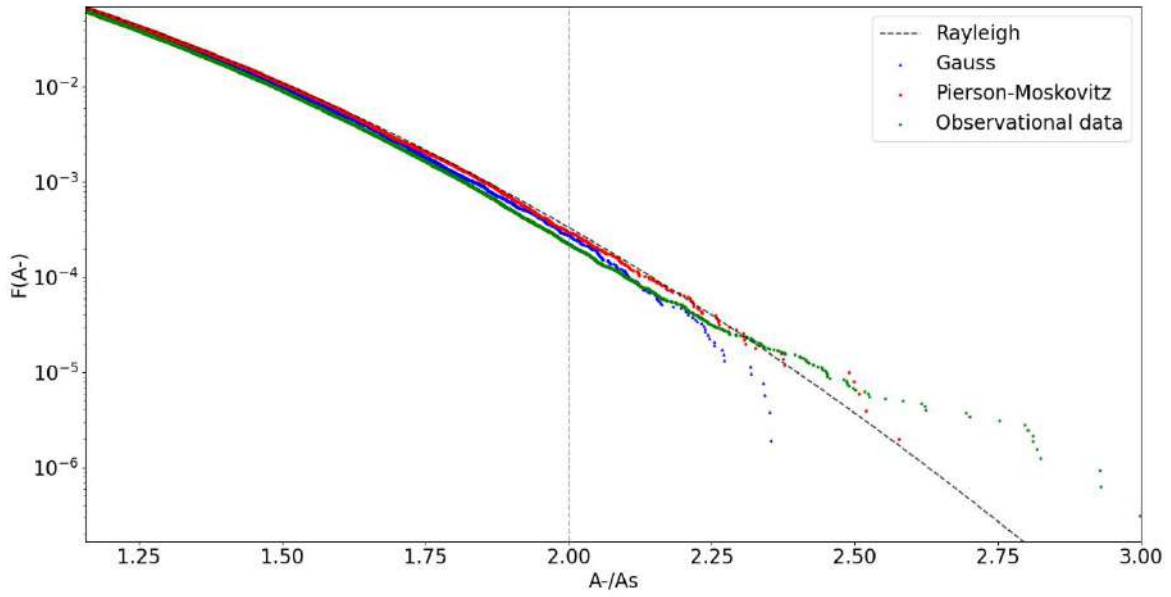


Рис. 66 Сравнение функций распределения отрицательных амплитуд волн численных экспериментов и натуральных данных, логарифмический масштаб, «хвосты» распределений.

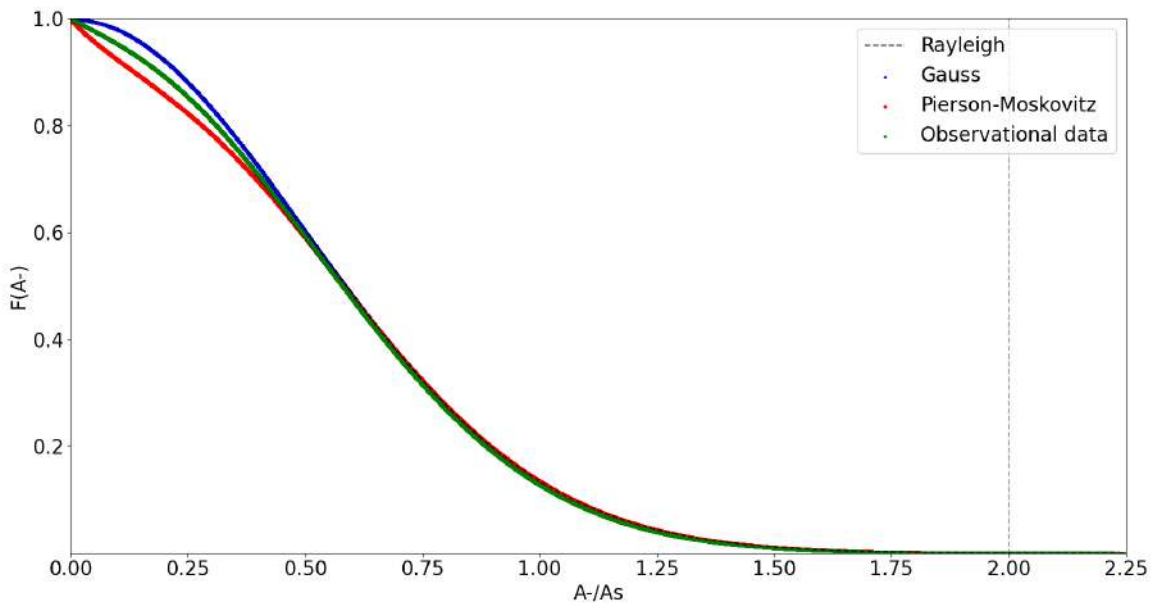


Рис. 67 Сравнение функций распределения отрицательных амплитуд волн численных экспериментов и натуральных данных, линейный масштаб.

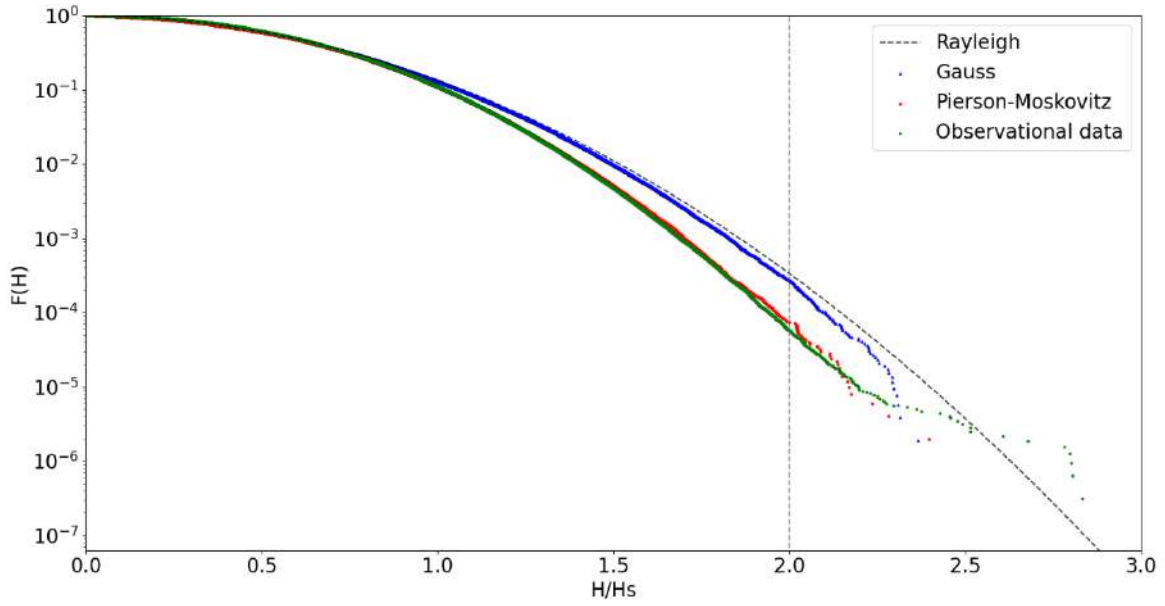


Рис. 68 Сравнение функций распределения высот волн численных экспериментов и натуральных данных, логарифмический масштаб.

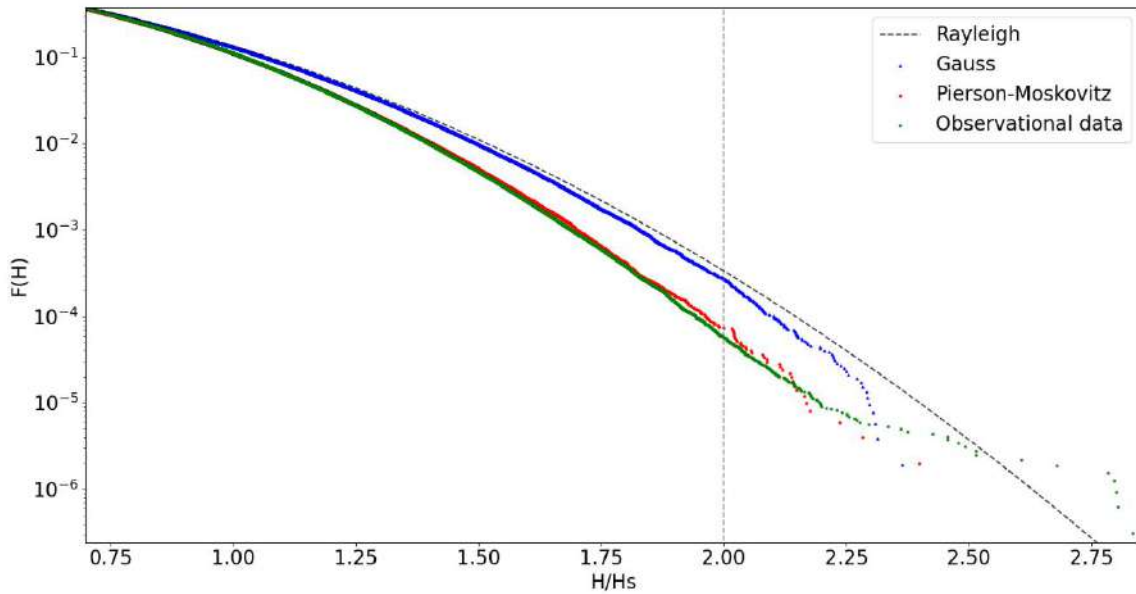


Рис. 69 Сравнение функций распределения высот волн численных экспериментов и натуральных данных, логарифмический масштаб, «хвосты» распределений.

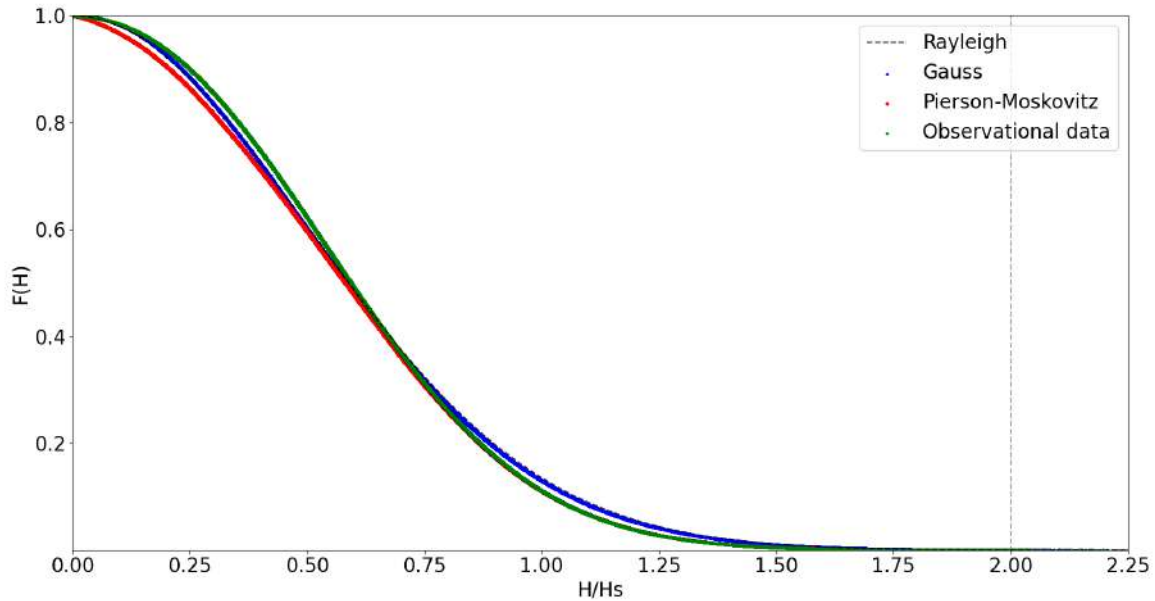


Рис. 70 Сравнение функций распределения высот волн численных экспериментов и натуральных данных, линейный масштаб.

Функция распределения амплитуд волн натуральных данных в основной массе проходит близко к Рэлеевской кривой, наблюдается небольшое отклонение вниз в области малых положительных и отрицательных амплитуд (как в случае спектра Пирсона-Московица), небольшое отклонение вверх в средней области положительных амплитуд. «Хвосты» распределений до значений $2.2A_s$ лежат ниже Рэля и ниже кривых, полученных в результате компьютерного моделирования, но в области выше $2.2A_s$ имеется качественное изменение поведение кривой вверх, в результате чего множество точек оказывается выше Рэля. Аналогичная ситуация наблюдается и в «хвостах» функции распределения высот. Основная же масса высот волн распределена немного выше Рэля до значения $0.6H_s$, а после этого немного ниже, и почти полностью начинает совпадать с распределением высот в рамках Пирсона-Московица.

Несмотря на разницу в параметрах волнения между моделированием и натурным экспериментом (например, модель рассматривает случай глубокой воды и постоянного ветра, а измерения проводились на мелкой воде с сильно меняющимся ветром), при рассмотрении безразмерных величин, можно отметить хорошее совпадение натурального эксперимента с численным, реализованным в рамках спектра Пирсона-Московица, однако особенно интересную нам область волн-убийц предложенная модель описать не способна и её оценки сильно занижают вероятность появления волн больших, чем $2.2H_s$ или A_s . Это может быть связано с линейностью модели, которая не учитывает множество реальных нелинейных эффектов.

Заключение

В ходе работы было проведено численное моделирование полей ветровых волн с двумя разными спектрами, проведена оценка времени работы и оптимизация алгоритмов: установлена длина и количество реализаций, необходимых для получения представительной статистики волн размером до 2.25 от значительных величин. На примере широкого и узкого спектров показано, что функции распределения высот и амплитуд волн совпадают с функцией распределения Рэля только в случае очень узкого спектра, и даже небольшое увеличение ширины приводит к отклонению вниз «хвоста» распределения, соответствующего наиболее высоким волнам, а значительное же увеличение ширины помимо этого вызывает отклонение вниз от Рэлеевской кривой в области малых и средних волн, это показано на примере спектра Пирсона-Московица. Гауссовый спектр является чисто модельным и далек от условий волнообразования в реальных водоемах, но в настоящее время детально изучен и в данной работе в основном использовался как опора для оценки корректности работы программ и алгоритмов, имеющих отношение к части компьютерного моделирования.

Также в работе представлена методика работы с натурными измерениями. Произведено восстановление смещений водной поверхности по данным датчика придонного давления, выполнен контроль качества данных, основанный на точечной коррекции ошибочных измерений, сплайн-интерполяции по точкам для повышения частоты дискретизации записей, а также на методе прямого и обратного преобразования Фурье, который позволяет минимизировать воздействие приливной активности и сезонной изменчивости для корректного выделения индивидуальных волн. В ходе обработки было получено порядка трёх миллионов индивидуальных волн и посчитаны их статистические характеристики. Для решения проблемы неоднородности длинных исходных записей они разделялись на 20-минутные фрагменты, которые в последствии были классифицированы.

Произведено сравнение статистики для численной модели и натурных данных и выявлено, что спектр Пирсона-Московица достаточно хорошо описывает поведение основной массы волн реального ветрового волнения, однако он неприменим к описанию хвостов функций распределения, поскольку данный спектр выведен для реального ветрового волнения без учета возможных экстремальных выбросов.

Список литературы

- 1) Massel S.R. Ocean Surface Waves: Their Physics and Prediction. Advanced Series on Ocean Engineering: Volume 11. 1996, 508p. <https://doi.org/10.1142/2285>
- 2) Волны-убийцы: факты, теория и моделирование: монография / А. А. Куркин, Е. Н. Пелиновский; изд. 2-е. – М.-Берлин: Директ-Медиа, 2015. – 178 с.
- 3) Kharif Ch., Pelinovsky E. and Slunyaev A., Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009. 216 p.
- 4) Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны, М.: Мир, 1977, 638 с.
- 5) Knut Torsethaugen, Sverre Haver. Simplified double peak spectral model for ocean waves // STATOIL, Stavanger Norway Paper No. 2004-JSC-193
- 6) Mori N., Liu P., Yasuda T. Analysis of freak wave measurements in the Sea of Japan // Ocean Eng. V. 29. 2002. P. 1399-1414
- 7) Stansell P. Distributions of freak wave heights measured in the North Sea // Applied Ocean Research V. 26. 2004. P. 35-48
- 8) Christou M., Ewans, K. Field Measurements of Rogue Water Waves // Journal of Physical Oceanography V. 44. 2014. P. 2317–2335
- 9) Häfner D., Gemmrich J., Jochum M. Real-world rogue wave probabilities // Sci. Rep. V. 11. 2021. P. 10084
- 10) Didenkulova I., Anderson C. Freak waves of different types in the coastal zone of the Baltic Sea // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. V. 10. 2010. P. 2021-2029
- 11) Зайцев А.И., Малащенко А.Е., Пелиновский Е.Н. Аномально большие волны вблизи южного побережья о.Сахалин // Фундаментальная и прикладная гидрофизика, 2011, том 4, № 4, С.35-43
- 12) Кузнецов К.И., Зайцев А.И., Костенко И.С., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Наблюдения волн-убийц в прибрежной зоне о. Сахалин // Экологические системы и приборы, 2014, №2, С.33-40

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Усмановой Дианы Римовны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе под названием «Непрерывные динамические системы с эффектом Олли» являются: 3.3.3 Бифуркации в системе.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Юмагуловым Маратом Гаязовичем, профессором и доктором физико-математических наук Университета Науки и Технологий.
- В период с 01 марта по 20 мая 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google по следующим ключевым словам: эффект Олли, динамические системы с эффектом Олли в выдаче поисковиков было исследовано 4 статьи, 2 тезисов докладов.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась 20.06.2022. На Смотри представлен проект текста/окончательный текст работы.

Подпись

Усманова Диана
Римовна

30 мая 2023 г., Уфа, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ПО ПРОГРАММЕ
БАКАЛАВРИАТА

УСМАНОВА ДИАНА РИМОВНА

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ЭФФЕКТОМ ОЛЛИ

Научный руководитель:
Проф.. д-р физ-мат наук
Юмагулов Марат Гаязович

Выполнила: студентка 4 курса очной
формы обучения
Направление подготовки
01.03.01 «Математика»
Направленность (профиль):
Дифференциальные уравнения,
динамические системы и
оптимальное управление

УФА – 2022

Содержание

Введение.....	2
§ 1 Классические модели популяционной динамики	3
1.1 Модель Мальтуса.....	3
1.2 Модель Лотки-Вольтерры	5
1.3 Модель Колмогорова.....	6
1.4 Классификация отношений между видами	8
§2 Системы с эффектом Олли.....	10
2.1 Эффект Олли.....	10
2.2 Одномерные модели Колмогорова	11
2.3 Двумерная система с эффектом Олли	15
§3 Модельный пример.....	17
3.1 Система «хищник-жертва».....	19
3.2 Система «мутуализм».....	24
3.3 Система «конкуренция»	29
Заключение.....	36

Введение

Одним из наиболее интересных вопросов в нелинейной динамике является исследование математических моделей биологических популяций. Здесь рассматривается ряд классических моделей, таких как: модель Лотки-Вольтерры, модель Мальтуса, логистическая модель.

Отметим, что все эти модели связаны. Уравнения в этих системах одинаковы по типу, и они приводят к обобщенной модели Колмогорова.

Обычно в классических моделях соответствующие функции являются монотонными, но это не показывает всю картину наших моделей. В реальности, для учета эффектов насыщения, возрастающей конкуренции и т.п. в качестве функций, описывающих динамику популяции, следует использовать немонотонные функции. Это позволяет получить более полную картину поведения системы.

В моей работе на модельных примерах изучается влияние наличия немонотонных функций на динамику биологических систем.

§ 1 Классические модели популяционной динамики

1.1 Модель Мальтуса

Пусть $N(t)$ — численность изолированной популяции в момент времени t . Скорость ее изменения может быть показана в таком представлении:

$$\dot{N} = \text{рождаемость} - \text{смертность} + \text{миграция}. \quad (1)$$

Тип разных членов в правой части уравнения (1) находится в зависимости с определенными условиями существования популяции и присущих ей качеств. В простейшем случае подразумевается отсутствие миграции, а члены рождаемости и смертности соразмерны общей численности популяции.

$$N: \dot{N} = bN - cN, \quad \Rightarrow \quad \dot{N} = aN, \quad a = b - c, \quad (2)$$

Модель (2) называют моделью Мальтуса.

Интегрируя уравнение (2), мы получим

$$N(t) = N_0 e^{a(t-t_0)},$$

где N_0 — численность популяции в начальный момент времени t_0 . Если $a > 0$, то популяция растет с показательным ростом, когда же $a < 0$, то она будет вымирать. Объясняя решение уравнения (2), Мальтус заявлял, что в людском мире имеется безусловный закон безмерного размножения особей: прирост жителей происходит в геометрической прогрессии, в то же время ресурсы существования возрастают только в арифметической.

В модели Мальтуса численности роста изолированной популяции при неодинаковых коэффициентах смертности и рождаемости присутствуют

всего два варианта: или нескончаемый рост, или смертность. В случае если коэффициенты одинаковы, тогда система будет неустойчивой к внешним влияниям, так как любая точка $N^* \geq 0$ считается положением равновесия.

Таким образом в реальности наблюдаются постоянные популяции, в таком случае следует анализировать математические модели, в которых плотность популяции представляет регулирующую роль.

Несомненно, то, что показатель размножения в такого рода модели обязан являться не постоянным, а зависящим от численности или плотности. В наиболее простом варианте математическая модель роста закрытой популяции принимает вид:

$$\dot{N} = NF(N),$$

где $F(N)$ — коэффициент скорости увеличения популяции. Разложим $F(N)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля и уберем все части, помимо двух первых. Приобретем

$$\dot{N} = N(a + bN),$$

где a, b — некоторые постоянные, при этом безусловно допустить, то, что $a > 0, b < 0$. Непосредственно подобным образом Альфред Лотка пришел к уравнению, которое значится как логистическое уравнение.

Вводя явные значения, логистическое уравнение возможно сделать запись в виде

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad (3)$$

в коем оно более часто попадает в литературе. Тут r и K — положительные параметры. Если $N(t)$ мало, в таком случае $\dot{N} \approx rN$, и N увеличивается показательно. Параметр K разъясняется как потенциальная емкость экологической системы, что обуславливается как легкодоступным наличным числом ресурсов.

Судя по всему, то, что логистическое уравнение (3), как и модель Мальтуса (2), никак не необходимо принимать практически как уравнение, правящее популяционной динамикой настоящих систем. Более верным является применение логистического уравнения как наиболее простой и удобной формы отображения популяции, количество каковой стремится к какой-то окончательной зафиксированной величине. Логистическое уравнение — это первое приближение к отображению численности популяции с плотностно-зависимым регуляторным устройством, на динамику каковой оказывают большое влияние перенаселения и невсеобъемлемости ресурсов. Значимым минусом модели (3) считается то обстоятельство, что предельная численность популяции включается в качестве данного параметра, в таком случае как обнаружение этой величины зачастую считается главной задачей изучения.

1.2 Модель Лотки-Вольтерры

Система Лотки-Вольтерры называется начальной и простейшей системой для описывания модели «хищник-жертва», т.е. взаимоотношения популяции хищников и популяции жертв. Они коммуницируют в какой-либо среде: жертвы едят растения, хищники — жертв, (например, тигр-зебра).

Пусть x и y — численности популяции жертвы и хищника. Конечно, их численность меняется во времени $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда скоростями изменения популяций будут $x'(t)$ и $y'(t)$.

В отсутствие хищников популяция жертв будет расти. Будем считать, что она подчиняется закону Мальтуса $x' = ax$, где $a > 0$. Но количество хищников уменьшит рост популяции жертв. К тому же, чем больше рост популяции хищников, то есть y , тем меньше скорость возрастания популяции жертв. Поэтому, просто будет предположить, что коэффициент a зависит от y . То есть $a = a(y)$, причем функция $a(y)$ будет убывающей. Пусть для простых функций $a(y)$ будет являться линейной: $a(y) = a - by$, где $b > 0$, то есть коэффициент «кровожадности» наших хищников. В итоге мы получаем уравнение вида $x' = x(a - by)$.

Также будет и с популяцией хищников, которые будут уменьшаться в отсутствие жертв: $y' = -cy$, где $c > 0$. Заметим, что наличие жертв будет компенсировать это уменьшение. В итоге, мы получим уравнение $y' = x(-c + dx)$. Что приводит нас к системе уравнений вида:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \quad (4)$$

также называемой системой (моделью) Лотки-Вольтерры.

1.3 Модель Колмогорова

Запишем все три классические системы популяционной динамики

$$x' = kx \text{ (модель Мальтуса),} \quad (5)$$

$$x' = x(a - bx) \text{ (логистическая модель),} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \text{ (модель Лотки-Вольтерры),} \quad (7)$$

Отметим, что уравнения в этих системах одинаковы по типу, а именно представлены в виде:

$$u' = uf(\cdot),$$

Где $f(\cdot)$ -некоторая функция. К примеру, в $x' = kx$ $f(\cdot) = k$, а в $x' = x(a - bx)$, $f(\cdot) = (a - bx)$

В рассматриваемых моделях популяционной динамики $x(t)$ или же $y(t)$ означают численность популяций, а $x'(t)$ и $y'(t)$ - скорости изменения этих популяций. Поэтому отмеченный случай соответствует тому, что скорость изменения популяции соответствует его численности с некоторым коэффициентом $f(\cdot)$. Подведем естественное обобщение наших моделей (5) – (7).

Рассматривается биологическая среда, содержащая виды, которые каким-либо образом принимают участие меж собой. Это взаимодействие имеет возможность быть, к примеру, вида "хищник-жертва", "хищник- три жертвы", "конкуренция" (когда два вида оказывают друг на друга отрицательное влияние), "мутуализм" (когда два вида оказывают друг на друга положительное действие).

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — численность каждого из видов рассматриваемого биологического общества. Конечно, их численность меняется во времени, то есть $x_j = x_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Станем считать, что $x_j'(t)$ — скорости изменения популяций.

Будем считать, что скорость $x_j'(t)$ соответствует численности $x_j(t)$ с некоторым коэффициентом $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, определяющим суммарное влияние рассматриваемого биологического сообщества на популяцию $x_j(t)$.

Таким образом, рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' = x_2 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_3' = x_3 g_3(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (8)$$

в котором $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будут C^1 -гладкими по совокупности переменных.

Систему (8) именуют системой популяционной динамики (или популяционной моделью Колмогорова).

Примем

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}, \quad D_x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & x_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Тогда систему (7) можно представить в таком виде:

$$x' = D(x)g(x), x \in R^n. \quad (10)$$

1.4 Классификация отношений между видами

Присмотримся теперь к двумерной системе популяционной динамики вида:

$$\begin{cases} x' = xf(x, y), \\ y' = yg(x, y), \end{cases} \quad (11)$$

в которой $f(x, y)$ и $g(x, y)$ будут C^1 -гладкими функциями.

Система (11) получается при математическом моделировании динамики двух каких-либо взаимодействующих популяций. У них бывают разные качества. Основа которых является связь вида:

- 1) «хищник-жертва (-, +)» когда первые, то есть хищники оказывают на своих жертв отрицательное значение, а вторые на них оказывают положительное влияние;
- 2) «мутуализм (+, +)» когда обе популяции положительно относятся друг к другу;
- 3) «конкуренция (-, -)» когда обе популяции отрицательно относятся друг к другу;

- 4) «аменсализм (-, 0)» когда первые на второй вид оказывают отрицательное действие, а второй вид практически не оказывают никакого отношения;
- 5) «комменсализм (+, 0)» когда первые на второй вид оказывают положительное действие, а вторые на первый практически не оказывают никакого отношения.

Заметим, что мы будем изучать поведение системы (11) в первом квадранте $K_+ = \{(x, y): x, y \geq 0\}$ на плоскости R^2 . Система (11) имеет нулевую точку равновесия $x = y = 0$. Другие точки равновесия, если они существуют, будут решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Ограничимся рассмотрением двух вариантов двумерных систем (11). В первом варианте функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ являются линейного вида:

$$f(x, y) = a_1x + b_1y + c_1, \quad g(x, y) = a_2x + b_2y + c_2, \quad (13)$$

В которых a_j, b_j, c_j - некоторые коэффициенты.

§2 Системы с эффектом Олли

В классических моделях обычно функции являются монотонными, но это не вполне типично, потому что функция не может все время возрастать, так как эти функции обеспечивают рост или убывание. Следовательно, эта функция также не может быть все время возрастающей.

Так как рано или поздно наступит ограничение, что будет само по себе уменьшение или увеличение в зависимости от ситуации. Функция не может быть все время монотонной. Рано или поздно у нас будет насыщение. Функция, которая возрастала начнёт убывать. Это будет более адекватно описывать динамику явления.

В моей дипломной работе изучается на модельных примерах в трёх основных случаях, как влияет наличие немонотонных функций на динамику систем.

2.1 Эффект Олли

Эффект Олли заключается в немонотонном характере функции $F(N)$ в уравнении увеличения $\dot{N} = NF(N)$. Точно изъясняясь, следует различать сильный и слабый эффекты Олли. В случае слабого эффекта Олли $F(N) > 0$ для всех $0 < N < K$, при этом точка максимума $F(N)$ определяется при каком-нибудь N_m , превосходящем от нуля. В случае сильного эффекта Олли имеется нижняя предельная численность, подобная, что если популяция оказывается ниже этой численности, то скорость возрастания будет отрицательной, популяция далее вымрет (данный эффект возможно толковать до такой степени невысокую численность популяции, когда репродуктивные особи не обнаруживают друг друга в супружеский сезон). Стандартная модель учета сильного эффекта Олли в логистическом уравнении будет иметь вид

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) (N - l), \quad 0 < l < K, \quad r > 0. \quad (14)$$

Система обладает тремя положениями равновесия $N_1 = 0, N_2 = l, N_3 = K$. График правой части данного уравнения и фазовый портрет показаны на Рис. 1.

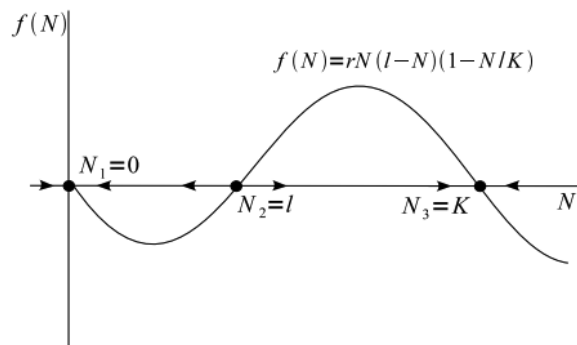


Рис. 1 График правой части ДС, учитывая эффект Олли.

Точка $N_3 = K$ по-прежнему считается аттрактором, однако аттрактором станет также точка $N_1 = 0$, в таком случае точка $N_2 = l$ — репеллер. В случае если первоначальные требования популяции такие, что $N(0) = N_0 < l$, тогда популяция вымирает.

Далее мы будем заострять внимание и ограничиваться на двумерных системах с эффектом Олли.

2.2 Одномерные модели Колмогорова

Присмотримся к одномерной системе популяционной динамики вида:

$$x' = xg(x), \quad x \in R^1 \quad (15)$$

в которой $g(x)$ будет C^1 -гладкой функцией. Рассмотрим действия ее решений на полуоси $K_+ = \{x \in R^1: x \geq 0\}$.

Уравнение (15) имеет ненулевую точку $x = 0$, которая также будет точкой равновесия. Другие же точки равновесия будут находиться в таком виде:

$$g(x) = 0, \quad (16)$$

если они будут существовать.

Наша функция (16) может быть монотонной на полуоси K_+ . То есть она будет либо убывать, либо возрастать. Иначе она будет немонотонной.

2.2.1 Случай монотонной функции

Для начала $g(x)$ будет на полуоси K_+ монотонной функцией. Тогда уравнение (15) будет на полуоси K_+ решаться с не более чем одним ответом и тогда есть только два решения:

- 1) Уравнение (15) не имеет положительных ответов;
- 2) Уравнение (15) имеет положительное решение $x = x_1$.

Тогда (15) при первом случае будет иметь одну ненулевую точку равновесия и к тому же она будет записываться в таком виде $x = 0$ на полуоси K_+ .

Фазовый портрет будет показан на Рис. 2 в таком виде:

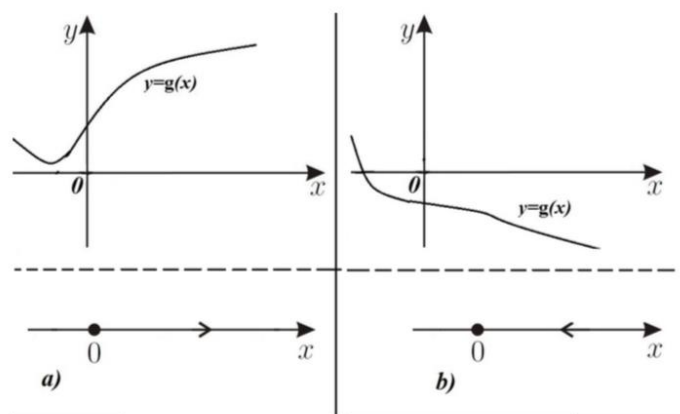


Рис. 2 Случай 1).

Где $a)$ когда $g(x) > 0$ при $x > 0$; либо $b)$ когда $g(x) < 0$ при $x > 0$
 Тогда система (15) при втором случае будет иметь нулевую точку равновесия и к тому же она будет записываться в таком виде $x = 0$ на полуоси K_+ , также он будет иметь ненулевую точку равновесия $x = x_1 > 0$.
 Фазовый портрет будет показан на Рис. 3 в таком виде:

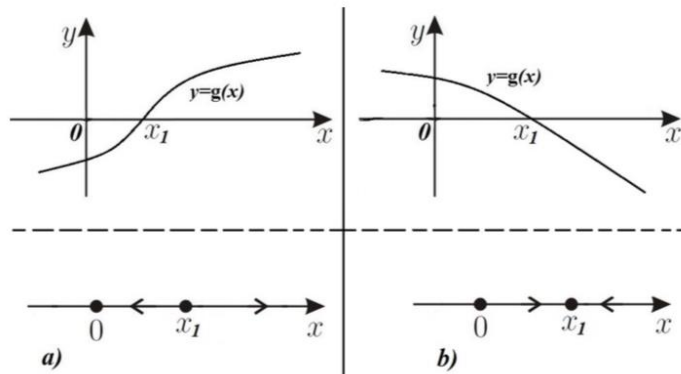


Рис. 3 Случай 2).

Где $a)$ когда $g(x) > 0$ при $x > 0$; либо $b)$ когда $g(x) < 0$ при $x > 0$

2.2.2 Случай немонотонной функции: эффект Олли

Для начала $g(x)$ будет на полуоси K_+ немонотонной функцией. Первый вариант изображен на Рис. 4.

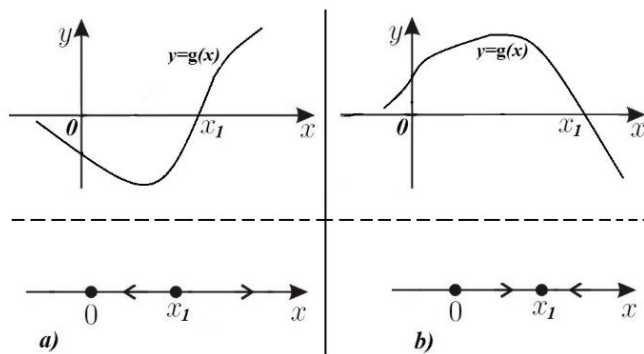


Рис. 4. Слабый эффект Олли.

Тогда первый вариант рисунка будет соответствовать ситуации, когда функция $y = g(x)$ немонотонна при всех $x > 0$ и уравнение $g(x) = 0$ имеет

одно положительное решение $x = x_1$. В таком случае система (15) на полуоси K_+ имеет, наряду с нулевой точкой $x = 0$, также одну ненулевую точку равновесия x_1 . Фазовый портрет этой системы будет иметь вид изображенный на Рис. 4. *a*) когда $g(x) < 0$ при $x_1 > x > 0$; либо *b*) когда $g(x) > 0$ при $x_1 > x > 0$. Точку равновесия x_1 здесь будут называть предельной численностью популяций.

Систему популяционной динамики (15) в которой функция $g(x)$ имеет указанное выше свойство, часто называется системой со слабым эффектом Олли.

Теперь рассмотрим второй вариант изображенный на Рис. 5.

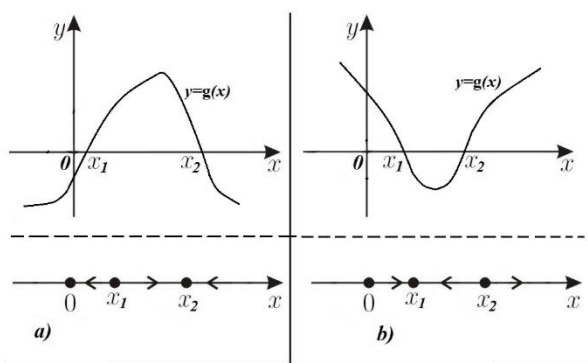


Рис. 5. Сильный эффект Олли.

Тогда второй вариант рисунка будет соответствовать ситуации, когда функция $y = g(x)$ немонотонна при всех $x > 0$ и уравнение $g(x) = 0$ имеет два положительных решения $x = x_1$ и $x = x_2$. В таком случае система (15) на полуоси K_+ имеет, наряду с нулевой точкой $x = 0$, также две ненулевых точки равновесия x_1 и x_2 . Фазовый портрет этой системы будет иметь вид изображенный на Рис. 5. *a*) когда $g(x) < 0$ при $x_1 > x > 0$; либо *b*) когда $g(x) > 0$ при $x_1 > x > 0$. Где точки равновесия будут x_1 - нижней предельной численностью и x_2 - верхней предельной численностью.

Систему популяционной динамики (15) в которой функция $g(x)$ имеет указанное выше свойство, часто называется системой с сильным эффектом Олли или просто системой с эффектом Олли.

Далее мы об этом поговорим в одном из параграфов.

2.3 Двумерная система с эффектом Олли

Будем рассматривать систему такого вида:

$$\begin{cases} x' = x[\alpha(x) + b_1 y + c_1], \\ y' = y[a_2 x + \gamma(y) + c_2], \end{cases} \quad (17),$$

В которых c_2, a_2, b_1, c_1 будут являться некоторыми коэффициентами, а $\alpha(x)$ и $\gamma(y)$ будут некоторыми C^1 -гладкими функциями.

Коэффициенты b_1 и a_2 будут показывать влияние одного вида на другой вид популяций. Знаки этих коэффициентов определяют классификацию систем вида (17).

1. Если $b_1 < 0$ и $a_2 > 0$ (или $b_1 > 0$ и $a_2 < 0$), то наша система будет типа «хищник-жертва»;
2. Если $b_1 < 0$ и $a_2 < 0$, то наш тип системы будет являться «конкуренция»;
3. Если $b_1 > 0$ и $a_2 > 0$, то наш тип системы будет являться «мутуализмом»;
4. Если $b_1 = 0$ и $a_2 < 0$ (или $b_1 < 0$ и $a_2 = 0$), то наша система будет типа «аменсализм»;
5. Если $b_1 = 0$ и $a_2 > 0$ (или $b_1 > 0$ и $a_2 = 0$), то наша система будет типа «комменсализм»;

Далее ограничимся исследованием только первых трех типов систем с эффектом Олли.

Посмотрим теперь, как одномерная система популяционной динамики обладает эффектом Олли. Вспомним, что этот эффект имеет место быть здесь, если $x' = xg(x)$ обладает эффектом Олли, если функция $y = g(x)$ немонотонна при $x > 0$ и уравнение $g(x) = 0$ имеет, хотя бы, два положительных решения $x = x_1$ и $x = x_2$.

В соответствии с этим определением, мы будем говорить, что двумерная система будет обладать эффектом Олли, если хотя бы одна из функций $x = \alpha(x)$ или $y = \gamma(y)$ немонотонна при $x > 0$ или при $y > 0$, причем наше уравнение $\alpha(x) = 0$ или $\gamma(y) = 0$ имеет, хотя бы, два положительных решения.

§3 Модельный пример

Для начала мы ограничимся рассмотрением трех модельных задач.

Рассмотрим двумерную систему такого вида:

$$\begin{cases} x' = x(1 + \beta y), \\ y' = y(y - \tau)(y - 2) + xy, \end{cases} \quad (18)$$

В которой τ будет являться нашим вещественным параметром.

Мы будем проводить исследование этой системы.

Тип системы

Для того, чтобы определить тип системы мы представим её в таком виде:

$$\begin{cases} x' = x[\alpha(x) + b_1 y + c_1], \\ y' = y[a_2 x + \gamma(y) + c_2], \end{cases}$$

где мы не будем использовать $\alpha(x)$. Сделаем тоже самое с нашей системой:

$$\begin{cases} x' = x[1 + \beta y], \\ y' = y[(y - \tau)(y - 2) + x], \end{cases}$$

где $a_2 = 1, b_1 = \beta$.

Если мы сравним нашу систему с общей, то сразу можем заметить несколько вещей:

- 1) Если наше $\beta < 0 \Rightarrow b_1 < 0$ и $a_2 > 0$, то наша система будет типа «хищник-жертва»;
- 2) Если наше $\beta > 0 \Rightarrow b_1 > 0$ и $a_2 > 0$, то наш типом системы будет являться «мутуализмом»;

При этом будем использовать так, что y — это популяция «хищников», а x будет играть роль «жертв».

Эффект Олли

Посмотрим теперь, обладает ли наша система (18) эффектом Олли.

Вспомним, что этот эффект имеет место быть здесь, если $u = (y - \tau)(y - 2)$ будет немонотонна при $y > 0$. Заметим, что при $(y - \tau)(y - 2) = 0$, уравнение имеет, хотя бы, два положительных решения.

Функция $u = (y - \tau)(y - 2)$ будет описывать параболу. От это всего следует, что наша функция будет немонотонной. К слову говоря, $\gamma(y) = 0$ будет иметь два решения. Нам нужна немонотонность при $y > 0$, при которой корни должны будут быть положительными. Если посмотреть, то сразу будет понятно, что $u = (y - \tau)(y - 2)$ будет таковой при $\tau > 0$. Таким образом, наша система будет обладать эффектом Олли при $\tau > 0$. Далее будем считать данное неравенство выполненным и также этот эффект будет действовать для всех наших модельных примеров.

Точки равновесия

Найдем точки равновесия, то есть найдем решение системы (18):

$$\begin{cases} x[1 + \beta y] = 0, \\ y[(y - \tau)(y - 2) + x] = 0. \end{cases}$$

Теперь найдем точки равновесия:

$$M_1(0,0); M_2(0,2); M_3(0, \tau); M_4\left(-\frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} - \frac{\tau}{\beta} - 2\tau, -\frac{1}{\beta}\right).$$

Значит будем подставлять наши значения, в зависимости от нашего β и рассмотрим их оба.

Сейчас мы приходим, к примеру с нашими значениям.

3.1 Система «хищник-жертва»

Случай, когда $\beta < 0$ (система будет типа «хищник-жертва»):

Так в нашу систему (18) можно подставить значение $\beta = -2$.

$$\begin{cases} x' = x(1 - 2y), \\ y' = y(y - \tau)(y - 2) + xy, \end{cases} \quad (19)$$

в которой τ будет являться нашим вещественным параметром.

3.1.1 Точки равновесия

Для того, чтобы определить тип системы мы представим её в таком виде:

$$\begin{cases} x' = x[1 - 2y], \\ y' = y[(y - \tau)(y - 2) + x]. \end{cases}$$

Найдем точки равновесия, то есть найдем решение системы:

$$\begin{cases} x[1 - 2y] = 0, \\ y[(y - \tau)(y - 2) + x] = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим данные точки равновесия:

$$M_1(0,0); M_2(0,2); M_3(0, \tau); M_4\left(\frac{3}{4} - \frac{3\tau}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

При M_1, M_2 точки равновесия будут располагаться на границе первого квадранта K_+ плоскости (x, y) ;

Точка равновесия M_3 будет располагаться на границе первого квадранта K_+ при любых $\tau > 0$;

При точке равновесия M_4 будет происходить так, что она сможет располагаться на границе первого квадранта K_+ при $\tau = \frac{1}{2}$, а внутри она будет находиться, когда $\tau > \frac{1}{2}$.

3.1.2 Устойчивость и фазовый портрет точки равновесия

Сейчас мы изучим характер устойчивости и сможем определить её фазовый портрет в окрестности нашей точки равновесия.

Сначала посмотрим устойчива ли наша точка.

Для этого найдем матрицу Якоби правой части нашей системы (19):

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2y & -2x \\ y & 3y^2 - 4y - 2\tau y + x \end{bmatrix}.$$

Мы будем ограничиваться рассмотрением только одной из точек равновесия, а именно $M_4(\frac{3}{4} - \frac{3\tau}{2}, \frac{1}{2})$. Подставляя в нашу матрицу $A(x, y)$ координаты этой точки, мы получим матрицу такого вида:

$$A(M_4) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} + 3\tau \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы будет выглядеть так:

$$-\lambda \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} + 3\tau\right) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)\lambda + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right) = 0,$$

$$\text{где } a = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}; \quad b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right)$$

Также заметим, что у нас есть условия, при которых наша точка будет устойчива:

$$a > 0 \text{ и } b > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} > 0; \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right) > 0 \Rightarrow \tau > -1; \tau < \frac{1}{2},$$

то есть наша точка равновесия $M_4\left(\frac{3}{4} - \frac{3\tau}{2}, \frac{1}{2}\right)$ будет устойчива в данном интервале, показанном на Рис. 6:

$$-1 < \tau < \frac{1}{2}$$

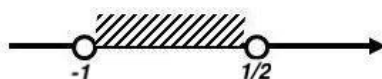


Рис. 6.

Также проверим нашу точку M_4 , чтобы узнать в каком интервале она находится и подходит ли она под вышеперечисленные условия, показанные на Рис. 7:

$$\frac{3}{4} - \frac{3\tau}{2} > 0 \Rightarrow \tau < \frac{1}{2}$$

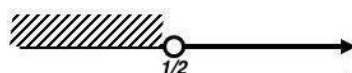


Рис. 7.

Смею заметить, что условия подходят под условия нашей точки M_4 .

Далее узнаем каким фазовым портретом наша точка будет являться.

Для начала, найдем дискриминант характеристического уравнения нашей матрицы Якоби.

$$D = a^2 - 4b = \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right) = \frac{1 + 2\tau + \tau^2}{4} - 3 + 6\tau$$

$$= \frac{\tau^2 + 26\tau - 11}{4};$$

Корнями нашего уравнения будут:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{\tau^2 + 26\tau - 11}{4}}}{2}$$

$$= \frac{-(1 + \tau) \pm \sqrt{\tau^2 + 26\tau - 11}}{4}.$$

Теперь рассмотрим, чему будет равно наше τ , найдем это через дискриминант.

$$D = \frac{\tau^2 + 26\tau - 11}{4} = 0 \Rightarrow \tau^2 + 26\tau - 11 = 0 \Rightarrow D = 676 + 44 = 720;$$

$$\tau_{1,2} = \frac{-26 \pm \sqrt{720}}{2} = \frac{2 \cdot (-13 \pm \sqrt{180})}{2} = -13 \pm \sqrt{180};$$

$$\tau_1 \approx 0,5; \tau_2 \approx -26,5.$$

Отметим, что ветви параболы направлены вверх (см. Рис. 8).

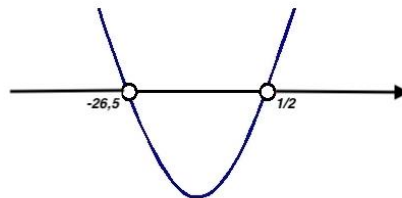


Рис. 8.

Для рисунка мы берем произвольную параболу, чтобы показать, как будут направлены ее ветви и будем использовать так далее.

Если мы соединим наши рисунки, то будет видно, что фазовым портретом в окрестности нашей точки будет «устойчивый фокус» в интервале $(-1, 0,5)$. Также можно сказать, что из-за того, что точка равновесия попадает в первый квадрант при $\tau < 0,5$ можно дополнить про то, что она будет являться «неустойчивым фокусом» в интервале $(-26,5, -1)$ и «неустойчивым узлом» в $(-\infty, -26,5)$ (см. Рис. 9).

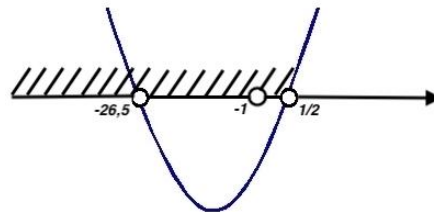


Рис. 9.

3.1.3 Бифуркации в системе (19)

В заключении, рассмотрим нашу систему на возможную бифуркацию в окрестности точки M_4 . Для бифуркации есть два случая, которые мы сейчас распишем.

$$\tau^2 + a\tau + b = 0:$$

- 1) (Бифуркация состояния равновесия) Для этого нам нужно, чтобы матрица Якоби имела нулевое собственное значение.

$$\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

2) (Бифуркация Андронова-Хопфа) Для этого нам нужно, чтобы матрица Якоби имела пару чисто мнимых собственных значений.

$$a = 0 \text{ и } b > 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega, \text{ где } \omega > 0$$

Рассмотрим оба случая для большей достоверности:

$$1. b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau \right) = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-(1 + \tau) + \sqrt{\tau^2 + 26\tau - 11}}{4} = 0.$$

Этот случай будет не верен, при $\tau = \frac{1}{2}$, так как он не попадает под условия нашей точки M_4 , теперь рассмотрим второй случай:

$$2. a = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} = 0 \Rightarrow \tau = -1 \text{ и } b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau \right) = \frac{9}{4} > 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{3}{2}i.$$

Этот случай будет верен, при $\tau = -1$, так как попадает под условия нашей точки.

В заключении мы понимаем, что у нашей точки равновесия существуют точки бифуркации по Андронова-Хопфа в окрестности точки M_4 .

3.2 Система «мутуализм»

Случай, когда $\beta > 0$ (типом системы будет являться «мутуализмом»):

Так в нашу систему (18) подставим значение $\beta = 1$.

$$\begin{cases} x' = x(1 + y), \\ y' = y(y - \tau)(y - 2) + xy, \end{cases} \quad (20)$$

в которой τ будет являться нашим вещественным параметром.

3.2.1 Точки равновесия

Для того, чтобы определить тип системы мы представим её в таком виде:

$$\begin{cases} x' = x[1 + y], \\ y' = y[(y - \tau)(y - 2) + x]. \end{cases}$$

Найдем точки равновесия, то есть найдем решение системы:

$$\begin{cases} x[1 + y] = 0, \\ y[(y - \tau)(y - 2) + x] = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим данные точки равновесия:

$$M_1(0,0); M_2(0,2); M_3(0, \tau); M_4(-3\tau - 3, -1).$$

При M_1, M_2 точки равновесия будут располагаться на границе первого квадранта K_+ плоскости (x, y) ;

Точка равновесия M_3 будет располагаться на границе первого квадранта K_+ при любых $\tau > 0$;

При точке равновесия M_4 будет происходить так, что она сможет располагаться на границе первого квадранта K_+ при $\tau = -1$, а внутри она будет находиться, когда $\tau < -1$.

3.2.2 Устойчивость и фазовый портрет точки равновесия

Сейчас мы изучим характер устойчивости и сможем определить фазовый портрет в окрестности нашей точки равновесия.

Сначала посмотрим устойчива ли наша точка.

Для этого найдем матрицу Якоби правой части нашей системы (20):

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 1 + y & x \\ y & 3y^2 - 4y - 2\tau y + x \end{bmatrix}.$$

Мы будем ограничиваться рассмотрением только одной из точек равновесия, а именно $M_4(-3\tau - 3, -1)$. Подставляя в нашу матрицу $A(x, y)$ координаты этой точки, мы получим матрицу такого вида:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -3 - 3\tau \\ -1 & 4 + \tau \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы будет выглядеть так:

$$-\lambda \cdot (4 + \tau - \lambda) + (-3 - 3\tau) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (-4 - \tau)\lambda + (-3 - 3\tau) = 0,$$

где $a = -4 - \tau$; $b = -3 - 3\tau$.

Также заметим, что у нас есть условия, при которых наша точка будет устойчива:

$$a > 0 \text{ и } b > 0 \Rightarrow -4 - \tau > 0; -3 - 3\tau > 0 \Rightarrow \tau < -4; \tau < -1,$$

то есть наша точка равновесия $M_4(-3\tau - 3, -1)$ будет устойчива в данном интервале, показанном на Рис. 10:

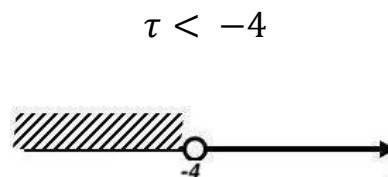


Рис.10.

Также проверим нашу точку M_4 , чтобы узнать в каком интервале она находится и подходит ли она под вышеперечисленные условия (см. Рис. 11):

$$-3 - 3\tau > 0 \Rightarrow \tau < -1$$

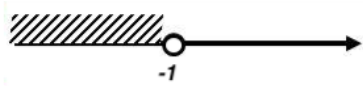


Рис. 11.

Смею заметить, что условия подходят под условия нашей точки M_4 .

Далее узнаем каким фазовым портретом наша точка будет являться.

Для начала, найдем дискриминант характеристического уравнения найденной матрицы Якоби.

$$D = a^2 - 4b = (-4 - \tau)^2 - 4 \cdot (-3 - 3\tau) = 16 + 8\tau + \tau^2 + 12 + 12\tau \\ = \tau^2 + 28 + 20\tau;$$

Корнями нашего уравнения будут:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{4 + \tau \pm \sqrt{\tau^2 + 28 + 20\tau}}{2};$$

Теперь рассмотрим, чему будет равно наше τ , мы сделаем это через дискриминант:

$$D = \tau^2 + 28 + 20\tau = 0 \Rightarrow \tau^2 + 20\tau + 28 = 0 \Rightarrow D = 400 - 112 = 288;$$

$$\tau_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{288}}{2} = \frac{2 \cdot (-10 \pm \sqrt{72})}{2} = -10 \pm \sqrt{72};$$

$$\tau_1 \approx -1,5; \tau_2 \approx -18,5.$$

Для рисунка мы берем произвольную параболу, чтобы показать, как будут направлены ее ветви и будем использовать так далее.

Отметим, что ветви параболы направлены вверх (см. Рис. 12).

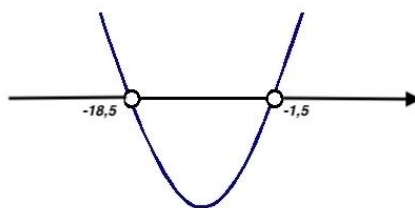


Рис. 12.

Если мы соединим наши рисунки, то будет видно, что фазовым портретом в окрестности нашей точки будет «устойчивый узел» в интервале $(-\infty, -18,5)$ и «устойчивый фокус» в интервале $(-18,5, -4)$. Также можно сказать, что из-за того, что точка равновесия попадает в первый квадрант при $\tau < -1$ можно дополнить про то, что она будет являться «неустойчивым фокусом» в интервале $(-4, -1,5)$ и «неустойчивым узлом» в $(-1,5, -1)$ (см. Рис. 13).

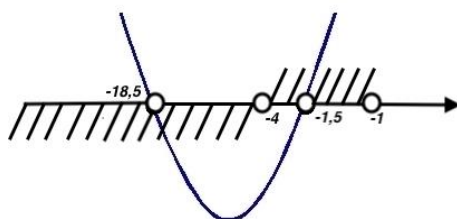


Рис. 13.

3.2.3 Бифуркации в системе (20)

В заключении, рассмотрим нашу систему на возможную бифуркацию в окрестности точки M_4 . Для бифуркации есть два случая, которые мы сейчас распишем.

$$\tau^2 + a\tau + b = 0:$$

1) (Бифуркация состояния равновесия) Для этого нам нужно, чтобы матрица Якоби имела нулевое собственное значение.

$$\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$b = -3 - 3\tau = 0 \Rightarrow \tau = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{4 + \tau - \sqrt{\tau^2 + 28 + 20\tau}}{2} = 0.$$

Этот случай будет не верен, из-за того, что $\tau = -1$, потому что данная τ не попадает под условия нашей точки, из-за того, что $\tau < -1$.

2) (Бифуркация Андронова-Хопфа) Для этого нам нужно, чтобы матрица Якоби имела пару чисто мнимых собственных значений.

$$a = 0 \text{ и } b > 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega, \text{ где } \omega > 0$$

$$2. a = -4 - \tau = 0 \Rightarrow \tau = -4 \text{ и } b = -3 - 3\tau = 9 > 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3i.$$

Этот случай будет верен, при $\tau = -4$.

Это значит, что у нашей точки существует только бифуркация по Андронова-Хопфа в окрестности точки M_4 .

3.3 Система «конкуренция»

Теперь рассмотрим случай, когда $b_1 < 0$ и $a_2 < 0$, если мы сравним нашу систему с общей, то наша система будет типа «конкуренция»;

Мы возьмем какие-то произвольные значения и подставим в нашу систему.

$$\begin{cases} x' = x(1 - 2y), \\ y' = y(y - \tau)(y - 2) - xy, \end{cases} \quad (21)$$

где $a_2 = -1, b_1 = -2$

В которой τ будет являться нашим вещественным параметром.

3.3.1 Точки равновесия

Для того, чтобы определить тип системы мы представим её в таком виде:

$$\begin{cases} x' = x[1 - 2y], \\ y' = y[(y - \tau)(y - 2) - x]. \end{cases}$$

Найдем точки равновесия, то есть найдем решение системы:

$$\begin{cases} x[1 - 2y] = 0, \\ y[(y - \tau)(y - 2) - x] = 0. \end{cases}$$

Так мы получили данные точки равновесия:

$$M_1(0,0); M_2(0,2); M_3(0, \tau); M_4\left(-\frac{3}{4} + \frac{3\tau}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

При M_1, M_2 точки равновесия будут располагаться на границе первого квадранта K_+ плоскости (x, y) ;

Точка равновесия M_3 будет располагаться на границе первого квадранта K_+ при любых $\tau > 0$;

При точке равновесия M_4 будет происходить так, что она сможет располагаться на границе первого квадранта K_+ при $\tau = \frac{1}{2}$, а внутри она будет находиться, когда $\tau > \frac{1}{2}$.

3.3.2 Устойчивость и фазовый портрет в окрестности нашей точки равновесия

Сейчас мы изучим характер устойчивости и сможем определить фазовый портрет найденной точки равновесия.

Сначала посмотрим устойчива ли наша точка.

Для этого найдем матрицу Якоби правой части нашей системы (24):

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2y & -2x \\ y & 3y^2 - 4y - 2\tau y - x \end{bmatrix}.$$

Мы будем ограничиваться рассмотрением только одной из точек равновесия, а именно $M_4(-\frac{3}{4} + \frac{3\tau}{2}, \frac{1}{2})$. Подставляя в нашу матрицу $A(x, y)$ координаты этой точки, мы получаем матрицу такого вида:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} - 3\tau \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы будет выглядеть так:

$$-\lambda \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \lambda + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right) = 0,$$

$$\text{где } a = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}; \quad b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right).$$

Также заметим, что у нас есть условия, при которых наша точка будет устойчива:

$$a > 0 \text{ и } b > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} > 0; \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right) > 0 \Rightarrow \tau > -1; \quad \tau < \frac{1}{2};$$

то есть наша точка равновесия $M_4(-\frac{3}{4} + \frac{3\tau}{2}, \frac{1}{2})$ будет устойчива в данном интервале (см. Рис. 14):

$$-1 < \tau < \frac{1}{2}$$

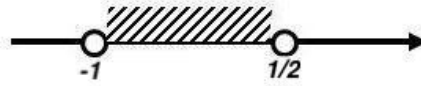


Рис. 14.

Также проверим нашу точку M_4 , чтобы узнать в каком интервале она находится и подходит ли она под вышеперечисленные условия (см. Рис. 15):

$$-\frac{3}{4} + \frac{3\tau}{2} > 0 \Rightarrow \tau > \frac{1}{2}$$



Рис. 15.

Если смотреть на наши условия для устойчивости, то с условием точки они не будут верны, то есть наша точка не будет устойчива в данном интервале.

Далее узнаем каким фазовым портретом наша точка будет являться.

Для начала, найдем дискриминант характеристического уравнения нашей матрицы Якоби.

$$\begin{aligned} D = a^2 - 4b &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau\right) = \frac{1 + 2\tau + \tau^2}{4} - 3 + 6\tau \\ &= \frac{\tau^2 + 26\tau - 11}{4}; \end{aligned}$$

Корнями нашего уравнения будут:

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{\tau^2 + 26\tau - 11}{4}}}{2} \\ &= \frac{-(1 + \tau) \pm \sqrt{\tau^2 + 26\tau - 11}}{4}; \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим, чему будет равно наше τ .

$$D = \frac{\tau^2 + 26\tau - 11}{4} = 0 \Rightarrow \tau^2 + 26\tau - 11 = 0 \Rightarrow D = 676 + 44 = 720;$$

Корнями нашего уравнения будут:

$$\tau_{1,2} = \frac{-26 \pm \sqrt{720}}{2} = \frac{2 \cdot (-13 \pm \sqrt{180})}{2} = -13 \pm \sqrt{180};$$

$$\tau_1 \approx 0,5; \tau_2 \approx -26,5.$$

Для рисунка мы берем произвольную параболу, чтобы показать, как будут направлены ее ветви и будем использовать так далее.

Отметим, что ветви параболы направлены вверх (см. Рис. 16).

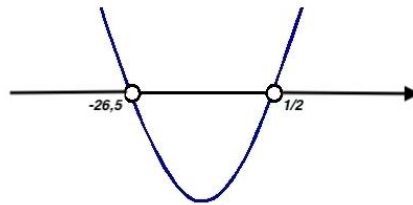


Рис. 16.

Если мы соединим наши рисунки, то будет видно, что фазовым портретом в окрестности нашей точки будет «неустойчивый узел» в интервале $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (см. Рис. 17).

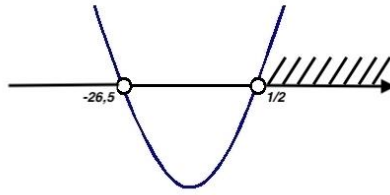


Рис. 17.

3.3.3 Бифуркации в системе (21)

В заключении, рассмотрим нашу систему на возможную бифуркацию в окрестности точки M_4 . Для бифуркации есть два случая, которые мы сейчас распишем.

$$\tau^2 + a\tau + b = 0:$$

- 1) (Бифуркация состояния равновесия) Для этого нам нужно, чтобы матрица Якоби имела нулевое собственное значение.

$$\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau \right) = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau_1 = \frac{-(1 + \tau) + \sqrt{\tau^2 + 26\tau - 11}}{4} = 0.$$

Этот случай будет не верен, из-за того, что $\tau = \frac{1}{2}$, потому что данная τ не попадает под условия нашей точки, что $\tau > \frac{1}{2}$.

- 2) (Бифуркация Андронова-Хопфа) Для этого нам нужно, чтобы матрица Якоби имела пару чисто мнимых собственных значений.

$$a = 0 \text{ и } b > 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega, \text{ где } \omega > 0$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} = 0 \Rightarrow \tau = -1 \text{ и } b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\tau \right) = \frac{9}{4} > 0 \Leftrightarrow \tau = \pm \frac{3}{2}i.$$

Этот случай будет не верен, из-за того, что $\tau = -1$, потому что данная τ не попадает под условия нашей точки, что $\tau > \frac{1}{2}$.

Оба случая не верны, а это значит, что у нашей точки не существуют точек бифуркации по состоянию равновесия и по Андронова-Хопфа.

Заключение

В дипломной работе я рассмотрела эффект Олли в двумерных динамических системах типа «хищник-жертва», «мутуализмом» и «конкуренция».

Нашла точки равновесия этих систем и разобрала на примерах одну из точек равновесия M_4 в каждой из них.

Также изучается вопрос о наличии точек бифуркации этих систем. Устойчивы они или нет. Какой они имеют фазовый портрет.

В итоге, можно посмотреть про каждую из точек отдельно:

1. Система «хищник-жертва» устойчива для точки равновесия $M_4(\frac{3}{4} - \frac{3\tau}{2}, \frac{1}{2})$ в интервале $1 < \tau < \frac{1}{2}$, а ее фазовым портретом в окрестности нашей точки будет являться «устойчивый узел». У нашей точки равновесия существуют точки бифуркации по Андронова-Хопфа в окрестности точки M_4 .
2. Система «мутуализм» устойчива для точки равновесия $M_4(-3\tau - 3, -1)$ в интервале $\tau < -4$, а ее фазовым портретом в окрестности нашей точки будет являться «неустойчивым фокусом» в интервале $(-4, -1,5)$ и «неустойчивым узлом» в $(-1,5, -1)$. У нашей точки равновесия существуют точки бифуркации по Андронова-Хопфа в окрестности точки M_4 .
3. Система «конкуренция» устойчива для точки равновесия $M_4(-\frac{3}{4} + \frac{3\tau}{2}, \frac{1}{2})$ в интервале $-1 < \tau < \frac{1}{2}$, а ее фазовым портретом в окрестности нашей точки будет являться «неустойчивый узел» в интервале $(\frac{1}{2}, +\infty)$. У системы не существует точек бифуркации по состоянию равновесия и Андронова-Хопфа в окрестности точки M_4 .

В заключении, я узнала на модельных примерах, как работает эффект Олли и как ведут себя системы с этим эффектом.

Список используемой литературы

1. Братусь А.С. Новожилов А. С. Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. - М.: ФИЗМЛТЛИТ.2010, 400с.
2. Юмагулов М.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения: теория и приложения. М-Ижевск: НИЦ "Регулярная хаотическая динамика", 2008, 182с.
3. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - М.: Мир. 1986, 243 с.
4. Юмагулов М.Г. Введение в теорию динамических систем: Учебное пособие- СПб: Издательство "Лань". 2015, 272с.
5. Демидович Б.П1. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука. 1976. 472 с.
6. Братусь А.С.. Новожилов А.С. Математические модели экологии и динамические системы с непрерывным временем. М.: МГУ, 2004.
7. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем/А.Б. Каток. Б. Хасселблат - Москва:МЦНМО. 2005.
8. Мандельброт.- Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. - 392 с.
9. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения/Дж.Мардсен, М. Мак-Краке - Москва:Мир. 1980.
10. Хэссард Б., Казаринов Н1., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла/Б. Хэссард, Н. Казаринов, И.Вэн - Москва:Мир, 1985

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Чилиной Екатерины Евгеньевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «О динамике 3-гомеоморфизмов с неблуждающим множеством, состоящим из двумерных аттракторов и репеллеров» являются: Теорема 1, Теорема 3, Лемма 3.1-3.2, Лемма 4.1-4.4.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Изучен ряд работ по теме исследования (см. источники [1]-[13] в списке литературы в выпускной квалификационной работе).
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Вячеславом Зигмундовичем Гринесом, ординарным профессором кафедры фундаментальной математики факультета ИМиКН НИУ ВШЭ.
- Проведена серия консультаций с профессором Ольгой Витальевной Починкой, профессором кафедры фундаментальной математики факультета ИМиКН НИУ ВШЭ.
- Проведено выступление на конференции «Эргодическая теория и смежные вопросы» (21–25 ноября 2022 г., МИАН, Москва) с докладом «On the dynamics of 3-homeomorphisms with two-dimensional attractors and repellers» и на VII Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ с докладом «О динамике гомеоморфизмов 3-многообразий с двумерными аттракторами и репеллерами».
- Часть результатов выпускной квалификационной работы опубликована в научном журнале «Journal of Mathematical Sciences».

Таким образом, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 15.06.2023. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Чилина Екатерина Евгеньевна
28.05.2023г, Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Программа подготовки бакалавров по направлению
01.03.01 Математика

Чилина Екатерина Евгеньевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

О динамике 3-гомеоморфизмов с неблуждающим множеством, состоящим из двумерных аттракторов и репеллеров

Рецензент
д. физ.-мат. наук, профессор

Д. В. Баландин

Руководитель работы
д. физ.-мат. наук, профессор

В. З. Гринес

Нижний Новгород, 2023 г.

Содержание

1	Аннотация	2
2	Введение	3
3	Топология многообразия, допускающего гомеоморфизмы класса \mathcal{G}	6
4	Ω -сопряженность гомеоморфизмов класса \mathcal{G} с гомеоморфизмами класса Φ	10
5	Заключение	19
	Список литературы	20

1 Аннотация

На замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразиях рассматривается класс гомеоморфизмов \mathcal{G} таких, что неблуждающее множество каждого отображения $f \in \mathcal{G}$ является конечным объединением поверхностей S_g рода $g > 1$, а ограничение некоторой степени f^k на каждую из них является псевдоаносовским гомеоморфизмом. В работе доказано, что гомеоморфизмы класса \mathcal{G} существуют только на трёхмерных многообразиях, гомеоморфных факторпространству $S_g \times \mathbb{R}/\Gamma$, где Γ группа степеней гомеоморфизма $\gamma : S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$. При этом гомеоморфизм $J : S_g \rightarrow S_g$ лежит в централизаторе некоторого псевдоаносовского гомеоморфизма. На каждом таком многообразии построены модельные гомеоморфизмы из рассматриваемого класса \mathcal{G} . Доказано, что любой гомеоморфизм из класса \mathcal{G} объемлюще Ω -сопряжен либо некоторому модельному отображению, либо обратному к модельному отображению. Изучение гомеоморфизмов класса \mathcal{G} представляет интерес в связи с тем, что в сколь угодно малой окрестности каждого модельного гомеоморфизма существует структурно устойчивый диффеоморфизм с неблуждающим множеством, состоящим из одномерных поверхностных базисных множеств и конечного числа периодических точек.

2 Введение

В работах [9], [9], [10] изучены A -дiffeоморфизмы трёхмерных многообразий с неблуждающим множеством, состоящим из двумерных поверхностных базисных множеств. На каждом многообразии, допускающем такие гомеоморфизмы, реализованы модельные отображения. Доказано, что любой гомеоморфизм из рассматриваемого класса объемлюще Ω -сопряжен некоторому модельному отображению. Для структурно устойчивых отображений такого класса доказана топологическая сопряженность некоторому модельному отображению. Настоящая работа является развитием этих результатов на более широкий класс отображений.

Вначале напомним некоторые определения.

Инвариантное множество B гомеоморфизма f называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества B такая, что $f(U) \subset \text{int } U$, $\bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = B$. Аттрактор для гомеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* гомеоморфизма f .

Топологическое вложение $\lambda: X \rightarrow Y$ m -многообразия X в n -многообразие Y ($n \leq m$) называется *локально плоским в точке* $\lambda(x)$, $x \in X$, если точка $\lambda(x)$ принадлежит области определения такой карты (U, ψ) многообразия Y , что $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ – множество точек, у которых последние $n - m$ координат равны 0, или $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}_+^m$, где $\mathbb{R}_+^m \subset \mathbb{R}^m$ – множество точек, у которых последняя координата неотрицательна. Вложение $\lambda: X \rightarrow Y$ называется *локально плоским*, если оно локально плоско в каждой точке.

Обозначим через S_g замкнутую ориентируемую поверхность рода $g > 1$.

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $P: S_g \rightarrow S_g$ называется *псевдоаносовским отображением* (pA -гомеоморфизмом) с *растяжением* $\lambda > 1$, если на поверхности S_g существует пара P -инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}_P^s, \mathcal{F}_P^u$ с множеством седловых особенностей S и трансверсальными мерами μ^s, μ^u такая, что:

- каждая седловая особенность из S имеет не менее трех сепаратрис;
- $\mu^s(P(\alpha)) = \lambda \mu^s(\alpha)$ ($\mu^u(P(\alpha)) = \lambda^{-1} \mu^u(\alpha)$) для любой дуги α , трансверсальной \mathcal{F}_P^s (\mathcal{F}_P^u).

Обозначим через \mathcal{G} класс гомеоморфизмов, состоящий из сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов f замкнутого 3-многообразия M^3 с метрикой d , неблуждающее множество $NW(f)$ которых состоит из конечного числа компонент связности $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. \mathcal{B}_i является локально плоским вложением замкнутой ориентируемой поверхности положительного рода;
2. существует натуральное число k_i такое, что $f^{k_i}(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_i$ и ограничение отображения $f^{k_i}|_{\mathcal{B}_i}$ топологически сопряжено¹ псевдоаносовскому гомеоморфизму;

¹Далее для краткости гомеоморфизм, топологически сопряженный псевдоаносовскому, будем называть псевдоаносовским.

3. \mathcal{B}_i является либо аттрактором, либо репеллером гомеоморфизма f^{k_i} .

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ множество всех компонент связности аттракторов (репеллеров) гомеоморфизма $f \in \mathcal{G}$.

Обозначим через \mathcal{P} множество всех псевдоаносовских гомеоморфизмов на поверхности S_g . Для гомеоморфизма $P \in \mathcal{P}$ определим его централизатор $Z(P) = \{h: S_g \rightarrow S_g | Ph = hP\}$. Положим $\mathcal{J} = \{J: S_g \rightarrow S_g | \exists P \in \mathcal{P} : J \in Z(P)\}$.

Пусть $J: S_g \rightarrow S_g$ – гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности S_g рода $g > 1$. Положим $M_J = (S_g \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней гомеоморфизма $\gamma: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$. Через $p_J: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$ обозначим естественную проекцию.

Теорема 1. *Многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f из класса \mathcal{G} тогда и только тогда, когда M^3 гомеоморфно многообразию M_J , где $J \in \mathcal{J}$.*

Построим модельные гомеоморфизмы класса \mathcal{G} на каждом многообразии M_J , где $J \in \mathcal{J}$.

Рассмотрим наборы чисел n, k, l таких, что $n, k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$, где $l = 0$, если $k = 1$, и $l \in \{1, \dots, k - 1\}$ и является взаимно простым с k , если $k > 1$. Для каждого набора n, k, l определим диффеоморфизм $\bar{\varphi}_{n,k,l}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\bar{\varphi}_{n,k,l}(r) = r + \frac{1}{4\pi nk} \sin(2\pi nkr) + \frac{l}{k}.$$

Диффеоморфизм $\bar{\varphi}_{n,k,l}$ является накрывающим отображением для отображения окружности $\varphi_{n,k,l}(r) = p(\bar{\varphi}_{n,k,l}(p^{-1}(r)))$, где $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ – естественная проекция и $p^{-1}(r)$ – полный прообраз точки $r \in \mathbb{R}$. Неблуждающее множество отображения $\varphi_{n,k,l}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ состоит из nk стоковых и nk источников точек, каждая из которых имеет период k .

Так как $J \in \mathcal{J}$, то существует псевдоаносовский гомеоморфизм $P: S_g \rightarrow S_g$ такой, что $PJ = JP$. Определим отображение $\bar{\varphi}_{P,n,k,l}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ формулой

$$\bar{\varphi}_{P,n,k,l}(z, r) = (P(z), \bar{\varphi}_{n,k,l}(r)).$$

Непосредственно проверяется, что $\bar{\varphi}_{P,n,k,l}\gamma = \gamma\bar{\varphi}_{P,n,k,l}$. Тогда, согласно [4, Утверждение 10.2.26], корректно определен модельный гомеоморфизм $\varphi_{P,J,n,k,l}: M_J \rightarrow M_J$, заданный формулой $\varphi_{P,J,n,k,l}(w) = p_J(\bar{\varphi}_{P,n,k,l}(p_J^{-1}(w)))$, где $p_J^{-1}(w)$ – полный прообраз точки $w \in M_J$. Неблуждающее множество гомеоморфизма $\varphi_{P,J,n,k,l}$ состоит из $2nk$ компонент связности: n аттракторов и n репеллеров, состоящих из k компонент связности. Каждая компонента \mathcal{B}_i ($i = \overline{1, 2nk}$) является локально плоским вложением поверхности S_g и гомеоморфизм $f^k|_{\mathcal{B}_i}$ топологически сопряжен гомеоморфизму P^k . Таким образом, гомеоморфизм $\varphi_{P,J,n,k,l}$ удовлетворяет требованиям класса \mathcal{G} . Обозначим через Φ множество всех гомеоморфизмов вида $\varphi_{P,J,n,k,l}$ и $\varphi_{P,J,n,k,l}^{-1}$.

Назовем гомеоморфизмы вида $\varphi_{P,J,n,k,l}$ *модельными*. По построению модельные гомеоморфизмы существуют на каждом многообразии M_J , $J \in \mathcal{J}$.

Два гомеоморфизма $f_1: M_1 \rightarrow M_1$, $f_2: M_2 \rightarrow M_2$ называются *объемлюще Ω -сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$ такой, что $h(NW(f_1)) = NW(f_2)$ и $hf_1|_{NW(f_1)} = f_2h|_{NW(f_1)}$.

Теорема 2. *Любой гомеоморфизм из класса \mathcal{G} является объемлюще Ω -сопряженным некоторому гомеоморфизму из класса Φ .*

В силу работы [5] из псевдоаносовского гомеоморфизма посредством хирургической операции может быть построен структурно устойчивый диффеоморфизм двумерной поверхности с одномерным гиперболическим аттрактором и конечным числом источников. Следовательно, в сколь угодно малой окрестности гомеоморфизмов множества Φ существует структурно устойчивый диффеоморфизм трёхмерного многообразия с одномерными базисными множествами и гиперболическими периодическими точками. Результаты настоящей работы планируется далее применить для классификации таких диффеоморфизмов.

Часть результатов настоящей работы опубликована в научном журнале «Journal of Mathematical Sciences» [12].

3 Топология многообразия, допускающего гомеоморфизмы класса \mathcal{G}

Настоящий раздел содержит доказательство теоремы 1 и вспомогательных лемм.

Лемма 3.1. *Для любого гомеоморфизма $f \in \mathcal{G}$ множества \mathcal{A} , \mathcal{R} не пусты и состоят из одинакового числа $pk \geq 1$ компонент связности одного и того же периода $k \geq 1$. Множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ имеет $2pk$ компонент связности, граница каждой из которой состоит в точности из одной периодической компоненты аттрактора и одной периодической компоненты репеллера.*

Доказательство. Согласно [8, Theorem 3], двумерная поверхность, локально плоско вложенная в M^3 двухсторонним образом, является цилиндрически вложенной. Обозначим через $U(A)$ ($U(R)$) цилиндрическую окрестность аттрактора $A \in \mathcal{A}$ ($R \in \mathcal{R}$). Положим $\dot{U}(A) = U(A) \setminus A$ ($\dot{U}(R) = U(R) \setminus R$).

Сначала докажем, что множества \mathcal{A} , \mathcal{R} не пусты. Предположим противное. Пусть $\mathcal{R} = \emptyset$, а множество \mathcal{A} состоит из конечного числа компонент связности. Тогда многообразие M^3 представимо в виде $M^3 = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U(A)))$. Так как M^3 связно, то множество \mathcal{A} состоит из единственного аттрактора A . Рассмотрим захватывающую окрестность $\tilde{U}(A)$ аттрактора A . Возьмём произвольную точку $s \notin \tilde{U}(A)$. Заметим, что её α -предельное множество содержится в неблуждающем множестве гомеоморфизма f и, следовательно, принадлежит аттрактору \mathcal{A} . Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{-n}(s) \in \tilde{U}(A)$. Из определения захватывающей окрестности аттрактора следует, что $f^n(f^{-n}(s)) = s \in \tilde{U}(A)$. Получили противоречие. Следовательно, множества \mathcal{A} , \mathcal{R} не пусты.

Теперь докажем, что граница каждой компоненты связности $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит в точности из одной периодической компоненты аттрактора и одной периодической компоненты репеллера. Множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ является блуждающим, следовательно, представимо в виде $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\dot{U}(A))) = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\dot{U}(R)))$. Обозначим через V любую компоненту связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$. Так как $V \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\dot{U}(A)))$ и $V \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\dot{U}(R)))$, то в силу связности множества V существует единственная компонента связности $A \in \mathcal{A}$ и единственная компонента связности $R \in \mathcal{R}$ такие, что $V \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\dot{U}(A))$ и $V \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\dot{U}(R))$. Следовательно, $cl V = A \cup V \cup R$ и $\partial V = A \cup R$.

Покажем, что число компонент всех аттракторов из множества \mathcal{A} совпадает с числом компонент репеллеров из множества \mathcal{R} . Зафиксируем любую компоненту некоторого аттрактора из множества \mathcal{A} и обозначим ее через A_1 . Тогда A_1 принадлежит границе двух областей $V_1, V_2 \subset M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$. Пусть $\partial V_1 = A_1 \cup R_1$ и $\partial V_2 = A_2 \cup R_2$. Тогда либо R_1 и R_2 совпадают и доказываемое утверждение верно, либо существуют области V_3, V_4 , такие, что $R_1 \subset \partial V_3$, $R_2 \subset \partial V_4$. Обозначим через A_2 граничную компоненту области V_4 , отличную от R_2 , и через A_3 – граничную компоненту области V_3 , отличную от R_1 . Возможны два случая: либо $A_2 = A_3$ и доказываемое утверждение верно, либо существуют области V_5, V_6 , в границу которых входят компоненты A_3, A_2 соответственно. Продолжая рассуждения и учитывая,

что число компонент связности неблуждающего множества конечно, получаем, что число периодических компонент всех аттракторов совпадает с числом периодических компонент всех репеллеров.

Докажем, что все компоненты из множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ имеют одинаковый период. Для этого сначала покажем, что если в $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ существует компонента периода 1, то и все компоненты множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ будут периода 1.

Предположим для определенности, что некоторая компонента связности A из множества \mathcal{A} имеет период 1. Пусть V – область, принадлежащая $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, такая, что $\partial V = A \cup R$, где R – компонента связности, принадлежащая множеству \mathcal{R} . Покажем, что R также имеет период 1. Предположим противное, то есть $f(R) \neq R$. Положим $\tilde{V} = f(V)$ и заметим, что $\partial \tilde{V} = f(A) \cup f(R) = A \cup f(R)$, откуда следует, что $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Рассмотрим цилиндрическую окрестность $U(A)$ аттрактора A , такую, что $U(A) \subset V \cup A \cup \tilde{V}$. Обозначим через Q, \tilde{Q} компоненты связности множества $U(A) \setminus A$, такие, что $Q \subset V$ и $\tilde{Q} \subset \tilde{V}$ соответственно. Тогда $f(Q) \subset \tilde{V}$ и $f(\tilde{Q}) \subset V$. Так как диффеоморфизм f сохраняет ориентацию M^3 , то получаем противоречие с тем, что ограничение диффеоморфизма f на A сохраняет ориентацию A .

Пусть теперь в $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ существуют компоненты различного периода. Обозначим через k наименьший из периодов компонент связности множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$, то есть для гомеоморфизма f^k по крайней мере одна компонента связности неблуждающего множества $NW(f^k)$ имеет период 1. Тогда, в силу доказанного выше все компоненты связности множества $NW(f^k)$ имеют период 1, а значит, что все компоненты связности множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ гомеоморфизма f имеют период k . \square

Лемма 3.2. *Для любого гомеоморфизма $f \in \mathcal{G}$ замыкание каждой компоненты связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ гомеоморфно $S_g \times [0, 1]$.*

Доказательство. Не уменьшая общности будем считать, что период компонент связности неблуждающего множества $k = 1$ (в противном случае нужно рассмотреть гомеоморфизм f^k). Пусть A (R) некоторый аттрактор (репеллер), принадлежащий неблуждающему множеству f и A (R) гомеоморфно поверхности S_a (S_r). Согласно [8, Theorem 3], двумерная поверхность, локально плоско вложенная в M^3 двухсторонним образом, является цилиндрически вложенной. Так как A (R) – цилиндрически вложенная поверхность, то существует замкнутая окрестность $U(A)$ ($U(R)$) и гомеоморфизм h_A (h_R), такие, что $h_A: U(A) \rightarrow S_a \times [-1, 1]$ ($h_R: U(R) \rightarrow S_r \times [-1, 1]$), причем $h_A(A) = S_a \times \{0\}$ ($h_R(R) = S_r \times \{0\}$). Положим $U_A^1 = h_A^{-1}(S_a \times [-1, 0])$, $U_A^2 = h_A^{-1}(S_a \times [0, 1])$ ($U_R^1 = h_R^{-1}(S_r \times [-1, 0])$, $U_R^2 = h_R^{-1}(S_r \times [0, 1])$) и $N_A^1 = h_A^{-1}(S_a \times \{-1\})$, $N_A^2 = h_A^{-1}(S_a \times \{1\})$ ($N_R^1 = h_R^{-1}(S_r \times \{-1\})$, $N_R^2 = h_R^{-1}(S_r \times \{1\})$).

Зафиксируем аттрактор A . Так как неблуждающее множество отображения f состоит только из аттракторов и репеллеров, то существует натуральное число m , такое, что $f^{-m}(N_A^1)$ принадлежит окрестности некоторого репеллера $R_1 \subset NW(f)$ и $f^{-m}(N_A^2)$ принадлежит окрестности некоторого репеллера $R_2 \subset NW(f)$, где R_1 гомеоморфно S_{r_1} и R_2 гомеоморфно S_{r_2} (заметим, что при $n = 1$ $R_1 = R_2$). Не уменьшая общности, можем считать, что $f^{-m}(N_A^1) \subset \text{int } U_{R_1}^1$, а $f^{-m}(N_A^2) \subset \text{int } U_{R_2}^2$. Покажем, что R_1 и $N_{R_1}^1$ принадлежат различным компонентам связности множества $U_{R_1}^1 \setminus f^{-m}(N_A^1)$. Предположим противное. Тогда

в силу [3, Лемма 3.1], $f^{-m}(N_A^1)$ является границей некоторой области $D_A^1 \subset \text{int } U_{R_1}^1$. Тогда, согласно [9, Лемма 1], $R_1 \subset \text{int } f^{-m}(U_A^1)$. Так как поверхность R_1 является инвариантной, мы получили противоречие. Таким образом, множество $U_{R_1}^1 \setminus f^{-m}(N_A^1)$ состоит из двух компонент связности. Тогда в силу [3], Теорема 3.1, $a \geq r_1$ (род поверхности $f^{-m}(N_A^1)$ не меньше рода поверхности R_1). Аналогично, действуя на поверхность $N_{R_1}^1$, отображением f , получаем, что $r_1 \geq a$. Следовательно, $a = r_1$ и поверхности A и R_1 гомеоморфны.

Далее положим $a = r_1 = g$. В силу [3, Теорема 3.2], замыкание каждой компоненты связности множества $U_{R_1}^1 \setminus f^{-m}(N_A^1)$ гомеоморфно $S_g \times [0, 1]^2$. Тогда поверхности R_1 и $f^{-m}(N_A^1)$ ограничивают в M^3 замкнутую область, гомеоморфную $S_g \times [0, 1]$. Поскольку множество $f^{-m}(U_A^1)$ тоже гомеоморфно $S_g \times [0, 1]$, то, согласно [9, Лемма 2], компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, ограниченная A и R_1 , гомеоморфна прямому произведению $S_g \times [0, 1]$. Аналогично показывается, что компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, ограниченная A и R_2 , гомеоморфна прямому произведению $S_g \times [0, 1]$. Рассуждая аналогично для всех аттракторов из множества $NW(f)$, получаем, что каждая компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ гомеоморфна $S_g \times [0, 1]$. \square

Докажем, что многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f из класса \mathcal{G} тогда и только тогда, когда M^3 гомеоморфно многообразию M_J , где $J \in \mathcal{J}$.

Доказательство. Достаточность условий теоремы непосредственно следует из существования модельных гомеоморфизмов $\varphi_{P,J,n,k,l}$ на каждом многообразии M_J . Докажем необходимость условий.

Пусть многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f из класса \mathcal{G} . В силу леммы 3.1 все компоненты связности блуждающего множества $NW(f)$ имеют одинаковый период $k \in \mathbb{N}$. Не уменьшая общности будем считать, что $k = 1$ (в противном случае можно перейти к рассмотрению гомеоморфизма f^k). Зафиксируем некоторый аттрактор A . Тогда $f(A) = A$ и в силу леммы 3.2 настоящей работы и [9, Лемма 2], множество $cl(M^3 \setminus A)$ гомеоморфно $S_g \times [0, 1]$. Тогда многообразие M^3 накрывается пространством $S_g \times \mathbb{R}$ с накрывающим отображением $q_f : S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M^3$ таким, что $q_f^{-1}(A) = S_g \times \mathbb{Z}$.

Докажем, что существует накрывающее отображение $\bar{f} : S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ для гомеоморфизма f . Зафиксируем на аттракторе A точку w и положим $f(w) = w'$. Тогда $f_*(\pi_1(A, w)) = \pi_1(A, w')$. Выберем точки $\bar{w} \in h^{-1}(w)$ и $\bar{w}' \in h^{-1}(w')$ такие, что $\bar{w}, \bar{w}' \in S_g \times \{0\}$. Тогда $(q_f)_*(\pi_1(S_g \times \mathbb{R}, \bar{w})) = \pi_1(A, w)$ и $(q_f)_*(\pi_1(S_g \times \mathbb{R}, \bar{w}')) = \pi_1(A, w')$. Таким образом, $f_*((q_f)_*(\pi_1(S_g \times \mathbb{R}, \bar{w}))) = (q_f)_*(\pi_1(S_g \times \mathbb{R}, \bar{w}'))$. Следовательно, согласно [4, Утверждение 10.2.19], существует накрывающее отображение $\bar{f} : S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ ($f q_f = q_f \bar{f}$) гомеоморфизма f такое, что $\bar{f}(\bar{w}) = \bar{w}'$ и $\bar{f}(S_g \times \{0\}) = S_g \times \{0\}$.

Для $i \in \mathbb{Z}$ положим $q_{f,i} = q_f|_{S_g \times \{i\}} : S_g \times \{i\} \rightarrow A$. Тогда отображение $q_{f,i}$ является гомеоморфизмом и определяет гомеоморфизм $P_i : S_g \rightarrow S_g$ формулой

$$(P_i(z), i) = q_{f,i}^{-1} f q_{f,i}(z, i). \quad (1)$$

²В условиях Теоремы 3.2 требовалась гладкость поверхности $f^{-m}(N_A^1)$, но результаты верны и в случае, если поверхность является локально плоско вложенной.

Поскольку $f|_A$ – псевдоаносовский гомеоморфизм, то P_i – также псевдоаносовский гомеоморфизм.

Обозначим через p каноническую проекцию $p: S_g \times \times \rightarrow S_g$. Тогда $F_t(z) = p(\bar{f}(z, t))$, $t \in [0, 1]$ – гомотопия, соединяющая отображения $F_0(z) = P_0(z)$ и $F_1(z) = P_1(z)$. Таким образом, гомеоморфизмы P_0 и P_1 гомотопны, и, следовательно, изотопны [7, §5.15] для любых $r \in \mathcal{T}$. Тогда, согласно [6, Теорема 6.3], существует гомотопный тождественному гомеоморфизм $\psi: S_g \rightarrow S_g$ такой, что

$$\psi P_0 = P_1 \psi. \quad (2)$$

Определим гомеоморфизм $\tilde{J}: S_g \rightarrow S_g$ формулой

$$(\tilde{J}(z), 0) = q_{f,0}^{-1} q_{f,1}(z, 1). \quad (3)$$

Тогда многообразия $M_{\tilde{J}}$ и M^3 гомеоморфны посредством гомеоморфизма, который классу эквивалентности пространства $S_g \times \mathbb{R}$ по действию отображения $(\tilde{J}(z), r - 1)$ ставит в соответствие точку $q_f(z, r)$. Кроме того, из равенств (1), (3) следует, что

$$\tilde{J} P_1 = P_0 \tilde{J} \quad (4)$$

Положим $J = \tilde{J} \psi$. Тогда, выразив P_1 из соотношения (2) как $P_1 = \psi P_0 \psi^{-1}$ и подставив в равенство (4), получим $\tilde{J} \psi P_0 \psi^{-1} = P_0 \tilde{J}$ или $J P_0 = P_0 J$. Тогда $J \in Z(P_0)$ и, следовательно, $J \in \mathcal{J}$. Поскольку гомеоморфизмы J и \tilde{J} изотопны, то M_J гомеоморфно $M_{\tilde{J}}$ (см., например, [6, Теорема 6.3]) и, следовательно, M^3 гомеоморфно M_J , где $J \in \mathcal{J}$. \square

4 Ω -сопряженность гомеоморфизмов класса \mathcal{G} с гомеоморфизмами класса Φ

Пусть J – гомеоморфизм поверхности S_g , γ – гомеоморфизм многообразия $S_g \times \mathbb{R}$, заданный формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$ и $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$. Положим $M_J = (S_g \times \mathbb{R})/\Gamma$ – факторпространство с естественной проекцией $p_J: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$. Обозначим через \mathcal{H}_J множество гомеоморфизмов многообразия M_J таких, что если $f \in \mathcal{H}_J$, то:

1. неблуждающее множество $NW(f)$ гомеоморфизма f состоит из $2nk$ ($n, k \in \mathbb{N}$) компонент связности периода k , гомеоморфных S_g ;
2. $p_J^{-1}(NW(f)) = S_g \times \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} = \{\frac{i}{2nk}, i \in \mathbb{Z}\}$ и $p_J^{-1}(NW(f))$ полный прообраз множества $NW(f)$;
3. f обладает накрывающим отображением $\bar{f}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ таким, что $\bar{f}|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r) = (f_r(z), r + \frac{l}{k})$, где $f_r(z)$ – гомеоморфизм поверхности S_g , зависящий от $r \in \mathcal{T}$, $l = 0$, если $k = 1$, и $l \in \{1, \dots, k - 1\}$ является взаимно простым с k , если $k > 1$.

Лемма 4.1. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – гомеоморфизм из класса \mathcal{G} . Тогда существуют гомеоморфизмы $J: S_g \rightarrow S_g$ и $f': M_J \rightarrow M_J$ такие, что f' принадлежит классу \mathcal{H}_J и топологически сопряжен f .

Доказательство. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – гомеоморфизм из класса \mathcal{G} , неблуждающее множество которого состоит из $2nk$ ($n, k \in \mathbb{N}$) компонент связности $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{2nk-1}$ периода k , гомеоморфных S_g .

Согласно [12, Лемма 2.1], множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит из $2nk$ компонент связности V_0, \dots, V_{2nk-1} , граница каждой из которых состоит из одной компоненты связности аттрактора и одной компоненты связности репеллера. При этом при $2nk = 2$ верно, что $cl V_0 \cap cl V_1 = \mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{B}_1$, а при $2nk > 2$ можно считать, что $cl V_i \cap cl V_{i-1} = \mathcal{B}_{i-1}$, где $i \in \{1, \dots, 2nk - 2\}$, и $cl V_0 \cap cl V_{2nk-1} = \mathcal{B}_{2nk-1}$.

Согласно [12, Лемма 2.2], каждая компонента связности $V_i, i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$ гомеоморфна $S_g \times [0, 1]$. Из [9, Лемма 2] следует, что существует непрерывное сюръективное отображение $H: S_g \times [0, 1] \rightarrow M^3$ такое, что ограничения $H|_{S_g \times \{\frac{i}{2nk}\}}: S_g \times \{\frac{i}{2nk}\} \rightarrow \mathcal{B}_i$ ($i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$), $H|_{S_g \times \{1\}}: S_g \times \{1\} \rightarrow \mathcal{B}_{2nk-1}$ и $H|_{S_g \times (0, 1)}: S_g \times (0, 1) \rightarrow M^3 \setminus \mathcal{B}_{2nk-1}$ являются гомеоморфизмами. Тогда существует гомеоморфизм $J: S_g \rightarrow S_g$ такой, что $H|_{S_g \times \{0\}}^{-1}(H|_{S_g \times \{1\}}(z, 1)) = (J(z), 0)$. Определим гомеоморфизм $\gamma: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$. Положим $M_J = S_g \times \mathbb{R}/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$. Через p_J обозначим естественную проекцию $p_J: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$.

Обозначим через $[r]$ целую часть числа $r \in \mathbb{R}$ и зададим непрерывное отображение $h: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M^3$ формулой $h(z, r) = H(\gamma^{[r]}(z, r))$. По построению $h^{-1}(NW(f)) = S_g \times \mathcal{T}$, где $h^{-1}(NW(f))$ – полный прообраз множества $NW(f)$ относительно отображения h и $\mathcal{T} = \{\frac{i}{2nk}, i \in \mathbb{Z}\}$.

Докажем, что существует накрывающее отображение $\bar{f}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ для гомеоморфизма f . Пусть $j \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$ такое, что $f(B_0) = B_j$. Зафиксируем на компоненте B_0

точку w и положим $f(w) = w'$. Тогда $f_*(\pi_1(B_0, w)) = \pi_1(B_j, w')$. Выберем точки $\bar{w} \in h^{-1}(w)$ и $\bar{w}' \in h^{-1}(w')$ такие, что $\bar{w} \in S_g \times \{0\}$ и $\bar{w}' \in S_g \times \{\frac{j}{2nk}\}$. Тогда $h_*(\pi_1(S_g \times \mathbb{R}, \bar{w})) = \pi_1(B_0, w)$ и $h_*(\pi_1(S_g \times \mathbb{R}, \bar{w}')) = \pi_1(B_j, w')$. Таким образом, $f_*(h_*(\pi_1(S_g \times \mathbb{R}, \bar{w}))) = h_*(\pi_1(S_g \times \mathbb{R}, \bar{w}'))$. Следовательно, согласно [4, Утверждение 10.2.19], существует накрывающее отображение $\bar{f}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ ($\bar{f}h = h\bar{f}$) гомеоморфизма f такое, что $\bar{f}(\bar{w}) = \bar{w}'$.

Докажем, что $\bar{f}|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r) = (Q_r(z), r + \frac{l}{k})$, где Q_r – гомеоморфизм поверхности S_g , зависящий от r и $l = 0$, если $k = 1$, и $l \in \{1, \dots, k-1\}$ является взаимно простым с k , если $k > 1$. Разобьём доказательство на 2 шага.

Шаг 1. Вначале докажем, что ограничение отображения $\bar{f}(z, \tau)|_{S_g \times \mathcal{T}}$ имеет вид $\bar{f}(z, r)|_{S_g \times \mathcal{T}} = (Q_r(z), r + \frac{j}{2nk})$, где $r \in \mathcal{T}$ и Q_r – гомеоморфизм S_g . Напомним, что $j \in \{0, \dots, 2nk-1\}$ такое, что $f(B_0) = B_j$.

Рассмотрим множества $S_g \times [0, \frac{j}{2nk}]$ и $\bar{f}(S_g \times [0, \frac{j}{2nk}])$. Множество $S_g \times [0, \frac{j}{2nk}]$ содержит $j+1$ компонент связности инвариантного множества $S_g \times \mathcal{T}$. Следовательно, множество $\bar{f}(S_g \times [0, \frac{j}{2nk}])$ также содержит $j+1$ компонент связности множества $S_g \times \mathcal{T}$. Так как $\bar{f}(S_g \times \{0\}) = S_g \times \{\frac{j}{2nk}\}$, то возможны 2 случая: а) $\bar{f}(S_g \times [0, \frac{j}{2nk}]) = S_g \times [0, \frac{j}{2nk}]$, где $\bar{f}(S_g \times \{\frac{j}{2nk}\}) = S_g \times \{0\}$; б) $\bar{f}(S_g \times [0, \frac{j}{2nk}]) = S_g \times [\frac{j}{2nk}, 2\frac{j}{2nk}]$, где $\bar{f}(S_g \times \{\frac{j}{2nk}\}) = S_g \times \{2\frac{j}{2nk}\}$. При $j = 0$ случаи совпадают – компоненты связности неблуждающего множества гомеоморфизма f имеют период 1. При $j > 0$ случай а) не может выполняться, так как тогда одна из компонент связности множества $S_g \times \mathcal{T}$ неподвижна, а остальные имеют период два относительно \bar{f} , что невозможно. Следовательно, выполняется случай б).

В силу инвариантности множества $S_g \times \mathcal{T}$ получаем, что $\bar{f}(S_g \times \{r\}) = S_g \times \{r + \frac{j}{2nk}\}$ для любого $r \in \mathcal{T}$. Обозначим через p_r гомеоморфизм, который является ограничением канонической проекции $p: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g$ на множество $S_g \times \{r\}$, то есть $p_r = p|_{S_g \times \{r\}}$, где $p_r: S_g \times \{r\} \rightarrow S_g$. Тогда для $(z, r) \in S_g \times \mathcal{T}$ гомеоморфизм $Q_r: S_g \rightarrow S_g$, заданный формулой $Q_r(z) = p_{r+\frac{j}{2nk}}(\bar{f}(p_r^{-1}(z)))$, определяет отображение $\bar{f}(z, r)|_{S_g \times \mathcal{T}} = (Q_r(z), r + \frac{j}{2nk})$.

Шаг 2. Теперь докажем, что $j = 2nl$, $l \in \mathbb{Z}$, где $l = 0$, если $k = 1$, и $l \in \{1, \dots, k-1\}$ взаимно просто с k , если $k > 1$.

Шаг 2.1. Докажем, что j кратно $2n$.

Рассмотрим точку $(z, r) \in S_g \times \mathcal{T}$. Так как компоненты связности множества $NW(f)$ имеют период k , то $h(\bar{f}^k(z, r)) = h(z, r)$. Так как $h(\gamma(z, r)) = h(J(z), r-1) = H(\gamma^{[r-1]}(J(z), r-1)) = H(\gamma^{[r]-1}(\gamma(z, r))) = H(\gamma^{[r]}(z, r)) = h(z, r)$, то существует целое число m такое, что $\bar{f}^k(z, r) = \gamma^m(z, r)$. Так как $\gamma^m(z, r) = (J^m(z), r-m)$ и $\bar{f}^k(z, r) = (Q_{r+(k-1)\frac{j}{2nk}}(\dots(Q_r(z))), r+k\frac{j}{2nk})$, то $r-m = r+k\frac{j}{2nk}$. Отсюда $-2nkm = kj$. Следовательно, j кратно $2n$.

Шаг 2.2. Положим $j = 2nl$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \in \{0, \dots, k-1\}$. Докажем, что $l = 0$, если $k = 1$, и взаимно просто с k , если $k > 1$.

Если $k = 1$, то $l = 0$ по построению \bar{f} .

Рассмотрим случай $k > 1$. Предположим, k представимо в виде $k = la$, $a \in \mathbb{N}$ и $a > 1$. Рассмотрим точку $(z, r) \in S_g \times \mathcal{T}$. Тогда $\bar{f}^a(z, r) = (Q_{r+(a-1)\frac{j}{2nk}}(\dots(Q_r(z))), r+1)$. Следовательно, точки $h(z, r)$ и $h(\bar{f}^a(z, r))$ принадлежат одной и той же компоненте связности множества $NW(f)$, которая имеет период $a < k$, что противоречит тому, что все компоненты связности

множества $NW(f)$ имеют период k . Следовательно, l взаимно просто с k .

Таким образом, $\bar{f}(z, r)|_{S_g \times \mathcal{T}} = (Q_r(z), r + \frac{l}{k})$, где $l = 0$, если $k = 1$, и $l \in \{1, \dots, k-1\}$ взаимно просто с k , если $k > 1$.

Докажем, что $\bar{f}\gamma = \gamma\bar{f}$. Рассмотрим точку $(z, r) \in S_g \times \mathbb{R}$ и зафиксируем число $a \in \mathbb{Z}$ такое, что $r \in [a, a+1)$. Тогда $\bar{f}(z, r) \in S_g \times [a + \frac{l}{k}, a + 1 + \frac{l}{k})$ и $\gamma(\bar{f}(z, r)) \in S_g \times [a + \frac{l}{k} - 1, a + \frac{l}{k})$. Так как $h(\gamma(z, r)) = h(J(z), r-1) = H(\gamma^{a-1}(J(z), r-1)) = H(\gamma^{a-1}(\gamma(z, r))) = H(\gamma^a(z, r)) = h(z, r)$, то существует такое целое число $b \in \mathbb{Z}$, что $\gamma^b(\bar{f}(z, r)) = \bar{f}(\gamma(z, r))$. Так как $\gamma(S_g \times [a + \frac{l}{k}, a + 1 + \frac{l}{k})) = S_g \times [a + \frac{l}{k} - 1, a + \frac{l}{k})$, то $b = 1$ и $\bar{f}\gamma = \gamma\bar{f}$.

Таким образом, гомеоморфизм \bar{f} проектируется в гомеоморфизм $f': M_J \rightarrow M_J$, заданный формулой $f' = p_J(\bar{f}(p_J^{-1}(w)))$ [4, Утверждение 10.2.26], где $p_J^{-1}(w)$ полный прообраз точки $w \in M_J$.

Докажем, что гомеоморфизм f топологически сопряжен гомеоморфизму f' . Зададим гомеоморфизм $\xi: M^3 \rightarrow M_J$ формулой $\xi = p_J(h^{-1}(w))$, где $h^{-1}(w)$ – полный прообраз точки $w \in M^3$, и обратный к нему гомеоморфизм $\xi^{-1}: M_J \rightarrow M^3$ формулой $\xi^{-1} = h(p_J^{-1}(w))$, где $p_J^{-1}(w)$ – полный прообраз точки $w \in M_J$. Так как $\xi f \xi^{-1} = p_J(h^{-1}(f(h(p_J^{-1}(w)))))) = p_J(\bar{f}(p_J^{-1}(w))) = f'$, то гомеоморфизм ξ осуществляет топологическую сопряженность гомеоморфизмов f и f' .

По построению $p_J^{-1}(NW(f')) = h^{-1}(NW(f)) = S_g \times \mathcal{T}$ и $\bar{f}'(z, r)|_{S_g \times \mathcal{T}} = (f'_r(z), r + \frac{l}{k})$, где $f'_r = Q_r$. Следовательно, гомеоморфизм f' принадлежит классу \mathcal{H}_J и при этом топологически сопряжен с f . □

Лемма 4.2. Пусть f принадлежит классу \mathcal{H}_J и удовлетворяет условиям класса \mathcal{G} . Тогда f_0 изотопен либо некоторому периодическому гомеоморфизму, либо некоторому псевдоаносовскому гомеоморфизму, и f_r изотопен f_0 для любого $r \in \mathcal{T}$.

Доказательство. Пусть f принадлежит классу \mathcal{H}_J и удовлетворяет условиям класса \mathcal{G} .

Обозначим через p каноническую проекцию $p: S_g \times [0, 1] \rightarrow S_g$. Тогда $F_{r,t}(z) = p(\bar{f}(z, rt))$, $t \in [0, 1]$, $r \in \mathcal{T}$ – гомотопия, соединяющая отображения $F_{r,0}(z) = f_0(z)$ и $F_{r,1}(z) = f_r(z)$. Таким образом, гомеоморфизмы f_0 и f_r гомотопны, и, следовательно, изотопны [7, §5.15] для любых $r \in \mathcal{T}$. Тогда они индуцируют одно и то же действие f_* в фундаментальной группе поверхности S_g .

Докажем, что f_0 изотопен либо некоторому периодическому гомеоморфизму, либо некоторому псевдоаносовскому гомеоморфизму.

Так как $\bar{f}^k|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r) = (f_{r+(k-1)\frac{l}{k}}(\dots(f_{r+\frac{l}{k}}(f_r(z))))), r - l)$, то $\gamma^l(\bar{f}^k|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r)) = (J^l(f_{r+(k-1)\frac{l}{k}}(\dots(f_{r+\frac{l}{k}}(f_r(z))))), r)$.

Положим $\mathcal{B} = p_J(S_g \times \{\tau\})$, где $\tau \in \mathcal{T}$. Обозначим через p_τ гомеоморфизм $p_J|_{S_g \times \{\tau\}}$, а через φ_τ гомеоморфизм $(\gamma^l \bar{f}^k)|_{S_g \times \{\tau\}}$. Тогда $f^k|_{\mathcal{B}} = p_\tau \varphi_\tau p_\tau^{-1}$. Так как гомеоморфизм $f^k|_{\mathcal{B}}$ топологически сопряжен псевдоаносовскому гомеоморфизму и $\varphi_\tau(z, \tau) = (J^l(f_{\tau+(k-1)\frac{l}{k}}(\dots(f_{\tau+\frac{l}{k}}(f_\tau(z))))), \tau)$, то гомеоморфизм $J^l f_{\tau+(k-1)\frac{l}{k}} \dots f_{\tau+\frac{l}{k}} f_\tau$ также сопряжен псевдоаносовскому гомеоморфизму для любого $\tau \in \mathcal{T}$.

Обозначим через J_* автоморфизм фундаментальной группы поверхности S_g , индуцированный гомеоморфизмом J . Так как $\gamma \bar{f} = \bar{f} \gamma$, то $(J(f_r(z)), r + \frac{l}{k} - 1) = (f_{r-1}(J(z)), r -$

$1 + \frac{l}{k}$) для любого $r \in \mathcal{T}$. Следовательно, $J_*f_* = f_*J_*$ и $JJ^l f_{r+(k-1)\frac{l}{k}} \cdots f_{r+\frac{l}{k}} f_r = J^l f_{r+(k-1)\frac{l}{k}-1} \cdots f_{r+\frac{l}{k}-1} f_{r-1} J$. Так как $f_*(J_*^l f_*^k) = (J_*^l f_*^k) f_*$ и действие $J_*^l f_*^k$ является гиперболическим в фундаментальной группе S_g , то из [13, Theorem 2.4] следует, что f_* действует либо гиперболически, либо периодически в фундаментальной группе поверхности S_g .

Таким образом, f_0 изотопен либо некоторому периодическому гомеоморфизму, либо некоторому псевдоаносовскому гомеоморфизму. □

Лемма 4.3. Пусть f принадлежит классу \mathcal{H}_J , удовлетворяет условиям класса \mathcal{G} , и f_0 изотопен некоторому периодическому гомеоморфизму. Тогда гомеоморфизм $f_r^{-1} J^{-1}$ изотопен некоторому псевдоаносовскому гомеоморфизму для любого $r \in \mathcal{T}$.

Доказательство. Пусть f принадлежит классу \mathcal{H}_J , удовлетворяет условиям класса \mathcal{G} , и f_0 индуцирует периодический автоморфизм f_* в фундаментальной группе поверхности S_g . Тогда, согласно Лемме 4.2, гомеоморфизм f_r индуцирует автоморфизм f_* для любого $r \in \mathcal{T}$.

Из доказательства Леммы 4.2 следует, что $J_*f_* = f_*J_*$ и автоморфизм $J_*^l f_*^k$ действует гиперболически в фундаментальной группе поверхности S_g , где J_* – автоморфизм фундаментальной группы поверхности S_g , индуцированный гомеоморфизмом J . Так как $(f_*^{-1} J_*^{-1})(J_*^l f_*^k) = (J_*^l f_*^k)(f_*^{-1} J_*^{-1})$, то из [13, Theorem 2.4] следует, что $f_*^{-1} J_*^{-1}$ является либо периодическим, либо гиперболическим автоморфизмом. Если $f_*^{-1} J_*^{-1}$ действует периодически, то J_* также действует периодически. Тогда автоморфизм $J_*^l f_*^k$ тоже является периодическим. Получили противоречие. Следовательно, автоморфизм $f_*^{-1} J_*^{-1}$ является гиперболическим.

Таким образом, гомеоморфизм $f_r^{-1} J^{-1}$ изотопен некоторому псевдоаносовскому гомеоморфизму для любого $r \in \mathcal{T}$. □

Лемма 4.4. Пусть f принадлежит классу \mathcal{H}_J , удовлетворяет условиям класса \mathcal{G} , и P – псевдоаносовский гомеоморфизм поверхности S_g , изотопный f_r ($f_r^{-1} J^{-1}$) для любого $r \in \mathcal{T}$. Тогда существуют гомеоморфизмы $J': S_g \rightarrow S_g$ и $f': M_{J'} \rightarrow M_{J'}$ такие, что $J'P = PJ'$, f' принадлежит классу $\mathcal{H}_{J'}$ и топологически сопряжен гомеоморфизму f

Доказательство. Пусть f принадлежит классу \mathcal{H}_J , удовлетворяет условиям класса \mathcal{G} , и P – псевдоаносовский гомеоморфизм поверхности S_g , изотопный f_r ($f_r^{-1} J^{-1}$) ($r \in \mathcal{T}$).

Положим $P' = J^{-1}PJ$. Из доказательства Леммы 4.2 следует, что $J_*f_* = f_*J_*$, где J_* – автоморфизм фундаментальной группы поверхности S_g , индуцированный гомеоморфизмом J , а f_* – автоморфизм индуцированный f_r для любого $r \in \mathcal{T}$. Так как P изотопен f_r ($f_r^{-1} J^{-1}$), то гомеоморфизм P индуцирует автоморфизм $P_* = f_*$ ($P_* = f_*^{-1} J_*^{-1}$). Тогда гомеоморфизм P' индуцирует автоморфизм $P'_* = J_*^{-1} f_* J_* = f_*$ ($P'_* = J_*^{-1} f_*^{-1} J_*^{-1} J_* = f_*^{-1} J_*^{-1}$). Отсюда следует, что $P_* = P'_*$. Таким образом, гомеоморфизмы P и P' являются псевдоаносовскими гомеоморфизмами и при этом изотопными. Следовательно, существует изотопный тождественному гомеоморфизму η такой, что $P' = \eta P \eta^{-1}$ [6, Теорема 6.3].

Пусть η_t – изотопия, соединяющая гомеоморфизм $\eta_0(z) = \eta(z)$ ($\eta: S_g \rightarrow S_g$) и тождественное отображение $\eta_1(z) = id(z)$ ($id: S_g \rightarrow S_g$). Для $r \in [0, 1]$ определим гомеоморфизм $y_r: S_g \rightarrow S_g$ по формуле $y_r = \eta_{6nk(1-r)}$, $r \in [1 - \frac{1}{6nk}, 1]$, и $y_r = id$ для всех остальных r . Определим гомеоморфизм $y: S_g \times [0, 1] \rightarrow S_g \times [0, 1]$ формулой $y(z, r) = (y_r(z), r)$. Заметим, что $y(z, 1) = (\eta(z), 1)$ и $y(z, 0) = (z, 0)$.

Положим $J' = J\eta$ и $\gamma' = (J'(z), r - 1)$. Обозначим через $[r]$ целую часть числа $r \in \mathbb{R}$ и зададим гомеоморфизм $\bar{Y}(z, r) = (\gamma')^{-[r]}y\gamma^{[r]}(z, r)$ для $(z, r) \in S_g \times \mathbb{R}$. Положим $\bar{f}' = \bar{Y}\bar{f}\bar{Y}^{-1}$.

Из инвариантности гомеоморфизма \bar{Y} на множестве $S_g \times \mathcal{T}$ получаем, что $\bar{f}'|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r) = (f'_r(z), r + \frac{1}{k})$, где f'_r ($r \in \mathcal{T}$) – гомеоморфизм S_g .

Так как $\gamma'f' = \bar{f}'\gamma'$ и $\gamma'\bar{Y} = \bar{Y}\gamma$, то, согласно [4, Утверждение 10.2.26], гомеоморфизмы \bar{f}' и \bar{Y} проектируются в гомеоморфизмы $f'M_{J'} \rightarrow M_{J'}$ и $Y: M_J \rightarrow M_{J'}$, заданные формулами $f' = p_{J'}(\bar{f}'(p_{J'}^{-1}(w)))$ и $Y = p_{J'}(\bar{Y}(p_J^{-1}(w)))$, где $p_J: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$, $p_{J'}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_{J'}$ – естественные проекции и $p_J^{-1}(w)$, $p_{J'}^{-1}(w)$ – полные прообразы точек $w \in M_J$, $w' \in M_{J'}$. Так как $\bar{f}' = \bar{Y}\bar{f}\bar{Y}^{-1}$, то $f' = YfY^{-1}$. Следовательно, гомеоморфизм f' топологически сопряжен гомеоморфизму f и принадлежит классу $\mathcal{H}_{J'}$. При этом $J'P = J\eta P = JP'\eta = PJ\eta = PJ'$. \square

Докажем, что любой гомеоморфизм из класса \mathcal{G} является объемлюще Ω -сопряженным некоторому гомеоморфизму из класса Φ .

Пусть $f \in \mathcal{G}$. Согласно [12, Лемма 2.1], неблуждающее множество $NW(f)$ гомеоморфизма $f \in \mathcal{G}$ состоит из $2nk$ ($n, k \in \mathbb{N}$) компонент связности периода k , гомеоморфных S_g ($g \geq 1$).

В силу Леммы 4.1 можно считать, что $f \in \mathcal{H}_J$, то есть f задан на $M_J = S_g \times \mathbb{R}/\Gamma$ с естественной проекцией $p_J: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$, где J – некоторый гомеоморфизм поверхности S_g и $\Gamma = \{\gamma^i | \gamma(z, r) = (J(z), r - 1), i \in \mathbb{Z}\}$. При этом ограничение накрывающего отображения $\bar{f}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ на множество $p_J^{-1}(NW(f)) = S_g \times \mathcal{T}$ ($\mathcal{T} = \{\frac{i}{2nk}, i \in \mathbb{Z}\}$) имеет вид $\bar{f}|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r) = (f_r(z), r + \frac{l}{k})$, где $f_r: S_g \rightarrow S_g$ – гомеоморфизм поверхности и $l = 0$, если $k = 1$, и $l \in \{1, \dots, k - 1\}$ и является взаимно простым с k , если $k > 1$.

В силу Леммы 4.2 возможны 2 случая: а) f_r изотопен некоторому псевдоаносовскому гомеоморфизму для любого $r \in \mathcal{T}$; б) f_r изотопен некоторому периодическому гомеоморфизму для любого $r \in \mathcal{T}$.

Рассмотрим случай а). Тогда существует псевдоаносовский гомеоморфизм P , гомотопный f_r для любого $r \in \mathcal{T}$. В силу Леммы можно считать, что $JP = PJ$.

Докажем, что гомеоморфизм f объемлюще Ω -сопряжен модельному отображению $\varphi_{P,J,n,k,l}$. Для этого построим гомеоморфизм $\phi: M_J \rightarrow M_J$, топологически сопряженный f и совпадающий с гомеоморфизмом $\varphi_{P,J,n,k,l}$ на неблуждающем множестве $(\phi|_{NW(\phi)} = \varphi_{P,J,n,k,l}|_{NW(\varphi_{P,J,n,k,l})})$. Для этого разобьём доказательство на шаги.

Шаг 1. Построим гомеоморфизм $\bar{X}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ такой, что $\bar{X}\gamma = \gamma\bar{X}$ и гомеоморфизм $\bar{\phi} = \bar{X}\bar{f}\bar{X}^{-1}$ будет совпадать на множестве $S_g \times \mathcal{T}$ с гомеоморфизмом $\bar{\varphi}_{P,n,k,l}$.

Шаг 1.1. Положим $T = \{0, \frac{1}{2nk}, \dots, \frac{2n-1}{2nk}\}$. Для $i \in T$ докажем, что существует изотопный тождественному гомеоморфизм h_i , сопрягающий гомеоморфизмы $J^l P^k$ и $J^l f_{i+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{i+\frac{1}{k}} f_i$.

Рассмотрим гомеоморфизм $\gamma^l \bar{f}^k: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$, который является накрывающим для отображения f^k . Для любого $r \in \mathcal{T}$ получим $\gamma^l(\bar{f}^k|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r)) = (J^l(f_{r+(k-1)\frac{1}{k}}(\cdots(f_{r+\frac{1}{k}}(f_r(z))))), r)$.

Так как гомеоморфизм f_r для любого $r \in \mathcal{T}$ изотопен P в силу Леммы 4.3, то гомеоморфизм $J^l f_{r+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{r+\frac{1}{k}} f_r$ изотопен $J^l P^k$ для любого $r \in \mathcal{T}$. Так как гомеоморфизм $J^l f_{r+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{r+\frac{1}{k}} f_r$ топологически сопряжен гомеоморфизму $f^k(p_J(S_g \times \{r\}))$, то он является псевдоаносовским отображением. Так как отображение $\gamma^l \bar{\varphi}_{P,n,k,l}^k$ является накрывающим отображением для гомеоморфизма $\varphi_{P,J,n,k,l}^k$ и $\gamma^l(\bar{\varphi}_{P,n,k,l}^k|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r)) = (J^l(P^k(z)), r)$, то гомеоморфизм $J^l P^k$ также является псевдоаносовским отображением. Следовательно, гомеоморфизмы $J^l f_{r+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{r+\frac{1}{k}} f_r$ и $J^l P^k$ топологически сопряжены для любого $r \in \mathcal{T}$ посредством некоторого изотопного тождественному гомеоморфизма [6, Теорема 6.3].

Для $i \in T$ обозначим через h_i изотопный тождественному гомеоморфизм такой, что $J^l P^k = h_i(J^l f_{i+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{i+\frac{1}{k}} f_i) h_i^{-1}$.

Шаг 1.2. Положим $U^0 = [-\frac{1}{4nk}, \frac{1}{k} - \frac{1}{4nk}] \cup [-\frac{1}{4nk} - \frac{l}{k}, \frac{1}{k} - \frac{1}{4nk} - \frac{l}{k}] \cup \cdots \cup [-\frac{1}{4nk} - (k-1)\frac{l}{k}, \frac{1}{k} - \frac{1}{4nk} - (k-1)\frac{l}{k}]$. Построим гомеоморфизм $x = \bar{X}|_{S_g \times U^0}$.

Для $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и $i \in T$ определим гомеоморфизм $h_{i-j\frac{1}{k}} = P^{-j} h_i f_{i-j\frac{1}{k}+(j-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{i-j\frac{1}{k}+\frac{1}{k}} f_{i-j\frac{1}{k}}$. Так как гомеоморфизм $f_{i-j\frac{1}{k}+(j-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{i-j\frac{1}{k}+\frac{1}{k}} f_{i-j\frac{1}{k}}$ изотопен P^j , а гомеоморфизм h_i изотопен тождественному, то гомеоморфизм $h_{i-j\frac{1}{k}}$ также изотопен тождественному. Обозначим через $h_{i-j\frac{1}{k},t}$ изотопию, соединяющую гомеоморфизм $h_{i-j\frac{1}{k},0}(z) = h_{i-j\frac{1}{k}}(z)$ ($h_{i-j\frac{1}{k}}: S_g \rightarrow S_g$) и тождественное отображение $h_{i-j\frac{1}{k},1}(z) = id(z)$ ($id: S_g \rightarrow S_g$).

Для $r \in U^0$, $i \in T$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$ определим гомеоморфизм $x_r: S_g \rightarrow S_g$ по формуле $x_r = h_{i-j\frac{1}{k},6nk|r-(i-j\frac{1}{k})|}$, $|r - (i - j\frac{1}{k})| \leq \frac{1}{6nk}$, и $x_r = id$ для всех остальных r . Определим гомеоморфизм $x: S_g \times U^0 \rightarrow S_g \times U^0$ формулой $x(z, r) = (x_r(z), r)$. Заметим, что $x(z, i - j\frac{1}{k}) = (h_{i-j\frac{1}{k}}(z), i - j\frac{1}{k})$ и $x(z, i - j\frac{1}{k} \pm \frac{1}{6nk}) = (z, i - j\frac{1}{k} \pm \frac{1}{6nk})$.

Шаг 1.3. Продолжим гомеоморфизм $x: S_g \times U^0 \rightarrow S_g \times U^0$ до гомеоморфизма $\bar{X}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$.

Докажем, что для любой точки $r \in \mathbb{R}$ существует целое число $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $(r - m) \in U^0$.

Разобьём полуинтервал $[-\frac{1}{4nk}, 1 - \frac{1}{4nk})$ на k равных полуинтервалов: $[-\frac{1}{4nk}, 1 - \frac{1}{4nk}) = [-\frac{1}{4nk}, \frac{1}{k} - \frac{1}{4nk}) \cup [-\frac{1}{4nk} + \frac{1}{k}, \frac{2}{k} - \frac{1}{4nk}) \cup \cdots \cup [-\frac{1}{4nk} + (k-1)\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{4nk})$. Очевидно, что для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $q \in \mathbb{Z}$ такое, что $r - q \in [-\frac{1}{4nk}, 1 - \frac{1}{4nk})$. Пусть $r - q \in [-\frac{1}{4nk} + \frac{j}{k}, \frac{j+1}{k} - \frac{1}{4nk})$, где $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Так как j пробегает полную систему вычетов $\{0, 1, \dots, k-1\}$ по модулю k и l взаимно просто с k , то $(-jl)$ также пробегает полную систему вычетов $\{0, -l, \dots, -l(k-1)\}$ по модулю k [2, стр.46]. Следовательно, существуют целые числа $i \in \{0, -l, \dots, -l(k-1)\}$ и p такие, что и $j + pk = i$. Тогда $(r - q + p) \in [-\frac{1}{4nk} + \frac{j+pk}{k}, \frac{j+1+pk}{k} - \frac{1}{4nk}) = [-\frac{1}{4nk} + \frac{i}{k}, \frac{1}{k} + \frac{i}{k} - \frac{1}{4nk}) \subset U^0$. Таким образом, $m = q - p$ - искомое целое число такое, что $(r - m) \in U^0$.

Обозначим через $m(r)$ целое число $m(r) \in \mathbb{Z}$ такое, что $(r - m(r)) \in U^0$. Положим $\bar{X}(z, r) = \gamma^{-m(r)} x \gamma^{m(r)}(z, r)$ для $(z, r) \in S_g \times \mathbb{R}$. По построению $\bar{X} \gamma = \gamma \bar{X}$.

Шаг 1.4. Докажем, что $\bar{\phi}|_{S_g \times \mathcal{T}} = \bar{\varphi}_{P,n,k,l}|_{S_g \times \mathcal{T}}$.

Любая точка множества \mathcal{T} имеет вид $i - j\frac{l}{k} + m$, где $i \in T$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$ и $m \in \mathbb{Z}$. По построению $\varphi_{P,n,k,l}(z, i - j\frac{l}{k} + m) = (P(z), i - j\frac{l}{k} + m + \frac{l}{k})$.

Докажем, что $\bar{\phi}(z, i - j\frac{l}{k} + m) = (P(z), i - j\frac{l}{k} + m + \frac{l}{k})$. Действительно, $\bar{\phi}(z, i - j\frac{l}{k} + m) = \bar{X}(\bar{f}(\bar{X}^{-1}(z, i - j\frac{l}{k} + m))) = \bar{X}(\bar{f}(\gamma^{-m}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))), i - j\frac{l}{k}))) = \bar{X}(\bar{f}(J^{-m}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))), i - j\frac{l}{k} + m)) = \bar{X}(f_{i-j\frac{l}{k}+m}(J^{-m}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m))$.

Возможны 2 случая: $j \geq 1$ и $j = 0$.

Если $j \geq 1$, то $j-1 \in \{0, \dots, k-2\}$ и $\bar{\phi}(z, i - j\frac{l}{k} + m) = \gamma^{-m}(x(\gamma^m(f_{i-j\frac{l}{k}+m}(J^{-m}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m))) = (J^{-m}(h_{i-(j-1)\frac{l}{k}}(J^m(f_{i-j\frac{l}{k}+m}(J^{-m}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m) = (J^{-m}(h_{i-(j-1)\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m) = (J^{-m}(h_{i-(j-1)\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(\dots(f_{i-j\frac{l}{k}+(j-1)\frac{l}{k}}^{-1}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(P^j(J^m(z))))))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m) = (J^{-m}(P^{-j+1}(h_i(f_{i-(j-1)\frac{l}{k}+(j-2)\frac{l}{k}}(\dots(f_{i-(j-1)\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(\dots(f_{i-j\frac{l}{k}+(j-1)\frac{l}{k}}^{-1}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(P^j(J^m(z))))))))))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m) = (J^{-m}(P^{-j+1}(h_i(h_i^{-1}(P^j(J^m(z)))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m) = (P(z), i - j\frac{l}{k} + m + \frac{l}{k})$.

Если $j = 0$, то $\bar{\phi}(z, i - j\frac{l}{k} + m) = \bar{\phi}(z, i + m) = \bar{X}(f_{i+m}(J^{-m}(h_i^{-1}(J^m(z))), i + m + \frac{l}{k})) = \gamma^{-(m+l)}(x(\gamma^{(m+l)}(f_{i+m}(J^{-m}(h_i^{-1}(J^m(z))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k}))) = (J^{-(m+l)}(h_{i-(k-1)\frac{l}{k}}(J^{(m+l)}(f_{i+m}(J^{-m}(h_i^{-1}(J^m(z))))))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k}) = (J^{-(m+l)}(h_{i-(k-1)\frac{l}{k}}(J^l(f_i(h_i^{-1}(J^m(z))))))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k}) = (J^{-(m+l)}(P^{-(k-1)}(h_i(f_{i-(k-1)\frac{l}{k}+(k-2)\frac{l}{k}}(\dots(f_{i-(k-1)\frac{l}{k}}(J^l(f_i(h_i^{-1}(J^m(z))))))))))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k}) = (J^{-(m+l)}(P^{-(k-1)}(h_i(J^l(f_{i+\frac{l}{k}+(k-2)\frac{l}{k}}(\dots(f_{i+\frac{l}{k}}(f_i(h_i^{-1}(J^m(z))))))))))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k}) = (J^{-(m+l)}(P^{-(k-1)}(h_i(J^l(f_{i+(k-1)\frac{l}{k}}(\dots(f_{i+\frac{l}{k}}(f_i(h_i^{-1}(J^m(z))))))))))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k}) = (J^{-(m+l)}(P^{-(k-1)}(J^l(P^k(J^m(z))))))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k}) = (P(z), i + m + \frac{l}{k})$.

Шаг 2. Докажем, что гомеоморфизм \bar{X} проектируется в гомеоморфизм $X: M_J \rightarrow M_J$, осуществляющий Ω -сопряжённость f и $\varphi_{P,J,n,k,l}$.

Так как $\bar{\phi}\gamma = \gamma\bar{\phi}$ и $\bar{X}\gamma = \gamma\bar{X}$, то, согласно [4, Утверждение 10.2.26], гомеоморфизмы $\bar{\phi}$ и \bar{X} проектируются в гомеоморфизмы $\phi: M_J \rightarrow M_J$ и $X: M_J \rightarrow M_J$, заданные формулами $\phi = p_J(\bar{\phi}(p_J^{-1}(w)))$ и $X = p_J(\bar{X}(p_J^{-1}(w)))$, где $p_J: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$ – естественная проекция и $p_J^{-1}(w)$ – полный прообраз точки $w \in M_J$.

Так как $\bar{\phi} = \bar{X}\bar{f}\bar{X}^{-1}$, то $\phi = XfX^{-1}$.

Таким образом, гомеоморфизм f объемлюще Ω -сопряжён гомеоморфизму $\varphi_{P,J,n,k,l}$ посредством гомеоморфизма X .

Рассмотрим случай б). Тогда из Леммы 4.3 следует, что существует псевдоаносовский гомеоморфизм P , изотопный $f_r^{-1}J^{-1}$ для любого $r \in \mathcal{T}$. В силу Леммы можно считать, что $JP = PJ$.

Докажем, что гомеоморфизм f объемлюще Ω -сопряжён отображению $\varphi_{P,J,n,k,k-l}^{-1}$. Для этого построим гомеоморфизм $\phi: M_J \rightarrow M_J$, топологически сопряженный f и совпадающий с гомеоморфизмом $\varphi_{P,J,n,k,k-l}^{-1}$ на неблуждающем множестве $(\phi|_{NW(\phi)} = \varphi_{P,J,n,k,k-l}^{-1}|_{NW(\varphi_{P,J,n,k,k-l}^{-1})})$. Для этого разобьём доказательство на шаги.

Шаг 1. Построим гомеоморфизм $\bar{X}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$ такой, что $\bar{X}\gamma = \gamma\bar{X}$ и гомеоморфизм $\bar{\phi} = \bar{X}\bar{f}\bar{X}^{-1}$ будет совпадать на множестве $S_g \times \mathcal{T}$ с гомеоморфизмом $\gamma\bar{\phi}_{P,n,k,k-l}^{-1}$, где $\gamma^{-1}(\bar{\phi}_{P,n,k,k-l}^{-1}|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r)) = (J^{-1}(P^{-1}(z)), r + \frac{l}{k})$.

Шаг 1.1. Положим $T = \{0, \frac{1}{2nk}, \dots, \frac{2n-1}{2nk}\}$. Для $i \in T$ докажем, что существует изотопный тождественному гомеоморфизм h_i , сопрягающий гомеоморфизмы $J^{l-k}P^{-k}$ и $J^l f_{i+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{i+\frac{1}{k}} f_i$.

Рассмотрим гомеоморфизм $\gamma^l \bar{f}^k: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$, который является накрывающим для отображения f^k . Для любого $r \in \mathcal{T}$ получим $\gamma^l(\bar{f}^k|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r)) = (J^l(f_{r+(k-1)\frac{1}{k}}(\cdots(f_{r+\frac{1}{k}}(f_r(z))))), r)$.

Гомеоморфизм $J^l f_{r+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{r+\frac{1}{k}} f_r$ индуцирует в фундаментальной группе поверхности S_g автоморфизм $J_*^l f_*^k = J_*^l J_*^{-k} J_*^k f_*^k = J_*^{l-k} (J_* f_*)^k = J_*^{l-k} P_*^{-k}$, где P_* автоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом P . Следовательно, гомеоморфизм $J^l f_{r+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{r+\frac{1}{k}} f_r$ изотопен $J^{l-k}P^{-k}$ для любого $r \in \mathcal{T}$. Так как гомеоморфизм $J^l f_{r+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{r+\frac{1}{k}} f_r$ топологически сопряжен гомеоморфизму $f^k(p_J(S_g \times \{r\}))$, то он является псевдоаносовским отображением. Так как отображение $\gamma^{l-k} \bar{\varphi}_{P,n,k,k-l}^{-k}$ является накрывающим отображением для гомеоморфизма $\varphi_{P,J,n,k,k-l}^{-k}$ и $\gamma^{l-k}(\bar{\varphi}_{P,n,k,k-l}^{-k}|_{S_g \times \mathcal{T}}(z, r)) = (J^{l-k}(P^{-k}(z)), r)$, то гомеоморфизм $J^{l-k}P^{-k}$ также является псевдоаносовским отображением. Следовательно, гомеоморфизмы $J^l f_{r+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{r+\frac{1}{k}} f_r$ и $J^{l-k}P^{-k}$ топологически сопряжены для любого $r \in \mathcal{T}$ посредством некоторого изотопного тождественному гомеоморфизма [6, Теорема 6.3].

Для $i \in T$ обозначим через h_i изотопный тождественному гомеоморфизм такой, что $J^{l-k}P^{-k} = h_i(J^l f_{i+(k-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{i+\frac{1}{k}} f_i)h_i^{-1}$.

Шаг 1.2. Положим $U^0 = [-\frac{1}{4nk}, \frac{1}{k} - \frac{1}{4nk}] \cup [-\frac{1}{4nk} - \frac{l}{k}, \frac{1}{k} - \frac{1}{4nk} - \frac{l}{k}] \cup \cdots \cup [-\frac{1}{4nk} - (k-1)\frac{l}{k}, \frac{1}{k} - \frac{1}{4nk} - (k-1)\frac{l}{k}]$. Построим гомеоморфизм $x = \bar{X}|_{S_g \times U^0}$.

Для $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и $i \in T$ определим гомеоморфизм $h_{i-j\frac{1}{k}} = P^j J^j h_i f_{i-j\frac{1}{k}+(j-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{i-j\frac{1}{k}+\frac{1}{k}} f_{i-j\frac{1}{k}}$. Так как гомеоморфизм $P^j J^j h_i f_{i-j\frac{1}{k}+(j-1)\frac{1}{k}} \cdots f_{i-j\frac{1}{k}+\frac{1}{k}} f_{i-j\frac{1}{k}}$ индуцирует тождественный автоморфизм $P_*^j J_*^j f_*^j = f_*^{-j} J_*^{-j} J_*^j f_*^j = id_*$, то гомеоморфизм $h_{i-j\frac{1}{k}}$ изотопен тождественному гомеоморфизму. Обозначим через $h_{i-j\frac{1}{k}, t}$ изотопию, соединяющую гомеоморфизм $h_{i-j\frac{1}{k}, 0}(z) = h_{i-j\frac{1}{k}}(z)$ ($h_{i-j\frac{1}{k}}: S_g \rightarrow S_g$) и тождественное отображение $h_{i-j\frac{1}{k}, 1}(z) = id(z)$ ($id: S_g \rightarrow S_g$).

Для $r \in U^0$, $i \in T$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$ определим гомеоморфизм $x_r: S_g \rightarrow S_g$ по формуле $x_r = h_{i-j\frac{1}{k}, 6nk|r-(i-j\frac{1}{k})|}$, $|r - (i - j\frac{1}{k})| \leq \frac{1}{6nk}$, и $x_r = id$ для всех остальных r . Определим гомеоморфизм $x: S_g \times U^0 \rightarrow S_g \times U^0$ формулой $x(z, r) = (x_r(z), r)$. Заметим, что $x(z, i - j\frac{1}{k}) = (h_{i-j\frac{1}{k}}(z), i - j\frac{1}{k})$ и $x(z, i - j\frac{1}{k} \pm \frac{1}{6nk}) = (z, i - j\frac{1}{k} \pm \frac{1}{6nk})$.

Шаг 1.3. Продолжим гомеоморфизм $x: S_g \times U^0 \rightarrow S_g \times U^0$ до гомеоморфизма $\bar{X}: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow S_g \times \mathbb{R}$.

При рассмотрении случая а) доказано, что существует целое число $m(r) \in \mathbb{Z}$ такое, что $(r - m(r)) \in U^0$. Положим $\bar{X}(z, r) = \gamma^{-m(r)} x \gamma^{m(r)}(z, r)$ для $(z, r) \in S_g \times \mathbb{R}$. По построению $\bar{X}\gamma = \gamma\bar{X}$.

Шаг 1.4. Докажем, что $\bar{\phi}|_{S_g \times \mathcal{T}} = (\gamma^{-1} \bar{\varphi}_{P,n,k,k-l}^{-1})|_{S_g \times \mathcal{T}}$.

Любая точка множества \mathcal{T} имеет вид $i - j\frac{1}{k} + m$, где $i \in T$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$ и $m \in \mathbb{Z}$. По построению $\gamma^{-1}(\varphi_{P,n,k,k-l}^{-1}(z, i - j\frac{1}{k} + m)) = (J^{-1}(P^{-1}(z)), i - j\frac{1}{k} + m + \frac{l}{k})$.

Докажем, что $\bar{\phi}(z, i - j\frac{1}{k} + m) = (J^{-1}(P^{-1}(z)), i - j\frac{1}{k} + m + \frac{l}{k})$. Действительно, $\bar{\phi}(z, i - j\frac{1}{k} + m) = \bar{X}(\bar{f}(\bar{X}^{-1}(z, i - j\frac{1}{k} + m))) = \bar{X}(\bar{f}(\gamma^{-m}(h_{i-j\frac{1}{k}}^{-1}(J^m(z)), i - j\frac{1}{k}))) = \bar{X}(\bar{f}(J^{-m}(h_{i-j\frac{1}{k}}^{-1}(J^m(z))), i -$

$$j\frac{l}{k} + m)) = \bar{X}(f_{i-j\frac{l}{k}+m}(J^{-m}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m)).$$

Возможны 2 случая: $j \geq 1$ и $j = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Если } j &\geq 1, \text{ то } j-1 \in \{0, \dots, k-2\} \text{ и } \bar{\phi}(z, i - \\ j\frac{l}{k} + m) &= \gamma^{-m}(x(\gamma^m(f_{i-j\frac{l}{k}+m}(J^{-m}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))), i - (j-1)\frac{l}{k} + \\ m))) &= (J^{-m}(h_{i-(j-1)\frac{l}{k}}(J^m(f_{i-j\frac{l}{k}+m}(J^{-m}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + \\ m) &= (J^{-m}(h_{i-(j-1)\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}(h_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(J^m(z))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m) = \\ (J^{-m}(h_{i-(j-1)\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(\dots(f_{i-j\frac{l}{k}+(j-1)\frac{l}{k}}^{-1}(h_i^{-1}(J^{-j}(P^{-j}(J^m(z))))))))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m) &= \\ (J^{-m}(P^{j-1}(J^{j-1}(h_i(f_{i-(j-1)\frac{l}{k}+(j-2)\frac{l}{k}}(\dots(f_{i-(j-1)\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}(f_{i-j\frac{l}{k}}^{-1}(\dots(f_{i-j\frac{l}{k}+(j-1)\frac{l}{k}}^{-1}(h_i^{-1}(J^{-j}(P^{-j} \\ (J^m(z))))))))))))))), i - (j-1)\frac{l}{k} + m) &= (J^{-m}(P^{j-1}(J^{j-1}(h_i(h_i^{-1}(J^{-j}(P^{-j}(J^m(z))))))), i - (j- \\ 1)\frac{l}{k} + m) &= (J^{-1}(P^{-1}(z)), i - j\frac{l}{k} + m + \frac{l}{k}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } j &= 0, \text{ то } \bar{\phi}(z, i - j\frac{l}{k} + m) = \bar{\phi}(z, i + m) = \bar{X}(f_{i+m}(J^{-m}(h_i^{-1}(J^m(z))), i + \\ m + \frac{l}{k})) &= \gamma^{-(m+l)}(x(\gamma^{(m+l)}(f_{i+m}(J^{-m}(h_i^{-1}(J^m(z))), i + (m+l) - (k - \\ 1)\frac{l}{k}))) &= (J^{-(m+l)}(h_{i-(k-1)\frac{l}{k}}(J^{(m+l)}(f_{i+m}(J^{-m}(h_i^{-1}(J^m(z))))))), i + (m+l) - (k - \\ 1)\frac{l}{k} &= (J^{-(m+l)}(h_{i-(k-1)\frac{l}{k}}(J^l(f_i(h_i^{-1}(J^m(z)))))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k} = \\ (J^{-(m+l)}(P^{(k-1)}(J^{(k-1)}(h_i(f_{i-(k-1)\frac{l}{k}+(k-2)\frac{l}{k}}(\dots(f_{i-(k-1)\frac{l}{k}}(J^l(f_i(h_i^{-1}(J^m(z))))))))))), i + (m+l) &+ \\ l) - (k-1)\frac{l}{k} &= (J^{-(m+l)}(P^{(k-1)}(J^{(k-1)}(h_i(J^l(f_{i+\frac{l}{k}+(k-2)\frac{l}{k}}(\dots(f_{i+\frac{l}{k}}(f_i(h_i^{-1}(J^m(z))))))))))), i + \\ (m+l) - (k-1)\frac{l}{k} &= (J^{-(m+l)}(P^{(k-1)}(J^{(k-1)}(J^{l-k}(P^{-k}(J^m(z))))))), i + (m+l) - (k-1)\frac{l}{k} = \\ (J^{-1}(P^{-1}(z)), i + m + \frac{l}{k}). \end{aligned}$$

Шаг 2. Докажем, что гомеоморфизм \bar{X} проектируется в гомеоморфизм $X: M_J \rightarrow M_J$, осуществляющий Ω -сопряжённость f и $\varphi_{P,J,n,k,k-l}^{-1}$.

Так как $\bar{\phi}\gamma = \gamma\bar{\phi}$ и $\bar{X}\gamma = \gamma\bar{X}$, то, согласно [4, Утверждение 10.2.26], гомеоморфизмы $\bar{\phi}$ и \bar{X} проектируются в гомеоморфизмы $\phi: M_J \rightarrow M_J$ и $X: M_J \rightarrow M_J$, заданные формулами $\phi = p_J(\bar{\phi}(p_J^{-1}(w)))$ и $X = p_J(\bar{X}(p_J^{-1}(w)))$, где $p_J: S_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$ – естественная проекция и $p_J^{-1}(w)$ – полный прообраз точки $w \in M_J$.

Так как $\bar{\phi} = \bar{X}\bar{f}\bar{X}^{-1}$, то $\phi = XfX^{-1}$.

Таким образом, гомеоморфизм f объёмлюще Ω -сопряжён гомеоморфизму $\varphi_{P,J,n,k,k-l}^{-1}$ посредством гомеоморфизма X .

5 Заключение

В настоящей работе для гомеоморфизмов исследуемого класса \mathcal{G} найдена взаимосвязь между их динамическими свойствами и топологией многообразия, на котором они заданы. Доказано, что компоненты связности неблуждающего множества гомеоморфизмов класса \mathcal{G} имеют одинаковый период, замыкание каждой компоненты связности блуждающего множества гомеоморфно прямому произведению поверхности S_g фиксированного рода $g > 1$ на отрезок, а граница состоит из одной компоненты аттрактора и одной компоненты репеллера. На каждом допустимом многообразии, в точности до гомеоморфизма, реализованы модельные отображения из класса \mathcal{G} такие, что на накрывающем пространстве $S_g \times \mathbb{R}$ они представляют собой прямое произведение псевдоаносовского гомеоморфизма поверхности S_g и накрывающего отображения диффеоморфизма окружности. Доказано, что существует гомеоморфизм, Ω -сопрягающий гомеоморфизм из класса \mathcal{G} либо с некоторым модельным отображением, либо с обратным к модельному отображению.

Список литературы

- [1] Брин М. И., Песин Я. Б. Частично гиперболические динамические системы //Успехи математических наук. – 1973. – Т. 28. – №. 3 (171). – С. 169-170.
- [2] Виноградов И. Основы теории чисел. М.-Л., Гостехиздат, 1952. 180 с.
- [3] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С. Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами //Математический сборник. – 2003. – Т. 194. – №. 7. – С. 25-56.
- [4] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три //Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований. – 2011.
- [5] Жиров А. Ю., Плыкин Р. В. Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами //Математические заметки. – 1995. – Т. 58. – №. 1. – С. 149-152.
- [6] Жиров А. Топологическая сопряжённость псевдоаносовских гомеоморфизмов. М.: МЦ-НМО, 2014. 366 с.
- [7] Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х. Поверхности и разрывные группы. – 1988.
- [8] Brown M. Locally flat imbeddings of topological manifolds //Annals of Mathematics. – 1962. – С. 331-341.
- [9] Grines V. Z. et al. On the dynamical coherence of structurally stable 3-diffeomorphisms //Regular and Chaotic Dynamics. – 2014. – Т. 19. – С. 506-512.
- [10] Grines V. et al. The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets //Nonlinearity. – 2015. – Т. 28. – №. 11. – С. 4081.
- [11] Grines V. Z., Gurevich E. Y., Pochinka O. V. On the number of heteroclinic curves of diffeomorphisms with surface dynamics //Regular and Chaotic Dynamics. – 2017. – Т. 22. – С. 122-135.
- [12] Grines V. Z., Pochinka O. V., Chilina E. E. Dynamics of 3-Homeomorphisms with Two-Dimensional Attractors and Repellers //Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – С. 1-10.
- [13] Tanigawa H. Orbits and their Accumulation Points of Cyclic Subgroups of Modular Groups Dedicated to Professor Tatuo Fuji'i'e on his sixtieth birthday //Tohoku Mathematical Journal, Second Series. – 1991. – Т. 43. – №. 2. – С. 289-299.

Приложение
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Багаутдиновой Эльмиры Рафиковны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Семейство моделей типа Ходжкина–Хаксли демонстрирующих бистабильность» являются: разработка двух новых математических моделей, основанных на формализме Ходжкина-Хаксли 2.1, 2.2.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 сентября по 15 октября 2022 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: продолжение интеграла Петтиса, Pettis integral continuation, в выдаче поисковиков было исследовано 10 статей, 5 тезисов докладов (список см. список литературы к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работе [24] была предложена модель, которая служила основой для новых моделей, она также была проверена, было найдено множество работ связанных с исследованием моделей основанных на формализме Ходжкина-Хаксли, что подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Станкевич Натальей Владимировной, доцентом факультета информатики, математики и компьютерных наук НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде.

- Проведено выступление на VII Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ - Нижний Новгород.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 09.06.2023. На Смотр представлен проект текста работы.



Багаутдинова Эльмира Рафиковна

31 мая 2023 г., Саратов, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра динамического моделирования и биомедицинской инженерии

Семейство моделей типа Ходжкина–Хаксли демонстрирующих
бистабильность

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

Студента (ки) 2 курса 2281 группы

направления 12.04.04 «Биотехнические системы и технологии»

институт физики

Багаутдиновой Эльмиры Рафиковны

Научный руководитель:
профессор, д.м.н., доцент

А.Р. Киселев

подпись, дата

Зав. кафедрой динамического
моделирования и
биомедицинской инженерии,
д.ф.-м.н., доцент

А.С. Караваяев

подпись, дата

Саратов 2023

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. Формализм Ходжкина-Хаксли, модели, характерные динамические режимы	7
1.1 Математическая модель Шермана-Ринтцеля	7
1.2 Модели нейрона пиявки	16
1.3 Математическая модель с дополнительным ионным каналом, характеризующимся немонотонной функцией вероятности	23
Глава 2. Новые модифицированные модели	33
2.1 Модель с дополнительным ионным каналом, характеризующимся монотонной функцией вероятности	33
2.2 Модель, учитывающая ионные каналы, характеризующиеся монотонной и немонотонной функцией вероятности	39
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	45

Введение

Это исследование посвящено семейству моделей, которые основаны на формализме Ходжкина-Хаксли и которые демонстрируют бистабильность. Формализм Ходжкина-Хаксли - это математическая модель мембранного потенциала, описывающая электрическую активность различных типов клеток, таких как нейроны, кардиомиоциты, панкреатические бета-клетки. Модель была разработана в 1952 году Аланом Ходжкином и Эндрю Хаксли, за что им была присуждена Нобелевская премия по физиологии и медицине в 1963 году [1].

Модель Ходжкина-Хаксли описывает процессы ионного транспорта через ионные каналы в мембране [2-3]. Ионные каналы позволяют ионам перемещаться через клеточную мембрану, регулируя электрический потенциал и, следовательно, активность клетки. Они играют важную роль в различных процессах в клетке, таких как коммуникация, пролиферация, дифференцировка и т.д. [4-5]. Хорошо известны патологии каналов, которые могут проявляться при заболеваниях, включая рак [6]. Установлено, что отклонение от нормального функционирования ионного канала может быть сигналом о формировании заболевания.

Ионные каналы описываются с помощью функции вероятности открытия, которая определяет вероятность того, что конкретный ионный канал в мембране откроется в ответ на изменение ее потенциала. Эта математическая функция, обычно представляется в виде кривой активации, которая отражает зависимость вероятности открытия канала от потенциала мембраны и имеет свой уровень порога, при котором вероятность открытия канала начинает резко возрастать [7]. Функция вероятности открытия каналов может, изменяться монотонно или немонотонно. Монотонная функция вероятности возрастает или убывает с увеличением разности потенциалов между внутренней и внешней сторонами мембраны клетки. Немонотонная функция не всегда увеличивается или убывает с увеличением

разности потенциалов и может обладать несколькими максимумами или минимумами, что приводит к более сложному и непредсказуемому поведению канала при изменении потенциала. Такое поведение может иметь различные причины, такие как наличие нескольких открытых и закрытых состояний канала, сложное взаимодействие между подъединицами канала или влияние модуляторов функции канала, таких как ионы или нейромедиаторы. Немонотонные функции вероятности открытия каналов могут играть важную роль в регуляции электрической активности клеток, поскольку могут приводить к более сложным и адаптивным ответам на изменения внешних условий и внутренних параметров. Однако также могут приводить к более сложному анализу и моделированию электрофизиологических процессов.

Типичные режимы для моделей, базирующихся на формализме Ходжкина-Хаксли - это состояние покоя, автоколебания в виде спайков, автоколебания в виде пачек. Пачечная динамика является характерным поведением для нейронов и представляет собой колебательную активность [3]. Как правило, пачечную динамику называют берстовой, так как пачка в переводе на английский «burst», далее в работе пачечная динамика будет называться берстовой. Под колебательной активностью такого рода понимается чередование рефрактерных интервалов и состояний возбуждения, где возбужденное состояние называется спайком. Спайк же представляет собой кратковременное электрическое возбуждение, генерируемое нейроном или другой электрически возбудимой клеткой и представляет собой быстрое изменение мембранного потенциала клетки. Другими словами берстовая динамика представляет собой набор спайков.

Ситуации, когда эти режимы могут сосуществовать называется мультистабильностью. Мультистабильность - это свойство системы иметь несколько устойчивых состояний, между которыми она может переключаться в ответ на изменение внешних условий или внутренних

параметров. В этой работе особый интерес представляет частный случай мультистабильности – бистабильность между автоколебаниями в виде берстов и патологическим состоянием равновесия. С физиологической точки зрения это может быть связано с постоянной активностью нейрона или с недостаточной реакцией на внешние воздействия. Бистабильность и различные типы мультистабильности в моделях нейронов обсуждаются в работах [8-11].

Целью настоящей работы является исследование динамики уже разработанных моделей, основанных на формализме Ходжкина-Хаксли, и демонстрирующих различные типы поведения. При этом также планируется разработка и исследование новых моделей, которые будут демонстрировать сложное динамическое поведение, в частности бистабильность.

Для достижения указанной цели запланировано решение двух основных задач:

1) Исследование четырех моделей, основанных на формализме Ходжкина-Хаксли. Первая модель представляет собой оригинальную модель Шермана-Ринтцеля с берстовой динамикой. Третья и четвертая модели – модели нейрона пиявки, где третья модель имеет трехмерную структуру и не проявляет бистабильность, а четвертая модель демонстрирует шесть типов мультистабильности. Четвертая модель представляет собой модифицированную версию модели Шермана-Ринтцеля с новым ионным каналом, характеризующимся немонотонной функцией вероятности открытия. Эта модель демонстрирует бистабильность между состоянием равновесия и берстовым аттрактором.

2) Исследование двух новых моделей, где одна из них является модифицированной моделью с ионным каналом, характеризующимся монотонной функцией вероятности открытия канала, а другая модель учитывает оба типа ионных каналов. В этих моделях будет проведено

изучение типичного динамического поведения, выявление областей бистабильности и исследование механизма формирования бистабильности.

1 Формализм Ходжкина-Хаксли, модели, характерные динамические режимы

Формализм Ходжкина-Хаксли состоит из системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы ионного транспорта через клеточную мембрану нейрона. В общем виде модель определяется суммой токов, проходящих через мембрану, и описывает, как ионы натрия (Na^+), калия (K^+) и хлора (Cl^-) проходят через мембрану и как эта проницаемость зависит от изменения мембранного потенциала:

$$\dot{V} = - \sum_i I_i,$$

где V - мембранный потенциал клетки, I_i - токи, проходящие через клеточную мембрану по различным ионным каналам.

1.1 Математическая модель Шермана-Ринтцеля

В качестве первого примера для нашего анализа мы воспользуемся упрощенной моделью, основанной на формализме Ходжкина-Хаксли, как это было предложено Шерманом и др. в [12].

$$\begin{aligned} \tau \dot{V} &= -I_{Ca}(V) - I_K(V, n) - I_S(V, S), \\ \tau \dot{n} &= \sigma(n_\infty(V) - n), \\ \tau_S \dot{S} &= S_\infty(V) - S. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь V представляет мембранный потенциал, n может интерпретироваться как вероятность открытия калиевых каналов, а S - медленная переменная в системе. Функции $I_{Ca}(V)$ и $I_K(V, n)$ представляют собой токи кальция и калия, проводимости ионных каналов кальция и калия соответствуют следующим значениям: $g_{Ca} = 3.6$ и $g_K = 10.0$. Потенциалы Нернста (или инверсии) определены, как и в [11] $V_{Ca} = 25$ мВ и $V_K = 75$ мВ. Вместе с $I_S(V, S)$ медленный кальциевый ток I_{Ca} , который показан на рисунке 1 в зависимости от напряжения, и калиевый ток I_K определяют три

трансмембранных тока базовой системы с сигмоидальными функциями m_∞ , n_∞ и S_∞ , представляющими вероятности открытия быстрых и медленных калиевых каналов и имеющие вид, представленный на рисунке 2.

$$I_{Ca}(V) = g_{Ca} m_\infty(V) (V - V_{Ca}), \quad (3)$$

$$I_K(V, n) = g_K n (V - V_K), \quad (4)$$

$$I_S(V, n) = g_S S (V - V_K). \quad (5)$$

$$\omega_\infty(V) = [1 + \exp \frac{V_\omega - V}{\theta_\omega}]^{-1}, \quad \omega = m, n, S. \quad (6)$$

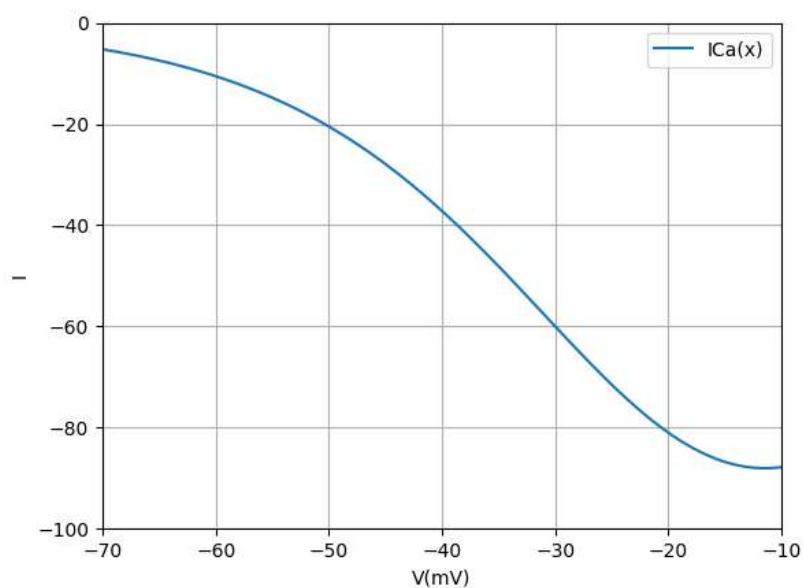


Рисунок 1 – Зависимость тока от напряжения для кальциевого ионного канала

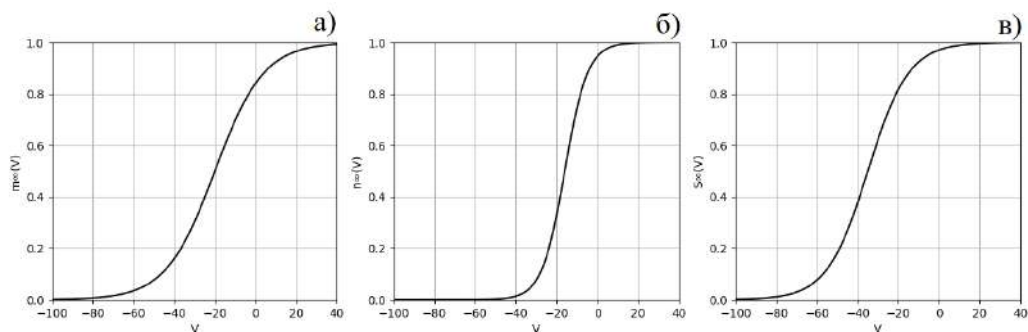


Рисунок 2 – Функции вероятности открытия для различных ионных каналов

В таблице I приведены значения параметров, соответствующие наблюдаемой динамике пачечной активности для модели (1). Характерная постоянная времени для мембранного потенциала определяется емкостью мембраны и соответствующей электрической проводимостью. В соответствии с первоначальной формулировкой модели [12], в формуле (1) проводимости безразмерны. Чтобы устранить зависимость модели от размера клетки, проводимость была масштабирована относительно некоторой подходящей проводимости. При фиксированных временных масштабах $\tau = 0.02$ с. и $\tau_S = 35$ с. отношение $k_S = \tau/\tau_S$ довольно мало, что обеспечивает наличие в системе быстро-медленной динамики.

Таблица 1 - Параметры для модели

$\tau = 0.02$ с	$\tau_S = 35$ с	$\sigma = 0.93$
$g_{Ca} = 3.6$	$g_K = 10.0$	$g_S = 4.0$
$V_{Ca} = 25.0$ мВ	$V_K = -75.0$ мВ	
$\theta_m = 12.0$ мВ	$\theta_n = 5.6$ мВ	$\theta_S = 10.0$ мВ
$V_m = -20.0$ мВ	$V_n = -16.0$ мВ	$V_S = -35.0$ мВ

Перейдем к численному исследованию динамики модели (2). В качестве одной из характеристик быстро-медленных систем используются нульклины. Если мы приравняем левую часть дифференциального уравнения константе Const, то получим изоклину — кривую на плоскости, вдоль которой поле, задаваемое этим уравнением, будет иметь один и тот же наклон, определяемый этой константой. Если же константа равна нулю, то такую изоклину можно будет назвать нульклиной. Наша система состоит из трех уравнений, поэтому, чтобы найти ее нульклины, нужно приравнять сначала dV/dt а потом dS/dt к 0. Уравнения нульклин для системы (1) будут выглядеть следующим образом:

$$S_0(V_0) = \frac{-g_{Ca} \frac{1}{1 + \exp \frac{V_m - V_0}{\theta_m}} (V_0 - V_{Ca}) - g_K \frac{1}{1 + \exp \frac{V_n - V_0}{\theta_n}} (V_0 - V_K)}{g_S (V_0 - V_K)}, \quad (7)$$

$$S_0(V_0) = \frac{1}{1 + \exp \frac{V_S - V_0}{\theta_S}}. \quad (8)$$

Пересечение быстрой (6) и медленной (7) нульклин дает состояние равновесие в системе. В рамках данной работы в MathCad были построены нульклины для системы (1), а также рассчитаны состояния равновесия. На рисунке 3 представлены нульклины модели (1), синим цветом изображено быстрое многообразие, красным - медленное многообразие для различных значений параметра V_S . В таблице 2 представлены значения состояний равновесия.

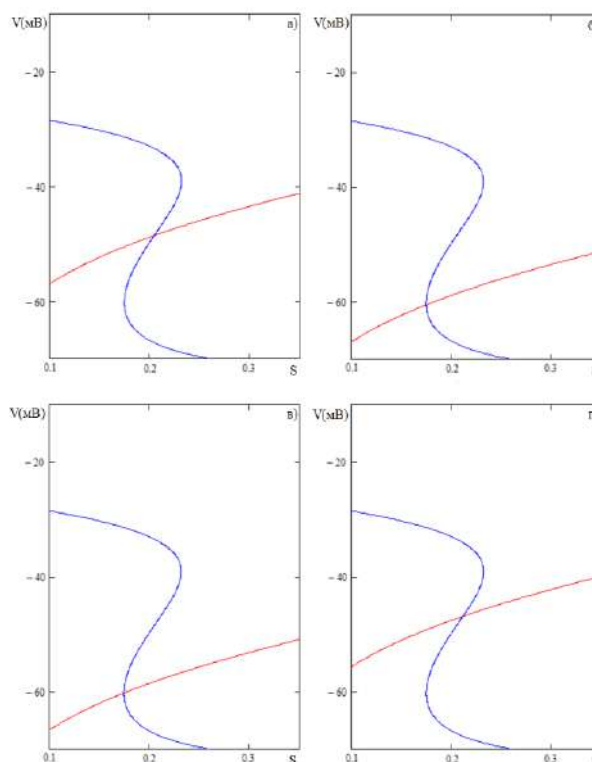


Рисунок 3 – Нульклины модели (1) для а) $V_S = -35$ мВ, б) $V_S = -45$ мВ, в) $V_S = -44.7$ мВ, г) $V_S = -33.7$ мВ

Таблица 2 – Состояние равновесия модели (1) для различных значений параметра V_s .

V_s	V_0	n_0	S_0
-35 мВ	-48.5779	0.0030	0.2046
-45 мВ	-60.5265	0.0003	0.1747
-44,7 мВ	-60.2282	0.0004	0.1747
-33,7 мВ	-46.8668	0.0040	0.2114

На рисунках 4 показаны типичные примеры временных рядов, полученных для быстрой переменной V (рисунок 3 а,г,з,л) и медленной переменной S (рисунок 3 б,е,и,м). Кальций функционирует как неотъемлемая часть двухсторонней петли обратной связи, которая контролирует процесс пачечной активности и включает в себя модуляцию, как электрическую активность, так и гормональную секреция [13]. Удаление кальция приводит к деполяризации и контролирует фазу покоя путем дезактивации калиевых каналов, активированных кальцием. Эта деполяризация активирует как управляемые напряжением кальциевые каналы, так и калиевые каналы, подобные Ходжкину-Хаксли, до тех пор, пока не произойдет возобновление потока кальция, и динамика всплеска берста не будет инициирована снова.

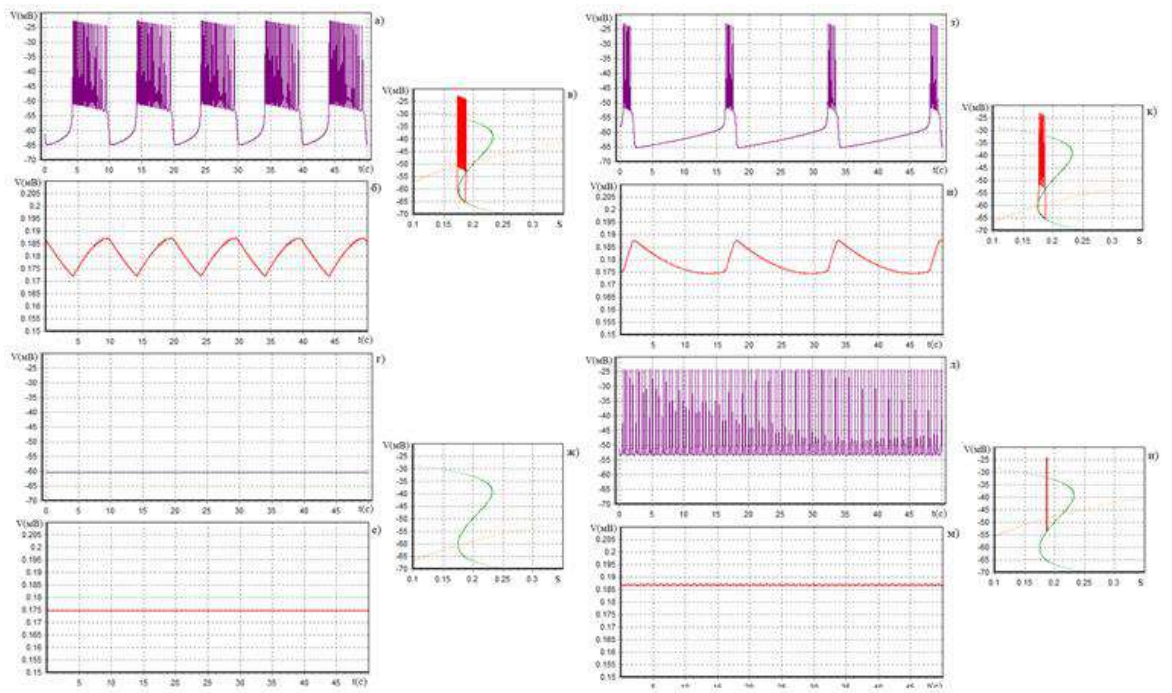


Рисунок 4 – Временные ряды быстрой (фиолетовое) и медленной (красное) переменных; в), ж), к), н) быстрое (зеленое) и медленное (красное) многообразие вместе с двумерной проекцией фазового портрета для исходной модели Шермана [8]. Во время фазы всплеска ионы Ca^{2+} попадают в клетки, а во время фаз покоя Ca^{2+} ионы откачиваются. Быстрая (пиковая) динамика связана с потоком ионов K^+ . в) $V_S = -35$ мВ, ж) $V_S = -45$ мВ, к) $V_S = -44.7$ мВ, н) $V_S = -33.7$ мВ

В соответствии с [5] берстовый аттрактор в модели (1) рождается через одновременные бифуркации Андронова-Хопфа и седло-узел. Пока $V_S < -44.7$ мВ, точка равновесия является устойчивой (примеры быстрых и медленных многообразий представлены на рисунке 4 ж). Для $V_S = -44.7$ мВ происходит бифуркация Хопфа, точка равновесия становится неустойчивой и возникает берстовый аттрактор (рисунок 4 к). Параметр V_S управляет только медленной нульклиной, и с увеличением значений этого параметра медленное многообразие перемещается вверх относительно быстрого многообразия. Берстовый аттрактор рождается в окрестности точки равновесия, но после бифуркации при увеличении значений V_S , точка

равновесия перемещается достаточно далеко от берстового аттрактора. При $V_S = -33.7$ мВ берстовый аттрактор превращается в спайковы аттрактор, как показано на рисунке 4 з.

Еще одним из инструментов исследования динамики систем является метод карт динамических режимов. Для построения такой карты мы разбиваем плоскость параметров с некоторым шагом, в каждой точке рассчитываем аттрактор, делаем его сечение Пуанкаре поверхностью $n = 0.02$ и считаем количество точек в сечении. В зависимости от количества точек можно сделать вывод о периоде колебания, в соответствии с которым каждая точка плоскости параметров окрашивается в тот или иной цвет. Карта динамических режимов для модели (1) представлена на рисунке 5. В нашем случае максимальное число различных точек для периодического аттрактора было зафиксировано 120. Если точек больше 120, то мы считали колебания нерегулярными. Точки с нерегулярными колебаниями мы обозначили серым цветом на карте. Все остальные периодические режимы были окрашены в соответствии с представленной на рисунке 5 палитрой.

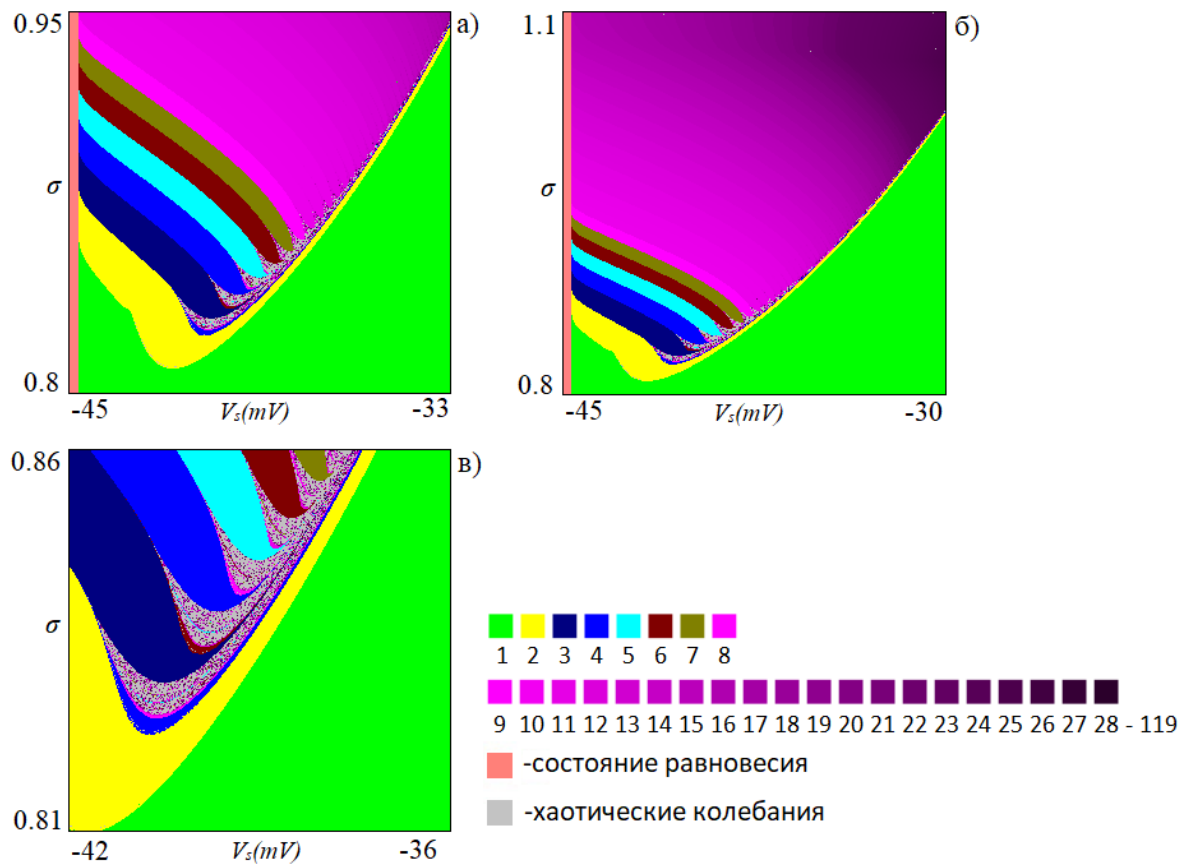


Рисунок 5 – Карты динамических режимов а), б) и ее увеличенный фрагмент в) модели (1) для параметров, указанных в таблице 1 и сечением Пуанкаре поверхностью $n = 0.02$

В качестве управляющих параметров модели мы выбрали параметр σ , который изменяет характерный временной масштаб модели во втором уравнении модели (1) и второй параметр V_S , который изменяет положение медленной нульклины. На карте мы видим, что при $V_S = -44.7$ мВ происходит бифуркация Андронова-Хопфа и в системе рождается предельный цикл. Данный цикл соответствует спайковым колебаниям. При вариации параметров мы видим бифуркации удвоения периода и набор языков с различными периодами. Развитие хаоса в результате каскада бифуркаций удвоения формирует спайковые хаотические колебаний. Увеличение параметра σ приводит к образованию полос на плоскости параметров, в

каждой из которых увеличивается период режима. Такая структура характерна для пачечного аттрактора и смена полос соответствует бифуркации увеличения периода. Для берстового аттрактора количество точек будет в сечении Пуанкаре соответствовать количеству спайков в берсте.

Интересной особенностью биологических систем с пачечной активностью является большой разброс во времени его длительности, который часто наблюдается в течение периода берста. Ранее упоминалось об этой изменчивости в связи с обсуждением медленных и быстрых переменных. Помимо изменений, связанных с различиями в размерах кластеров, наиболее очевидной причиной возникновения изменений является неоднородность в кластерах клеток. Это вдохновило ряд авторов [12,13] предложить так называемую модель фантомного берста, которая позволяет производить быстрое и медленное всплески одновременно, т. е. заменять исходное уравнение для медленного тока калия набором из двух (или более) параллельных калиевых токов. Идея состояла в том, чтобы использовать подход с несколькими степенями свободы для создания более широкого диапазона взаимодействующих импульсных систем при сохранении общей структуры системы. Если проводимость велика, берст, возникающий в результате этой обратной связи, будет быстрым. С другой стороны, если проводимость мала, эта обратная связь имеет небольшое влияние, и возникающий в результате этого берст будет медленным. Таким образом, стало возможным учесть целый ряд биомедицинских явлений, включая широко распространенный трехфазный ответ на ступенчатое повышение уровня глюкозы, ответ на возмущения внутриклеточных запасов Ca^{2+} и различные внутриклеточные функции калия [12, 14].

1.2 Модели нейрона пиявки

На основе исходного уравнения 14-ти мерного, предложенного Ходжкином-Хаксли [15] была разработана упрощенная 4-х мерная модель нейрона пиявки, которая была предложена в статье [9] была. Она содержит только быстрые натриевые I_{Na} и медленные кальциевые I_{CaS} зависящие от напряжения токи и ток утечки I_{leak} . Мы называем ее моделью $I_{CaS}I_{Na}$ в соответствии с набором потенциалзависимых ионных токов, которые она содержит. Эта модель описывается системой следующих четырех уравнений:

$$\begin{aligned}
 CV' &= -[\bar{g}_{Na}f_{\infty}^3(-150,0.028,V)h_{Na}[V - E_{Na}]] + \bar{g}_{CaS}m_{CaS}^2h_{CaS}[V - E_{CaS}] \\
 &\quad + \bar{g}_{leak}[V - E_{leak}], \\
 h'_{Na} &= \frac{[f_{\infty}(500, B_h, V) - h_{Na}]}{0.0405}, \\
 m'_{CaS} &= \frac{[f_{\infty}(-420, 0.0472, V) - m_{CaS}]}{\tau_{mCaS}}, \\
 h'_{CaS} &= \frac{[f_{\infty}(360, B_{hCaS}, V) - h_{CaS}]}{\tau_{hCaS}},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где максимальные проводимости и потенциалы реверсирования I_{CaS} и I_{Na} равны $g_{CaS} = 80$ нСм, $g_{Na} = 250$ нСм, $E_{CaS} = 0.135$ В и $E_{Na} = 0.045$ В соответственно; в качестве параметров бифуркации используются проводимость g_{leak} и потенциал реверса тока утечки; E_{leak} С — емкость мембраны, $C = 0.5$ нСм. Функция $f_{\infty}(A, B, V)$ представляет собой стационарную функцию активации (инактивации) потенциалзависимого ионного тока, определяемую выражением

$$f_{\infty}(A, B, V) = \frac{1}{[1 + e^{A(V+B)}]}. \tag{10}$$

Здесь B – мембранный потенциал полуактивации (полуинактивации), при котором $f_{\infty} = 1/2$. В модели срабатывание I_{Na} считается мгновенным, поэтому $m_{Na} = m_{Na}^{\infty} = f_{\infty}(-150, 0.028, V)$. Зависящие от напряжения константы времени для переменных активации и инактивации кальциевого тока взяты из [14]:

$$\tau_{mCaS} = 0.005 + \frac{0.134}{[1 + e^{-400(V+0.0487)}]}, \quad (11)$$

$$\tau_{hCaS} = 0.2 + \frac{5.25}{[1 + e^{-250(V+0.043)}]}. \quad (12)$$

Можно видеть, что инактивация кальциевого тока h_{CaS} является самой медленной переменной в модели.

Настройка кинетических параметров V_{hCaS} , V_h была мотивирована понятием оконного режима потенциалзависимого ионного тока [16,17]. В этом режиме инактивирующий ток проявляет свойства персистентного неинактивирующего тока в интервале мембранных потенциалов, где стационарные кривые активации и инактивации перекрываются. В 4-х мерной модели «оконный» режим I_{Na} может играть роль, аналогичную роли персистентного тока натрия, который поддерживает длительность всплеска в канонической 14-ти мерной модели [15,18]. Аналогичную роль будет играть «оконный» режим I_{CaS} .

Из исследований 14-ти мерной модели мы можем сделать вывод, что в 4-х мерной модели активация I_{CaS} будет отвечать за начало берстовых колебаний, в то время как инактивация I_{CaS} будет контролировать их прекращение. Этот механизм прекращения берстовой активности аналогичен показанному для динамики полуцентрального осциллятора, собранного из двух интернейронов сердца [18, 19].

Для регулировки межвспышечного интервала мы качали напряжение полуинактивации I_{CaS} , V_{hCaS} . Увеличение V_{hCaS} удлиняет межвсплесковой интервал пачечной активности. Интервал между берстами монотонно возрастает от 0,53 до 3,77 с при V_{hCaS} изменении напряжения от 0,048 В до 0,06 В. На графике также показано влияние вариации V_{hCaS} на частоту спайков в пределах пачки (рисунок 6). Повышение напряжения полуинактивации медленного кальциевого тока V_{hCaS} смещается h_{CaS}^{∞} в сторону более гиперполяризованных значений V_M изменения активности от тонических всплесков (рисунок 6 а) до взрывных (рисунок 6 б,в,г). Для V_{hCaS}

= 0,047 В модель демонстрирует периодическую тоническую пиковую активность (рисунок 6 б,в,г) Увеличение V_{hCaS} до 0,048 В смещается h_{CaS}^{∞} в сторону гиперполяризованного значения, V_M изменяя таким образом активность от тонических всплесков до взрывных. Увеличение V_{hCaS} до 0,056 В увеличивает интервал между вспышками. $V_{hCaS} = 0,06$ В приближает значение межимпульсного интервала к целевому значению. V_h составило 0,031 В для рисунка 6 а) и г). Рисунки 6 б,в,г) имеют одинаковую временную шкалу.

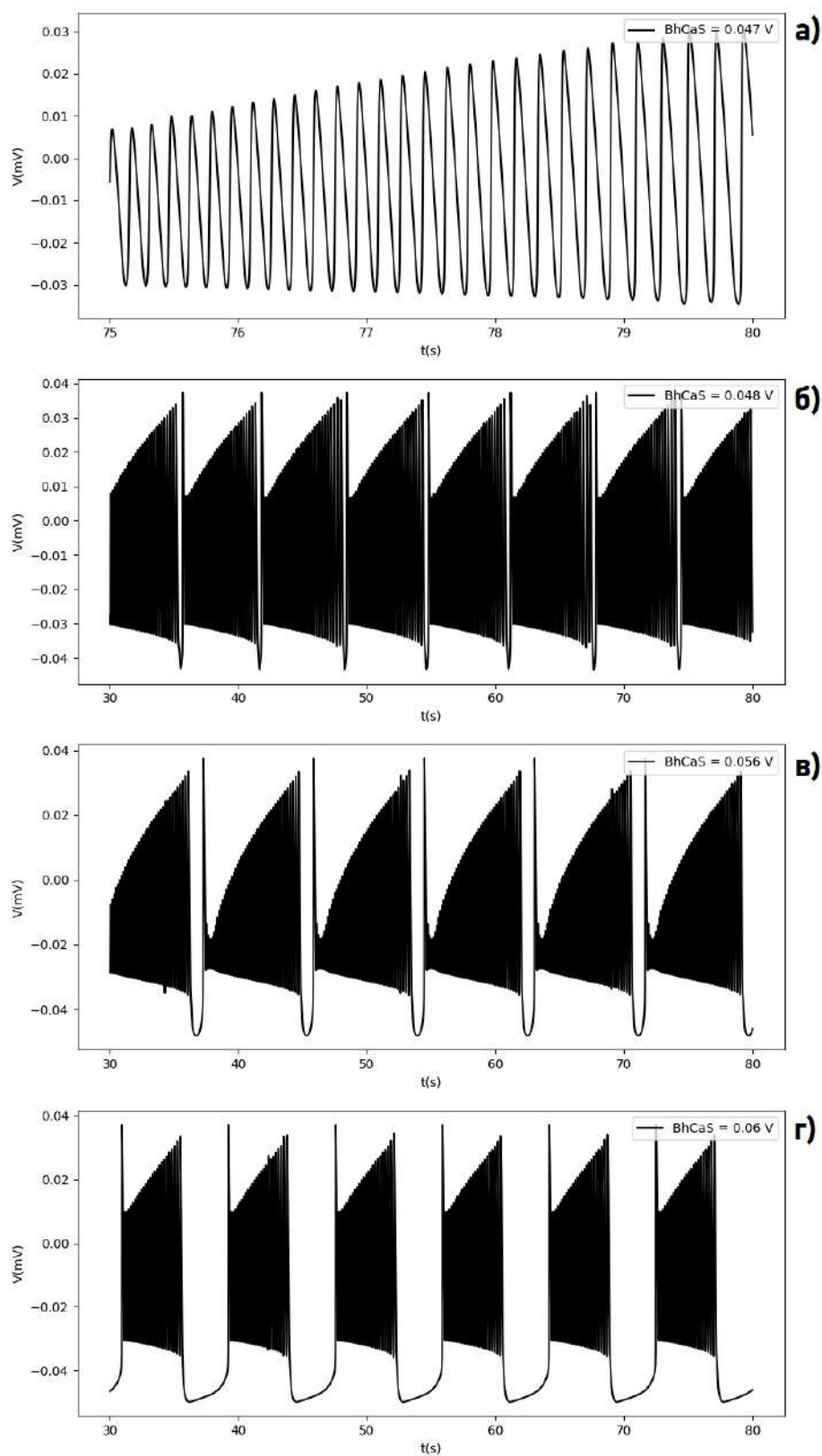


Рисунок 6 – Переход от спайковых колебаний к берстовым и эволюция пачечных сигналов.

Модель показывает шесть типов мультистабильности: 1) спайковые колебания и состояние покоя; 2) спайковые колебания и подпороговые колебания; 3) спайковые и берстовые колебания; 4) берстовые и подпороговые колебания; (5) Берстовые колебание и состояние покоя; 6) всплески, подпороговые колебания и состояние покоя.

В статье [20] была предложена 3-х мерная модель фармакологически изолированного вставочного нейрона при сердцебиении медицинской пиявки. В данной модели бистабильности не наблюдается. Данная модель описывает переход между неустойчивым многообразием и предельным циклом катастрофы голубого неба на модели фармакологически изолированного вставочного нейрона при сердцебиении медицинской пиявки. Активность этих нейронов хорошо описывается в нормальных и фармакологически модифицированных условиях математическими моделями [21-24], разработанными в соответствии с формализмом Ходжкина-Хаксли [24]. В фармакологических условиях, которые блокируют токи Ca^{2+} , а гиперполяризация активирует входящий ток и частично блокирует выходящие токи [25], нейрон можно описать с помощью фармакологически редуцированной модели [21]. Чтобы еще больше упростить его, неактивный натриевой ток, I_p тоже был исключен из модели. В результате получилась система, состоящая из трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 V' = & \\
 -2 (\underline{g}_{K2} m_{K2}^2 (V - E_K) + g_l (V - E_l) + \underline{g}_{Na} f(-150, 0.0305, V)^3 h_{Na} (V - & \\
 E_{Na}) + I_{pol}, & \\
 m'_{K2} = (f(-83, 0.018 + V_{K2}^s, V) - m_{K2}) / \tau_{K2}, & \quad (13) \\
 h'_{Na} = (f(500, 0.0325, V) - h_{Na}) / \tau_{Na}, &
 \end{aligned}$$

где переменные V , m_{K2} и h_{Na} – это мембранный потенциал, активация тока I_{K2} и инактивация тока I_{Na} соответственно. Здесь I_{pol} – поляризующий

ток, \underline{g}_{K2} – максимальная проводимость I_{K2} ; E_K и E_{Na} являются двумя потенциалами обращения K^+ и Na^+ соответственно; \underline{g}_{Na} – это максимальная проводимость I_{Na} ; g_l и E_l – проводимость и обратный потенциал тока утечки соответственно; V_{K2}^S – параметр, сдвигающий кривую активации I_{K2} ; τ_{K2} и τ_{Na} – постоянные времени активации I_{K2} и инактивации I_{Na} соответственно; функция f задается формулой $f(a, b, V) = 1/(1 + e^{a(V + b)})$. Значения параметров, используемых в (13): $I_{pol} = 0,006$ нА, $\underline{g}_{K2} = 30$ нс, $E_K = -0,07$ В, $E_{Na} = 0,045$ В, $\underline{g}_{Na} = 160$ нс, $g_l = 8$ нс, $E_l = -0,046$ В, $\tau_{hK2} = 0,9$ с и $\tau_{hNa} = 0,0405$ с. Мы используем V_{K2}^S как управляющий параметр. В модели время τ_{K2} постоянно и примерно в 10 и 20 раз больше, чем у мембранного потенциала и тока инактивации I_{Na} соответственно.

Предложенная система описывает механизм непрерывного перехода между спаковой и берстовой динамикой модели фармакологически изолированного вставочного нейрона при сердцебиении медицинской пивки. Этот переход, основанный на бифуркации катастрофы голубого неба, является общим для широкого класса нейронных моделей, использующих Формализм Ходжкина-Хаксли.

Непрерывный переход от берстовых колебаний к спайковым достигается одним изменением параметра. Этот переход демонстрируется в модели (13) на рисунке 7. Параметр V_{sK2} играет роль управляющего параметра. По мере приближения V_{sK2} к критическому значению -24.25 мВ длительность продолжительность интервала берста увеличивается без ограничений.

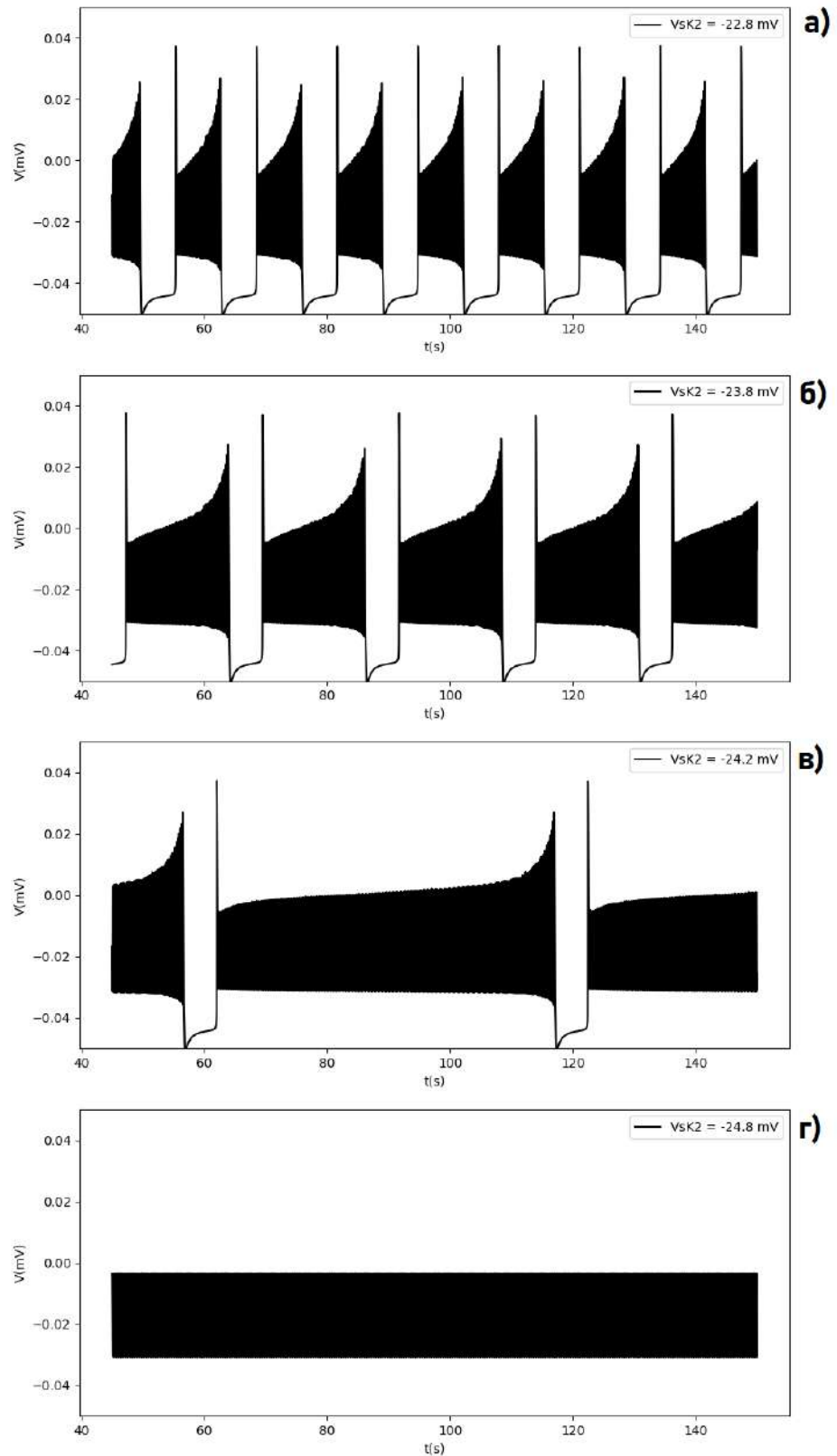


Рисунок 7 – Временные реализации, генерируемых моделью нейрона (13) для уменьшающихся значений параметра бифуркации V_{sk2}

1.3 Математическая модель с дополнительным ионным каналом, характеризующимся немонотонной функцией вероятности

В рамках данной работы мы рассмотрим модификацию модели (2), предложенную в работе [24], в которой возможно возникновение мультистабильности между состоянием покоя и берстовым аттрактором. Суть модификации состоит в учете дополнительного ионного канала калия, динамика которого будет описываться следующим образом. Чтобы добиться стабилизации точки равновесия, мы предлагаем форму зависящего от напряжения тока калия, который слегка изменяет с потенциалом мембраны в непосредственной близости от этой точки равновесия и, следовательно, его стабильность может существовать, не влияя на глобальный поток в модели. Предлагаемая форма калиевого тока определяется уравнением и изображена на рисунке 8 в зависимости от напряжения:

$$I_{K2}(V) = g_{K2}p_{\infty}(V)(V - V_K), \quad (14)$$

где функция

$$p_{\infty} = \left[\exp \frac{V - V_p}{\theta_p} + \exp \frac{V_p - V}{\theta_p} \right]^{-1}, \quad (15)$$

представляет вероятность открытия для предлагаемого нового типа калиевого канала, показана на рисунке 9. Те же вероятностные функции для нормальных каналов представлены сигмоидальной функцией (8). Когда напряжение мембраны достигает порогового значения, калиевый канал открывается с вероятностью $n_{\infty}(V) = 1.0$. Для нового канала функция открытия никогда не равна 1.0. Когда напряжение мембраны достигает порогового напряжения, вероятность открытия будет равна только 0.5. С физиологической точки зрения такая ситуация может быть интерпретирована как некоторая дисфункция ионного канала, например, как блокировка калиевого канала или инактивация [25]. Также мы должны напомнить, что

для отдельных калиевых каналов бета-клетки поджелудочной железы вероятность открытия очень мала [25,26].

Таким образом, модифицированная модель имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau \dot{V} &= -I_{Ca}(V) - I_K(V, n) - I_{K2}(V) - I_S(V, S), \\ \tau \dot{n} &= \sigma(n_\infty(V) - n), \\ \tau_s \dot{S} &= S_\infty(V) - S. \end{aligned} \quad (16)$$

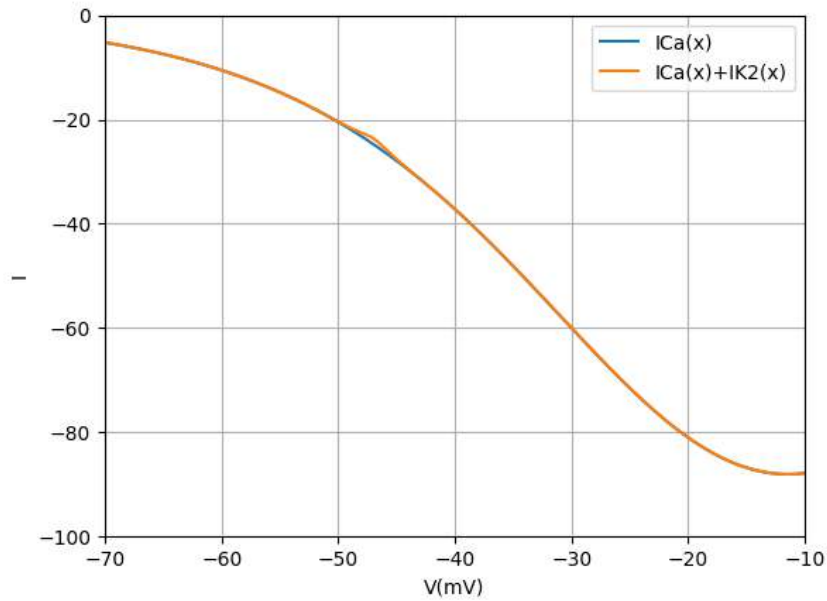


Рисунок 8 – Зависимость тока от напряжения для кальциевого и нового калиевого ионных каналов

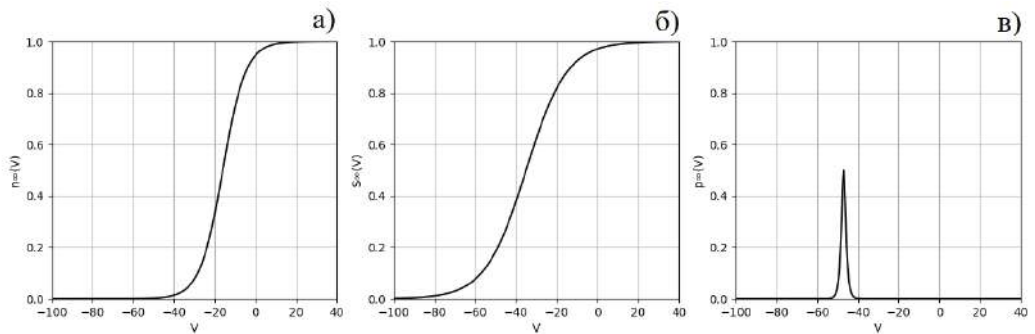


Рисунок 9 – Функции вероятности открытия для различных ионных каналов

Перейдем к численному исследованию динамики модели (16). На рисунке 10 показаны нульклины модифицированной модели (16). Эти кривые иллюстрируют, как можно проявиться в модели новый ионный канал. Как видно на рисунке на быстром многообразии появляется дополнительный перегиб, который характеризуется новой парой экстремумов (минимум и максимум), при этом не влияя на медленное многообразие. Изменяя параметр V_p , можно определить диапазон напряжения, в котором система наиболее чувствительна. Параметр $\theta_p = 1$ контролирует диапазон напряжения, в котором новый ионный канал активен в зависимости от мембранного потенциала V . В этой ситуации точка равновесия может быть устойчивой, но берстовая динамика может развиваться на той же ветви многообразия, что и в исходной модели (2).

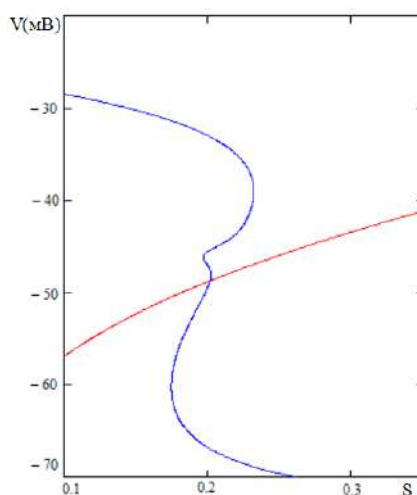


Рисунок 10 – Быстрое (синее) и медленное (красное) многообразия модифицированной модели (12). Дополнительные параметры для нового ионного канала: $g_{K2} = 0.14$, $\theta_p = 1$ мВ и $V_p = -46$ мВ

На рисунке 11 представлены примеры временных реализаций и фазового портрета берстового аттрактора, наблюдаемого в модели (16), который сосуществует с устойчивым состоянием равновесия, координаты которого представлены в таблице 3.

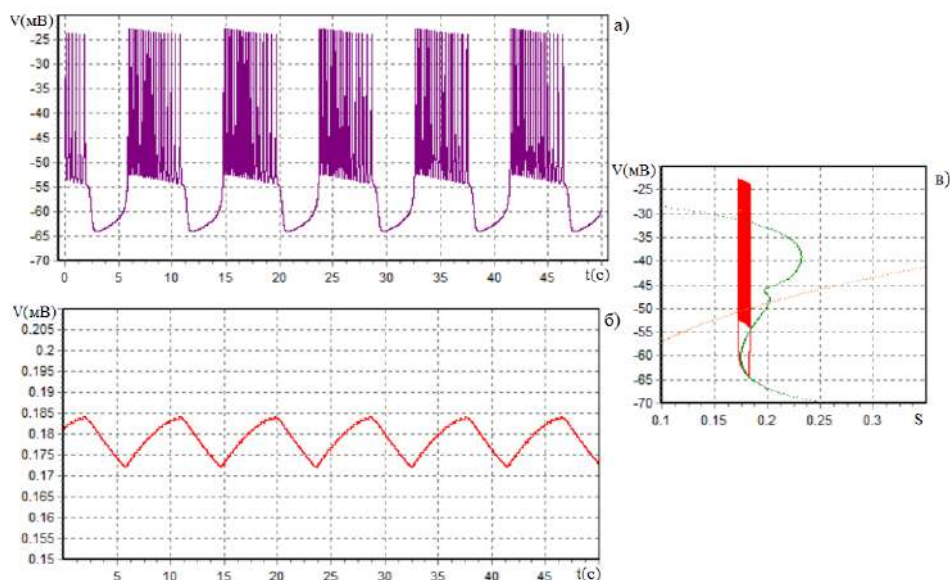


Рисунок 11 – Временные ряды быстрой (фиолетовое) и медленной (красное) переменных; в) быстрое (зеленое) и медленное (оранжевое) многообразие вместе с двумерной проекцией фазового портрета для модифицированной модели

Таблица 3 - Состояние равновесия для модифицированной модели

V_p	V_0	n_0	S_0
-46 мВ	-48.7497	0.0029	0.2018

Исследуем динамику модифицированной системы с помощью метода карт динамических режимов на плоскости параметров σ , V_S , чтобы пронаблюдать изменения в модифицированной системе. В результате учета нового калиевого канала происходит еще одна бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой стабилизируется состояние равновесия. На карте, представленной на рисунке 12, наблюдается полоса устойчивого равновесия, которую можно визуализировать при изменении направления сканирования плоскости параметров с наследуемыми начальными условиями, что подтверждает наличие в системе мультистабильности.

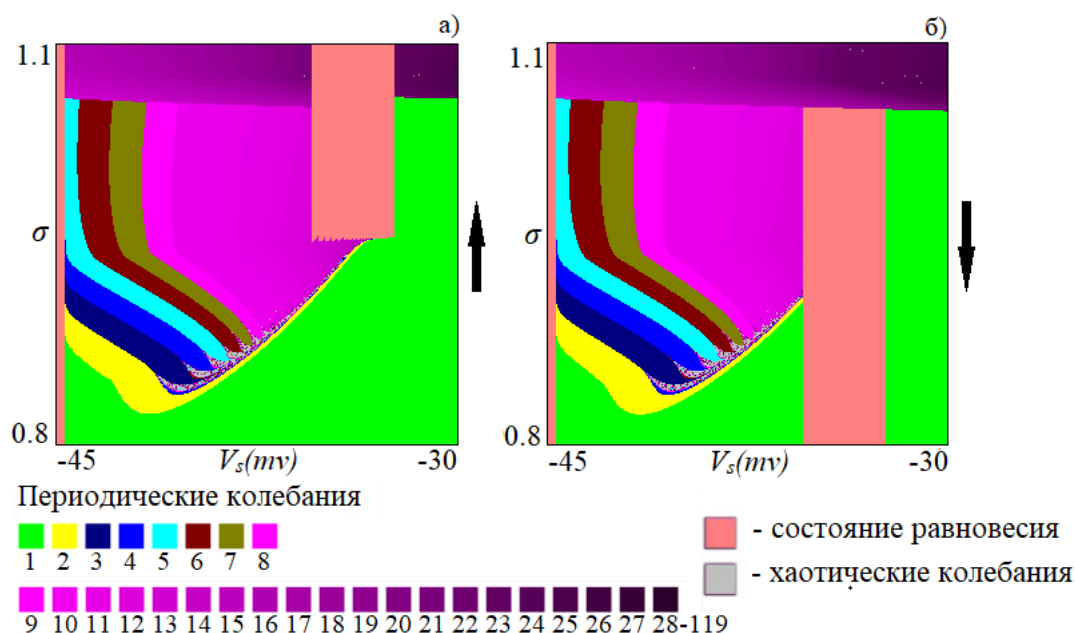


Рисунок 12 – Карты динамических режимов для модифицированной модели (12) в плоскостях параметров модели (1). Все параметры взяты из таблицы 1 за исключением $g_{K2} = 0.2$, $V_p = -47$ мВ. Начальные условия для графиков: $V_0 = -50$ мВ, $n_0 = 0.002$ с а) прямым наследованием, б) обратным наследованием

Теперь рассмотрим карту динамических режимов в плоскости параметров V_p и g_{K2} , которые характеризуют новый ионный канал в модели. На рисунке 13 показаны графики динамические режимы для модифицированной системы (16) с различными начальными условиями.

На рисунках 13 а и 13 б линия бифуркации Андронова-Хопфа равновесия обозначена, синим цветом. Эта кривая была получено с помощью программного комплекса ХРРАУТ. В качестве управляющих параметров мы использовали параметр g_{K2} , который характеризует проводимость нового ионного канала, и параметр V_p , определяющий точку на быстро-медленном многообразии, где происходит дополнительный перегиб. Изменяя V_p , мы можем переместить быстрое многообразие относительно медленного многообразия, и таким образом мы можем сместить точку равновесия. В

исходной модели точка неустойчивого равновесия попадает в точку $EP_0 (V_0, n_0, S_0) = (-48.578, 0.0029663, 0.2046)$. Далее мы будем варьировать параметр V_p в окрестности V_0 . На рисунке 13 вертикальная зеленая линия - это линия, соответствующая линии $V_p = V_0$. При малых значениях проводимости $g_{K2} = (0-0,05)$ наблюдается широкий диапазон с различными оттенками фиолетового. Этот цвет представляет собой берстовую динамику в нашей модели. Разные оттенки фиолетового отражают разное количество спайков в берсте. При уменьшении g_{K2} наблюдается берстовый режим с несколькими спайками в берсте. Это показывает, что влияние нового ионного канала на динамику модели (16) все еще имеет ограниченное значение, а общая динамика практически аналогична исходной модели (2). При увеличении параметра g_{K2} наблюдается рост числа спайков в берсте. Точка равновесия может быть устойчивой при таких вариациях. Наконец, слева на карте режимов, где $g_{K2} > 0,05$ наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Линии удвоения периода сходятся к точке, расположенные в углу области точки устойчивого равновесия. Такие области пространства параметров характерны для формирования пачечной активности, связанной с катастрофой голубого неба. Зеленый цвет представляет собой предельный цикл периода один. Период бифуркации удвоения происходят с уменьшением параметра g_{K2} и увеличивающийся параметр V_p . Этот динамический режим представляет собой только спайковую динамику.

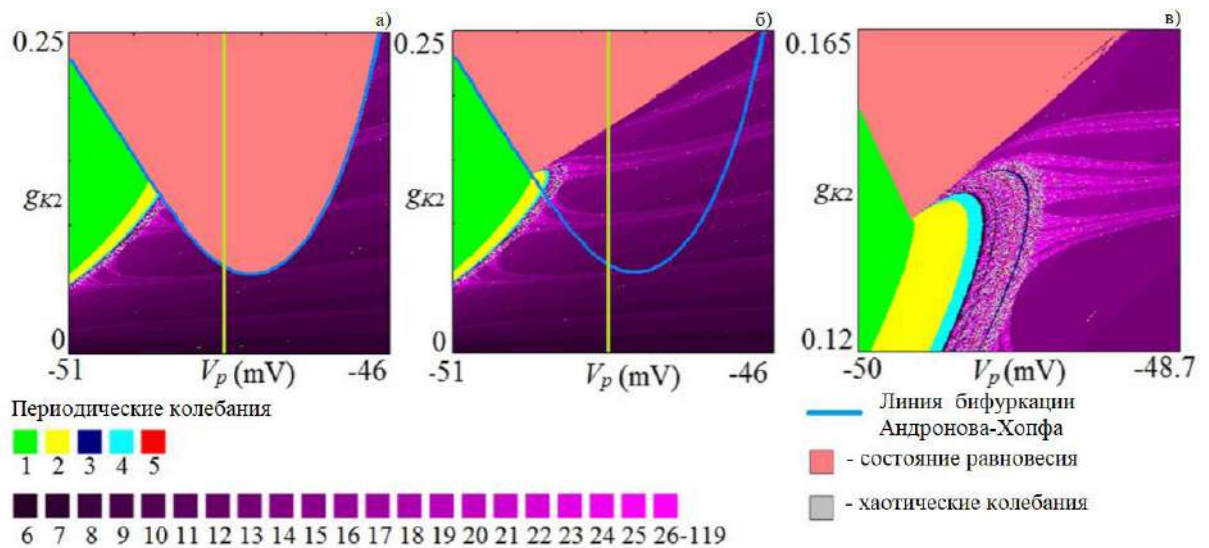


Рисунок 13 – Карты динамических режимов для модифицированной модели (12). Все параметры взяты из таблицы 1 и остается без изменений $\theta_p = 1$ мВ. Начальные условия для графиков: а) $V_0 = -50$ мВ, $n_0 = 0.002$, $S_0 = 0.1984$; б) $V_0 = -40$ мВ, $n_0 = 0.02$ и $S_0 = 0.1$; в) увеличенный фрагмент б)

Рассмотрим бифуркационные особенности для различных фиксированных значений параметра V_p и вероятностные характеристики отражающие вероятность попадания в состояние равновесия. Она рассчитывалась по формуле $p = \frac{N_{ep}}{N} 100\%$, где N_{ep} количество неподвижных точек, а N общее количество точек. Также на вероятностные характеристики нанесены типы устойчивости, как это указано на палитре рисунка 14.

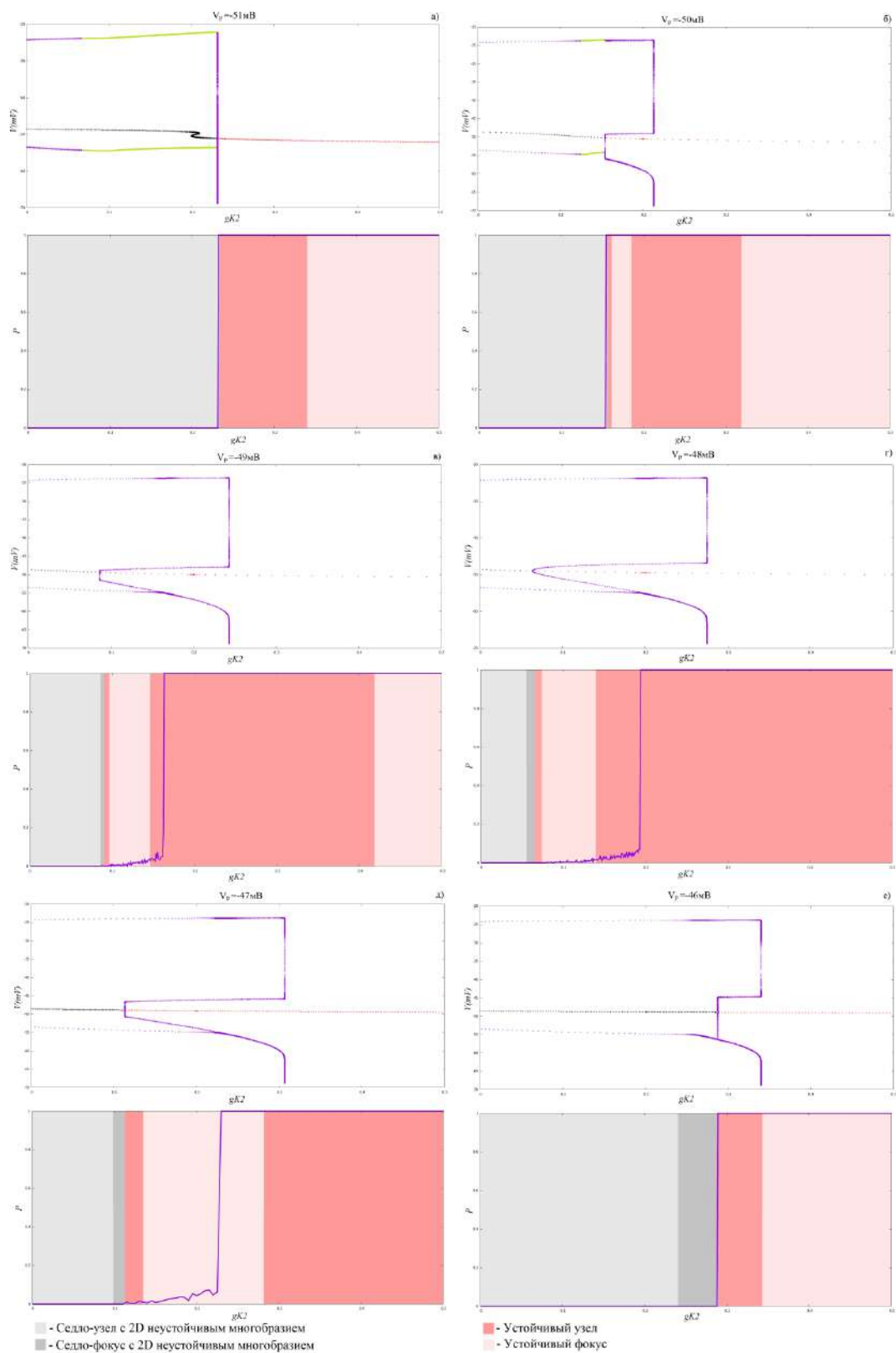


Рисунок 14 – Бифуркационные диаграммы и вероятностные характеристики при а) $V_p = -51$ мВ, б) $V_p = -50$ мВ, в) $V_p = -49$ мВ, г) $V_p = -48$ мВ, д) $V_p = -47$ мВ, е) $V_p = -46$ мВ

На рисунке 14 а) при $V_p = -51$ мВ в модифицированной системе при больших значениях параметра g_{K2} происходит стабилизация состояния равновесия и разрушение автоколебательного режима. С уменьшением параметра g_{K2} происходит потеря устойчивости состояния равновесия и в результате жесткой суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл, с которым при дальнейшем уменьшении параметра происходит каскад бифуркаций удвоения периода. Наблюдаемый устойчивый предельный цикл периода один соответствует спайковым колебаниям. Для данного значения параметра V_p не возникает мультистабильности. На диаграмме хорошо видны две точки седло-узловых бифуркаций, в которых попарно сливаются неустойчивые состояния равновесия.

На рисунке 14 б) при $V_p = -50$ мВ также не наблюдается мультистабильности в модифицированной системе, при больших значениях параметра g_{K2} наблюдается устойчивое состояние равновесия. С уменьшением параметра g_{K2} происходит потеря устойчивости состояния равновесия.

На рисунке 14 в) при $V_p = -49$ мВ возникает мультистабильность. Для данного значения параметра бифуркация Андронова-Хопфа субкритическая, в результате нее рождается седловой цикл, устойчивого предельного цикла не наблюдается. Также как и для предыдущего случая в результате бифуркации Андронова-Хопфа возникает седловой цикл малого радиуса, который протягивается с увеличением параметра g_{K2} и при определенном значении параметра g_{K2} жестким образом происходит перескок на седловой цикл большего радиуса. Точка пересечения этих циклов на бифуркационной диаграмме определяет границу бистабильности. При g_{K2} больше этой границы берстовый аттрактор разрушается, и реализуется только устойчивое состояние равновесия.

На рисунке 14 г) при $V_p = -48$ мВ бифуркация Андронова-Хопфа остается субкритической, но цикл рождается неустойчивый, а сама бифуркация мягкая, амплитуда цикла нарастает постепенно. На рисунке 14 д) при $V_p = -47$ мВ бифуркация Андронова-Хопфа приобретает более жесткий характер. На рисунке 14 е) при $V_p = -46$ мВ точки большого и малого радиуса совпадают, в результате исчезает бистабильность.

В результате получено, что при объединении циклов больших и малых радиусов бистабильность исчезает в модифицированной системе.

2 Новые модифицированные модели

Предложенные выше модели не могут охватить разнообразие патологических состояний, влияющих на активность клетки, поэтому мы предлагаем две новые модели.

2.1 Модель с дополнительным ионным каналом, характеризующимся монотонной функцией вероятности

Специфическая форма функции вероятности открытия, изменяющаяся немонотонно, как показано на рисунке 15 б), может накладывать некоторые ограничения с физиологической точки зрения. Поэтому мы предложили новую модификацию. Мы учитываем дополнительный ионный канал с монотонной функцией вероятности открытия ионного канала (рисунок 15 в). Ток может быть записан в следующем виде:

$$I_{K3}(V) = g_{K3}q_{\infty}(V)(V - V_K), \quad (17)$$

Ток I_{K3} соответствует ионному каналу с типичной функцией вероятности открытия типа $\omega_{\infty}(V)$, как в (6), но с новыми параметрами V_q, θ_q :

$$q(V) = [1 + \exp \frac{V_q - V}{\theta_q}]^{-1}, \quad (18)$$

Таким образом, модифицированная модель будет, имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau \dot{V} &= -I_{Ca}(V) - I_K(V, n) - I_{K3}(V) - I_S(V, S), \\ \tau \dot{n} &= \sigma(n_{\infty}(V) - n), \\ \tau_S \dot{S} &= S_{\infty}(V) - S. \end{aligned} \quad (19)$$

На рисунке 16 представлены токи системы в зависимости от напряжения. Видно, что система с дополнительным калиевым током, имеющим монотонную вероятностную характеристику, имеет большее значение суммы токов, чем для предыдущих систем.

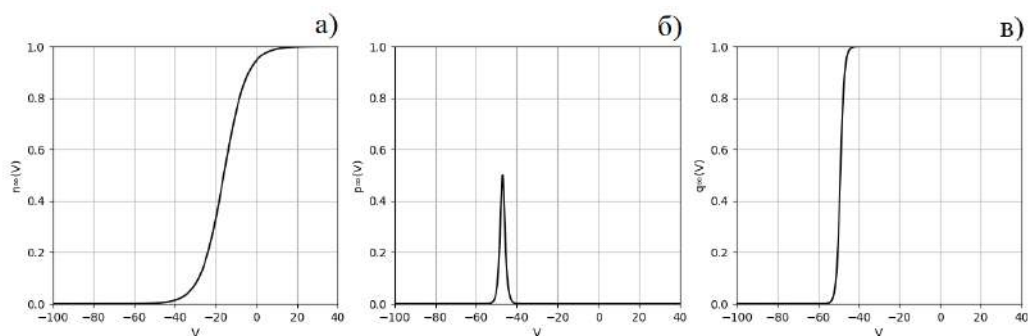


Рисунок 15 – Функции вероятности открытия для различных ионных каналов

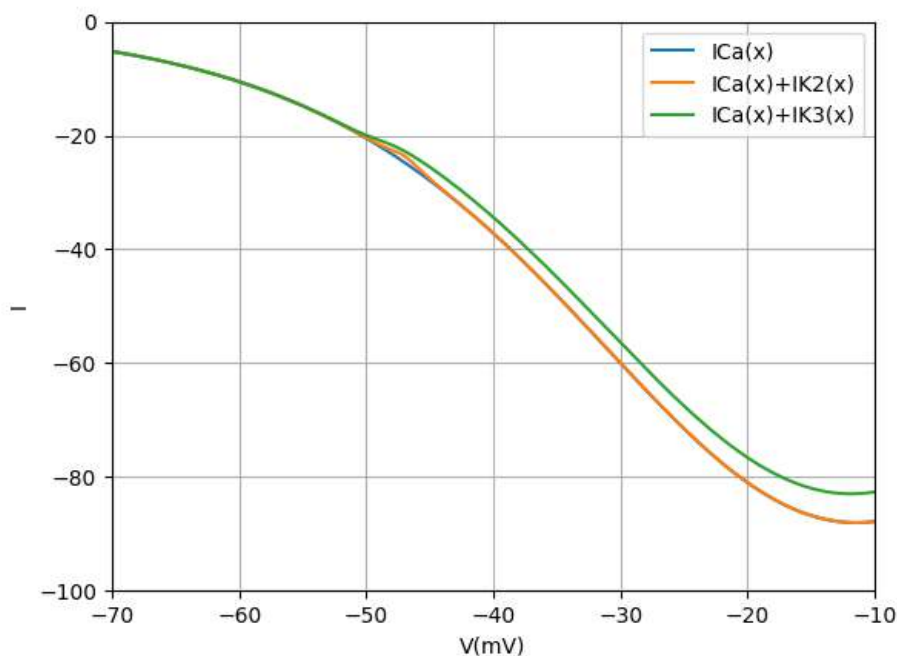


Рисунок 16 – Зависимость тока от напряжения для кальциевого и двух новых калиевых ионных каналов

Перейдем к численному анализу системы (19), на рисунке 17 представлены временные реализации быстрого многообразия (рисунок 17 а) и медленного многообразия (рисунок 17 б) модели. Для этой модели также были построены нульклины, а также нанесен возникающий берстовый аттрактор (рисунок 17 в), видно, этот ток также локально изменяет быструю

нулевую линию, и это позволяет сосуществовать исходному разрывному аттрактору с устойчивым равновесием.

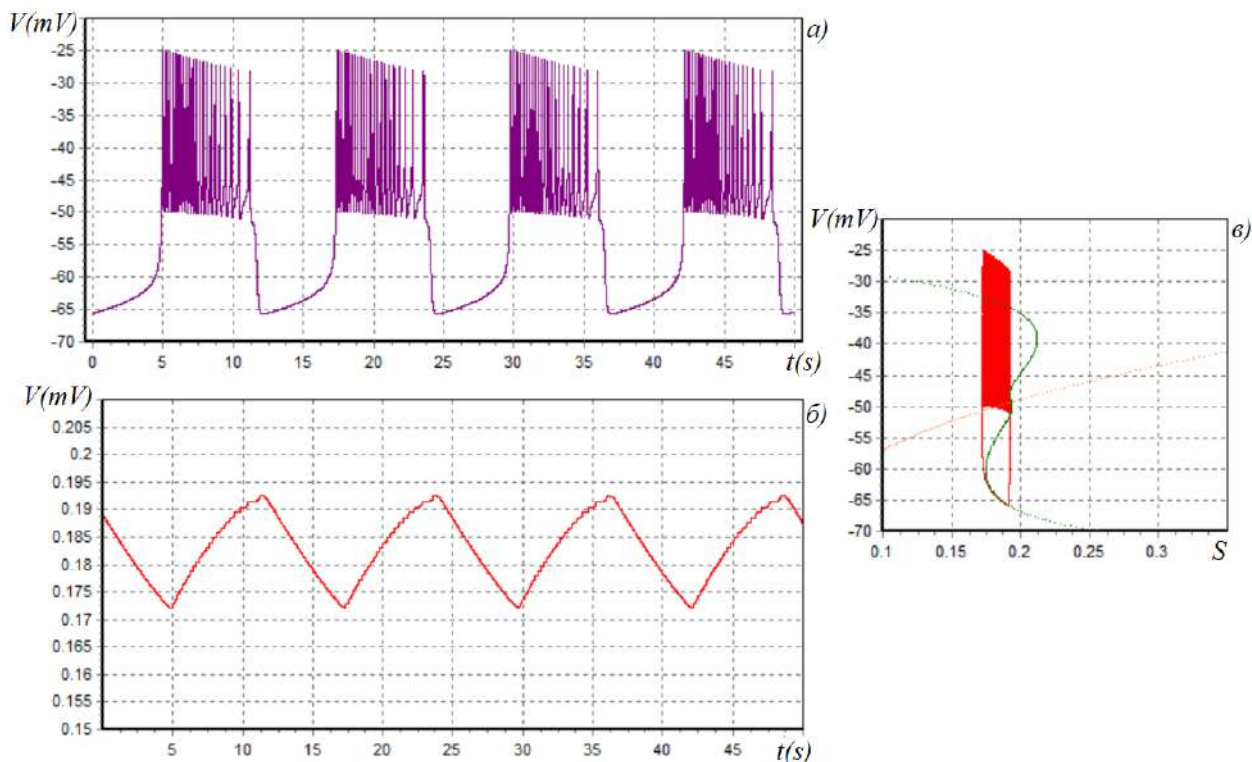


Рисунок 17 – Временные ряды быстрой (фиолетовое) и медленной (красное) переменных; в) быстрое (зеленое) и медленное (оранжевое) многообразие вместе с двумерной проекцией фазового портрета для модели (18) при $g_{K3} = 0.08$, $V_q = -49$ мВ, $\theta_q = 1$ мВ

Теперь построим карту динамических режимов для модели (19), также как это было сделано для предыдущих моделей. В качестве основных параметров мы выбираем параметры нового ионного канала: g_{K3} и V_q . Период колебаний определялся сечением Пуанкаре плоскостью с разными значениями: $n = 0.02$ для рисунка 18 а, $n = 0.002$ для рисунка 18 б. В соответствии с периодом мы окрашиваем точки в разные, указанные на палитре (рисунок 18). Если период превышает 120, то делаем вывод о нерегулярности режима и окрашиваем точки в серый цвет. Области точки

устойчивого равновесия обозначались розовым цветом. На рисунке 18 вместе с графиком нанесена линия бифуркации Андронова-Хопфа, полученная с помощью программного пакета XPP AUT, которая соответствует стабилизации точки равновесия при увеличении параметра g_{k3} .

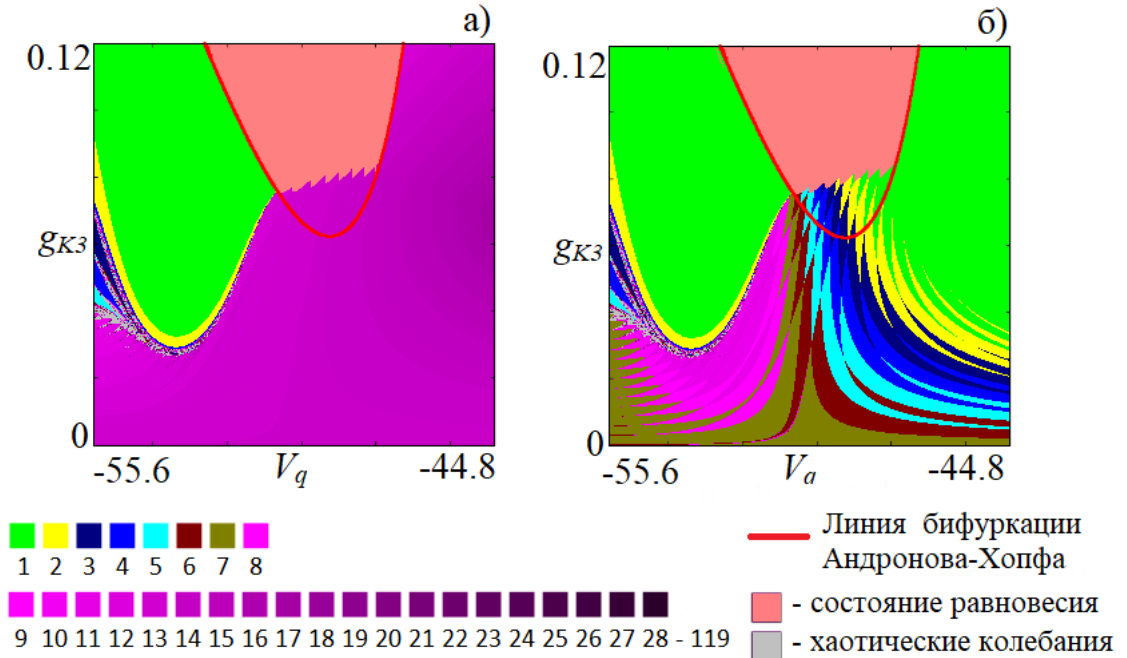


Рисунок 18 – Диаграмма динамических режимов для модели с дополнительным ионным каналом, характеризующимся монотонной функцией вероятности, (18) с (16). Для каждой точки период колебаний определялся с помощью сечения Пуанкаре плоскостью а) $n = 0.02$, б) $n = 0.002$

При малых значениях параметра g_{k3} точка равновесия неустойчива и модель (19) демонстрирует периодические колебания. С увеличением параметра можно пересечь линию бифуркации Андронова-Хопфа, и точка равновесия стабилизируется. Выше этой линии существует устойчивая точка равновесия, и область с этим режимом окрашена в розовый цвет. На графике мы можем обнаружить область выше линии бифуркации Андронова-Хопфа, где наблюдаются автоколебания, эта область соответствует области

мультистабильности. Для верхней границы области бистабильности определяем интервал параметра V_q , в котором наблюдается бистабильность: $[-50.72 - -47.87]$. Для понимания механизма возникновения мультистабильности проанализируем однопараметрические бифуркационные диаграммы, полученные с помощью XPP AUT, которые представлены на рисунке 19. Красной и черной линиями показаны точки устойчивого и неустойчивого равновесия, синим цветом обозначены максимальное и минимальное значения седлового предельного цикла, а зеленым устойчивые состояние равновесия.

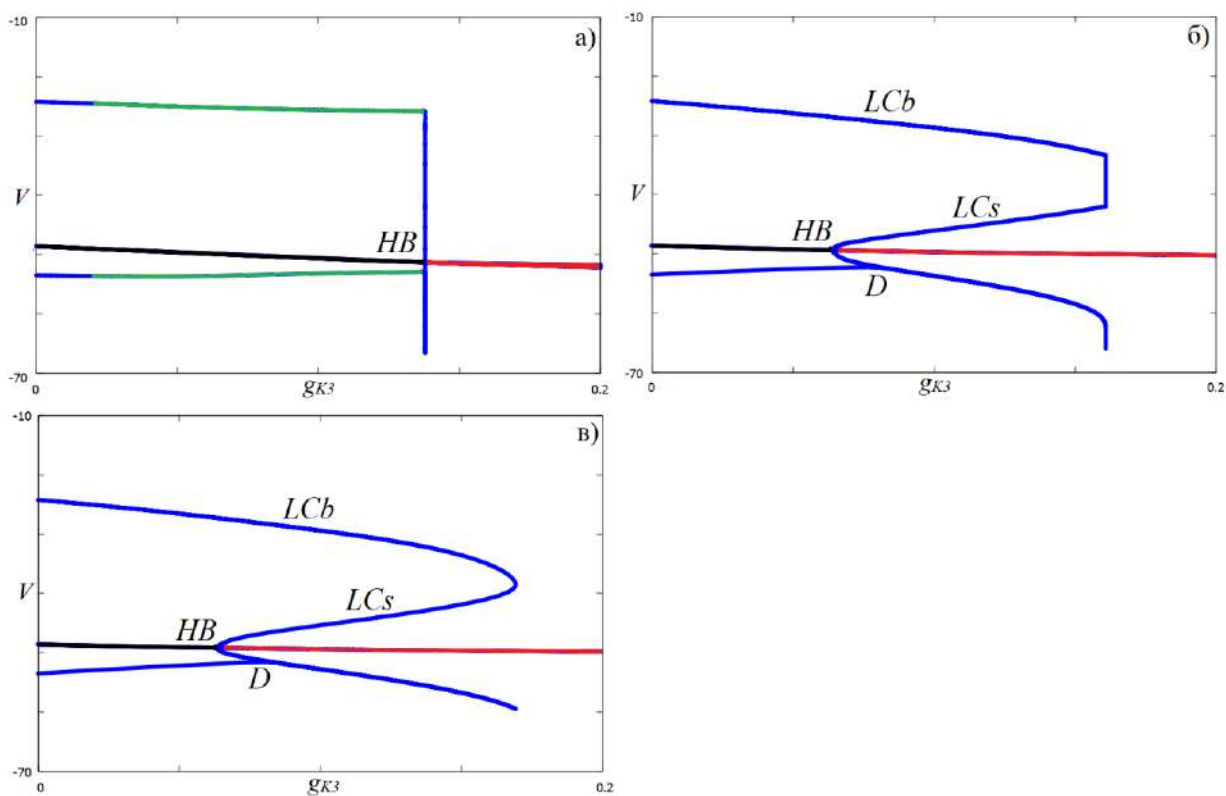


Рисунок 19 – Бифуркационные диаграммы для $\theta_q = 1$ мВ: а) $V_q = -53.3$ мВ, б) $V_q = -49.7$ мВ, в) $V_q = -48.9$ мВ

Как видно, на рисунке 19 а) при больших значениях параметра $g_{к3}$ состояние равновесия устойчиво, а с уменьшением параметра $g_{к3}$ происходит его потеря устойчивости и в результате жесткой суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл, с

которым при дальнейшем уменьшении параметра происходит каскад бифуркаций удвоения периода. Для данного значения параметра V_q не возникает мультистабильности.

На рисунке 19 б,в) в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается седловой предельный цикл LCs. Этот седловой цикл определяет границу бассейна притяжения точки устойчивого равновесия. С увеличением параметра g_{k3} амплитуда цикла растет, и он сливается с другим предельным циклом LCб. Этот цикл образует берстовый аттрактор. Точка D соответствует пересечению циклов LCs и LCб, она видна на диаграмме и определяет границу мультистабильности. Дальнейшее увеличение параметра g_{k3} приводит к разрушению берстового аттрактора через граничный кризис при столкновении берстового аттрактора с седловым циклом LCs.

На рисунке 20 представлены графики попадания в состояние равновесия, где вероятность посчитана также как для модели (16). Также разными цветами на них нанесены типы устойчивости. Вероятностные характеристики построены для разные значений V_q и соответствуют результату, полученному на картах динамических режимов.

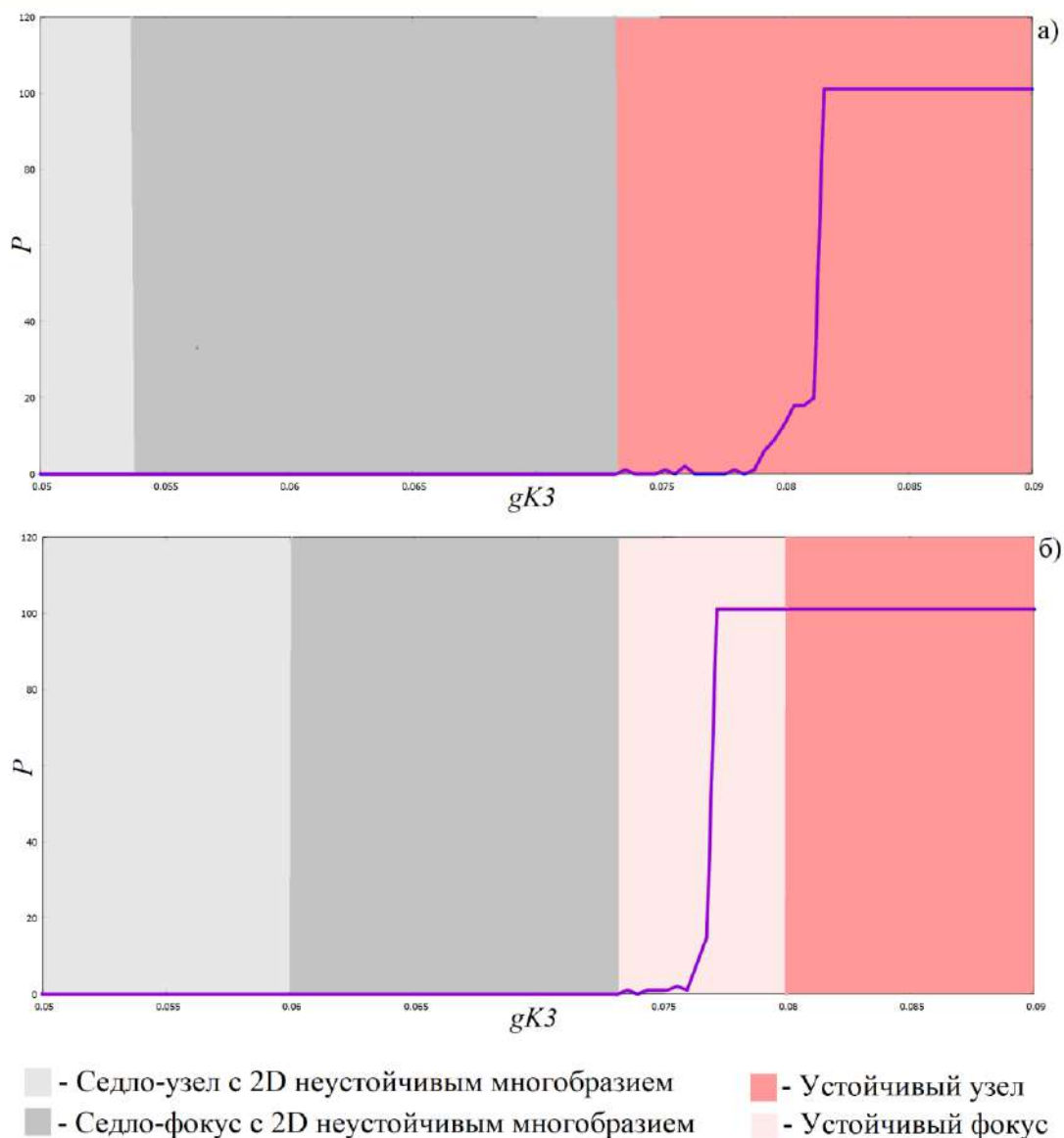


Рисунок 20 – Вероятностные характеристики а) $V_q = -49$ мВ, б) $V_q = -50$ мВ

2.2 Модель, учитывающая ионные каналы, характеризующиеся монотонной и немонотонной функцией вероятности

Наконец, мы рассмотрим модификацию, которая учитывает оба типа новых ионных каналов. Мы зафиксировали параметры V_p , V_q и θ_p , θ_q такими же, как для модели (16) и (19), соответственно, и варьируем параметры g_{K2} и g_{K3} . Таким образом, модифицированная модель будет, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\tau \dot{V} &= -I_{Ca}(V) - I_K(V, n) - I_{K2}(V) - I_{K3}(V) - I_S(V, S), \\
\tau \dot{n} &= \sigma(n_\infty(V) - n), \\
\tau_s \dot{S} &= S_\infty(V) - S.
\end{aligned}
\tag{20}$$

Все члены, которые мы используем для модификации исходной модели, влияют на быстрое многообразие в модели и могут быть просуммированы. На рисунке 21 представлена сумма токов, где видно, что общий ток изменяется в зависимости от модификаций.

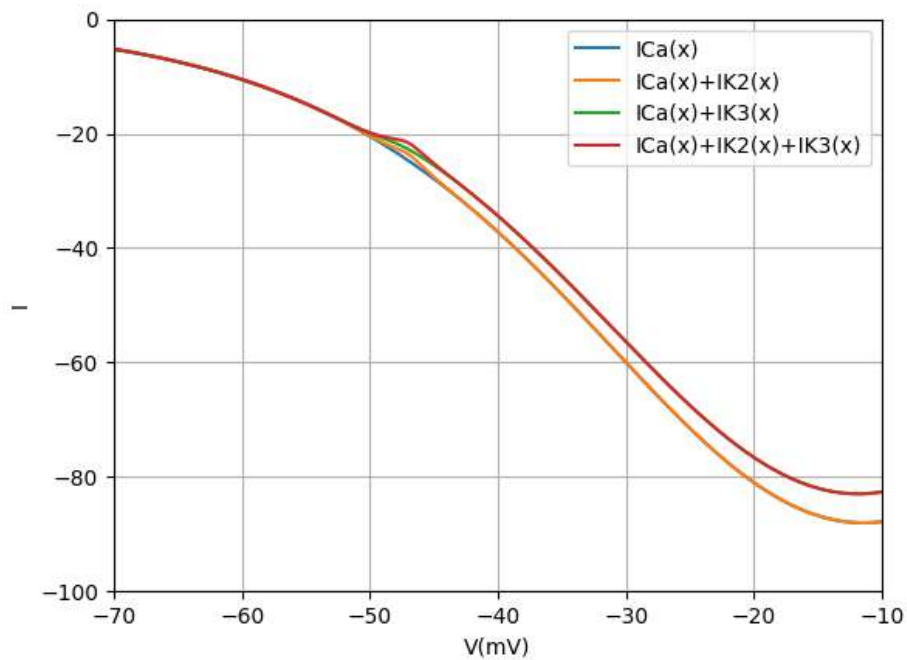


Рисунок 21 –Зависимость тока от напряжения для кальциевого и двух новых калиевых ионных каналов

Первая модификация (ток I_{K2}) локально изменяет исходный ток вблизи напряжения V_p . Вторая модификация (ток I_{K3}) произвела небольшой сдвиг тока и общее увеличение суммарных токов. Ток с обоими модифицированными ионными каналами имеет сдвиг с увеличением общего тока и локальным изменением вблизи V_p .

Перейдем к численному моделированию системы (20), на рисунке 22 представлены временные реализации быстрого многообразия (рисунок 22а) и медленного многообразия (рисунок 22б) модели. Для этой модели также были построены нульклины, а также нанесен возникающий берстовый аттрактор (рисунок 22в), видно, что при добавлении второго дополнительного тока возникает дополнительный перегиб быстрой нульклины, при этом изменении бистабильность в системе согреется.

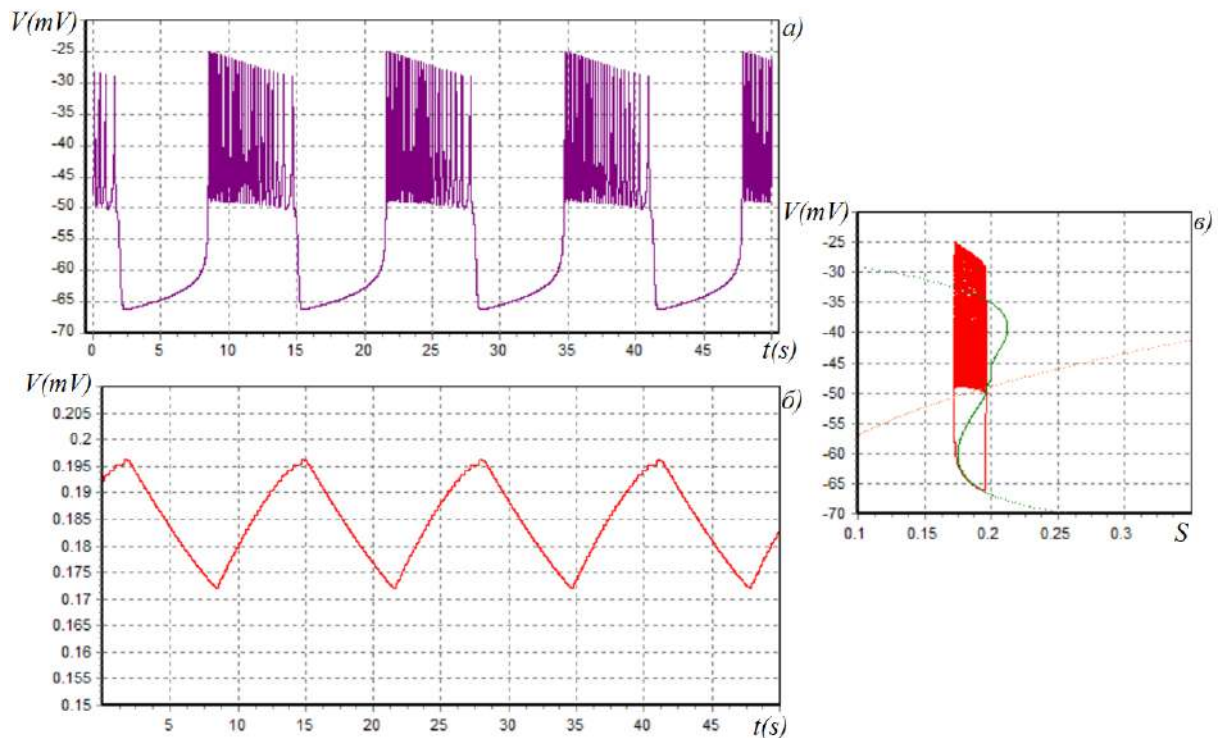


Рисунок 22 – Временные ряды быстрой (фиолетовое) и медленной (красное) переменных; в) быстрое (зеленое) и медленное (оранжевое) многообразие вместе с двумерной проекцией фазового портрета для модели (19) при $g_{K3} = 0.03$, $V_q = -49$ мВ, $\theta_q = 1$ мВ, $g_{K2} = 0.08$, $V_p = -47$ мВ, $\theta_p = 1$ мВ

Таким образом, оба типа ионных каналов с немонотонной и монотонной функцией вероятности открытия могут приводить к бистабильности и демонстрировать ее. Можно учесть оба типа каналов в одной модели как сумму I_{K2} и I_{K3} . Зафиксируем параметры V_p , θ_p и V_q , θ_q ,

соответствующие бистабильности: $V_p = -47$ мВ, $\theta_p = 1$ мВ, $V_q = -49$ мВ, $\theta_q = 1$ мВ. На рисунке 24 представлен график динамических режимов для данной модификации, построенный в плоскости параметров g_{k2} и g_{k3} новой модели. Период колебаний определялся сечением Пуанкаре плоскостью с разными значениями: $n = 0.02$ для рисунка 23 а), $n = 0.002$ для рисунка 23 б). В соответствии с периодом мы окрашиваем точки в разные, указанные на палитре (рисунок 23). Также на графике можно найти линию бифуркации Андронова-Хопфа. Как видно, учет обоих типов ионных каналов приводит к формированию бистабильности. Дополнительные каналы приводят к снижению порога стабилизации по параметрам. В качестве осцилляторного динамического режима можно получить берсты с различным числом спайков.

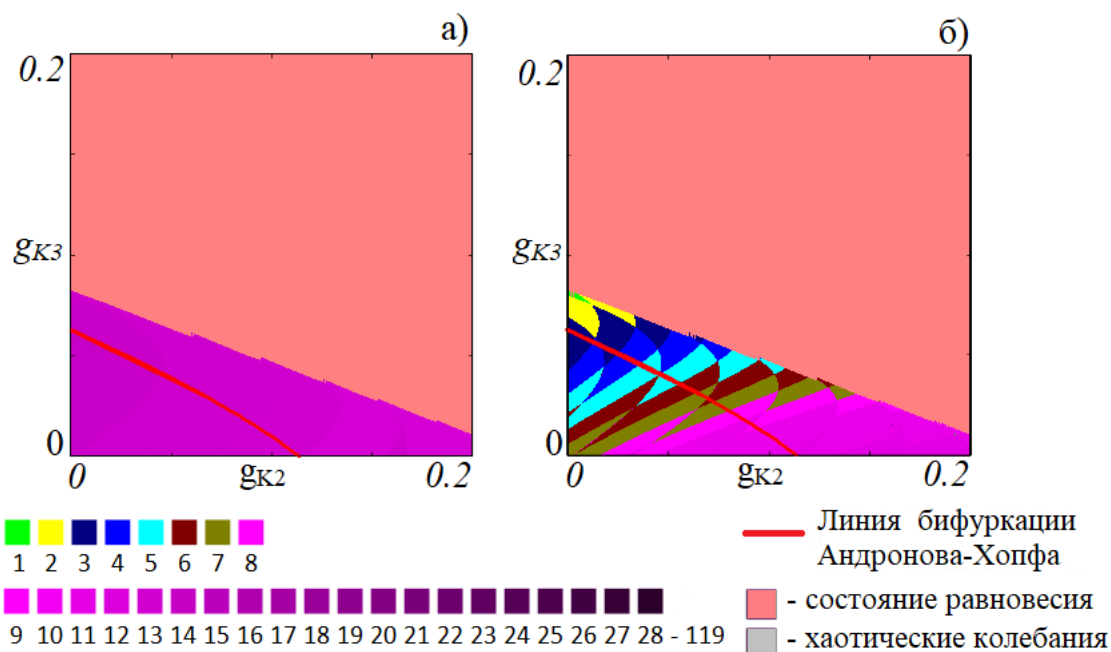


Рисунок 23 – Диаграмма динамических режимов для модели с обоими дополнительными ионными каналами, характеризующимися немонотонной и монотонной функцией вероятности, $V_p = -47$ мВ, $\theta_p = 1$ мВ, $V_q = -49$ мВ, $\theta_q = 1$ мВ. Для каждой точки период колебаний определялся с помощью сечения Пуанкаре плоскостью а) $n=0.02$, б) $n=0.002$

Теперь построим карту динамических режимов в плоскости параметров модели с немонотонной характеристикой ионного канала: g_{K2} и V_p . Данная карта была построена также как и карта, представленная на рисунке 25. Период колебаний определялся сечением Пуанкаре плоскостью с разными значениями: $n = 0.02$ для рисунка 25а, $n = 0.002$ для рисунка 25б. В соответствии с периодом мы окрашиваем точки в разные, указанные на палитре (рисунок 25). Если провести сравнительный анализ с картой в той же плоскости параметров, но без дополнительного калиевого тока с монотонной функцией вероятности, представленной на рисунке 13, можно увидеть, что область бистабильности для новой модели уменьшилась.

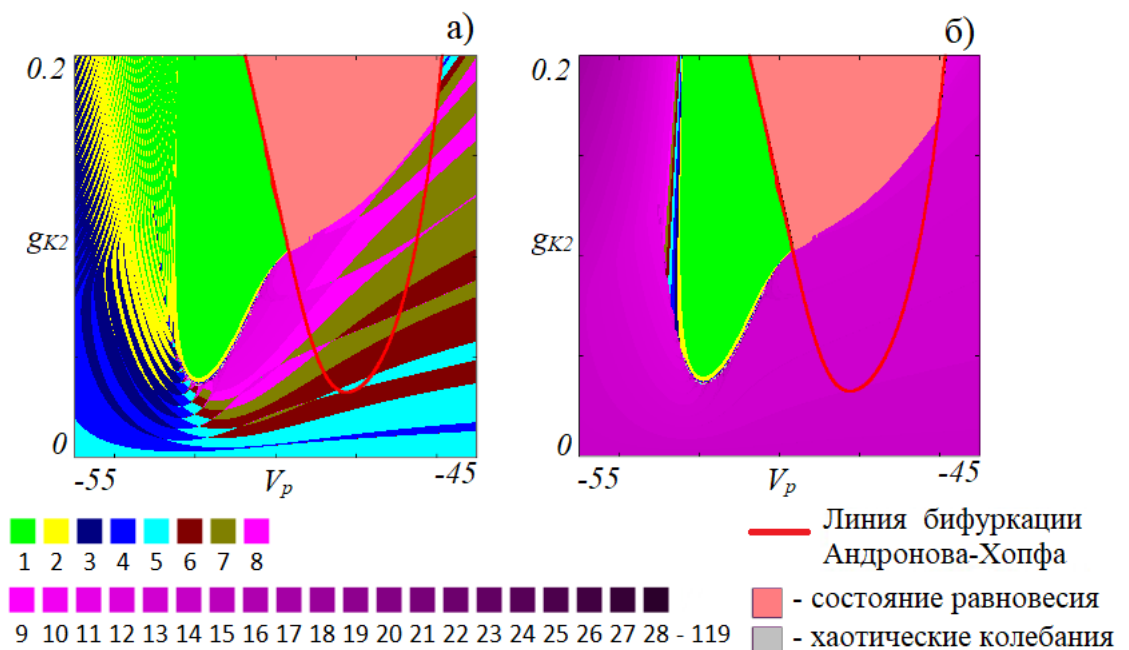


Рисунок 25 – Диаграмма динамических режимов для модели с обоими дополнительными ионными каналами, характеризующимися немонотонной и монотонной функцией вероятности, $g_{K3} = 0.03$, $V_q = -49$ мВ, $\theta_q = 1$ мВ. Для каждой точки период колебаний определялся с помощью сечения Пуанкаре плоскостью а) $n=0.02$, б) $n=0.002$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной работы были проведены исследования семейства моделей на основе формализма Ходжкина-Хаксли. Ранее предложенные модели Ходжкина-Хаксли демонстрировали бистабильность только в случае, когда число измерений составляло четыре, в то время как в трехмерных моделях эта характеристика отсутствовала. В данной работе было проведено анализ типичного динамического поведения новых трехмерных моделей, а также выявлены области бистабильности. Также были исследованы механизмы возникновения бистабильности в этих новых моделях. Для этого были написаны программы на языке Python, реализующие построение временных реализаций, функций вероятности открытия, карт динамических режимов и вероятностных характеристик.

Полученные результаты подтверждают, что использование дополнительных ионных каналов с различными характеристиками может быть эффективным инструментом для создания моделей, демонстрирующих сложное динамическое поведение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1) Hodgkin, A., Huxley A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. Vol. 117. P. 500-544.
- 2) Hodgkin A. L., Huxley A. F. Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of loligo // The Journal of physiology. 1952. V. 116. P. 449–472.
- 3) Izhikevich E. M. Dynamical systems in neuroscience // MIT press. 2007. P. 443.
- 4) Simms B. A., Zamponi G. W. Neuronal voltage-gated calcium channels: Structure, function, and dysfunction // Neuron 2014. V. 82 №1. P. 24-45.
- 5) Ozturk N., Uslu S., Ozdemir S. Diabetes-induced changes in cardiac voltage-gated ion channels // World Journal of Diabetes. 2021. V. 12. №1. P. 1-18.
- 6) Roger S., Gillet L., Guennec J.Y. Le, Besson P. Voltage-gated sodium channels and cancer: is excitability their primary role? // Frontiers in pharmacology. 2015. V. 6. P. 152.
- 7) Osvaldo A., Carlos G., Ramon L. Counting channels: a tutorial guide on ion channel fluctuation analysis // Advances in physiology education. 2002. V. 26. №4. P. 327-341.
- 8) Pisarchik A.N., Hramov A.E. Multistability in physical and living systems: characterization and applications // Springer Nature. 2022.
- 9) Malashchenko T., Shilnikov A., Cymbalyuk G. Six types of multistability in a neuronal model based on slow calcium current // PloS One. 2011. V. 6. №7.
- 10) Frolov N., Rakshit S., Maksimenko V., Kirsanov D., Ghosh D., Hramov A. // Coexistence of interdependence and competition in adaptive multilayer network // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. V. 147. №110955.

- 11) Rozhnova M., Pankratova E.V., Stasenko S.V., Kazantsev V.B. Bifurcation analysis of multistability and oscillation emergence in a model of brain extracellular matrix // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. V. 151. №111253.
- 12) Sherman A., Rinzel J., Keizer J., Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing // *Biophys. J.* 1988. V. 54. №3. P. 411–425.
- 13) Chay T. R., Keizer J. Minimal model for membrane oscillations in the pancreatic beta-cell // *Biophys. J.* 1983. V. 42. №2. P. 181–189.
- 14) Heart E., Smith P. J. Rhythm of the b-cell oscillator is not governed by a single regulator: Multiple systems contribute to oscillatory behavior // *Am. J. Physiol.-Endocrinol. Metab.* 2007. V. 292. №5. P. E1295–E1300.
- 15) Cymbalyuk G.S., Gaudry Q., Masino M.A., Calabrese R.L. Bursting in Leech Heart Interneurons: Cell-Autonomous and Network-Based Mechanisms // *J. Neuroscience*. 2002. V. 22. №24. P. 10580-10592.
- 16) Cymbalyuk G.S., Calabrese R.L. A model of slow plateau-like oscillations based upon the fast Na⁺ current in a window mode // *Neurocomputing*. 2001. V. 159. P. 38-40.
- 17) Hughes S.W., Cope D.W., Tóth T.I., Williams S.R., Crunelli V. All thalamocortical neurones possess a T-type Ca²⁺ “window” current that enables the expression of bistability-mediated // *J Physiol*. 1999. V. 517. P. 805-815.
- 18) Hill A., Lu J., Masino M., Olsen O., Calabrese RL. A Model of a Segmental Oscillator in the Leech Heartbeat Neuronal Network // *J Comp Neurosci*. 2001. V. 10. P. 281–302.
- 19) Olypher A., Cymbalyuk G., Calabrese R.L. Hybrid systems analysis of the control of burst duration by low-voltage-activated calcium current in leech heart interneurons // *J Neurophysiol*. 2006. V. 96. P. 2857–2867.

- 20) Shilnikov A., Cymbalyuk G. Transition between Tonic Spiking and Bursting in a Neuron Model via the Blue-Sky Catastrophe // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 94. №048101.
- 21) Hill A., Lu J., Masino M., Olsen O., Calabrese R.L. A Model of a Segmental Oscillator in the Leech Heartbeat Neuronal Network // *Comput J. Neuroscience* 2001. V. 10. P. 281-302.
- 22) Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. V. 117. P. 500-544.
- 23) Opdyke C.A., Calabrese R.L., A persistent sodium current contributes to oscillatory activity in heart interneurons of the medicinal leech // *J. Comp. Physiol.* 1994. V. 175. P. 781-789.
- 24) Stankevich N., Mosekilde E. Coexistence between silent and bursting states in a biophysical Hodgkin-Huxley-type of model // *Chaos.* 2017. V. 27. №123101. P. 12.
- 25) Simms B. A., Zamponi G. W. Neuronal voltage-gated calcium channels: Structure, function, and dysfunction // *Neuron* 2014. V. 82 №1. P. 24-45.
- 26) Smolen P., Rinzel J., Sherman A. Why pancreatic islets burst but single beta cells do not. The heterogeneity hypothesis // *Biophys. J.* 1993. V. 64 №6 P. 1668–1680.
- 27) Gylfe E., Grapengiesser E., Hellman B. Propagation of cytoplasmic Ca²⁺ oscillations in clusters of pancreatic b-cells exposed to glucose // *Cell Calcium* 1991. V. 12 №2-3. P. 229–240.

Публикации по ВКР

1. Bagautdinova E., Kuznetsov S., Seleznev E., Stankevich N. Circuit Simulation of a Blue Sky Catastrophe in the Context of Bursting Dynamics Occurrence // 2019 3rd School on Dynamics of Complex Networks and their

Application in Intellectual Robotics. 2019. P. 21-24. DOI: 10.1109/DCNAIR.2019.8875571.

2. Багаутдинова Э.Р. Схемотехническое моделирование системы с бифуркацией катастрофы голубого неба / Э.Р. Багаутдинова, С.П. Кузнецов, Е.П. Селезнев, Н.В. Станкевич // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XIV Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Издательство «Техно-Декор», 2019. – С. 18-19.

3. Багаутдинова Э.Р. Гиперболический хаос, возникающий в результате катастрофы голубого неба: схемотехническое моделирование / Э.Р. Багаутдинова, С.П. Кузнецов, Е.П. Селезнев, Н.В. Станкевич // «Нелинейные волны – 2020»: сборник трудов XIX научной школы. – Нижний Новгород: Издательство Института прикладной физики РАН, 2020. – С. 42-44.

4. Багаутдинова Э.Р. Бистабильность в модели нейрона с немонотонной характеристикой ионного канала / Э.Р. Багаутдинова, Н.В. Станкевич // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XV Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Издательство «Техно-Декор», 2020. – С. 23-24.

5. Bagautdinova E. R., Stankevich N. V. Bistability in a Hodgkin-Huxley-type of model with a communication defect // Book of abstracts international conference «Topological Methods in Dynamics and Related Topics». 2020. P. 10.

6. Bagautdinova E. R., Stankevich N. V. Structure of parameter planes for Hodgkin-Huxley type of model, bifurcation mechanism of bistability emergency // Book of Abstracts Student Educational School-Conference «Mathematical Spring 2021 Invitation to Dynamical Systems», 2021. P. 10.

7. Багаутдинова Э.Р., Станкевич Н.В. Анализ пространства параметров моделей панкреатических бета-клеток типа Ходжкина-

Хаксли / Э.Р. Багаутдинова, Н.В. Станкевич // «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2021»: сборник трудов XV Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 2021. – С. 90-91.

8. Багаутдинова Э.Р. Мультистабильность как патологическое поведение нейронных клеток / Э.Р. Багаутдинова, Н.В. Станкевич // «Нейронаука для медицины и психологии»: сборник трудов XVII Международного междисциплинарного конгресса. – Москва: Издательство «МАКС Пресс», 2021. – С. 68-69.

9. Багаутдинова Э.Р. Гиперболический хаос, возникающий в результате катастрофы голубого неба, в радиофизическом эксперименте / Э.Р. Багаутдинова, Е.П. Селезнев, Н.В. Станкевич // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XVI Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Издательство «Техно-Декор», 2021. – С. 6-7.

10. Bagautdinova E.R., Stankevich N.V. The simplest neuron models with bistability occurring as a result of accounting new ion channels // VI Scientific School «Dynamics of Complex Networks and their Applications». 2022. P. 270-273. DOI: 10.1109/DCNA56428.2022.9923176.

11. Багаутдинова Э.Р. Особенности построения отображения для фаз в численном эксперименте и по временному ряду для системы с гиперболическим хаосом. / Э.Р. Багаутдинова, П.В. Купцов, В.И. Пономаренко, Н.В. Станкевич // Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XVII Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Издательство «Техно-Декор», 2022. с. 21-23.

12. Bagautdinova E.R., Shchegoleva N.A., Stankevich N.V. Family of neuron models with bistability between bursting attractor and stable steady state // Book of Abstracts Shilnikov Workshop. 2022. P. 5-6.

13. Kuptsov P. V., Stankevich N. V., Bagautdinova E. R. Discovering dynamical features of Hodgkin–Huxley-type model of physiological neuron using artificial neural network // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2023. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.113027.

Приложение
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Габдрахманова Роберта Ильгизовича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Бифуркации в модели Лэнгфорда» являются: Формулировка Теоремы 3, доказательство Теоремы 3, нахождение первого интеграла системы (3.2.2)

- Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:


- В период с 15 сентября 2021 по 20 февраля 2022 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org, Sci-hub по следующим ключевым словам: Attractors of Langford system, dynamics of Langford system, generalized Hopf-Langford system, bifurcations in the Langford system, Torus birth bifurcation in the Langford system, chaos in the Langford system; в выдаче поисковиков было исследовано 13 статей, 3 монографий, 1 диссертация (см. Список литературы выпускной квалификационной работы) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Юмагуловым Маратом Гаязовичом, д.ф.-м.н., профессор, зав кафедрой дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Уфимского Университета Науки и Технологий.

- Проведено выступление на семинаре факультета математики и информационных технологий Уфимского Университета Науки и Технологий. Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 06.06.2022. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.

Подпись  Габдрахманов Роберт Ильгизович

30.05.2023
г. Уфа, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ПО ПРОГРАММЕ МАГИСТРАТУРЫ

ГАБДРАХМАНОВ РОБЕРТ ИЛЬГИЗОВИЧ

БИФУРКАЦИИ В МОДЕЛИ ЛЭНГФОРДА

Выполнил:
Студент(ка) 2 курса очной формы
обучения
Направления подготовки
01.04.01 «Математика»
Направленность
(профиль) Вещественный, комплексный и
функциональный анализ

Допущено к защите ГЭК и проверено на
объем заимствования:

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
(ученая степень, ученое звание)

Руководитель
д.ф.-м.н., профессор
(ученая степень, ученое звание)

_____/ З.Ю.Фазуллин
(подпись)

_____/ М.Г.Юмагулов
(подпись)

«__» _____ 20__ г.

УФА-2022

Содержание

Введение	3
1 Вспомогательные сведения из теории бифуркаций динамических систем	6
1.1 Понятие точки бифуркации	8
1.2 Бифуркации кратного равновесия	12
1.3 Бифуркация Андронова-Хопфа	17
1.4 Бифуркации периодических орбит.....	22
2 Модель Лэнгфорда	25
2.1 Точки равновесия и анализ их устойчивости	25
2.2 Анализ бифуркаций в точках равновесия	26
3 Периодические орбиты и их бифуркации в модели Лэнгфорда.....	30
3.1 Возникновение периодических орбит.....	30
3.2 Бифуркации в окрестности периодического решения	34
4 Дальнейшее исследование динамики системы Лэнгфорда.....	39
4.1 Существование гетероклинических орбит	39
4.2 Эквивалентность системы Лэнгфорда осциллятору Дуффинга	42
Заключение	45
Список литературы	46

Введение

В качественной теории дифференциальных уравнений, в теории динамических систем важное место занимают задачи исследования нелинейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего порядка

$$x' = f(x), x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3,$$

где $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T \in C^\infty(R^3)$. Здесь интересными представляются задачи о точках равновесия, периодических орбитах, аттракторах, о хаотической динамике и др. Исследование сложной динамики трехмерных динамических систем является важной темой не только в теории, но в многочисленных приложениях, например, в таких областях как защищенная связь, нелинейные схемы, управление и синхронизация, биологические сети и др.

Хорошо известно, что точки равновесия и периодические орбиты являются двумя основными компонентами нелинейной динамики. Как правило, трудно полностью проанализировать данную нелинейную динамическую систему, даже если она относится к локальной динамике при классификации точек равновесия в трехмерной квадратичной системе. Однако, анализ точек равновесия имеет большое значение, потому что изменение параметров или устойчивости равновесий может привести к появлению различных бифуркаций динамических систем. Множество интересных явлений динамики можно обнаружить при бифуркациях во многих видах динамических систем, таких как возникновение периодических орбит, гомоклинических орбит, гетероклинических орбит, инвариантных торов и хаоса. При исследовании трехмерных автономных динамических систем очень интересно охарактеризовать траектории с различными типами, существующими одновременно в системе, такие как периодические орбиты и гетероклинические орбиты, периодические орбиты и квазипериодические орбиты. Исследований полной динамики трехмерных динамических системы довольно мало, главным

образом потому, что их строгое доказательство является сложным. До сих пор определение количества и расположения конечных циклов по-прежнему является сложной задачей, даже для плоских полиномиальных систем, что относится к знаменитой шестнадцатой задаче Гильберта. Более того, локальная и глобальная динамика трехмерных систем, т.е. периодические орбиты и гомоклинические/гетероклинические орбиты трудно проанализировать полностью, даже если это относится к конкретной трехмерной квадратичной системе.

В этой работе будет рассматриваться система Лэнгфорда, которая была предложена Лэнгфордом (в личном общении с коллегами) [13]. Модель Лэнгфорда была получена путем усечения бесконечной систем обыкновенных дифференциальных уравнений, первоначально предложенной Э.Хопфом [14] в качестве возможной модели гидродинамической турбулентности. Модель Лэнгфорда представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка. Эта модель обладает богатым бифуркационным поведением.

Исследованию модели Лэнгфорда посвящены многочисленные работы. В частности, Хэссардом и др. [13] были изучены устойчивость точек равновесия и циклов, возникающих вследствие бифуркации Хопфа; также они построили глобальную бифуркационную диаграмму. Николов и др. [19] сформулировали конкретное выражение для ляпуновской величины и впервые вывели решение, которое ведет к хаосу. Крищенко и др. [16] определили локализацию инвариантных множеств, используя итеративный алгоритм. Белозеров [11] доказал, что модель Лэнгфорда имеет динамику, приводящую к хаосу, построив экспоненциально-алгебраическое дискретное изображение.

Цель настоящей работы – исследовать бифуркационное поведение модели Лэнгфорда.

Основными задачами работы являются:

- установление того факта, что бифуркация в окрестности периодического решения системы Лэнгфорда приводит к сценарию бифуркации рождения двумерного тора;

- доказать существование гетероклинических орбит;

- показать эквивалентность системы Лэнгфорда одномерному осциллятору Дуффинга [10], а также то, что ее можно представить как систему Гамильтона.

1 Вспомогательные сведения из теории бифуркаций динамических систем

В этой главе будут приведены сведения из теории бифуркации динамических систем [9].

Понятие устойчивости функционирования динамической системы по отношению к любым малым гладким возмущениям определяется как *структурная устойчивость*. Параметры системы, внешние или внутренние, при возмущении могут претерпевать изменения. В этой связи важен анализ структурной устойчивости по отношению к малым возмущениям.

Возмущения систем приводят к двум принципиально разным сценариям развития событий. В первом случае малые возмущения параметров не оказывают большого влияния на исходную систему, то есть процесс происходит без кардинальных изменений. В данном случае понятие структурной устойчивости системы применимо положительно. Если говорить о топологии фазового портрета структурной устойчивой системы, то она не меняется при малых возмущениях.

Второй случай, который влечет за собой кардинальные изменения поведения динамики системы при малых изменениях, представляет гораздо больший интерес. Здесь возможна ситуация, когда точка равновесия может возникнуть или исчезнуть, меняется характер устойчивости ограниченных или периодических решений периодические или ограниченные решения, и т.д. В данном случае система структурна неустойчива по отношению к малым изменениям параметров. Критические значения параметров, при которых происходит кардинальное изменение, называют точками бифуркации динамической системы или также их называют *бифуркационными* значениями. А под *бифуркацией* динамической системы понимают как качественное изменение или перестройка поведения системы.

Как с практической, так и с теоретической точки зрения задачи о бифуркациях в динамических системах представляют большой интерес.

Явление бифуркации является часто встречающимся. Данным явлением объясняется возникновение новых устойчивых форм равновесия в изучении задач оболочек и стержней, подверженных изгибу, возникновение автоколебаний в генераторе Ван-дер-Поля и других технических конструкций, колебание скорости в потоке жидкости и др.

Теория бифуркаций динамических систем имеет богатую историю, восходящую к работам Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, К. Якоби.

Описывая реальные процессы, создаются динамические системы как модели этих процессов. Однако, описывающие поведение системы соотношения обычно известны только с той или иной степенью точности, поэтому эти динамические системы должны обладать определенными свойствами устойчивости. Таким образом, важно знать, как динамика системы меняется при малых возмущениях системы.

Для описания свойства «устойчивости» функционирования динамической системы по отношению к малым ее возмущениям А. А. Андроном и Л.С. Понтрягиным было предложено понятие структурной устойчивости (грубости).

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in R^N, \quad (1.1)$$

где $f(x)$ - функция, определенная и гладкая (непрерывно дифференцируемая) в R^N . Предполагается, что для любого x_0 задача Коши $x' = f(x), x(0) = x_0$, имеет единственное решение $x(t)$, определенное при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Пусть $D \subset R^N$ – некоторая компактная область.

Для положительного числа ε назовем ε -возмущением системы (3) в области D любую систему вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + h(x), \quad (1.2)$$

в которой $h(x)$ – функция, определенная и гладкая в R^N , при этом

$$\max_{x \in D} \|h(x)\| < \varepsilon, \quad \max_{x \in D} \|h'(x)\| < \varepsilon,$$

где $h'(x)$ – матрица Якоби вектор-функции $h(x)$, а $\|\cdot\|$ - евклидова норма векторов.

ε -возмущения системы (1.1) - это малые гладкие возмущения этой системы. Они получаются при добавлении в правую часть системы (1.1) произвольных функций $h(x)$ при условии, что эти функции и их производные малы.

Систему (1.1) называют *грубой или структурно устойчивой* в области D , если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ все ε -возмущения (1.2) топологически эквивалентны системе (1.1) на D . В противном случае систему (1.1) называют *негрубой или структурно неустойчивой* в области D .

На практике обычно используют тот факт, что на топологически эквивалентных фазовых портретах число неподвижных точек и периодических решений одинаково, одинаково их взаимное расположение, совпадают их топологические типы и т. п. Поэтому можно говорить, что система (1.1) структурно устойчива, если при малых гладких возмущениях ее фазовый портрет качественно не изменяется.

1.1 Понятие точки бифуркации

Бифуркационные значения - это такие значения параметров, при которых система теряет свою структурную устойчивость, также такие значения параметров можно определить как точки бифуркации. Иначе говоря, значения параметров, при переходе через которые происходит качественное изменение, перестройка фазового портрета исходной системы будут точками бифуркации.

Если мы имеем дело с непрерывной динамической системой, описываемой уравнением (1.1.1), и зависящей от параметра μ , то понятие точки бифуркации будет сформулировано как в определении 1.

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad (1.1.1)$$

где функция $f(x, \mu)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных.

Определение 1. Говорят, что значение $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации системы (1.1.1), если эта система при $\mu = \mu_0$ является структурно неустойчивой.

Так как потеря структурной устойчивости может происходить как локально, так и глобально, то соответствующие бифуркации называют локальными или глобальными.

Локальное изменение фазового портрета системы относят к локальным бифуркациям. В данном случае, бифуркации в малых окрестностях периодических решений или точек равновесия являются наиболее распространенными.

Бифуркации в окрестностях сепаратрис относят к глобальным (нелокальным) бифуркациям. То есть, здесь происходит изменение фазового портрета системы не локально, вследствие глобальных бифуркаций.

Рассмотрим сначала задачу о локальных бифуркациях в непрерывной динамической системе, зависящей от параметра μ и описываемой уравнением (1.1.1)

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in R^N,$$

в котором функция $f(x, \mu)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных. Предполагается, что при любом $x_0 \in R^N$ задача Коши $x' = f(x, \mu)$, $x(0) = x_0$, имеет единственное решение $x = x(t, \mu)$, определенное при всех $t \geq 0$. Далее предположим, что параметр в системе (1.1.1) является скалярным, при этом функция $f(x, \mu)$ определена при всех $\mu \in R^1$.

Рассмотрим задачи о локальных бифуркациях в окрестностях точек равновесия системы (1.1.1). Точки равновесия системы (1.1.1) – это решения уравнения

$$f(x, \mu) = 0. \tag{1.1.2}$$

Пусть система (1.1.1) при некотором значении параметра $\mu = \mu_0$ имеет точку равновесия $x = x^*$, т.е. $f(x^*, \mu) = 0$.

Теорема 1. Пусть матрица Якоби $f'_x(x^*, \mu_0)$ не имеет нулевого собственного значения. Тогда найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что уравнение (1.1.2) при $|\mu - \mu_0| < \delta_2$ имеет в шаре $\|x\| < \delta_1$ единственное решение $x = x^*(\mu)$, обладающее свойствами: а) $x^*(\mu_0) = x^*$; б) функция $x^*(\mu)$ является гладкой.

Точка равновесия $x = x^*$ системы (1.1.1) может быть гиперболической или негиперболической.

Гиперболический случай

Допустим, матрица Якоби $f'_x(x^*, \mu_0)$ не имеет собственных значений вида $\pm \omega i$, где $\omega \geq 0$, то есть точка равновесия x^* системы (1.1.1) при $\mu = \mu_0$ является гиперболической. Тогда теорема 1 гласит, что при каждом μ , близком к μ_0 , (1.1.1) имеет единственную точку равновесия $x^*(\mu)$, при этом $x^*(\mu)$ непрерывно дифференцируемо зависит от μ и выполнено равенство $x^*(\mu_0) = x^*$. Другими словами, система (1.1.1) имеет единственную непрерывную (и даже гладкую) ветвь точек равновесия $x = x^*(\mu)$, проходящую через точку x^* .

Следует отметить, что в рассматриваемом случае топологический тип точки равновесия $x^*(\mu)$ при всех μ , близких к μ_0 , будет одинаков. Для того чтобы убедиться в этом, положим $A(\mu) = f'_x(x^*(\mu), \mu)$, и $A_0 = A(\mu_0)$. Расположение собственных значений матрицы $A(\mu)$ на комплексной плоскости и определяет топологический тип точки равновесия $x^*(\mu)$ системы (1.1.1). Пусть топологический тип точки равновесия $x^* = x^*(\mu_0)$ равен $(k, N - k)$, где k - количество собственных значений матрицы A_0 , лежащих слева от мнимой оси, а $N - k$ - справа.

Так как функция $f(x, \mu)$ является непрерывно дифференцируемой, то матрица $A(\mu)$ непрерывно дифференцируемо зависит от μ в некоторой окрестности точки μ_0 . В соответствии с теорией возмущений линейных операторов собственные значения матрицы $A(\mu)$ непрерывно зависят от μ . Поэтому малые изменения параметра μ в окрестности значения μ_0 не могут

изменить топологический тип точки равновесия $x^*(\mu)$ системы (1.1.1): те k собственных значений матрицы A_0 , что лежат слева от мнимой оси, так и останутся слева при всех μ , близких к μ_0 , а те $N - k$, что справа, так и останутся справа.

Таким образом, в рассматриваемом гиперболическом случае топологический тип точки равновесия $x^*(\mu)$ системы (1.1.1) сохраняется при всех μ , близких к μ_0 : он равен $(k, N - k)$. В частности, точка равновесия $x^*(\mu)$ остается гиперболической.

Из этих соображений, а также из теоремы Гробмана – Хартмана следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть точка равновесия $x = x^*$ системы (1.1.1) при $\mu = \mu_0$ является гиперболической. Тогда система (1.1.1) при $\mu = \mu_0$ является структурно устойчивой в некоторой окрестности точки $x = x^*$.

Негиперболический случай

Таким образом, в соответствии с теоремой 2 значение $\mu = \mu_0$ может быть бифуркационным лишь в ситуации, когда точка равновесия x^* системы (1.1.1) при $\mu = \mu_0$ является негиперболической, т.е. матрица Якоби $A_0 = f'_x(x^*, \mu_0)$ имеет одно или несколько собственных значений вида $\pm\omega i$, где $\omega \geq 0$. Так как в этом случае система (1.1.1) будет структурно неустойчивой, то указанный факт соответствует приведенному общему определению 1 точки бифуркации, охватывающему как локальные, так и нелокальные бифуркации.

Здесь рассматриваются только локальные бифуркации в окрестности точки равновесия x^* системы (1.1.1). Поэтому имеет смысл привести определение и такой бифуркации (частный случай общего определения 1).

Определение 2. Значение μ_0 называют точкой бифуркации системы (1.1.1), если при $\mu = \mu_0$ точка равновесия $x = x^*$ является негиперболической. Другими словами, μ_0 называют точкой бифуркации, если матрица Якоби $A_0 = f'_x(x^*, \mu_0)$ имеет собственное значение вида $\pm\omega i$, где $\omega \geq 0$.

Для одномерной динамической системы

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in R^1 \quad (1.1.3)$$

понятие точки бифуркации вводится совсем просто. Пусть эта система при некотором $\mu = \mu_0$ имеет точку равновесия $x = x^*$, т.е. $f(x^*, \mu_0) = 0$. Тогда значение μ_0 является точкой бифуркации системы (1.1.1) в окрестности точки x^* , если $f'_x(x^*, \mu_0) = 0$. Другими словами, μ_0 является точкой бифуркации системы (1.1.1), если

$$f(x^*, \mu_0) = 0, \quad f'_x(x^*, \mu_0) = 0. \quad (1.1.4)$$

О сценариях бифуркаций

Пусть μ_0 является точкой бифуркации системы (1.1.1). В этом случае при переходе μ через значение μ_0 в окрестности точки x^* фазовый портрет системы (1.1.1), как правило, качественно изменяется: могут возникнуть или исчезнуть новые точки равновесия, измениться их топологический тип, возникнуть циклы малой амплитуды и т.п. Другими словами, можно говорить о том или ином сценарии бифуркации.

Для изучения возможных сценариев бифуркации системы (1.1.1) будем рассматривать следующие основные случаи негиперболичности:

- 1) матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение;
- 2) матрица A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm \omega_0 i$, $\omega_0 > 0$.

При этом в обоих случаях предполагается, что других собственных значений с нулевой вещественной частью матрица A_0 не имеет.

1.2 Бифуркации кратного равновесия

В случае 1) реализуются так называемые бифуркации кратного равновесия, которые соответствуют трем сценариям бифуркаций: это

транскритическая бифуркация, бифуркация типа вилки и седло-узловая бифуркация. «Кратное равновесие» в термине можно объяснить тем, что все три указанных сценария бифуркации связаны с возникновением у системы (1.1.1) при переходе μ через значение μ_0 новых точек равновесия.

Транскритическая бифуркация

Следующая система дает нам пример, как выглядит транскритическая бифуркация

$$x' = \mu x - x^2. \quad (1.2.1)$$

Чтобы определить точки бифуркации приведенной системы, применим равенства (1.1.4):

$$\mu x - x^2 = 0, \quad \mu - 2x = 0.$$

Пара $\mu = 0$ и $x = 0$ будет единственным решением. Соответственно, в окрестности точки равновесия $x = 0$ значение $\mu = 0$ будет точкой бифуркации системы (1.2.1).

Переход параметра μ через значение $\mu = 0$ и соответствующая перестройка фазового портрета системы (1.2.1) при переходе изображена на рисунке 1.

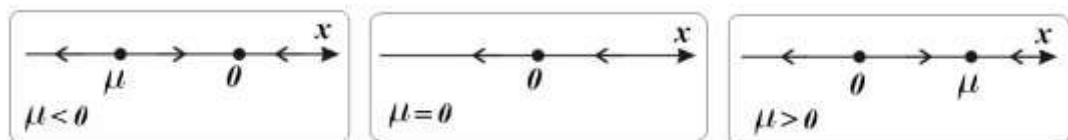


Рисунок 1. Транскритическая бифуркация: уравнение (1.2.1)

Здесь можно увидеть исчезновение и возникновение ненулевой точки равновесия $x = \mu$ в окрестности точки равновесия $x = 0$ при переходе μ через значение $\mu = 0$ системы (1.2.1). Данный пример иллюстрирует транскритическую бифуркацию, при которой происходит данная качественная перестройка фазового портрета системы.

На рисунке 2 схематично изображены ветви равновесия системы (1.2.1) в пространстве (x, μ) ; сплошной линией отмечены ветви, отвечающие

устойчивым точкам равновесия, а пунктирной - неустойчивым точкам. Направление движения остальных решений системы (1.2.1) указаны стрелками. Рисунок 2 - это бифуркационная диаграммы системы (1.2.1).

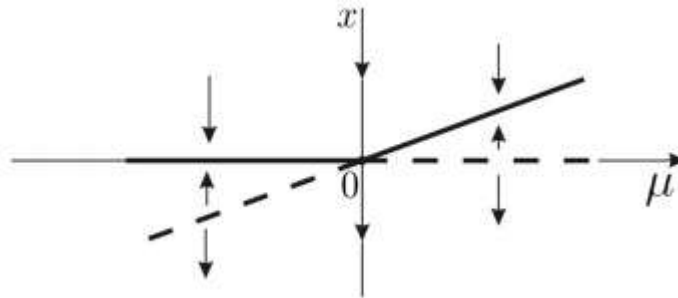


Рисунок 2. Бифуркационная диаграмма уравнения (1.2.1).

Бифуркация типа вилки

Модельный пример бифуркации типа вилки дает система, описываемая скалярным уравнением

$$x' = \mu x - x^3. \quad (1.2.2)$$

Чтобы определить точки бифуркации приведенной системы, применим равенства (1.1.4):

$$\mu x - x^3 = 0, \quad \mu - 3x^2 = 0.$$

Пара $\mu = 0$ и $x = 0$ будет единственным решением. В окрестности точки равновесия $x = 0$ точкой бифуркации (1.2.2) будет значение $\mu = 0$.

Переход параметра μ через значение $\mu = 0$ и соответствующая перестройка фазового портрета системы (1.2.2) при переходе изображена на рисунке 3.

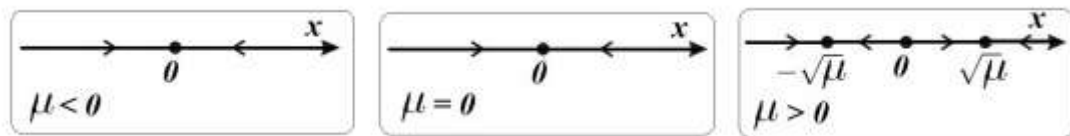


Рисунок 3. Бифуркация типа вилки: уравнение (1.2.2)

Таким образом, при переходе μ через значение $\mu = 0$ у системы (1.2.2) в окрестности точки равновесия $x = 0$ возникает сразу две ненулевые точки равновесия $x = \pm\sqrt{\mu}$. Такую качественную перестройку фазового портрета системы и называют бифуркацией типа вилки.

Бифуркационная диаграмма системы (1.2.2) представлена на рисунке 4.

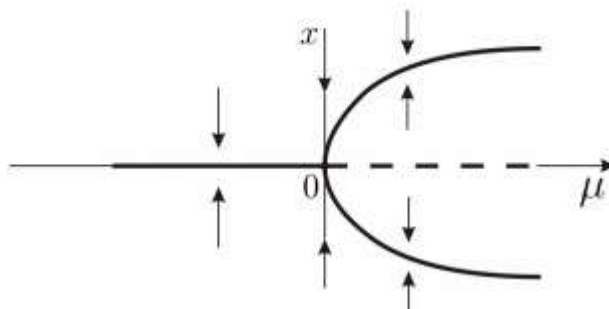


Рисунок 4. Бифуркационная диаграмма уравнения (1.2.2)

Седло-узловая бифуркация

Модельный пример седло-узловой бифуркации дает система, описываемая скалярным уравнением

$$x' = \mu - x^2 \quad (1.2.3)$$

Значение $\mu = 0$ будет точкой бифуркации системы (1.2.3) в окрестности точки равновесия $x = 0$. В справедливости этого факта можно также убедиться и с использованием равенств (1.1.2), которые здесь примут вид:

$$\mu - x^2 = 0, \quad -2x = 0$$

и которые приводят к единственному решению $\mu = 0$ и $x = 0$.

Перестройка фазового портрета системы (1.2.3) при переходе параметра μ через значение $\mu = 0$ изображена на рисунке 5.

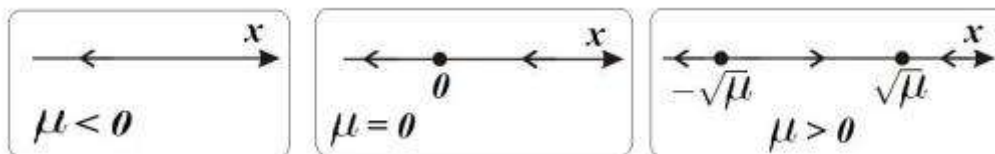


Рисунок 5. Седло-узловая бифуркация: уравнение (1.2.3)

Этот рисунок показывает, что при переходе μ через значение $\mu = 0$ у системы (1.2.3) в окрестности точки $x = 0$ возникает сначала (при $\mu = 0$) одна нулевая точка равновесия $x = 0$, а затем (при $\mu > 0$) нулевая точка $x = 0$ «расщепляется» на две ненулевые точки равновесия $x = \pm\sqrt{\mu}$. Таковую качественную перестройку фазового портрета системы и называют седло-узловой бифуркацией.

На рисунке 6 изображена бифуркационная диаграмма системы (1.2.3).

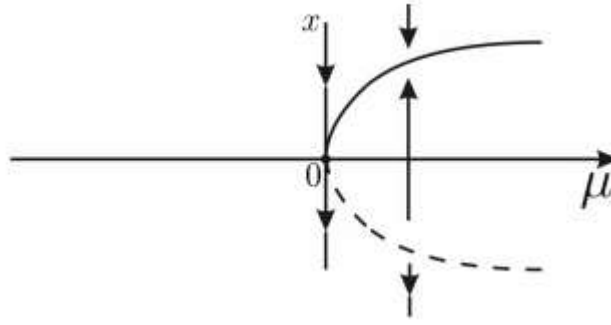


Рисунок 6. Бифуркационная диаграмма уравнения (1.2.3)

Типичный пример седло-узловой бифуркации в двух измерениях выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= \mu - x^2 \\ y' &= -y \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

В направлении x мы видим поведение бифуркации, аналогичное типичному примеру в одномерном случае (Рисунок 7), в то время как в направлении y движение экспоненциально затухает.

Рассмотрим фазовый портрет по мере изменения μ . Для $\mu > 0$ на рисунке 7 показано, что существуют две точки равновесия, устойчивый узел в точке $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$ и седло в точке $(-\sqrt{\mu}, 0)$. По мере уменьшения μ седло и узел приближаются друг к другу, затем сталкиваются, когда $\mu = 0$, и, наконец, исчезают, когда $\mu < 0$.

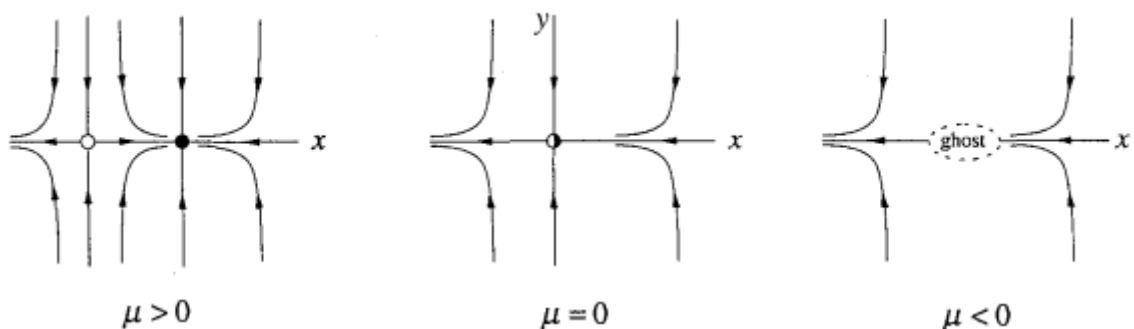


Рисунок 7. Седло-узловая бифуркация в двух измерениях: уравнение (1.2.4)

Даже после того, как неподвижные точки взаимоуничтожились, они продолжают влиять на поведение системы, они оставляют после себя область узкого места, которая засасывает траектории и задерживает их, прежде чем позволить проход с другой стороны. Время, проведенное в узком месте, обычно

увеличивается по мере $(\mu - \mu_c)^{-\frac{1}{2}}$ где μ_c - значение, при котором происходит седло-узловая бифуркация.

1.3 Бифуркация Андронова-Хопфа

Предположим, что двумерная система имеет устойчивую неподвижную точку. Если неподвижная точка устойчива, то собственные значения матрицы Якоби λ_1, λ_2 должны лежать в левой полуплоскости $\text{Re } \lambda < 0$. Поскольку значения λ удовлетворяют квадратному уравнению с действительными коэффициентами, возможны два сценария: либо собственные значения являются вещественными и отрицательными (Рисунок 8а), либо они являются комплексно-сопряженными (Рисунок 8б).

Чтобы неподвижная точка потеряла устойчивость, нужно, чтобы одно или оба собственных значения перешли в правую полуплоскость по мере изменения μ .

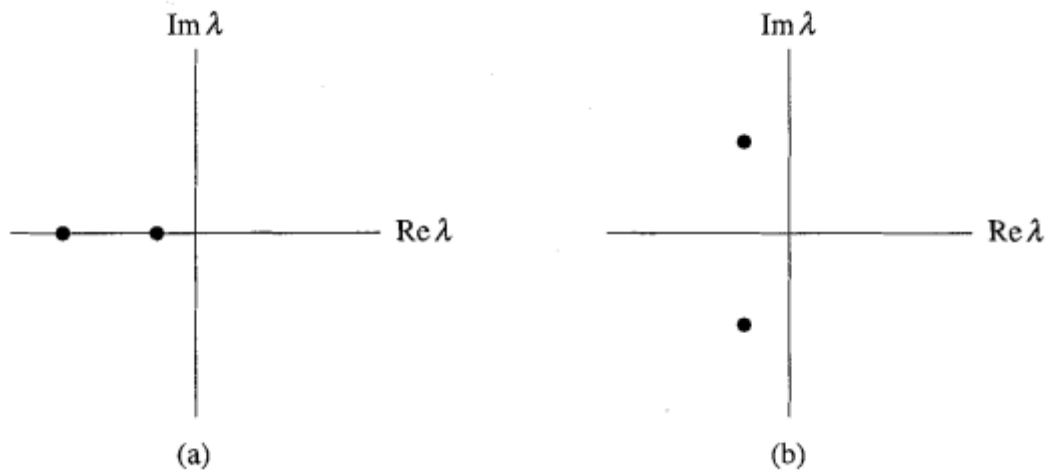


Рисунок 8. Случаи (а) и (б)

Когда действительное собственное значение проходит через $\lambda = 0$ имели место седло-узловая, транскритическая и типа вилки бифуркации. Теперь мы рассмотрим другой возможный сценарий, в котором два

комплексно-сопряженных собственных значения одновременно пересекают мнимую ось и оказываются в правой полуплоскости.

Суперкритическая бифуркация Хопфа

Предположим, у нас есть физическая система, которая приходит в равновесие благодаря экспоненциально затухающим колебаниям. Другими словами, небольшие возмущения затухают на некоторое время (Рисунок 9а). Теперь предположим, что скорость затухания зависит от управляющего параметра μ . Если спад становится все медленнее и медленнее и, наконец, переходит в рост при критическом значении μ_c , состояние равновесия теряет стабильность. Во многих случаях результатом становится движение, которое представляет собой синусоидальные колебания малой амплитуды с предельным циклом относительно прежнего устойчивого состояния (Рисунок 9б). Тогда мы говорим, что система подверглась суперкритической бифуркации Хопфа.

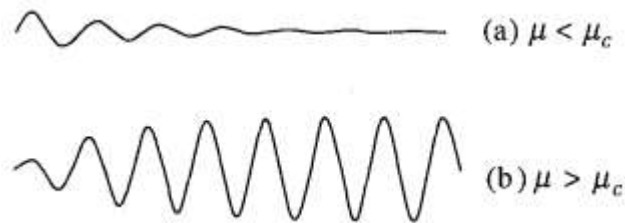


Рисунок 9. Случаи (а) и (б)

В терминах потока в фазовом пространстве, сверхкритическая бифуркация Хопфа возникает тогда, когда устойчивый фокус превращается в неустойчивый фокус, окруженный небольшим, почти эллиптическим предельным циклом. Бифуркации Хопфа могут возникать в фазовых пространствах, любого измерения $n \geq 2$.

Простой пример суперкритической бифуркации Хопфа приведен в следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Здесь у нас три параметра: μ регулирует стабильность неподвижной точки в начале координат, ω задает частоту бесконечно малых колебаний, а b определяет зависимость частоты от амплитуды для колебаний большой амплитуды. на рисунке 10 показаны фазовые портреты для μ выше и ниже бифуркации. Когда $\mu < 0$, начало координат $r = 0$ представляет собой устойчивый фокус, направление вращения которой зависит от знака ω . При $\mu = 0$ начало координат по-прежнему представляет собой устойчивый фокус, хотя и очень слабый: распад происходит только алгебраически быстро. Наконец, для $\mu > 0$ существует неустойчивый фокус в начале координат и стабильный круговой предельный цикл при $r = \sqrt{\mu}$.

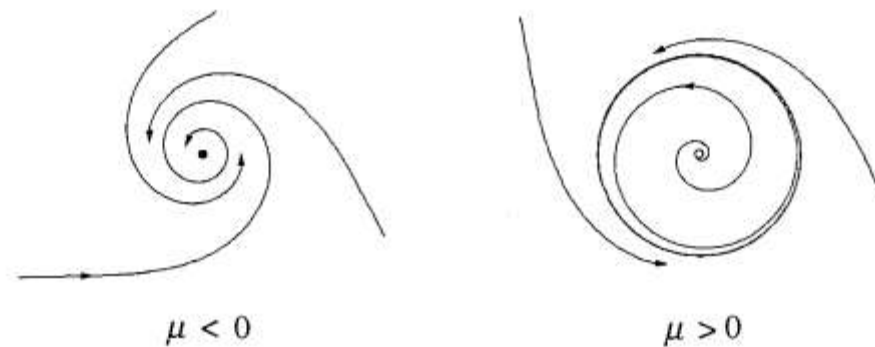


Рисунок 10. Фазовый портрет системы (1.3.1) при $\mu < 0, \mu > 0$

Чтобы рассмотреть, как ведут себя собственные значения при бифуркации, нужно перевести систему в декартовы координаты; это облегчает поиск матрицы Якоби. Делая замену $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ &= (\mu r - r^3) \cos \theta - r(\omega + br^2) \sin \theta \\ &= (\mu - [x^2 + y^2])x - (\omega + b[x^2 + y^2])y \\ &= \mu x - \omega y + \text{кубические члены} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\dot{y} = \omega x + \mu y + \text{кубические члены.}$$

Таким образом, якобиан в начале координат равен

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

откуда получаем собственные значения

$$\lambda = \mu \pm i\omega$$

Как и ожидалось, собственные значения пересекают мнимую ось слева направо по мере увеличения μ от отрицательных до положительных значений.

Наш идеализированный случай иллюстрирует два правила, которые в целом справедливы для сверхкритических бифуркации Хопфа:

1. Размер предельного цикла непрерывно растет от нуля и увеличивается пропорционально $\sqrt{\mu - \mu_c}$, для μ , близкого к μ_c .

2. Частота предельного цикла задается приблизительно через $\omega = \text{Im } \lambda$, при $\mu = \mu_c$. Эта формула точна при рождении предельного цикла и верна в пределах $O(\mu - \mu_c)$ для μ , близкого к μ_c . Таким образом, период будет

$$T = (2\pi / \text{Im } \lambda) + O(\mu - \mu_c).$$

Но приведенный идеальный пример также обладает некоторыми искусственными свойствами. Во-первых, у бифуркаций Хопфа, встречающиеся на практике, предельный цикл является эллиптическим, а не в виде круга, и его форма искажается по мере удаления μ от точки бифуркации. Приведенный пример типичен только топологически, а не геометрически. Во-вторых, в нашем идеальном случае собственные значения перемещаются по горизонтальным линиям при изменении μ , т.е. $\text{Im } \lambda$ строго зависит от μ . Обычно собственные значения следуют по извилистой траектории и пересекают мнимую ось с ненулевым наклоном (Рисунок 11).

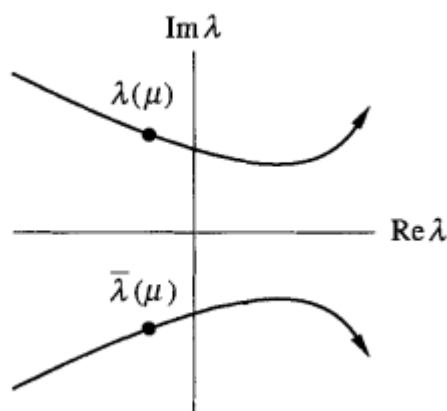


Рисунок 11. Пересечение собственных значений через мнимую ось с ненулевым наклоном

Субкритическая бифуркация Хопфа

Субкритический случай всегда гораздо более драматичен и потенциально опасен в инженерных приложениях. После бифуркации траектории должны перейти к удаленному аттрактору, который может быть фиксированной точкой, другим предельным циклом, бесконечностью или - в трех и более измерениях - хаотическим аттрактором.

Рассмотрим двумерный пример

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Важным отличием от раннего суперкритического случая является то, что кубический член r^3 теперь дестабилизирует; он отклоняет траектории от начала координат.

Фазовые портреты показаны на рисунке 12. Для $\mu < 0$ существуют два аттрактора: стабильный предельный цикл и стабильная фиксированная точка в начале координат. Между ними лежит нестабильный цикл, показанный в виде пунктирной кривой на рисунке 12; в этом сценарии за ним нужно пристальное внимание. По мере увеличения μ нестабильный цикл затягивается, как петля, вокруг неподвижной точки. Субкритическая бифуркация Хопфа происходит при $\mu = 0$, когда нестабильный цикл сжимается до нулевой амплитуды и поглощает начало координат, тем самым делая его нестабильным. При $\mu > 0$ предельный цикл большой амплитуды внезапно становится единственным аттрактором. Решения, которые раньше оставались вблизи начала координат, теперь вынуждены перерастать в колебания большой амплитуды.

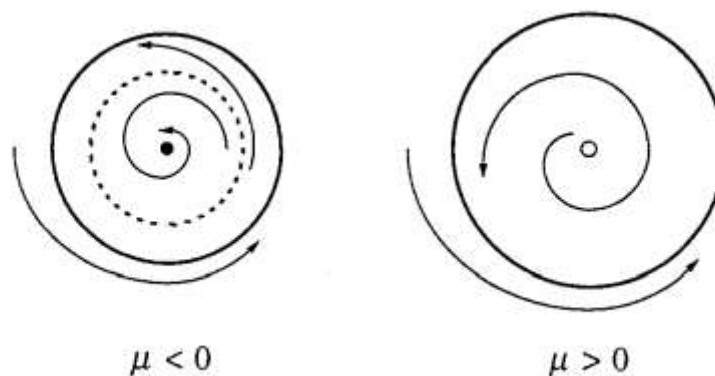


Рисунок 12. Фазовый портрет системы (1.3.2) при $\mu < 0, \mu > 0$

Система демонстрирует гистерезис: как только начались колебания большой амплитуды, от них нельзя избавиться путем уменьшения μ обратно к нулю. Фактически, большие колебания будут сохраняться до тех пор, пока $\mu = -\frac{1}{4}$, где стабильные и нестабильные циклы сталкиваются и аннигилируют друг друга.

Субкритические бифуркации Хопфа происходят в динамике нервных клеток, в аэроупругом флаттере и других колебаниях крыльев самолета, а также в неустойчивости потоков жидкости.

1.4 Бифуркации периодических орбит

Пусть у динамической системы

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad (1.4.1)$$

возникает нестационарное T_0 -периодическое решение $x = \varphi_0(t)$ при некотором значении параметра $\mu = \mu_0$. В окрестности периодического решения $x = \varphi_0(t)$ рассмотрим локальные бифуркации системы (1.4.1).

Необходимые условия бифуркации

Линеаризуем систему (1.4.1) при $\mu = \mu_0$ в окрестности цикла $x = \varphi_0(t)$, для чего перейдем к новой переменной $h = x - \varphi_0(t)$. Эта замена приводит систему (1.4.1) к виду

$$h' = A(t)h + g(t, h), \quad h \in R^N, \quad (1.4.2)$$

где

$$A(t) = f'_x(\varphi_0(t), \mu_0), \quad g(t, h) = f(\varphi_0(t) + h, \mu_0) - f(\varphi_0(t), \mu_0) - A(t)h.$$

Матрица $A(t)$ и вектор-функция $g(t, h)$ являются T_0 -периодическими по t , причем равномерно по $t \in [0, T_0]$ выполнено соотношение:

$$g(t, h) = o(\|h\|), \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Система (1.4.2) имеет нулевое решение $h = 0$, соответствующее T_0 -периодическому решению $x = \varphi_0(t)$ системы (1.4.1) при $\mu = \mu_0$. Наряду с (1.4.2) будем рассматривать также линейную систему

$$h' = A(t)h, \quad h \in R^N. \quad (1.4.3)$$

Один из мультипликаторов этой системы равен 1.

В задаче о локальных бифуркациях в окрестности периодического решения $x = \varphi_0(t)$ системы (1.4.1) (так же, как и в задаче о локальных бифуркациях в окрестности точек равновесия) точки бифуркации совпадают с теми μ_0 , при которых цикл $x = \varphi_0(t)$ является негиперболическим. Приведем соответствующее определение.

Определение 3. Значение μ_0 называют точкой бифуркации в окрестности периодического решения $x = \varphi_0(t)$ системы (1.4.1), если при $\mu = \mu_0$ цикл $x = \varphi_0(t)$ этой системы является негиперболическим. Другими словами, если линейная система (1.4.3) имеет по крайней мере два мультипликатора, равных по модулю 1, один из которых в точности равен 1.

Основные сценарии бифуркации

Предположим, что система (1.4.3) при $\mu = \mu_0$ имеет два мультипликатора ρ_0 и ρ_1 так, что $\rho_0 = 1$ и $|\rho_1| = 1$. Возможны следующие случаи:

$$a) \rho_1 = 1, \quad б) \rho_1 = -1 \quad в) \rho_1 = e^{i\beta T_0},$$

где $\beta > 0$ и $\sin(\beta T_0) \neq 0$ (число $i\beta$ в этом случае является показателем Флоке системы (1.4.3) при $\mu = \mu_0$).

В случае в) возможна бифуркация рождения двумерного тора (аналог бифуркации Андронова - Хопфа). Например, система (1.4.1) при $\mu < \mu_0$ может иметь изолированный устойчивый цикл $x = \varphi(t, \mu)$, который при $\mu > \mu_0$ теряет устойчивость и в результате в его окрестности возникает новое устойчивое движение по двумерному тору, задаваемому основной частотой исходного цикла $\omega_0 = 2\pi/T_0$ и частотой $\omega_1 = \beta$ (Рисунок 13). Такая бифуркация может произойти только в системах размерности $N \geq 3$.

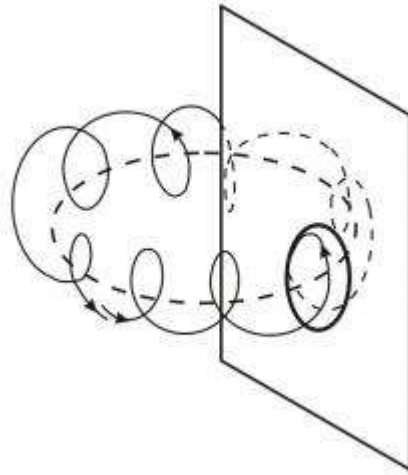


Рисунок 13. Бифуркация рождения двумерного тора

2 Модель Лэнгфорда

В этой главе приводится модель Лэнгфорда, изучение ее некоторых свойств, а именно точек равновесия и анализ их устойчивости, анализ классических бифуркаций в окрестности точек равновесия.

Рассматривается система Лэнгфорда, которая была предложена Лэнгфордом (в личном общении с коллегами) [13]. Модель Лэнгфорда была получена путем усечения бесконечной систем обыкновенных дифференциальных уравнений, первоначально предложенной Э.Хопфом [14] в качестве возможной модели гидродинамической турбулентности. Модель Лэнгфорда представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка. Эта модель обладает богатым бифуркационным поведением.

Модель Лэнгфорда описывается трехмерной системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x' &= (2\mu - 1)x - y + xz, \\ y' &= x + (2\mu - 1)y + yz, \\ z' &= -\mu z - (x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

здесь μ – скалярный параметр.

Проведем исследование некоторых свойств модели Лэнгфорда.

2.1 Точки равновесия и анализ их устойчивости

Точки равновесия модели Лэнгфорда (2.1) - это решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} (2\mu - 1)x - y + xz &= 0 \\ x + (2\mu - 1)y + yz &= 0 \\ -\mu z - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.1.1)$$

которая имеет два решения $x = y = z = 0$ и $x = y = 0, z = -\mu$. Соответственно, система (2.1) имеет две точки равновесия

$$u_0 = (0,0,0), \quad u_1(\mu) = (0,0,-\mu). \quad (2.1.2)$$

Проведем анализ устойчивости найденных точек равновесия. С этой целью вычислим матрицу Якоби правой части $f(u, \mu)$ системы (2.1):

$$f'(u, \mu) = \begin{bmatrix} (2\mu - 1) + z & -1 & x \\ 1 & (2\mu - 1) + z & y \\ -2x & -2y & -\mu - 2z \end{bmatrix}; \quad (2.1.3)$$

здесь $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Тогда в точках равновесия u_0 и $u_1(\mu)$ соответственно,

получим:

$$A_0(\mu) = f'(u_0, \mu) = \begin{bmatrix} 2\mu - 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2\mu - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$A_1(\mu) = f'(u_1, \mu) = \begin{bmatrix} \mu - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \mu - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Собственные значения матрицы $A_0(\mu)$ равны

$$\lambda_{1,2} = (2\mu - 1) \pm i, \quad \lambda_3 = -\mu. \quad (2.1.4)$$

Отсюда следует, что нулевая точка равновесия u_0 системы (2.1) будет асимптотически устойчивой при $0 < \mu < \frac{1}{2}$ и неустойчивой при $\mu < 0, \mu > \frac{1}{2}$.

Так как в любой момент времени при отрицательных собственных значениях координаты решения системы (2.1) убывают по модулю, следовательно, убывает и расстояние до точки равновесия. Любая траектория, стартующая в ϵ -окрестности точки равновесия, не покидает эту окрестность.

Далее собственные значения матрицы $A_1(\mu)$ равны

$$\lambda_{1,2} = (\mu - 1) \pm i, \quad \lambda_3 = \mu. \quad (3.1.1)$$

Поэтому точка равновесия $u_1(\mu)$ системы (2.1) будет асимптотически устойчивой при $\mu < 0$ и неустойчивой при $\mu > 0$.

2.2 Анализ бифуркаций в точках равновесия

Точки бифуркации.

Бифуркациям в окрестностях точек равновесия (2.1.1) соответствуют такие значения параметра μ , при которых эти точки являются негиперболическими, т.е. когда соответствующая матрица Якоби будет иметь хотя бы одно чисто мнимое собственное значение.

Анализ бифуркаций в окрестности точки равновесия u_0

Из (3.1.1) следует, что точка равновесия u_0 будет негиперболической при $\mu = \frac{1}{2}$ (тогда $\lambda_{1,2} = \pm i$) и при $\mu = 0$ (тогда $\lambda_3 = 0$). Следовательно, значения $\mu_1 = \frac{1}{2}$ и $\mu_0 = 0$ будут точками бифуркации системы (2.1). При этом значение $\mu_1 = \frac{1}{2}$ - это точка бифуркации Андронова-Хопфа, а значение $\mu_0 = 0$ - это точка бифуркации кратного равновесия.

При переходе параметра μ через $\mu_0 = 0$ реализуется сценарий транскритической бифуркации. То есть, при значении параметра $\mu = 0$ система (2.1) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= -x - y + xz \\ y' &= x - y + yz \\ z' &= -(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned} \right\}.$$

Чтобы найти точки равновесия, подставим $\mu = 0$ в систему (2.1.1)

$$\left. \begin{aligned} -x - y + xz &= 0 \\ x - y + yz &= 0 \\ -(x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Соответственно, единственное решение это $x = y = z = 0$. Таким образом, наблюдается следующий сценарий: при $\mu < 0$, система (2.1) имеет две точки равновесия, при $\mu = 0$ - одну точку равновесия, при $\mu > 0$ - снова две.

При переходе параметра μ через $\mu_1 = \frac{1}{2}$ реализуется сценарий бифуркации Андронова-Хопфа. А именно, при переходе параметра μ через значение $\mu = \frac{1}{2}$ в окрестности точки равновесия u_0 системы (2.1) возникают нестационарные периодические решения малой амплитуды. То есть,

перестройка фазового портрета в окрестности точки равновесия u_0 системы (2.1) при $\mu < \frac{1}{2}$, при $\mu = \frac{1}{2}$, при $\mu > \frac{1}{2}$ будет выглядеть следующим образом (вид с координаты z). При $\mu < \frac{1}{2}$ на рисунке 14 мы наблюдаем устойчивый фокус, на рисунке 15 при $\mu = \frac{1}{2}$ – нестационарные периодические решения, на рисунке 16 при $\mu > \frac{1}{2}$ – неустойчивый фокус.

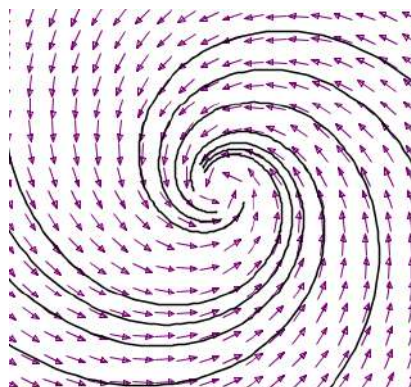


Рисунок 14. Фазовый портрет в окрестности точки равновесия u_0 системы (2.1) при $\mu < \frac{1}{2}$

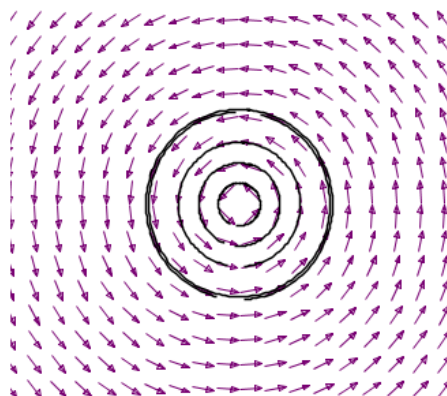


Рисунок 15. Фазовый портрет в окрестности точки равновесия u_0 системы (2.1) при $\mu = \frac{1}{2}$

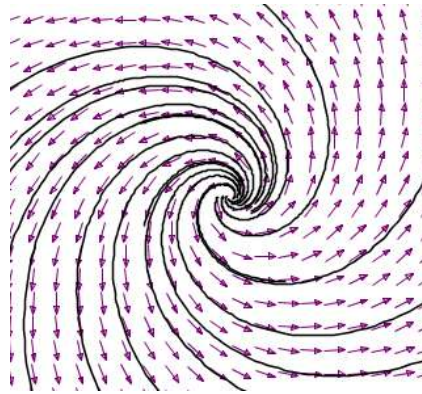


Рисунок 16. Фазовый портрет в окрестности точки равновесия u_0 системы

$$(2.1) \text{ при } \mu > \frac{1}{2}$$

Анализ бифуркаций в окрестности точки равновесия $u_1(\mu)$

Из (2.1.4) следует, что точка равновесия $u_1(\mu)$ будет негиперболической при $\mu = 1$ (тогда $\lambda_{1,2} = \pm i$) и при $\mu = 0$ (тогда $\lambda_3 = 0$). Следовательно, значения $\mu_2 = 1$ и $\mu_0 = 0$ будут точками бифуркации системы (2.1). При этом значение $\mu_2 = 1$ – это точка бифуркации Андронова-Хопфа, а значение $\mu_0 = 0$ – это точка бифуркации кратного равновесия.

Значение $\mu_0 = 0$ является точкой бифуркации для обеих точек равновесия u_0 и $u_1(\mu)$. В действительности, это одна и та же бифуркация кратного равновесия. Все зависит от точки зрения. А именно:

- если рассматривать ее как бифуркацию в окрестности точки равновесия u_0 , то при переходе параметра μ через значение $\mu = 0$ в окрестности точки u_0 возникает точка равновесия $u_1(\mu)$:

- если рассматривать ее как бифуркацию в окрестности точки равновесия $u_1(\mu)$, то при переходе параметра μ через значение $\mu = 0$ в окрестности точки $u_1(\mu)$ возникает точка равновесия u_0 .

При переходе параметра μ через $\mu_2 = 1$ реализуется сценарий бифуркации Андронова-Хопфа. А именно, при переходе параметра μ через значение $\mu = 1$ в окрестности точки равновесия $u_1(\mu)$ системы (2.1) возникают нестационарные периодические решения малой амплитуды.

3 Периодические орбиты и их бифуркации в модели Лэнгфорда

В этой главе будет рассмотрено возникновение периодического решения и его устойчивости, бифуркации в окрестности периодического решения.

3.1 Возникновение периодических орбит

Таким образом, задача о бифуркациях в окрестностях точек равновесия системы (2.1) привела к трем точкам бифуркации:

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = 1.$$

При этом точке бифуркации $\mu_0 = 0$ отвечает сценарий транскритической бифуркации в окрестности начала координат $u_0 = u_1(\mu_0) = (0,0,0)$.

Точкам бифуркации $\mu_1 = 1/2$ и $\mu_2 = 1$ отвечают сценарии бифуркации Андронова-Хопфа. Они происходят в окрестностях разных точек $u_0 = (0,0,0)$ и $u_1(\mu_2) = (0,0,-1)$.

Оказывается, что хотя указанные бифуркации Андронова-Хопфа происходят в окрестностях разных точек и при различных значениях параметра μ , им отвечает одно и то же семейство возникающих периодических решений. Более того, это семейство решений может быть выписано в явном виде: решения существуют при $\frac{1}{2} \leq \mu \leq 1$ и они представимы в виде:

$$u = \varphi(t, \mu) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 1 - 2\mu \end{bmatrix}; \quad \text{здесь } r = \sqrt{(2\mu - 1)(1 - \mu)}. \quad (3.1.1)$$

Покажем, как решение $u = \varphi(t, \mu)$ выводится из системы (2.1)

$$\left. \begin{aligned} x' &= (2\mu - 1)x - y + xz, & (1) \\ y' &= x + (2\mu - 1)y + yz, & (2) \\ z' &= -\mu z - (x^2 + y^2 + z^2); \end{aligned} \right\}$$

Умножим первое уравнение на y , а второе на x , и после выполненных преобразований вычтем из первого уравнения второе, тогда

$$(1) \cdot y - (2) \cdot x \Rightarrow$$

$$x'y - y'x = [(2\mu - 1)xy - y^2 + xyz] - [x^2 + (2\mu - 1)xy + xyz]$$

$$x'y - y'x = -y^2 - x^2.$$

Затем поделим обе части на y^2

$$\frac{x'y - y'x}{y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{y^2}$$

Сделаем замену $\frac{x}{y} = \tilde{z}$

$$\frac{x}{y} = \tilde{z} \Rightarrow \tilde{z}' = -\tilde{z}^2 - 1$$

Теперь имеем дифференциальное уравнение, которое можно решить методом разделения переменных

$$\int \frac{1}{1 + \tilde{z}^2} d\tilde{z} = - \int dt$$

$$\arctan \tilde{z} = -t + C$$

Совершая обратную замену $\tilde{z} = \frac{x}{y}$, получаем

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \tan(C - t)$$

$$\frac{x(t)}{\sin(C - t)} = \frac{y(t)}{\cos(C - t)} = R \Rightarrow$$

$$x(t) = R \sin(C - t), y(t) = R \cos(C - t)$$

Подставляем в первое уравнение системы (2.1)

$$-R \cos(C - t) = (2\mu - 1)R \sin(C - t) - R \cos(C - t) + R \sin(C - t)z(t)$$

Отсюда получаем, чему равно $z(t)$ и R

$$z(t) = 1 - 2\mu$$

$$z' = -\mu(1 - 2\mu) - (1 - 2\mu)^2 - R^2 \Rightarrow$$

$$R = \pm \sqrt{(-1 + 2\mu)(1 - \mu)}.$$

При $\mu = \frac{1}{2}$ решение (3.1.1) превращается в нулевую точку равновесия u_0 , а при $\mu = 1$ - в точку равновесия $u_1(1)$. Формула (3.1.1) также показывает, что периодические решения в окрестности точки равновесия u_0 возникают при $\mu > \frac{1}{2}$, а в окрестности точки равновесия $u_1(\mu)$ - при $\mu < 1$.

Устойчивость периодического решения

Проведем теперь анализ устойчивости существующего при $\frac{1}{2} \leq \mu \leq 1$ периодического решения (3.1.1) системы (2.1). Для этого линеаризуем эту систему на указанном решении, т.е. перейдем к рассмотрению линейной системы

$$h' = A(t, \mu)h, \quad h \in R^3, \quad (3.1.2)$$

где $A(t, \mu) = f'_u(\varphi(t, \mu), \mu)$, здесь $f'_u(u, \mu)$ – матрица Якоби (5.58). Несложно видеть, что

$$A(t, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & r \cos t \\ 1 & 0 & r \sin t \\ -2r \cos t & -2r \sin t & 3\mu - 2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Один из трех мультипликаторов линейной системы (3.1.2) равен единице. Свойства устойчивости периодического решения (3.1.1) системы (2.1) зависят от двух других мультипликаторов системы (3.1.2). А именно, если эти два мультипликатора по модулю меньше единицы, то решение (3.1.1) является орбитально асимптотически устойчивым. Если хотя бы один из них по модулю больше единицы, то это решение неустойчиво.

Таким образом, надо как-то найти два мультипликатора линейной системы (3.1.2). Воспользуемся теорией Флоке.

Согласно этой теории существует невырожденная 2π -периодическая замена $h = P(t)u$, которая преобразует систему (3.1.2) с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами:

$$u' = B(\mu)u, \quad u \in R^3. \quad (3.1.4)$$

Найти такую замену можно только в очень редких случаях. Но здесь мы имеем именно этот редкий случай. А именно, в качестве $P(t)$ можно взять матрицу

$$P(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Тогда замена $h = P(t)u$ преобразует систему (3.1.2) в систему (3.1.4), в которой

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ -2r & 0 & 3\mu - 2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.6)$$

Показатели Флоке системы (3.1.2) - это собственные значения матрицы (3.1.6), т.е. числа

$$\lambda_{1,2} = \frac{(3\mu - 2) \pm \sqrt{25\mu^2 - 36\mu + 16}}{2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Соответственно, мультипликаторы системы (3.1.2) - это собственные значения матрицы $e^{2\pi B(\mu)}$, т.е. числа $\mu_j = e^{2\pi\lambda_j}$:

$$\mu_{1,2} = e^{2\pi\lambda_{1,2}}, \quad \mu_3 = e^{2\pi\lambda_3} = 1.$$

Мультипликаторы $\mu_{1,2}$ будут по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда $\mu < \frac{2}{3}$. Отсюда и учитывая, что периодическое решение (3.1.1) существует при $\frac{1}{2} \leq \mu \leq 1$, получим, что решение (3.1.1) будет орбитально асимптотически устойчивым при $\frac{1}{2} < \mu < \frac{2}{3}$. Оно будет неустойчивым при $\frac{2}{3} < \mu < 1$.

На рисунке 17 изображен фазовый портрет системы (2.1) в окрестности периодического решения (2.1) при $\mu \approx 0,55$.

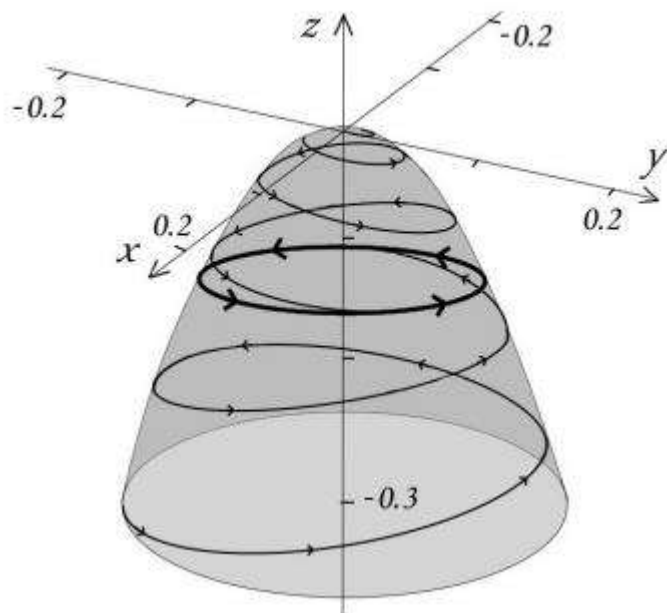


Рисунок 17. Периодическое решение системы Лэнгфорда

При указанном значении μ периодическое решение (3.1.1) является орбитально асимптотически устойчивым, т.е. представляет собой автоколебательный режим. на рисунке 17 этот режим изображен жирной линией.

3.2 Бифуркации в окрестности периодического решения

При $\mu = \frac{2}{3}$ система (3.1.2) имеет два мультипликатора:

$$\mu_{1,2} = e^{\pm 2\pi\sqrt{2}i/3},$$

равные одному по модулю. Это означает, что значение $\mu = \frac{2}{3}$ будет точкой бифуркации в окрестности периодического решения (3.1.1) системы (2.1). При этом имеет место случай, отвечающий сценарию бифуркации рождения двумерного тора (Рисунок 13).

Теорема 3. *Бифуркация рождения двумерного тора имеет взрывной характер. А именно, двумерные торы в окрестности цикла (3.1.1) у системы (2.1) возникают при $\mu = 2/3$. При этом сразу возникает континуум двумерных торов, охватывающих цикл (3.1.1).*

Движение по этим торам задается основной частотой исходного цикла $\omega_0 = 1$ и частотой $\omega_1 = \sqrt{2}/3$.

Доказательство. Перейдем к цилиндрическим координатам, используя следующую замену

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

$$\begin{cases} x' = (2\mu - 1)r \cos \theta - r \sin \theta + r \cos \theta z = r' \cos \theta - r \sin \theta \cdot \theta' & (1) \\ y' = r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = r \cos \theta + (2\mu - 1)r \sin \theta + r \sin \theta \cdot z & (2) \\ z' = -\mu z - (r^2 + z^2) \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\cos \theta$, а второе на $-\sin \theta$, и найдем сумму, отсюда получаем

$$\cos \theta \cdot (1) + \sin \theta \cdot (2) \Rightarrow r' = (2\mu - 1)r + rz$$

Теперь первое уравнение на умножим $\sin \theta$, а второе на $-\cos \theta$. После преобразований вычитаем из первого уравнения второе получаем

$$\sin \theta \cdot (1) - (2) \cdot \cos \theta \Rightarrow \theta' = 1$$

Причем z' примет вид

$$z' = -\mu z - (x^2 + z^2)$$

Координата θ будет описывать вращение с постоянной скоростью так, что $\theta = t$. В результате получим равносильную (в естественном смысле) двумерную систему

$$\begin{cases} r' = (2\mu - 1)r + rz \\ \theta' = 1 \\ z' = -\mu z - (r^2 + z^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = (2\mu - 1 + z) \cdot r \\ z' = -\mu z - (r^2 + z^2) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Эта система имеет точку равновесия $R(\mu)$, $z = z^*(\mu)$, где $z^*(\mu) = 1 - 2\mu$, $R(\mu) = \sqrt{(-1 + 2\mu)(1 - \mu)}$

Соответствующая матрица Якоби примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & R(\mu) \\ -2R(\mu) & 3\mu - 2 \end{pmatrix},$$

Собственные значения которой будут следующими

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ 3\mu - 2 \pm [25\mu^2 - 36\mu + 12]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

При $\mu = \frac{2}{3}$ точка равновесия $R(\mu)$, $z = z^*(\mu)$ будет негиперболической, так как собственные значения будут чисто мнимыми, при этом в окрестности точки равновесия возникают нестационарные периодические решения, соответственно возникает бифуркация Андронова-Хопфа.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ 3\mu - 2 \pm [25\mu^2 - 36\mu + 12]^{\frac{1}{2}} \right\} \stackrel{\mu=\frac{2}{3}}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \left\{ \pm i \frac{2\sqrt{2}}{3} \right\} = \pm i \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Путем следующей замены

$$\begin{cases} r = R(\mu) \\ z = z^*(\mu) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho = r - R(\mu) \\ u = z - z^*(\mu) \end{cases}$$

$$r = \rho + R(\mu)$$

$$z = u + z^*(\mu)$$

Перейдем к новой системе, подставив значение $\mu = \frac{2}{3}$

$$\begin{cases} \rho = r - R(\mu) \\ u = z - z^*(\mu) \end{cases} \xrightarrow{\mu = \frac{2}{3}} \begin{cases} \rho' = \frac{1}{3}u + u\rho \\ u' = -\frac{2}{3}\rho - (\rho^2 + u^2) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Данная полученная система инвариантна при замене $(\rho, u, t) \rightarrow (\rho, -u, -t)$, то есть

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{-dt} = \frac{1}{3}(-u) + \rho(-u) \\ \frac{-du}{-dt} = -\frac{2}{3}\rho - (\rho^2 + (-u)^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho' = \frac{1}{3}u + u\rho \\ u' = -\frac{2}{3}\rho - (\rho^2 + u^2) \end{cases}$$

Значит, полученная система обратима во времени [12], ее траектории (3.2.2) симметричны относительно горизонтальной оси $O\rho$ (Рисунок 20). Тогда в малой окрестности точки $\rho = u = 0$ фазовый портрет системы (3.2.2) имеет тип «центр». Это означает, что в исходной системе (2.1) при $\mu = \frac{2}{3}$ в окрестности цикла (3.1.1) возникает континуум двумерных торов. ■

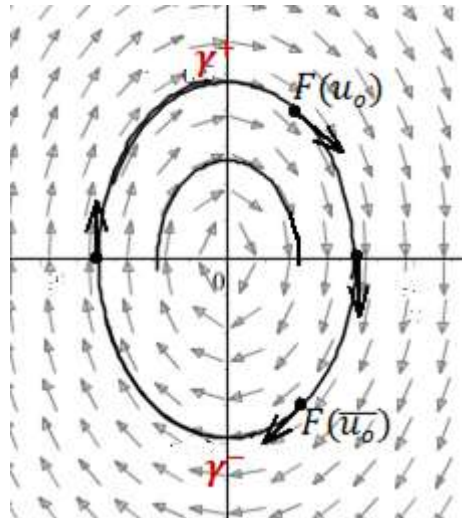


Рисунок 18. Симметричность траекторий относительно оси $O\rho$

Фазовый портрет системы (3.2.2) представлен на рисунках 19 и 20.

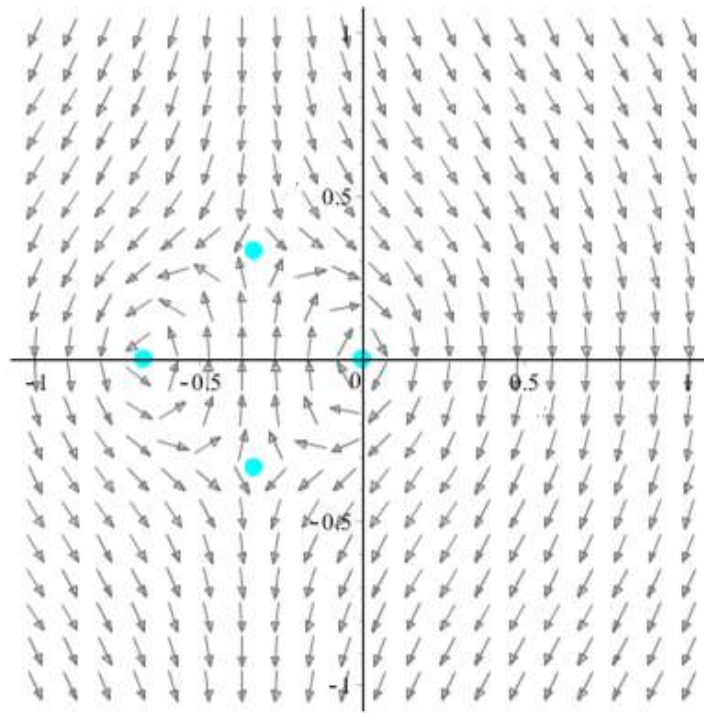


Рисунок 19. Фазовый портрет системы (3.2.2)

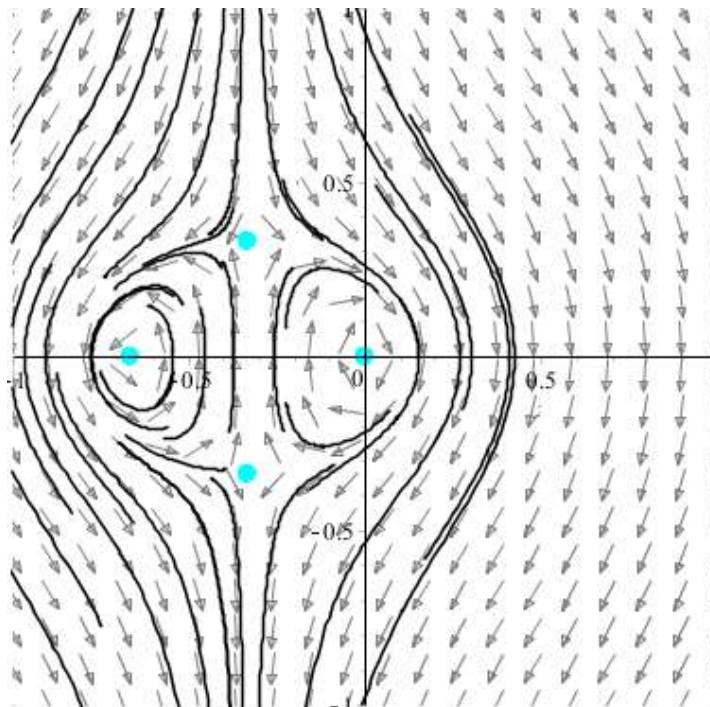


Рисунок 20. Фазовый портрет системы (3.2.2) с траекториями

Фазовые портреты системы (3.2.2) при разных параметрах μ можно посмотреть в приложении А.

При разных μ фазовый портрет системы (3.2.1) изображен на рисунке 21

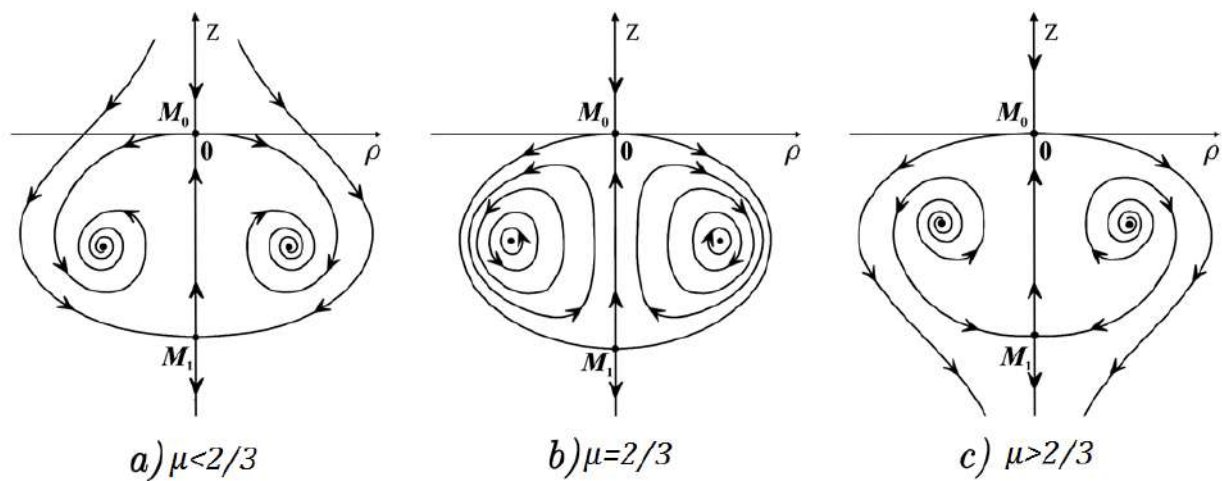


Рисунок 21. Фазовый портрет системы (3.2.1)

4 Дальнейшее исследование динамики системы Лэнгфорда

В этой главе приводится доказательство существования гетероклинических орбит в системе Лэнгфорда; показана эквивалентность системы Лэнгфорда осциллятору Дуффинга, а также, что модель Лэнгфорда представима в форме Гамильтона

4.1 Существование гетероклинических орбит

Теорема 4. Пусть параметр μ принимает значение $\frac{2}{3}$ в (2.1), тогда эта система имеет две гетероклинические орбиты, соединяющие точки равновесия $(0,0,0)$ и $(0,0,-\mu)$. Одна из этих орбит лежит на поверхности некоторого сфероида S (компактное множество в R^3). Более того, сфероид является положительно определенным инвариантным множеством для системы (2.1).

Доказательство. Рассмотрим систему (3.2.2), полученную ранее

$$\begin{cases} \rho'(\phi) = \frac{1}{3}u(\phi) + u(\phi)\rho(\phi) \equiv f(\rho, u) \\ u'(\phi) = -\frac{2}{3}\rho(\phi) - (\rho^2(\phi) + u^2(\phi)) \equiv g(\rho, u) \end{cases}$$

с начальными условиями $\rho(0) = \rho_0$ и $u(0) = u_0$. Решая систему

$$\begin{cases} \frac{1}{3}u + u\rho = 0 \\ -\frac{2}{3}\rho - (\rho^2 + u^2) = 0 \end{cases}$$

- Имеем тривиальный случай, когда обе переменные равны нулю $(0,0)$

- Также имеем $-\frac{2}{3}\rho - (\rho^2 + u^2) = 0 \Rightarrow u = \sqrt{-\frac{2}{3}\rho - \rho^2} = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{2}{3}$

- И наконец $\frac{1}{3}u + u\rho = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} = \rho$. Подставляя во второе уравнение,

получаем $u = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

Соответственно, система (3.2.2) имеет 4 точки равновесия (ρ_i, u_i) :

$$P_1 = (0,0); P_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right); P_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); P_4 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Определим тип точек равновесия. Посчитаем матрицу Якоби системы (3.2.2):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\rho, u)}{\partial \rho} & \frac{\partial f(\rho, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial g(\rho, u)}{\partial \rho} & \frac{\partial g(\rho, u)}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \frac{1}{3} + \rho \\ -\frac{2}{3} - 2\rho & -2u \end{pmatrix}$$

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \text{ матрицы } J(P_1) \text{ равны } \lambda^2 + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \text{ матрицы } J(P_2) \text{ равны } \lambda^2 + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \text{ матрицы } J(P_3) \text{ равны } \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(-\frac{2}{3} - \lambda\right) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{3}, -\frac{2}{3};$$

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \text{ матрицы } J(P_4) \text{ равны } \left(-\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}.$$

Отсюда получаем, что тип точек равновесия P_1 и P_2 - центр, а тип P_3 и P_4 - седло.

Обозначим через $\mathbb{W}^s(P_i)$ и $\mathbb{W}^u(P_i)$ устойчивые и неустойчивые многообразия точек равновесия P_i , $i = 3, 4$. Пусть точка $Q \neq P_1$ - точка, расположенная, в ε окрестности точки P_1 . Тогда траектория $\mathbb{L}(Q)$ системы (3.2.2), проходящая через точку Q - замкнутая кривая.

Введем функцию $v(\phi) = 0.5(\rho^2 + u^2)$. Тогда $\dot{v}(\phi) = \rho\rho' + uu'$. Соответственно, $\dot{v}(\phi) < 0$, если $u(\phi) > \frac{1}{3}$. Отсюда следует, что любая

траектория системы (3.2.2), начинающаяся в точке $Q(\rho_b, u_b)$, так что координата $u_b \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, будет оставаться в области $(\rho, u) = ((-\infty, \infty); [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])$. Согласно теореме Коши о существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений, решения, пересекающиеся хотя бы в одной точке идентичны. Поэтому, выбирая точку $Q(\rho_b, u_b)$, имеем $\mathbb{W}^u(P_3) \cap \mathbb{L}(Q(\rho_b, u_b)) \cap \mathbb{W}^s(P_4) = \mathbb{W}^u(P_3) \cap \mathbb{W}^s(P_4) \neq \emptyset$. Отсюда следует, что $\mathbb{W}^u(P_3) = \mathbb{L}(Q(\rho_b, u_b)) = \mathbb{W}^s(P_4)$. Таким образом, существует кривая $\mathbb{L}(Q(\rho_b, u_b))$, соединяющая точки P_3 и P_4 . Мы имеем три таких кривых: прямая линия, кривая, для которой $\rho(\phi) > -\frac{1}{3}$, и кривая, для которой $\rho(\phi) < -\frac{1}{3}$ (Рисунок 22).

Причем увидеть прямую линию, соединяющую точки P_3 и P_4 довольно просто. Рассмотрим задачу Коши для системы (3.2.2) с условиями $\rho_0 = -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} < u < \frac{1}{3}$. При условии $\rho_0 = -\frac{1}{3}$ первое уравнение (3.2.2), $\rho' = u(\frac{1}{3} + \rho_0) = u(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = 0$, не влияет на траектории в направлении ρ . А в направлении u точка, выпущенная на прямой линии, движется согласно $u' = -\frac{2}{3}\rho_0 - \rho_0^2 - u^2 = \frac{1}{9} - u^2$, то есть $u' > 0$ при $-\frac{1}{3} < u < \frac{1}{3}$. Решим полученное уравнение, $\frac{du}{dt} = \frac{1}{9} - u^2$, методом разделения переменных $\int \frac{du}{\frac{1}{9} - u^2} = \int dt$. Отсюда находим, что $-\frac{3}{2}(\log(1 - 3u) - \log(3u + 1)) = t \rightarrow \frac{3u+1}{1-3u} = e^t$.

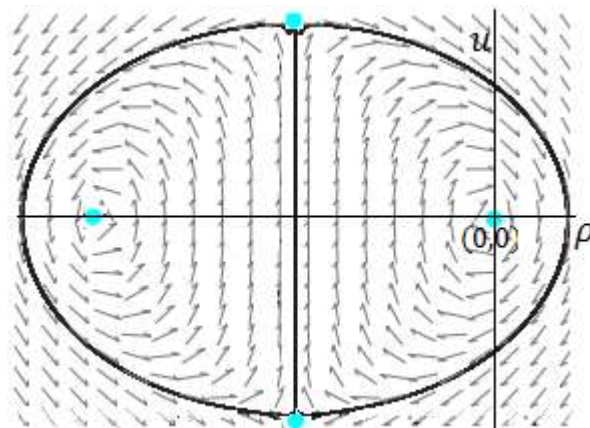


Рисунок 22. Гетероклинические орбиты системы (3.2.2)

Если мы перейдем от системы (3.2.2) обратно к (2.1.1.1), тогда возможно увидеть, что при $\mu^* = \frac{2}{3}$ существует траектория, соединяющая точки равновесия $(0,0,0)$ и $(0,0,\mu)$, и полностью лежащая на поверхности симметричного сфероида S (Рисунок 23). Эта траектория при проецировании на координатную плоскость (ρ, u) расщепляется на две кривые $\mathbb{L}\left(Q\left(\rho_b \geq \frac{1}{3}, u_b\right)\right)$ и $\mathbb{L}\left(Q\left(\rho_b \leq \frac{1}{3}, u_b\right)\right)$, соединяющие точки P_3 и P_4 . ■

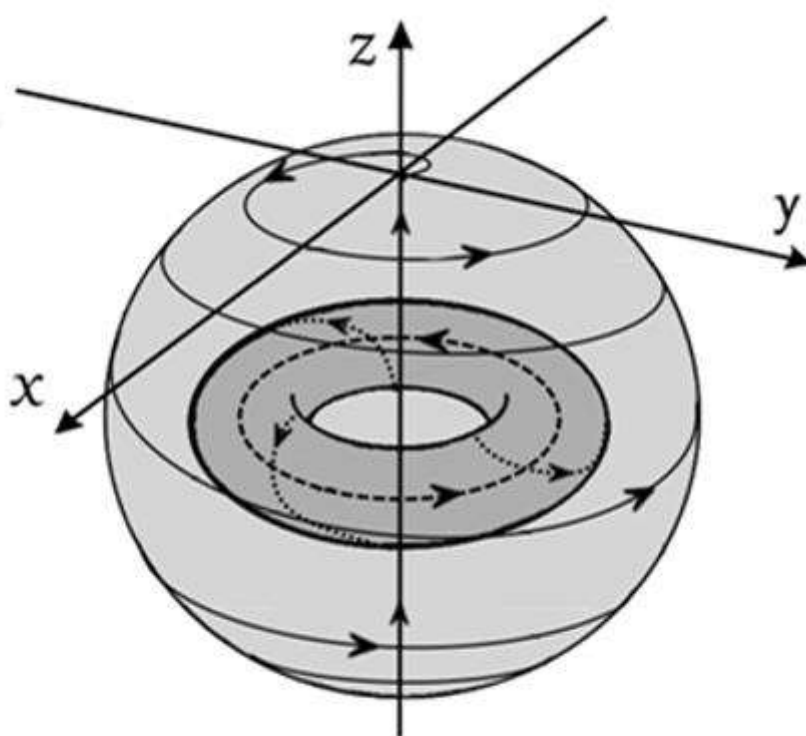


Рисунок 23. Фазовый портрет системы (2.1.1.1) при $\mu = \frac{2}{3}$

4.2 Эквивалентность системы Лэнгфорда осциллятору Дуффинга

В последнее время большинство физических явлений моделировались с помощью нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Одно из этих уравнений, осциллятор Дуффинга, привлекло к себе большое внимание из-за его классического применения в науке, инженерных науках и биологии. Оно названо в честь немецкого инженера-электрика. Учитывая колебательную

и хаотичную природу этого уравнения, многие ученые с большим энтузиазмом и интересом относятся к осциллятору Дуффинга, так как это оно воспроизводит похожие явления в нашей природе. Осциллятор Дуффинга возникает в результате движение тела, находящегося под нелинейной силой пружины, линейного вязкого демпфирования и внешней периодической силы. Колебания механических систем под влиянием внешней периодической силы может быть описано с помощью осциллятора Дуффинга [22].

Осциллятор Дуффинга описывается следующим уравнением

$$y''(t) + \eta y'(t) + \vartheta y(t) + \gamma y^3(t) = f(t),$$

с начальными условиями $y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$,

где $\eta, \vartheta, \gamma, \alpha$ и β являются вещественными константами, а $f(t)$ – скалярная функция.

Покажем, что система Лэнгфорда эквивалентна осциллятору Дуффинга. Рассмотрим снова систему (3.2.1)

$$\begin{cases} r' = (2\mu - 1 + z) \cdot r \\ z' = -\mu z - (r^2 + z^2) \end{cases}$$

Из первого уравнения $r' = (2\mu - 1 + z) \cdot r$, изолировав z , получим $z = \frac{r'}{r} - (2\mu - 1)$, и дифференцируя полученное выражение, находим $z' = \frac{rr'' - (r')^2}{r^2}$.

Подставляя во второе уравнение $z' = -\mu z - (r^2 + z^2)$ системы (3.2.1), имеем следующее

$$\frac{rr'' - (r')^2}{r^2} = -\mu \left(\frac{r'}{r} - (2\mu - 1) \right) - \left(r^2 + \left(\frac{r'}{r} - (2\mu - 1) \right)^2 \right)$$

$$rr'' - (r')^2 + \mu rr' - r^2(2\mu^2 - \mu) + r^4 + (r')^2 - rr'(4\mu - 2) + r^2(2\mu - 1)^2 = 0$$

После взаимоуничтожения членов $(r')^2$ поделим выражение на r

$$r'' - r'(3\mu - 2) + r(2\mu^2 - 3\mu + 1) + r^3 = 0.$$

То есть мы привели систему Лэнгфорда к одномерному уравнению, а именно к осциллятору Дуффинга

$$r'' - r'(3\mu - 2) + r(2\mu^2 - 3\mu + 1) + r^3 = 0,$$

где $y(t) = r(t)$, а $\eta = 2 - 3\mu$, $\vartheta = 2\mu^2 - 3\mu + 1$, $\gamma = 1$, $f(t) = 0$.

Представление в гамильтоновой форме

Рассмотрим систему (3.2.2)

$$\begin{cases} \rho' = \frac{1}{3}u + u\rho \\ u' = -\frac{2}{3}\rho - (\rho^2 + u^2) \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение $\rho' = \frac{1}{3}u + u\rho$ системы (3.2.2) и затем подставляя выражение для u' , получим, что

$$\begin{aligned} \rho'' &= \frac{1}{3}u' + u'\rho + \rho'u = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\rho - (\rho^2 + u^2)\right) + \left(-\frac{2}{3}\rho - (\rho^2 + u^2)\right)\rho + \\ &+ \left(\frac{1}{3}u + u\rho\right)u = -\frac{2}{9}\rho - \frac{1}{3}\rho^2 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{2}{3}\rho^2 - \rho^3 - u^2\rho - \frac{1}{3}u^2 + u^2\rho \\ &= -\frac{2}{9}\rho - \rho^2 - \rho^3. \end{aligned}$$

Можно представить полученное выражение как систему Гамильтона

$$\begin{aligned} \rho'' &= -\frac{2}{9}\rho - \rho^2 - \rho^3 = -f(\rho) \\ \rho'' + f(\rho) &= 0 \\ x_1 &= \rho, x_2 = \rho' \\ \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -f(x_1) \end{cases} \end{aligned}$$

И найти первый интеграл

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_2^2 + F(x_1), \quad F(x_1) = \int_0^{x_1} f(s)ds \\ H(\rho, \rho') &= \frac{1}{2}(\rho')^2 + \frac{2}{18}\rho^2 + \frac{1}{3}\rho^3 + \frac{1}{4}\rho^4. \end{aligned}$$

Заключение

Таким образом, в данной работе в процессе исследования модели Лэнгфорда были получены следующие основные результаты:

1⁰. Проведен анализ классических сценариев бифуркаций, а именно бифуркаций кратного равновесия, бифуркации Андронова-Хопфа.

2⁰. Проведено исследование бифуркации в окрестности периодического решения и было выяснено, что в окрестности цикла периодического решения возникает новое устойчивое движение по устойчивому тору.

3⁰. Было доказано существование гетероклинических орбит, соединяющие точки равновесия.

4⁰. Показана эквивалентность модели Лэнгфорда осциллятору Дуффинга, а также, что полученное выражение можно представить в форме Гамильтона.

Также были построены фазовые портреты при разных значениях параметра μ .

Список литературы

1. Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фазлытдинов М.Ф., Юмагулов М.Г. : Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем. Уфимский математический журнал. Том 10. № 1 (2018). С. 25-49. УДК 517.938
2. Като С. Теория возмущений линейных операторов. – М. : Мир, 1975. – 576 с.
3. Каток А. Б. Введение в теорию динамических систем / А. Б. Каток, Б. Хасселблат. – М. : МЦНМО, 2005. – 464 с.
4. Кузнецов А. П. Динамические системы и бифуркации. – Саратов:ООО Издательский центр «Наука», 2015. – 168 с.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М. : Эдиториал УРСС, 2004. – 432 с.
6. Марсден Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М. : Мир, 1980. – 368 с.
7. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир. 1980. 368 с.
8. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2009. 548 с.
9. Юмагулов М.Г. Введение в теорию динамических систем. — СПб.: Лань, 2014. 272 с.
10. Al-Jawary, MA, Al-Razaq, SG. Analytic and numerical solution for Duffing equations. International Journal of Basic and Applied Sciences. 2016;5(2):115-119.
11. Belozyorov, V.Y.: Exponential-algebraic maps and chaos in 3D autonomous quadratic systems. Int. J. Bifurcat. Chaos 25, 1550048 (2015)
12. García, I.A., Valls, C.: The three-dimensional center problem for the zero-Hopf singularity. Discrete Contin. Dyn. Syst. 36, 2027–2046 (2016)

13. Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D., Wan, Y.H.: Theory and Applications of Hopf Bifurcation. CUP Archive, Cambridge (1981)
14. Hopf, E.: A mathematical example displaying features of turbulence. Commun. Pur. Appl. Math. 1, 303–322 (1948)
15. Krishchenko, A.P., Starkov, K.E.: Iteration method of the localization of periodic orbits. In: Proceedings of the International Conference on Physics and Control, 2005 . IEEE, pp. 602–605 (2005)
16. Krishchenko, A.P., Starkov, K.E.: Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with applications to the Lanford system. Int. J. Bifurcat. Chaos 16, 3249–3256 (2006)
17. Krishchenko, A.P., Starkov, K.E.: Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with applications to the Lanford system. Int. J. Bifurcat. Chaos 16, 3249–3256 (2006).
18. Kuznetsov, Y. A.: Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer, 1998. 593 p
19. Nikolov, S., Bozhkov, B.: Bifurcations and chaotic behavior on the Lanford system. Chaos Solitons Fractals 21, 803–808 (2004)
20. Phillipson P, Schuster P. Bifurcation dynamics of three-dimensional systems. Int J Bifurcat Chaos 2000;10(1.3.1):1787–804 (2006)
21. Strogatz, S.H. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering — New York, Perseus Books Publishing. 1994. 501 c.
22. Yanggeng Fu, Jibin Li: Bifurcations of Invariant Torus and Knotted Periodic Orbits in Generalized Hopf-Langford Type Equations.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Гаврилова Олега Алексеевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Итерационный метод решения нелокальных задач для некоторых эволюционных уравнений» являются: Теорема 1, Теорема 2, Теорема 3.


Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В течение двух лет обучения в магистратуре мною был произведён поиск в следующих системах: Яндекс, Google Scholar, Elibrary, Mathnet по следующим ключевым словам: нелокальные задачи, теория полугрупп, задачи инициализации, интегральные наблюдения (см. Список литературы к магистерской диссертации), и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Иваном Владимировичем Тихоновым, профессором кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
- Проведена переписка с Пармузиным Евгением Ивановичем, доцентом кафедры вычислительных технологий и моделирования факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась 9 июня 2023. На Смотри представлен окончательный текст работы.


26.05.23 Москва, Россия



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛИАЛ В Г. САРОВЕ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Гаврилов Олег Алексеевич

**Итерационный метод решения нелокальных задач
для некоторых эволюционных уравнений**

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Тихонов Иван Владимирович

Москва, 2023

Оглавление

Введение и обзор литературы	3
1 Постановка и исследование абстрактной задачи	5
1.1 Абстрактная модель	5
1.2 Вывод операторного уравнения	6
1.3 Стандартные условия разрешимости	8
1.4 Уточнённые условия разрешимости	10
1.5 Случай с вещественным спектром	11
2 Численная реализация алгоритма	15
2.1 Конкретная модель теплопроводности	15
2.2 Построение разностных методов	17
2.3 Итоговый алгоритм	22
3 Примеры	24
3.1 Пример 1	26
3.2 Пример 2	28
3.3 Пример 3	30
3.4 Пример 4	32
3.5 Пример 5	35
3.6 Пример 6	37
Заключение	39
Литература	40

Введение и обзор литературы

В современной математике важную роль играет активно развивающаяся теория обратных и некорректно поставленных задач. В частности, многие прикладные проблемы сводятся к исследованию и интерпретации наблюдений, полученных в ходе некоторого эксперимента: по измеренным в его результате косвенным проявлениям необходимо сделать выводы о свойствах объекта или процесса. Другими словами, требуется определить причины, если известны полученные в результате наблюдений следствия. Подобные задачи естественно называть обратными. Как правило, они являются некорректно поставленными (по Адамару). Для успешного их решения активно применяются математические методы.

Большое значение на практике имеют нелокальные по времени задачи, которые можно рассматривать как частный случай обратных. В работе [1] рассматривается специальная нелокальная задача для абстрактного эволюционного уравнения в банаховом пространстве. Требуется восстановить начальное состояние при помощи нового условия, содержащего интеграл от неизвестного решения с заданной весовой функцией. В той же статье [1], а также в [2] доказываемся корректность такой задачи.

Теория нелокальных задач развивается в течение многих десятилетий. Одно из первых их упоминаний и методов решения встречается в книге [6]. Систематические исследования нелокальных по времени задач для параболических и/или гиперболических уравнений приведены, например, в статьях [7]–[14]. Подобные нелокальные условия возникают естественным образом во многих приложениях. В теории оптимального управления очень распространены задачи усвоения данных наблюдений. Например, в статье [3] изучается задача оптимизации загрязнений, содержащая нелокальное условие, которое называют интегральным наблюдением. Также встречается термин «четырёхмерная ассимиляция» применительно к задачам гидродинамики при моделировании атмосферы и океана, как в работе [4]. Интегральные условия по времени появляются и в динамике популяций, как показано в книге [5].

В настоящей магистерской диссертации рассматривается задача из [1]. Вводятся более общие условия сходимости итерационного метода с использованием теории полугрупп [15], [16] и спектральной теории [17], [18]. Разработаны формальные алгоритмы решения с использованием вычислительных методов [19]. Для их реализации написана корректно работающая программа на языке Python. Проведено множество вычислительных экспериментов, подтвердивших теоретические результаты.

Глава 1

Постановка и исследование абстрактной задачи

1.1 Абстрактная модель

Рассмотрим эволюционное уравнение в банаховом пространстве E :

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.1)$$

Здесь $u(t)$ является векторной функцией на $[0, T]$ со значениями в E ; оператор A — линейный замкнутый с плотной областью определения $D(A) \subset E$, порождающий в E аналитическую полугруппу $U(t)$ класса C_0 (см. [15]–[17]). В соответствии с [1] *обобщённым решением* уравнения (1.1) будем называть функцию $u(t) = U(t)u_0$, взятую при $0 \leq t \leq T$, с некоторым элементом $u_0 \in E$. При этом u_0 совпадает с начальным состоянием $u(0)$. Если дополнительно $u_0 \in D(A)$, то решение $u(t) = U(t)u_0$ называется *классическим*. Такие решения удовлетворяют уравнению (1.1) в строгом смысле по норме пространства E . Также известно (см. введение к [17]), что классические решения являются непрерывно дифференцируемыми на $[0, T]$, в то время как обобщённые являются лишь непрерывными и удовлетворяют уравнению (1.1) в слабом смысле.

Предположим, что начальное состояние $u_0 \in E$ сейчас неизвестно, а вместо него рассмотрим дополнительное соотношение

$$\int_0^T \eta(t)u(t) dt = u_1. \quad (1.2)$$

Считаем, что $u_1 \in E$ — заданный элемент, а $\eta(t)$ — заданная вещественная функция с ограниченной вариацией на $[0, T]$, причём $\eta(0) = \eta(0+0) > 0$.

Задачу (1.1)–(1.2) нахождения функции $u(t) = U(t)u_0$ будем называть *нелокальной (по времени)*. Её физический смысл можно сформулировать следующим образом. Известно, что некоторая величина (не обязательно скалярная) зависит от времени и описывается эволюционным уравнением (1.1). Кроме того, в результате некоторого эксперимента получено среднее значение наблюдаемой величины с заданным весом за конкретный период времени. Требуется определить, каким было значение в начальный момент. Заметим также, что задачу можно сформулировать немного по-другому — а именно как задачу оптимального управления. Требуется подобрать начальное состояние (которое и будет являться управлением) так, чтобы среднее значение величины за весь период измерений равнялось желаемому (или было близко к нему). В качестве примера рассматривается двумерная модель теплопроводности (главы 2 и 3).

1.2 Вывод операторного уравнения

Пусть полугруппа $U(t)$ является сильно сжимающей в пространстве E , то есть выполняется неравенство

$$\|U(t)\| \leq M e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

где $M \geq 0$, $\alpha > 0$ — фиксированные числа. Отсюда следует (см. [15]), что спектр $\sigma(A)$ оператора A содержится в комплексной полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha\}$. В частности, число 0 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$, то есть существует обратный ограниченный оператор $A^{-1} : E \rightarrow E$.

Рассмотрим решение $u(t) = U(t)u_0$ уравнения (1.1), причём $u_0 \in D(A)$. Подействуем оператором A на обе части равенства (1.2), которое можно ещё записать в виде

$$\int_0^T \eta(t) U(t) u_0 dt = u_1.$$

При этом чтобы выражение Au_1 имело смысл, необходимо изначально потребовать, чтобы $u_1 \in D(A)$. Поскольку оператор A обратим, получаем эквивалентное равенство:

$$A \int_0^T \eta(t)U(t)u_0 dt = Au_1.$$

Согласно теореме 3.3.2 из [18] оператор A можно внести под знак интеграла. Далее воспользуемся тем, что $AU(t)u_0 = Au(t) = u'(t)$ в силу (1.1), и применим формулу интегрирования по частям (см. теорему 3.3.1 из [18]).

$$A \int_0^T \eta(t)U(t)u_0 dt = \int_0^T \eta(t) (AU(t)u_0) dt = \int_0^T \eta(t)u'(t) dt = \eta(t)u(t) \Big|_0^T - \int_0^T u(t) d\eta(t).$$

Интеграл в последнем выражении понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Получаем следующее равенство, справедливое при $u_0, u_1 \in D(A)$.

$$\eta(0)u_0 - \left(\eta(T)U(T)u_0 - \int_0^T U(t)u_0 d\eta(t) \right) = -Au_1.$$

Пусть теперь $u_0 \in E \setminus D(A)$. Поскольку $D(A)$ — всюду плотное множество в E , то существует последовательность $\{u_0^{(k)}\} \subset D(A) : u_0^{(k)} \rightarrow u_0$ по норме E . Для каждого $u_0^{(k)}$ справедливы все вышеизложенные рассуждения, то есть

$$A \int_0^T \eta(t)U(t)u_0^{(k)} dt = Au_1 = \eta(T)U(T)u_0^{(k)} - \int_0^T U(t)u_0^{(k)} d\eta(t) - \eta(0)u_0^{(k)}.$$

При $k \rightarrow \infty$ имеем $u_0^{(k)} \rightarrow u_0$,

$$\int_0^T \eta(t)U(t)u_0^{(k)} dt \longrightarrow \int_0^T \eta(t)U(t)u_0 dt,$$

$$\eta(T)U(T)u_0^{(k)} - \int_0^T U(t)u_0^{(k)} d\eta(t) - \eta(0)u_0^{(k)} \longrightarrow \eta(T)U(T)u_0 - \int_0^T U(t)u_0 d\eta(t) - \eta(0)u_0.$$

Эти соотношения следуют из сжимаемости полугруппы $U(t)$ и основной оценки интеграла Стильтьеса

$$\left\| \int_0^T f(t) d\eta(t) \right\| \leq \max_{[0,T]} \|f(t)\| \cdot \text{Var}\{\eta(t)\} \Big|_0^T.$$

В силу замкнутости оператора A получаем два следствия:

$$\int_0^T \eta(t)U(t)u_0 dt \in D(A), \quad \forall u_0 \in E,$$

$$A \int_0^T \eta(t)U(t)u_0 dt = \eta(T)U(T)u_0 - \int_0^T U(t)u_0 d\eta(t) - \eta(0)u_0.$$

Таким образом, из операторного уравнения первого рода

$$\int_0^T \eta(t)U(t)u_0 dt = u_1,$$

где элемент $u_1 \in D(A)$ задан, u_0 неизвестен, действием обратимого оператора A получаем эквивалентное уравнение второго рода

$$\eta(0)u_0 - \left(\eta(T)U(T)u_0 - \int_0^T U(t)u_0 d\eta(t) \right) = -Au_1.$$

Введём обозначения: $\beta = \eta(0) > 0$; $f = -Au_1$ — известный элемент; $B : E \rightarrow E$ — линейный ограниченный оператор, определённый по правилу

$$Bv = \eta(T)U(T)v - \int_0^T U(t)v d\eta(t), \quad \forall v \in E.$$

В итоге получаем *основное уравнение*

$$\beta u_0 - Bu_0 = f, \quad u_0 - ? \tag{1.3}$$

1.3 Стандартные условия разрешимости

Решение уравнения (1.3) будем искать в виде ряда Неймана

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f. \tag{1.4}$$

На его основе строится соответствующий метод итераций.

Известны стандартные условия сходимости (1.4) (см. [1]):

$$\|U(t)\| \leq M e^{-\alpha t}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \alpha > 0, \quad M \geq 0, \quad (1.5)$$

$$\eta(0) > 0, \quad \eta(t) \text{ — неотрицательная и невозрастающая функция на } [0, T]. \quad (1.6)$$

В условии (1.5) норму можно заменить эквивалентной нормой, для которой константа M обращается в единицу, как показано в [1] или [18, с. 376]. Пусть

$$\|h\|_1 := \sup_{t \geq 0} \|e^{\alpha t} U(t)h\|, \quad h \in E.$$

Тогда $\|h\| \leq \|h\|_1 \leq M\|h\|$, то есть нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны в пространстве E . Кроме того,

$$\begin{aligned} \|U(t)h\|_1 &= \sup_{\tau \geq 0} \|e^{\alpha \tau} U(\tau)U(t)h\| = \sup_{s \geq t} \|e^{\alpha(s-t)} U(s)h\| = \\ &= e^{-\alpha t} \sup_{s \geq t} \|e^{\alpha s} U(s)h\| \leq e^{-\alpha t} \sup_{s \geq 0} \|e^{\alpha s} U(s)h\| = e^{-\alpha t} \|h\|_1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|U(t)\|_1 \leq e^{-\alpha t}$, $\forall t \geq 0$, то есть получаем оценку, аналогичную (1.5), но с константой $M = 1$.

Утверждение 1. Пусть выполнены стандартные условия разрешимости:

$$\exists \alpha > 0: \quad \|U(t)\| \leq e^{-\alpha t}, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\eta(0) > 0, \quad \eta(t) \text{ — неотрицательная и невозрастающая функция на } [0, T].$$

Тогда $\|B\| < \beta = \eta(0)$ и ряд (1.4) сходится по норме пространства E .

Доказательство. Для произвольного элемента $u_0 \in E$

$$\begin{aligned} \|Bu_0\| &= \left\| \eta(T)U(T)u_0 - \int_0^T U(t)u_0 d\eta(t) \right\| \leq \\ &\leq \|\eta(T)\| \cdot \|U(T)\| \cdot \|u_0\| + \int_0^T \|U(t)\| \cdot \|u_0\| \cdot |d\eta(t)| = \\ &= \|\eta(T)\| \cdot \|U(T)\| \cdot \|u_0\| - \int_0^T \|U(t)\| \cdot \|u_0\| d\eta(t) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \eta(T)e^{-\alpha T}\|u_0\| - \int_0^T e^{-\alpha t}\|u_0\|d\eta(t) \Rightarrow \\
\frac{\|Bu_0\|}{\|u_0\|} &\leq \eta(T)e^{-\alpha T} - \int_0^T e^{-\alpha t}d\eta(t) = \eta(T)e^{-\alpha T} - \left(e^{-\alpha t}\eta(t) \Big|_0^T + \alpha \int_0^T \eta(t)e^{-\alpha t}dt \right) = \\
&= \beta - \alpha \int_0^T \eta(t)e^{-\alpha t}dt < \beta \Rightarrow \|B\| < \beta.
\end{aligned}$$

Из условия $\|B\| < \beta$ следует сходимость ряда (1.4) по норме пространства E . \square

1.4 Уточнённые условия разрешимости

Покажем, как можно получить более точные условия разрешимости операторного уравнения (1.3). Известно (см. [17]), что из неравенства $r(B) < \beta$ также следует сходимость ряда (1.4), где $r(B)$ — спектральный радиус оператора B . Поскольку $r(B) \leq \|B\|$, это условие является более слабым, чем $\|B\| < \beta$. Получим связь между спектрами операторов B и A .

Наложим дополнительное условие на полугруппу $U(t)$. Пусть $U(t)$ непрерывна в операторной норме при $t \geq t_0 > 0$ при некотором фиксированном t_0 , то есть $\|U(t+s) - U(s)\| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$, $\forall t \geq t_0$, где норма берётся в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в E . Для этого достаточно выполнения любого из следующих требований:

- $U(t)$ — аналитическая при $t > 0$,
- $U(t)$ — дифференцируемая при $t > 0$,
- $U(t)$ — компактная при $t > 0$,
- $U(t)$ — компактная при $t \geq t_0 > 0$.

Введём *характеристическую функцию* оператора B :

$$F(\lambda) = \eta(T)e^{\lambda T} - \int_0^T e^{\lambda t}d\eta(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.7)$$

Тогда $B = F(A)$. По теореме об отображении спектра (см. [18], теорема 16.4.1)

$$\sigma(B) = F(\sigma(A)) \cup \{\eta(0+0) - \eta(0)\}.$$

По условию функция $\eta(t)$ непрерывна справа в нуле, то есть $\eta(0+0) = \eta(0)$,

$$\sigma(B) = F(\sigma(A)) \cup \{0\}.$$

Теперь ясно, что условие $r(B) < \beta$ эквивалентно

$$|F(\lambda)| < \beta, \quad \forall \lambda \in \sigma(A). \quad (1.8)$$

Условие (1.8) на практике можно проверять численно для конкретной функции η и конкретного оператора A . Для этого можно вычислять значения F на спектре оператора A и проверять, что они попадают строго внутрь круга с центром в нуле и радиусом β на комплексной плоскости.

1.5 Случай с вещественным спектром

Пусть оператор A имеет чисто вещественный спектр, расположенный на луче $(-\infty, -\alpha]$, $\alpha > 0$. Это выполнено, например, если (1.1) является уравнением теплопроводности (в том числе многомерным). Покажем, как в этом случае преобразуется условие (1.8) сходимости метода итераций (1.4). Используя представление (1.7), получим

$$\left| \eta(T)e^{\lambda T} - \int_0^T e^{\lambda t} d\eta(t) \right| < \eta(0), \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \subset (-\infty, -\alpha].$$

Для простоты считаем, что λ меняется не только на множестве $\sigma(A)$, а сразу на всём луче $(-\infty, -\alpha]$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\left| \eta(0) + \lambda \int_0^T e^{\lambda t} \eta(t) dt \right| < \eta(0), \quad \forall \lambda \leq -\alpha. \quad (1.9)$$

Для удобства введём переменную $p = -\lambda$, тогда (1.9) эквивалентно

$$0 < p \int_0^T e^{-pt} \eta(t) dt < 2\eta(0), \quad \forall p \geq \alpha. \quad (1.10)$$

Выражение в центральной части (1.10) обозначим через $H_T(p)$ и назовём его *преобразованием Карсона* функции η на отрезке $[0, T]$. Можно показать, что

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} H_T(p) = \eta(0).$$

Это означает, что требуемое неравенство (1.10) будет выполнено при достаточно больших p . Получим явную оценку, при которой оно справедливо вообще для всех $p \geq \alpha$.

$$\begin{aligned} |H_T(p) - \eta(0)| &= \left| \int_0^T p e^{-pt} \eta(t) dt - \eta(0) \right| = \left\{ \int_0^T p e^{-pt} dt = 1 - e^{-pT} \right\} = \\ &= \left| \int_0^T p e^{-pt} \eta(t) dt - \int_0^T p e^{-pt} \eta(0) dt - e^{-pT} \eta(0) \right| \leq \\ &\leq \int_0^T p e^{-pt} |\eta(t) - \eta(0)| dt + e^{-pT} \eta(0) \leq \\ &\leq \{ \text{предположим, что } |\eta(t) - \eta(0)| \leq Lt, \forall t \in [0, T] \} \leq \\ &\leq L \int_0^T p e^{-pt} t dt + e^{-pT} \eta(0) = \frac{L}{p} [1 - e^{-pT} (1 + pT)] + e^{-pT} \eta(0) < \\ &< \frac{L}{p} [1 - e^{-pT}] + e^{-pT} \eta(0) = (*). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы $(*) < \eta(0)$, что эквивалентно (1.10).

$$(*) < \eta(0) \Leftrightarrow \frac{L}{p} (1 - e^{-pT}) < \eta(0) \cdot (1 - e^{-pT}) \Leftrightarrow L < p\eta(0).$$

Отсюда следует, что если $\alpha > L/\eta(0)$, то (1.10) выполнено $\forall p \geq \alpha$. Таким образом, получаем достаточное условие

$$L < \alpha\eta(0),$$

при этом мы дополнительно потребовали от функции $\eta(t)$ следующее условие типа Липшица:

$$|\eta(t) - \eta(0)| \leq Lt, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.11)$$

с некоторой константой $L \geq 0$. Условие (1.11) является более сильным, чем непрерывность справа в нуле (которая требовалась изначально), и геометрически означает, что график функции $\eta(t)$ на отрезке $[0, T]$ лежит (не строго) внутри угла, образованного прямыми $\eta(0) - Lt$ и $\eta(0) + Lt$. В качестве L можно брать $\max |\eta'(t)|$ на $[0, T]$ в случае, если η непрерывно дифференцируема.

Итоговый результат можно зафиксировать в виде двух теорем, выражающих достаточные условия сходимости метода итераций, причём второе является более жёстким, чем первое, но при этом гораздо проще проверяется для конкретных η и α .

Теорема 1. Пусть в банаховом пространстве E линейный замкнутый оператор A порождает аналитическую полугруппу $U(t)$ при $t > 0$, а спектр $\sigma(A) \subset (-\infty, -\alpha]$ с некоторой константой $\alpha > 0$. Если функция η определена на отрезке $[0, T]$ и такова, что

$$0 < p \int_0^T e^{-pt} \eta(t) dt < 2\eta(0), \quad \forall p \geq \alpha, \quad (1.12)$$

то $r(B) < \beta$ и для любого элемента $f \in E$ ряд Неймана

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f \quad (1.13)$$

сходится по норме пространства E .

Напомним, что приняты следующие обозначения: $r(B)$ — спектральный радиус оператора B ; $\beta = \eta(0) > 0$; линейный ограниченный оператор $B : E \rightarrow E$ определяется по формуле

$$B = \eta(T)U(T) - \int_0^T U(t) d\eta(t).$$

Теорема 2. Пусть в условиях предыдущей теоремы имеет место ограничение типа Липшица:

$$\exists L \geq 0 : |\eta(t) - \eta(0)| \leq Lt, \quad \forall t \in [0, T].$$

Тогда выполнено условие с преобразованием Карсона (1.12) и ряд (1.13) сходится по норме пространства E .

Теперь, используя полученные результаты, вернёмся к исходной задаче (1.1)–(1.2) и опишем конструктивный метод нахождения приближённого решения.

1. Вычисляем элемент $f = -Au_1$. При этом если $u_1 \notin D(A)$, то задача неразрешима даже в обобщённом смысле.
2. Составляем последовательность (по аналогии со схемой Горнера для многочленов)

$$u_0^{(k)} = \frac{1}{\beta} \left(f + Bu_0^{(k-1)} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad u_0^{(0)} = \frac{1}{\beta} f.$$

Каждый член последовательности является частичной суммой ряда (1.13), и $u_0^{(k)}$ сходится к u_0 . Выбираем число итераций N_B и вычисляем $u_0^{(N_B)}$ по данной рекуррентной формуле.

3. На каждой итерации действие оператора B вычисляется по определению:

$$Bv = \eta(T)U(T)v - \int_0^T U(t)v d\eta(t), \quad \forall v \in E.$$

При этом требуется знать величину $u(t) = U(t)v$ во все моменты времени, то есть необходимо решать «прямую» задачу

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0) &= v. \end{aligned}$$

4. Полученная частичная сумма $u_0^{(N_B)}$ является приближённым решением нелокальной задачи (1.1)–(1.2).

Глава 2

Численная реализация алгоритма

2.1 Конкретная модель теплопроводности

В прямоугольнике $D = [0, l_1] \times [0, l_2]$ рассмотрим задачу теплопроводности

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - c(x, y)u, \quad (x, y) \in D, \quad t \in [0, T], \quad (2.1)$$

$$u|_{\partial D} = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_0^T u(x, y, t)\eta(t) dt = u_1(x, y). \quad (2.3)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$ — искомое решение, а коэффициент $a^2 > 0$ и функции $c(x, y) \geq 0$, $\eta(t)$, $u_1(x, y)$ известны. Задача (2.1)–(2.3), очевидно, является частным случаем (1.1)–(1.2). В качестве банахова пространства E выбирается $L_2(D)$, а оператор $A : L_2(D) \rightarrow L_2(D)$ определяется по формуле

$$(Au)(x, y) = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - c(x, y)u$$

с областью определения

$$D(A) = \{u \in C^{2,2}(D) : u|_{\partial D} = 0\}.$$

Физический смысл задачи (2.1)–(2.3) заключается в следующем. Рассмотрим тонкую прямоугольную пластину, в которой происходит распространение тепла. Неизвестной величиной $u(x, y, t)$ является температура, заданная в каждой точке пластины в каждый момент времени. На границе поддерживается постоянная температура, которую условно принимаем за нулевую, а на поверхности пластины происходит теплообмен с окружающей средой, за что отвечает член $c(x, y)u$ в (2.1). Нелокальное условие (2.3) означает, что задано взвешенное среднее значение температуры, которое либо получено в результате измерений (с помощью каких-либо устройств-интеграторов), либо является желаемым в случае, если задача формулируется в смысле оптимального управления. В частности, если $\eta(t) \equiv 1/T$, то интеграл представляет собой в классическом смысле среднее значение температуры по времени.

Сразу заметим, что если $c(x, y) = \text{const}$, то решение такой задачи можно искать в виде ряда Фурье по соответствующей системе собственных функций. Мы будем рассматривать произвольный коэффициент $c(x, y) \geq 0$, поскольку в общем случае собственные функции нельзя найти аналитически и метод Фурье неприменим.

Нашей целью является проверка достаточных условий сходимости итерационного метода, которые были получены в предыдущей главе (теоремы 1, 2). Очевидно, выполняется условие на линейность и замкнутость оператора A . Удобно также рассмотреть оператор $(-A)$, который является симметричным и положительно определённым. Отсюда следует, что спектр $\sigma(-A)$ является вещественным и положительным, то есть лежит на луче $[\alpha, +\infty)$, где α совпадает с минимальным собственным значением. Тогда спектр оператора A лежит на $(-\infty, -\alpha]$, что и требуется в условиях теорем. При этом если $c(x, y) \equiv c = \text{const}$, то α вычисляется точно:

$$\alpha = a^2 \pi^2 \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right) + c. \quad (2.4)$$

В общем же случае мы не можем найти точное значение α , но предлагается взять $c_0 = \min c(x, y)$ и ввести α_0 по формуле, аналогичной (2.4) (но с заменой c на c_0). Тогда $\alpha_0 \leq \alpha$, а теоремы 1 и 2 остаются верными для α_0 вместо α .

2.2 Построение разностных методов

Как мы помним, в процессе решения нелокальной задачи требуется на каждой итерации решать «прямую» задачу (то есть находить значение $U(t)v$ для конкретного v), а также вычислять интеграл. Мы будем это делать приближённо, используя методы конечных разностей. Сначала рассмотрим «прямую» задачу, соответствующую (2.1)–(2.3):

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - c(x, y)u, \quad (x, y) \in D, \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

$$u|_{\partial D} = 0, \quad (2.6)$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y). \quad (2.7)$$

Здесь $v(x, y)$ — заданное начальное условие. Такая задача является классической и решается множеством различных методов. Мы будем использовать схему переменных направлений (см. [19]), поскольку она является абсолютно устойчивой и имеет второй порядок аппроксимации по времени. Сначала введём равномерную сетку на множестве переменных $x \in [0, l_1]$, $y \in [0, l_2]$, $t \in [0, T]$:

$$x_i = ih_1, \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad h_1 = l_1/N_1,$$

$$y_j = jh_2, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad h_2 = l_2/N_2,$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad \tau = T/M.$$

Также обозначим $c_{ij} \equiv c(x_i, y_j)$, $h = \max\{h_1, h_2\}$. Требуется найти сеточную функцию u_{ij}^n , значения которой соответствуют узлам (x_i, y_j, t_n) .

Рассмотрим следующую разностную схему:

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n}{\tau/2} = a^2 \left(\Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^n \right) - c_{ij} u_{ij}^{n+1/2}, \quad (2.8)$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\tau/2} = a^2 \left(\Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^{n+1} \right) - c_{ij} u_{ij}^{n+1/2}. \quad (2.9)$$

Здесь операторы Λ_1 и Λ_2 обозначают вторые разностные производные по x и по y соответственно, то есть

$$\Lambda_1 u_{ij} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_1^2}, \quad \Lambda_2 u_{ij} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_2^2}.$$

На данном этапе у нас возник вопрос, на каком временном слое брать значение, соответствующее $c(x, y)u$, и принципиально ли это в нашем случае. Как видим,

уравнения (2.8) и (2.9) содержат один и тот же член $c_{ij}u_{ij}^{n+1/2}$. Можно ли взять, например, $c_{ij}u_{ij}^n$ для первого уравнения или $c_{ij}u_{ij}^{n+1}$ — для второго? Оказалось, такой выбор имеет принципиальное значение, а схема (2.8)–(2.9) обладает вторым порядком суммарной аппроксимации по τ . В литературе по разностным методам обычно рассматривается классическое уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t),$$

не содержащее член $c(x, y)u$. Для этого уравнения строится схема, аналогичная (2.8)–(2.9), но в которой $c_{ij} \equiv 0$, и доказываются утверждения об аппроксимации и устойчивости такой схемы. В нашем случае появление ненулевого коэффициента $c(x, y)$ подталкивает к тому, чтобы аккуратно провести аналогичное исследование.

Теорема 3. *Разностная схема (2.8)–(2.9) для уравнения (2.5) обладает суммарной аппроксимацией $O(\tau^2 + h^2)$ и является абсолютно устойчивой.*

Доказательство. Пусть $u(x, y, t)$ — достаточно гладкая функция, являющаяся решением уравнения (2.5). Погрешности аппроксимации ψ_1, ψ_2 на решении u имеют вид

$$\begin{aligned}\psi_{1,ij}^n &= -\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n}{\tau/2} + a^2 \left(\Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^n \right) - c_{ij} u_{ij}^{n+1/2}, \\ \psi_{2,ij}^n &= -\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\tau/2} + a^2 \left(\Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^{n+1} \right) - c_{ij} u_{ij}^{n+1/2}.\end{aligned}$$

Далее раскладываем функции в этих выражениях по формуле Тейлора в точке (x_i, y_j, t_n) , опуская индексы.

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{2}{\tau} \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3) - u \right) + \\ &\quad + a^2 \Lambda_1 \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2) \right) + a^2 \Lambda_2 u - c \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2) \right) = \\ &= -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= \underbrace{\left(-u_t + a^2(u_{xx} + u_{yy}) - cu \right)}_{=0} + \frac{\tau}{2} \left(-\frac{1}{2} u_{tt} + a^2 u_{xxt} - c u_t \right) + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{2} u_t + a^2 u_{xx} - cu \right) + O(\tau^2 + h^2).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что Λ_1 аппроксимирует дифференциальный оператор $\partial^2/\partial x^2$ со вторым порядком по h_1 , и аналогично Λ_2 аппроксимирует $\partial^2/\partial y^2$ со вторым порядком по h_2 .

$$\begin{aligned} \psi_2 &= -\frac{2}{\tau} \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \\ &+ a^2 \Lambda_1 \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + a^2 \Lambda_2 \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} \right) - c \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + O(\tau^2) = \\ &= -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \\ &- c \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + O(\tau^2 + h^2) = \underbrace{(-u_t + a^2(u_{xx} + u_{yy}) - cu)}_{=0} + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left(-\frac{3}{2} u_{tt} + a^2 u_{xxt} + 2a^2 u_{yyt} - cu_t \right) + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{3}{2} u_t + a^2 u_{xx} + 2a^2 u_{yy} - cu \right) + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Каждое из двух разностных уравнений (2.8)–(2.9) аппроксимирует исходное уравнение теплопроводности (2.5) с первым порядком по τ и вторым — по h . В то же время при суммировании погрешностей ψ_1 и ψ_2 члены с τ взаимно уничтожаются, и остаётся второй порядок и по τ , и по h :

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{-2u_t + 2a^2 u_{xx} + 2a^2 u_{yy} - 2cu}_{=0} \right) + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau^2 + h^2).$$

Заметим, что если в уравнениях (2.8)–(2.9) выбрать какой-либо другой временной слой в члене cu (например, n или $n+1$), то суммарная аппроксимация имеет лишь первый порядок по τ .

Далее изучим вопрос устойчивости разностной схемы (2.8)–(2.9). Сначала приведём её к каноническому виду. Для этого необходимо исключить значения на промежуточном временном слое $(n+1/2)$. Рассмотрим разность (2.9) и (2.8) и выразим $u_{ij}^{n+1/2}$, опуская пространственные индексы i, j :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - 2u^{n+1/2} + u^n}{\tau/2} &= a^2 \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n), \\ \Rightarrow 2u^{n+1/2} &= u^{n+1} + u^n - \frac{a^2 \tau}{2} \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n). \end{aligned}$$

Также рассмотрим сумму (2.8) и (2.9) и подставим в неё найденное выражение для $u^{n+1/2}$, чтобы получить двуслойный вид схемы переменных направлений:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau/2} &= a^2(2\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2(u^n + u^{n+1})) - 2cu^{n+1/2}, \\ \Rightarrow \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau/2} &= a^2 \left(\Lambda_1(u^{n+1} + u^n) - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_1\Lambda_2(u^{n+1} - u^n) + \Lambda_2(u^n + u^{n+1}) \right) - \\ &\quad - c \left(u^{n+1} + u^n - \frac{a^2\tau}{2}\Lambda_2(u^{n+1} - u^n) \right). \end{aligned}$$

Для простоты введём обозначения $P_1 = -\Lambda_1$, $P_2 = -\Lambda_2$, $P = P_1 + P_2$. Хорошо известно, что операторы P_1, P_2 (а значит и P) являются положительно определёнными в пространстве сеточных функций. Получаем канонический вид схемы переменных направлений:

$$\left(I + \frac{a^4\tau^2}{4}P_1P_2 + \frac{ca^2\tau^2}{4}P_2 + \frac{a^2\tau}{2}P + \frac{c\tau}{2} \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (a^2P + cI)u^n = 0.$$

Здесь I — тождественный оператор. Из теории разностных схем (см. [19]) известно достаточное условие устойчивости, которое в нашем случае выглядит следующим образом:

$$I + \frac{a^4\tau^2}{4}P_1P_2 + \frac{ca^2\tau^2}{4}P_2 + \frac{a^2\tau}{2}P + \frac{c\tau}{2} \geq \frac{\tau}{2}(a^2P + cI).$$

Это эквивалентно

$$I + \frac{a^4\tau^2}{4}P_1P_2 + \frac{ca^2\tau^2}{4}P_2 \geq 0.$$

Но это неравенство выполняется для любых τ, h , поскольку $c \geq 0$, а все операторы положительно определены. Тем самым доказана безусловная устойчивость схемы. \square

Поясним, в каком порядке следует проводить вычисления для приближённого решения задачи теплопроводности (2.5)–(2.7) согласно схеме переменных направлений. Пусть уже известны значения u_{ij}^n на n -м временном слое при всех i, j (если $n = 0$, то это просто значения, полученные из начального условия $v(x, y)$ проектированием на разностную сетку). Составляем уравнения (2.8), которые представляют собой $(N_2 - 1)$ систем линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональными матрицами порядка $(N_1 - 1)$. Для фиксированного номера j неизвестными являются величины $u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{N_1-1,j}$, а крайние значения $u_{0j}, u_{N_1,j}$ получаем из граничных условий (в нашем случае они всегда равны

нулю). Здесь для всех неизвестных величин опущен верхний индекс $(n + 1/2)$. Обозначим

$$\gamma_k = \frac{a^2 \tau}{2h_k^2}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда матрица для j -й системы уравнений строится следующим образом: главная диагональ представляет собой набор чисел

$$1 + \frac{\tau}{2}c_{ij} + 2\gamma_1, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1,$$

а две соседние с ней диагонали заполнены одним и тем же числом $(-\gamma_1)$. Вектор правой части содержит следующий упорядоченный набор чисел:

$$\gamma_2 u_{i,j-1}^n + (1 - 2\gamma_2)u_{ij}^n + \gamma_2 u_{i,j+1}^n, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1.$$

Поскольку матрица системы является трёхдиагональной, удобно применять метод прогонки, описанный в [19]. Количество арифметических операций для решения одной такой системы составляет $O(N_1)$. Заметим, что все $(N_2 - 1)$ систем можно решать независимо друг от друга, то есть существует хорошая возможность распараллеливания вычислений.

После того как решены все системы вида (2.8), то есть вычислены все значения на промежуточном временном слое $(n + 1/2)$, переходим ко второму этапу (2.9). Здесь для каждой системы уравнений фиксированным индексом является i , а индекс j меняется от 1 до $N_2 - 1$. Принципиальным отличием этого шага является положение коэффициентов c_{ij} — теперь они содержатся в векторах правых частей, а не матрицах систем. А именно: на главной диагонали каждой матрицы расположено одно и то же число $(1 + 2\gamma_2)$, а i -я правая часть формируется из значений

$$\gamma_1 u_{i-1,j}^{n+1/2} + \left(1 - 2\gamma_1 - \frac{\tau}{2}c_{ij}\right) u_{ij}^{n+1/2} + \gamma_1 u_{i+1,j}^{n+1/2}, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1.$$

На данном этапе для решения систем аналогично применяются метод прогонки и распараллеливание. После этого все значения на $(n + 1)$ -м временном слое вычислены.

Вернёмся к нелокальной задаче (2.1)–(2.3) и соответствующему итерационному методу, который был изложен в первой главе. Напомним, что на каждом шаге необходимо вычислять действие оператора B , который вводится по правилу (при фиксированном числе $T > 0$ и вещественной функции $\eta \in BV[0, T]$)

$$Bv = \eta(T)U(T)v - \int_0^T U(t)v d\eta(t), \quad \forall v \in L_2(D). \quad (2.10)$$

Мы уже обсудили вопрос приближённого вычисления $U(t)v$ с помощью разностной схемы (2.8)–(2.9). Что касается интеграла — его следует заменить квадратурной формулой. Случай разрывной функции η требует отдельного изучения, особенно если некоторые узлы временной сетки совпадают с точками разрыва. Для простоты во всех дальнейших примерах мы будем рассматривать исключительно гладкие функции — хотя бы из класса $C^1[0, T]$. Для них интеграл Римана–Стилтьеса сводится к классическому интегралу Римана:

$$\int_0^T U(t)v d\eta(t) = \int_0^T U(t)v \eta'(t)dt.$$

Поскольку мы вычисляем $U(t)v$ со вторым порядком аппроксимации по τ , естественно потребовать, чтобы квадратурная формула имела погрешность хотя бы второго порядка. Например, можно использовать метод трапеций, который в нашем случае удобен тем, что не требуется вычислять значения $U(t)v$ в промежуточных точках, не являющихся узлами временной сетки.

$$\int_0^T U(t)v \eta'(t)dt \approx \tau \left(\frac{v \eta'(0) + U(T)v \eta'(T)}{2} + \sum_{n=1}^{M-1} U(t_n)v \eta'(t_n) \right).$$

В итоге оператор B , действующий в банаховом пространстве E (в нашем случае $E = L_2(D)$) аппроксимируется определённым оператором \widehat{B} , действующим в пространстве сеточных функций.

2.3 Итоговый алгоритм

Учитывая все проведённые рассуждения, опишем полный порядок действий для вычисления приближённого решения нелокальной задачи теплопроводности (2.1)–(2.3). Напомним, что в сейчас предполагается выполненным условие $\eta \in C^1[0, T]$, более сильное, чем $\eta \in BV[0, T]$. Также считаем, что $u_1 \in D(A)$, то есть $u_1 \in C^{2,2}(D)$, $u_1|_{\partial D} = 0$, в противном случае задача неразрешима (см. главу 1 применительно к абстрактной задаче).

1. Вычисляем $f(x, y) = -Au_1(x, y) = -a^2\Delta u_1 + c(x, y)u_1$. На данном этапе ещё можно не вводить дискретизацию, если $f(x, y)$ получается аналитически. Если же функция $u_1(x, y)$ задана на равномерной сетке, то необходимо аппроксимировать оператор A и вычислять f приближённо — как сеточную функцию:

$$f = -a^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2) u_1 + cu_1.$$

2. Строим итерационный процесс по правилу

$$u_0^{(k)} = \frac{1}{\beta} \left(f + \widehat{B}u_0^{(k-1)} \right), \quad k = 1, \dots, N_B, \quad u_0^{(0)} = \frac{1}{\beta} f, \quad \beta = \eta(0) > 0.$$

Здесь функции $u_0^{(k)}$ и f являются сеточными, а оператор \widehat{B} — это аппроксимация оператора B , определяемого формулой (2.10).

3. На k -й итерации вычисляем u_{ij}^n , $i = 0, \dots, N_1$, $j = 0, \dots, N_2$, $n = 0, \dots, M$, — численное решение классической задачи (2.5)–(2.7) с начальным условием $u_0^{(k-1)}$, полученное разностным методом (в нашем случае это схема переменных направлений (2.8)–(2.9)).
4. Зная $u_{ij}^n \equiv u^n$, вычисляем оператор \widehat{B} :

$$\widehat{B}u_0^{(k-1)} = \eta(T)u^M - \tau \left(\frac{u^0\eta'(0) + u^M\eta'(T)}{2} + \sum_{n=1}^{M-1} u^n \eta'(t_n) \right).$$

5. Находим значение $u_0^{(k)}$ на новой итерации и возвращаемся к шагу 3. В итоге получаем функцию $u_0^{(N_B)}$, определённую на пространственной сетке в прямоугольнике D и являющуюся приближённым решением нелокальной задачи.

Глава 3

Примеры

Напомним постановку нелокальной задачи теплопроводности:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - c(x, y)u, \quad (x, y) \in D = [0, l_1] \times [0, l_2], \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

$$u|_{\partial D} = 0, \quad (3.2)$$

$$\int_0^T u(x, y, t)\eta(t) dt = u_1(x, y). \quad (3.3)$$

$$u_0(x, y) = ?$$

В предыдущей главе был описан метод численного решения такой задачи. Чтобы проверить качество алгоритма, следует сравнить полученное приближённое решение с точным. Поскольку задачу (3.1)–(3.3) не удаётся решить аналитически, предлагаем следующий искусственный приём, который иногда называется «твин-эксперимент» и часто встречается в теории обратных задач.

1. Определим конкретную функцию u_0 — например, как линейную комбинацию многочленов вида $x^k y^m (l_1 - x)^p (l_2 - y)^q$, $k, m, p, q > 0$. Это обеспечит выполнение граничного условия (3.2).
2. Составляем и решаем «прямую» задачу с начальным условием u_0 :

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - c(x, y)u, \quad (x, y) \in D, \quad t \in [0, T],$$

$$u|_{\partial D} = 0,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y).$$

3. Теперь нам известно решение $u(x, y, t)$ во все моменты времени, поэтому можем проинтегрировать по t и получить $u_1(x, y)$, как в условии (3.3). Чтобы избежать путаницы, сразу заметим, что в исходной постановке задачи (3.1)–(3.3) функция $u_1(x, y)$ известна по условию, а требуется восстановить $u(x, y, t)$. Но сейчас мы поступаем ровно наоборот: решение $u(x, y, t)$ уже дано, и по нему нужно вычислить усреднение $u_1(x, y)$. Также не забываем, что мы работаем с сеточной функцией $u_{ij}^n \equiv u^n$, поэтому интеграл вычисляется приближённо (формула трапеций):

$$u_1 = \tau \left(\frac{u^0 \eta(0) + u^M \eta(T)}{2} + \sum_{n=1}^{M-1} u^n \eta(t_n) \right).$$

4. После того как мы получили u_1 , мы можем временно «забыть» про u_0 , а сформулировать задачу (3.1)–(3.3) с нелокальным условием u_1 и решать её итерационным методом, который подробно описан в конце предыдущей главы (этот алгоритм применим даже сейчас, когда u_1 является сеточной функцией, а не гладкой).
5. Получаем приближённое решение $u_0^{(k)}$, где k — число итераций, с увеличением которого должна наблюдаться (в идеале) сходимость к точному решению $u_0(x, y)$, заданному на первом шаге.

Для установления сходимости восстановленной начальной функции $u_0^{(k)}$ к исходной u_0 будем рассматривать величину

$$d^{(k)} = \max_{i,j} \left| \left(u_0^{(k)} \right)_{ij} - u_0(x_i, y_j) \right|,$$

то есть классическую C -норму разности между приближённым и точным решением по узлам сетки. В каждом конкретном примере будем строить график получившейся зависимости $d^{(k)}$ от числа k , благодаря чему будет очевидно наличие сходимости или расходимости.

Все численные расчёты (в том числе визуализация данных) были реализованы на языке Python с использованием библиотек NumPy и Numba для высокопроизводительной работы с многомерными массивами. Вычисления проводились на домашнем персональном компьютере.

3.1 Пример 1

Исходные данные задачи:

$l_1 = l_2 = \pi/2$	— размеры области D ,
$T = 3\pi/2$	— продолжительность измерений,
$a^2 = 1/8$	— температурный коэффициент,
$c(x, y) = x + y$	— коэффициент теплообмена со средой,
$\eta(t) = \cos t$	— весовая функция.

Параметры разностной схемы:

$N_1 = 100$	— число шагов сетки по x ,
$N_2 = 100$	— число шагов сетки по y ,
$M = 10000$	— число шагов сетки по t ,
$h_1 = l_1/N_1 \approx 0.016$	— длина шага сетки по x ,
$h_2 = l_2/N_2 \approx 0.016$	— длина шага сетки по y ,
$\tau = T/M \approx 4.7 \cdot 10^{-4}$	— длина шага сетки по t .

Начальное условие:

$$u_0(x, y) = 10xy^3(l_1 - x)^2(l_2 - y) - 50x^5y(l_1 - x)^3(l_2 - y)^2.$$

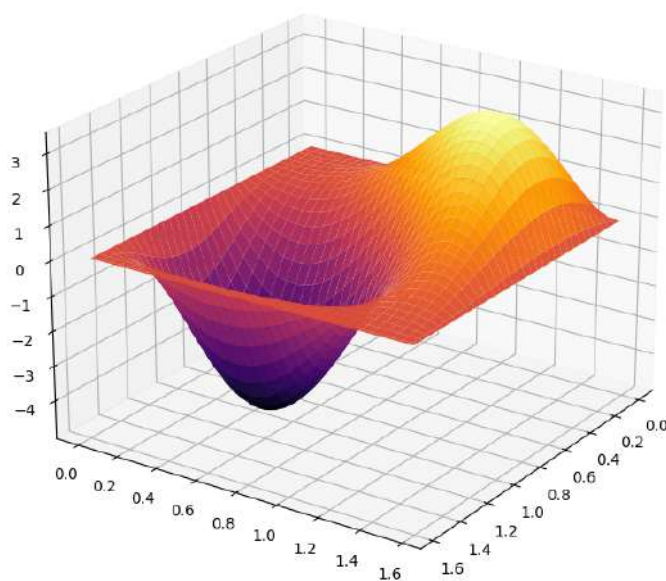


Рис. 1: График $u_0(x, y)$ в трёхмерном пространстве для примеров 1–3.

Сначала проверим достаточные условия сходимости итерационного метода согласно теоремам 1 и 2 (см. пункт 1.5). Гораздо проще проверить второе условие, а именно $L < \alpha\eta(0)$. Здесь L — константа из условия типа Липшица:

$$|\eta(t) - \eta(0)| \leq Lt, \quad \forall t \in [0, T].$$

Вычисляем L по формуле

$$L = \max_{[0, T]} \frac{|\eta(t) - \eta(0)|}{t} = \max_{[0, T]} \frac{1 - \cos t}{t} \approx 0.725.$$

Далее, α — нижняя грань спектра оператора $(-A) = -a^2\Delta + c(x, y)$. Наиболее точная оценка α — это минимальное собственное значение $(-A)$, но в данном случае мы не в состоянии вычислить его аналитически, поскольку $c(x, y) \neq \text{const}$. Поэтому мы возьмём нижнюю оценку, которую можно получить, если заменить коэффициент $c(x, y) = x + y$ на его минимальное значение в прямоугольнике D , то есть на $c_0 = 0$. Тогда минимальное собственное значение α_0 оператора $(-A_0) \equiv -a^2\Delta + c_0$ вычисляется аналитически:

$$\alpha_0 = a^2\pi^2 \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right) + c_0 = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \right) + 0 = 1.$$

Если положить $\alpha = \alpha_0 = 1$, то неравенство $L < \alpha\eta(0)$ выполнено. В соответствии с теоремой 2 итерационный метод должен сходиться.

Результат: величина ошибки после четырёх итераций алгоритма составила

$$d^{(4)} \approx 5.5 \cdot 10^{-5}.$$

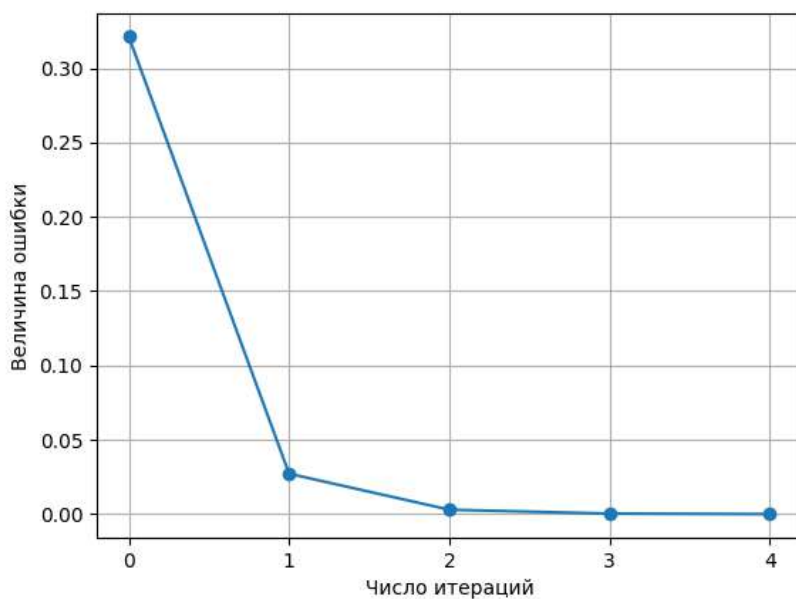


Рис. 2: Величина $d^{(k)}$ в зависимости от k для примера 1.

3.2 Пример 2

Исходные данные задачи:

$l_1 = l_2 = \pi/2$	— размеры области D ,
$T = 3\pi/2$	— продолжительность измерений,
$a^2 = 1/16$	— температурный коэффициент,
$c(x, y) \equiv 0$	— коэффициент теплообмена со средой,
$\eta(t) = \cos t$	— весовая функция.

Параметры разностной схемы:

$N_1 = 100$	— число шагов сетки по x ,
$N_2 = 100$	— число шагов сетки по y ,
$M = 10000$	— число шагов сетки по t ,
$h_1 = l_1/N_1 \approx 0.016$	— длина шага сетки по x ,
$h_2 = l_2/N_2 \approx 0.016$	— длина шага сетки по y ,
$\tau = T/M \approx 4.7 \cdot 10^{-4}$	— длина шага сетки по t .

Начальное условие:

$$u_0(x, y) = 10xy^3(l_1 - x)^2(l_2 - y) - 50x^5y(l_1 - x)^3(l_2 - y)^2.$$

В этом примере рассматриваем случай, когда выполнена теорема [1](#), но не [2](#), то есть когда нарушается неравенство $L < \alpha\eta(0)$. По сравнению с предыдущим примером изменились только значения a^2 и $c(x, y)$. Тогда точное значение $\alpha = 0.5$, а константа $L \approx 0.725$ остаётся той же. Очевидно, теорема [2](#) неприменима. Рассмотрим достаточное условие сходимости из теоремы [1](#):

$$0 < p \int_0^T e^{-pt} \eta(t) dt < 2\eta(0), \quad \forall p \geq \alpha.$$

Обозначим интеграл в центральной части (напомним, что он называется преобразованием Карсона от функции η на $[0, T]$) через $H(p)$. При $\eta(t) = \cos t$ интеграл вычисляется аналитически. Получаем эквивалентное неравенство

$$0 < H(p) = \frac{p^2 - pe^{-3\pi p/2}}{p^2 + 1} < 2, \quad \forall p \geq 0.5. \quad (3.4)$$

Классическими методами математического анализа нетрудно убедиться, что [\(3.4\)](#) выполнено. По теореме [1](#) итерационный метод сходится.

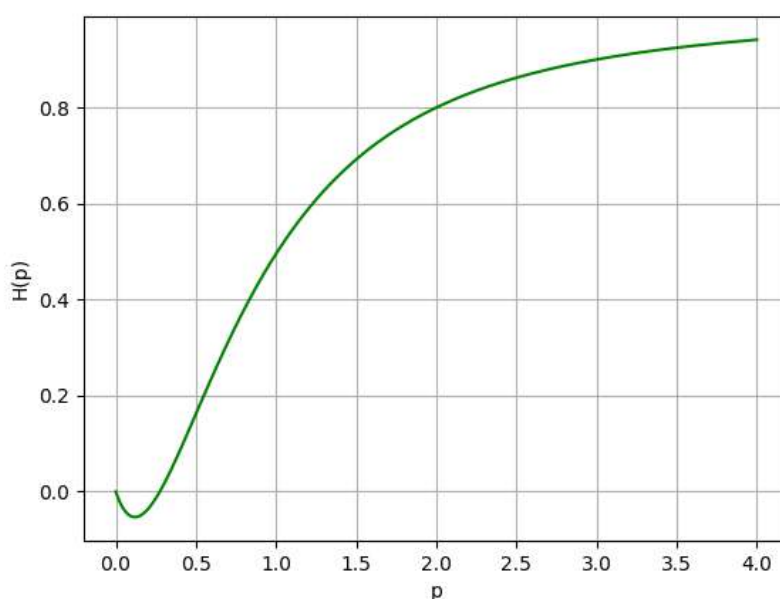


Рис. 3: График $H(p)$ для примера 2.

Результат: требуется гораздо больше итераций алгоритма для достижения хорошей точности; величина ошибки после 16 итераций составила

$$d^{(16)} \approx 0.045.$$

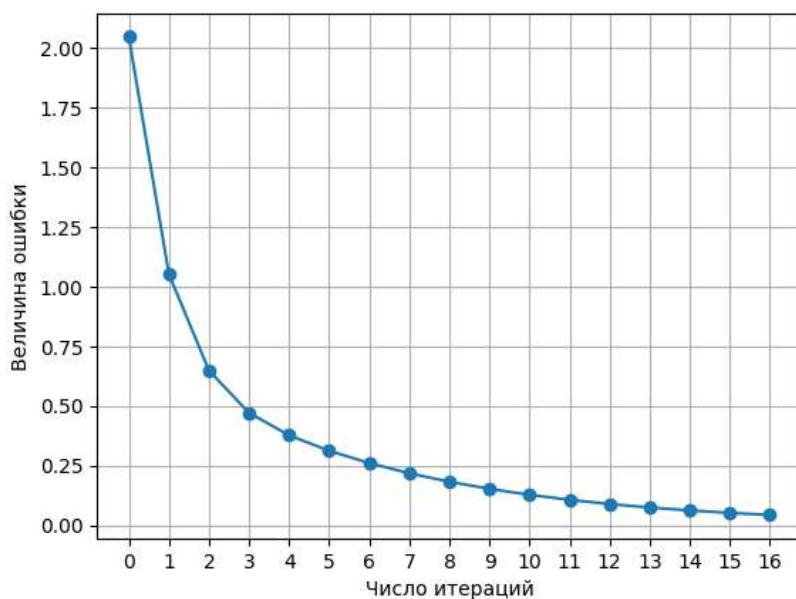


Рис. 4: Величина $d^{(k)}$ в зависимости от k для примера 2.

3.3 Пример 3

Исходные данные задачи:

- | | |
|------------------------|--------------------------------------|
| $l_1 = l_2 = \pi/2$ | — размеры области D , |
| $T = 3\pi/2$ | — продолжительность измерений, |
| $a^2 = 1/16$ | — температурный коэффициент, |
| $c(x, y) \equiv 0$ | — коэффициент теплообмена со средой, |
| $\eta(t) = e^t \cos t$ | — весовая функция. |

Параметры разностной схемы:

$N_1 = 100$	— число шагов сетки по x ,
$N_2 = 100$	— число шагов сетки по y ,
$M = 10000$	— число шагов сетки по t ,
$h_1 = l_1/N_1 \approx 0.016$	— длина шага сетки по x ,
$h_2 = l_2/N_2 \approx 0.016$	— длина шага сетки по y ,
$\tau = T/M \approx 4.7 \cdot 10^{-4}$	— длина шага сетки по t .

Начальное условие:

$$u_0(x, y) = 10xy^3(l_1 - x)^2(l_2 - y) - 50x^5y(l_1 - x)^3(l_2 - y)^2.$$

В данном примере по сравнению с предыдущим изменилась только весовая функция η . Ни одно из достаточных условий сходимости не выполняется. Действительно, проверим неравенство из теоремы [1](#), которое эквивалентно

$$0 < H(p) = \frac{p^2 - p - pe^{-3\pi(p-1)/2}}{p^2 - 2p + 2} < 2, \quad \forall p \geq 0.5. \quad (3.5)$$

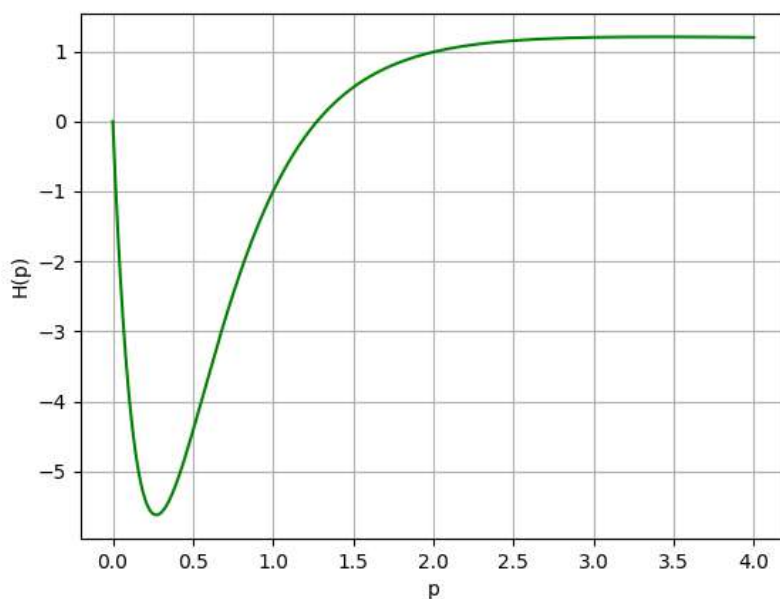


Рис. 5: График $H(p)$ для примера 3.

Из графика функции $H(p)$ видно, что она принимает отрицательные значения. А поскольку условие теоремы [1](#) является лишь достаточным, мы не можем ничего заранее сказать про сходимость итерационного метода.

Заметим, что для выполнения неравенства [\(3.5\)](#) достаточно увеличить α — например, до значения 1.5. Для этого можно увеличить коэффициенты $a^2, c(x, y)$ либо уменьшить размеры области, то есть l_1, l_2 .

Результат: очевидная расходимость итерационного метода.

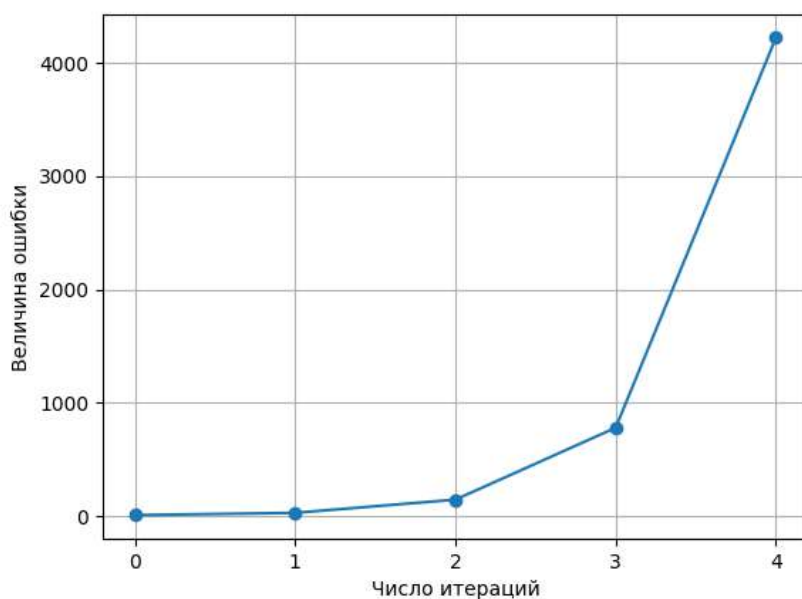


Рис. 6: Величина $d^{(k)}$ в зависимости от k для примера 3.

3.4 Пример 4

Исходные данные задачи:

$l_1 = \pi, \quad l_2 = 2\pi$	— размеры области D ,
$T = \pi$	— продолжительность измерений,
$a^2 = 2$	— температурный коэффициент,
$c(x, y) = xy$	— коэффициент теплообмена со средой,
$\eta(t) = 2e^{-t} \cos^2 3t$	— весовая функция.

Параметры разностной схемы:

$N_1 = 100$	— число шагов сетки по x ,
$N_2 = 100$	— число шагов сетки по y ,
$M = 10000$	— число шагов сетки по t ,
$h_1 = l_1/N_1 \approx 0.0314$	— длина шага сетки по x ,
$h_2 = l_2/N_2 \approx 0.0628$	— длина шага сетки по y ,
$\tau = T/M \approx 3.14 \cdot 10^{-4}$	— длина шага сетки по t .

Начальное условие:

$$u_0(x, y) = x^6 y(l_1 - x)(l_2 - y) + xy(l_1 - x)^6(l_2 - y) - xy^4(l_1 - x)(l_2 - y) - xy(l_1 - x)(l_2 - y)^4.$$

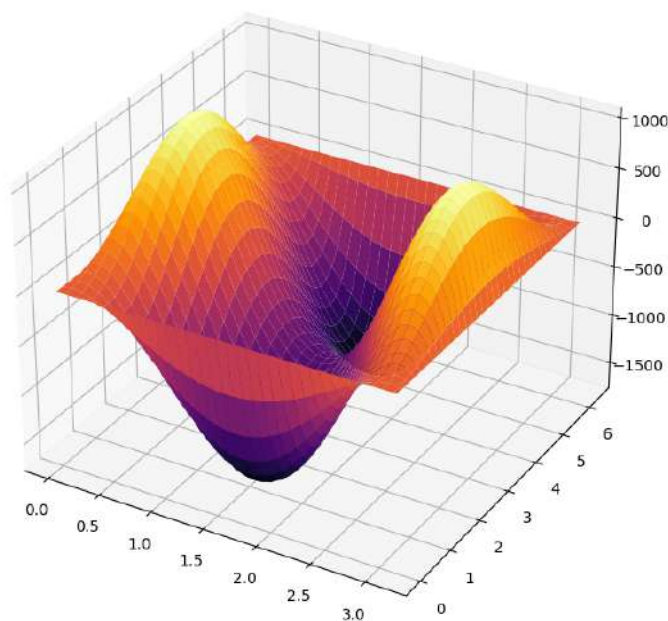


Рис. 7: График $u_0(x, y)$ в трёхмерном пространстве для примеров 4–6.

Вычисляем константу из условия типа Липшица:

$$L = \max_{[0, T]} \frac{|\eta(t) - \eta(0)|}{t} = \max_{[0, \pi]} \frac{2 - 2e^{-t} \cos^2 3t}{t} \approx 4.76.$$

Находим α как нижнюю оценку минимального собственного значения оператора $(-A)$. Заменяем $c(x, y)$ на минимальное значение $c_0 = 0$ в прямоугольнике D ,

тогда

$$\alpha = a^2 \pi^2 \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right) + c_0 = 2.5.$$

Таким образом, выполнено второе условие сходимости метода итераций:

$$L < \alpha \eta(0).$$

Результат: величина ошибки после 12 итераций составила

$$d^{(12)} \approx 3.27 \cdot 10^{-3}.$$

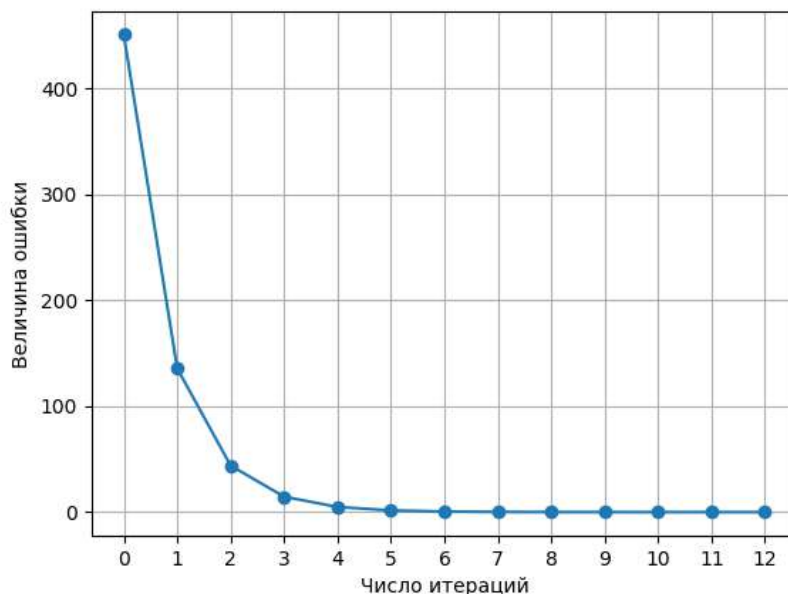
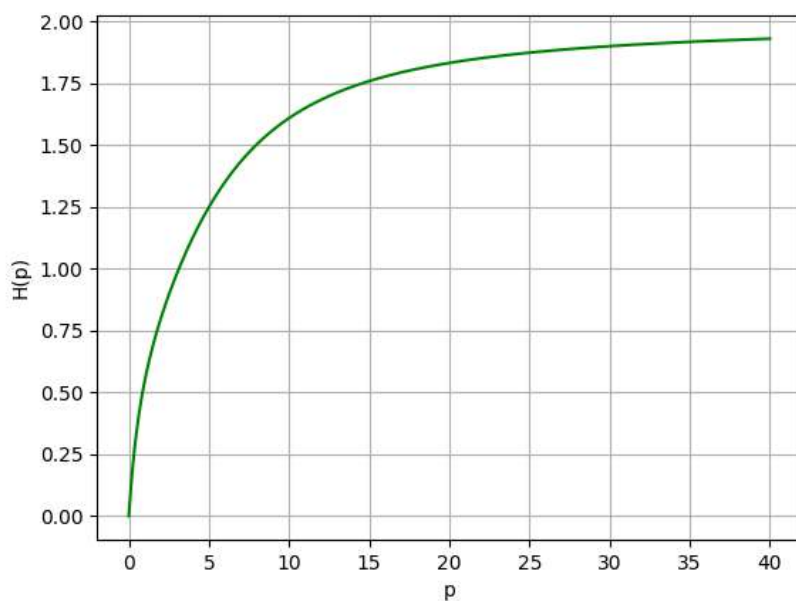


Рис. 8: Величина $d^{(k)}$ в зависимости от k для примера 4.

Для весовой функции $\eta(t) = 2e^{-t} \cos^2 3t$ из этого примера рассмотрим преобразование Карсона на $[0, \pi]$:

$$H(p) = p \int_0^T e^{-pt} \eta(t) dt = p \left(\frac{1}{p+1} + \frac{p+1}{(p+1)^2 + 36} \right) (1 - e^{-(p+1)\pi}).$$

Можно показать, что $0 < H(p) < 2 < 2\eta(0)$, $\forall p > 0$. То есть при любом $\alpha > 0$ выполнено первое достаточное условие сходимости метода итераций. Это значит, что для данной весовой функции η и для данного T можно менять значения параметров задачи $l_1, l_2, a^2, c(x, y)$ и это не нарушит сходимости.

Рис. 9: График $H(p)$ для примера 4.

3.5 Пример 5

Исходные данные задачи:

$l_1 = \pi, \quad l_2 = 2\pi$	— размеры области D ,
$T = 4$	— продолжительность измерений,
$a^2 = 0.6$	— температурный коэффициент,
$c(x, y) \equiv 0$	— коэффициент теплообмена со средой,
$\eta(t) = 1 + t$	— весовая функция.

Параметры разностной схемы:

$N_1 = 100$	— число шагов сетки по x ,
$N_2 = 100$	— число шагов сетки по y ,
$M = 10000$	— число шагов сетки по t ,
$h_1 = l_1/N_1 \approx 0.0314$	— длина шага сетки по x ,
$h_2 = l_2/N_2 \approx 0.0628$	— длина шага сетки по y ,
$\tau = T/M = 0.0004$	— длина шага сетки по t .

Начальное условие:

$$u_0(x, y) = x^6 y(l_1 - x)(l_2 - y) + xy(l_1 - x)^6(l_2 - y) - \\ - xy^4(l_1 - x)(l_2 - y) - xy(l_1 - x)(l_2 - y)^4.$$

Рассмотрим преобразование Карсона функции η на $[0, T]$:

$$H(p) = p \int_0^T e^{-pt} \eta(t) dt = \frac{p + 1 - e^{-4p}(5p + 1)}{p}.$$

Подберём такое α , чтобы на луче $[\alpha, +\infty)$ не выполнялось хотя бы одно из неравенств $0 < H(p) < 2 = 2\eta(0)$, а при небольшом увеличении α оба неравенства становились верными на всём луче. А именно: в данном примере $\alpha = 0.75$ и вычисляется точно как минимальное собственное значение оператора $(-A)$. Можно проверить, что $H(\alpha) > 2$, то есть одно из неравенств заведомо нарушается, поэтому условие сходимости метода итераций не выполнено.

Результат вычислений: очевидная расходимость метода.

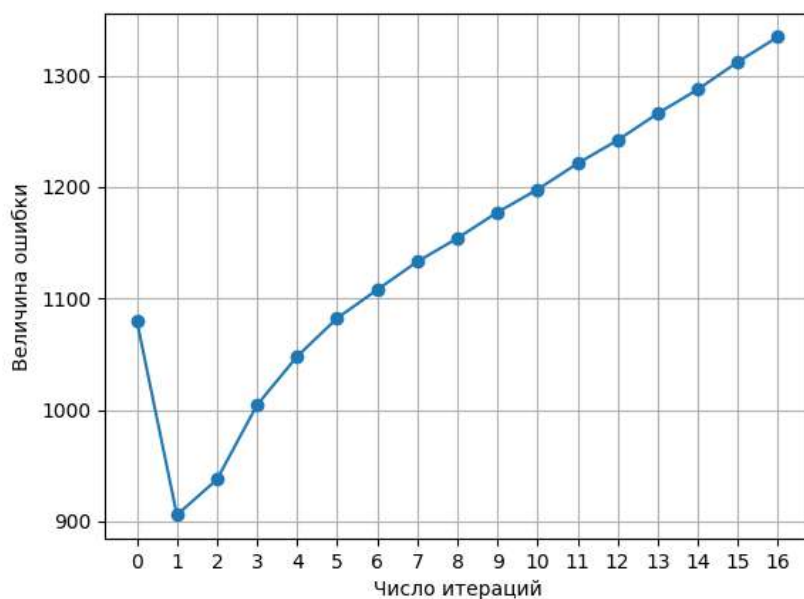
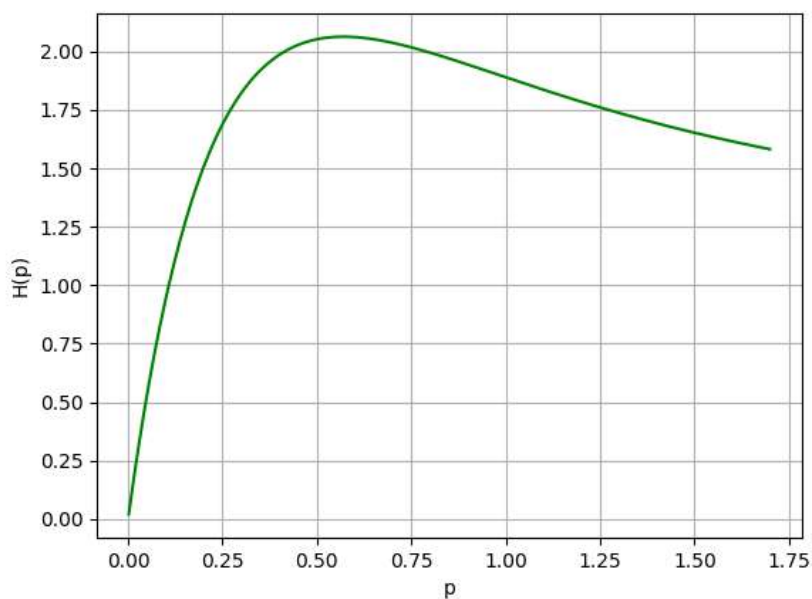


Рис. 10: Величина $d^{(k)}$ в зависимости от k для примера 5.

Рис. 11: График $H(p)$ для примеров 5–6.

3.6 Пример 6

Исходные данные задачи:

$l_1 = \pi, \quad l_2 = 2\pi$	— размеры области D ,
$T = 4$	— продолжительность измерений,
$a^2 = 0.64$	— температурный коэффициент,
$c(x, y) \equiv 0$	— коэффициент теплообмена со средой,
$\eta(t) = 1 + t$	— весовая функция.

Параметры разностной схемы:

$N_1 = 100$	— число шагов сетки по x ,
$N_2 = 100$	— число шагов сетки по y ,
$M = 10000$	— число шагов сетки по t ,
$h_1 = l_1/N_1 \approx 0.0314$	— длина шага сетки по x ,
$h_2 = l_2/N_2 \approx 0.0628$	— длина шага сетки по y ,
$\tau = T/M = 0.0004$	— длина шага сетки по t .

Начальное условие:

$$u_0(x, y) = x^6 y (l_1 - x)(l_2 - y) + xy(l_1 - x)^6(l_2 - y) - \\ - xy^4(l_1 - x)(l_2 - y) - xy(l_1 - x)(l_2 - y)^4.$$

Данный пример является логическим продолжением предыдущего. Изменилось только значение $a^2 = 0.64$. Тогда $\alpha = 0.8$ и на луче $[\alpha, +\infty)$ выполнено двойное неравенство $0 < H(p) < 2$, что гарантирует сходимость метода.

Результат: при 100 итерациях ошибка монотонно убывает, что может свидетельствовать о наличии сходимости, хоть и очень медленной. Провести большее число итераций не представлялось уместным, поскольку это потребовало бы гораздо больше времени и/или вычислительных ресурсов.

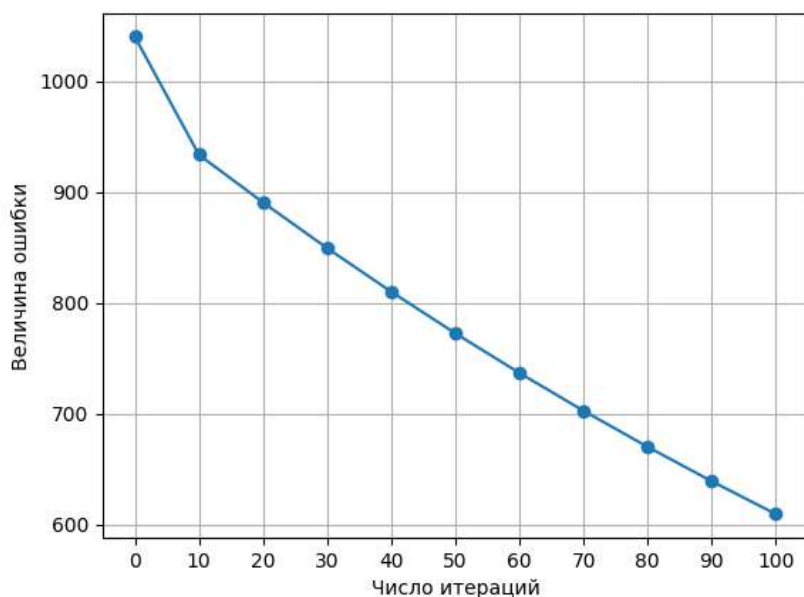


Рис. 12: Величина $d^{(k)}$ в зависимости от k для примера 6.

Примеры 5 и 6 наглядно демонстрируют, что первое условие сходимости (теорема [1](#)) хоть и является достаточным, но в то же время близко к необходимому и достаточному. Нам не удалось подобрать пример, когда это условие не выполнено, а итерационный метод сходится.

Заключение

В настоящей работе исследовалась нелокальная по времени задача для абстрактного эволюционного уравнения в банаховом пространстве, а также её частный случай для двумерного уравнения теплопроводности.

- Построена общая теория разрешимости абстрактной задачи, предложен итерационный метод решения, основанный на [1].
- С помощью сведений из спектральной теории операторов найдены новые эффективные условия применимости метода итераций.
- Для конкретной модели теплопроводности построены алгоритмы численного решения, основанные на методах конечных разностей.
- Подготовлена программа на языке Python, реализующая предложенные алгоритмы.
- Проведено множество вычислительных экспериментов, подтвердивших теоретические соображения.

Литература

- [1] Тихонов И. В. *О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве* // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34. — № 6. — С. 841–843.
- [2] Тихонов И. В. *Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений* // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 67. — № 2. — С. 133–166.
- [3] Агошков В. И., Новиков И. С. *Решение задачи оптимизации концентрации загрязнений с ограничениями на интенсивность источников* // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56. — № 1. — С. 29–46.
- [4] Ипатов В. М., Шутяев В. П. *Алгоритмы и задачи ассимиляции данных для моделей динамики атмосферы и океана.* — Научно-образовательный курс, МФТИ, 2013. — 30 с.
- [5] Hofbauer J., Sigmund K. *Evolutionary Games and Population Dynamics.* — Cambridge University Press. — 1998.
- [6] Латтес Р., Лионс Ж.-Л. *Метод квазиобращения и его приложения.* — М.: Мир, 1970.
- [7] Вабищевич П. Н. *Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности* // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. 17. — № 7. — С. 1193–1199.
- [8] Ludwik Byszewski & V. Lakshmikantham *Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract cauchy problem in a banach space* // Applicable Analysis. — 1991. — Т. 40. — № 1. — С. 11–19.

- [9] Прилепко А.И., Костин А.Б. *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением* // Математический сборник. — 1992. — Т. 183. — № 4. — С. 49–68.
- [10] Шелухин В.В. *Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений* // Сибирский математический журнал. — 1993. — Т. 34. — № 2. — С. 191–207.
- [11] Прилепко А.И. *Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач* // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41. — № 11. — С. 1560–1571.
- [12] Фёдоров В.Е., Иванова Н.Д., Фёдорова Ю.Ю. *Нелокальная по времени задача для неоднородных эволюционных уравнений* // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55. — № 4. — С. 882–897.
- [13] Пулькина Л.С., Савенкова А.Е.. *Задача с нелокальным по времени условием для многомерного гиперболического уравнения* // Известия вузов. Математика. — 2016. — № 10. — С. 41–52.
- [14] Смагин В.В. *Среднеквадратичная сходимость проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон по времени приближённого решения параболического уравнения с интегральным условием на решение* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2019. — № 1. — С. 137–149.
- [15] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. — N. Y.: Springer-Verlag, 1983.
- [16] Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. — N. Y.: Springer-Verlag, 2000.
- [17] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. — М.: Наука, 1967.
- [18] Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы*. — М.: ИЛ, 1962.
- [19] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. — М.: Наука, 1989.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Злобина Александра Алексеевича

Заявление о новизне


Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием “Синхронизация фазовых осцилляторов Курамато с задержкой” являются: результаты работы, в частности рис 4.2, рис.6.2 и приложенные к ним разъяснения.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Выступление на конференциях и публикация в научных трудах конференций (“Путь в науку”, “27-я радиофизическая конференция”)
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Клиньшовым Владимиром Викторовичем, доцентом кафедры теории колебаний и автоматического регулирования, радиофизического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского.
- Публикация по данной теме в журнале “Mathematics” (Vladimir V. Klinshov and Alexander A. Zlobin *Mathematics* 2023, 11(10), 2325; DOI: [10.3390/math11102325](https://doi.org/10.3390/math11102325))

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 19.06.2023. На Смотри представлен проект текста работы.

Подпись
 Злобин Александр Алексеевич
31.05.2023. Нижний Новгород, Россия

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет

Направление 03.04.03 «Радиофизика»
Направленность «Нелинейные колебания и волны»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Синхронизация фазовых осцилляторов Курамото с запаздыванием

«К защите допущен»:

зав. кафедрой теории колебаний
и автоматического регулирования
профессор, д.ф.-м.н.

_____ Матросов В.В.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент кафедры
теории колебаний и автоматического
регулирования

_____ Клиньшов В.В.

Консультант по технике безопасности:
доцент, к.ф.-м.н.

_____ Клемина А.В.

Студент 2-го курса магистратуры

_____ Злобина А.А.

Нижний Новгород
2023 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ГЛАВА 1 Введение	3
ГЛАВА 2 Модель Курамото с запаздыванием	6
ГЛАВА 3 Метод редуцирования	8
ГЛАВА 4 Бифуркационный анализ редуцированной системы	14
ГЛАВА 5 Численное исследование микроскопической системы	17
ГЛАВА 6 Сравнение редуцированной и микроскопической систем	22
ГЛАВА 7 Заключение	26

ГЛАВА 1

Введение

Коллективная динамика сетей взаимодействующих элементов играет важную роль во многих областях науки и техники [8-10]. Особенный интерес вызывает изучение явления синхронизации. Суть синхронизации состоит в том, что связь между элементами системы приводит к подстройке и согласованию ритмов взаимодействующих частей. Синхронизация может наблюдаться в биологических, химических, физических и социальных системах, которые веками привлекает внимание ученых. До сих пор в данной области остаётся ещё немало направлений требующих исследований. Одним из важных направлений является исследование влияния временных задержек в системах взаимодействующих элементах. Научная значимость и актуальность данной проблемы определяется следующими факторами.

Наличие временных задержек в связях между элементами характерно для биологических систем совершенно разной природы. Это связано с конечной скоростью распространения сигналов и другими факторами. В качестве примера можно привести мозг млекопитающих, в котором распространение импульсов между нейронами происходит с некоторой задержкой, что оказывает влияние на протекающие в нём когнитивные процессы. Другим примером может послужить распространение сигналов в беспроводных системах коммуникации. К задержкам в связях приводит конечное время распространения сигналов и конечная длительность сообщений. При этом синхронизация различных устройств беспроводной системы необходима для управления доступом к среде.

Временное запаздывание между элементами системы может приводить к существенному изменению и усложнению коллективной динамики [4-6]. С одной стороны существование временных задержек должно препятствовать синхронизации элементов, однако есть случаи, когда наличие временных задержек оказывает противоположный эффект, который заключается в том, что временные задержки помогают в установлении синхронизации.

Классической моделью для изучения синхронизации является модель фазовых осцилляторов Курамото [2]. Данная модель была мотивирована

поведением осцилляторов в химических и биологических системах, и она нашла применения в многих областях науки. Курамото проанализировал модель фазовых осцилляторов, работающих на произвольных собственных частотах и связанных через синус разностей фаз. Модель Курамото достаточно проста для математических исследований и одновременно сложна, чтобы отображать большое количество разнообразных паттернов синхронизации. Под синхронизацией понимается постоянная разность фаз, т.е. осцилляторы колеблются с одинаковыми частотами. Система фазовых осцилляторов Курамото имеет вид:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1 \dots N.$$

Основными моментами в синхронизации фазовых осцилляторов Курамото является то, что при малых силах связи между элементами в системе наблюдается асинхронный режим. Осцилляторы колеблются независимо на своей частоте и почти не ощущают присутствие других осцилляторов. Чтобы добиться частичной синхронизации осцилляторов, т.е. состояния в котором имеется доля осцилляторов с близкими частотами, надо увеличивать силу связи до некоторого критического значения K_c . До этого значения система находится в асинхронном режиме. После преодоления K_c и дальнейшего увеличения силы связи система будет асимптотически стремиться к полной синхронизации. Таким образом при $K \rightarrow \infty$ все осцилляторы будут иметь одинаковые частоты.

В данной работе рассматривается модифицированная модель Курамото, которая учитывает временные задержки распространения сигнала между элементами. К этой системе будет применён метод редукции, впервые предложенный Ott-Antonsen [1]. Смысл метода заключается в рассмотрении бесконечномерной системы фазовых осцилляторов, которая в дальнейшем сводится к низкоразмерной, редуцированной. Редуцированная система описывается в терминах среднего поля осцилляторов.

Работа построена таким образом, что в первой части вводится модель Курамото с задержкой, где между фазовыми осцилляторами существует временная задержка, описываются основные свойства данной модели и

рассматривается способ, с помощью которого отслеживается степень синхронизованности осцилляторов. Во второй части описан и применён метод редукции, высокоразмерная система уравнений сводится к низкоразмерной. В третьей части проводится бифуркационный анализ полученной редуцированной системы. В четвертой части результаты бифуркационного анализа редуцированной системы сравниваются с численным моделированием микроскопической системы. В последней части подведены итоги.

ГЛАВА 2

Модель Курамото с запаздыванием

Рассмотрим модель Курамото:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)), \quad i = 1 \dots N. \quad (2.1)$$

В качестве переменной выступает фаза осциллятора θ_i , которая определена на единичной окружности $\theta \in [0; 2\pi)$. Параметры K - сила связи между нейронами, N - количество элементов в системе, ω_i - собственная частота i -го осциллятора. Таким образом каждый осциллятор имеет собственную частоту и каждый из них одинаково связан с остальными осцилляторами.

Для определения макроскопического состояния системы в дальнейшем мы будем использовать параметр порядка, который задаётся в виде:

$$R = r e^{i\phi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (2.2)$$

Параметр порядка показывает среднее поле в системе на единичной окружности. Модуль параметра порядка $|R|$ показывает степень синхронизованности системы. Таким образом, если $|R| = 1$, то это означает, что все осцилляторы синхронизованы, т.е. их частоты равны. Такой режим наблюдается при больших силах связи K , когда осцилляторы оказывают значимое влияние друг на друга. При малых силах связи $|R| \approx 0$, т.е. осцилляторы колеблются с частотами близкими к собственным. Аргумент параметра порядка ϕ показывает расположение „средней фазы“ на единичной окружности, т.е. место где локализовано большинство фаз осцилляторов. Физический смысл параметра порядка проиллюстрирован на рис.2.1. Белыми стрелками показаны фазы осцилляторы на единичной окружности, а чёрной стрелкой показан параметр порядка.

Модифицированная модель Курамото, которая учитывает временную задержку между осцилляторами задаётся следующим уравнением:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t - \tau) - \theta_i(t)), \quad i = 1 \dots N. \quad (2.3)$$

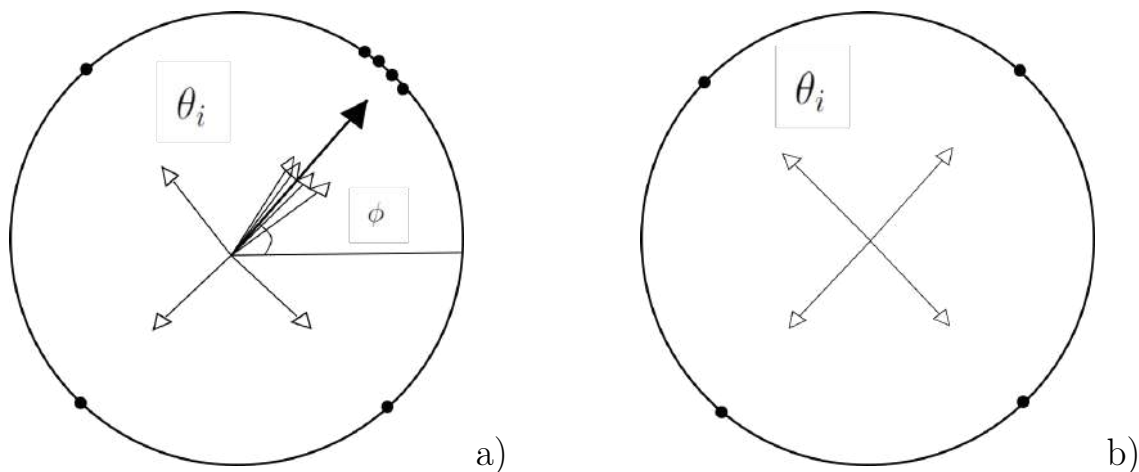


Рисунок 2.1 — Параметр порядка а) $0 \ll R < 1$ б) $R \approx 0$

Особенностью данной модели является то, что во втором члене уравнения, который описывает взаимодействие между элементами $\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_{j\tau} - \theta_i)$, присутствует фаза j -го осциллятора $\theta_{j\tau}$ в момент времени $t - \tau$. Это означает то, что фаза осциллятора в момент времени $t - \tau$ оказывает влияние на осцилляторы в момент времени t . Таким образом прошлые состояния осцилляторов влияют на динамику системы в данный момент времени.

Используя формулу Эйлера $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ и параметр порядка R , модель Курамото можно представить в следующем виде :

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{K}{2i} (R_\tau e^{-i\theta_j} - \bar{R}_\tau e^{i\theta_j}), \quad (2.4)$$

$$R_\tau = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\tau\theta_j}. \quad (2.5)$$

ГЛАВА 3

Метод редуцирования

Метод редуцирования предложенный в статье [1] заключается в рассмотрение системы, когда $N \rightarrow \infty$, т.е. в системе наблюдается бесконечное количество элементов. Тогда состояние системы в момент времени t можно описывать с помощью плотности распределения $f(\omega, \theta, t)$, которая зависит от частоты ω и фазы θ осцилляторов. Таким образом $f(\omega, \theta, t)d\theta d\omega$ даёт долю осцилляторов с фазами в пределах $[\theta; \theta + d\theta]$ и частотами в пределах $[\omega, \omega + d\omega]$. Проинтегрировав плотность распределения по фазам, получим:

$$\int_0^{2\pi} f(\omega, \theta, t)d\theta = g(\omega), \quad (3.1)$$

где $g(\omega)$ - независимое от времени распределение осцилляторных частот.

Так как система теперь описывается с помощью плотности распределения $f(\omega, \theta, t)$, то сумма в уравнении 2.3 заменяется на интеграл.

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} f(\omega, \theta, t)e^{i\theta} d\theta. \quad (3.2)$$

Рассмотрим, как изменяется распределение $f(\omega, \theta, t)$ со временем. Изменение фаз осцилляторов с частотой ω в дифференциальном объёме $[\theta, \theta + d\theta]$ равняется разности пришедших и ушедших осцилляторов Δn . С одной стороны за время Δt количество осцилляторов уменьшится на следующую величину:

$$\Delta n = f(\omega, \theta, t + \Delta t)\Delta\theta - f(\omega, \theta, t)\Delta\theta. \quad (3.3)$$

С другой стороны количество пришедших и ушедших фаз осцилляторов равно:

$$\Delta n = f(\omega, \theta + \Delta\theta, t)v(\theta)\Delta t - f(\omega, \theta + \Delta\theta, t)v(\theta + \Delta\theta)\Delta t. \quad (3.4)$$

Таким образом получаем :

$$\frac{f(\omega, \theta + \Delta\theta, t)v(\theta + \Delta\theta) - f(\omega, \theta + \Delta\theta, t)v(\theta)}{\Delta\theta} = -\frac{f(\omega, \theta, t + \Delta t) - f(\omega, \theta, t)}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

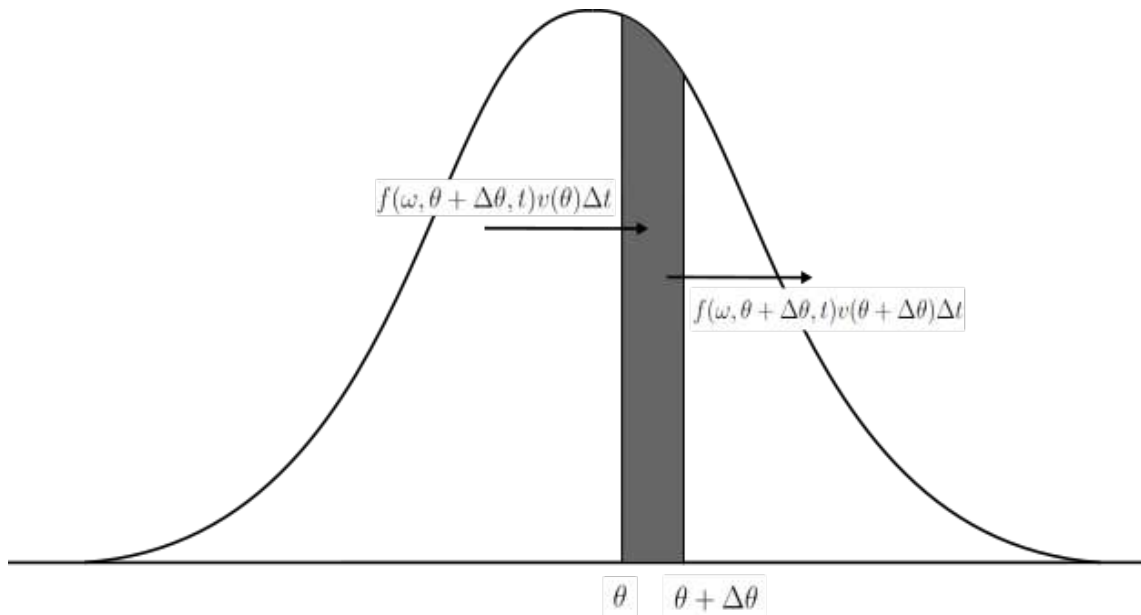


Рисунок 3.1 — Изменение количества осцилляторов в фазовом объёме.

Используя определение производной $\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$, получим уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(fv_\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad (3.6)$$

где v_θ задаётся как:

$$v_\theta = \omega + \frac{K}{2i} [R_\tau e^{-i\theta} - \bar{R}_\tau e^{i\theta}]. \quad (3.7)$$

Представляя $f(\omega, \theta, t)$ в виде ряда Фурье получаем :

$$f = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(\omega, t) e^{in\theta} + f_n^*(\omega, t) e^{-in\theta}) \right]. \quad (3.8)$$

Основной идеей метода редуцирования является то, f ищется в виде, где коэффициенты разложения представляются как степени некоторой сложной комплексной функции $f_n(\omega, t) = [\alpha(\omega, t)]^n$. Также стоит отметить, что должно удовлетворяться условие $|\alpha(\omega, t)| \leq 1$ для избежания расхождения ряда Фурье. Тогда ур.3.8 будет иметь вид:

$$f = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^n(\omega, t) e^{in\theta} + \alpha^n(\omega, t)^* e^{-in\theta}) \right]. \quad (3.9)$$

Подставляя (2.4),(3.9) в (3.6) получаем:

$$\dot{\alpha} = i\left(\frac{K}{2}[R_\tau - \bar{R}_\tau\alpha^2] + \alpha\omega\right), \quad (3.10)$$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega, t)g(\omega)d\omega. \quad (3.11)$$

Полученное уравнение описывает локальную динамику системы фазовых осцилляторов, т.е. системы где у всех осцилляторов зафиксированные частоты ω . Чтобы получить уравнение для глобальной динамики сети, где у осцилляторов параметры распределены с заданным распределением $g(\omega)$, надо проинтегрировать локальную систему в соответствии с функцией распределения параметров.

Для подсчёта интеграла используется теорема о вычетах. Для её применение параметр ω расширяется на комплексную плоскость и интеграл замыкается по верхней полуплоскости параметра. В данной работе будет рассматриваться система в которой частоты осцилляторов распределены в соответствии со следующими сериями рациональных распределений $g(\omega)$:

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{n \sin \frac{\pi}{2n} \Delta^{2n-1}}{(\omega - \Omega)^{2n} + \Delta^{2n}}, \quad (3.12)$$

где Δ - полуширина, а Ω - центр распределения. Параметр n определяет форму распределения рис.3.2.

Тогда интеграл будет иметь вид:

$$\int_c \alpha(\omega, t)g(\omega)d\omega = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=z_k} f(z). \quad (3.13)$$

Найдём вычеты функции $\alpha(\omega, t)g(\omega)$. Пусть $\alpha(\omega, t)$ аналитична, тогда задача нахождения вычетов сводится к решению уравнения :

$$(\omega - \Omega)^{2n} + \Delta^{2n} = 0. \quad (3.14)$$

Решением ур.3.14 будет являться :

$$\omega_k = \Delta[\cos \psi_k + i \sin \psi_k] + \Omega, \quad (3.15)$$

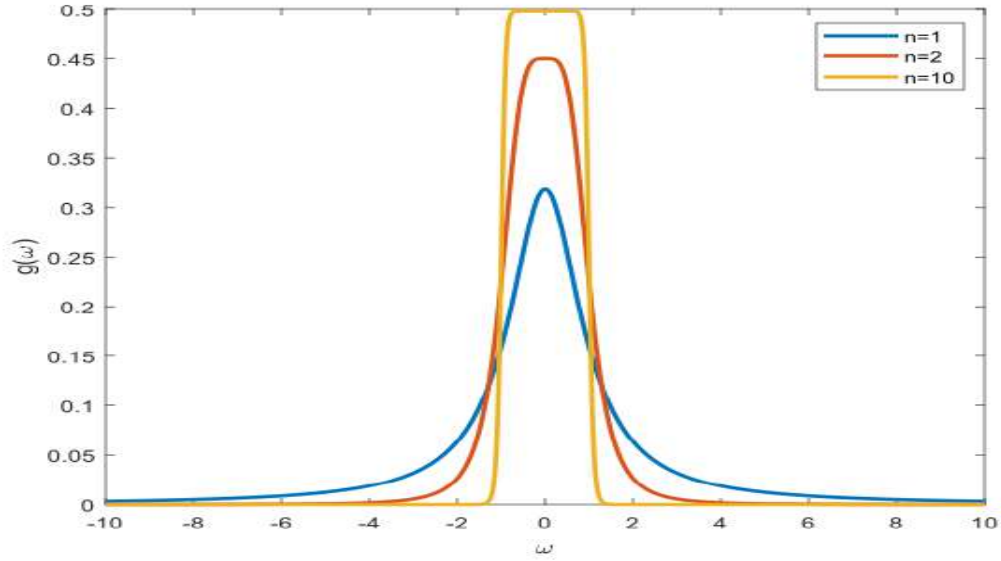


Рисунок 3.2 — Распределение частот $g(\omega)$ для разных n . $\Omega = 0, \Delta = 1$.

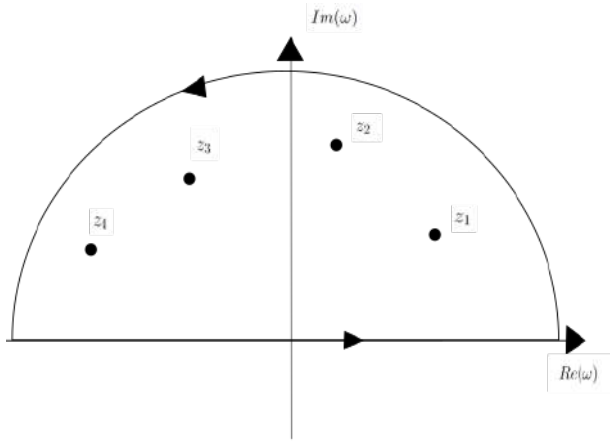


Рисунок 3.3 — Комплексная плоскость параметра ω , на которой обозначены полюсы 1-го порядка.

где $\psi_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2n}, k = 0, \dots, 2n - 1$. Так как интеграл замыкается в верхней полуплоскости, то использоваться будут уравнения с индексами $k = 0 \dots n - 1$. Таким образом, в зависимости от параметра распределения n будет разное количество полюсов, т.е. чем больше n , тем больше полюсов. Вычеты будем

вычислять с помощью формулы с производной по знаменателю:

$$\operatorname{res}_{z=z^*} f(z) = \operatorname{res}_{z=z^*} \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(z^*)}{\psi'(z^*)}. \quad (3.16)$$

В нашем случае $f(z) = \alpha(\omega, t) \frac{1}{\pi} \frac{n \sin(\frac{\pi}{2n}) \Delta^{2n-1}}{(\omega - \Omega)^{2n} + \Delta^{2n}}$, тогда:

$$\phi(z) = \alpha(\omega, t) \frac{1}{\pi} n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Delta^{2n-1}, \quad (3.17)$$

$$\psi(z) = (\omega - \Omega)^{2n} + \Delta^{2n}. \quad (3.18)$$

Учитывая всё вышенаписанное, интеграл по замкнутому контуру будет иметь следующий вид:

$$R = \int_c \alpha(\omega, t) g(\omega) d\omega = -i \sin \frac{\pi}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\psi_j} \alpha_j, \quad (3.19)$$

где $\alpha_j = \alpha(\omega_j, t)$.

Записав ур.3.10 для $\omega = \omega_j$, получаем систему уравнений, которая описывает глобальную динамику сети.

$$\begin{cases} R_\tau = -i \sin \frac{\pi}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\psi_j} \alpha_{j\tau} \\ \dot{\alpha}_j = \frac{K}{2} [R_\tau - \bar{R}_\tau \alpha_j^2] + i \alpha_j (\Delta e^{i\psi_j} + \Omega), \end{cases} \quad (3.20)$$

Таким образом была получена редуцированная система, которая описывает модель Курамото с запаздыванием где частоты фазовых осцилляторов распределены в соответствии с плотность распределения $g(\omega)$. Размерность полученной системы определяется параметром n , который определяет форму $g(\omega)$.

Чтобы посмотреть как выглядит распределение 3.21, перепишем его используя для вычисления суммы следующую формулу $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$:

$$f = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left[1 + \frac{\alpha(\omega, t)^* e^{i\theta}}{1 - \alpha(\omega, t)^* e^{i\theta}} + \frac{\alpha(\omega, t) e^{-i\theta}}{1 - \alpha(\omega, t) e^{-i\theta}} \right]. \quad (3.21)$$

Воспользуемся заменой переменной $\alpha(\omega, t) = \rho e^{i\psi}$ и получим следующее уравнение:

$$f = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left[\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \theta)} \right]. \quad (3.22)$$

Рассмотрим распределение фаз осцилляторов которое задаётся следующим уравнение:

$$F(\psi) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \theta)} \right]. \quad (3.23)$$

Параметр R определяет форму распределения, если $R = 1$ то распределение становится дельта функцией $F(\psi) = \delta(\psi - \theta)$. Если же $R = 0$, то распределение становится константным $F(\psi) = \frac{1}{2\pi}$. Аргумент ψ отвечает за расположение центра распределения рис.3.4.

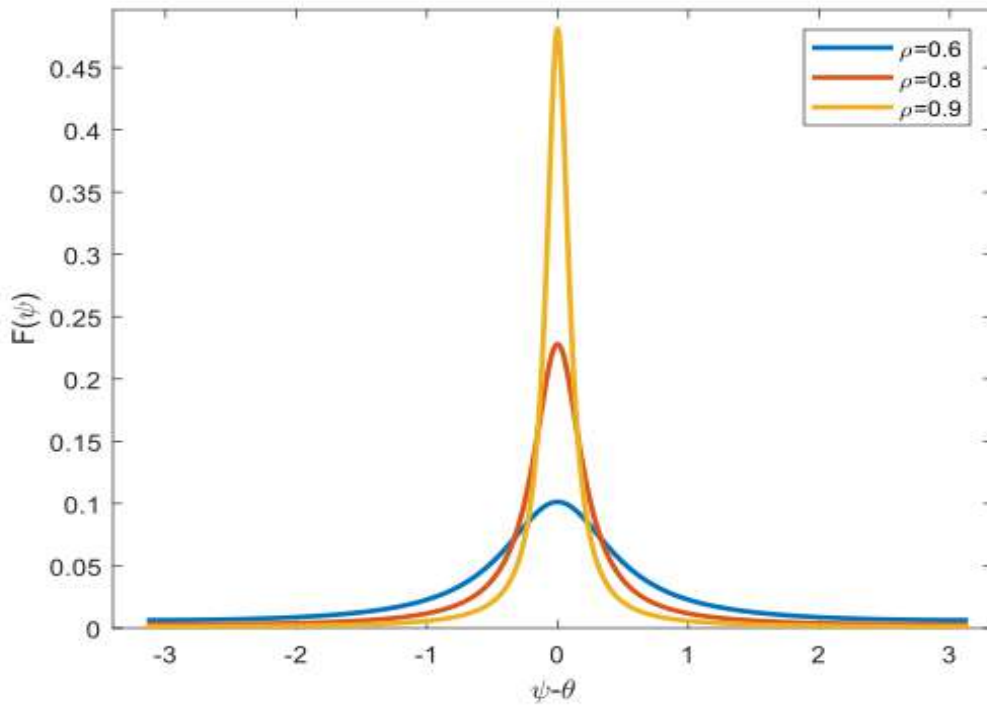


Рисунок 3.4 — Распределение фаз осцилляторов F для разных ρ .

ГЛАВА 4

Бифуркационный анализ редуцированной системы

Бифуркационный анализ полученной редуцированной системы уравнений в данной работе осуществляется с помощью пакета программ для бифуркационного анализа дифференциальных уравнений с запаздыванием „DDE-BIFTOOL“. Отметим что в системе всегда есть состояние равновесия $\alpha_j = 0$. Оно соответствует асинхронному режиму. Задача заключалась исследовании этого состояния равновесия и нахождении бифуркации Андронова-Хопфа, которая разделяет асинхронный режим и режим частичной синхронизации. Использовался следующий алгоритм: Сначала находилось состояние равновесия, которое впоследствии продлялось по параметру силы связи K и находилось точка бифуркации Андронова-Хопфа, т.е. точка где комплексно связанные характеристические корни пересекали мнимую ось. Затем строилась двухпараметрическая бифуркационная диаграмма рис.4.1, представленная на слайде. Аналогично были построены

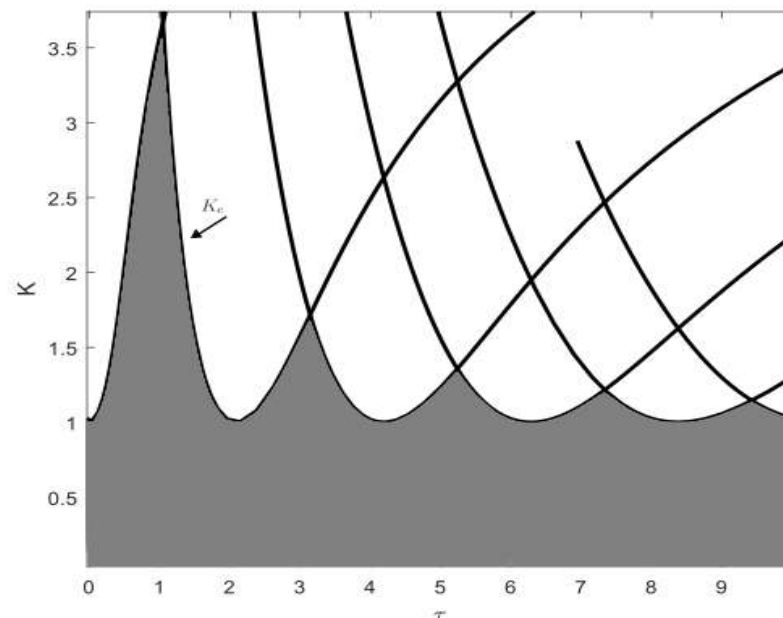


Рисунок 4.1 — Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма. Черная линия соответствует критической силе связи K_c или же бифуркации Андронова-Хопфа. Серая закрашенная область представляет собой область асинхронного режима. График построен для $n = 1$.

двухпараметрических бифуркационные диаграммы для разных распределений $g(\omega)$, т.е. при разных n . Параметры для графиков были подобраны

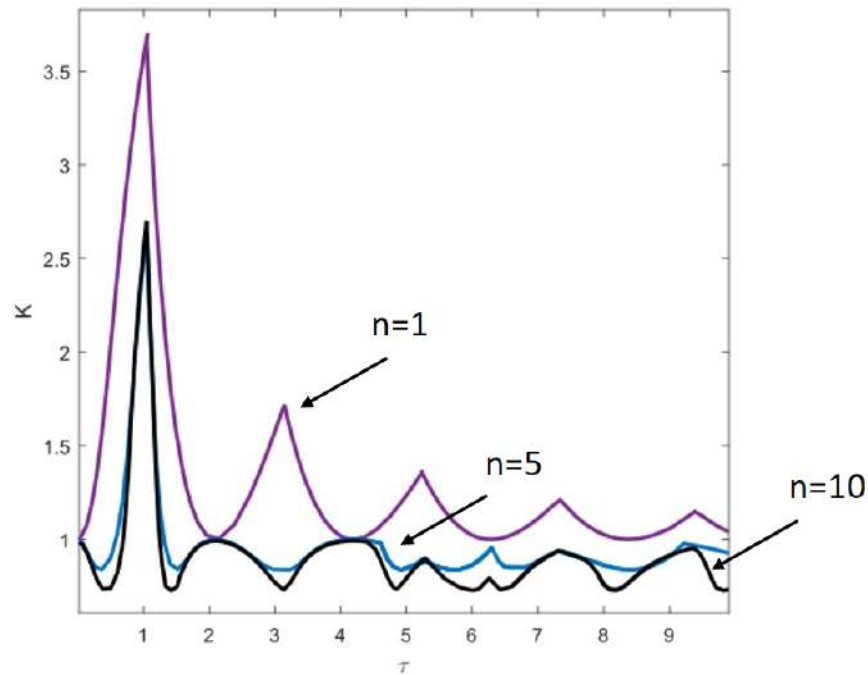


Рисунок 4.2 — Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма построенная для разных n . Линии соответствуют критической силе связи K_c или же бифуркации Андронова-Хопфа.

таким образом, чтобы при нулевой задержке $\tau = 0$ критическая сила связи $K_c = 1$. Для этого использовалась формула представленная в статье [2], которая применима если в системе нет задержки:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}, \quad (4.1)$$

где $g(0)$ - распределение частот осцилляторов. Подставляя распределение плотность распределения ур.3.12 получим:

$$K_c = \frac{2\Delta}{n \sin \frac{\pi}{2n}}. \quad (4.2)$$

Откуда получаем что при произвольном n полуширина Δ должна быть равной :

$$\Delta = \frac{n \sin \frac{\pi}{2n}}{2}. \quad (4.3)$$

Из графиков можно увидеть, что форма распределения частот осцилляторов $g(\omega)$ влияет на синхронизацию системы. При увеличении n значение критической силы связи K_c уменьшается, и следовательно, уменьшается зона асинхронного режима. Так же из рис.4.2 видно, что при $n > 1$ есть участки где значение критической силы связи K_c с задержкой меньше чем без неё, т.е. в некоторых случаях задержка может оказывать положительное влияние на установлении синхронизации в системе рис.4.3.

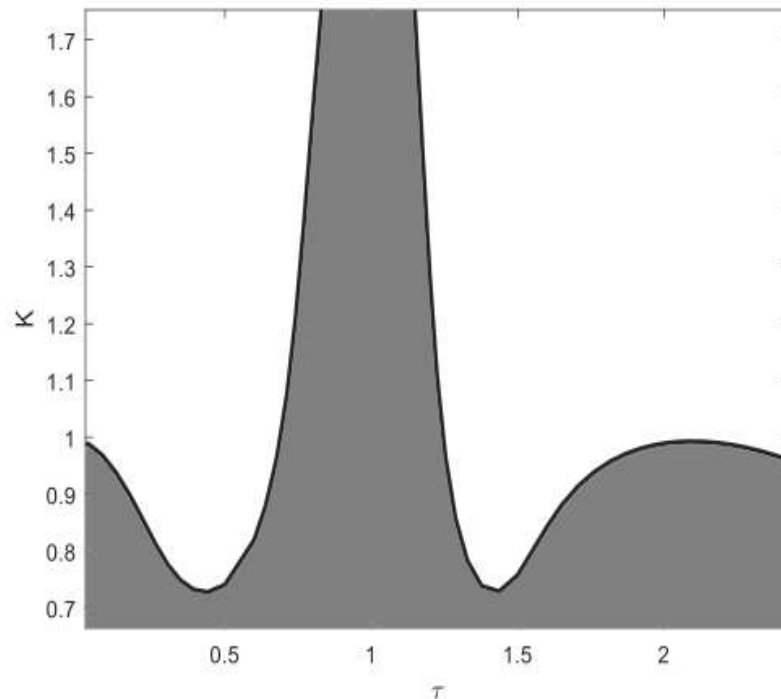


Рисунок 4.3 — Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма для $n = 5$.

Таким образом мы получаем, что с одной стороны получение более старого сигнала должно препятствовать возникновению синхронизации в системе, однако, оказывается, что задержка связи может в некоторых случаях способствовать синхронизации. Этот эффект наблюдается при параметре $n > 1$ плотности распределения $g(\omega)$.

ГЛАВА 5

Численное исследование микроскопической системы

Данная работа посвящена изучению синхронизации фазовых осцилляторов, поэтому для исследования микроскопической системы был написан алгоритм в среде программирования Matlab. Суть алгоритма заключается в моделировании конечного числа N фазовых осцилляторов с различными частотами ω . Распределение собственных частот выполняется следующим образом. Плотность распределения частот $g(\omega)$ сводится к функции распределения $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} g(\omega) d\omega$. Функция распределения вычисляется численно и принимает значения в диапазоне $0 \leq F(\omega) \leq 1$ рис.5.1. Затем ось ординат разбивается на N равных частей от 0 до 1. Каждому значению присваивается своя собственная частота ω . Таким образом получается что у каждого фазового осциллятора своя собственная частота ω , которая соответствует плотности распределения:

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{n \sin \frac{\pi}{2n} \Delta^{2n-1}}{(\omega - \Omega)^{2n} + \Delta^{2n}}. \quad (5.1)$$

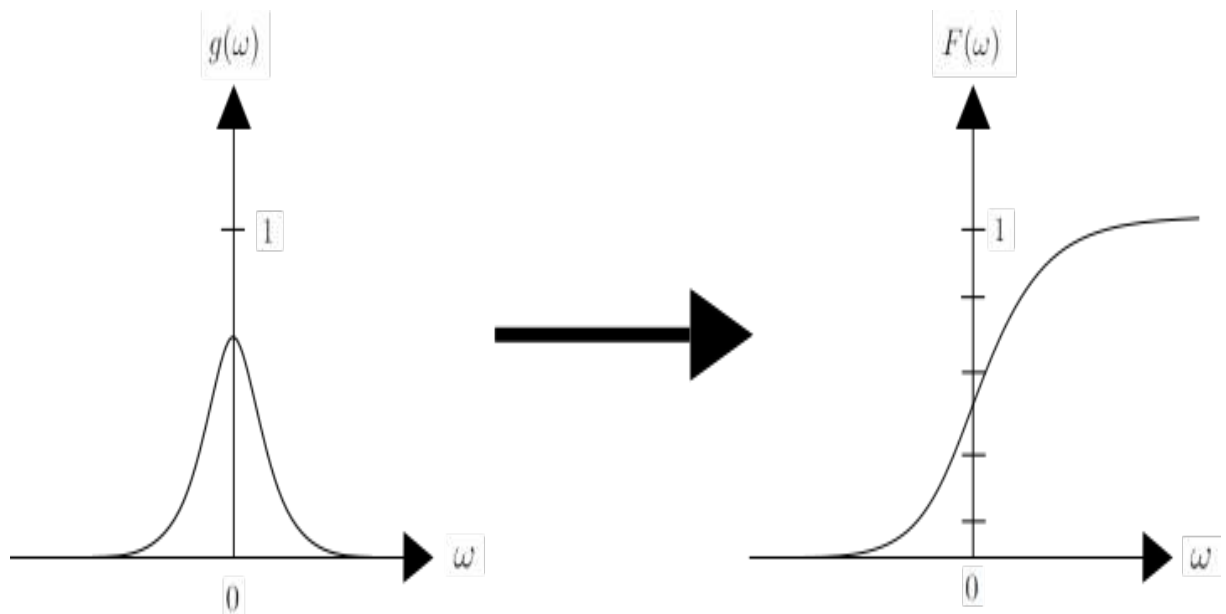


Рисунок 5.1 — Переход от плотности распределения $g(\omega)$ к функции распределения $F(\omega)$.

Начальные фазы осцилляторов распределены случайным образом по единичной окружности, чтобы система в начальный момент времени не

была синхронизованна $|R| \approx 0$. Таким образом будем наблюдать за тем, как система из начального состояния приходит к синхронизации $|R| > 0$ и при каких критических силах связи K_c это происходит. Интегрирование осуществляется методом Эйлера с постоянным шагом $dt = 10^{-2}$.

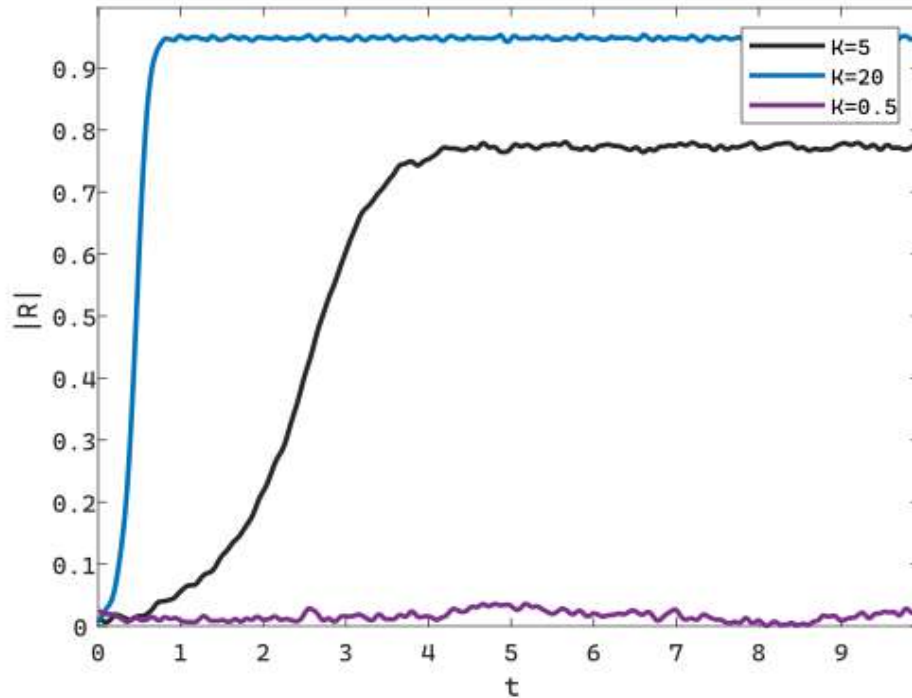


Рисунок 5.2 — Модуль параметра порядка $|R|$ в зависимости от времени t при разных силах связи K . Параметры системы : $N = 5000$, $\Delta = 1$, $\Omega = 0$, $n = 1$, $\tau = 0$

Как можно заметить из рис.5.2 система при достаточной силе связи K приходит в стационарное состояние через некоторый промежуток времени, не учитывая небольшие флуктуации в окрестности постоянного уровня. Если же K мало, то модуль параметра порядка колеблется около нуля $|R| \approx 0$. Для того чтобы определить какое значение $|R|$ считать за устоявшееся, система интегрируется достаточное количество времени для прихода в стационарное состояние, после чего все значения модуля параметра порядка, которые находятся в окрестности постоянного уровня, усредняются.

Для того чтобы понять как сила связи K влияет на степень синхронизованности системы, были построены графики зависимости $|R|$ от K , т.е. для каждого значения K из заданного интервала система интегрировалась

пока не приходила в стационарное состояние, затем вычислялся модуль параметра порядка $|R|$. Проход по параметру осуществляется с наследованием начальных условий, т.е. переходя к новому значению K , начальными условиями становится последнее значение предыдущей итерации.

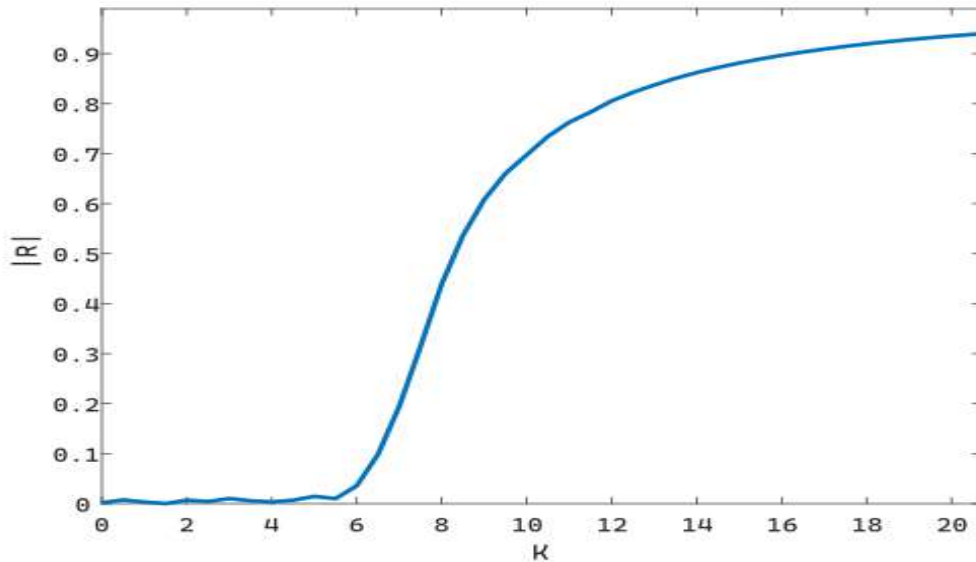


Рисунок 5.3 — Зависимость модуля параметра порядка $|R|$ от силы связи K .

Значение критической силы связи K_c может зависеть от нескольких факторов, таких как полуширина распределения Δ , параметр распределения n . Из рис.5.4 видно, что увеличение количества осцилляторов N не влияет на K_c . Однако чем больше N , тем меньше флуктуации в окрестности $|R| = 0$.

На рис.5.5 показана зависимость модуля параметра порядка $|R|$ от силы связи K при разных значениях полуширины Δ плотности распределения $g(\omega)$ ур.5.1. Чем больше Δ , тем больше значение критической силы связи K_c . Это связано с тем, что при малых Δ осцилляторы имеют близкие собственные частоты ω , т.е. осцилляторы колеблются с близкой частотой и для их синхронизации требуется меньше силы связи K . А при больших Δ осцилляторы наоборот имеют большую разность частот. Осцилляторы сложнее синхронизовать и поэтому значение критической силы связи K_c становится больше ур.4.3 .

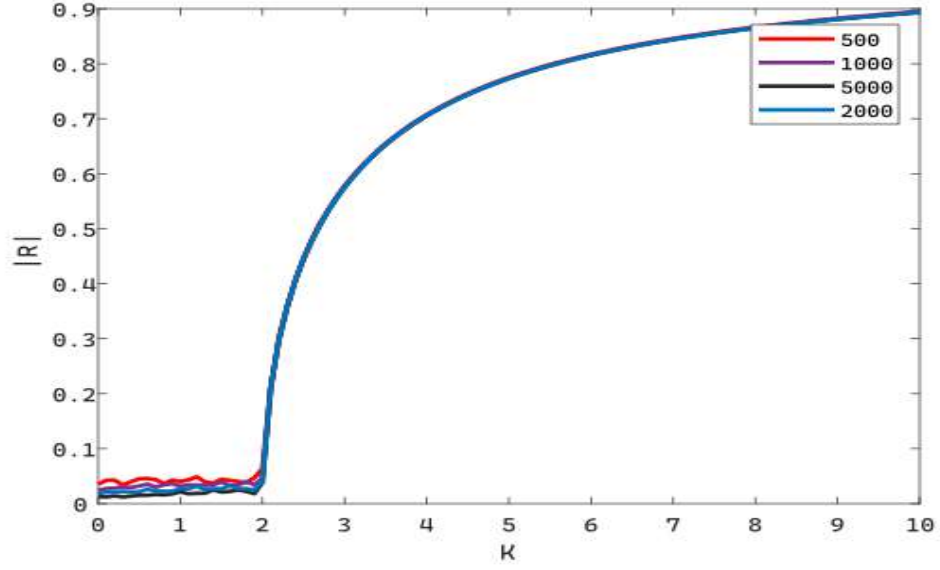


Рисунок 5.4 — Модуль параметра порядка $|R|$ в зависимости от силы связи K при разных количествах осцилляторов N в системе. Параметры системы : $\Delta = 1, \Omega = 0, n = 1, \tau = 0$

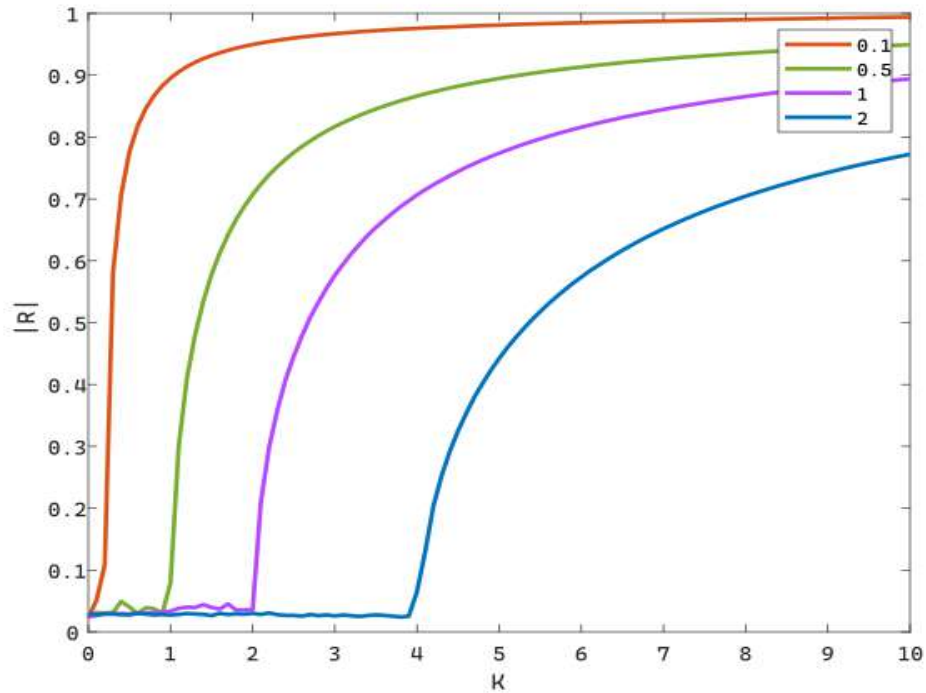


Рисунок 5.5 — Модуль параметра порядка $|R|$ в зависимости от силы связи K при разных значениях полуширины Δ плотности распределения $g(\omega)$. Параметры системы : $N = 3000, \Omega = 0, n = 1, \tau = 0$

Рис.5.6 показывает зависимость модуля параметра порядка $|R|$ в зависимости от силы связи K . В данном случае график построен для разных значений параметра n плотности распределения $g(\omega)$. Как рассматривалось ранее рис.3.2 параметр n определяет форму распределения. При больших n осцилляторы имеют частоты в пределах $[\Omega - \Delta; \Omega + \Delta]$. Это означает что максимальная разность частот может составлять 2Δ . При уменьшении n диапазон частот увеличивается, тем самым увеличивается разность частот. Таким образом, увеличение n уменьшает критическую силу связи K_c , т.к. разность частот осцилляторов становится меньше, а уменьшение n увеличивает K_c .

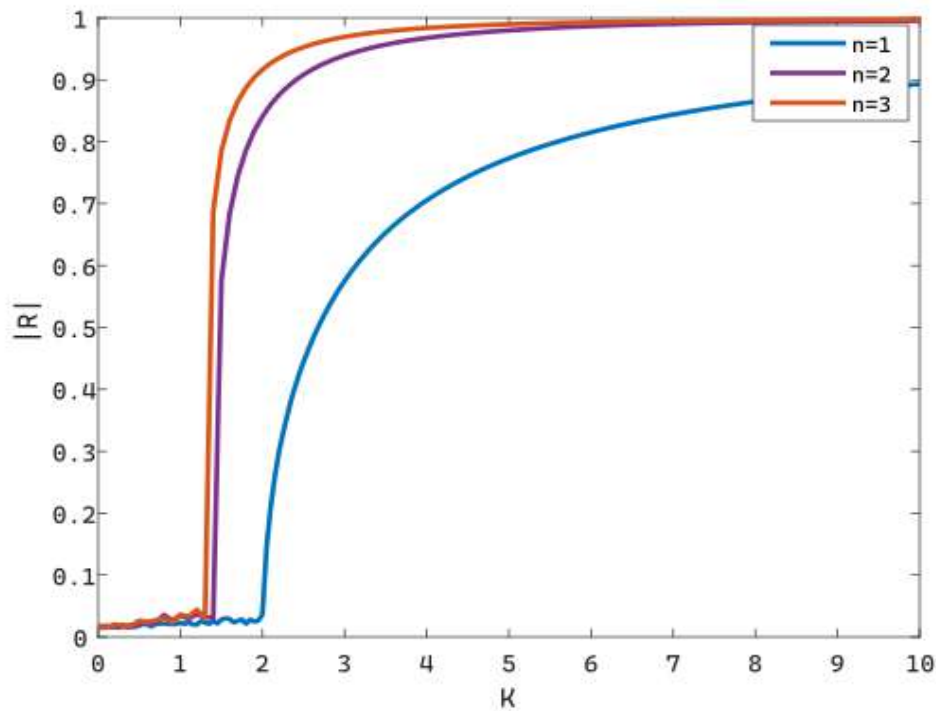


Рисунок 5.6 — Модуль параметра порядка $|R|$ в зависимости от силы связи K при разных значениях n плотности распределения $g(\omega)$. Параметры системы : $N = 3000$, $\Omega = 0$, $\tau = 0$

ГЛАВА 6

Сравнение редуцированной и микроскопической систем

Следующим вопросом является изучение зависимости значения критической силы связи K_c от задержки τ . Ранее мы находили значение критической силы связи K_c по графикам и этого было достаточно. Но для более детального исследования был реализован алгоритм, который в автоматическом режиме находил значение критической силы связи K_c , что упрощало исследование. Алгоритм заключался в том, что для моделировалась система для нахождения зависимости квадрата модуля параметра порядка $|R|$ от силы связи K . Сила связи варьировалась в интервале $K \in [0, 10]$. Первый проход по параметру происходил с большим шагом $\Delta K = 0.5$. Это делалось для того, чтобы уменьшить время вычислений. Во время первого прохода вычислялся модуль параметра порядка $|R|$, а затем определялось в каком диапазоне силы связи K находится критическая сила связи K_c , т.е. находился интервал в котором были два значения модуля параметра порядка $|R| \approx 0$ и $|R| > p$, где $p = 0.1$ - заданный вручную порог. После чего осуществлялся второй проход по параметру с более мелким шагом $\Delta K = 0.1$. И уже во втором проходе определялась критическая сила связи K_c . Критической силой связи являлось первое значение модуля параметра порядка, которое пересекало порог $|R| > p$. Графическое изображение данного алгоритма изображено на рис.3.11.

Описанный выше алгоритм будет использоваться для нахождения зависимости значения критической силы связи K_c от задержки τ . Помимо микроскопической системы будет рассматриваться полученная ранее редуцированная система ур.3.20. Критическая связь K_c редуцированной системы будет находиться с помощью бифуркационного анализа, ей будет соответствовать бифуркация Андронова-Хопфа. Так как мы исследуем периодическую систему с запаздыванием, то линий бифуркаций Андронова-Хопфа может быть несколько. Критическому значению силы связи будет соответствовать нижняя линия.

Учитывая всё вышесказанное были получены графики, которые показывают зависимость критической силы связи K_c от задержки τ . Графики

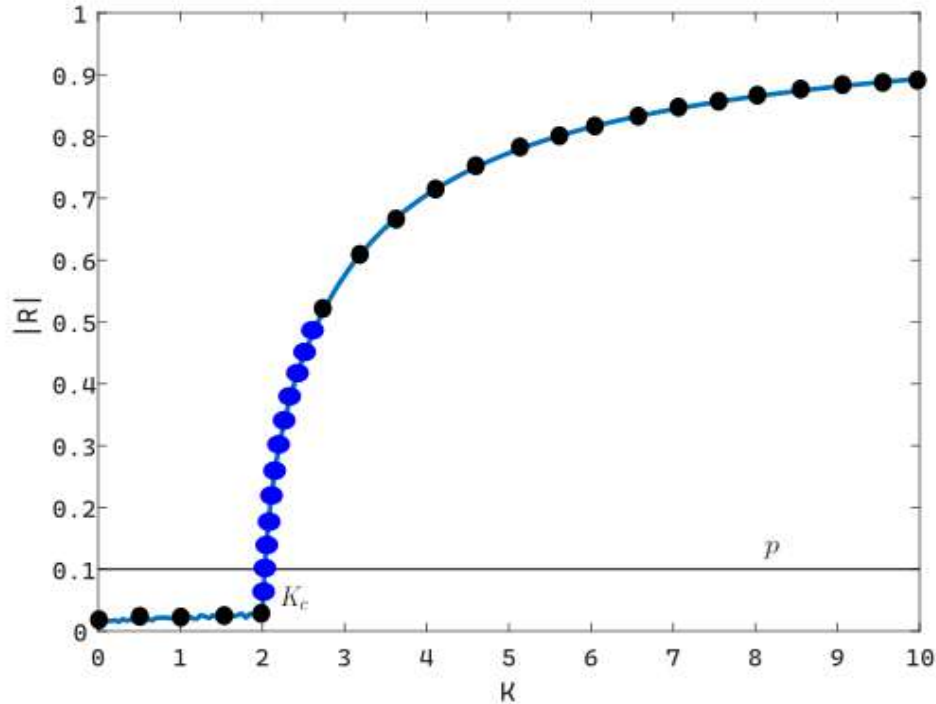
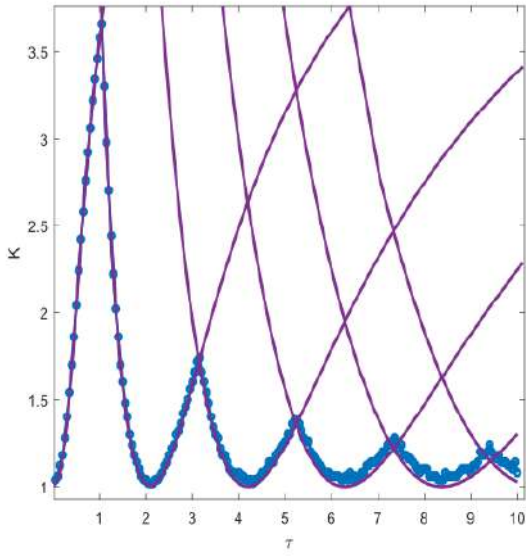


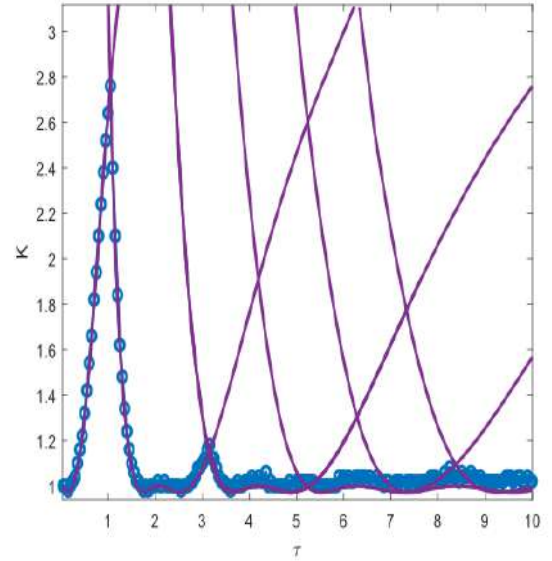
Рисунок 6.1 — Алгоритм нахождения критической силы связи K_c . Чёрными точками показан первый проход по параметру с большим шагом $\Delta = 0.5$, синими точками показан второй проход по параметру $\Delta = 0.1$, чёрная горизонтальная линия является порогом p .

были построены для разных параметров n распределения $g(\omega)$. Как можно заметить, полученная ранее редуцированная система ур.3.20 довольно хорошо согласуется с микроскопической системой ур.2.3.

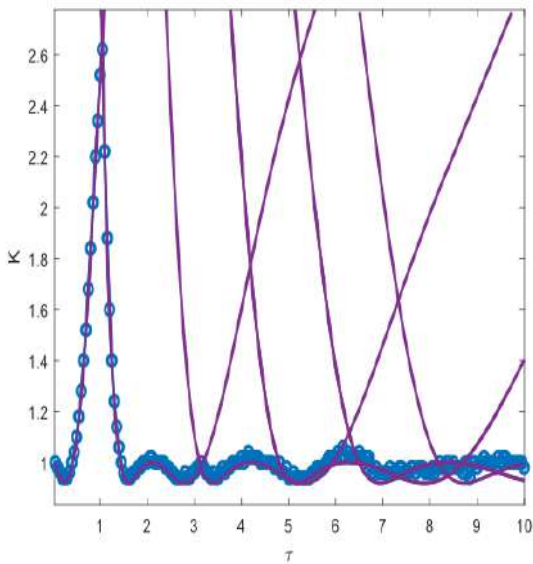
Однако при больших задержках есть небольшие отклонения при сравнении этих систем. Это связано с тем, что при больших задержках τ системе требуется больше времени для прихода в стационарное состояние. Это плохо сказывается на результате, т.к. при численном интегрировании на каждом шагу накапливается ошибка. Ещё стоит заметить, что редуцирование выполняется при $N \rightarrow \infty$, т.е. бесконечное количество осцилляторов, что невозможно реализовать в численном счёте. Также описанной выше алгоритм для нахождения критической силы связи K_c ограничен по точности шагом по параметру $\Delta K = 0.1$. Из-за чего при сравнении редуцированной и микроскопической систем значения критической силы связи немного отличаются при больших задержках τ .



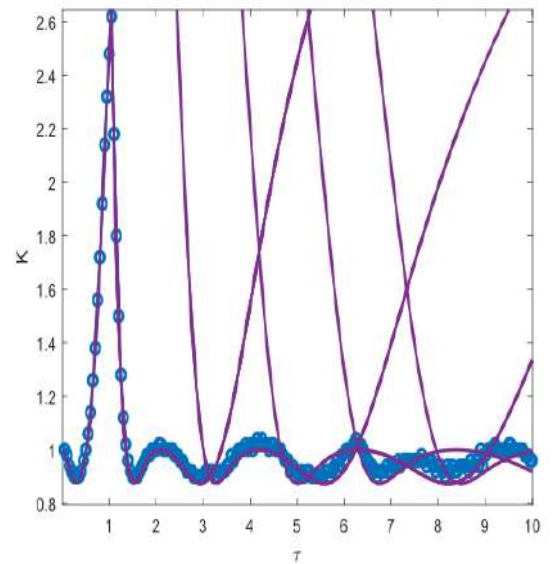
a)



b)

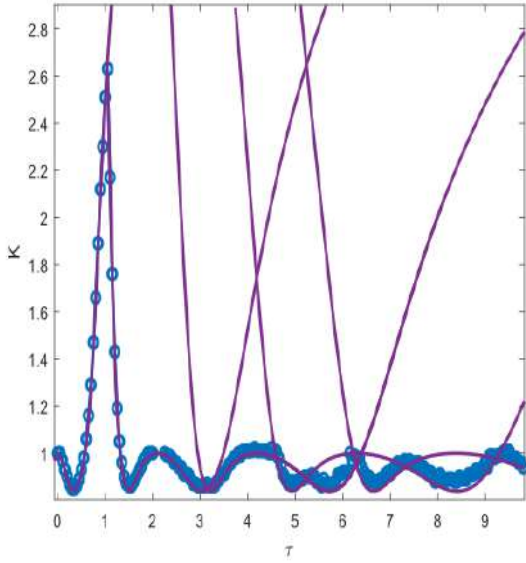


c)

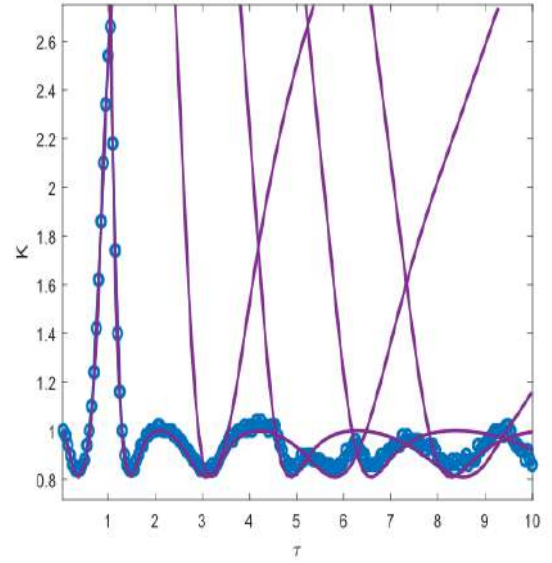


d)

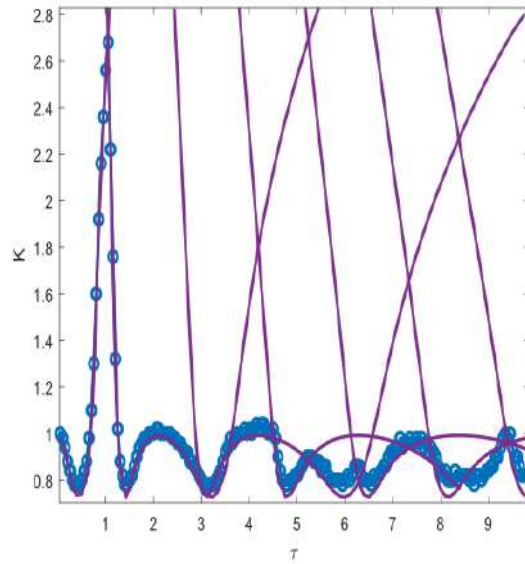
На графиках рис.6.2 представлено сравнение бифуркационного анализа редуцированной системы и численного моделирования микроскопической системы для разных n . Из графиков можно убедиться в хорошем согласовании результатов, что говорит о их достоверности.



e)



f)



g)

Рисунок 6.2 — Зависимость силы связи K от задержки τ . Фиолетовыми линиями нарисованы бифуркации А-Х редуцированной системы. Синими линиями нарисовано критическое значение силы связи K_c для макроскопической системы. Графики построены для разного параметра n : а) $n = 1$, б) $n = 2$, в) $n = 3$, д) $n = 4$, е) $n = 5$, ф) $n = 6$, г) $n = 10$. Параметры системы: $\Omega = 3, \Delta = \frac{n \sin \frac{\pi}{2n}}{2}, N = 3600$.

ГЛАВА 7

Заключение

В ходе проделанной работы было изучено явление синхронизации в системе фазовых осцилляторов Курамото с задержкой. Были получены редуцированные системы уравнений для разных распределений частот фазовых осцилляторов. Разработаны и применены алгоритмы для численного моделирования микроскопической системы. Рассмотрено влияние параметров системы на синхронизацию без задержки, а также влияние формы распределения на синхронизацию фазовых осцилляторов с задержкой. Проведено сравнение микроскопической и редуцированной систем. Выявлено что задержка может положительно влиять на синхронизацию в системе при определённых распределениях частот.

Литература

- [1] Ott, E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large system of globally coupled oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2008. *Chaos* 18, 037113.
- [2] Kuramoto, Y. (1975). H. Araki (ed.). *Lecture Notes in Physics, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. Vol. 39. Springer-Verlag, New York. p. 420.
- [3] Acebrón J.A, Bonilla L.L., Pérez Vicente C.J., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. 2005. *Rev. Mod. Phys.* 77, 137.
- [4] Takamatsu, A., T. Fujii, and I. Endo. Time delay effect in a living coupled oscillator system with the plasmodium of *Physarum polycephalum*. 2000, *Phys. Rev. Lett.* 85, 2026
- [5] Luzyanina, T. B. Synchronization in an oscillator neural network model with time-delayed coupling. 1995, *Network Comput. Neural Syst.* 6, 43
- [6] Yeung, M. K. S., and S. H. Strogatz. Time Delay in the Kuramoto Model of Coupled Oscillators. 1999, *Phys. Rev. Lett.* 82, 648
- [7] Choi, M. Y., H. J. Kim, D. Kim, and H. Hong. Synchronization in a system of globally coupled oscillators with time delay. 2000, *Phys. Rev. E* 61, 371
- [8] Winfree, A. T., 1980, *The Geometry of Biological Time* (Springer, New York).
- [9] Ariaratnam, J. T., and S. H. Strogatz. Phase Diagram for the Winfree Model of Coupled Nonlinear Oscillators. 2001, *Phys. Rev. Lett.* 86, 4278
- [10] Strogatz, S. H., 2003, *SYNC: the Emerging Science of Spontaneous Order* Hyperion, New York.

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Кондратьева Сергея Владимировича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Динамика уравнения с двумя запаздываниями и финитной нелинейностью» являются: исследование уравнения с двумя запаздываниями, асимптотические приближения решения (раздел 1), численные результаты расчетов (разделы 2 и 3).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Кащенко Ильей Сергеевичем, заведующим кафедрой математического моделирования математического факультета Ярославского государственного университета.
- Выступление на всероссийской молодежной конференции "Путь в науку. Математика"
- Подана в печать статья в журнал «Mathematics», содержащая часть работы.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 16.06.2023. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись



Кондратьев Сергей Владимирович

31.05.2023

Ярославль, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра математического моделирования

Сдано на кафедру
« ____ » _____ 2023 г.
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
_____ Кащенко И.С.

Магистерская диссертация

Динамика уравнения с двумя запаздываниями и финитной нелинейностью
(Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика)

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент
_____ Кащенко И.С.
« ____ » _____ 2023 г.

Студент группы ПМИ-21МО
_____ Кондратьев С.В.
« ____ » _____ 2023 г.

Ярославль 2023 г.

Реферат

Динамика уравнения с двумя запаздываниями и финитной нелинейностью.

В работе рассмотрено уравнение осциллятора с запаздывающей связью, которое задается дифференциальным уравнением с двумя запаздываниями. Данное уравнение имеет вид:

$$\dot{x}(t) + x = \lambda F(x(t - T_1)) + \gamma(x(t - T_2) - x(t)), \quad \lambda \gg 1.$$

В процессе работы была исследована динамика решений в зависимости от значений параметра γ и времени T_1 и T_2 . Реализована программа для решения и визуализации решения.

Содержание

Введение	4
1 Аналитическое построение решения	5
2 Численное исследование	10
2.1 Случай $T_1 < T_2$	10
2.2 Случай $T_1 > T_2$	12
2.3 Разные случаи не подходящие под общую теорию	13
3 Связь с «бегущей волной»	14
4 Описание работы программы	15
Заключение	17
Список литературы	18
Приложение	22

Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием возникают во многих прикладных задачах в биологии, физике, медицине и экологии [1-7].

Рассмотрим систему из нескольких связанных осцилляторов (1):

$$\dot{x}_k + x_k = \lambda F(x_k(t - T_1)) + \gamma(x_{k-1} - x_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad x_0 \equiv x_N, \quad (1)$$

где $\lambda \gg 1$, параметр связи $\gamma > 0$ и время запаздывания $T_1 > 0$. $F(x)$ представляет собой финитную и положительную функцию следующего вида:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < p, \\ 0, & |x| \geq p, \end{cases}$$

где p некоторый положительный параметр и $f(x) > 0$ для всех $x \in (-p, p)$.

Изучение динамики связанных осцилляторов представляет большой интерес. Такие задачи важны, поскольку они моделируют множество процессов в различных областях науки, например, они моделируют работу сердца или нейронов в физиологии и вращение генераторов в электрических сетях в физике [8-10].

Одиночное уравнение из цепочки (1) при $\gamma = 0$, которое имеет вид (2), имеет важное значение в радиофизике и биологии:

$$\dot{x} + x = \lambda F(x(t - T_1)). \quad (2)$$

Например, данное уравнение является математической моделью генератора с нелинейной запаздывающей обратной связью с RC-фильтром нижних частот первого порядка [11-12]. Такие генераторы используются при изготовлении D-усилителей, гидролокаторов, шумовых радаров. Более того, модель (2) имитирует биологические процессы, возникающие во многих областях биологии, например, в популяционной биологии, нейрофизиологии, метаболической регуляции [13].

Известно, что уравнение (2) имеет периодическое решение порядка $O(\lambda)$ с периодом $O(\ln \lambda)$ [14].

Решение системы (1) будем искать в виде периодических функций вида «бегущей волны» (3):

$$x_k(t) = x(t - (k - 1)T_2), \quad k = 1, \dots, N, \quad T_2 N = nP \quad (3)$$

где T_2 некая временная задержка модели (1), P - период решения уравнения (2).

Заметим, что функция $x(t)$ из (3) удовлетворяет уравнению с двумя запаздываниями (4):

$$\dot{x}(t) + x(t) = \lambda F(x(t - T_1)) + \gamma(x(t - T_2) - x(t)). \quad (4)$$

На самом деле, подставим $x(t)$ из (3) в уравнение (1):

$$\dot{x}(t-(k-1)T_2)+x(t-(k-1)T_2) = \lambda F(x(t-(k-1)T_2-T_1))+\gamma(x(t-(k-2)T_2-T_2)-x(t-(k-1)T_2)) = \lambda F(x(t-(k-1)T_2-T_1)) + \gamma(x(t-(k-1)T_2-T_2) - x(t-(k-1)T_2)).$$

Заменим время $t-(k-1)T_2 \rightarrow \tau$, $2T_2 \rightarrow T_2^*$, а после переименуем $\tau \rightarrow t$, $T_2^* \rightarrow T_2$ и получим уравнение (1). В работе будет исследована динамика уравнения (4), найдены периодическое решения, обоснованы решения «бегущей волны» для уравнения (1).

Результаты, описанные ниже, будут опубликованы в статье [14].

1 Аналитическое построение решения

Для построение решения будем интегрировать уравнение (4) по частям.

В начале определим множество S начальных функций $\varphi(t)$ для $t \in [-T, 0]$, где $T = \max(T_1, T_2)$:

$$S = \{\varphi(t) \in C_{[-T,0]} : \varphi(0) = p, \varphi(t) \geq p \forall t \in [-T, 0], \frac{1+\gamma}{\gamma}p \geq \varphi(t), \forall t \in [-T_2, 0]\}. \quad (5)$$

Иллюстрация множества S представлена на Рис. 1.

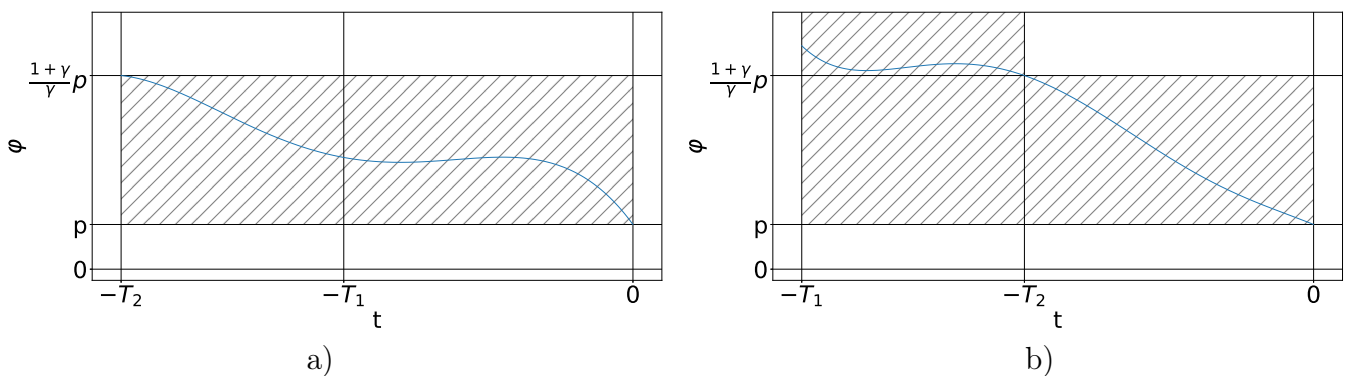


Рис. 1: Множество начальных условий S при а) $T_1 < T_2$; б) $T_2 < T_1$

1. Рассмотрим первый отрезок времени $t \in [0, T_1]$. Из-за выбора начальных условий $x(t-T_1) = \varphi(t-T_1) > p$ и значит $F(x(t-T_1)) = 0$. В таком случае уравнение (4) принимает вид (6):

$$\dot{x}(t) = -(1+\gamma)x(t) + \gamma x(t-T_2). \quad (6)$$

Через $x_\varphi(t)$ обозначим решение уравнения (4) с начальными условиями $\varphi(t)$. Общий вид решения

уравнения (6) на данном участке представим в виде (7):

$$x_{\varphi}(t) = pe^{-(1+\gamma)t} + \gamma \int_0^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} \varphi(\tau - T_2) d\tau. \quad (7)$$

Лемма 1 Пусть $0 < \varphi(t_0) \leq p$ и $0 < \varphi(t) \leq \frac{1+\gamma}{\gamma} p$ для всех $t \in [t_0 - T_2, t_0]$. Тогда решение $x(t)$ уравнения (6) с начальными условиями $x(t) = \varphi(t)$ ($t \in [t_0 - T_2, t_0]$) меньше или равно p при $t \geq t_0$.

Доказательство. Общий вид решения уравнения (6) имеет вид:

$$x(t) = x(t_0)e^{-(1+\gamma)(t-t_0)} + \gamma \int_{t_0}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} x(\tau - T_2) d\tau. \quad (8)$$

Второй член формулы (8) может быть оценен на отрезке $t \in [t_0, t_0 + T_2]$:

$$\gamma \int_{t_0}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} x(\tau - T_2) d\tau \leq \gamma \frac{1+\gamma}{\gamma} p \int_{t_0}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} d\tau = p(1 - e^{-(1+\gamma)(t-t_0)}). \quad (9)$$

Таким образом, на отрезке $t \in [t_0, t_0 + T_2]$

$$x(t) \leq x(t_0)e^{-(1+\gamma)(t-t_0)} + p(1 - e^{-(1+\gamma)(t-t_0)}) \leq p,$$

и $0 < x(t_0 + T_2) \leq p$. Затем, если заменить t_0 на $t_0 + T_2$ в формулах (8) и (9), то получим оценку $0 < x(t) \leq p$ на отрезке $t \in [t_0 + T_2, t_0 + 2T_2]$. \square

Положим $t_0 = 0$, тогда по Лемме 1 на участке $t \in [0, T_1]$ $x_{\varphi}(t) \leq p$ для всех $t \in [0, T_1]$.

2. Пусть теперь $t \in [T_1, 2T_1]$. В предыдущем пункте доказано, что $x_{\varphi}(t - T_1) < p$ и значит $F(x_{\varphi}(t - T_1)) = f(x_{\varphi}(t - T_1)) > 0$. В таком случае уравнение (4) принимает вид (10):

$$\dot{x}(t) + x(t) = \lambda f(x(t - T_1)) + \gamma(x(t - T_2) - x(t)). \quad (10)$$

Общий вид решения уравнения (10) на данном участке представимо в виде (11):

$$x_{\varphi}(t) = x(T_1)e^{-(1+\gamma)(t-T_1)} + \gamma \int_{T_1}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} x_{\varphi}(\tau - T_2) d\tau + \lambda \int_{T_1}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} f(x_{\varphi}(\tau - T_1)) d\tau. \quad (11)$$

Решение на данном участке становится асимптотически большим, порядка $O(\lambda)$ [16]. Так как первые два слагаемых меньше p (см. Лемма 1), а последнее растет со скоростью порядка $O(\lambda)$,

т.к. $f > 0$, то существует такое значение времени $P = T_1 + \delta$, что $x(P) = p$. На интервале $t \in (T_1, T_1 + T_m]$, где $T_m = \min(T_1, T_2)$, решение $x_\varphi(t)$ можно записать в виде (12):

$$x_\varphi(t) = \lambda \int_{T_1}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} f(x_\varphi(\tau - T_1)) d\tau (1 + o(1)). \quad (12)$$

Если $T_m < T_1$, тогда на отрезке $t \in [T_1 + T_m, 2T_1]$ решение $x_\varphi(t)$ можно записать в виде:

$$x_\varphi(t) = \gamma \int_{T_1+T_m}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} x_\varphi(\tau - T_2) d\tau + \lambda \int_{T_1}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} f(x_\varphi(\tau - T_1)) d\tau (1 + o(1)). \quad (13)$$

Заметим, что первое слагаемое правой части (13) имеет порядок $O(\lambda)$. На Рис. 2а представлен график решения уравнения (4) на отрезке $t \in [0, 2T_1]$, на Рис 2б - в окрестности T_1 .

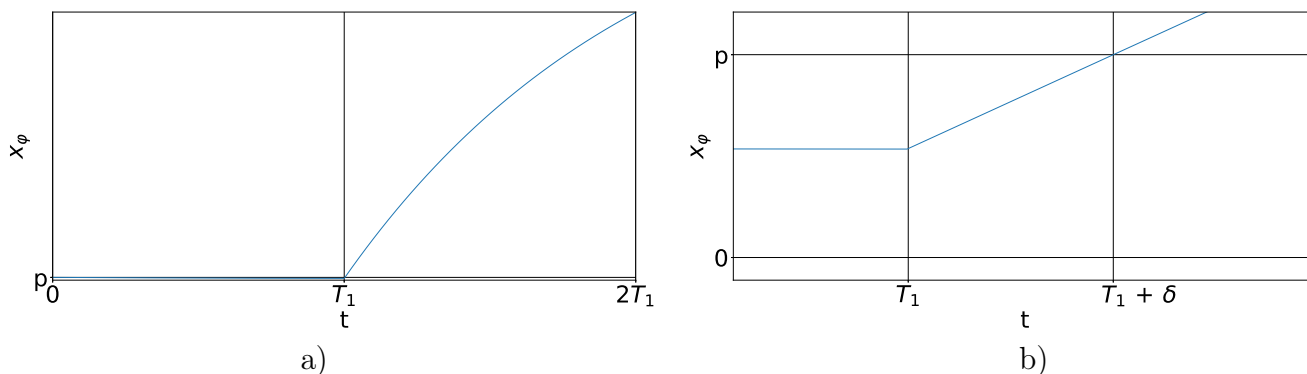


Рис. 2: Решение уравнения с двумя запаздываниями для а) $t \in [0, 2T_1]$; б) t в окрестности T_1 .

3. Рассмотрим $t \geq 2T_1 + \delta$. Тогда уравнение (4) представимо в виде (6) до тех пор, пока $x_\varphi(t - T_1) > p$.

Решения и устойчивость уравнения (6) описываются корнями характеристического уравнения:

$$\mu = -(1 + \gamma) + \gamma e^{-\mu T_2}. \quad (14)$$

Лемма 2 Пусть μ_* - корень характеристического многочлена (14) с максимальной вещественной частью. Тогда μ_* является действительным и отрицательным.

Доказательство. Давайте представим μ в виде $\mu = \operatorname{Re} \mu + i \operatorname{Im} \mu$. Тогда, если мы разделим действительную и мнимую части уравнения (14), то получим следующую систему уравнений

$$\operatorname{Re} \mu + \gamma + 1 = \gamma \exp(-\operatorname{Re} \mu T_2) \cos(-\operatorname{Im} \mu T_2), \quad (15)$$

$$\operatorname{Im} \mu = \gamma \exp(-\operatorname{Re} \mu T_2) \sin(-\operatorname{Im} \mu T_2). \quad (16)$$

Рассмотрим правую и левую части уравнения (15) как две функции аргумента $\operatorname{Re} \mu$. Пусть $h_1(\operatorname{Re} \mu) = \operatorname{Re} \mu + \gamma + 1$ и $h_2(\operatorname{Re} \mu) = \gamma \exp(-\operatorname{Re} \mu T_2) \cos(-\operatorname{Im} \mu T_2)$. Тогда $h_1(0) = \gamma + 1 > \gamma \geq h_2(0)$. Если $\operatorname{Re} \mu > 0$, то $h_1(\operatorname{Re} \mu) > h_1(0)$ и $h_2(\operatorname{Re} \mu) < \gamma < h_1(0)$. Следовательно, все корни $\operatorname{Re} \mu$ уравнения (15) меньше нуля, таким образом, $\operatorname{Re} \mu_* < 0$.

Пусть $\cos(-\operatorname{Im} \mu T_2) = 1$. Тогда уравнение (15) имеет корень $\operatorname{Re} \mu = \mu_0 < 0$, где μ_0 удовлетворяет уравнению $\mu_0 + \gamma + 1 = \gamma \exp(-\mu_0 T_2)$ (это уравнение имеет только один корень, поскольку его левая часть является возрастающей функцией, а правая - убывающей). Если $\cos(-\operatorname{Im} \mu T_2) < 1$, то $h_2(\operatorname{Re} \mu) < \gamma \exp(-\operatorname{Re} \mu T_2)$, следовательно, все корни уравнения (15) с $\cos(-\operatorname{Im} \mu T_2) < 1$ меньше, чем μ_0 .

Докажем, что μ_0 является корнем системы (15), (16). Если $\cos(-\operatorname{Im} \mu T_2) = 1$, то $\sin(-\operatorname{Im} \mu T_2) = 0$, то в этом случае уравнение (16) эквивалентно уравнению $\operatorname{Im} \mu = 0$. Следовательно, действительное значение μ_0 является корнем системы (15), (16). Более того, этот корень имеет максимальную действительную часть из всех корней этой системы, и других комплексных корней этой системы с такой же действительной частью не существует, кратность этого корня равна единице. \square

Лемма 3 Пусть $\varphi(t) > 0$ для всех $t \in [t_0 - T_2, t_0]$. Тогда существуют положительные x_0 , c и M такие, что для всех $t \geq t_0$ решение уравнения (6) с начальными условиями $x(t) = \varphi(t)$ ($t \in [t_0 - T_2, t_0]$) равно

$$x(t) = x_0 e^{\mu_*(t-t_0)} (1 + w(t)), \quad |w(t)| \leq c e^{-Mt} \|\varphi\|_{T_2}$$

Доказательство. Представление $x(t)$ следует из [16] (глава 7). \square

Лемма 4 Пусть λ достаточно велико и $x(t) = \lambda \varphi(t)$ для всех $t \in [t_0 - T_2, t_0]$, где $\varphi(t)$ - положительная непрерывная функция. Тогда существует t_1 такой, что $x(t_1) = p$, $x(t) > p$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и для всех $t \in [t_1 - T_2, t_1]$

$$p \frac{1 + \gamma}{\gamma} \geq x(t) \geq p.$$

Доказательство. Используя Лемму 3, мы получаем $x(t) = \lambda e^{\mu_*(t-t_0)} x_0 (1 + w(t))$, где $|w(t)| \leq c e^{-Mt} \|\varphi\|_{T_2}$ для некоторых положительных c и M . Решая уравнение $x(t) = p$, находим $t_1 = t_0 + |\mu_*^{-1}| \ln \lambda (1 + o(1))$. Таким образом, значения $t \in [t_1 - T_2, t_1]$ достаточно велики. Итак, для таких t :

$$x(t) = p e^{\mu_*(t-t_1)} (1 + o(1)).$$

Поскольку μ_* является отрицательным корнем уравнения (14), то $e^{-\mu_* T_2} = \mu_* \gamma^{-1} + \frac{1+\gamma}{\gamma} < \frac{1+\gamma}{\gamma}$.

Пусть $t \in [t_1 - T_2, t_1]$, тогда

$$x(t) = pe^{\mu_*(t-t_1)}(1 + o(1)) < p(1 + o(1))e^{-\mu_*T_2} < p\frac{1+\gamma}{\gamma}.$$

□

Согласно Лемме 3, при $t \geq 2T_1 + \delta$ решение можно записать через формулу (17):

$$x_\varphi(t) = \lambda e^{\mu_*(t-2T_1-\delta)}x_0(1 + w(t)), \quad |w(t)| \leq ce^{-Mt}, \quad (17)$$

где $x_0, c, M > 0$. Данная функция стремится к нулю и, следовательно, для некоторого $P > 2T_1 + \delta$ выполнится равенство $x_\varphi(P) = p$. Кроме того,

$$P = |\mu_*^{-1}| \ln \lambda + 2T_1 + |\mu_*^{-1}|(\ln p - \ln x_0) - |\mu_*^{-1}| \ln(1 + w(P)) + \delta = |\mu_*^{-1}| \ln \lambda(1 + o(1)). \quad (18)$$

По лемме 4 на отрезке $t \in [P - T_2, P]$ решение удовлетворяет неравенству $p\frac{1+\gamma}{\gamma} \geq x_\varphi(t) \geq p$ и на отрезке $t \in [P - T, P]$ выполняется условие $x(t) \geq p$, следовательно, $x_\varphi(t + P) \in S$. Более того, решение $x_\varphi(t + P)$ на отрезке $t \in [-T, 0]$ удовлетворяет следующей оценке:

$$x_\varphi(t + P) = \lambda e^{\mu_*(t+P-2T_1-\delta)}x_0(1 + w(t + P)) = e^{\mu_*t}p\frac{(1 + w(t + P))}{(1 + w(P))} \leq \frac{2 + 2\gamma}{2 + 2\gamma + \mu_*}pe^{\mu_*t}. \quad (19)$$

Определим множество S_0 :

$$S_0 = \{\varphi(t) \in C_{[-T,0]} : \varphi(0) = p, p \leq \varphi(t) \leq \frac{2 + 2\gamma}{2 + 2\gamma + \mu_*}pe^{\mu_*t}, t \in [-T, 0]\}.$$

Заметим, что множество S_0 - непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество S . Иллюстрация множества S_0 представлено на Рис. 3.

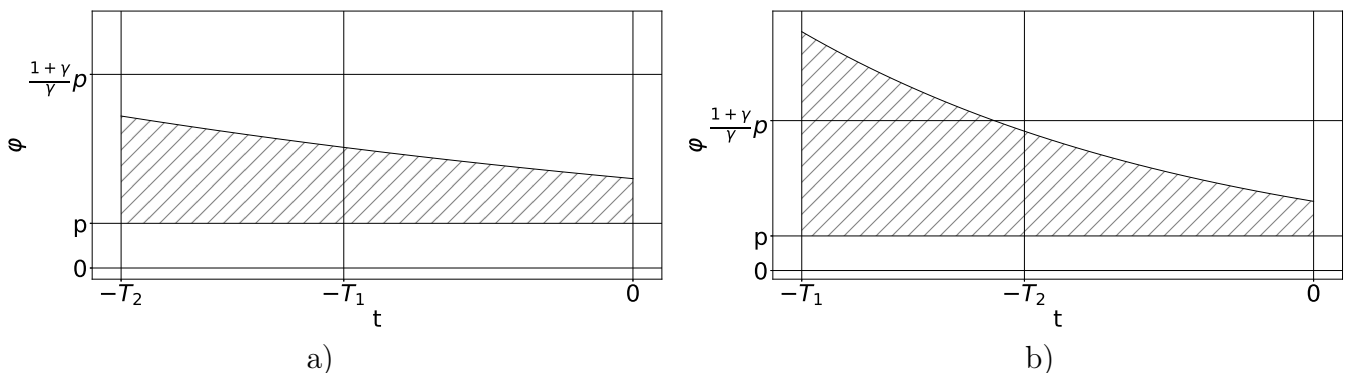


Рис. 3: Пример множества S_0 при а) $T_1 < T_2$; б) $T_2 < T_1$

Таким образом, оператор Пуанкаре Π переводит множество S в S_0 . А поскольку S_0 является подмножеством S , то Π так же отображает S_0 в S_0 .

Так как S_0 – непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое множество, а Π – компактный оператор [16], то можно использовать теорему Шаудера о неподвижной точке [17]. Значит существует $\varphi_* \in S_0 \subset S$ такая, что $\Pi\varphi_* = \varphi_*$, следовательно, решение $x_{\varphi_*}(t)$ является периодическим решением.

В итоге мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1 Для всех достаточно больших λ уравнение (4) имеет периодическое решение $x_*(t)$ с начальными условиями из S_0 с периодом $P = 2T_1 + |\mu_*^{-1}| \ln \lambda(1 + o(1))$ и амплитудой $O(\lambda)$. Асимптотика решения:

$$x_*(t) = pe^{\mu_* t}(1 + o(1)) \quad (20)$$

на отрезке $t \in [0, T_1]$,

$$x_*(t) = \lambda \int_{T_1}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} f(pe^{\mu_*(\tau-T_1)}) d\tau(1 + o(1)) \quad (21)$$

на отрезке $t \in (T_1, T_1 + T_m]$,

$$x_*(t) = \lambda \int_{T_1}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} f(pe^{\mu_*(\tau-T_1)}) d\tau(1 + o(1)) + \gamma \int_{T_1+T_m}^t e^{-(1+\gamma)(t-\tau)} x_*(\tau - T_2) d\tau \quad (22)$$

на отрезке $t \in (T_1 + T_m, 2T_1]$,

$$x_*(t) = \left(x_*(2T_1) + \int_{-T_2}^0 x_*(2T_1 + s) e^{-\mu_*(s+T_2)} ds \right) e^{\mu_*(t-2T_1)} (1 + w(t) + o(1)) \quad (23)$$

на отрезке $t \in (2T_1, P]$, где $|w(t)| \leq ce^{-Mt}$, $c > 0$, $M > 0$.

2 Численное исследование

2.1 Случай $T_1 < T_2$

Для начала рассмотрим случай, когда в уравнении (4) значение запаздывания T_1 меньше, чем T_2 . На Рис. 4 представлен случай отсутствия обратной связи, параметр $\gamma = 0$.

На следующих графиках – случаи с ненулевой силой обратной связи, параметр $\gamma = 0.3$ (Рис. 5) и $\gamma = 1$ (Рис. 6).

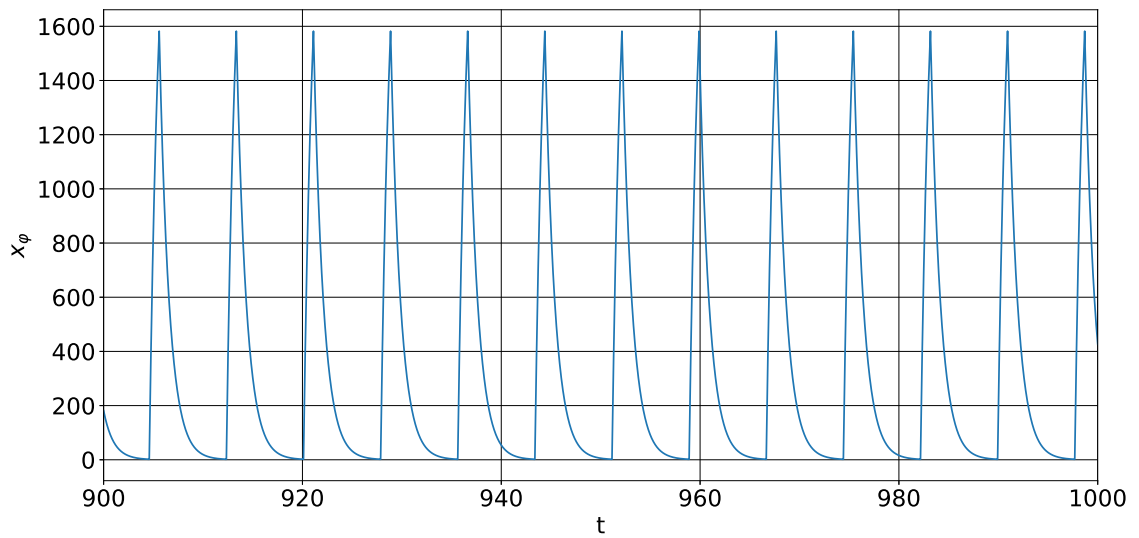


Рис. 4: Решение (4) для $f(x) = 5$, $p = 5$, $\lambda = 500$, $\gamma = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$

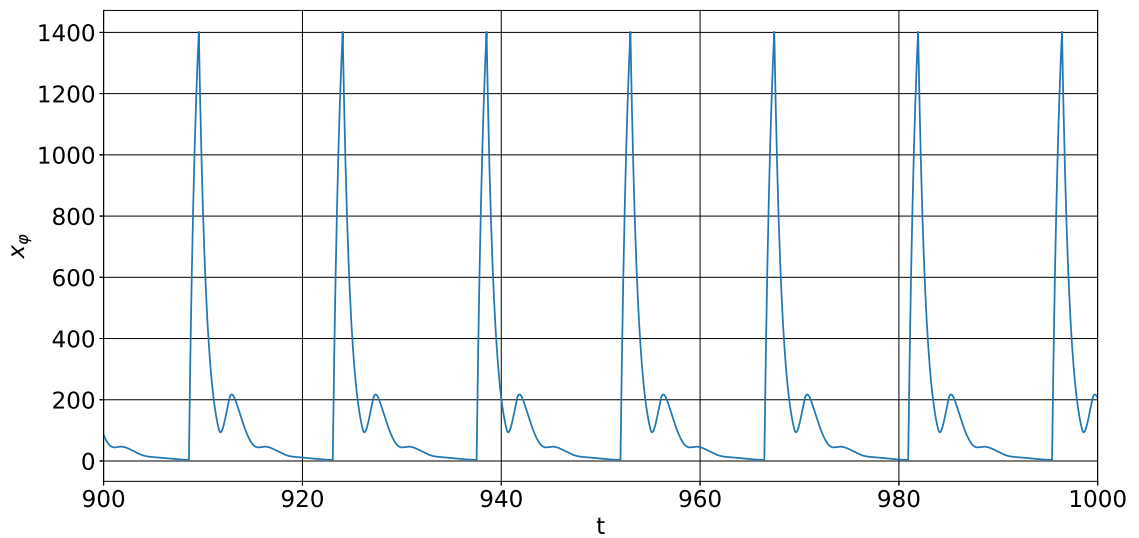


Рис. 5: Решение (4) для $f(x) = 5$, $p = 5$, $\lambda = 500$, $\gamma = 0.3$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$

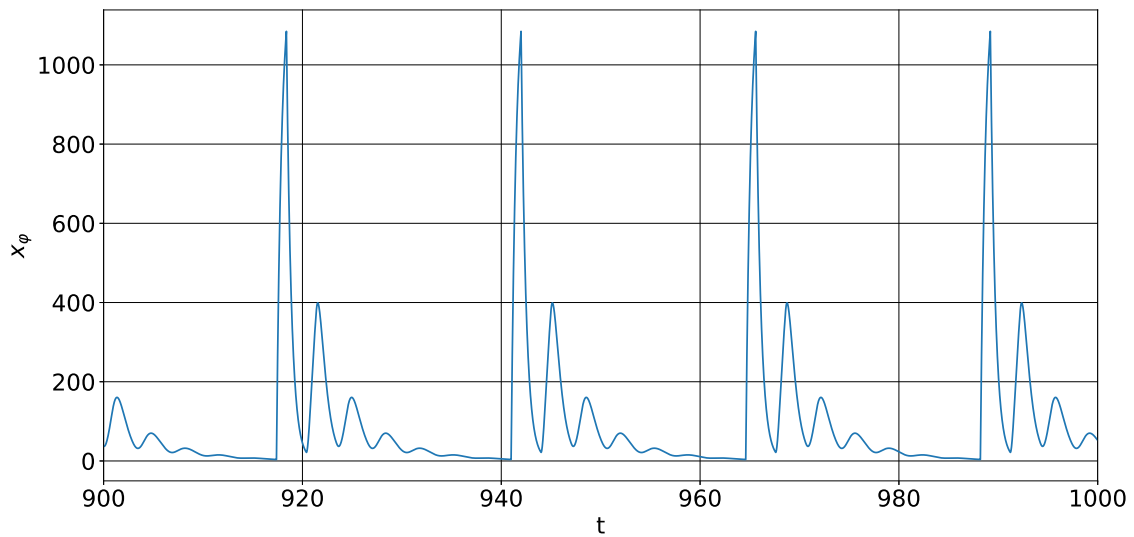


Рис. 6: Решение (4) для $f(x) = 5$, $p = 5$, $\lambda = 500$, $\gamma = 1$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$

На Рис. 7 представлено изменение поведения решения при увеличении времени T_2 .

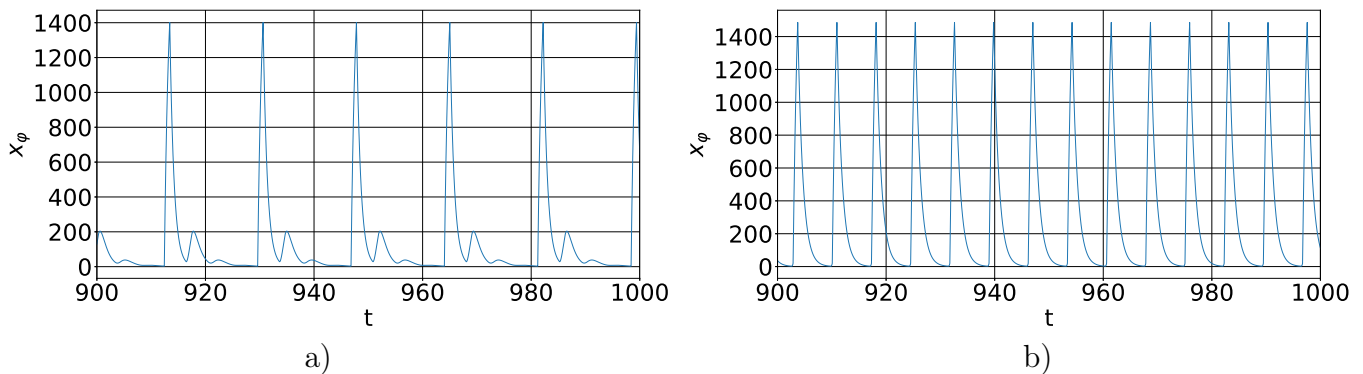


Рис. 7: Решение (4) для $f(x) = 5$, $p = 5$, $\lambda = 500$, $T_1 = 1$, $\gamma = 0.3$,
а) $T_2 = 4$; б) $T_2 = 7$,

2.2 Случай $T_1 > T_2$

Теперь рассмотрим случай, когда в уравнении (4) значение запаздывания T_1 больше, чем T_2 . На Рис. 8 представлен случай отсутствия обратной связи, параметр $\gamma = 0$. В отличие от случая 1.1, пики решения становятся более плоскими и решение продолжает сохранять максимальное значение некоторое время, что видно по графикам.

На следующих графиках – случаи с ненулевой силой обратной связи, параметр $\gamma = 0.3$ (Рис. 9а) и $\gamma = 1$ (Рис. 9б). В данном случае величина силы обратной связи влияет на поведение решения вблизи максимальных значений.

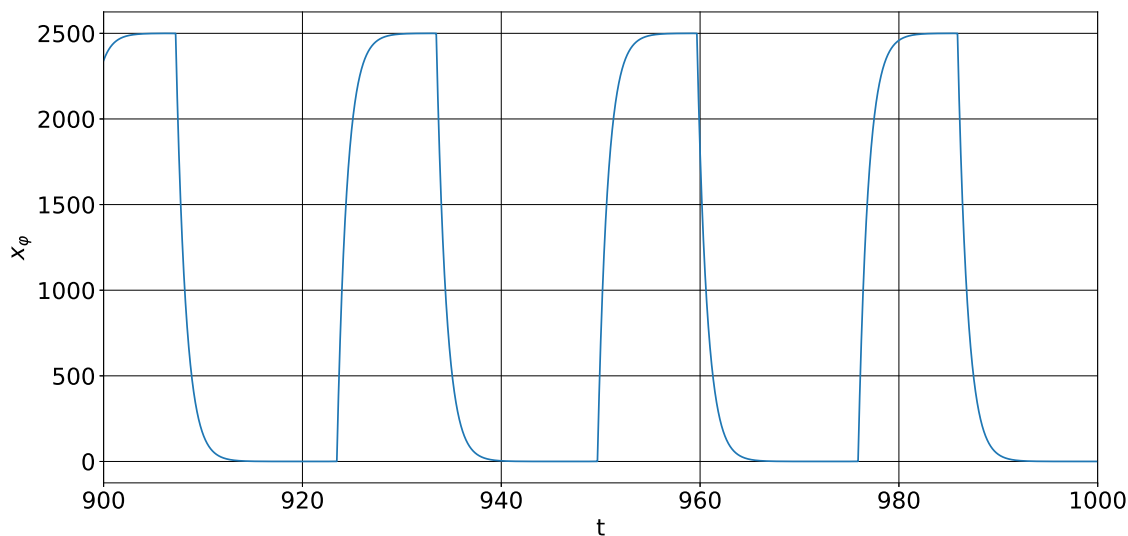


Рис. 8: Решение (4) для $f(x) = 5$, $p = 5$, $\lambda = 500$, $\gamma = 0$, $T_1 = 10$, $T_2 = 1$

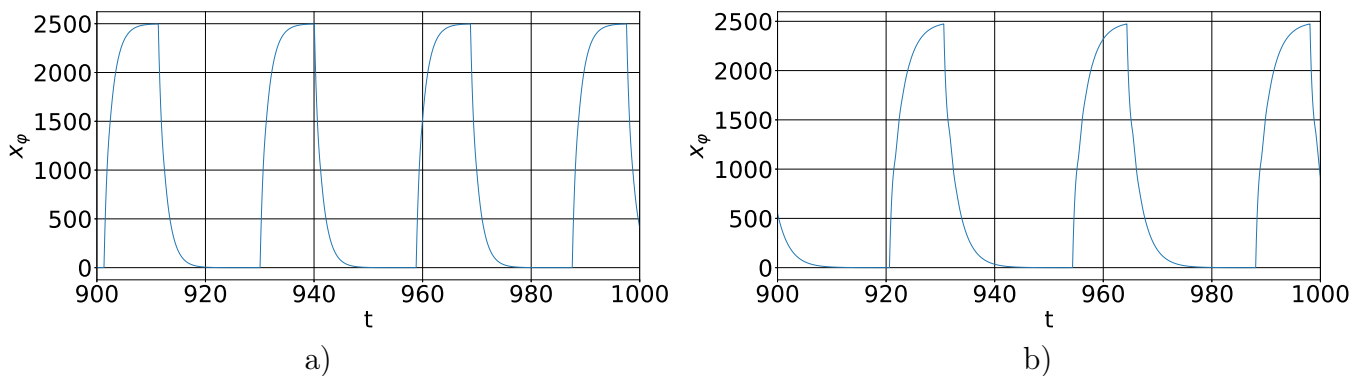


Рис. 9: Решение (4) для $f(x) = 5$, $p = 5$, $\lambda = 500$, $T_1 = 10$, $T_2 = 1$,
 а) $\gamma = 0.3$; б) $\gamma = 1$,

2.3 Разные случаи не подходящие под общую теорию

Заметим, что указанный метод работает только при достаточно большом значении параметра λ . Например, на Рис. 10 изображено решение при значении параметра 500 и 1000.

Так же при малом значении параметра λ циклического решения может не быть вовсе. Такой случай приведен на Рис. 11.

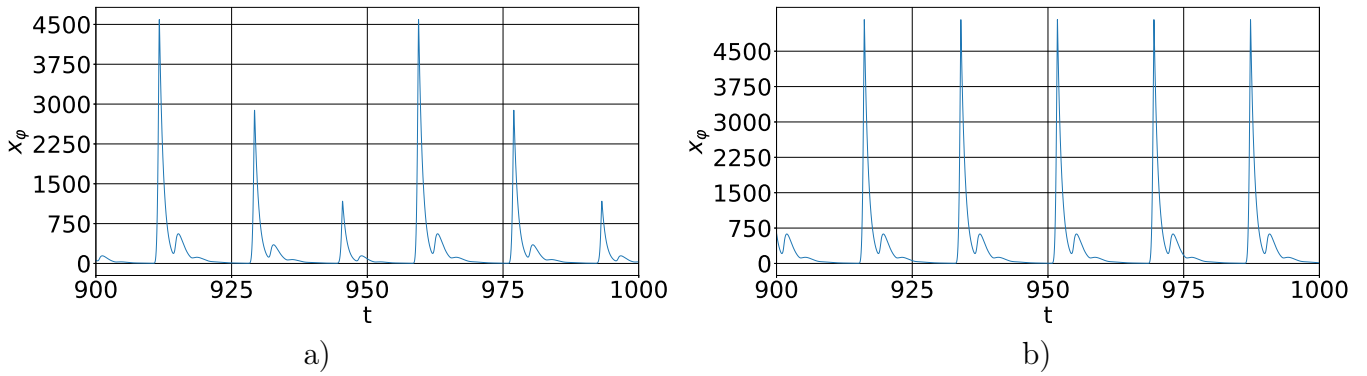


Рис. 10: Решение уравнения с двумя запаздываниями (4). Параметры: $\gamma = 0.3$, $p = 5$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $f(x) = 5$, а) $\lambda = 500$; б) $\lambda = 1000$

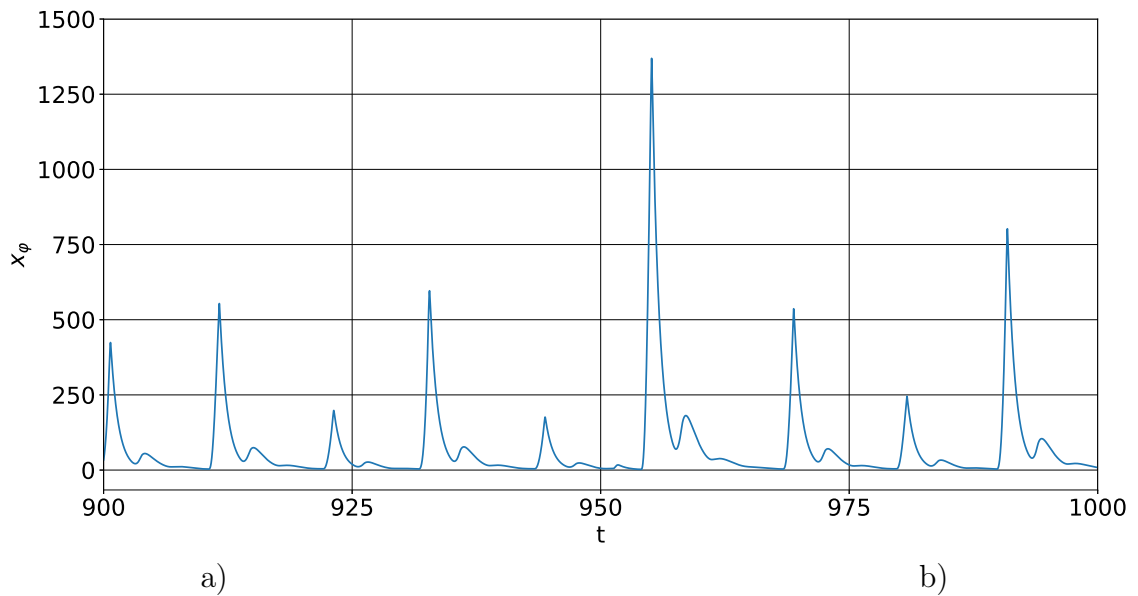


Рис. 11: Решение уравнения с двумя запаздываниями (4) (4). Параметры: $\gamma = 0.3$, $p = 5$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $f(x) = (p - x)^2$, $\lambda = 500$

3 Связь с «бегущей волной»

Как было сказано во введении, уравнение (4) является решением, определяющим бегущую волну в цепочке (1). На Рис. 12 и Рис. 13 проиллюстрирован один из примеров такого решения.

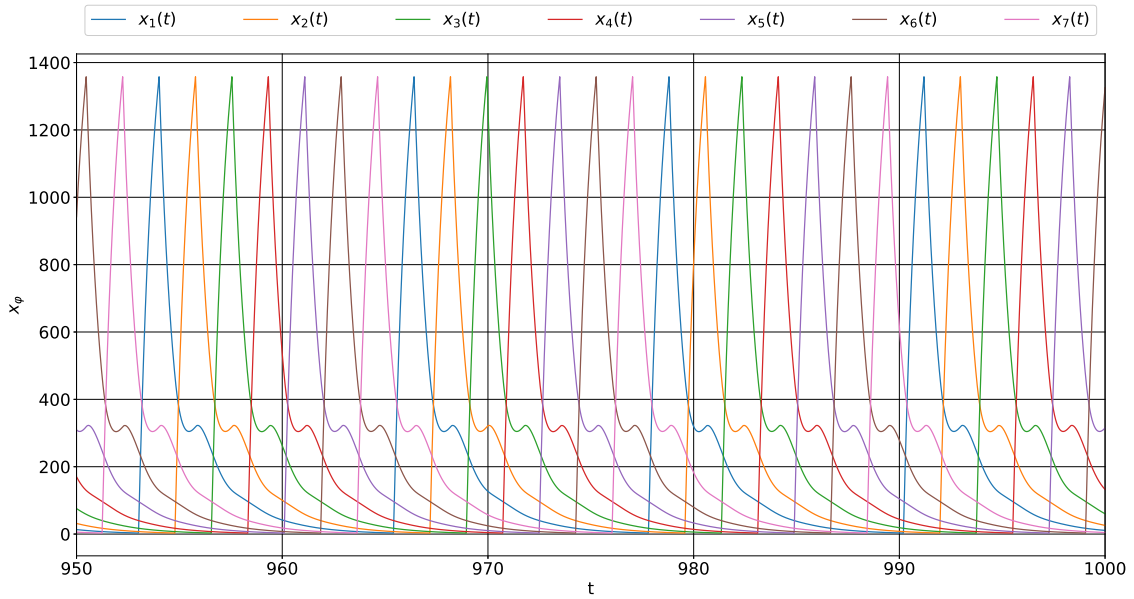


Рис. 12: Решение (1) для $f(x) = 5$, $p = 5$, $\lambda = 500$, $\gamma = 0.38$, $T_1 = 1$

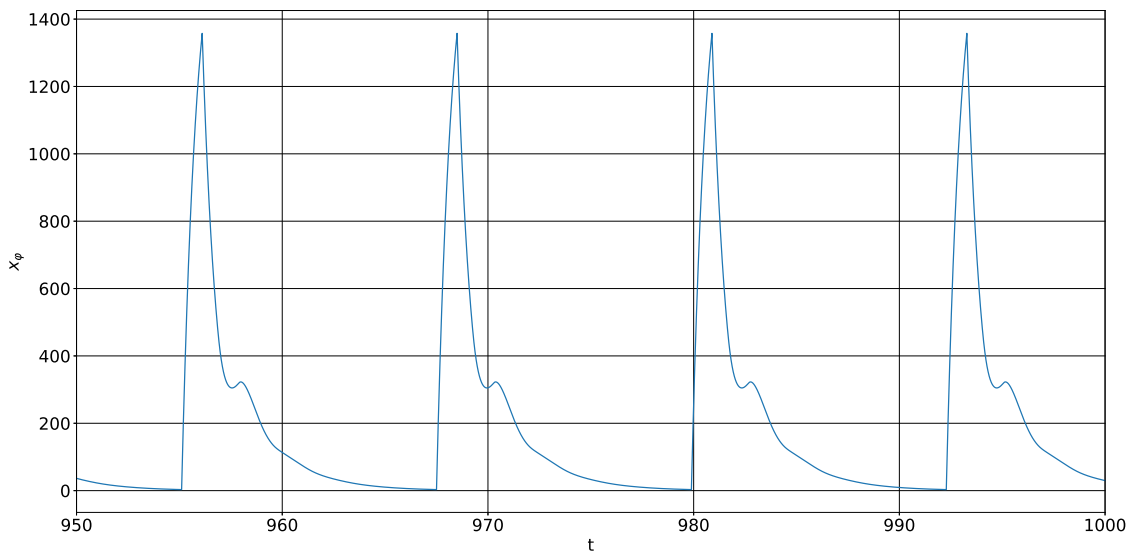


Рис. 13: Решение (4) для $f(x) = 5$, $p = 5$, $\lambda = 500$, $\gamma = 0.38$, $T_1 = 1$,
 $T_2 = 1.77$

4 Описание работы программы

Для численного решения дифференциального уравнения с запаздыванием используется метод Рунге-Кутты 2-го порядка [18], интерпретированный для решения дифференциального уравнения с двумя запаздываниями. Интегрируя обе части $\dot{x} = f(x(t), x(t - T_1), x(t - T_2))$ от t до $t + h$ имеем:

$$\int_t^{t+h} \dot{x}(s) ds = \int_t^{t+h} f(x(s), s(t - T_1), s(t - T_2)) ds$$

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} f(x(s), s(t-T_1), s(t-T_2)) ds$$

Вычисляя интеграл в правой части с помощью формулы параллелограмма, имеем

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t+\frac{h}{2}), x(t+\frac{h}{2}-T_1), x(t+\frac{h}{2}-T_2)).$$

Внутри функции f с помощью метода Эйлера получим приближение первого аргумента $x(t+\frac{h}{2}) = x(t) + \frac{h}{2}f(x(t), x(t-T_1), x(t-T_2))$, а второй и третий аргументы $x(t+\frac{h}{2}-T_1)$ и $x(t+\frac{h}{2}-T_2)$ возьмем равным $x(t-T_1)$ и $x(t-T_2)$ соответственно, ввиду их близости.

Подставив все значения имеем:

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t) + \frac{h}{2}f(x(t), x(t-T_1), x(t-T_2)), x(t-T_1), x(t-T_2))$$

$$f(x(t), x(t-T_1), x(t-T_2)) = -x(t) + \lambda F(x(t-T_1)) + \gamma(x(t-T_2) - x(t))$$

Для написания алгоритма программы выбран язык C++, что позволило обсчитывать решение с достаточной скоростью (Листинг 1). Для визуализации просчитанного решения используется язык Python в связке с пакетом matplotlib [19], как наиболее удобный инструмент работы с графиками (Листинг 2).

Для использования C++ классов из Python используется C++ библиотека Boost [20] с помощью которой был сделан соответствующий Python модуль (Листинг 3).

Заключение

В ходе работы было проведен анализ динамики дифференциального уравнения с двумя запаздываниями. Найдены периодические решения данного уравнения. Показано, что решение дифференциального уравнения с двумя запаздываниями, так же является решением цепочки связанных осцилляторов, каждый из которых описывается дифференциальным уравнением с одним запаздыванием.

Исследовано влияние параметров на поведение решения системы. Разработана программа для решения и отображения графиков решения таких систем.

Список литературы

1. Arino, J.; Van Den Driessche, P. Time delays in epidemic models. In *Delay differential equations and applications*; Springer, 2006; стр. 539–578.
2. Erneux, T. *Applied delay differential equations*; Springer Science & Business Media, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74372-1>.
3. Smith, H. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*; Springer, 2011. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7646-8>.
4. Brauer, F.; Castillo-Chavez, C. *Mathematical models in population biology and epidemiology*; New York: Springer, 2012. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1686-9>.
5. Cushing, J.M. *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics*; Springer Science Business Media, 2013.
6. Ponomarenko, V.; Prokhorov, M.; Karavaev, A.; Kulminskiy, D. An experimental digital communication scheme based on chaotic time-delay system. *Nonlinear Dynamics* 2013, 74, 1013–1020.
7. Kaschenko, S. *Models of Wave Memory*; Springer, Cham, 2015. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-19866-8>.
8. Pikovsky, A.; Rosenblum, M.; Kurths, J. *Synchronization: a universal concept in nonlinear science*; Cambridge University Press, 2002.
9. Strogatz, S.H. *Sync: How order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life*; Hachette UK, 2012.
10. Rodrigues, F.A.; Peron, T.K.D.; Ji, P.; Kurths, J. The Kuramoto model in complex networks. *Physics Reports* 2016, 610, 1–98.
11. Kiliyas, T.; Kelber, K.; Mogel, A.; Schwarz, W. Electronic chaos generators—design and applications. *International journal of electronics* 1995, 79, 737–753. <https://doi.org/10.1080/00207219508926308>.
12. Kiliyas, T.; Mogel, A.; Schwarz, W., Generation and application of broadband signals using chaotic electronic systems. In *Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results*; Akademie Verlag, Berlin, 1995; pp. 92–111.
13. an der Heiden, U.; Mackey, M.C. The dynamics of production and destruction: analytic insight into complex behavior. *Journal of Mathematical Biology* 1982, 16, 75–101. <https://doi.org/10.1007/BF00275162>.
14. Kaschenko, S.A. Asymptotic Behavior of Relaxation Oscillations in Systems of Difference-Differential Equations with a Compactly 408 Supported Nonlinearity. I. *Differential Equations* 1995, 31, 1275–1285.
15. Alexandra Kashchenko, Iliia Kashchenko, Sergey Kondratiev. Travelling waves in the ring of coupled oscillators with delayed feedback. // *Mathematics*. 2023. (Подано в печать)
16. Hale, J.; Sjoerd, M. *Introduction to functional differential equations*; Springer-Verlag: New York, 1993.
17. Lusternik, L.; Sobolev, V. *Elements of Functional Analysis*; Gordon and Breach Science Publishers, 1968

18. Численные методы. / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 6-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
19. Matplotlib: Visualization with Python. URL: <https://matplotlib.org>
20. Boost.Python. URL: https://www.boost.org/doc/libs/1_66_0/libs/python/doc/html/index.html

Приложение

Краткие выдержки из программного кода

```
1 void DifferentialEquationTwoDelay::Solve(double end_time)
2 {
3     double _local_t = 0;
4     auto F = [this](double cur, double delay_T1, double delay_T2)
5     {
6         double lambda = TryGetFromMap(_params, "L", 1.0),
7             gamma = TryGetFromMap(_params, "g", 1.0);
8         return -cur + lambda * _F(delay_T1) + gamma * (delay_T2 - cur);
9     };
10    while (_local_t < end_time)
11    {
12        double cur = GetCur(), delay_T1 = GetWithDelay(1), delay_T2 = GetWithDelay(2);
13        Add(cur + _h * F(cur + (_h / 2) * F(cur, delay_T1, delay_T2), delay_T1, delay_T2),
14            _local_t);
15        _local_t += _h;
16    }
17 }
```

Листинг 1: Основная часть алгоритма просчета решения

```
1 std::function<double(double)> CreateFunction(object func)
2 {
3     auto lambda_func = [func](double t)
4     {
5         return extract<double>(func(t));
6     };
7     return static_cast<std::function<double(double)>>(lambda_func);
8 }
9
10 std::shared_ptr<DifferentialEquationTwoDelay> DifferentialEquationTwoDelay_Constructor(
11     object init_func_py, object func_f_py, dict params)
12 {
13     return std::make_shared<DifferentialEquationTwoDelay>(CreateFunction(init_func_py),
14                                                         CreateFunction(func_f_py),
15                                                         ParamsFromPyDict(params));
16 }
```



```

17
18 tuple DifferentialEquationTwoDelay_GetSolutionData(DifferentialEquationTwoDelay& self)
19 {
20     Coords data = self.GetSolutionData();
21     list py_list_t, py_list_x;
22     auto xs = data.second, ts = data.first;
23     for (size_t i = 0; i < xs.size(); i++)
24     {
25         py_list_t.append(ts[i]);
26         py_list_x.append(xs[i]);
27     }
28     return make_tuple(py_list_t, py_list_x);
29 }
30
31 BOOST_PYTHON_MODULE(differential_eq_py)
32 {
33     class_<std::shared_ptr<DifferentialEquationTwoDelay>>("DifferentialEquationTwoDelay",
34         no_init)
35         .def("__init__",
36             make_constructor(&DifferentialEquationTwoDelay_Constructor, default_call_policies(),
37                 (arg_("init_func"), arg_("func_f_py"), arg_("params") = dict())))
38         .def("GetSolutionData", &DifferentialEquationTwoDelay_GetSolutionData)
39         .def("Solve", &DifferentialEquationTwoDelay::Solve)
40         ;
41 }

```

Листинг 2: Создание Python-модуля с использованием библиотеки Boost.Python

```

1 class BaseDifferentialEquationSolver:
2     def __init__(self) -> None:
3         self._eq = None
4
5     def solve(self, end_time: float) -> None:
6         self._eq.Solve(end_time)
7
8     def get_solution(self) -> List[Tuple[List[float], List[float]]]:
9         return self._eq.GetSolutionData()
10
11
12 class DifferentialEquationTwoDelay(BaseDifferentialEquationSolver):

```

```

13  def __init__(self,
14          init_func: Callable[[float], float],
15          func_f: Callable[[float], float],
16          params: dict) -> None:
17      super(BaseDifferentialEquationSolver, self).__init__()
18      self._eq = differential_eq_py.DifferentialEquationTwoDelay(init_func, func_f,
19          params)
20
21  def main():
22      eq = DifferentialEquationTwoDelay(initial_func, F, params={"h": step, "T1": T1, "T2":
23          T2, "L": L, "g": gamma})
24      eq.solve(end_time)
25      solution = eq.get_solution()
26      matplotlib.pyplot.plot(solution[0], solution[1])
27
28  if __name__ == "__main__":
29      main()

```

Листинг 3: Python-скрипт визуализации решений

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Непрерывность классических операторов в весовых банаховых пространствах голоморфных функций» являются: все сформулированные утверждения относительно непрерывности произвольного линейного оператора, а также интегрального оператора Вольтерра, действующих в весовых банаховых пространствах общего и конкретного вида (пункты 1.2, 1.3, 2.2, 3.3). Также новой является оценка нормы дельта-функции на обобщённом пространстве Фока (пункт 3.2).

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- Изучены литературные источники о проблематике исследования [15, 17, 22, 23, 24]. Отметим, что в [22] был предложен общий метод получения критериев непрерывности абстрактного линейного оператора, действующего из абстрактного банахова пространства голоморфных в единичном круге функций в весовое банахово пространство таких же функций. Также были разработаны приложения основных результатов к конкретным пространствам и операторам. При этом на веса и области накладывался ряд дополнительных ограничений. Настоящая работа существенно обобщает упомянутые результаты и содержит их в качестве следствий (ссылки указаны в работе).

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Абаниным Александром Васильевичем, профессором кафедры математического анализа и геометрии института математики, механики и компьютерных наук Южного Федерального Университета.

- Работа отрецензирована профессором кафедры алгебры и дискретной математики института математики, механики и компьютерных наук Южного Федерального Университета Мелиховым Сергеем Николаевичем.

- Основные результаты работы докладывались на Региональной школе – конференции молодых учёных "Владикавказская молодежная математическая школа" (г. Владикавказ, 2020г.), на Международной конференции "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум" (пос. Батилиман, 2019г.), на Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (с.Цей, 2019г.).

- Таким образом, по результатам анализа литературных источников, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 15.06.21. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись



Кораблина Юлия Викторовна

29.05.23

Ростов-на-Дону, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южный федеральный университет»

Институт математики, механики
и компьютерных наук им. И. И. Воровича

Кораблина Юлия Викторовна

**НЕПРЕРЫВНОСТЬ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В
ВЕСОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

по направлению подготовки

01.04.01 – Математика,

направленность программы

«Фундаментальная математика, механика и математическое моделирование»

Научный руководитель –

проф., д.ф.- м.н. Абанин Александр Васильевич

Рецензент –

проф., д.ф.- м.н. Мелихов Сергей Николаевич

Допущено к защите:

руководитель

образовательной программы _____ Цибулин В. Г.

Ростов-на-Дону – 2021

Оглавление

Введение	3
1 Непрерывность классических операторов в пространствах голоморфных функций	6
1.1 Предварительные сведения	6
1.2 Основной результат и его применение к конкретным пространствам и операторам	9
1.3 Обобщение абстрактного критерия на случай всей комплексной плоскости	22
2 Критерии непрерывности классических операторов в конкретных пространствах	27
2.1 Пространства Бергмана и Харди, их основные свойства	27
2.2 Ограниченность операторов в пространствах Харди и Бергмана	28
3 Непрерывность операторов в пространствах Фока	31
3.1 Предварительные сведения	31
3.2 Обобщенные пространства Фока и нормы дельта-функций в них	35
3.3 Критерии ограниченности операторов в пространствах Фока	42
Заключение	45
Литература	46

Введение

Актуальность темы исследования. Изучение топологических свойств классических операторов (дифференцирования, интегрирования, композиции, умножения, вложения и др.) в весовых пространствах голоморфных функций является одним из традиционных направлений в комплексном и функциональном анализе. Достаточно полное представление о проблематике в этой области можно получить из следующих монографий [15, 17, 23, 24], в которых приводятся постановки задач и фундаментальные результаты. Ясно, что отправной точкой всех исследований является решение задачи о получении критериев непрерывности (ограниченности) рассматриваемых операторов. Вплоть до последнего времени эта задача решалась отдельно для каждого оператора и каждой весовой шкалы пространств (Харди, Бергмана, Фока и т.д.). При этом, в последние четверть века по данной тематике было опубликовано большое число статей известных специалистов, практически все из которых касались операторов в весовых пространствах голоморфных функций в круге или плоскости, задаваемых радиальными весами (см., напр., [6]–[14], [16], [18]–[21]).

В недавней работе Н. Зорбоска [22] был предложен общий метод получения критериев непрерывности и компактности абстрактного линейного оператора, действующего из абстрактного банахова пространства голоморфных в единичном круге функций в весовое банахово пространство таких же функций с \sup -нормой. Также ею была получена формула для вычисления нормы этого оператора и разработаны приложения основных результатов к конкретным пространствам и операторам. При этом на веса и области накладывался ряд дополнительных ограничений. Именно, рассматривались радиальные веса на единичном круге.

Таким образом, сегодня открытыми проблемами являются дальнейшее развитие идеи Н. Зорбоска, в соответствии с которой условия ограниченности операторов весо-

вой композиции, включая операторы умножения и обычной композиции, и интегрального оператора Вольтерра могут быть сформулированы в терминах норм δ -функций в соответствующих сопряженных пространствах, получение критериев ограниченности упомянутых операторов в обобщенных пространствах Бергмана и Фока, а также обобщение установленных выше результатов на случай квазибанаховых пространств. Отметим, что в конкретных пространствах эти критерии можно сформулировать в терминах весов, определяющих пространства, и функций, задающих композицию. Именно этот круг вопросов и является предметом исследования в настоящей работе. Решение данных проблем станет основой для исследования ряда задач теории аппроксимации роста целых функций и их приложений, теории двойственности и др. В связи с вышеизложенным особый интерес представляет задача о непрерывности классических операторов на различных весовых пространствах: конкретных и обобщенных.

Отметим, что необходимая нам информация из фундаментальных курсов функционального и комплексного анализа взята из монографий [2] и [3].

Цель работы.

1. Обобщить результаты Н. Зорбоска на случай областей и (или) весов общего вида.
2. Установить критерии непрерывности произвольного линейного оператора, интегрального оператора Вольтерра и оператора весовой композиции в терминах дельта-функций и их конкретные реализации в весовых пространствах Бергмана, Харди и Фока.

Методы исследований. В данной работе применяются классические и современные методы комплексного и функционального анализа. В том числе используются: теория операторов в функциональных пространствах различной природы, теория целых функций, классические операторы (операторы умножения, композиции, интегрирования и дифференцирования) и их топологические свойства (главным образом непрерывность таких операторов), субгармонические функции, методы вычисления норм дельта-функции Дирака в классических и обобщенных весовых пространствах.

Результаты исследований имеют теоретическое значение. Кроме самостоятельного интереса с точки зрения теории дифференциальных и интегральных операторов, они могут в дальнейшем иметь применения в теории весовых пространств голоморфных функций и теории аппроксимации.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на Региональ-

ной школе – конференции молодых учёных "Владикавказская молодежная математическая школа"(г. Владикавказ, 2020г.), на Международной конференции "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум"(пос. Батилиман, 2019г.), на Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования"(с.Цей, 2019г.).

Публикации. По теме выпускной квалификационной работы имеется четыре публикации:

научная статья [25] издана в журнале, индексируемом в Scopus.

тезисы докладов [26] – [28].

В совместной с научным руководителем А.В. Абаниным статье [25] А.В. Абанину принадлежит постановка задач, указание метода исследования и общее руководство, а автору работы – проведение исследования и доказательство результатов.

Объем и структура работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Её объем составляет 48 страниц. Библиография – 28 наименований.

Глава 1

Непрерывность классических операторов в пространствах голоморфных функций

В данной главе вводится весовое банахово пространство $H_v(G)$ и рассматриваются основные его свойства. Получен критерий непрерывности произвольного линейного оператора на указанном пространстве и сформулированы его приложения к конкретным пространствам и операторам.

1.1 Предварительные сведения

В настоящем разделе приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения о пространствах голоморфных функций, функционалах и операторах в них.

Пусть G — область в комплексной плоскости \mathbb{C} , $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G . Это пространство линейно относительно стандартных операций поточечного сложения и умножения функций на постоянную, и, как обычно, наделяется стандартной топологией равномерной сходимости на компактах из G , задаваемой набором преднорм

$$p_K(f) = \max_{z \in K} |f(z)|, \quad f \in H(G),$$

где $K \Subset G$ — произвольное компактное множество в G . Эту топологию можно задать с помощью счетного числа норм следующим образом. Рассмотрим последовательность огра-

ниченных областей $(G_n)_{n=1}^\infty$ так, чтобы

$$G_1 \subset \overline{G_1} \subset G_2 \subset \overline{G_2} \subset \dots$$

и

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где, как обычно, через \overline{A} обозначается замыкание множества A в \mathbb{C} . Тогда соответствующая ей последовательность норм

$$\|f\|_n := p_{\overline{G_n}}(f) = \max_{z \in \overline{G_n}} |f(z)|$$

задает в $H(G)$ исходную топологию равномерной сходимости на компактах из G . Следовательно, пространство $H(G)$ метризуемо. В силу теоремы Вейерштрасса оно полно и, таким образом, является *пространством Фреше*, то есть полным метризуемым локально выпуклым пространством.

Одним из основных объектов изучения в настоящей работе являются весовые пространства с *sup*-нормами. Введем их определение и перечислим необходимые для дальнейшего изложения их простейшие свойства.

Определение 1.1.1. *Вес* на G — это произвольная непрерывная функция $v : G \rightarrow (0, \infty)$.

Каждый вес v на G задает соответствующее ему банахово пространство

$$H_v(G) = \{f \in H(G), \|f\|_v = \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty\}.$$

Справедливо следующее утверждение

Предложение 1.1.2. *Нормированная топология в $H_v(G)$ мажорирует топологию равномерной сходимости на компактах из G . Именно,*

$$\forall K \Subset G \quad p_K(f) \leq C_K \cdot \|f\|_v, \quad \forall f \in H_v(G),$$

где $C_K := \max_{z \in K} v(z)$.

Из предложения 1.1.2 следует, что $H_v(G) \hookrightarrow H(G)$, где \hookrightarrow — символ непрерывного вложения. Другими словами, оператор тождественного вложения $id : H_v(G) \rightarrow H(G)$ непрерывен.

В дальнейшем мы будем рассматривать квазибанаховы пространства голоморфных функций (например, к ним относятся классические пространства Бергмана A_α^p и Харди H^p при всех $0 < p < \infty$; причем при $p \geq 1$ они банаховы, а при $0 < p < 1$ — квазибанаховы, но не банаховы). В связи с этим напомним определение квазибанаховых пространств и перечислим некоторые дополнительные сведения об операторах и функционалах в них.

Определение 1.1.3. Функцию, заданную на линейном пространстве X , которая любому $x \in X$ ставит в соответствие действительное число $\|x\|$, называют *квазинормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

- а) $\|x\| \geq 0$, $x \in X$, причем равенство $\|x\| = 0$ возможно только при $x = 0$;
- б) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x \in X$;
- в) при некотором $K \geq 1$ выполняется неравенство $\|x+y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$, $\forall x, y \in X$.

Ясно, что, если можно взять $K = 1$, то $\|\cdot\|$ будет обычной нормой.

Для линейных операторов и линейных функционалов, действующих из одного квазибанахова пространства X , $\|\cdot\|_X$ в другое квазибанахово пространство Y , $\|\cdot\|_Y$ верны все основные определения и утверждения, что и в случае, когда эти пространства банаховы. В частности, линейный оператор $L : X \rightarrow Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, а его операторная квазинорма определяется стандартной формулой

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Lx\|_Y = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

При этом, если Y , $\|\cdot\|_Y$ банахово, то операторная квазинорма на самом деле будет обычной нормой. В частности, сопряженное с квазибанаховым пространством X , $\|\cdot\|_X$ пространство X^* всех линейных непрерывных функционалов на X , снабженное сопряженной нормой

$$\|f\|^* = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X}, \quad f \in X^*,$$

всегда является банаховым пространством. Следует, однако, отметить, что если в банаховом случае X^* всегда нетривиально, то есть содержит отличные от тождественного нуля линейные непрерывные функционалы на X , то для квазибанаховых пространств X^* может оказаться тривиальным. Классическим примером, подтверждающим это обстоятельство, является квазибанахово пространство $L^p(0, 1)$ всех интегрируемых с p -й степенью на $[0, 1]$ функций (см., напр., [4, с. 67–68]). Основополагающим для нашего исследования фактом является то, что для пространств голоморфных функций сопряженное пространство всегда

нетривиально и содержит, так называемые, дельта-функции $\delta_z : f \mapsto f(z)$, вычисляющие значение каждой функции f из пространства в наперед заданной точке z . Очевидно, что δ_z является линейным непрерывным функционалом на $H(G)$ при любом $z \in G$. Поэтому δ_z будет элементом X^* для любого квазибанахова пространства X , непрерывно вложенного в $H(G)$.

1.2 Основной результат и его применение к конкретным пространствам и операторам

Пусть T — линейный оператор, действующий из $H(G)$ в $H(G)$. Фиксируем $z \in G$ и рассматриваем линейный функционал $(K_z^H)_T : f \in H(G) \mapsto Tf(z)$, то есть сначала вычисляется функция Tf — образ f при отображении T , а затем вычисляется значение этой функции в точке z .

Таким образом, $(K_z^H)_T = \delta_z \circ T$ — линейный функционал на $H(G)$. Обозначение $(K_z^H)_T$ использовалось в работе [22], которая послужила отправной точкой нашего исследования. Поэтому мы сохранили его для цитирования результатов из [22], а в своих результатах будем использовать более простое для понимания выражение $\delta_z \circ T$.

Основная задача этой главы — в терминах $\delta_z \circ T$ получить критерии корректной определенности и непрерывности T из X в $H_v(G)$, где X — произвольное квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(G)$. Нас интересуют как абстрактные критерии, так и их реализация в конкретных пространствах.

В статье [22] (см. теорему 2.1) для случая, когда G является единичным кругом \mathbb{D} , вес v радиальным, то есть $v(z) = v(|z|)$ при всех $z \in \mathbb{D}$, а пространство X банаховым, был установлен следующий результат.

Теорема 1.2.1. *Пусть $T : H(\mathbb{D}) \mapsto H(\mathbb{D})$ — линейный оператор; $X \hookrightarrow H(G)$ — банахово пространство, v — радиальная весовая функция на \mathbb{D} . Оператор $T : X \mapsto H_v(\mathbb{D})$ ограничен (непрерывен) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: $(K_z^H)_T \in X^*$, $\forall z \in G$ и*

$$\sup_{z \in G} \frac{\|(K_z^H)_T\|^*}{v(z)} \leq \infty,$$

где $\|(K_z^H)_T\|^*$ — это норма функционала $(K_z^H)_T$ в X^* .

Основная цель настоящего раздела — обобщить этот результат на случай произвольной области G вместо единичного круга \mathbb{D} и любого веса v на G , не обязательно радиального. При этом в некоторых местах мы будем использовать несколько иной метод доказательства, чем в [22].

Теорема 1.2.2. Пусть v — вес на области G , X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(G)$. Линейный оператор $T : X \mapsto H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $\delta_z \circ T \in X^*, \forall z \in G$;
б)

$$\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} < \infty.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $T : X \mapsto H_v(G)$ корректно определён и ограничен.

а) Так как тождественный оператор $id : f \mapsto f$ непрерывно действует из $H_v(G)$ в $H(G)$, то $T : X \mapsto H(G)$ непрерывен, как суперпозиция непрерывных операторов $T : X \mapsto H_v(G)$ и $id : H_v \mapsto H(G)$. Так как δ_z — линейный непрерывный функционал на $H(G)$ при любом $z \in G$, то тогда $\delta_z \circ T \in X^*, \forall z \in G$.

б) Теперь воспользуемся определением непрерывности $T : X \mapsto H_v(G)$:
 $\exists C > 0, \|Tf\|_v \leq C \cdot \|f\|_X, \forall f \in X$, или

$$\sup_{z \in G} \frac{|Tf(z)|}{v(z)} \leq C \cdot \|f\|_X, \forall f \in X.$$

Отсюда получаем, что

$$|(Tf)(z)| \leq C \cdot \|f\|_X \cdot v(z), \forall f \in X, \forall z \in G.$$

Следовательно,

$$\frac{|(Tf)(z)|}{\|f\|_X} \leq C \cdot v(z), \forall f \in X, f \neq 0, \forall z \in G,$$

или

$$\frac{|(\delta_z \circ T)(f)|}{\|f\|_X} \leq C \cdot v(z), \forall f \in X, f \neq 0, \forall z \in G.$$

Поэтому

$$\sup_{f \neq 0} \frac{|(\delta_z \circ T)(f)|}{\|f\|_X} \leq C \cdot v(z), \forall z \in G.$$

Следовательно,

$$\|\delta_z \circ T\|_{X^*}^* \leq C \cdot v(z), \forall z \in G.$$

Значит,

$$\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|_{X^*}^*}{v(z)} \leq C < \infty.$$

Достаточность. Пусть

$$\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|_{X^*}^*}{v(z)} < \infty,$$

то есть, $\delta_z \circ T \in X^*$ для любого $z \in G$ и существует $C > 0$ такое, что $\|\delta_z \circ T\|_{X^*}^* \leq C \cdot v(z)$, $\forall z \in G$. Но тогда по определению нормы функционала $\delta_z \circ T$ для всех $f \in X$ и $z \in G$, имеем

$$|(Tf)(z)| \leq C \cdot v(z) \cdot \|f\|_X.$$

Отсюда следует, что

$$\|Tf\|_v \leq C \cdot \|f\|_X,$$

то есть оператор $T : X \rightarrow H_v(G)$ — ограничен. □

Заметим, что точно так же, как в [22, с. 585] из доказательства следует формула для вычисления нормы оператора $T : X \mapsto H_v(G)$:

$$\|T\|_{H_v(G)} = \sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|_{X^*}^*}{v(z)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1.2.2 обобщает теорему 1.2.1 из [22] в двух направлениях: во-первых, проведенное нами доказательство позволяет расширить класс пространств X до квазибанаховых и, во-вторых, мы рассматриваем произвольные области и веса вместо круга и радиальных весов, как было в [22].

Применим теперь теорему 1.2.2 к классическим операторам весовой композиции, умножения и Вольтерра. Как и прежде, X — квазибанахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, непрерывно вложенное в $H(G)$.

Обозначим через $S(G)$ семейство тех функций $\varphi \in H(G)$, для которых $\varphi(G) \subset G$. Оператор $W_{u,\varphi}$ весовой композиции определяется по фиксированным функциям $u \in H(G)$ и $\varphi \in S(G)$ следующим образом:

$$(W_{u,\varphi}f)(z) = u(z) \cdot f(\varphi(z)), \quad f \in H(G), \quad z \in G.$$

Этот оператор действует непрерывно из $H(G)$ в $H(G)$. Положив $T = W_{u,\varphi}$, имеем тогда $(\delta_z \circ T)f = u(z) \cdot \delta_{\varphi(z)}f$ и, значит, при каждом $z \in G$

$$\|\delta_z \circ T\|^* = \sup_{\|f\|_X \leq 1} |u(z) \cdot \delta_{\varphi(z)}f| = |u(z)| \cdot \sup_{\|f\|_X \leq 1} |\delta_{\varphi(z)}f| = |u(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*.$$

Используя это равенство и применив теорему 1.2.2, получаем такой результат.

Следствие 1.2.3. Пусть v — весовая функция на G , $\varphi \in S(G)$, $u \in H(G)$ и $X \hookrightarrow H(G)$ — квазибанахово пространство. Тогда оператор композиции $W_{u,\varphi} : X \rightarrow H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in G} \frac{|u(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $W_{u,\varphi} : X \rightarrow H_v(G)$ ограничен,

$$\|W_{u,\varphi}\| = \sup_{z \in G} \frac{|u(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Заметим, что если $u(z) \equiv 1$ в G , то оператор $W_{u,\varphi}$ является оператором обычной композиции и обозначается через C_φ ; таким образом, $C_\varphi : f \mapsto f(\varphi(z))$. Если же $u \in H(G)$ произвольна, а $\varphi(z) \equiv z$ в G , то $W_{u,\varphi}$ превращается в оператор умножения на $u(z)$ и обозначается через M_u , то есть $M_u : f \mapsto u \cdot f$. Применив следствие 1.2.3 к этим частным случаям, приходим к следующим результатам.

Следствие 1.2.4. Пусть v , φ и X — те же, что и в следствии 1.2.3. Оператор композиции $C_\varphi : X \rightarrow H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $C_\varphi : X \rightarrow H_v(G)$ ограничен,

$$\|C_\varphi\| = \sup_{z \in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Следствие 1.2.5. Пусть v , u и X — те же, что и в следствии 1.2.3. Оператор умножения $M_u : X \rightarrow H_v(G)$ корректно определён и ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in G} \frac{|u(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $M_u : X \rightarrow H_v(G)$ ограничен,

$$\|M_u\| = \sup_{z \in G} \frac{|u(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)}.$$

Теперь рассмотрим оператор Вольтерра. Пусть G — односвязная область в комплексной плоскости. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in G$. Для фиксированной функции $g \in H(G)$ оператор Вольтерра определяется по правилу

$$T_g : f \mapsto \int_0^z f(w)g'(w)dw, \quad z \in G,$$

где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути, соединяющему начало с точкой z и лежащему в G . Заметим, что если $h(z) = (T_g f)(z)$, то $h(0) = 0$. При $g(z) \equiv z$ в G оператор T_g совпадает с оператором интегрирования $I : f \mapsto \int_0^z f(w)dw$.

Приведем сначала один результат из [22], в котором был получен критерий непрерывности оператора Вольтерра, действующего из $X \hookrightarrow H(\mathbb{D})$ в следующее конкретное пространство голоморфных в единичном круге функций.

Пусть $\beta > 0$. Образуют следующие весовые банаховы пространства

$$H_\beta := \{f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \cdot (1 - |z|^2)^\beta < \infty\}$$

и

$$H_\beta^0 := \{f \in H_\beta : f(0) = 0\}.$$

Известно, что $D : f \mapsto f'$ — изоморфизм H_β^0 на $H_{\beta+1}$. При этом, обратный к нему оператор — это $I : H_{\beta+1} \rightarrow H_\beta^0$.

Лемма 1.2.6. Пусть $X \hookrightarrow H(\mathbb{D})$. Оператор $T_g : X \rightarrow H_\beta$ ограничен тогда и только тогда, когда $M_{g'} : f \mapsto f(z) \cdot g'(z)$ ограничен из X в $H_{\beta+1}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $T_g : X \rightarrow H_\beta$ ограничен. Так как $D : H_\beta \rightarrow H_{\beta+1}$ ограничен, то $D \circ T_g : X \rightarrow H_{\beta+1}$ ограничен. При этом

$$(D \circ T_g)f(z) = \left(\int_0^z f(w)g'(w)dw \right)' = f(z)g'(z) = (M_{g'}f)(z)$$

и, следовательно, $M_{g'} : X \rightarrow H_{\beta+1}$ ограничен.

Достаточность. Пусть теперь $M_{g'} : X \rightarrow H_{\beta+1}$ ограничен. Так как $I : H_{\beta+1} \rightarrow H_\beta^0$ ограничен, то и $I \circ M_{g'} : X \rightarrow H_\beta^0$ ограничен. При этом

$$(I \circ M_{g'}f)(z) = \int_0^z f(w)g'(w)dw = (T_g f)(z)$$

и, значит, $T_g : X \rightarrow H_\beta$ ограничен. □

Сформулированная выше лемма приведена в [22] без доказательства. Основываясь на ней, автор привела следующий критерий непрерывности оператора Вольтерра из X в H_β (см. пункт (iii) следствия 2.1 в [22]).

Следствие 1.2.7. *Оператор Вольтерра $T_g : X \rightarrow H_\beta$, где $X \hookrightarrow H(\mathbb{D})$, непрерывен в том и только в том случае, когда*

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\beta+1} |g'(z)| \|\delta_z\|^* < \infty.$$

Основная цель настоящего раздела — получить обобщение этого результата на радиальные веса общего вида. Для ее реализации нам потребуются некоторые дополнительные сведения и результаты из работы [6].

Определение 1.2.8. Радиальный вес на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ — это положительная функция v на G , для которой $v(z) = v(|z|)$, $z \in G$. При этом функция $v(r)$ непрерывна и возрастает на $(0, a)$ и $\ln r = o(\ln v(r))$ при $r \rightarrow \infty$, если $G = \mathbb{C}$, и $\lim_{r \rightarrow 1^-} v(r) = \infty$, если $G = \mathbb{D}$. Здесь и всюду ниже $a = +\infty$ для $G = \mathbb{C}$ и $a = 1$ для $G = \mathbb{D}$.

Дополнительные условия $v(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 1$ для \mathbb{D} и $r^n = o(v(r))$ при $r \rightarrow \infty$ для \mathbb{C} вызваны тем, что они обеспечивают то, что $H_v(\mathbb{D})$ отлично от хорошо изученного пространства $H^\infty(\mathbb{D})$ всех ограниченных голоморфных в \mathbb{D} функций и что $H_v(\mathbb{C})$ содержат все полиномы.

Определение 1.2.9. Радиальный вес v называется *log-выпуклым*, если функция $\ln(v(e^x))$ выпукла на $(-\infty, a)$.

Как известно (см. [9, 6]), при рассмотрении пространств голоморфных в единичном круге или плоскости функций, определяемых радиальными весами, всегда можно ограничиться *log-выпуклыми* весовыми функциями. При этом, из свойств выпуклых функций следует, что *log-выпуклые* веса дифференцируемы на $(0, a)$ за исключением не более, чем счетного числа точек, и всюду на $(0, a)$ имеют левую и правую производные. В дальнейшем обозначение $v'(r)$ будет использоваться для обозначения правой производной функции v . Отметим еще следующий момент, который часто облегчает технические выкладки.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть r_0 — произвольная фиксированная точка из $(0, a)$. Очевидно,

что радиальные веса $v(r)$ и

$$v_0(r) := \begin{cases} v(r_0), & 0 \leq r \leq r_0 \\ v(r), & r_0 < r < a \end{cases}$$

на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ задают одно и то же весовое пространство $H_v(G)$, а нормы $\|\cdot\|_v$ и $\|\cdot\|_{v_0}$ эквивалентны, т.е. $\frac{1}{C}\|\cdot\|_v \leq \|\cdot\|_{v_0} \leq C\|\cdot\|_v$ при некотором $C > 1$.

Из сделанного замечания следует, что мы можем проверять лог-выпуклость веса v не на всем промежутке $[0, a)$, а лишь на его части $[r_0, a)$, где r_0 — произвольное положительное число.

Нам потребуется несколько результатов из работы [6], формулировки которых мы приведем для удобства читателя.

Лемма 1.2.10. ([6, Лемма 2.6]). Для радиального веса v на \mathbb{D} рассмотрим следующие условия:

(i) $\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot v'(r)}{v(r)} < \infty.$

(ii) $(1-r)^\alpha \cdot v(r)$ убывает на $[r_0, 1)$ для некоторого $\alpha > 0$ и $r_0 \in [0, 1)$.

(iii) $(1-r)^\alpha \cdot v(r)$ почти убывает на $[0, 1)$ для некоторого $\alpha > 0$, то есть существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых $0 < r_1 < r_2 < 1$ выполняется неравенство $(1-r_2)^\alpha \cdot v(r_2) \leq C \cdot (1-r_1)^\alpha \cdot v(r_1).$

(iv) Выполняется неравенство

$$\sup_n \frac{v(1-2^{-n-1})}{v(1-2^{-n})} < \infty.$$

(v) Существует $\delta_0 \in (0, 1)$ такое, что $v(\frac{r+\delta_0}{1+\delta_0 \cdot r}) = O(v(r))$, при $r \rightarrow 1^-.$

(vi) $v(r) = O(v(r^2))$ при $r \rightarrow 1^-.$

Тогда (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi). Для лог-выпуклого веса v условия (i) — (vi) эквивалентны.

Теорема 1.2.11. ([6, Theorem 2.8]). Для лог-выпуклого веса v на \mathbb{D} и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$ утверждения (i) — (vi) из леммы 1.2.10 эквивалентны следующему условию:

(vii) Оператор дифференцирования $D : H_v(\mathbb{D}) \rightarrow H_w(\mathbb{D})$ является непрерывным.

Лемма 1.2.12. ([6, Лемма 3.15]). Для радиального веса v на \mathbb{D} рассмотрим следующие условия:

$$(i) \liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot v'(r)}{v(r)} > 0.$$

(ii) $(1-r)^\alpha \cdot v(r)$ возрастает на $[r_0, 1)$ для некоторого $\alpha > 0$ и $r_0 \in [0, 1)$.

(iii) $(1-r)^\alpha \cdot v(r)$ почти возрастает на $[0, 1)$ для некоторого $\alpha > 0$, то есть существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых $0 < r_1 < r_2 < 1$ выполняется неравенство $(1-r_1)^\alpha \cdot v(r_1) \leq C \cdot (1-r_2)^\alpha \cdot v(r_2)$.

(iv) Существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v(1-2^{-n})}{v(1-2^{-n-k})} < 1$.

(v) Существует $\delta_0 \in (0, 1)$ такое, что $\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{v(r)}{v\left(\frac{r_0 + \delta_0}{1 + \delta_0 \cdot r}\right)} < 1$.

(vi) Существует $\gamma > 1$, такое что $\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{v(r^\gamma)}{v(r)} < 1$.

(vii) v удовлетворяет условию: $\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{v(r)} \cdot \int_0^r \frac{v(t)}{1-t} dt < \infty$.

Тогда (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) \Leftrightarrow (vii). Для \log -выпуклого веса v условия (i) – (vii) эквивалентны.

Теорема 1.2.13. ([6, Theorem 3.16]). Пусть v – \log -выпуклый радиальный вес на \mathbb{D} и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$. Тогда оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{D}) \rightarrow H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий (все) (i) – (vii) леммы 1.2.12.

Следствие 1.2.14. ([6, Corollary 3.18]). Пусть v – \log -выпуклый радиальный вес на \mathbb{D} и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$. Оператор $D : H_v(\mathbb{D}) \rightarrow H_w(\mathbb{D})$ – эпиморфизм тогда и только тогда, когда выполнено неравенство:

$$0 < \liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot v'(r)}{v(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot v'(r)}{v(r)} < \infty. \quad (1.2.1)$$

Теперь мы готовы доказать результат, нужный нам для дальнейшего исследования и, одновременно, являющийся уточнением приведенного выше следствия 1.2.14. Образует весовое банахово пространство

$$H_v^0(\mathbb{D}) := \{f \in H_v(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}.$$

Предложение 1.2.15. При выполнении условия (1.2.1) оператор дифференцирования D — изоморфизм между $H_v^0(\mathbb{D})$ и $H_w(\mathbb{D})$, где $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$.

Доказательство. 1) Так как H_v^0 является подпространством $H_v(\mathbb{D})$, то из теоремы 1.2.11 следует, что оператор $D : H_v^0(\mathbb{D}) \rightarrow H_w(\mathbb{D})$ непрерывен.

2) Теперь проверим инъективность $D : H_v^0(\mathbb{D}) \rightarrow H_w(\mathbb{D})$. Пусть $Df \equiv 0$, то есть, $f'(z) \equiv 0$ в \mathbb{D} , где $f \in H_v^0(\mathbb{D})$. Тогда $f(z) \equiv c$ — постоянная в \mathbb{D} . Так как $f(0) = 0$, то $c = 0$, то есть $f \equiv 0$.

Таким образом, оператор $D : H_v^0(\mathbb{D}) \rightarrow H_w(\mathbb{D})$ инъективен.

3) Сюръективность оператора дифференцирования вытекает из следствия 1.2.14. В самом деле, по этому следствию для любой функции $g \in H_w(\mathbb{D})$ найдется функция $f \in H_v(\mathbb{D})$, для которой $Df = g$. Но тогда $f - f(0)$ принадлежит $H_v^0(\mathbb{D})$ и при этом $D(f - f(0)) = Df = g$.

4) По теореме Банаха об обратном операторе, из 1)–3) следует, что D — изоморфизм между $H_v^0(\mathbb{D})$ и $H_w(\mathbb{D})$. Следовательно, оператор, обратный к оператору дифференцирования, непрерывен по теореме Банаха. Заметим, что обратным в данном случае является оператор интегрирования и его непрерывность можно также извлечь из теоремы 1.2.13. \square

Доказательство следующей леммы проводится по аналогии с доказательством леммы 1.2.6.

Лемма 1.2.16. Пусть радиальный вес v в \mathbb{D} удовлетворяет условию (1.2.1), $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$, g — фиксированная функция из $H(\mathbb{D})$ и X — квазибанахово пространство, непрерывно вложено в $H(\mathbb{D})$. Оператор Вольтерра $(V_g(f))(z) = \int_0^z f(w)g'(w)dw$ непрерывно действует из X в $H_v^0(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда оператор умножения $M_{g'} : f \mapsto f(z) \cdot g'(z)$ непрерывно действует из X в $H_w(\mathbb{D})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $V_g : X \rightarrow H_v^0(\mathbb{D})$ ограничен. Так как по предложению 1.2.15 оператор $D : H_v^0(\mathbb{D}) \rightarrow H_w(\mathbb{D})$ непрерывен, то $D \circ V_g : X \rightarrow H_w$ непрерывен.

При этом

$$(D \circ V_g f)(z) = \left(\int_0^z f(w)g'(w)dw \right)' = f(z)g'(z) = (M_{g'} f)(z).$$

Достаточность. Пусть $M_{g'} : X \rightarrow H_w$ непрерывен. Так как $I : H_w \rightarrow H_v^0(\mathbb{D})$ непрерывен по теореме 1.2.13, то и $I \circ M_{g'} : X \rightarrow H_v^0(\mathbb{D})$ непрерывен.

При этом

$$(I \circ M_{g'} f)(z) = \int_0^z f(w)g'(w)dw = (V_g f)(z).$$

□

Приведем еще конкретизацию следствия 1.2.5 для случая круга.

Предложение 1.2.17. Пусть v — радиальный вес в \mathbb{D} и X — квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в $H(\mathbb{D})$. Оператор умножения $M_g : X \rightarrow H_v(\mathbb{D})$ на функцию $g \in H(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty. \quad (1.2.2)$$

Из леммы 1.2.16 и предложения 1.2.17 следует такой результат.

Предложение 1.2.18. Пусть v — радиальная весовая функция, удовлетворяющая условию (1.2.1), $X \hookrightarrow H(\mathbb{D})$ — квазибанахово пространство, g — фиксированная функция из $H(\mathbb{D})$. Оператор Вольтерра $V_g : X \rightarrow H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |z|) \cdot |g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty. \quad (1.2.3)$$

Доказательство. По лемме 1.2.16 оператор Вольтерра $V_g : X \rightarrow H_v(\mathbb{D})$ непрерывен в том и только в том случае, когда непрерывен оператор умножения $M_{g'} : X \rightarrow H_w(\mathbb{D})$, где $w(z) = \frac{v(z)}{1 - |z|}$. В свою очередь, по предложению 1.2.17 последний оператор непрерывен тогда и только тогда, когда условие (1.2.2) выполнено для g' вместо g и w вместо v , то есть, тогда и только тогда когда выполнено условие (1.2.3). □

Предложение 1.2.18 и есть обобщение следствия 1.2.7 на случай весов общего вида. Чтобы убедиться в этом докажем, что вес $(1 - |z|^2)^{-\beta}$, $\beta > 0$, задающий пространство H_β из предложения 1.2.7, удовлетворяет условиям предложения 1.2.18.

Пример 1.2.19. Функция $g(r) = (1 - r^2)^{-\beta}$, $\beta > 0$, $r \in [0, 1)$ — лог-выпуклый радиальный вес на единичном круге \mathbb{D} , удовлетворяющим условию (1.2.1).

Проверим, что функция $\varphi(x) = \ln g(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$. Имеем $\varphi(x) = \ln(1 - e^{2x})^{-\beta} = -\beta \cdot \ln(1 - e^{2x})$. Найдём вторую производную функции $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \frac{\beta \cdot 2 \cdot e^{2x}}{1 - e^{2x}};$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{4 \cdot e^{2x} \cdot \beta \cdot (1 - e^{2x}) + 2 \cdot e^{2x} \cdot \beta \cdot 2 \cdot e^{2x}}{(1 - e^{2x})^2} = \\ &= \frac{4 \cdot e^{2x} \cdot \beta - 4 \cdot e^{4x} \cdot \beta + 4 \cdot e^{4x} \cdot \beta}{(1 - e^{2x})^2} = \frac{4 \cdot e^{2x} \cdot \beta}{(1 - e^{2x})^2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\varphi''(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 0)$. Значит, функция $g(x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$.

Таким образом, функция $g(|z|) = (1 - |z|^2)^{-\beta} - \log$ -выпуклый радиальный вес на \mathbb{D} .

Остается проверить, что он удовлетворяет условию (1.2.1). Имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot g'(r)}{g(r)} = 2\beta \cdot \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{r(1-r) \cdot (1-r^2)^{-\beta-1}}{(1-r^2)^{-\beta}} = \beta \in (0, \infty),$$

откуда следует требуемое.

Рассмотрим примеры других радиальных весов, которые не исследовались в [22].

Пример 1.2.20. Весовая функция $g(r) = \ln^p \frac{1}{1-r}$, где $p \geq 1$ — \log -выпуклый радиальный вес, удовлетворяющий условию (1.2.1).

1) Очевидно, что $g(r)$ непрерывна и возрастает на промежутке $[0, 1)$ и $g(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 1^-$.

2) Теперь покажем, что функция $\varphi(x) = \ln g(e^x) = p \ln \ln \frac{1}{1-e^x}$ выпукла на $(-\infty, 0)$.

Для этого найдём вторую производную функции φ :

$$\varphi'(x) = p \cdot \left(\ln \left(\ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right) \right) \right)' = \frac{p \cdot e^x}{(1-e^x) \cdot \ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right)};$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= p \cdot \left(\frac{e^x}{(1-e^x) \cdot \ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right)} \right)' = \\ &= p \cdot \frac{[e^x \cdot (1-e^x) \cdot \ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right)] - e^x \cdot [-e^x \cdot \ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right) + e^x]}{[(1-e^x) \cdot \ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right)]^2} = \\ &= p \cdot \frac{[e^x \cdot \ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right)] - e^{2x}}{[(1-e^x) \cdot \ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right)]^2} = \\ &= p \cdot \frac{e^x \cdot [\ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right) - e^x]}{[(1-e^x) \cdot \ln \left(\frac{1}{1-e^x} \right)]^2} > 0, \forall x \in (-\infty, 0).\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\ln^p \left(\frac{1}{1-e^x} \right)$ является \log -выпуклым радиальным весом.

Проверим выполнение условий (1.2.1) для веса $\ln^p \left(\frac{1}{1-r} \right)$:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot p \cdot \ln^{p-1}\left(\frac{1}{1-r}\right) \cdot (1-r)^{-1}}{\ln^p\left(\frac{1}{1-r}\right)} &= \\ \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{p \cdot \ln^{p-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)}{\ln^p\left(\frac{1}{1-r}\right)} &= \\ \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{p}{\ln\left(\frac{1}{1-r}\right)} &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot p \cdot \ln^{p-1}\left(\frac{1}{1-r}\right) \cdot (1-r) \cdot (-1)}{\ln^p\left(\frac{1}{1-r}\right)} &= \\ \limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot p \cdot \ln^{p-1}\left(\frac{1}{1-r}\right) \cdot (1-r) \cdot (-1)}{\ln^p\left(\frac{1}{1-r}\right)} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\ln^p\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ является log-выпуклым радиальным весом, для которого условие (1.2.1) не выполнено.

Пример 1.2.21. Весовая функция $g(r) = e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}}$, где $\alpha > 0$ — log-выпуклый радиальный вес.

1) Очевидно, что $g(r)$ непрерывна и возрастает на промежутке $[0, 1)$ и $g(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 1^-$.

2) Теперь покажем, что функция $\varphi(x) = e^{\frac{1}{(1-e^x)^\alpha}}$ выпукла на $(-\infty, 0)$. Для этого найдём вторую производную функции φ :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \left(e^{\frac{1}{(1-e^x)^\alpha}} \right)' = \alpha \cdot e^x \cdot (1-e^x)^{-\alpha-1} \cdot e^{\frac{1}{(1-e^x)^\alpha}}; \\ \varphi''(x) &= \alpha \cdot \left(e^x \cdot (1-e^x)^{-\alpha-1} \cdot e^{\frac{1}{(1-e^x)^\alpha}} \right)' = \\ &= \alpha \cdot e^{\frac{1}{(1-e^x)^\alpha}} \cdot [e^x \cdot (1-e^x)^{-\alpha-1} + (\alpha+1) \cdot e^{2x} \cdot (1-e^x)^{-\alpha-2}] + \\ &+ \alpha \cdot e^x \cdot (1-e^x)^{-\alpha-1} \cdot e^{\frac{1}{(1-e^x)^\alpha}} \cdot \alpha \cdot e^x \cdot (1-e^x)^{-\alpha-1} > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, функция $e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}}$ является log-выпуклым радиальным весом.

Проверим выполнение условий (1.2.1) для веса $e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}}$. Имеем

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \cdot \alpha \cdot (1-r)^{-\alpha-1}}{e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}}} &= \lim_{r \rightarrow 1^-} (1-r) \cdot \alpha \cdot (1-r)^{-\alpha-1} = \\ \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot \alpha}{(1-r)^{\alpha+1}} &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\alpha}{(1-r)^\alpha} = +\infty.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \cdot (-\alpha) \cdot (1-r)^{-\alpha-1}}{e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}}} =$$

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \cdot (-\alpha) \cdot (1-r)^{-\alpha-1}}{e^{\frac{1}{(1-r)^\alpha}}} = +\infty.$$

Таким образом, функция $e^{\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}}$ является log-выпуклым радиальным весом, для которого условие (1.2.1) не выполнено.

Пример 1.2.22. Весовая функция $g(r) = (\frac{1}{1-r})^\beta \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r})$, где p — произвольное неотрицательное вещественное число, $\beta > 0$, — log-выпуклый радиальный вес.

Проверим выполнение условий (1.2.1) для веса $(\frac{1}{1-r})^\beta \cdot \ln^p \frac{1}{1-r}$. Имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot [(-\beta) \cdot (1-r)^{-\beta-1} \cdot (-1) \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r}) + (1-r)^{-\beta} \cdot p \cdot \ln^{p-1}(\frac{1}{1-r}) \cdot (1-r)^{-1}]}{(1-r)^{-\beta} \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r})} =$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r)^{-\beta} \cdot \ln^{p-1}(\frac{1}{1-r}) \cdot [\beta \cdot \ln(\frac{1}{1-r}) + p]}{(1-r)^{-\beta} \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r})} =$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\beta \cdot \ln(\frac{1}{1-r}) + p}{\ln(\frac{1}{1-r})} =$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \beta + \left(\frac{p}{\ln(\frac{1}{1-r})} \right) = \beta.$$

Следовательно,

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot \beta \cdot (1-r)^{-\beta-1} \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r}) - (1-r)^{-\beta} \cdot p \cdot \ln^{p-1}(\frac{1}{1-r}) \cdot (1-r)}{(1-r)^{-\beta} \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r})} =$$

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1-r) \cdot \beta \cdot (1-r)^{-\beta-1} \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r}) - (1-r)^{-\beta} \cdot p \cdot \ln^{p-1}(\frac{1}{1-r}) \cdot (1-r)}{(1-r)^{-\beta} \cdot \ln^p(\frac{1}{1-r})} = \beta.$$

Таким образом, условие (1.2.1) выполнено.

Теперь покажем, что функция $\varphi(x) = \ln g(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$. Имеем

$$\varphi(x) = \ln[(1 - e^x)^{-\beta} \cdot \ln^p(\frac{1}{1-e^x})] \text{ или}$$

$$\varphi(x) = -\beta \ln(1 - e^x) + p \ln \ln \left(\frac{1}{1 - e^x} \right).$$

Найдём вторую производную функции $\varphi(x)$. Для этого приведём первую производную к следующему виду:

$$\varphi'(x) = \frac{\beta \cdot e^x}{1 - e^x} + \frac{p \cdot e^x}{(1 - e^x) \cdot \ln \frac{1}{1 - e^x}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \left(\frac{\beta \cdot e^x}{1 - e^x} + \frac{p \cdot e^x}{(1 - e^x) \cdot \ln \frac{1}{1 - e^x}} \right)' = \\ &= \frac{[\beta \cdot e^x \cdot (1 - e^x)] + \beta \cdot e^{2x}}{(1 - e^x)^2} + \\ &= \frac{[p \cdot e^x \cdot (1 - e^x) \cdot \ln \frac{1}{1 - e^x}] - p \cdot e^x \cdot (-e^x \cdot \ln \frac{1}{1 - e^x} + e^x)}{(1 - e^x)^2 \cdot \left(\ln \frac{1}{1 - e^x} \right)^2} = \\ &= \frac{\beta \cdot e^x}{(1 - e^x)^2} + \frac{p \cdot e^x \cdot \ln \frac{1}{1 - e^x} + p \cdot e^{2x}}{(1 - e^x)^2 \cdot \left(\ln \frac{1}{1 - e^x} \right)^2} > 0\end{aligned}$$

Получили, что $\varphi''(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 0)$. Значит, функция $g(x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$.

Таким образом, функция $g(|z|) = \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^\beta \cdot \ln^p\left(\frac{1}{1-|z|}\right) - \log$ -выпуклый радиальный вес, удовлетворяющий условию (1.2.1).

Из последнего примера и предложения 1.2.18 вытекает такой результат.

Предложение 1.2.23. Пусть $v(r) = \left(\frac{1}{1-r}\right)^\beta \cdot \ln^p\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $X \hookrightarrow H(\mathbb{D})$ — квазибанахово пространство, g — фиксированная функция из $H(\mathbb{D})$. Оператор Вольтерра $V_g : X \rightarrow H_v(\mathbb{D})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^{\beta+1} \cdot |g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{\ln^p(1/(1 - |z|))} < \infty.$$

При $p = 0$ получаем еще раз следствие 2.1 из работы [22] в качестве частного случая.

1.3 Обобщение абстрактного критерия на случай всей комплексной плоскости

В текущем разделе рассматриваются приложения критериев о непрерывности классических операторов в случае всей комплексной плоскости. Отметим, что ранее данный случай в предлагаемой постановке не рассматривался. Как и выше в предыдущем разделе, приведем нужные для наших исследований, результаты из [6].

Теорема 1.3.1. ([6, Theorem 2.10]) Пусть v — \log -выпуклый вес на \mathbb{C} . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен.

(ii)

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

(iii) $\ln v(r) = O(r)$, при $r \rightarrow \infty$.

Теорема 1.3.2. ([6, Theorem 3.8]) Пусть v — \log -выпуклый вес на \mathbb{C} . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i)

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} > 0.$$

(ii)

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{v(r)} \int_0^r v(t) dt < \infty.$$

(iii) интегральный оператор $I : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен.

Следствие 1.3.3. ([6, Corollary 3.10]) Пусть v — \log -выпуклый вес на \mathbb{C} . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ — эпиморфизм.

(ii)

$$0 < \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

(iii) $\exists A, C \geq 1$, такие что $\frac{1}{A} \cdot e^{\frac{r}{C}} < v(r) < A \cdot e^{r \cdot C}, \forall r > 0$.

Теперь мы готовы привести новый результат об изоморфизме оператора дифференцирования в пространствах целых функций, задаваемых радиальными весами.

Теорема 1.3.4. Пусть v — \log -выпуклый вес на \mathbb{C} . Оператор дифференцирования $D : H_v^0(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда выполнено неравенство:

$$0 < \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty. \quad (1.3.1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $D : H_v^0(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ — изоморфизм. Тогда D — непрерывный оператор из $H_v^0(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$. Рассмотрим оператор $S : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v^0(\mathbb{C}) : f(z) \mapsto f(z) - f(0)$ и покажем, что он непрерывен. По определению

$$\|f\|_v = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty.$$

Тогда, учитывая, что $v(z) = v(|z|) \geq v(0)$, имеем

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z) - f(0)|}{v(z)} \leq \sup_{z \in \mathbb{C}} \left(\frac{|f(z)|}{v(z)} + \frac{|f(0)|}{v(z)} \right) \leq \|f\|_v + \|f\|_v = 2 \cdot \|f\|_v.$$

Таким образом, оператор S непрерывно действует из $H_v(\mathbb{C})$ в $H_v^0(\mathbb{C})$.

Заметим, что $Df = D(f(z) - f(0))$ для любой функции $f \in H(\mathbb{C})$. Поэтому $Df = (D \circ S)f$, $\forall f \in H(\mathbb{C})$. Так как S непрерывно действует из $H_v(\mathbb{C})$ в $H_v^0(\mathbb{C})$, а D — из $H_v^0(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$, то отсюда следует, что D , как суперпозиция, действует непрерывно из $H_v(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$. Тогда по теореме 1.3.1 выполняется неравенство

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

Так как по условию оператор дифференцирования D — изоморфизм из $H_v^0(\mathbb{C})$ в $H_v(\mathbb{C})$, то обратный к нему, оператор интегрирования $I : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v^0(\mathbb{C})$ также непрерывен. Значит, по теореме 1.3.2 справедливо неравенство:

$$0 < \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)}.$$

Таким образом, условие (1.3.1) выполнено.

Достаточность. Пусть выполнено условие (1.3.1):

$$0 < \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

Из отмеченного выше равенства $Df = D(f(z) - f(0))$ следует, что $D(H_v^0(\mathbb{C})) = D(H_v(\mathbb{C}))$. Отсюда, учитывая, что по следствию 1.3.3 оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ — эпиморфизм, то есть $D(H_v(\mathbb{C})) = H_v(\mathbb{C})$, заключаем, что и $D(H_v^0(\mathbb{C})) = H_v(\mathbb{C})$, то есть оператор $D : H_v^0(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ сюръективен.

Теперь покажем, что $D : H_v^0(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ — инъективный оператор. Пусть $Df \equiv 0$, то есть, $f'(z) \equiv 0$ в \mathbb{C} , где $f \in H_v^0(\mathbb{C})$. Тогда $f(z) \equiv c$ — постоянная в \mathbb{C} . Так как $f(0) = 0$, то $c = 0$, то есть $f \equiv 0$. Таким образом, оператор $D : H_v^0(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ инъективен.

Окончательно получаем, что оператор дифференцирования $D : H_v^0(\mathbb{C}) \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ — изоморфизм. \square

Предложение 1.3.5. Пусть v — радиальный вес в \mathbb{C} и X — квазибанахово пространство, вложенное в $H_v^0(\mathbb{C})$. Оператор умножения $M_g : X \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ на функцию $g \in H(\mathbb{C})$ непрерывен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty. \quad (1.3.2)$$

Доказательство. Так как $\delta_z(M_g f) = f(z) \cdot g(z)$, то

$$\begin{aligned} \|\delta_z(M_g)\|^* &= \sup_{f \in X, f \neq 0} \frac{|(M_g f)(z)|}{\|f\|} = \sup_{f \in X, f \neq 0} \frac{|g(z)| \cdot |\delta_z(f)|}{\|f\|} \\ &= |g(z)| \cdot \sup_{f \in X, f \neq 0} \frac{|\delta_z(f)|}{\|f\|} = |g(z)| \cdot \|\delta_z\|^*. \end{aligned}$$

По теореме 1.2.17 отсюда следует, что непрерывность оператора $M_g : X \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ эквивалентна выполнению условия (1.3.2). \square

Из теоремы 1.3.4 и предложения 1.3.5 следует такой результат (его доказательство аналогично доказательству предложения 1.2.18)

Предложение 1.3.6. Пусть v — радиальная весовая функция, удовлетворяющая условию (1.3.1), $X \hookrightarrow H(\mathbb{C})$ — квазибанахово пространство, g — фиксированная функция из $H(\mathbb{C})$. Оператор Вольтерра $V_g : X \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty. \quad (1.3.3)$$

Пример 1.3.7. Весовая функция $g(r) = r^\alpha \cdot e^{\beta r}$, $r \in (0, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ — лог-выпуклый радиальный вес на \mathbb{C} , удовлетворяющий условию (1.3.1).

1) Очевидно, что $g(r)$ непрерывна и возрастает на промежутке $[0, 1)$ и $g(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

2) Проверим выполнение условий (1.3.1) для веса $r^\alpha \cdot e^{\beta r}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha \cdot r^{\alpha-1} \cdot e^{\beta r} + \beta \cdot r^\alpha \cdot e^{\beta r}}{r^\alpha \cdot e^{\beta r}} &= \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{\alpha-1} \cdot e^{\beta r} \cdot (\alpha + \beta r)}{r^\alpha \cdot e^{\beta r}} &= \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \beta r}{r} &= \beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} = \beta \in (0, \infty).$$

Таким образом, условие (1.3.3) выполнено.

Теперь покажем, что функция $\varphi(x) = \ln g(e^x)$ выпукла на \mathbb{R} . Имеем $\varphi(x) = \ln(e^{\alpha x} \cdot e^{\beta e^x}) = \alpha x + \beta e^x$. Найдём вторую производную функции $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \alpha + \beta e^x.$$

$$\varphi''(x) = \beta e^x.$$

Отсюда следует, что $\varphi''(x) > 0, \forall x \in (-\infty, \infty)$. Значит, функция $\varphi(x)$ выпукла на \mathbb{R} .

Таким образом, функция $g(|z|) = |z|^\alpha \cdot e^{\beta|z|}$ является log-выпуклым радиальным весом на \mathbb{C} .

Обозначим через $H_{\alpha, \beta}(\mathbb{C})$ весовое пространство $H_v(\mathbb{C})$, задаваемое весом $v(r) = r^\alpha \cdot e^{\beta r}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Из предложения 1.3.6 и примера 1.3.7 следует такой результат.

Следствие 1.3.8. Пусть $X \hookrightarrow H(\mathbb{C})$ — квазибанахово пространство, g — фиксированная функция из $H(\mathbb{C})$. Оператор Вольтерра $V_g : X \rightarrow H_{\alpha, \beta}(\mathbb{C})$ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{r^{|z|} \cdot e^{\beta|z|}} < \infty.$$

Глава 2

Критерии непрерывности классических операторов в конкретных пространствах

В первой части данной главы исследуются основные свойства пространств Бергмана и Харди, и приводятся формулы для вычисления нормы дельта-функции на соответствующих пространствах. Во второй формулируются критерии непрерывности интегральных операторов и операторов весовой композиции, действующих на указанных пространствах.

2.1 Пространства Бергмана и Харди, их основные свойства

Для применения результатов предыдущей главы к конкретным пространствам $X \subset H(G)$ требуется иметь способ для вычисления норм дельта функций $\|\delta_z\|^*$ или хотя бы для получения равномерных по $z \in G$ оценок $\|\delta_z\|^*$. Кроме того, для использования предложения 1.2.16 необходимо установить те пары весов v и w на \mathbb{D} , для которых оператор $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \rightarrow H_w(\mathbb{D})$ — изоморфизм. В связи с этим отметим, что в статье [22] был приведен ряд известных результатов о величине $\|\delta_z\|^*$ в ряде классических весовых пространств голоморфных в единичном круге функций. Именно, рассматривались пространства Харди H^p и Бергмана A_α^p .

Определение 2.1.1. Пространство Харди H^p , при $0 < p < \infty$ — это класс голоморфных функций на открытом единичном круге \mathbb{D} на комплексной плоскости \mathbb{C} , удовлетворяющих

следующему условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Левая часть этого неравенства называется p — нормой в пространстве Харди или просто нормой Харди для f , и обозначается $\|f\|_{H^p}$. Данная норма обобщается на случай $p = \infty$ как $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z:|z|<1} |f(z)|$.

Определение 2.1.2. Для $\alpha > -1$ и $0 < p < \infty$ через A_α^p обозначим весовое пространство Бергмана всех функций, аналитических в G . Именно,

$$A_\alpha^p := \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \cdot (1 - |z|^2)^\alpha dA(z)\}, \quad \alpha > -1, \quad 0 < p < \infty,$$

где $dA(z)$ — нормализованная мера Лебега в \mathbb{D} , т.е. $dA(z) = \frac{1}{\pi} d\lambda(z)$, где $d\lambda(z)$ — мера Лебега в плоскости.

Как отмечено в [22],

$$\|\delta_z\|^* = (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{p}} \text{ для } X = H^p; \quad \|\delta_z\|^* = (1 - |z|^2)^{-\frac{\alpha+2}{p}} \text{ для } X = A_\alpha^p.$$

Этого вполне достаточно, чтобы сформулировать следствия из абстрактного критерия ограниченности оператора весовой композиции, включая его частные случаи обычной композиции умножения, действующих из H^p или A_α^p в $H_v(\mathbb{D})$. Для оператора Вольтерра в [22] аналогичные результаты приведены только для одного специального класса пространств $H_v(\mathbb{D})$, задаваемых весами вида $v(z) = (1 - |z|^2)^{-\beta}$, $\beta > 0$ и обозначаемых символом H_β . Это связано в основном с тем, что лишь для этого класса пространств известно, что оператор дифференцирования осуществляет изоморфизм между $H_{\beta,0} = \{f \in H_\beta : f(0) = 0\}$ и $H_{\beta+1}$.

2.2 Ограниченность операторов в пространствах Харди и Бергмана

Основная цель настоящего раздела — указать условия общего характера на радиальные веса v в \mathbb{D} , при которых удается сформулировать критерии непрерывности клас-

сических операторов из X в $H_v(\mathbb{D})$ при $X = H^p$ или $X = A_\alpha^p$. Затем этот подход будет распространен на неисследованный ранее случай пространств целых функций.

Поскольку формулировка следствий из предшествующих результатов об ограниченности операторов (весовой) композиции и умножения не составляет труда, мы ограничимся в данном разделе только изучением оператора Вольтерра.

Воспользовавшись формулами для $\|\delta_z\|^*$, приведенными выше для пространств Харди H^p и Бергмана A_α^p , получаем из предложения 1.2.18

Следствие 2.2.1. Пусть v — радиальный лог-выпуклый вес на \mathbb{D} , для которого выполнено условие (1.2.1). Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор Вольтерра $V_g : H^p \rightarrow H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^{1 - \frac{1}{p}} \cdot |g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор Вольтерра $V_g : A_\alpha^p \rightarrow H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^{1 - \frac{\alpha+2}{p}} \cdot |g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

Отметим, что сформулированные в следствии 2.2.1 утверждения ранее были известны лишь для конкретного классического пространства Бергмана H_β , задаваемого весом $(1 - |z|)^{-\beta}$, $\beta > 0$ (обычно для его задания используют эквивалентный вес $(1 - |z|^2)^{-\beta}$; см. следствие 2.1 (iii) в [22]). Покажем, что следствие 2.2.1 применимо к достаточно широкому спектру весов, содержащему $(1 - |z|)^{-\beta}$ в качестве частного случая.

Следствие 2.2.2. Оператор Вольтерра $V_g : X \rightarrow H_{\beta,p}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^{\beta+1} \cdot |g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{\ln^p \frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

В качестве частного случая при $p = 0$ следствие 2.2.2 содержит следствие 2.1 (iii) из [22]. Применив к рассматриваемому весу следствие 2.2.1, получаем обобщение на произвольное $p \in \mathbb{R}$ следствия 2.2 (i) и (iii) из [22] для пространств Харди и Бергмана.

Следствие 2.2.3. Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор Вольтерра $V_g : H^p \rightarrow H_{\beta,p}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^{\beta+1-\frac{1}{p}} |g'(z)|}{\ln^p \frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

(ii) Оператор Вольтерра $V_g : A_\alpha^p \rightarrow H_{\beta,p}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^{\beta+1-\frac{\alpha+2}{p}} |g'(z)|}{\ln^p \frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

Глава 3

Непрерывность операторов в пространствах Фока

В настоящей главе рассматриваются задачи о непрерывности операторов весовой композиции и Вольтерра в классическом пространстве Фока и пространстве Фока общего вида.

3.1 Предварительные сведения

Нам потребуются в дальнейшем сведения из теории субгармонических функций (см., напр., [5, Глава 1]) и один результат о вычислении нормы дельта-функций в классическом пространстве Фока из монографии [23].

Определение 3.1.1. Функция $u : D \rightarrow [-\infty, \infty)$ называется *полу непрерывной сверху* в точке $z_0 \in D$, если $\forall A > u(z_0) \exists U_{z_0} : u(z) < A, \forall z \in U_{z_0}$.

Функция u называется *полу непрерывной сверху в области D* , если она полу непрерывна сверху в каждой точке из D .

Известно, что если $u(z)$ полу непрерывна сверху в D и отлична от тождественной $-\infty$ в D , то множество тех точек, в которых $u(z) \neq -\infty$, всюду плотно в D , и $u(z)$ локально интегрируема по Лебегу в D . Тогда при любом $z_0 \in D$ интегралы (с точностью до постоянного множителя являющиеся средними значениями функции по окружности и кругу)

$$\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

и

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} u(z_0 + x + iy) dx dy$$

конечны при любом допустимом r .

Определение 3.1.2. Полу непрерывная сверху функция $u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$ называется *субгармонической* в D , если $\forall z_0 \in D$ и для любого допустимого $r > 0$ выполняется неравенство

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \quad (3.1.1)$$

Предложение 3.1.3. Следующие условия эквивалентны:

(i) u субгармоническая в D .

(ii) $\forall z_0 \in D$ и любого допустимого r выполняется неравенство

$$u(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| \leq r} u(z) ds, \quad ds = dx dy$$

(iii) для любой замкнутой области G , $\bar{G} \subset D$, и любой функции $h(z)$, гармонической в G и непрерывной в \bar{G} , такой что $u(z) \leq h(z)$, $\forall z \in \partial G$, выполняется неравенство $u(z) \leq h(z)$ в G .

Важными примерами субгармонических функций являются модуль и логарифм модуля голоморфной функции. Именно, если f голоморфна в D , то функции $|f(z)|^p$, $p > 0$, и $\ln |f(z)|$ являются субгармоническими в D .

Напомним, что классическое пространство Фока определяется следующим образом:

$$F_\alpha^p = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{F_\alpha^p}^p := \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \cdot e^{-\frac{\alpha p}{2}|z|^2} dA(z) < \infty \right\},$$

где $dA(z)$ — мера Лебега в $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Следующий результат взят нами из монографии [23]. Мы приведем его подробное доказательство, поскольку нам в последующем будут важны некоторые его технические моменты.

Теорема 3.1.4. ([23, Theorem 2.7]) Для любого $0 < p < \infty$ и $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\sup \{|f(z)| : \|f\|_{p,\alpha} \leq 1\} = e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}. \quad (3.1.2)$$

Кроме того, для $0 < p \leq \infty$ любая экстремальная функция в этом равенстве имеет вид:

$$f(w) = e^{\alpha \bar{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2 + i\theta}.$$

Доказательство. Пусть $f \in F_\alpha^p$. Тогда $|f(z)|^p$ субгармоническая в \mathbb{C} функция и, следовательно, для $z_0 = 0$ и любого $r > 0$ выполняется неравенство (3.1.1):

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Умножим обе части этого неравенства $e^{-\frac{\alpha pr^2}{2}} \cdot r$ и проинтегрируем в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & |f(0)|^p \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha pr^2}{2}} \cdot r dr \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \cdot e^{-\frac{\alpha pr^2}{2}} \cdot r dr d\theta \end{aligned}$$

Вычислим интеграл, стоящий в левой части неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha pr^2}{2}} \cdot r dr &= -\frac{1}{\alpha p} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha pr^2}{2}} d\frac{\alpha pr^2}{2} = \\ &= -\frac{1}{\alpha p} e^{-\frac{\alpha pr^2}{2}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha p} \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим двойной интеграл, стоящий в правой части неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \cdot e^{-\frac{\alpha pr^2}{2}} \cdot r dr d\theta = \\ & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \cdot e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \right|^p \cdot r dr d\theta = \\ & = \int_{\mathbb{C}} \left| f(w) \cdot e^{-\frac{\alpha|w|^2}{2}} \right|^p dA(w) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|f(0)|^p \leq \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(w) \cdot e^{-\frac{\alpha|w|^2}{2}} \right|^p dA(w) = \|f\|_{p,\alpha}^p.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда f — постоянна.

В общем случае, для любого $z \in \mathbb{C}$ и $f \in F_\alpha^p$ рассматриваем функцию

$$F(w) = f(z - w) e^{\alpha w \bar{z} - \alpha(|z|^2/2)}.$$

Ясно, что $|F(0)|^p \leq \|F\|_{p,\alpha}^p$.

В силу субгармоничности функции F справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |F(0)|^p \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha p r^2}{2}} \cdot r dr \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p \cdot e^{-\frac{\alpha p r^2}{2}} \cdot r dr d\theta \end{aligned}$$

Аналогично первому неравенству получим

$$\begin{aligned} |f(z)|^p \cdot e^{-\frac{\alpha p |z|^2}{2}} & \leq \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z-w) \cdot e^{\alpha \bar{z}w} \cdot e^{-\frac{\alpha |z|^2}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha |w|^2}{2}} \right|^p dA(w) = \\ & = \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z-w) \cdot e^{\alpha \bar{z}w - \frac{\alpha |z|^2}{2} - \frac{\alpha |w|^2}{2}} \right|^p dA(w) = \\ & = \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z-w) \cdot e^{-\alpha \left(\frac{|z|}{\sqrt{2}}\right)^2 - w\bar{z} + \left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2} \right|^p dA(w) = \\ & = \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z-w) \cdot e^{-\alpha \left(\frac{|z|}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2} \right|^p dA(w) = \\ & = \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z-w) \cdot e^{-\alpha \frac{|z-w|^2}{2}} \right|^p dA(w) = \\ & = \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(w) \cdot e^{-\alpha \frac{|w|^2}{2}} \right|^p dA(w) = \|f\|_{p,\alpha}^p \end{aligned}$$

Таким образом, $|f(z)| \leq \|f\|_{p,\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha |z|^2}{2}}$. Отметим, что равенство выполняется в случае, если F — постоянная функция. Таким образом, экстремальная функция имеет вид:

$$f(w) = e^{\alpha \bar{w} - \frac{\alpha |z|^2}{2} + i\theta}.$$

В силу сказанного выше, окончательно заключаем, что равенство (3.1.2) верно. \square

Ясно, что на языке дельта-функций равенство (3.1.2) означает, что $\delta_z \in (F_\alpha^p)^*$ при любом $z \in \mathbb{C}$ и

$$\|\delta_z\|_{p,\alpha}^* = e^{\frac{\alpha |z|^2}{2}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Это равенство позволяет нам прямо сейчас сформулировать ряд следствий о непрерывности классических операторов, действующих на пространствах Фока F_α^p . Однако в этом случае останутся неисследованными обобщенные пространства Фока, которые в последнее время стали предметом пристального изучения специалистов. Поэтому мы сначала рассмотрим вопрос о распространении равенства (3.1.2) (или, хотя бы, оценки сверху) на обобщенные пространства Фока. Этому вопросу посвящен следующий раздел.

3.2 Обобщенные пространства Фока и нормы дельта-функций в них

Пусть непрерывная функция $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\psi(z)} dA(z) < \infty.$$

При каждом $0 < p < \infty$ она задает обобщенное пространство Фока

$$F_p^\psi := \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{p,\psi} := (\lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-\psi(z)} dA(z))^{1/p} < \infty\},$$

где нормирующий коэффициент λ_ψ выбран с тем расчетом, что $\|1\|_{F_p^\psi} = 1$, то есть

$$\lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} e^{-\psi(z)} dA(z) = 1.$$

При $\psi(z) = \frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q$, получаем пространство Фока

$$F_{\alpha}^{p,q} := \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{F_{\alpha}^{p,q}} := \lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \cdot e^{-\frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q} dA(z) < \infty\},$$

где $0 < \alpha, p, q < \infty$, а коэффициент λ_ψ найдём, воспользовавшись равенством:

$$\|1\|_{F_{\alpha}^{p,q}} = \lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q} dA(z) = 1 \quad (3.2.1)$$

Вычислим интеграл из (3.2.1)

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q} dA(z) = 2\pi \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}} \cdot r dr.$$

Сделаем замену $t = \frac{q}{\alpha p} r^q$ и используя определение Γ -функции Эйлера, имеем :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha p r^q}{q}} \cdot r dr &= \frac{1}{q} \cdot \frac{q}{\alpha p} \cdot \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{qt}{\alpha p}\right)^{\frac{2}{q}-1} dt = \\ &= \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{q}{\alpha p}\right)^{\frac{2}{q}} \cdot \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{2}{q}-1} dt = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{q}{\alpha p}\right)^{\frac{2}{q}} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{q}\right) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{q}{\alpha p}\right)^{\frac{2}{q}} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{q}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, для $\psi(z) = \frac{\alpha p}{q} \cdot |z|^q$

$$\lambda_\psi = \frac{q}{2\pi} \cdot \left(\frac{\alpha p}{q}\right)^{\frac{2}{q}} \cdot \Gamma^{-1}\left(\frac{2}{q}\right).$$

Ясно, что при $q = 2$ получаем, что $F_{\alpha}^{p,q} = F_{\alpha}^p$. Напомним, что для этого случая мы имеем точное значение нормы дельта-функций (см. конец предыдущего раздела). Однако

он является специфичным, и метод для $q = 2$ не распространяется в полной мере на произвольное $q > 0$. Ниже мы представляем его модификацию, позволяющую получить оценку сверху для норм дельта-функций при $0 < q \leq 1$.

Пусть $f \in F_{\alpha}^{p,q}$. Рассуждая точно так же, как в конце предыдущего раздела, получаем, что

$$|f(0)| \leq \|f\|_{F_{\alpha}^{p,q}}. \quad (3.2.2)$$

Значит, $\|\delta_0\|^* \leq 1$. В то же время из (3.2.1) следует, что для $f_0(z) \equiv 1$

$$\delta_0(f_0) = 1 = \|f_0\|_{F_{\alpha}^{p,q}}.$$

Следовательно, $\|\delta_0\|^* = 1$.

Теперь оценим $\|\delta_z\|^*$ при произвольном $z \in \mathbb{C}$ и $0 < q \leq 1$.

Как прежде, $f \in F_{\alpha}^{p,q}$. При фиксированном $z \in \mathbb{C}$ рассмотрим функцию $F(w) = f(z+w)e^{\frac{\alpha|z|^q}{q}}$.

Ясно, что $F(w)$ — целая функция. В соответствии с (3.2.2)

$$\begin{aligned} |F(0)|^p &\leq \|F\|_{F_{\alpha}^{p,q}}^p = \lambda_{\psi} \cdot \int_{\mathbb{C}} |F(w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}|w|^q} dA(w) = \\ &= \lambda_{\psi} \cdot \int_{\mathbb{C}} |f(z+w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}(|z|^q + |w|^q)} dA(w). \quad (*) \end{aligned}$$

Заметим, что при $0 < q \leq 1$ выполнено неравенство $|z|^q + |w|^q \geq |z+w|^q$, при всех $z, w \in \mathbb{C}$. Ясно, что при $z = 0$ или $w = 0$ оно очевидно. Поэтому его достаточно проверить для $|z| \geq |w| > 0$. Имеем

$$|z+w|^q = |z|^q \cdot \left|1 + \frac{w}{z}\right|^q \leq |z|^q \cdot \left(1 + \left|\frac{w}{z}\right|\right)^q.$$

В то же время,

$$(1+x)^q \leq 1+x^q, \quad |x| \leq 1 \quad (3.2.3)$$

Для левой части (3.2.3) справедливо разложение

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Тогда справедливо неравенство

$$(1+x)^q \leq 1+qx.$$

В то же время, $1 + qx \leq 1 + x^q$. В самом деле, положим $f(x) = x^q$ и $g(x) = qx$. Тогда

$$f(x) - g(x) = x^q - qx = x \cdot (x^{q-1} - q).$$

Так как $0 < q \leq 1$ и $0 < x \leq 1$, то $q - 1 \leq 0$. Следовательно, $x^{q-1} \geq 1$ и $x^{q-1} - q \geq 0$. Таким образом, $x^q \geq qx$ и $(1 + x)^q \leq 1 + x^q$.

Применив полученные неравенства, имеем $(1 + \frac{|w|}{|z|})^q \leq 1 + \frac{|w|^q}{|z|^q}$ и, следовательно,

$$|z + w|^q \leq |z|^q \cdot \left(1 + \frac{|w|^q}{|z|^q}\right) = |z|^q + |w|^q,$$

что и требовалось.

Теперь продолжим (*):

$$\begin{aligned} |F(0)|^p &\leq \lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} |f(z + w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}(|z|^q + |w|^q)} dA(w) \leq \\ &\leq \lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} |f(z + w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}|z + w|^q} dA(w) = \\ &= \lambda_\psi \cdot \int_{\mathbb{C}} |f(\xi)|^p e^{-\frac{\alpha p}{q}|\xi|^q} dA(\xi) = \|f\|_{F_\alpha^{p,q}}^p. \end{aligned}$$

Так как $F(0) = f(z)e^{-\frac{\alpha|z|^q}{q}}$, то отсюда следует, что

$$|f(z)|^p \leq e^{-\alpha p \frac{|z|^q}{q}} \cdot \|f\|_{F_\alpha^{p,q}}^p$$

или

$$|f(z)| \leq e^{-\alpha \frac{|z|^q}{q}} \|f\|_{F_\alpha^{p,q}}.$$

Значит, $\|\delta_z\|^* \leq e^{-\alpha \frac{|z|^q}{q}}$.

Итак, мы установили следующий результат.

Предложение 3.2.1. Пусть $0 < q \leq 1$. Тогда для $X = F_\alpha^{p,q}$

$$\|\delta_z\|^* \leq e^{-\alpha \frac{|z|^q}{q}} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}. \quad (3.2.4)$$

Как видно из наших рассуждений, для получения оценки (3.2.4) для пространства $F_\alpha^{p,q}$ мы существенно использовали специфическое неравенство $|z + w|^q \leq |z|^q + |w|^q$, $z, w \in \mathbb{C}$, верное только при $0 < q \leq 1$. Поэтому мы не можем распространить предлагаемую нами модификацию даже для случая $1 < q \leq 2$, хотя для $q = 2$, как отмечено выше, имеет место точная формула для норм дельта-функций. Ниже мы предлагаем совершенно

новый метод получения оценок этих норм, который незначительно теряет в точности, зато годится для весов общего вида.

Назовем вес ψ *слабо растущим в среднем*, если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$B_\psi(z) := \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \leq 1} \psi(z + \zeta) dA(\zeta) \leq \psi(z) + C \text{ для всех } z \in \mathbb{C}. \quad (3.2.5)$$

Обозначим через Ψ_0 класс весов, удовлетворяющих (3.2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Наибольший интерес представляют те веса, которые являются субгармоническими в \mathbb{C} функциями. Для них всегда

$$\psi(z) \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \leq 1} \psi(z + \zeta) dA(\zeta) \text{ при всех } z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому субгармонические веса из Ψ_0 естественно называть почти гармоническими.

В силу того, что для субгармонических функций ψ интегральное среднее по кругу не превосходит интегрального среднего по границе круга, принадлежность ψ к Ψ_0 следует из условия

$$\exists C > 0 : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z + e^{i\theta}) d\theta \leq \psi(z) + C \text{ при всех } z \in \mathbb{C}, \quad (3.2.6)$$

которое иногда проще проверять, чем (3.2.5).

Лемма 3.2.2. *Для любого веса $\psi \in \Psi_0$ и пространства $X = F_p^\psi$ существует $A > 0$:*

$$\|\delta_z\|^* \leq A e^{\frac{\psi(z)}{p}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 из работы [1] для любой функции $f \in F_p^\psi$ при каждом $z \in \mathbb{C}$

$$\ln |f(z)| \leq \frac{1}{p} B_\psi(z) + \ln \|f\|_{p,\psi} + \frac{1}{p} \ln \frac{1}{\pi}.$$

Учитывая, что $\psi \in \Psi_0$, получаем отсюда, что

$$\ln |f(z)| \leq \frac{1}{p} \psi(z) + \ln \|f\|_{p,\psi} + C + \frac{1}{p} \ln \frac{1}{\pi}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

где C — постоянная из условия (3.2.6). Тогда для f с $\|f\|_{p,\psi} \leq 1$ имеем $|f(z)| \leq A e^{\frac{\psi(z)}{p}}$, где $A = \frac{1}{\pi^p} \cdot e^C$, откуда следует требуемое. \square

Рассмотрим радиальные веса вида $\psi(z) = \gamma |z|^q$, где $\gamma > 0$, $q > 0$. Заметим, что они являются субгармоническими в \mathbb{C} функциями. Для них справедлива

Лемма 3.2.3. Веса $\psi(z) = \gamma|z|^q$ при всех $\gamma > 0$ и $0 < q \leq 2$ являются почти гармоническими.

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть веса $\psi(z) = |z|^q$, $0 < q \leq 2$, и в силу их радиальности проверить условие (3.2.6) для $z = x \geq 0$.

Рассмотрим интеграл из неравенства (3.2.6) при $x > 0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta = \\ & \int_{-\pi}^{\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta = \\ & \int_{-\pi}^0 |x + e^{i\theta}|^q d\theta + \int_0^{\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta = \\ & - \int_0^{-\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta + \int_0^{\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta = \end{aligned}$$

Делаем замену $\theta = -\theta$, соответственно верхний предел интегрирования в первом интеграле изменяется на π .

$$\begin{aligned} & = \\ & \int_0^{\pi} |x + e^{-i\theta}|^q d\theta + \int_0^{\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta = \\ & \int_0^{\pi} (|x + e^{i\theta}|^q + |x + e^{-i\theta}|^q) d\theta = \\ & \int_0^{\pi} (|x + \cos \theta + i \sin \theta|^q + |x + \cos \theta - i \sin \theta|^q) d\theta = \\ & \int_0^{\pi} ([(x + \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2]^{\frac{q}{2}} + [(x + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2]^{\frac{q}{2}}) d\theta = \\ & 2 \cdot \int_0^{\pi} ([(x + \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2]^{\frac{q}{2}}) d\theta = \\ & 2 \cdot \int_0^{\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta = \\ & 2 \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x + e^{i\theta}|^q d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta \right) = \end{aligned}$$

Делаем замену $\theta = \theta + \pi$ и учитываем, что $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |x + e^{i\theta}|^q d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x + e^{i\theta}|^q d\theta$ в силу приведенных выше рассуждений (замены $\theta = \theta + \pi$ во втором интеграле и последующего

применения формулы Эйлера).

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &2 \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x + e^{i\theta}|^q d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x + e^{i(\theta+\pi)}|^q d\theta \right) = \\
 &2 \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x + e^{i\theta}|^q d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x + e^{i\theta} \cdot e^{\pi i}|^q d\theta \right) = \\
 &2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (|x + e^{i\theta}|^q + |x - e^{i\theta}|^q) d\theta = \\
 &2 \cdot |x|^q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left| 1 + \frac{e^{i\theta}}{x} \right|^q + \left| 1 - \frac{e^{i\theta}}{x} \right|^q \right) d\theta.
 \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в случае, когда $x \geq 1 + \sqrt{2}$ и $0 < q \leq 2$.

$$\begin{aligned}
 \left| 1 + \frac{e^{i\theta}}{x} \right|^q &= \left(\left| 1 + \frac{e^{i\theta}}{x} \right|^2 \right)^{\frac{q}{2}} = \left(\left| 1 + \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{x} \right|^2 \right)^{\frac{q}{2}} = \\
 &= \left(\left[\left(1 + \frac{\cos \theta}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{q}{2}} = \\
 &= \left(\left(1 + \frac{\cos \theta}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{x} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}} = \\
 &= \left(1 + 2 \cdot \frac{\cos \theta}{x} + \frac{\cos^2 \theta}{x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{x^2} \right)^{\frac{q}{2}} = \\
 &= \left(1 + \frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2} \right)^{\frac{q}{2}} \leq
 \end{aligned}$$

Покажем, что справедливо неравенство $\left| \frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2} \right| < 1$, так как

$$-1 < \frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2} < 1$$

Рассмотрим правую часть данного неравенства

$$\begin{aligned}
 2x \cdot \cos \theta + 1 &< x^2 \\
 x^2 - 2x \cdot \cos \theta - 1 &> 0
 \end{aligned}$$

Составим соответствующее уравнение и решим его.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x \cdot \cos \theta - 1 &= 0 \\
 a = 1, \quad k &= -\cos \theta, \quad c = -1 \\
 D = k^2 - ac &= \cos^2 \theta + 1 \\
 x_1 = \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 1} \\
 x_2 = \cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta + 1}
 \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство $|\frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2}| < 1$, выполнено в случае $x \geq \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 1}$ (так как по условию $x > 0$). Соответственно данное неравенство будет выполняться при $x \geq 1 + \sqrt{1+1} = 1 + \sqrt{2}$. Значит $\frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2} < 1$ и допустимо применение формулы Тейлора

$$\leq 1 + \frac{q}{2} \cdot \frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2},$$

Оценим второе слагаемое при $x > 0$

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q &= \left(\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^2\right)^{\frac{q}{2}} = \left(\left|1 - \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{x}\right|^2\right)^{\frac{q}{2}} = \\ &= \left(\left[\left(1 - \frac{\cos \theta}{x}\right)^2 + \left(-\frac{\sin \theta}{x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{q}{2}} = \\ &= \left(\left(1 - \frac{\cos \theta}{x}\right)^2 + \left(-\frac{\sin \theta}{x}\right)^2\right)^{\frac{q}{2}} = \\ &= \left(1 - 2 \cdot \frac{\cos \theta}{x} + \frac{\cos^2 \theta}{x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{x^2}\right)^{\frac{q}{2}} = \\ &= \left(1 - \frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2}\right)^{\frac{q}{2}} \leq 1 - \frac{q}{2} \cdot \frac{2x \cdot \cos \theta - 1}{x^2}, \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q + \left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q &\leq \\ 1 + \frac{q}{2} \cdot \frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2} + 1 - \frac{q}{2} \cdot \frac{2x \cdot \cos \theta - 1}{x^2} &\leq \\ 2 + \frac{q}{2} \cdot \frac{2x \cdot \cos \theta + 1}{x^2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{2x \cdot \cos \theta - 1}{x^2} &\leq \\ 2 + \frac{q}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{2x - 1}{x^2} &\leq \\ 2 + \frac{q}{2} \cdot \frac{3}{x^2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{x^2} &\leq 2 + \frac{q}{x^2} \end{aligned}$$

Применив эту оценку, получим при $x \geq 1 + \sqrt{2}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x + e^{i\theta}|^q d\theta \leq 2|x|^q \cdot \left(2 + \frac{q}{x^2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \leq \pi \cdot |x|^q \left(2 + \frac{q}{x^2}\right)$$

Отсюда следует, что при $x \geq 1 + \sqrt{2}$ и $0 < q \leq 2$

$$B_{\psi}(x) \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot |x|^q \left(2 + \frac{q}{x^2}\right) = \frac{x^q}{2} \left(2 + \frac{q}{x^2}\right) = x^q + \frac{q}{2} x^{q-2} \leq \psi(x) + \frac{q}{2}.$$

Заметив еще, что при $0 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$ имеем: $B_{\psi}(x) \leq (2 + \sqrt{2})^q$. Положив теперь $C := (2 + \sqrt{2})^q$, получим окончательно, что

$$B_{\psi}(x) \leq \psi(x) + C, \quad \forall x \geq 0,$$

и доказательство закончено. □

Из лемм 3.2.2 и 3.2.3 следует такой результат.

Лемма 3.2.4. *Для любого пространства $X = F_\alpha^{p,q}$ с $0 < q \leq 2$ имеем*

$$\|\delta_z\|^* \leq Ae^{\frac{\alpha|z|^q}{q}} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}, \quad (3.2.7)$$

где A — некоторая постоянная.

Как уже отмечалось выше, при $q = 2$ в (3.2.7) при $A = 1$ имеет место знак равенства, а при $0 < q \leq 1$ в качестве A можно взять $A = 1$. Нам неизвестно, выполняется ли оценка вида $\|\delta_z\|^* \geq ae^{\frac{\alpha|z|^q}{q}}$ при некотором $a > 0$ и всех $z \in \mathbb{C}$ для каких-либо $0 < q < 2$.

3.3 Критерии ограниченности операторов в пространствах Фока

Применим наши общие результаты Главы 1 и результаты предыдущего раздела к задаче о непрерывности классических операторов, действующих на пространствах Фока.

Из следствия 1.2.3 и леммы 3.2.2 непосредственным образом следует

Предложение 3.3.1. *Пусть ψ — вес из Ψ_0 , v — произвольный вес в \mathbb{C} , и u и φ — фиксированные целые функции. Если*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|u(z)| e^{\frac{\psi(\varphi(z))}{p}}}{v(z)} < \infty,$$

то оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : F_p^\psi \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ ограничен.

Из предложения 3.3.1 и леммы 3.2.4 получаем такой результат.

Предложение 3.3.2. *Пусть v — произвольный вес в \mathbb{C} , и u и φ — целые функции, $\alpha > 0$, $p \in [1, \infty)$ и $0 < q \leq 2$. Для того чтобы оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : F_\alpha^{p,q} \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ был ограничен, достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|u(z)| e^{\alpha \frac{|\varphi(z)|^q}{p}}}{v(z)} < \infty.$$

Теперь мы займемся вопросом о непрерывности оператора Вольтерра в пространствах Фока и покажем, что для достаточно широкого класса весов ψ , введенного в работе [13], для соответствующих пространств F_p^ψ имеют место аналоги результатов, установленных в случае круга.

Условимся о следующем обозначении. Пусть E, F — две вещественнозначные функции, заданные на множестве D произвольной природы. Будем писать, что $E(x) \simeq F(x)$, $x \in D$, если существуют такие положительные постоянные c и C , что $cE(x) \leq F(x) \leq CE(x)$ для всех $x \in D$.

Обозначим через T семейство всех дифференцируемых функций $\tau : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\lim_{r \rightarrow \infty} \tau(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \tau'(r) = 0$;

(b) Либо при некотором $C > 0$ функция $\tau(r) r^C$ возрастает, либо

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tau'(r) \ln \frac{1}{\tau(r)} = 0.$$

Пусть, далее, $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — возрастающая функция класса C^2 на $[0, \infty)$. Положим $\psi(z) = \psi(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, и предположим, что ее лапласиан $\Delta\psi$ положителен в \mathbb{C} и, более того, что существует такая функция $\tau \in T$, что $(\Delta\psi(z))^{-\frac{1}{2}} \simeq \tau(|z|)$, $|z| \geq 1$. Следуя [13], обозначим символом \mathcal{I} класс всех функций ψ , обладающих указанными свойствами. В [13] отмечено, что в этот класс входят следующие функции: r^α , $\alpha > 2$; $e^{\beta r}$, $\beta > 0$; e^{e^r} .

Следующая лемма вытекает из [11, следствие 3.3] (см. также [19, лемма 2.1]).

Лемма 3.3.3. *Предположим, что $\psi \in \mathcal{I}$, и положим $\phi(r) := \psi(r) + \ln(1 + \psi'(r))$, $r \in [0, \infty)$. Целая функция f принадлежит пространству F_∞^ψ в том и только в том случае, когда f' принадлежит пространству F_∞^ϕ . При этом*

$$\|f\|_{F_\infty^\psi} \simeq |f(0)| + \|f'\|_{F_\infty^\phi}, \quad f \in F_\infty^\psi.$$

С помощью этой леммы аналогично следствию 1.2.14 доказывается

Лемма 3.3.4. *Пусть ψ и ϕ — те же весовые функции, что и в лемме 5. Тогда оператор дифференцирования $D : f \mapsto f'$ является изоморфизмом из $F_{\infty,0}^\psi$ на F_∞^ϕ , где $F_{\infty,0}^\psi := \{f \in F_\infty^\psi : f(0) = 0\}$.*

Из предложения 1.3.6 и леммы 3.3.4 следует непосредственно

Предложение 3.3.5. *Пусть $\psi \in \mathcal{I}$. Оператор Вольтерры $T_g : X \rightarrow F_\infty^\psi$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|g(z)| \|\delta_z\|^*}{(1 + \psi'(|z|)) e^{\psi(z)}} < \infty.$$

Заметим, что предложение 3.3.5 в качестве частных случаев содержит результаты работы [19] об ограниченности оператора Вольтерра $V_g : F_p^\psi \rightarrow F_\infty^\psi$ для $\psi \in \mathcal{I}$ и $0 < p \leq \infty$. Из него также можно легко получить аналогичные критерии ограниченности для $V_g : F_p^{\psi_1} \rightarrow F_\infty^{\psi_2}$ в случае двух весов ψ_1 и ψ_2 из \mathcal{I} . Более того, полученные в данном разделе результаты позволяют исследовать и ситуацию, когда ψ_1 не обязательно содержится в \mathcal{I} . Именно, легко убедиться, что при $0 < q \leq 2$ вес $\frac{\alpha p}{q} |z|^q$ не входит в класс \mathcal{I} и к нему неприменимы результаты из [13],[19]. Однако, предложение 3.3.5 и лемма 3.2.4 влекут такой результат.

Предложение 3.3.6. Пусть $\psi \in \mathcal{I}$, $\alpha > 0, p \in [1, \infty)$ и $0 < q \leq 2$. Для того чтобы оператор Вольтерра $V_g : F_\alpha^{p,q} \rightarrow F_\infty^\psi$ был ограничен достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|g'(z)| e^{\frac{\alpha}{q} |z|^q - \psi(z)}}{1 + \psi'(|z|)} < \infty.$$

Заключение

В работе рассмотрена задача о непрерывности классических операторов в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций. Установлен критерий корректной определённости и ограниченности произвольного линейного оператора, который является обобщением результата Н.Зорбоска [22] на случай произвольной области G и любого, не обязательно радиального, веса v и квазибанаховых пространств вместо банаховых, как в [22]. На его основании получены результаты о непрерывности операторов весовой композиции и Вольтерра на весовых пространствах Бергмана, Харди и Фока. Также получены формулы для вычисления нормы оператора Вольтерра в пространствах Бергмана и Харди. Кроме того, показано, что результаты, полученные в данном направлении, применимы к ранее не исследовавшемуся случаю пространств целых функций — классическому пространству Фока и пространству Фока обобщенного вида. Так для этих пространств были получены теоремы об ограниченности операторов весовой композиции и ограниченности оператора Вольтерра. Данные результаты позволили сформулировать приложения полученных результатов к пространствам $F_\alpha^{p,q}$ при $q \neq 2$.

Продолжением данной работы может быть получение критериев компактности и слабой компактности операторов весовой композиции и интегрального оператора Вольтерра на весовых пространствах Бергмана, Харди и Фока.

Литература

- [1] Баладай Р. А., Хабибуллин Б. Н. От интегральных оценок функций к равномерным и локально усредненным // Изв. вузов. Математика.—2017.—№ 10. — С. 15–25.
- [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Физматлит, 2004.—572 с.
- [3] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1.—М.: Лань, 2009.—496 с.
- [4] Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—258 с.
- [5] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных.—М.: Наука, 1971.—432 с.
- [6] Abanin A.V., Pham Trong Tien. Differentiation and integration operators on weighted spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—Vol. 290, № 8–9. — P. 1144–1162.
- [7] Aleman A., Siskakis A. G. An integral operator on H^p // Complex Var. Theory Appl.—1995.—Vol. 28 — P. 149–158.
- [8] Beltrán M. J., Bonet J., Fernández C. Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions // Proc. Amer. Math. Soc.—2013.—Vol. 141—4293174303.
- [9] Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J. Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math.—1998.—Vol. 127, № 2. — P. 137–168.
- [10] Bonet J. Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions // Math.Z.—2009.—Vol. 261 — P. 649–657.

- [11] Bonet J., Taskinen J. A note about Volterra operators on weighted Banach spaces of entire functions // *Math. Nachr.*—2015.—Vol. 288, № 11–12.— P. 1216–1225.
- [12] Constantin O. A Volterra – type integration operator on Fock spaces // *Proc. Amer. Math. Soc.*—2012.—Vol. 140 — P. 4247–4257.
- [13] Constantin O., Peláez J. A. Integral operators, embedding theorems and a Littlewood – Paley formula on weighted Fock spaces // *J. Geom. Anal.Soc.*—2016.—Vol. 26, No 2. — P. 1109–1154.
- [14] Contreras M., Hernández – Díaz A. G. Weighted composition operators in weighted Banach spaces of analytic functions // *J. Austral. Math. Soc.: Series A*—2000.—Vol. 69 — P. 41–60.
- [15] Cowen C. and MacCluer B. Composition operators on spaces of analytic functions // CRC Press Boca Raton — 1995.
- [16] Harutyunyan A., Lusky W. On the boundedness of the differentiation operator between weighted spaces of holomorphic functions // *Studia Math.*—2008.—Vol. 184.—P. 233–247.
- [17] Hoffman K. Banach spaces of analytic functions // Dover, New York—1988.
- [18] Jarchow H. Some functional analytic properties of composition operators // *Quaestiones Math.*—1995.—Vol. 18 — P. 229–256.
- [19] Mengestie T., Ueki S-I. Integral, Differential and multiplication operators on generalized Fock spaces // *Complex Anal. Oper. Theory*—2019.—Vol. 13, № 3.— P. 935–953.
- [20] Montes – Rodríguez A. Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions // *J. Lond. Math. Soc.*—2000.—Vol. 61, № 2. — P. 872–884.
- [21] Taskinen J. Compact composition operators on general weighted spaces // *Houston J. Math.*—2001.—Vol. 27 — P. 203–218
- [22] Zorboska N. Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // *Integr. Equ. Oper. Theory.*—2017.—Vol. 87, № 4. — P. 581–600.
- [23] Zhu K. Analysis on Fock spaces. Graduate texts in Mathematics, 263.— New York: Springer, 2012.—346 p.

[24] Zhu K. Operator theory in function spaces // Marcel Dekker, New York—1990.

Список научных трудов по теме выпускной квалификационной работы

[25] Абанин А. В., Кораблина Ю. В. Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций // Владикавказский математический журнал. —2020. — Том 22. — Выпуск 3. — С.5 —17.

[26] Кораблина Ю. В. О непрерывности классических операторов в весовых банаховых пространствах голоморфных функций // Тезисы докладов XV Владикавказской Молодёжной Математической Школы (г. Владикавказ, 20-25 сентября 2020 г.) – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2020.

[27] Кораблина Ю. В. О линейных непрерывных операторах из абстрактных банаховых пространств голоморфных функций в аналогичные пространства с равномерной нормой // Международная конференция "XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам"(КРОМШ-2019): сборник тезисов. Симферополь: ООО ФОРМА, 2019.

[28] Кораблина Ю. В. Непрерывные линейные операторы из абстрактных банаховых пространств голоморфных функций в аналогичные пространства с равномерной нормой // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV Международной научной конференции (с.Цей, 15-20 июля 2019г.). – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2019. —С.80 —81.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Костенко Екатерины Игоревны
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Исследование слабой разрешимости дробной модели Фойгта с бесконечной памятью» является: Теорема 3.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 07 октября по 12 ноября 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google по следующим ключевым словам: слабая разрешимость, дробная производная, нелинейно-вязкая жидкость в вылаче поисковиков было исследовано 11 статей, 2 монографии (список см. в Списке литературы в выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1-6], [12], [13] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

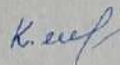
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Звягиным Виктором Григорьевичем, заведующим кафедрой алгебры и математических методов гидродинамики математического факультета Воронежского государственного университета.

- Проведена серия консультаций с профессором кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета Орловым Владимиром Петровичем.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 02.07.2021. На Смотр представлен окончательная работы.



Костенко Екатерина Игоревна
31 мая 2023 г. Воронеж, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Математический факультет

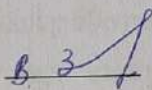
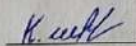
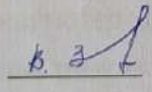
Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики

Исследование слабой разрешимости дробной модели Фойгта с
бесконечной памятью

Магистерская диссертация

Направление 01.04.01 Математика

Профиль Математические модели гидродинамики

Зав. кафедрой		д.ф.-м.н., проф.	В.Г. Звягин 30.06.2021 г.
Обучающийся			Е.И. Костенко
Руководитель		д.ф.-м.н., проф.	В.Г. Звягин

Воронеж 2021

Содержание

1	Исследование слабой разрешимости дробной модели Фойгта с бесконечной памятью	2
2	Вспомогательные сведения	2
3	Аппроксимационная задача	5
4	Предельный переход	21
	Список литературы	34

1 Исследование слабой разрешимости дробной модели Фойгта с бесконечной памятью

В $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T > 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается задача, описывающая движение нелинейно-вязкой жидкости

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \\ & - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ & + \nabla p = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad (2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)), \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (3)$$

$$v(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (t, x) \in \Gamma = (-\infty, T] \times \partial\Omega. \quad (4)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1, \dots, v_n)$ и $p(t, x)$ искомые скорость и давление рассматриваемой среды, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ тензор скоростей деформации, являющийся матрицей с элементами $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, $\mu_0 > 0, \mu_1 \geq 0$, $0 < \alpha < 1, \lambda > 0$, а $z(\tau; t, x)$ — решение задачи Коши, записанное в интегральной форме, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, то есть вектор, координатами которого являются дивергенции векторов - столбцов матрицы.

Наличие интегрального слагаемого в уравнении движения (1) отражает учёт памяти движения сплошной среды вдоль траектории поля скоростей.

В настоящее время создано большое количество работ, посвященных гидродинамическим задачам (см. [1]–[6]). Данная работа является продолжением литературы по данной тематике.

2 Вспомогательные сведения

Рассмотрим гильбертовы пространства V и H соленоидальных вектор-функций: $V = \{v \in W_2^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0, \operatorname{div} v(t, x) = 0\}$, H — замыкание V

в норме пространства $L_2(\Omega)$. Пусть V^{-1} — пространство, сопряженное к V .

Заметим, что $V \subset H \subset V^{-1}$.

Нормы в $L_2(-\infty, T; H)$ и $L_2(-\infty, T; L_2(\Omega))$ определим по формуле

$$\|v\|_{L_2(-\infty, T; H)} = \left(\int_{-\infty}^T \|v(t, \cdot)\|_H^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{L_2(-\infty, T; L_2(\Omega))} = \left(\int_{-\infty}^T \|v(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нормы в $L_2(-\infty, T; V)$ и $L_2(-\infty, T; W_2^1)$ определим по формуле

$$\|v\|_{L_2(-\infty, T; V)} = \left(\int_{-\infty}^T \|v(t, \cdot)\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{L_2(-\infty, T; W_2^1(\Omega))} = \left(\int_{-\infty}^T \|v(t, \cdot)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через (\cdot, \cdot) обозначается скалярное произведение, $\langle f, \varphi \rangle$ обозначает действие функционала $f \in V^{-1}$ на элемент $\varphi \in V$.

Далее будем использовать понятие регулярного лагранжева потока (см. [7]-[9]).

Определение 1. *Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v , называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *при н.в. x и любом $t \in [0, T]$ функция $\gamma(t) = z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению*

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T]; \quad (5)$$

2. *для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \bar{\Omega}$ с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$;*

3. *при всех $t_i \in [0, T], i = \overline{1, 3}$, и н.в. $x \in \bar{\Omega}$*

$$z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x)). \quad (6)$$

Приведем также следующие результаты о РЛП.

Теорема 1. Пусть $v \in L_1(0, T; W_p^1(\Omega))$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} v(t, x) = 0$ и $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z \in C(D; L)$, порожденный v и u

$$z(\tau; t, \bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} z(\tau; t, x) = v(\tau, z(\tau; t, x)), \quad \tau \in [0, T], x \in \Omega, \quad (7)$$

где $C(D, L)$ — банахово пространство непрерывных функций на $D = [0, T] \times [0, T]$ со значениями в L — метрическом пространстве измеримых на Ω вектор-функций.

Теорема 2. Пусть $v, v^m \in L_1(0, T; W_1^p(\Omega))$, $m = 1, 2, \dots$, при некотором $p > 1$. Пусть $\operatorname{div} v(t, x) = 0$, $\operatorname{div} v^m(t, x) = 0$, $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = v^m|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Пусть выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|v_x\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} &\leq C_1, \\ \|v_x^m\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v^m\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} &\leq C_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть v^m сходится к v в $L_1(Q_T)$ при $m \rightarrow +\infty$. Пусть $z(\tau; t, x)$ и $z^m(\tau; t, x)$ — РЛП, порожденные v и v^m соответственно. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega$ при $t \in [0, T]$.

Здесь v_x — матрица Якоби вектор-функции v .

Таким образом, в силу теоремы 1 для каждого $v \in L_2(0, T; V)$ и для почти всех $x \in \Omega$ уравнение (3) имеет единственное решение $z(v)$.

Введем следующие функциональные пространства:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V) \cap L_\infty(-\infty, T; H), \\ v' \in L_2(-\infty, T; V^{-1})\}, n = 2;$$

$$W_2 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V) \cap L_\infty(-\infty, T; H), \\ v' \in L_{4/3, loc}(-\infty, T; V^{-1})\}, n = 3.$$

Здесь $L_{4/3, loc}(-\infty, T; V^{-1})$ пространство, состоящее из функций v , определённых почти всюду на $(-\infty, T]$ и принимающих значение в V^{-1} , сужение которых на любой отрезок $[r, T] \in (-\infty, T]$ принадлежит $L_{4/3}(r, T; V^{-1})$. Пусть $W = W_1$ при $n = 2$ и $W = W_2$ при $n = 3$.

Определение 2. Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Слабым решением задачи (1)–(4) называется функция $v \in W$, удовлетворяющая тождеству при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in (-\infty, T]$

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \\ + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

где z -РЛП, порожденный v .

3 Аппроксимационная задача

Теорема 3. Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда задача (1)–(4) имеет по крайней мере одно слабое решение.

Рассмотрим семейство вспомогательных начально–граничных задач, зависящих от $m = 1, 2, \dots$, ($0 \leq \xi \leq 1$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^m}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i^m}{(1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial v^m}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v^m - \right. \\ \left. \mu_1 \frac{\xi}{\Gamma(1-\alpha)} \text{Div} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) ds + \nabla p^m = \xi f^m, \right. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{div } v^m(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_m; \quad (11)$$

$$z^m(\tau; t, x) = x + \int_t^{\tau} \tilde{v}^m(s, z^m(s; t, x)), \quad t, \tau \in [-m, T], x \in \Omega; \quad (12)$$

$$v^m(t, x) |_{\Gamma} = 0, (t, x) \in \Gamma_m = [-m, T] \times \partial\Omega, \quad v^m(-m, x) = 0, x \in \Omega, \quad (13)$$

где f^m -сужение f на $[-m, T] \times \Omega$.

Через \tilde{v}^m в (12) обозначается сглаживание v^m .

Регуляризация (сглаживание) скорости в (12) вызвана тем, что исследование задачи Коши (12) для $v^m \in W$ затруднено, так как в этом случае поле скоростей не определяет траектории движения частиц. Одним из выходов из данной ситуации является регуляризация (сглаживание) $\tilde{v}^m = S_{1/\varepsilon} v^m$ поля скоростей $v^m \in W$ с помощью оператора регуляризации $S_{1/\varepsilon} : H \rightarrow C^1(\bar{\Omega})$ и определение траектории z^m для сглаженного поля скоростей \tilde{v}^m .

Нам будет удобнее использовать оператор регуляризации $S_{1/\varepsilon}$ (см. [10], Section 7.2).

Рассмотрим свойства оператора регуляризации.

Лемма 1. Для оператора регуляризации $S_{1/\varepsilon}$ справедливы следующие свойства

1. Справедливы неравенства

$$\|S_{1/\varepsilon}\|_{H \rightarrow H} \leq C_3, \quad \|S_{1/\varepsilon}\|_{H \rightarrow C^1(\bar{\Omega})} \leq C_3, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$2. |S_{1/\varepsilon} v - v|_{L_2(-\infty, T; L_2(\Omega))} \rightarrow 0 \quad (15)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого $v \in H$

Введем следующие функциональные пространства

$$W(m) = \{v : v \in L_2(-m, T; V) \cap L_\infty(-m, T; H), v' \in L_{4/3}(-m, T; V^{-1})\}.$$

Определение 3. Пусть $f^m \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Слабым решением задачи (10)–(13) называется функция $v^m \in W(m)$, удовлетворяющая тождеству

$$\begin{aligned} \langle v^{m'} , \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla(v^m) : \nabla(\varphi) dx + \\ \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi) ds dx = \xi \langle f^m , \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [-m, T]$, и начальному условию $v^m(-m, \cdot) = 0$. Здесь z^m — РЛП, порожденный v^m .

Введём операторы:

$$\begin{aligned}
 J : V &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv^m, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v^m \varphi \, dx, \quad v^m \in V, \quad \varphi \in V; \\
 A : V &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av^m, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi \, dx, \quad v^m \in V, \quad \varphi \in V; \\
 B : V^1 &\times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow V^{-1}, \\
 (B(v^m, z^m)(t), \varphi) &= \left(\int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right), \\
 v^m &\in V, \quad z^m \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}, \quad \varphi \in V; \\
 K_{\varepsilon} : V &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle K_{\varepsilon}(v^m), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx, \\
 v^m &\in V, \quad \varphi \in V
 \end{aligned}$$

Получаем:

$$J(v^m)' + \mu_0 Av^m + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m) - K_{\varepsilon}(v^m) = f \quad (17)$$

Лемма 2. 1) Для любого $v^m \in L_2(-m, T; V)$ функция Av^m принадлежит $L_2(-m, T; V^{-1})$, оператор $A : L_2([-m, T]; V) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ непрерывен и справедливы оценки:

$$\|Av^m\|_{V^{-1}} \leq \|v^m\|_V; \quad \|Av^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq \|v^m\|_{L_2(-m, T; V)}. \quad (18)$$

2) Для любой $v^m \in V$ оператор $(\mu_0 A + J) : V \rightarrow V^{-1}$ — линейен непрерывен и обратим и для него справедлива оценка:

$$\mu_0 \|v^m\|_V \leq \|(\mu_0 A + J)v^m\|_{V^{-1}} \leq C_4 \|v^m\|_V. \quad (19)$$

Обратный оператор $(\mu_0 A + J)^{-1} : V^{-1} \rightarrow V$ — непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|(\mu_0 A + J)^{-1} f\|_V \leq \frac{1}{\mu_0} \|f\|_{V^{-1}}. \quad (20)$$

3) Для любой $v^m \in L_p([-m, T]; V)$, $1 \leq p < \infty$ функция $(\mu_0 A + J)v^m \in L_p([-m, T]; V^{-1})$ и оператор $(\mu_0 A + J) : L_p([-m, T]; V) \rightarrow$

$L_p([-m, T]; V^{-1})$ — непрерывен и обратим и для него справедлива оценка:

$$\mu_0 \|v^m\|_{L_p(-m, T; V)} \leq \|(\mu_0 A + J)v^m\|_{L_p(-m, T; V^{-1})} \leq C \|v^m\|_{L_p(-m, T; V)}. \quad (21)$$

Обратный оператор $(\mu_0 A + J)^{-1} : L_p([-m, T]; V^{-1}) \rightarrow L_p([-m, T]; V)$ — непрерывен и для любой $\omega \in L_p([-m, T]; V)$ имеет место оценка:

$$\|(\mu_0 A + J)^{-1}\omega\|_{L_p(-m, T; V)} \leq \frac{1}{\mu_0} \|\omega\|_{L_p(-m, T; V^{-1})}. \quad (22)$$

Доказательство. 1) В силу линейности A , для доказательства его непрерывности достаточно доказать его ограниченность. Имеем

$$|\langle Av^m, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi \, dx \right| = |(v^m, \varphi)| \leq \|v^m\|_V \|\varphi\|_V.$$

Следовательно $\|Av^m\|_{V^{-1}} \leq \|v^m\|_V$. Таким образом, $A : V \rightarrow V^{-1}$. При почти всех $t \in [-m, T]$ имеем оценку:

$$\|Av^m\|_{V^{-1}} \leq \|v^m\|_V$$

Возводя последнюю оценку в степень 2 и интегрируя по t , получим:

$$\int_{-m}^T \|Av^m\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \int_{-m}^T \|v^m\|_V^2 dt.$$

Так как $\|v^m\|_V \in L_2(-m, T)$, то $\|Av^m\|_{V^{-1}} \in L_2(-m, T)$. Следовательно Av^m принадлежит $L_2(-m, T; V^{-1})$. Извлекая корень второй степени из оценки выше, получаем:

$$\|Av^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq \|v^m\|_{L_2(-m, T; V)}$$

Оператор линеен и ограничен, а, следовательно, непрерывен.

2) Оператор $\mu_0 A + J$ линеен как сумма двух линейных операторов. Непрерывен из V в V^{-1} как сумма двух непрерывных операторов.

$$\begin{aligned} \|(\mu_0 A + J)v^m\|_V &= \sup_{\varphi \in V/\{0\}} \frac{|\langle (\mu_0 A + J)v^m, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_V} = \\ &= \sup_{\varphi \in V/\{0\}} \frac{|\mu_0 \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} v^m \varphi \, dx|}{\|\varphi\|_V} = \\ &= \sup_{\varphi \in V/\{0\}} \frac{\mu_0 \|v^m\|_V \|\varphi\|_V + \|v^m\|_H \|\varphi\|_H}{\|\varphi\|_V} = C_4 \|v^m\|_V \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались $\|v^m\|_H \leq C_4 \|v^m\|_V$.

Оператор линеен и ограничен, а, следовательно, непрерывен.

Пусть $v^m \in V$, тогда для любого $\varphi \in V$ в силу определения операторов A и J имеем:

$$\begin{aligned} \langle (\mu_0 A + J)v^m, \varphi \rangle &= \mu_0 \langle Av^m, \varphi \rangle + \langle Jv^m, \varphi \rangle \\ &= \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} v^m \varphi \, dx = \mu_0 (v^m, \varphi)_V + (v^m, \varphi)_V. \end{aligned}$$

Полагая $\varphi = v^m$, получаем:

$$\mu_0 \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla v^m \, dx + \int_{\Omega} v^m v^m \, dx = \mu_0 \|v^m\|_V^2 + \|v^m\|_H^2 \geq \mu_0 \|v^m\|_V^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\|v^m\|_H^2 \geq 0$. С другой стороны

$$\langle (\mu_0 A + J)v^m, v^m \rangle \leq \|(\mu_0 A + J)v^m\|_{V^{-1}} \|v^m\|_V.$$

Таким образом, $\mu_0 \|v^m\|_V^2 \leq \|(\mu_0 A + J)v^m\|_{V^{-1}} \|v^m\|_V$.

Покажем, что $\mu_0 A + J$ обратим как оператор из V в V^{-1} . Покажем, что $(\mu_0 A + J) : V \rightarrow V^{-1}$ непрерывная билинейная форма.

$$a(v^m, u) = \langle (\mu_0 + J)v^m, u \rangle$$

коэрцитивна.

Для любого $v^m \in V$ имеем, что

$$a(v^m, v^m) = \langle (\mu_0 + J)v^m, v^m \rangle = \mu_0 \|v^m\|_V^2 + \|v^m\|_H^2 \geq \mu_0 \|v^m\|_V^2.$$

Для любого $h \in V^{-1}$, для любого $u \in V$ существует единственный элемент $\omega \in V$ такой, что

$$\langle (\mu_0 + J)\omega, u \rangle = a(\omega, u) = \langle h, u \rangle.$$

В силу произвольности $u \in V$ это эквивалентно тому, что для любого $h \in V^{-1}$ существует единственный элемент $\omega \in V$ такой, что

$$(\mu_0 A + J)\omega = h.$$

Получаем, что оператор $(\mu_0 A + J) : V \rightarrow V^{-1}$ является линейным, непрерывным, и взаимно однозначным, а, следовательно, и непрерывно обратимым.

Для любого $f \in V^{-1}$ имеем

$$\mu_0 \|(\mu_0 A + J)^{-1} f\|_V \leq \|f\|_{V^{-1}}$$

Откуда следует оценка (20).

3) Оператор $\mu_0 A + J$ линеен как сумма двух линейных операторов. Непрерывен из V в V^{-1} как сумма двух непрерывных операторов.

Пусть $v^m \in V$, тогда для любого $\varphi \in V$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle (\mu_0 A + J)v^m, \varphi \rangle &= \mu_0 \langle Av^m, \varphi \rangle + \langle Jv^m, \varphi \rangle = \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi \, dx + \\ &\int_{\Omega} v^m \varphi \, dx = \mu_0 (v^m, \varphi)_V + (v^m, \varphi)_V. \end{aligned}$$

Полагая $\varphi = v^m$, получаем:

$$\mu_0 \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla v^m \, dx + \int_{\Omega} v^m v^m \, dx = \mu_0 \|v^m\|_V^2 + \|v^m\|_H^2 \geq \mu_0 \|v^m\|_V^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\|v^m\|_H^2 \geq 0$. С другой стороны

$$\langle (\mu_0 A + J)v^m, v^m \rangle \leq \|(\mu_0 A + J)v^m\|_{V^{-1}} \|v^m\|_V.$$

Таким образом, $\mu_0 \|v^m\|_V^2 \leq \|(\mu_0 A + J)v^m\|_{V^{-1}} \|v^m\|_V$

$$\begin{aligned} \|(\mu_0 A + J)v^m\|_{V^{-1}} &= \sup_{\varphi \in V/\{0\}} \frac{|\langle (\mu_0 A + J)v^m, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_V} \leq \\ &\sup_{\varphi \in V/\{0\}} \frac{\mu_0 \|v^m\|_V \|\varphi\|_V + \|v^m\|_H \|\varphi\|_H}{\|\varphi\|_V} \leq \\ &\sup_{\varphi \in V/\{0\}} \frac{\mu_0 \|v^m\|_V \|\varphi\|_V + C_4^2 \|v^m\|_V \|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = C_5 \|v^m\|_V. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались $\|v^m\|_H \leq C_4 \|v^m\|_V$. Возведём эту оценку в p -ую степень, проинтегрируем по t . Получаем:

$$\int_{-m}^T \|(\mu_0 A + J)v^m\|_{V^{-1}}^p \, dt \leq C_5^p \int_{-m}^T \|v^m\|_V^p \, dt < \infty.$$

Следовательно,

$$(\mu_0 A + J)v^m \in L_p([-m, T]; V^{-1})$$

и

$$\|(\mu_0 A + J)v^m\|_{L_p(-m, T; V^{-1})} \leq C_5 \|v^m\|_{L_p(-m, T; V)}.$$

Покажем обратимость. Сначала докажем, что множество значений совпадает со всем $L_p(-m, T; V^{-1})$. Для этого покажем, что для любого $u \in L_p([-m, T]; V^{-1})$ уравнение $(\mu_0 A + J)v^m = u$ имеет решение $v^m \in L_p([-m, T]; V)$. В силу того, что оператор $(\mu_0 A + J) : V \rightarrow V^{-1}$ обратим, мы имеем, что при почти всех $t \in [-m, T]$ уравнение $(\mu_0 A + J)v^m = u$ имеет решение $v^m(t) = (\mu_0 A + J)^{-1}u(t)$.

Мы имеем:

$$\mu_0 \|v^m(t)\|_V \leq \|(\mu_0 A + J)v^m(t)\|_{V^{-1}} = \|u(t)\|_{V^{-1}}.$$

Поскольку $u \in L_p([-m, T]; V^{-1})$, то следует, что $v^m \in L_p([-m, T]; V)$. Возведя это неравенство в p -ую степень и интегрируя его по отрезку $[-m, T]$, получим оценку:

$$\mu_0 \|v^m(t)\|_{L_p(-m, T; V)} \leq \|(\mu_0 A + J)v^m(t)\|_{L_p(-m, T; V^{-1})};$$

$$\text{Ker}(\mu_0 A + J) = \{0\}.$$

В итоге получим, что $(\mu_0 A + J)$ обратим.

Для любого $\omega \in L_p([-m, T]; V^{-1})$ при почти всех $t \in [-m, T]$ имеем $\mu_0 \|(\mu_0 A + J)^{-1}\omega\|_V \leq \|\omega\|_{V^{-1}}$. Следовательно, $\|(\mu_0 A + J)^{-1}\omega\|_V \leq \frac{1}{\mu_0} \|\omega\|_{V^{-1}}$. Возведя эту оценку в p -ую степень проинтегрируем по t . Получаем:

$$\|(\mu_0 A + J)^{-1}\omega\|_{L_p(-m, T; V)} \leq \frac{1}{\mu_0} \|\omega\|_{L_p(-m, T; V^{-1})}.$$

А, следовательно, оператор непрерывен. \square

Лемма 3. Для любого $v^m \in L_2(-m, T; V)$, $z^m \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}$, и выполнено $B(v^m, z^m) \in L_2(-m, T; V^{-1})$ и отображение $B : L_2(-m, T; V) \times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ — непрерывно и ограничено. Кроме того для любого фиксированного $z^m \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}$, для любых $u, v^m \in L_2(-m, T; V)$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} & \|B(v^m, z^m) - B(u, z^m)\|_{k, L_2(-m, T; V^{-1})} \\ & \leq C_6 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}} \|v^m - u\|_{k, L_2(-m, T; V)} \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство. Докажем первую часть нашего утверждения (см. [12], Лемма 2.2). Рассмотрим

$$(B(v, z)(t), \varphi) = \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right).$$

Достаточно установить действие, непрерывность и ограниченность отображения $C : (v, z) \rightarrow \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds$ из пространства $L_2(0, T; V^1) \times [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ в пространство $L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Данное отображение представляет собой суперпозицию интегрального оператора и отображения $\Phi : (v, z) \rightarrow \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))$ из пространства $L_2(0, T; V^1) \times [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ в пространство $L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))$. Для любого фиксированного $z \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T \|\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) - \mathcal{E}(u)(s, z(s; t, x))\|_{L_2(\Omega)}^2 ds dt = \\ & \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{E}^2(v - u)(s, z(s; t, x)) dx ds dt = \\ & T \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{E}^2(v - u)(s, z) dz ds = T \int_0^T \|\mathcal{E}(v - u)(s, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds = \\ & T \|v - u\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что замена переменной x на $z = z(s; t, x)$ при фиксированных s, t не изменяет норму, следовательно, Φ непрерывно по v , равномерно относительно z . Достаточно теперь установить непрерывность Φ по z при фиксированном значении v . Пусть z_l – произвольная последовательность из $[0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$, $z_l \rightarrow z_0 \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ в норме пространства $C([0, T] \times [0, T], C(\bar{\Omega}))$, $\psi > 0$ – произвольное число. Так как $C(Q_T)$ плотно в $L_2(Q_T)$, то существует ξ – непрерывная $\frac{\psi}{3\sqrt{T}}$ – аппроксимация

функции $\mathcal{E}(v)$, то есть $\|\mathcal{E}(v) - \xi\| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{T}}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{E}(v)(s, z_l(s; t, x)) - \mathcal{E}(v)(s, z_0(s; t, x))\|_{L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))} \leq \\ & \|\mathcal{E}(v)(s, z_l(s; t, x)) - \xi(s, z_l(s; t, x))\|_{L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))} + \\ & \|\xi(s, z_l(s; t, x)) - \xi(s, z_0(s; t, x))\|_{L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))} + \\ & \|\mathcal{E}(v)(s, z_0(s; t, x)) - \xi(s, z_0(s; t, x))\|_{L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, Φ непрерывно по z , следовательно C ограничено, следовательно, B непрерывно и ограничено.

Докажем необходимую оценку (23).

Пусть $\bar{v}^m(t) = e^{-kt}v^m(t)$, $\bar{u}(t) = e^{-kt}u(t)$. Для любого $\varphi \in L_2(-m, T, V)$ имеем:

$$\begin{aligned} & \langle e^{-kt}B(v^m, z^m)(t) - e^{-kt}B(u, z^m)(t), \varphi(t) \rangle = \\ & \int_{-m}^T \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}_{ij}(\bar{v}^m - \bar{u})(s, z^m(s; t, x)) ds \mathcal{E}_{ij}(\varphi)(t) dx dt. \end{aligned}$$

Тогда с помощью неравенства Гёлдера:

$$\begin{aligned} & \langle e^{-kt}B(v^m, z^m)(t) - e^{-kt}B(u, z^m)(t), \varphi(t) \rangle \leq \\ & \int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}^2(\bar{v}^m - \bar{u})(s, z^m(s; t, x)) dx \right)^{1/2} \times \\ & \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}^2(\varphi)(t, x) dx \right)^{1/2} ds dt = \\ & \int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}^2(\bar{v}^m - \bar{u})(s, z^m(s; t, x)) dx \right)^{1/2} \|\varphi\|_V ds dt \leq \\ & \int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \|\bar{v}^m - \bar{u}\|_V \|\varphi\|_V ds dt \leq \\ & C_6 T^{1-\alpha} \|\bar{v}^m - \bar{u}\|_{L_2(-m, T; V)} \|\varphi\|_{L_2(-m, T; V)} \left(\int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу оценки

$$\left\| \int_{-m}^t (t-s)^{-\alpha} \varphi(s) ds \right\|_{L_p(-m, T)} \leq C_6 T^{1-\alpha} \|\varphi(s)\|_{L_p(-m, T)},$$

$$\varphi(s) \in L_p(-m, T), 1 \leq p < \infty.$$

Оценим последний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} ds dt &= \frac{\lambda}{1+k\lambda} \int_{-m}^T e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} \Big|_{-m}^t dt = \\ &= \frac{\lambda}{1+k\lambda} \int_{-m}^T 1 - e^{-(t+m)(1/\lambda+k)} dt \leq \frac{\lambda}{1+k\lambda} \int_{-m}^T dt = \frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили оценку:

$$\begin{aligned} &\langle e^{-kt} B(v^m, z^m)(t) - e^{-kt} B(u, z^m)(t), \varphi(t) \rangle \leq \\ &C_6 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}} \|\bar{v}^m - \bar{u}\|_{L_2(-m, T; V)} \|\varphi\|_{L_2(-m, T; V)}. \end{aligned}$$

Откуда следует оценка (23). □

Далее мы будем использовать γ_k – меру некомпактности Куратовского в пространстве $L_2(-m, T; V^{-1})$ с нормой $\|v\|_{k, L_2(-m, T; V^{-1})} = \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_{V^{-1}}^2 e^{-kt} dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 4. *Отображение $B : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является L – уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k .*

Доказательство. Пусть $M \subset W(m) \subset L_2(-m, T; V)$ – произвольное ограниченное множество. В силу теоремы 1 множество $z^m(M)$ – множество траекторий z^m , однозначно определяемых по скоростям $v^m \in M$, относительно компактно. Тогда множество $B(v^m, z^m(M))$ относительно компактно для любого фиксированного $v^m \in W(m)$. Кроме того, для любых $z^m \in z^m(M)$ отображение $B(\cdot, z^m)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C_6 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}}$ в нормах $\|\cdot\|_{k, L_2(-m, T, V)}$ и $\|\cdot\|_{k, L_2(-m, T, V^{-1})}$.

Тогда отображение $B(v^m, z^m)$, является $C_6 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}}$ ограниченным относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ_k . Известно, что меры некомпактности Хаусдорфа и Куратовского удовлетворяют неравенствам $\chi_k(M) \leq \gamma_k(M) \leq 2\chi_k(M)$. Поэтому справедлива оценка

$$\gamma_k(G(M)) \leq C_6 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}} \gamma_k(L(M))$$

Выбирая k так, чтобы $C_6 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}} < 1$ получаем утверждение леммы. \square

Лемма 5. 1) Отображение $K_\varepsilon : V \rightarrow V^{-1}$ и для него имеет место оценка:

$$\|K_\varepsilon(v^m)\|_{V^{-1}} \leq C_7 \|v^m\|_V^2. \quad (24)$$

2) Для любого $v \in L_2(-m, T; V)$ функция $K_\varepsilon(v^m) \in L_2(-m, T; V^{-1})$ и отображение $K_\varepsilon : L_2(-m, T; V) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ – вполне непрерывно.

Доказательство. Проводится аналогичным образом как в [11, лемма 5.2]. \square

Лемма 6. Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда для любого решения $v^m \in W(m)$ операторного уравнения (17) имеют место оценки:

$$\|v^m\|_{L_2(-m, T; V)} \leq C_8 \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}; \quad (25)$$

$$\|v^m\|_{C([-m, T]; H)} \leq C_9 \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть $v \in W(m)$ – решение операторного уравнения (17). Тогда для любого $\varphi \in V$ и почти всех $t \in (-m, T)$ имеет место равенство (16). Поскольку оно справедливо при всех $\varphi \in V$, возьмём $\varphi = \overline{v^m}$, где $\overline{v^m}(t) = e^{-kt} v^m$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^{m'} \overline{v^m} dx - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})}, \frac{\partial \overline{v_j^m}}{\partial x_i} \right) dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla(v^m) : \nabla(\overline{v^m}) dx \\ & + \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x))) ds, \mathcal{E}(\overline{v^m}) = \xi \langle f^m, \overline{v^m} \rangle. \end{aligned}$$

Выполним замену $v^m = e^{kt}\overline{v^m}$ и отдельно преобразуем слагаемые в левой части:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^{m'} \overline{v^m} dx &= \int_{\Omega} (e^{kt}\overline{v^m})' \overline{v^m} dx = e^{kt} \int_{\Omega} \overline{v^m}' \overline{v^m} dx + k e^{kt} \int_{\Omega} \overline{v^m} \overline{v^m} dx = \\ &= \frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial(\overline{v^m} \overline{v^m})}{\partial t} dx + k e^{kt} \|\overline{v^m}\|_H^2 = \frac{e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{v^m}\|_H^2 + k e^{kt} \|\overline{v^m}\|_H^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \overline{v_j^m}}{\partial x_i} dx &= e^{kt} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\overline{v_i^m}}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \overline{v_j^m}}{\partial x_i} \overline{v_j^m} dx = \\ -\frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\overline{v_j^m}^2}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \overline{v_i^m} dx &= -\frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \overline{v_i^m}}{\partial x_i} \frac{\overline{v_j^m}^2}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} dx = 0 \end{aligned}$$

Наконец, преобразуем последнее слагаемое:

$$e^{kt} \mu_0 \int_{\Omega} \nabla(\overline{v^m}) : \nabla(\overline{v^m}) dx = e^{kt} \mu_0 \|\overline{v^m}\|_V^2$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \frac{e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{v^m}\|_H^2 + k e^{kt} \|\overline{v^m}\|_H^2 + e^{kt} \mu_0 \|\overline{v^m}\|_V^2 = \\ -\frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(\overline{v^m})(s, z^m(s; t, x))) ds, \mathcal{E}(\overline{v^m})) = \xi e^{kt} \langle f^m, \overline{v^m} \rangle. \end{aligned}$$

Оценим по модулю правую часть полученного равенства. Воспользовавшись неравенством Коши

$$bc \leq \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

для $\delta = 1/\mu_0$, мы получим:

$$\xi e^{kt} \langle f, \overline{v^m} \rangle \leq e^{kt} \|f\|_{V^{-1}} \|\overline{v^m}\|_V \leq \frac{e^{kt}}{2\mu_0} \|f\|_{V^{-1}}^2 + \frac{\mu_0 e^{kt}}{2} \|\overline{v^m}\|_V^2.$$

Умножая обе части равенства на e^{-kt} , при почти всех $t \in (-m, T)$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{v^m}\|_H^2 + k \|\overline{v^m}\|_H^2 + \frac{\mu_0}{2} \|\overline{v^m}\|_V^2 \leq \\ & - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \left(e^{-kt} \int_{-m}^t e^{-\frac{(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{-kt}\overline{v^m})(s, z^m(s; t, x))) ds, \mathcal{E}(\overline{v^m}) \right) \right| + \\ & \frac{1}{2\mu_0} \|f\|_{V^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Проинтегрируем от $-m$ до τ , где $\tau \in [-m, T]$, последнее неравенство по t . Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\overline{v^m}\|_H^2 + k \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_H^2 dt + \frac{\mu_0}{2} \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_V^2 dt \leq \\ & \frac{1}{2} \|v^m(-m)\|_H^2 + \frac{1}{2\mu_0} \int_{-m}^{\tau} \|f\|_{V^{-1}}^2 dt + \\ & \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-m}^{\tau} \left| \left(e^{-kt} \int_{-m}^t e^{-\frac{(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{-kt}\overline{v^m})(s, z^m(s; t, x))) ds, \mathcal{E}(\overline{v^m}) \right) \right| dt. \end{aligned}$$

Используя оценку (23) для $u = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\overline{v^m}\|_H^2 + k \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_H^2 dt + \frac{\mu_0}{2} \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_V^2 dt \leq \\ & \frac{1}{2} \|v^m(-m)\|_H^2 + \frac{\mu_1 C_6 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V)}^2 + \\ & \frac{1}{2\mu_0} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2. \end{aligned}$$

Возьмем k достаточно большим, что $\frac{\mu_1 C_6 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)} \leq \mu_0/4$. Оценим каждый член левой части:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0}{2} \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_{V^1}^2 dt \leq \frac{1}{2} \|v^m(-m)\|_H^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + \frac{\mu_0}{4} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V)}^2, \\ & \frac{1}{2} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 \leq \frac{1}{2} \|v^m(-m)\|_H^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + \frac{\mu_0}{4} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V)}^2. \end{aligned}$$

Так как правая часть во всех приведенных неравенствах не зависит от τ , то в левой части возьмём максимум по $\tau \in [-m, T]$, а также воспользуемся тем фактом, что $v^m(-m) = 0$ равенство (13)

$$\begin{aligned}\frac{\mu_0}{2} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V)}^2 &\leq \frac{1}{2\mu_0} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + \frac{\mu_0}{4} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V)}^2, \\ \frac{1}{2} \|\overline{v^m}\|_{C([-m, T]; H)}^2 &\leq \frac{1}{2\mu_0} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + \frac{\mu_0}{4} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V)}^2.\end{aligned}$$

Отсюда следуют требуемые оценки (25)–(26). □

Лемма 7. Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда для любого $v^m \in W(m)$ операторного уравнения (17) имеют место оценки

$$\|v^{m'}\|_{L_2(-m, T; V)} \leq C_{10} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2; \quad (27)$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} \leq C_{11} (\|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + 1); \quad (28)$$

где постоянные C_{10} , C_{11} не зависят от v^m и m .

Доказательство. Пусть $v^m \in W(m)$ – решение (17). Тогда оно удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$Jv^{m'} + \mu_0 Av^m + \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m) - \xi K(v^m) = \xi f. \quad (29)$$

Следовательно,

$$\|Jv^{m'}\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} = \|\xi f - \mu_0 Av^m - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m) + \xi K(v^m)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}.$$

Оценим правую часть при $u = 0$. В силу оценок (23) и (24) получим:

$$\begin{aligned}\|\xi f - \mu_0 Av^m - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m) + \xi K(v^m)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} &\leq \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} + \\ &\frac{\mu_1 C_6 T^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \|v^m\|_{L_2(-m, T; V)} + \mu_0 \|v^m\|_{L_2(-m, T; V)} + C_7 \|v^m\|_{L_2(-m, T; V)}.\end{aligned} \quad (30)$$

Перепишем (30) в виде:

$$\begin{aligned}\|\xi f - \mu_0 Av^m - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m) + \xi K(v^m)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} &\leq \\ C_{12} (\|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} + \|v^m\|_{L_2(-m, T; V)}).\end{aligned}$$

Из априорных оценок (25) и (26) следует, что

$$\|Jv^{m'}\|_{L_2(-m,T;V^{-1})} \leq C_{10}\|f\|_{L_2(-m,T;V^{-1})}^2$$

Следовательно, доказано неравенство (27).

Теперь мы докажем (28). Как и ранее $v^m \in W(m)$ — решение операторного уравнения (17). Тогда

$$\begin{aligned} \|v^{m'}\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} &\leq \|f - \mu_0 Av^m - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m) + \\ K_\varepsilon(v^m)\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} &\leq \|f\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} + \mu_0 \|Av^m\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} + \\ &+ \|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \|B(v^m, z^m)\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})}. \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим слагаемые в правой части последнего неравенства. Используя неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \|Av^m\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} &= \left(\int_{-m}^T \|Av^m\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_V^{\frac{4}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq T^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{4}} \|v^m\|_{L_2(-m,T;V)}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом с помощью неравенства Гельдера и оценки (23) для $u = 0$ получим:

$$\begin{aligned} \|B(v^m, z^m)\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} &= \left(\int_{-m}^T \|B(v^m, z^m)\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \\ &\leq T^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-m}^T \|B(v^m, z^m)\|_{V^{-1}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= T^{\frac{1}{4}} \|B(v^m, z^m)\|_{L_2(-m,T;V^{-1})} \leq T^{\frac{1}{4}} T^{1-\alpha} C_6 \|v^m\|_{L_2(-m,T;V)}. \end{aligned}$$

Установим оценку на $\|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})}$. Учитывая известное неравенство для $n = 3$

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}, \quad u \in V^1,$$

и оценку (24), мы получим (для случая $n = 2$ доказательство аналогичное):

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} &= \left(\int_{-m}^T \|K_\varepsilon(v^m)\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq C_7 \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_V^{\frac{8}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &2C_7 \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla v^m\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq C_{12} \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_H^{\frac{2}{3}} \|v^m\|_V^2 dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &C_{12} \|v^m\|_{C([-m,T];H)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_V^2 dt \right)^{\frac{3}{4}} = C_{12} \|v^m\|_{C([-m,T];H)}^{\frac{1}{2}} \|v^m\|_{L_2(-m,T;V)}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Оценим правую часть. Для этого воспользуемся левой частью оценки (22) для $p = 4/3$.

$$\begin{aligned} \|v^{m'}\|_{L_{4/3}(-m,T;V)} &\leq C_{12} (\|f\|_{L_2(-m,T;V^{-1})} + \|v^m\|_{L_2(-m,T;V)}) + \\ &\|v\|_{C([-m,T];H)}^{\frac{1}{2}} \|v^m\|_{L_2(-m,T;V)}^{\frac{3}{2}} \leq \\ &C_{13} (\|f\|_{L_2(-m,T;V^{-1})} + 1)^2 \leq 4C_{13} (\|f\|_{L_2(-m,T;V^{-1})}^2 + 1). \end{aligned}$$

Что доказывает (28), где $C_{11} = 4C_{13}$. \square

Лемма 8. Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда для любого $v^m \in W(m)$ операторного уравнения (17) с начальным условием $v^m(-m, \cdot) = 0$ имеют место оценки:

$$\|v\|_{W(m)} \leq C_{14},$$

где C_{14} не зависит от m

Теорема 4. Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда существует по крайней мере одно решение $v^m \in W(m)$ вспомогательной задачи (10)–(13) при $\xi = 1$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени уплотняющих векторных полей. Рассмотрим операторное уравнение (17)

$$Jv^{m'} + \mu_0 Av^m - \xi K_\varepsilon(v^m) + \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m) = \xi f. \quad (31)$$

Из леммы 8 следует, что решения уравнения (31) лежат в шаре $B_R \subset W(m)$ с центром в нуле и радиусом $R = C_{14} + 1$. Согласно утверждению

2) леммы 2 оператор $(J + \mu_0 A) : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является обратимым. Тогда ни одно решение

$$v^m = \xi(J + \mu_0 A)^{-1}(K(v^m) - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + f)$$

не принадлежит границе того же шара B_R .

В силу 2) части леммы 2 оператор $(J + \mu_0 A)^{-1} : L_2(-m, T; V^{-1}) \rightarrow W(m)$ является непрерывным. Согласно леммам 4 и 5 отображение $(K_\varepsilon(v^m) - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + f) : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является L – уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Следовательно, оператор $(J + \mu_0 A)^{-1}(K_\varepsilon(v^m) - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + f) : W(m) \rightarrow W(m)$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .

Таким образом, векторное поле $v^m - (J + \mu_0 A)^{-1}(\xi K_\varepsilon(v^m) - \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + \xi f)$ невырождено на границе шара B_R , а значит для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(\xi(J + \mu_0 A)^{-1}(K_\varepsilon(v^m) - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + f), B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\begin{aligned} \deg((J + \mu_0 A)^{-1}(K_\varepsilon(v^m) - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + f), B_R, 0) = \\ \deg(I, B_R, 0) = 1. \end{aligned}$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v^m \in W(m)$ уравнения (17), а следовательно, и вспомогательной задачи (10)–(13). Теорема доказана. \square

4 Предельный переход

Далее получим решение задачи (1)–(4) с помощью предельного перехода для продолженных полученных решений v^m задачи (10)–(13) при $m \rightarrow +\infty$. Для этого понадобятся равномерные по m оценки v^m на полуоси.

Сформулируем и докажем следующий факт.

Лемма 9. Пусть $f^m \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда для функции v^m справедливы оценки:

$$\sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_H + \|v^m(t, \cdot)\|_{L_2(-\infty, T; V)} \leq C_{15} \|f^m\|_{L_2(-\infty, T; H)} \quad (32)$$

с независимой от m константой C_{15} .

Доказательство. Доказывается аналогично как в [12], Лемма 3.4. \square

Оценка (32) означает, что последовательность v^m ограничена в $L_2(-\infty, T; V)$. Это позволяет утверждать, что существует функция $v \in L_2(-\infty, T; V)$ такая, что v^m (с точностью до подпоследовательности) сходится к v слабо в $L_2(-\infty, T; V)$. Кроме того, оценка (32) влечёт за собой сходимость v^m к v (с точностью до подпоследовательности) п. в. на $[-k, T] \times \Omega$ при любом $k > 0$. Следовательно, имеет место следующая лемма.

Лемма 10. Пусть $k > m$, $f^m \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда для функции v^m справедлива оценка:

$$\left\| \frac{dv^m}{dt} \right\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} \leq C_{16}(1 + \|f\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} + \|f\|_{L_1(-k, T; V^{-1})}^2). \quad (33)$$

Доказательство. Доказывается аналогично как в [12], Лемма 3.5. \square

Функция v^m , являющаяся продолженным на полуось слабым решением задачи (10)–(13), удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^T (v^m(t, x), \varphi) \psi'(t) dt - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^T \left(\frac{v_i^m(t, x) v^m(t, x)}{(1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon})}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt + \\ & \mu_0 \int_{-\infty}^T (\nabla(v^m)(t, x), \nabla(\varphi)(x)) \psi(t) dt + \\ & \mu_1 \int_{-\infty}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(x)) ds \right) \psi(t) dt = \\ & \int_{-\infty}^T \langle f^m(t, x), \varphi(x) \rangle \psi(t) dt \end{aligned} \quad (34)$$

при любой $\varphi \in V$ и $\psi \in C_0^\infty(-\infty, T)$.

Пусть $\text{supp } \psi \subset [-k, T]$, где $k > 0$, так что внешние интегралы берутся на самом деле по промежутку $[-k, T]$.

Легко видеть, что последовательность f^m сходится к f в $L_2(-\infty, T; H)$, сильно в $L_2(Q)^n$, п. в. на $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, а последовательность $\frac{dv^m}{dt}$ ограничена по норме пространства $L_1(-k, T; V^{-1})$ и сходится к $\frac{dv}{dt}$ в смысле распределений на $[-k, T]$ при любом $-\infty < k < T$.

Далее будет рассмотрен ряд лемм.

Лемма 11. *Последовательность \tilde{v}^m сходится в $L_2(-\infty, T; H)$ к v .*

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\tilde{v}^m - v = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = S_{1/\varepsilon}(\tilde{v}^m - v)$, $I_2 = S_{1/\varepsilon}v - v$.

Из первой оценки (14) вытекает, что $\|S_{1/\varepsilon}\|_{L_2(-\infty, T; H) \rightarrow L_2(-\infty, T; H)} \leq C_3$. Поэтому

$$\|I_1\|_{L_2(-\infty, T; H)} \leq \|v - v^m\|_{L_2(-\infty, T; H)} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Для доказательства того, что $\|I_2\|_{L_2(-\infty, T; H)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ достаточно показать, что

$$\int_{-\infty}^T |S_{1/\varepsilon}v(t, \cdot) - v(t, \cdot)|_H^2 dt \rightarrow 0 \quad (35)$$

при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Но при п.в. t в силу (15) для подинтегральной функции в (35) имеем

$$g(t) \equiv |\tilde{v}^m(t, \cdot) - v(t, \cdot)|_{L_2(-\infty, T; H)} = |S_{1/\varepsilon}v(t, \cdot) - v(t, \cdot)|_{L_2(-\infty, T; H)} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Кроме того, в силу первого неравенства в (14) подинтегральная функция g^2 в (35) удовлетворяет следующей оценке

$$g^2(t) \leq M \|v(t, \cdot)\|_{L_2(-\infty, T; H)}^2.$$

Отсюда в силу теоремы Лебега о предельном переходе следует, что $\|I_2\|_H \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Утверждение леммы вытекает из того, что $\|I_k\|_H \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ для $k = 1, 2$. \square

Рассмотрим задачу Коши (12) для предельной функции v^m . Так как $v^m \in W$, то v^m удовлетворяет условиям Теоремы 1 на любом конечном промежутке $[-k, T]$ при любом $-\infty < k < T$. Тогда из Теоремы 1 вытекает существование РЛП $z(\tau; t, x)$, $-\infty < \tau, t \leq T$, $x \in \bar{\Omega}$, порожденного v .

Лемма 12. Последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится к $z(\tau; t, x)$ по мере $[-k, T] \times \Omega$ при $t \in [-k, T]$ для любого $k \geq 0$

Из утверждения Леммы 12 вытекает, что последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится (с точностью до подпоследовательности) к $z(\tau; t, x)$ п.в. на $Q(k, T) = [-k, T] \times \Omega$ как функция переменных $(\tau, x) \in Q(k, T) = [-k, T] \times \Omega$ при любом $-k \in (-\infty, T)$ для $t \in [-k, T]$.

Лемма 13. Предельная функция $v^m(t, x)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^T (v^m(t, x), \varphi) \psi'(t) dt - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^T \left(\frac{v_i^m(t, x) v^m(t, x)}{(1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon})}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt + \\ & \quad \mu_0 \int_{-\infty}^T (\nabla v^m(t, x), \nabla \varphi(x)) \psi(t) dt + \\ & \quad \mu_1 \int_{-\infty}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(x)) ds \right) \psi(t) dt = \\ & \quad \int_{-\infty}^T \langle f(t, x), \varphi(x) \rangle \psi(t) dt \end{aligned} \quad (36)$$

при любой $\varphi \in V$ и $\psi \in C_0^\infty(-\infty, T)$.

Доказательство. Пусть сначала $\varphi \in V$ является гладкой. Введем обозначения слагаемых в левой части (36):

$$\begin{aligned} J_1^m &= \int_{-\infty}^T (v^m(t, x), \varphi) \psi'(t) dt; \\ J_2^m &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^T \left(\frac{v_i^m(t, x) v^m(t, x)}{(1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon})}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt; \\ J_3^m &= \mu_0 \int_{-\infty}^T (\nabla v^m(t, x), \nabla \varphi(x)) \psi(t) dt; \\ J_4^m &= \mu_1 \int_{-\infty}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(x)) ds \right) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Соответствующие слагаемые в левой части обозначим через J_i , $i = \overline{1, 4}$.

Из слабой сходимости v^m к v в $L_2(-\infty, T; V)$ получаем, что J_i^m сходятся к J_i , $i = 1, 3$. В более ранних работах была установлена сходимость в $L_2([t_1, t_2] \times \Omega)$ на конечном промежутке $[t_1, t_2]$ последовательности $\frac{v_i^m(t, x)v^m(t, x)}{1+|v^m|^2}$ к $v_i(t, x)v(t, x)$ при $m \rightarrow +\infty$. Используем эти результаты.

Так как интегрирование в J_2^m и J_2 проводится на конечном промежутке $\text{surr } \psi$, то получаем, что J_2^m сходится к J_2 при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим теперь J_4^m . Очевидно,

$$J_4^m = \mu_1 \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x))) : \mathcal{E}(\varphi)(x) dx ds \right) \psi(t) dt \quad (37)$$

Покажем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} J_4^m = J_4$, где

$$J_4 = \mu_1 \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))) : \mathcal{E}(\varphi)(x) dx ds \right) \psi(t) dt \quad (38)$$

Покажем, что J_4^m сходится к J_4 . Нетрудно видеть, что

$$J_4^m - J_4 = Z_1^m + Z_2^m, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1^m &= \mu_1 \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}(v)(s, z^m(s; t, x))] : \mathcal{E}(\varphi)(x) dx ds \right) \psi(t) dt, \\ Z_2^m &= \mu_1 \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v)(s, z^m(s; t, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))] : \mathcal{E}(\varphi)(x) dx ds \right) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Покажем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} Z_1^m = 0$

Обозначим интеграл по Ω в Z_1 через

$$I = \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) - \mathcal{E}(v)(s, z^m(s; t, x))] : \mathcal{E}(\varphi)(x) dx.$$

Сделаем в интеграле I , приведенном выше, замену переменной

$$x = z^m(t; s, y), y = z^m(s; t, x).$$

Тогда

$$I = \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy.$$

Пользуясь этим соотношением и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} Z_1^m &= \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \right. \\ &\quad \left. \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy ds \right) \psi(t) dt = \\ &e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} \int_{-\infty}^{-k} \left(\int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \right. \\ &\quad \left. \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy ds \right) \psi(t) dt + \\ &\int_{-k}^T \left(\int_s^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \right. \\ &\quad \left. \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy ds \right) \psi(t) dt = Z_{11}^m + Z_{12}^m \end{aligned} \quad (40)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} Z_{12}^m &= \int_{-k}^T \left(\int_s^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \right. \\ &\quad \left. : (\mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) - \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y))) dy ds \right) \psi(t) dt + \\ &\int_{-k}^T \left(\int_s^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \right. \\ &\quad \left. \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y)) dy ds \right) \psi(t) dt = Z_{121}^m + Z_{122}^m \end{aligned} \quad (41)$$

Из слабой сходимости v^m к v в $L_2(-\infty, T; V)$ получаем, что $Z_{122}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Пользуясь ограниченностью функции ψ и $(t-s)^{-\alpha}$ и применяя нера-

венства Коши-Буняковского и Гёлдера, получаем, что

$$\begin{aligned}
 |Z_{121}^m|^2 &\leq M \left(\int_{-k}^T \int_s^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \right. \\
 &\quad \left. \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_V \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_H \psi(t) dt ds \right)^2 \leq \\
 &M \left(\int_{-k}^T \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_V \int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_H dt ds \right)^2 \leq \\
 &M \int_{-k}^T \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_V^2 ds \times \\
 &\int_{-k}^T \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_H dt \right)^2 ds \leq \\
 &M \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_{L_2(-k, T; V)}^2 \times \\
 &\int_{-k}^T \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_H dt \right)^2 ds \quad (42)
 \end{aligned}$$

Покажем, что $Z_{121}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$. Обозначим последний сомножитель в (42) как

$$\Psi(s) = \int_{-k}^T \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_H dt \right)^2 ds \quad (43)$$

Представим его в виде

$$\Psi(s) = \int_{-k}^T g_m(s) ds, \quad g_m(s) = \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_H dt \right)^2$$

Установим сходимость $g_m(s) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ для всех $s \in [-k, T]$.

Нетрудно видеть, что

$$g_m(s) = \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_H dt \right)^2 =$$

$$\int_{-k}^T \left(\int_s^T \int_{\Omega} |\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))| dy dt \right)^2 ds \quad (44)$$

Пусть $\theta > 0$. В силу непрерывности на $\bar{\Omega}$ функции φ_x найдется такое $\delta_1(\theta) > 0$, что если

$$|x'' - x'| \leq \delta_1(\theta),$$

то

$$|\varphi_x(x'') - \varphi_x(x')| \leq \theta \quad (45)$$

Так как последовательность $z^m(t; s, y)$ сходится к $z(t; s, y)$ по мере (t, y) на $[s, T] \times \Omega$ для $s \in [-k, T]$, то для $\delta_1(\theta)$ можно указать такое $N = N(\delta_1(\theta))$, что при $m \geq N$ справедливо неравенство

$$m(\{(t, y) : |z(t; s, y) - z^m(t; s, y)| \geq \delta_1(\theta)\}) \leq \theta \quad (46)$$

Пусть

$$Q(> \delta_1(\theta)) = \{(t, y) \in Q : |z(t; s, y) - z^m(t; s, y)| > \delta_1(\theta)\}$$

$$Q(\leq \delta_1(\theta)) = \{(t, y) \in Q : |z(t; s, y) - z^m(t; s, y)| \leq \delta_1(\theta)\}$$

Тогда из (44) вытекает, что

$$g_m(s) \leq M_1 \left(\int_{Q(>\delta_1(\theta))} |\varphi_x(z(t; s, y)) - \varphi_x(z^m(t; s, y))|^2 dy dt + \right.$$

$$\left. \int_{Q(\leq\delta_1(\theta))} |\varphi_x(z(t; s, y)) - \varphi_x(z^m(t; s, y))|^2 dy dt \right) = C_{17}(G_1 + G_2) \quad (47)$$

Для G_2 в силу (45) имеем $|z(t; s, y) - z^m(t; s, y)| \leq \delta_1(\theta)$, а поэтому

$$G_2 \leq \int_{Q(\leq\delta_1(\theta))} \theta^2 dy dt \leq C_{18}\theta^2 \quad (48)$$

Так как $m(Q(> \delta_1(\theta))) \leq \theta$ в силу (46), то

$$G_1 \leq 2\|\varphi_x\|_{C(\Omega)} \int_{Q(>\delta_1(\theta))} dy dt \leq 2\|\varphi_x\|_{C(\Omega)}\theta \quad (49)$$

Из оценок (47)–(49) вытекает, что при $m \geq N(\delta_1(\theta))$ справедливо неравенство

$$g_m(s) \leq C_{19}^{1/2} \quad (50)$$

Сходимость $g_m(s) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ для всех $s \in [-k, T]$ установлена. Кроме того $g_m(s)$ ограничена в силу гладкости $\varphi_x(s)$. Поэтому $\Psi_m \rightarrow 0$

Первый сомножитель справа в (42) ограничен по m в силу равномерной ограниченности $\|v^m\|_{L_2(-k, T; V)}$, а второй стремится к нулю ($\Psi_m \rightarrow 0$).

Таким образом, из (42) и (43) следует, что $Z_{121}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Сходимость $Z_{122}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ вытекает из слабой сходимости $v^m \rightarrow v$ в $L_2(-\infty, T; V)$. Из $Z_{121}^m \rightarrow 0$ и $Z_{122}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ и (41) вытекает, что $Z_{12}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим Z_{11}^m . Нетрудно видеть, что при любом $-\infty < R < -k$

$$\begin{aligned} Z_{11}^m &= \int_{-\infty}^R \int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \\ &\quad : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy \psi(t) dt ds + \\ &\quad \int_R^T \int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \\ &\quad : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy \psi(t) dt ds = Z_{111}^m + Z_{112}^m. \end{aligned} \quad (51)$$

Для Z_{111}^m в силу ограниченности φ_x и ψ получаем:

$$\begin{aligned} |Z_{111}^m| &\leq C_{20} \int_{-\infty}^R \int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|v^m(s, \cdot) - v(s, y)\|_V \|\varphi(z^m(t; s, y))\|_V dt ds \\ &\leq C_{20} \int_{-\infty}^R \int_{-k}^T (t-s)^{-\alpha} e^{\frac{-t}{\lambda}} e^{\frac{s}{\lambda}} \|v^m(s, \cdot) - v(s, y)\|_V dt ds \leq \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
& C_{20} \int_{-k}^T e^{\frac{-t}{\lambda}} dt \int_{-\infty}^R (t-s)^{-\alpha} e^{\frac{s}{\lambda}} \|v^m(s, \cdot) - v(s, y)\|_V ds \leq \\
& C_{20} \int_{-k}^T e^{\frac{-t}{\lambda}} dt \left(\int_{-\infty}^R (t-s)^{-2\alpha} e^{\frac{2s}{\lambda}} ds \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^R \|v^m(s, \cdot) - v(s, y)\|_V^2 ds \right)^{1/2} \leq \\
& C_{20} \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_{L_2(-\infty, R; V)} \int_{-k}^T e^{\frac{-t}{\lambda}} G_3 dt \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Отдельно посчитаем G_3 :

$$G_3 = \int_{-\infty}^R (t-s)^{-2\alpha} e^{\frac{2s}{\lambda}} ds$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned}
u &= (t-s)^{1-2\alpha} \\
du &= -\frac{1-2\alpha}{(t-s)^{2\alpha}} ds \\
s &= -\infty, u = +\infty \\
s &= R, u = (t-R)^{1-2\alpha}
\end{aligned}$$

Тогда получим:

$$G_3 = \frac{e^{\frac{2t}{\lambda}}}{2\alpha-1} \int_{(t-R)^{1-2\alpha}}^{+\infty} e^{-\frac{2u}{\lambda} \frac{1-2\alpha}{\lambda}} du.$$

Далее сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned}
w &= 2^{1-2\alpha} \lambda^{2\alpha-1} u \\
dw &= 2^{1-2\alpha} \lambda^{2\alpha-1} du \\
u &= +\infty, w = +\infty \\
u &= (t-R)^{1-2\alpha}, w = 2^{1-2\alpha} \lambda^{2\alpha-1} (t-R)^{1-2\alpha}
\end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\frac{2t}{\lambda}}}{2\alpha - 1} 2^{1-2\alpha} \lambda^{2\alpha-1} \int_{2^{1-2\alpha} \lambda^{2\alpha-1} (t-R)^{1-2\alpha}}^{+\infty} e^{-w^{\frac{1}{1-2\alpha}}} dw = \\ & = e^{\frac{2t}{\lambda}} 2^{1-2\alpha} \lambda^{2\alpha-1} \Gamma(1 - 2\alpha, w^{\frac{1}{1-2\alpha}}) \end{aligned}$$

Из-за ограниченности второго сомножителя в (52), слабой сходимости v^m к v мы получаем стремление $|Z_{111}^m|$ к нулю. Стремление $|Z_{112}^m|$ к нулю при $m \rightarrow +\infty$ устанавливается аналогично случаю $|Z_{12}^m|$.

Таким образом, было установлено, что при $m \rightarrow +\infty$ $|Z_1^m| \rightarrow 0$. Покажем, что при $m \rightarrow +\infty$ $|Z_2^m| \rightarrow 0$.

Оценим $|Z_2^m|$. Аппроксимируем $v(t, x)$ гладкой финитной на $(-\infty, T] \times \Omega$ функцией \tilde{v} так, что

$$\|v - \tilde{v}\|_{L_2(-\infty, T; V)} \leq \theta_2$$

и $\tilde{v} \equiv 0$ при $t < k_1$, где $k_1 < T$, а $\theta_2 > 0$ — произвольное малое число. Тогда

$$|Z_2^m| \leq M(Z_{21}^m + Z_{22}^m + Z_{23}^m), \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{21}^m &= \int_{-k}^T \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|v(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z^m(s; t, x))\|_V ds dt; \\ Z_{22}^m &= \int_{-k}^T \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|\tilde{v}(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z(s; t, x))\|_V ds dt; \\ Z_{23}^m &= \int_{-k}^T \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|\tilde{v}(s, z(s; t, x)) - v(s, z(s; t, x))\|_V ds dt. \end{aligned}$$

Делая замену переменных в интеграле в Z_{21}^m

$$x = z^m(t; s, y), y = z^m(s; t, x)$$

имеем:

$$\|v(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z^m(s; t, x))\|_V = \|v(s, y) - \tilde{v}(s, y)\|_V. \quad (54)$$

Аналогично, для Z_{23}^m с помощью замены $y = z(s; t, x)$ получаем

$$\|\tilde{v}(s, z(s; t, x)) - v(s, z(s; t, x))\|_1 = \|\tilde{v}(s, y) - v(s, y)\|_V \quad (55)$$

Из неравенств (54) и (55) следует, что

$$Z_{21}^m + Z_{23}^m \leq C_{21} \int_{-k}^T \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|v(s, y) - \tilde{v}(s, y)\|_V ds dt \leq C_{21} \theta_2 \quad (56)$$

Далее, из финитности \tilde{v} следует, что

$$Z_{22}^m \leq C_{22} \int_{-k}^T \left(\int_{k_1}^t e^{-\frac{(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} \|\tilde{v}_x(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}_x(s, z(s; t, x))\|_V dx ds \right) dt$$

Так как $z^m(s; t, x)$ сходится п.в. к $z(s; t, x)$ равномерно по t , а функция $\tilde{v}_x(t, x)$ является гладкой и ограниченной, то в силу теоремы Лебега при $m \rightarrow +\infty$ получаем $|Z_{22}^m| \rightarrow 0$, следовательно

$$J_4^m \rightarrow J_4$$

Таким образом, в каждом слагаемом (36) допустим предельный переход, который дает тождество (36) для любой гладкой φ .

Установим тождество (36) для любой $\varphi \in V$ и $\psi \in C_0^\infty(-\infty, T)$. Запишем (36) для гладкой φ в виде

$$[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] = 0, \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} [G_1, \varphi] &= \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ &+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right); \\ [G_2, \varphi] &= \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Лемма 14. Пусть пробная функция φ — гладкая. Тогда

$$\|[G_1, \varphi]\| \leq C_{23} \|\varphi\|_V, \quad \|[G_2, \varphi]\| \leq C_{24} \|\varphi\|_V. \quad (58)$$

Так как множество гладких функций плотно в V , для $\varphi \in V$ существует последовательность гладких функций $\varphi^l \in V$ таких, что $|\varphi^l - \varphi|_V \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. В силу (57) получим:

$$\begin{aligned} [G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] &= [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l] + [G_1, \varphi^l] - [G_2, \varphi^l] = \\ &= [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l]. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и оценок (58) получим

$$|[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi]| \leq C_{25} |\varphi - \varphi^l|.$$

Принимая во внимание последнее неравенство и переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ для $\varphi = \varphi^l$ получим равенство (34) для произвольной $\varphi \in V$, что и завершает доказательство существования слабых решений начально-краевой задачи (1)–(4). \square

Список литературы

- [1] Звягин А. В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды / А. В. Звягин // Успехи математических наук. — 2019. — Т. 74. — №3 — С. 189–190.
- [2] Звягин А. В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта / А. В. Звягин // Изв. РАН. Сер. мат. — 2021. — Т. 85. — №1 — С. 66–97.
- [3] Звягин В. Г. О разрешимости одной альфа-модели движения жидкости с памятью / В.Г. Звягин, А.В. Звягин, Д.М. Поляков // Изв. вузов. Матем. — 2018. — №6 — С. 78–84.
- [4] Звягин В. Г. О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнения движения вязкоупругой жидкости / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380. — №3 — С.308–311.
- [5] Звягин В. Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко // Диф.уравнения. — 2002. — Т.38. — №12 — С.1633–1645.
- [6] Звягин В. Г. О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью / В.Г. Звягин, В.П. Орлов // Диф. уравнения. — 2017. — Т.53. — №2 — С.215–220.
- [7] Caputo M. A new dissipation model based on memory mechanism / M. Caputo, F. Mainardi // Pure and Applied Geophysics. — 1971. — Т.91. — Iss.1 — P.134–147.
- [8] DiPerna R. J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R. J. DiPerna, P. L. Lions // Inventiones mathematicae. — 1989. — Т.98. — Iss.3 — P.511–547.
- [9] Crippa G. The ordinary differential equations with non-Lipschitz vector fields / G. Crippa // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. — 2008. — Т.1. — Iss.2 — P.333–348.
- [10] Zvyagin V. G. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // De Gruyter series in nonlinear Analysis and Applications 12, Berlin–New York (2008).

- [11] В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко *Аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса.* — М.: Едиториал УРСС, — 2004 — 112 С.
- [12] Zvyagin V. G. On weak solutions of a regularized model of viscoelastic fluid / V. G. Zvyagin, V. T. Dmitrienko // *Differential Equations*, — 2002 — Т. 38 — Р. 1731–1744.
- [13] Zvyagin V. G. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity / V. Zvyagin, V. Orlov // *Discrete Contin. Dyn. Syst.* — 2018 — Т. 38 — №12 — С. 6327–6350.

Приложение
В Оргкомитет Смотра дипломных
работ математиков России
от Суроегиной Анастасии Евгеньевны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Прогнозирование волн эпидемии COVID-19 с помощью логистических моделей» являются: алгоритм прогнозирования COVID-19 при помощи различных логистических моделей (Appendix 1) и анализ полученных результатов.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

1. В период с 01 января по 15 мая 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: прогноз COVID-19, математические модели прогнозирования, логистическое уравнение, обобщенное логистическое уравнение. Было изучено 15 статей (список см. в References к выпускной квалификационной работе). При этом в работах [3-4], [9],[11], [14] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

2. Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Пелиновским Ефимом Наумовичем, Профессором НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде факультета информатики, математики и компьютерных наук, кафедры фундаментальной математики.

3. Проведено выступление на международной конференция «XX научная школа "Нелинейные волны – 2022"» (НГТУ и ИПФ РАН) и второй конференция Математических центров России (7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше прикладной математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 13.06.2023г. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись

Суроегина Анастасия Евгеньевна

04.06.2023г Нижний Новгород, Россия

NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS

Department of mathematics, informatics and computer science

MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

DIPLOMA THESIS

**FORECASTING OF THE WAVES OF COVID-19 USING THE LOGISTIC
MODELS**

Author:

Student of 2nd year of Master's
program, Anastasiia Suroegina,

Scientific advisor:

Professor Efim Pelinovsky

Nizhny Novgorod, 2023

Contents

1. Introduction	3
2. Logistic model	6
2.1. The spread of COVID-19.....	6
2.2. General properties for logistic mode.....	7
2.3 Logistic model for the spread of COVID-19	8
3. Generalized logistic model	16
3.1. Logistic model with one additional parameter β	16
3.2. Logistic model with two additional parameters α and β	19
3.3. Generalized logistic model of type II.....	22
3.4. Conclusion about logistic models	25
4. Models containing logistic equations	27
4.1. SI-model	27
4.2. SIR-model	29
4.3. Agent-Based Model.....	31
5. Conclusion	33
References	34
Appendix 1. The program for the approximation algorithm	37

1. Introduction

Due to the COVID-19 pandemic, modeling has become one of the main tools for predicting the spread of the virus and taking measures to control it. COVID-19 modeling can be done using various methods and approaches, including mathematical models, agent-based models, and machine learning. Mathematical models are the most common method of COVID-19 modeling. They are used to describe the dynamics of virus spread based on statistical data on morbidity and mortality. These models can be deterministic or stochastic and can be represented as differential equations or systems of equations.

Agent-based models are used to model the behavior of individual people and groups of people in the context of COVID-19 spread [1]. They are a computer program that simulates the behavior of agents under different conditions. These models can be used to test the effectiveness of different strategies to combat COVID-19, such as social distancing and mask-wearing.

Machine learning can also be used for COVID-19 modeling [2]. This method uses machine learning algorithms to analyze large volumes of data on morbidity, mortality, and other parameters. These models can be used to predict the spread of the virus and identify factors that influence its spread.

Overall, COVID-19 modeling is an important tool for understanding the dynamics of virus spread and taking measures to control it. Different modeling methods can be used depending on the goals and required accuracy of forecasting.

The COVID-19 pandemic has emphasized the significance of modeling as a tool for comprehending and managing the transmission of the virus. Various modeling techniques can be employed to anticipate the spread of epidemics, with mathematical models providing valuable insights. However, these models

must be used in conjunction with other data sources and expert knowledge to make informed decisions. The logistic equation and Gompertz model are frequently utilized to forecast the spread of epidemics, but accurately selecting coefficients and additional characteristics presents a challenge. Nevertheless, comprehending the patterns of epidemic spread can help in predicting its future impact.

Building mathematical models to predict the spread of COVID-19 is challenging due to the constantly changing nature of the virus and its impact on human populations. As new data becomes available, coefficients and parameters used in these models may need to be updated to reflect the current situation. Ongoing research and collaboration between scientists, public health officials, and policymakers is necessary to develop accurate models and effective strategies for controlling the spread of the virus.

Various mathematical models are used to explain the rate at which epidemics spread and predict their consequences. For example, the Logistic equation and Gompertz model have been used to study the first wave of COVID-19 [3-4]. More complex models, such as the generalized logistic equation, have additional parameters that can improve forecast accuracy [5-6]. Some models, like the SIR model, divide the population into susceptible, infected, and recovered groups [7]. However, these models may not work when considering different population densities or other factors.

One major difficulty in applying mathematical models to predict epidemics is selecting coefficients for equations. As the complexity of the model increases, so does the number of coefficients. Additionally, the impact of viruses on living organisms changes over time, making it challenging to use previous epidemic data for interpretation. Therefore, finding accurate coefficients and additional characteristics is crucial for developing effective models

The **main objective** of this study is to examine and compare different logistics models in the context of the COVID-19 pandemic. To achieve this **aim**, the following objectives have been established:

- Analyze the behavior of the epidemic;
- Investigate the characteristics and solutions of the Logistic Model;
- Examine a generalized logistic model;
- Develop and implement a Python algorithm to predict COVID-19;
- Compare the outcomes obtained from different models.
- Consider models in which logistic equations are used.

The data used for this research were obtained from the official website of the World Health Organization (WHO) [8] for various countries throughout the entire spread of the pandemic, with a particular focus on examining the spread of infection in the Russian Federation.

Keywords and phrases: Logistic equation, spread of COVID-19, approximation.

2. Logistic model

2.1. The spread of COVID-19

The COVID-19 pandemic is a global pandemic caused by the spread of the SARS-CoV-2 coronavirus. The virus was first detected in Wuhan, China in December 2019. By January 30, 2020, the World Health Organization declared this outbreak a public health emergency of international concern, followed by its classification as a pandemic on March 11. As of May 25, 2022, the worldwide number of reported cases has surpassed 527 million, with more than 6.2 million confirmed deaths, making it one of the deadliest pandemics in history.

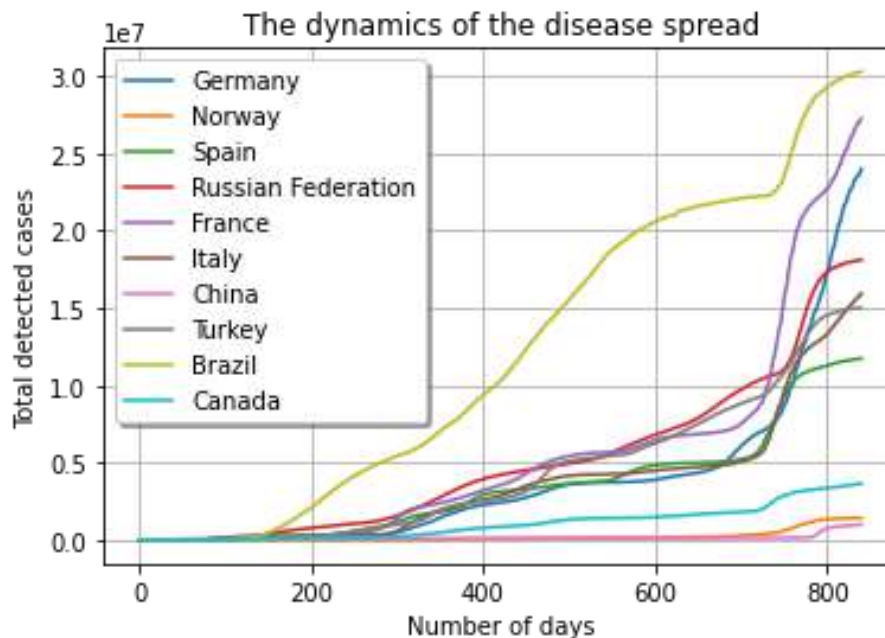


Figure 1: The dynamics of the disease spread

To better understand the pandemic's impact, we have investigated the trend of coronavirus cases in different countries. Despite varying measures, such as lockdowns and varying vaccination campaigns, the pattern of the virus spread seems almost identical across borders. At first, the number of cases increases exponentially or close to exponentially, then slows down and repeats with each

wave. However, some countries, like Norway and France, have seen little to no increase in cases, indicating the end of the COVID-19 epidemic.

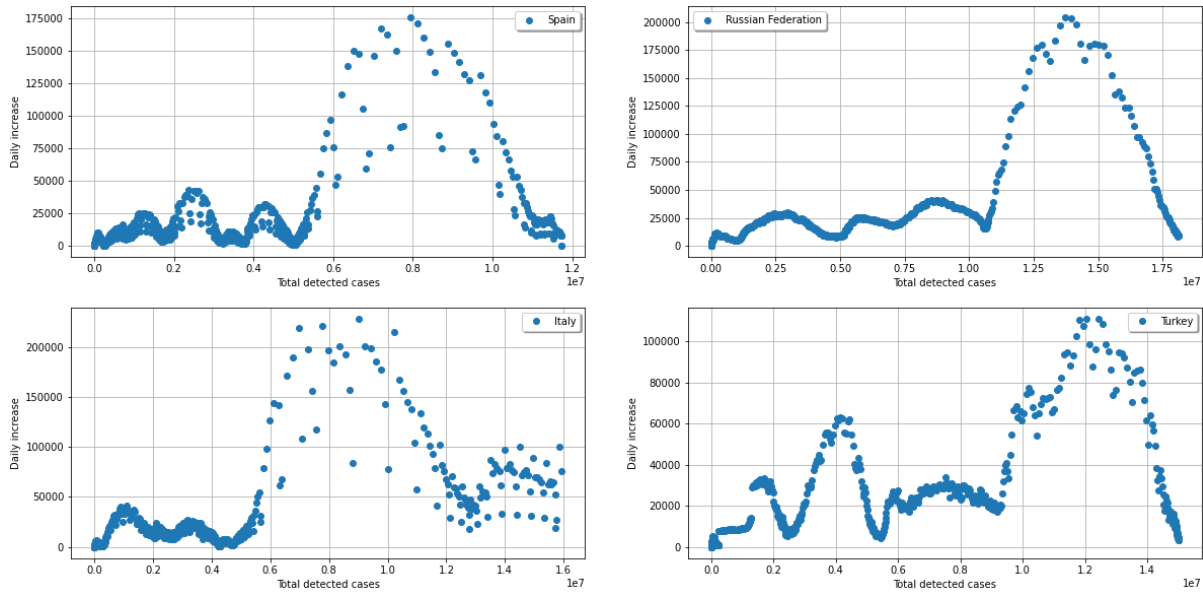


Figure 2: Dynamics of the infection in Spain, Russian Federation, Italy, Turkey

When analyzing the data, we have noted that most countries exhibit a similar behavior, forming wave-like parabolas. Despite some variances in case spread, the overall trends are monotonic. By considering the patterns, we can use models that also behave as monotonic functions to forecast and model future scenarios.

2.2. General properties for logistic mode

Several mathematical models are employed to clarify the propagation of epidemics and forecast their outcomes. Among them, the widely used model is the simple logistic equation (also known as Verhulst model [15])

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{N_{\infty}} \right) \quad (1)$$

Where $N(t)$ represents the number of sick people at time t , N_{∞} is the maximum possible number of sick people, and r is the rate of epidemic growth:

$$\frac{N_{\infty} dN}{dt} = rN(N_{\infty} - N)$$

The solution of this equation is quite simple [15]. Let at the initial moment of time $t = 0, N(t = 0) = N_0$, then the solution will take the following form:

$$N(t) = \frac{e^{rt} N_0 N_\infty}{N_\infty + N_0 (e^{rt} - 1)} \quad (2)$$

The data published by WHO is actually discrete, as it is updated once a day. Therefore, consider the discrete case:

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t} = r N_n \left(1 - \frac{N_{n+1}}{N_\infty} \right), \quad (3)$$

where Δt is the period for which the data changes (in the future we will consider $\Delta t = 1$, since statistical data are often updated at intervals per day, which is quite convenient for calculations). Then, by means of substitution, the equation reduces to the form:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) = F(x) \quad (4)$$

The discrete logistic model (4), as well as the solutions of this equation, has also been repeatedly reproduced in the literature [3-4]. Depending on the λ parameter, the equation will have first $x_0 = 0$ or second fixed points. For $\lambda \in [0, 1)$, $x_0 = 0$ the only attracting fixed point ($|F'(x_0)| < 1$). For $\lambda \in (1, 3]$, two fixed points $x_{01} = 0$, $x_{02} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, $|F'(x_{02})| < 1$, $|F'(x_{01})| > 1$. Thus x_{01} - repulsive, but x_{02} - attractive.

When $\lambda \in (3; 1 + \sqrt{6})$ is increased, cycles appear in the future. Since for the forecast in the future only monotonous functions are needed, I will not consider this case.

2.3 Logistic model for the spread of COVID-19

The first wave was investigated using a logistic model by many mathematicians from all over the world [3-4]. The main idea was to select the parameters of the logistic equation (or generalized logistic equation).

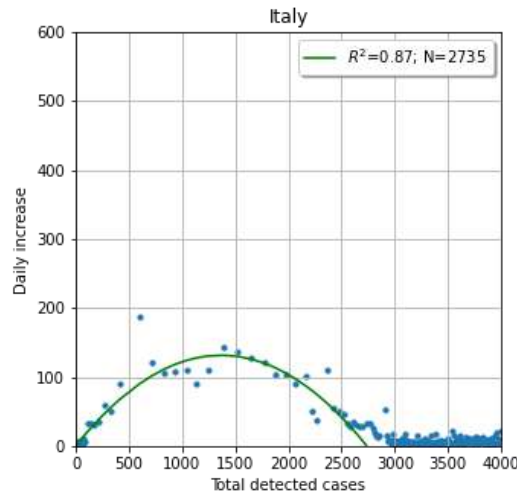


Figure 3. Logistics model on the example of the first wave in Italy

This process is very laborious, but perfectly illustrating the behavior of the epidemic. Figure 3 shows an example of behavior in Italy over 100 days. On the axis Oh, the total number of cases is postponed, and vertically the increase in one day. Blue dots denote real data taken from the WHO website [8]. A green curve is an approximated curve for these points. As you can see, the maximum number of cases calculated for this equation is 2731, which is a good value. One time does not stand still, and coronavirus infection spreads faster and faster. The question arises of predicting the following waves.

In the paper [9] S. Abramov provides a very affordable and well-working method for predicting the behavior of an epidemic. His main idea is to take a certain number of points (17) from them to approximate the curve $N_{n+1} = a(M - N_n)(N_{**} - N_n)$. Substitute the calculated coefficients into the solution of the model, as a result of which you must get a forecast for some time ahead. The work has its own subtleties that I would like to paint, since in the future I will rely on this study.

Stages of my work:

1. Take data from the WHO official website. They are presented in the form of a huge table with the following characteristics: Date and time (T), Infections per day (I), Recoveries per day (R), Deaths per day (D).

2. Additional data is calculated:

a) S the amount of all cases is calculated as follows; Patients until this day + the number of cases today

b) E ended up sick: $E = R + D$ - recovered and died;

c) Average rates of morbidity, end of disease.

3. The coordinates of 17 points (data for today and 16 previous days) are taken to depend on the speed of spread and all cases. The curve is approximated, i.e. parameters are selected so that the graph is closest to these 17 points.

4. The calculated coefficients are inserted into the solution of the original model and a graph of the dependence of the sick on time is built. his work considers models presented in the form of a differential equation, respectively, in order for the graph to be close to reality, the initial condition is taken: x_0 -that is today (T), y_0 -of the diseased today.

5. Further, when new data is received, the parameters are recalculated and a new curve is approximated. thus, a logistic equation with a shift is obtained.

In Figure 4, I have depicted an example of parabolas data approximated on WHO data using the Abramov algorithm. Later in the work, I displayed only one approximated curve to make it more visual.

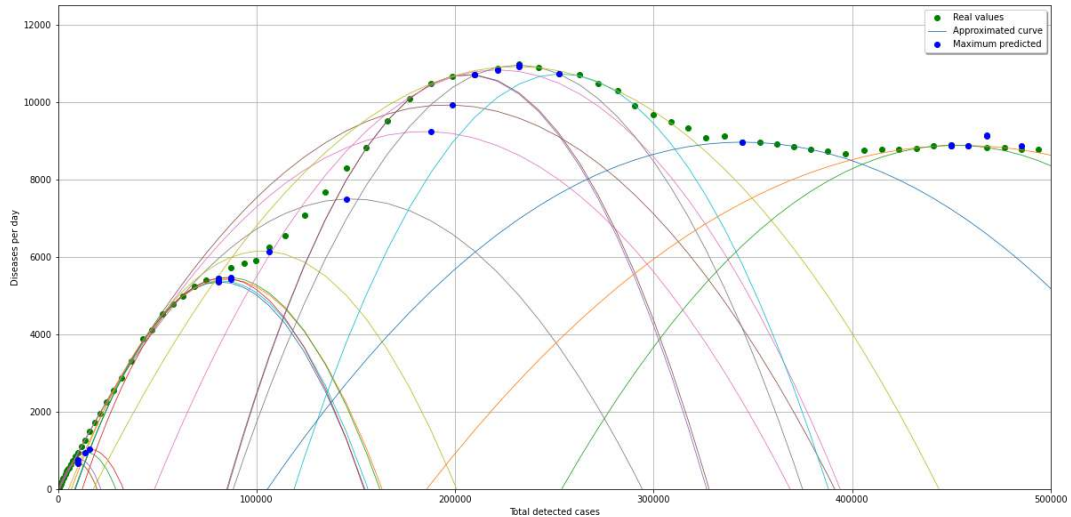


Figure 4. Approximation of curves using a logistic model with a shift.

The simple approach of the shifted model was intriguing, however, several inquiries arose:

1. Why was 17 points chosen? Could fewer points be utilized or could the points be fixed?
2. How long does this projection remain reliable?

In my study, I addressed these questions [10]. To work with the data, I employed two packages, Pandas and NumPy. From there, I calculated the required information (amounts and speeds) before proceeding with approximation. Utilizing the `scipy.optimize` package, I chose the parameters a, K, M and constructed a graph (matplotlib). As we possess the accompanying data during the initial stages, we can observe the closeness of our graph to the real values. To achieve this, I determined the distance between the points and the graph, verifying whether it was within the set interval. Although one could choose any interval, I selected 1000, as the graph has an $R^2 > 0.7$ when evaluating quality. Initially, one may consider checking the correlation coefficient instead, however, certain graphs may not follow an approximated curve, despite possessing a considerable correlation coefficient. Therefore,

minimizing error is pivotal, hence why I chose this approach. Thus, as a result, my algorithm built the following series of graphs. (Figure 5).

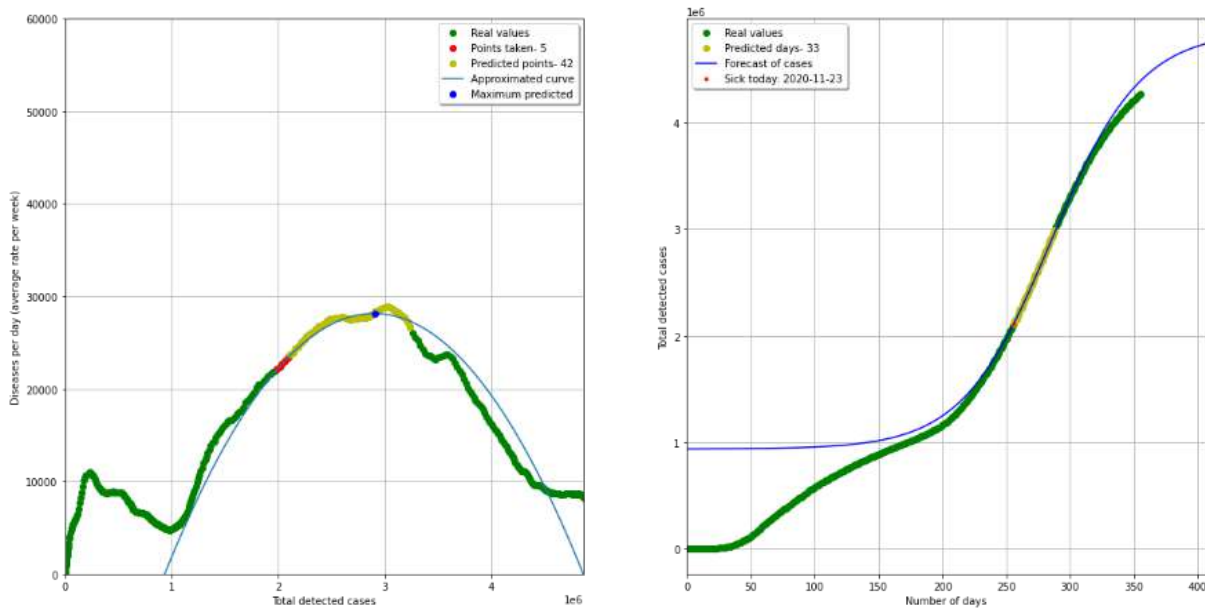


Figure 5. An example of building a shear model and counting predicted points

The **left graph** shows the dependence of the total number of cases on the increase (cases per day):

1. Green dots are real values;
2. The red dots are the data taken to build a parabolas
3. The blue line is a parabola obtained by selecting parameters from red dots (approximated curve);
4. The blue dot is the vertex of the parabola-the maximum that is predicted

The **right graph** is the solution graph:

1. Green dots are the real values;
2. The blue line is the solution of the differential equation (logistic with a shift);
3. The red dot is today's date;
4. Yellow dots are the closest real values to the blue graph.

To determine the necessary quantity of data, I processed my algorithm for different values, beginning with three points and concluding with 25. It transpired that the optimal value of input data should be approximately between 5 and 10, since choosing more or less results in suboptimal outcomes. Additionally, I implemented an algorithm which enhances the approximation through including prior points. Suppose I begin with four days of data and intend to construct a parabola from said data, the algorithm may select parameters that render its branches up than the behavior warrants. And to avoid such situations, I add another point from the previous data. Then the curve is already approximated by 5 values and so on. So I can add another 5 points.

At the moment, I have continued to study this logistic equation. To do this, for each of the parabolas (Figure 4) I collected all the maximums and superimposed them on the original data. As a result, I got the following graph (Figure 6)

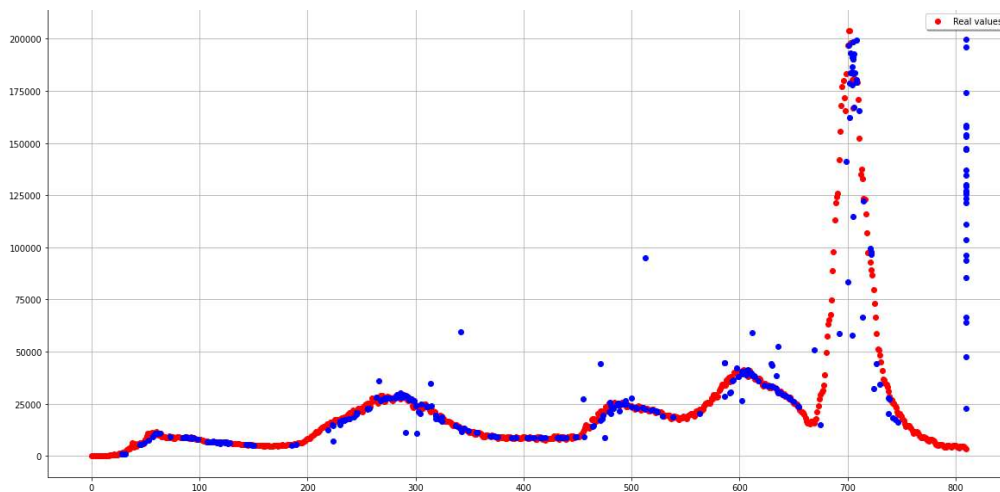


Figure 6. The graph showing real data and the obtained maxima.

The abscissa axis marks days since the beginning of the pandemic, and the ordinate axis marks the number of cases on that day. Here, the red dots are the real values, and the blue ones are the maxima. On an enlarged scale, it looks like in Figure 7.

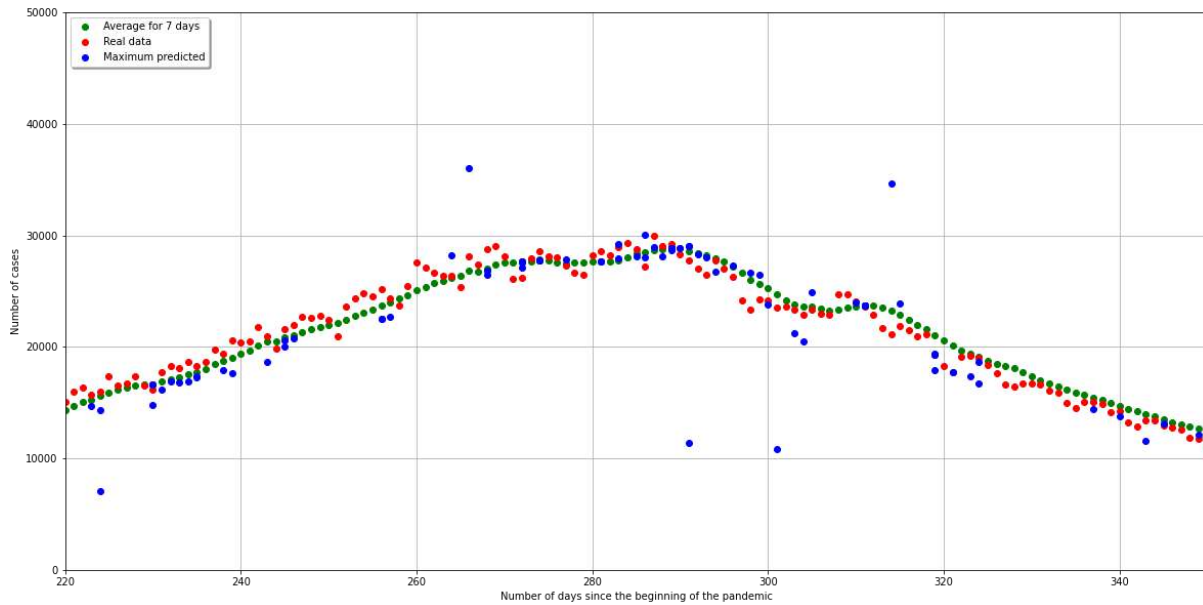


Figure 7. Real data, the obtained maxima and average for 7 days.

According to the last two pictures, we can say that at the moment of transition from one wave to another, the program crashes. More precisely, it shows a sharp rise, which indicates the possible introduction of certain measures. Then the graph becomes more monotonous and more "predictable".

In Figure 7, I also applied green dots-the average for 7 days, because it was based on the average values for 7 days that I built the model myself. This was used for the purpose of evenly "smoothing" the data. It also shows that the blue dots (forecasts) are close enough to the actual values, which shows a good result.

Let's look at the dependence of the number of cases and the predicted data. To do this, I marked the points on the corresponding days on one chart. Horizontally, the number of cases on this day, and vertically, the forecast (Figure 8):

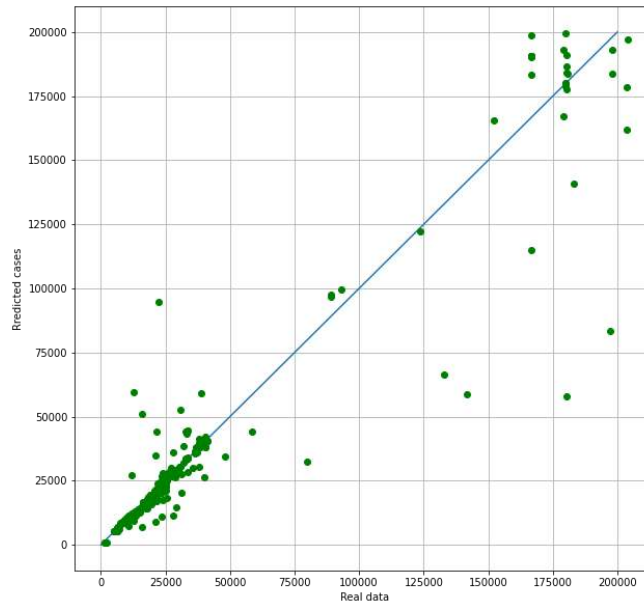


Figure 8. Dependence of the number of cases and predicted data

If you look at the correlation graph, we see that the dependence is quite good, with the help of computer calculations, I got that the correlation coefficient $r_{xy} = 0.68$.

Thus, it can be concluded that the logistic model with a shift well describes the behavior of the epidemic. At the same time, I would like to note that there are no particularly complex calculations, although the algorithm works for a long time. The maximum number of days for which the forecast was made is 71. Of course, such a case is an isolated one, but on average, according to the data for 5 days, the forecast turns out to be 12-15, which is a good indicator.

3. Generalized logistic model

3.1. Logistic model with one additional parameter β

A simple logistic equation shows a good result, but the question arises whether it can be improved. To do this, we introduce an additional parameter and implement a shift algorithm for it. Consider the first equation with an additional parameter β (A special case of the general logistic equation [4,11] with $\alpha = 1$):

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)^\beta \quad (5)$$

Let's study the dynamics of this equation, for the case $N_\infty = 1$. To begin with, we will find fixed points and determine their type. To do this, we equate our equation to N and solve the equation (8):

$$rN(1 - N)^\beta = N \quad (6)$$

$$N(r(1 - N)^\beta - 1) = 0$$

the first fixed point $N_1 = 0$, the second is $N_2 = 1 - \frac{1}{\beta\sqrt[r]{r}} \Rightarrow N_2 = \frac{\beta\sqrt[r]{r}-1}{\beta\sqrt[r]{r}}$.

Then $F'(N) = r(1 - N)^\beta - r\beta N(1 - N)^{\beta-1}$ and $|F'(N_1)| < 1$, when $|r| < 1$ - stable and $|r| > 1$ - unstable. But for point N_2 we have: $|F'(N_1)| < 1$

$$\left|1 - r\beta \left(1 - r^{\frac{-1}{\beta}}\right) r^{\frac{1-\beta}{\beta}}\right| < 1$$

$$\left|1 - \beta \left(r^{\frac{1}{\beta}} - 1\right)\right| < 1$$

$$0 < \beta \left(r^{\frac{1}{\beta}} - 1\right) < 2 \quad (7)$$

And $|F'(N_1)| > 1$, when $-2 > \beta \left(r^{\frac{1}{\beta}} - 1\right) > 0$.

For example, let's construct a Lamerey diagram for various parameters r and β .

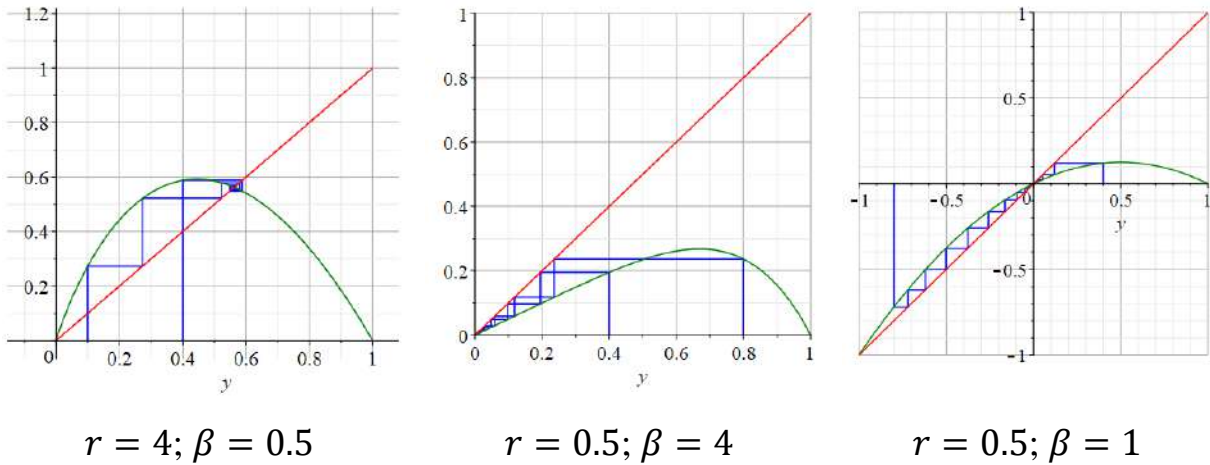


Figure 9. Lamerey diagram for $\frac{dN}{dt} = rN(1 - N)^\beta$

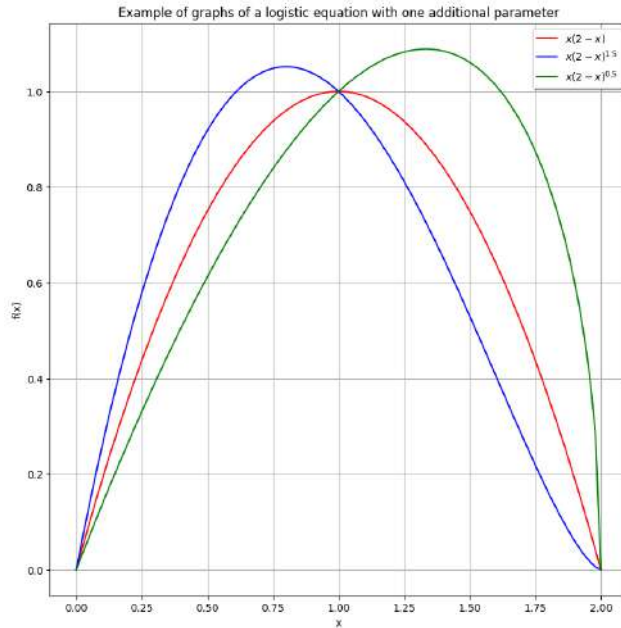


Figure 10. Comparison of the logistic equation with one additional parameter β .

Based on all of the above, it can be concluded that with a discrete dynamical system of this type and certain parameters, the approximation will be quite close to reality. However, introducing an additional parameter leads to nonlinearity, which makes solving the equation difficult and selecting a parameter in general. The "sliding" selection algorithm for coefficients was also implemented in Python programming language for $N_{n+1} = a(M - N_n)(N_{**} - N_n)^\beta$.

It is important to note that the algorithm cannot be implemented for all values, as the fractional exponent is only acceptable for positive values, leading to large gaps in the forecast.

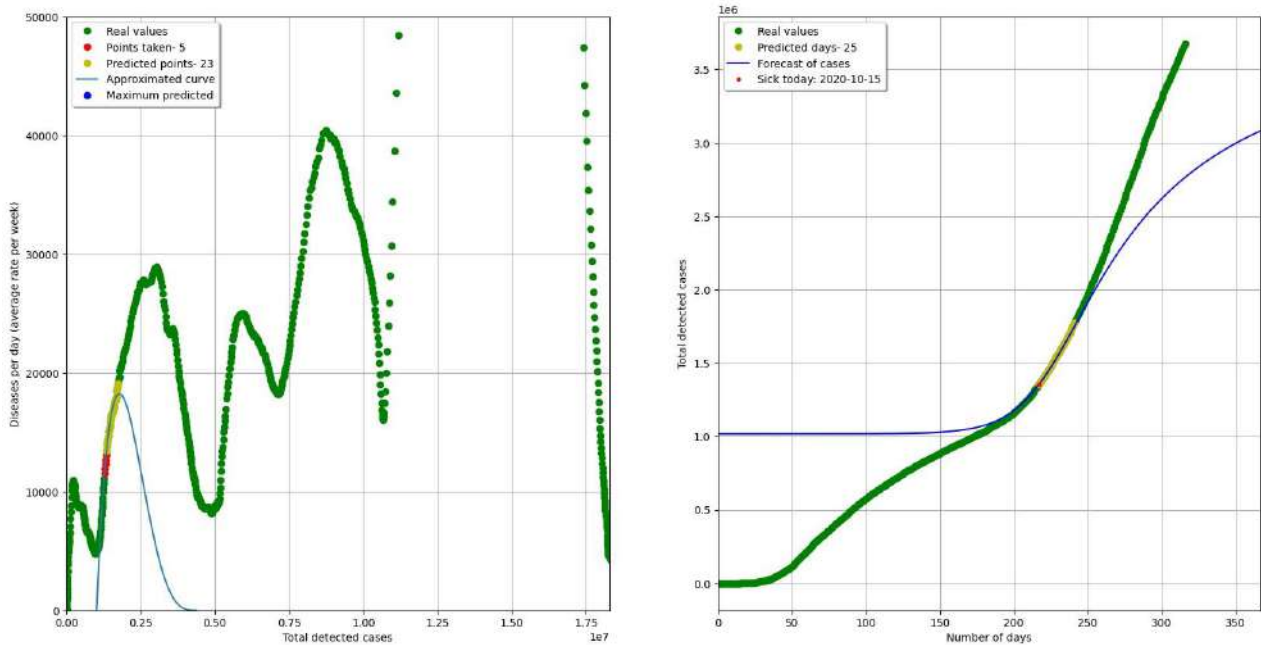


Figure 11. Implementation of approximation of the logistic equation with one additional parameter $\beta = 1.76$.

In addition to a decrease in performance, there is also a problem with emissions. Not any "parabola" is suitable for us, but due to the nonlinearity, it is harder to separate unnecessary ones from the necessary ones. This affects three criteria:

- 1) the local maxima of the function differ from the global ones, which means that either the shift method is not suitable, or the equation itself.
- 2) the forecast itself is based on a smaller number of days, unlike the logistic model and Gompertz model.
- 3) despite the complexity of the calculations, as in my course work, I launched an algorithm for a different number of points. Since the number of parameters has increased, it is better to take the initial data for approximation from 6 to 10 (Table 1).

Table 1. Selection of input data and forecast.

Number of days for approximation	Average forecast	Min forecast	Max forecast
5	7	0	23
6	10	1	25
7	11	3	30
8	10	3	23
9	9	2	22
10	9	3	24
11	7	0	21
12	6	1	21
13	6	0	20
14	5	1	19
15	5	0	16

3.2. Logistic model with two additional parameters α and β .

In various sources, it is considered to be a logistic equation with two parameters, as a generalized equation. Consider a generalized model of a logistic equation containing four constants [4,11].

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)^\alpha \left(1 - \frac{N(t)}{N_\infty}\right)^\beta, \quad (8)$$

where $N(t)$ is the number of sick people, N_∞ is the maximum possible number of sick people and r is the rate of epidemic growth. When $\alpha = \beta = 1$ equation (10) coincides with a simple logistic equation (1), the solution of which is trivial. The generalized logistic equation is not solved exactly in the general case, but the nature of the solution remains unchanged – the number of cases monotonically approaches N_∞ . An increase in the number of parameters, of course, makes it possible to more accurately describe the curve of the spread of the epidemic, but on the other hand, it requires data for a longer period of time,

which does not contribute to an early forecast. In fact, the data is given with a discreteness of one day, so it is necessary to solve the difference equation:

$$N_{n+1} - N_n = r(\Delta t)N_n^\alpha \left(1 - \frac{N_n}{N_\infty}\right)^\beta \quad (9)$$

Here $\Delta t = 1$ day, the natural scale in medical statistics, and its value is omitted everywhere. Stochastic regimes are possible if the growth rate (r) is high. In the case the classical logistic equation $\alpha = \beta = 1$ for $r < 2$, the solution of equation (11) is described by a monotone function, as well as equation (1)

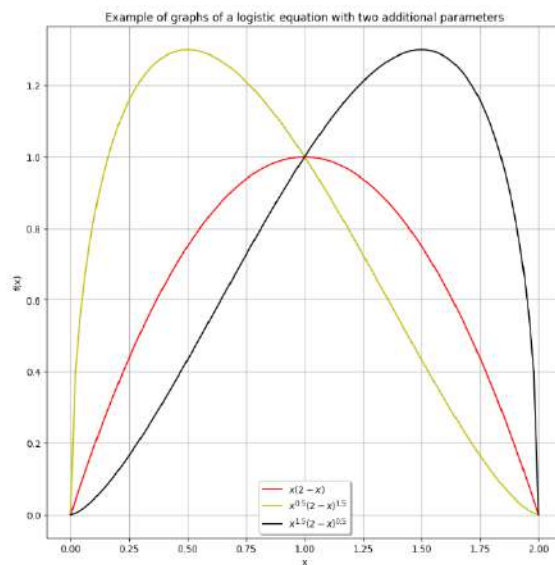


Figure 12. Comparison of the Logistic equation with two additional parameters

Now let's try the algorithm I implemented for this equation. As in the case with the introduction of one parameter, the same problems appear that I described in the previous chapter:

- 1) a large computational potential is needed;
- 2) a large amount of input data is needed, which contributes to the deterioration of the forecast;
- 3) the average number of predicted days is falling;
- 4) a large number of "outliers" - false approximations;

5) the model is not built for any days, as NAN values may appear.

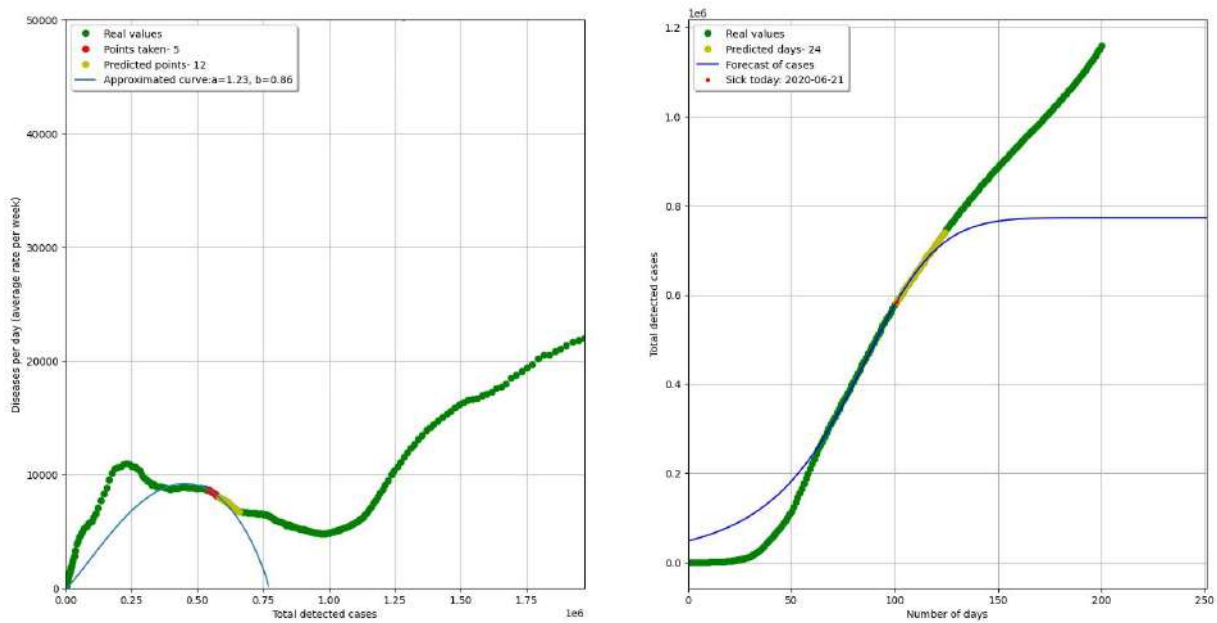


Figure 13. Example of an algorithm implementation for a generalized logistic model with parameters $\alpha = 1.23, \beta = 0.86$.

Figure 13 shows an example of the algorithm implementation. In this case, an example of the first wave is shown, Then the forecast is built a little worse. Also, run the algorithm several times and formalized the received data in Table 2.

Table 2. Selection of input data and forecast for generalized logistic model.

Number of days for approximation	Average forecast	Min forecast	Max forecast
5	5	0	14
6	7	1	19
7	7	1	23
8	8	0	18
9	6	1	18
10	6	0	16
11	5	0	14
12	5	0	13
13	3	0	14
14	3	0	13
15	3	0	12

3.3. Generalized logistic model of type II.

The logistic model can be presented not only in the types described above, but also with other parameters entered. For example, in the work of A.S. Bratus [12], the following type of generalized logistic model is considered:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \left(\frac{N}{N_\infty} \right)^\beta \right) \quad (10)$$

This equation is not much different from the previous one, however, it is of great interest for computational ability. Consider the dynamics of this equation. To do this, we take $N_\infty = 1$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N^\beta) \quad (11)$$

$$rN(1 - N^\beta) = N$$

$$N(r(1 - N^\beta) - 1) = 0$$

the first fixed point $N_1 = 0$, the second is $N_2 = \sqrt[\beta]{1 - \frac{1}{r}}$. Then $F'(N) = r(1 - N^\beta) + r\beta N^\beta$ and $|F'(N_1)| < 1$, when $|r| < 1$ - stable and $|r| > 1$ - unstable. But for point N_2 we have: $|F'(N_1)| < 1$

$$\left| 1 + r\beta \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right| < 1$$

$$|1 + r\beta - \beta| < 1$$

$$0 < \beta(r - 1) < 2 \quad (12)$$

And $|F'(N_1)| > 1$, when $-2 > \beta(r - 1) > 0$.

For example, let's construct a Lamerey diagram for various parameters r and β .

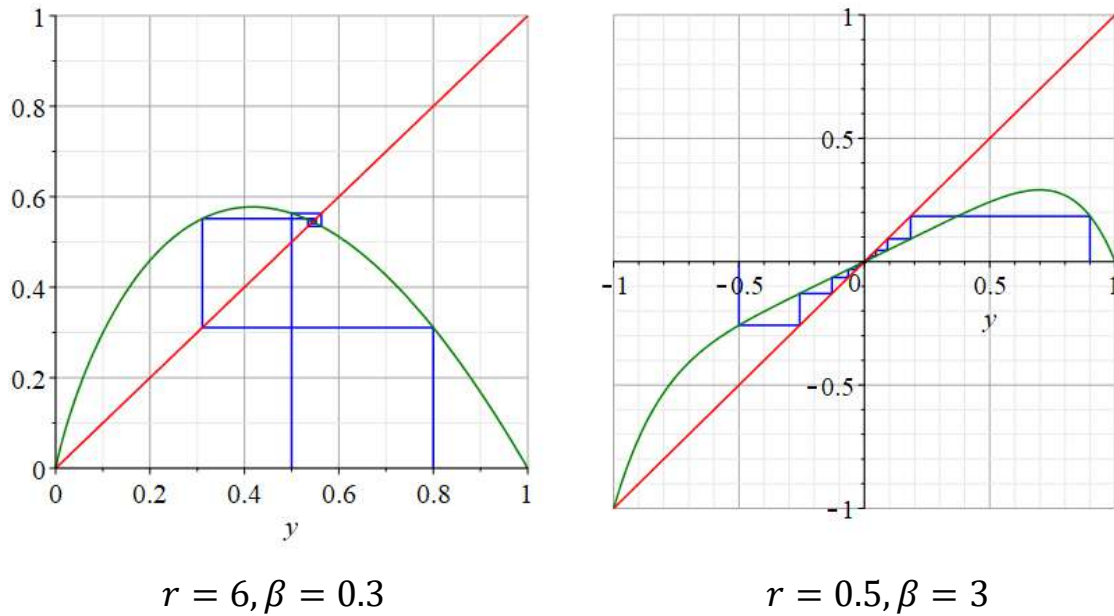


Figure 14. Lamerey diagram for $\frac{dN}{dt} = rN(1 - N^\beta)$

Of course, the Lamerey diagram considers the general case, but in the following case only positive values will be considered. By applying my algorithm to the discrete case of $N_{n+1} = a(M - N_n)(N_{**} - N_n^\beta)$, I got slightly better results.

- 1) the model does not produce empty NAN values, therefore the approximations obtained are several times larger;
- 2) from the previous paragraph, optimization of the computational process and an increase in the speed of calculations follows;
- 3) the average forecast has increased by several days, relative to the previous model;
- 4) however, it is still worth taking a little more input data for a better forecast (in 5-7 days);
- 5) there are also a lot of emissions.

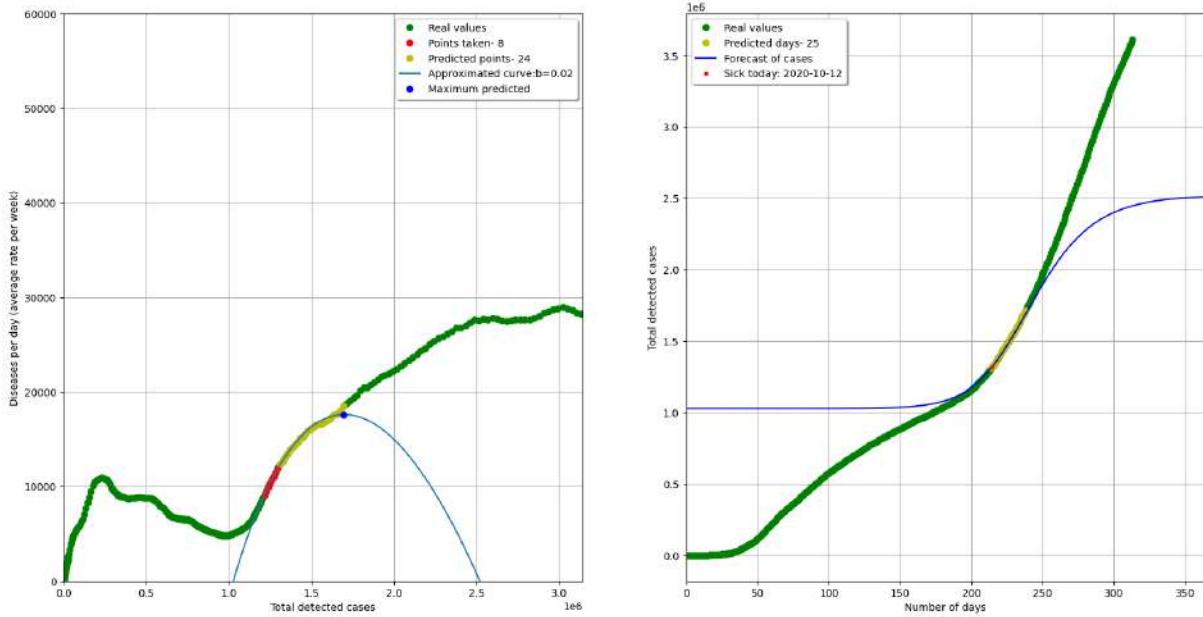


Figure 15. Example of an algorithm implementation for a generalized logistic model of type II with parameters $\beta = 0.02$.

Then there is an interest: what happens if you enter another parameter, for example $N_{n+1} = a(M - N_n^\alpha)(N_{**} - N_n^\beta)$? Unfortunately, the indicators remain the same. The forecast is based on approximately the same number of days, a lot of emissions.

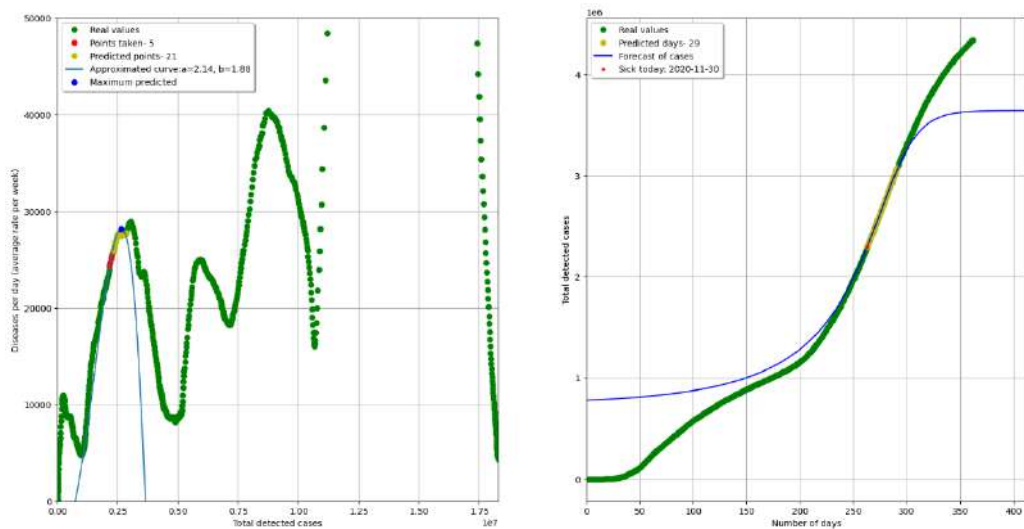


Figure 16. Example of an algorithm implementation for a generalized logistic model of type II with parameters $\alpha = 2.14, \beta = 1.88$.

To compare these models below, I have given a table with the indicators obtained when running the algorithm several times.

Table 3. Selection of input data and forecast for generalized logistic model of type II.

Number of days for approximation	Average forecast		Min forecast		Max forecast	
	β	α, β	β	α, β	β	α, β
5	8	7	1	1	22	23
6	11	10	1	0	24	25
7	12	11	0	0	27	26
8	10	9	1	1	23	22
9	9	8	0	0	22	25
10	8	9	0	0	24	28
11	9	7	0	0	21	19
12	7	6	0	0	23	21
13	6	3	0	1	30	23
14	5	5	0	0	19	16
15	5	4	0	0	16	19

3.4. Conclusion about logistic models

I have analyzed various models to predict the spread of COVID-19, including the conventional logistic model and generalized models with parameters. While these models initially showed promising results, using the Abramov method to approximate data shifts proved impractical. Through my analysis, I have found that the simplest logistic equation is the most optimal option for accurately forecasting the spread of the virus.

From a programming standpoint, introducing new parameters can improve accuracy to some extent. However, this approach requires a vast amount of input data, which may not always be available in a timely manner due to ongoing measures to contain the disease and the resulting delay in posting data on the WHO website. Additionally, due to the non-linearity of these

models, calculations become increasingly complex, leading to empty values and requiring multiple parameter recalculations.

Furthermore, a single equation can only represent the peak of the epidemic and indicate the need for measures to be taken. While this provides significant forecasts during an epidemic, it is essential to explore further analysis to obtain deeper insights.

4. Models containing logistic equations.

4.1. SI-model

The SI model is a simple mathematical model that describes the spread of infection within a population. It is a two-component system that consists of infected individuals and susceptible individuals. Infected individuals are those who have contracted the disease and can transmit it to others, whereas susceptible individuals have not been infected yet and may become infected if they come into contact with infected individuals.

The model assumes that the probability of infection is proportional to the number of infected individuals in the population. The rate of spread of the disease depends on the saturation of the oral cavity with the infected mixture. A differential equation is used to describe the spread of the disease.

The dynamics of the number of each of the groups identified in any model, as a rule, is given by differential equations; pioneering work in this area was carried out by W. Kermak and A. McKendrick [13]. So, the SI model can be described by the system

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{AIS}{N} \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{AIS}{N} \\ S + I = N \end{cases} \quad (13)$$

Here, I is the number of infected individuals, S is the number of susceptible individuals, N is the total population, and A is the infection rate. The meaning of the above equations is that the rate of spread of infection is proportional to the number of meetings of susceptible individuals with infected, which means the product of the values S, I . Turning to the only equation with respect to $I(t)$, we can write:

$$\frac{dI}{dt} = AI \left(1 - \frac{I}{N}\right), I(0) = I_0 \quad (14)$$

Thus, we get that the SI system reduces to the simplest logistic equation, which was studied in Chapter 2.3. The model is useful for making predictions about the speed of infection spread, the likelihood of an epidemic, and measures that should be taken to prevent it. However, it has limitations, such as not taking into account the probability of infection changing over time and location.

The following obvious limitations are imposed on the model (13):

1. The population size does not change due to the birth or death of individuals (for example, because the population is studied for a short period of time).
2. The area in which the population is placed is closed, meaning that any changes to the number of individuals in the population due to migration are excluded.
3. The population is assumed to be quite large. Since the number of sick and healthy individuals are discrete quantities, it is not entirely accurate to describe their dynamics using differential equations. In order for the error to be small, it is necessary for the increments of the number of individuals indicated by the dI and dS differentials to be small compared to I and S themselves.

These types of models are easy to understand and research. However, ordinary differential equations do not take into account the local features of individual movement within the area, and it can be challenging to determine the coefficients included in them (such as beta, and in more complex models, others).

In the paper of Syromyasov A., Malkov V. [14], a more detailed study of the SI system for its application in the study of the epidemic is given.

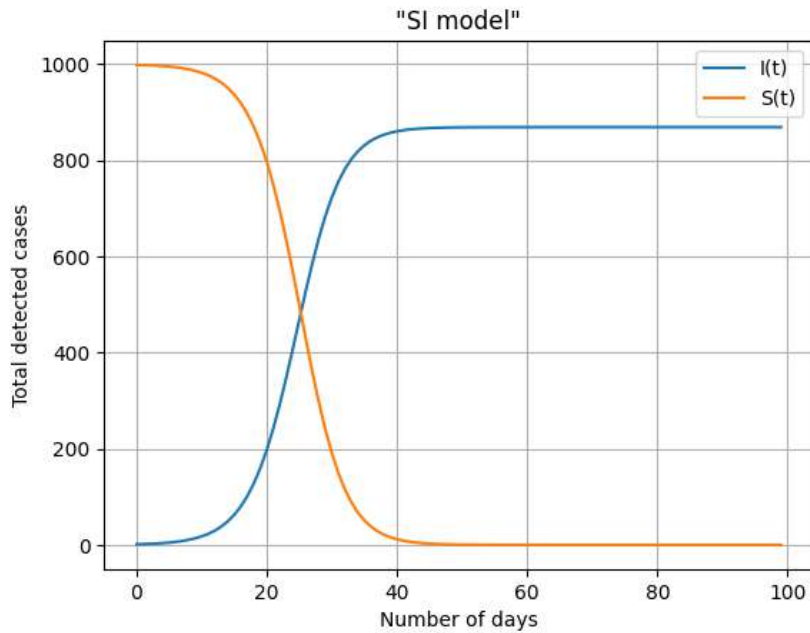


Figure 17. SI model with parameters: $A = 300$; $N = 1000$

However, to apply the shift algorithm, you need to enter a shift parameter that affects the behavior of the system. Therefore, it was concluded that it is better to transfer the origin of coordinates each time, thereby applying the system directly.

4.2. SIR-model

The SIR model [1] for predicting the spread of COVID-19 is a mathematical model that divides the population into three main compartments: susceptible (S), infected (I), and recovered (R).

The susceptible compartment consists of individuals who are susceptible to infection but have not yet been exposed or infected with the COVID-19 virus. The infected compartment includes individuals who are infected with the virus and can spread it to others. Finally, the recovered compartment includes individuals who have been infected with the virus and have recovered from the disease, thereby gaining immunity.

The SIR model assumes that the transmission rate of COVID-19 is proportional to the number of susceptible individuals in the population and the number of infected individuals they come in contact with. The recovery rate, on the other hand, is assumed to be proportional to the number of infected individuals, reflecting the fact that as more people recover, the pool of available hosts for the virus diminishes.

The model can be expressed in the following set of differential equations:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \\ S + I + R = N \end{cases} \quad (15)$$

where β is the transmission rate, γ is the recovery rate, and $S(t)$, $I(t)$, and $R(t)$ represent the number of susceptible, infected, and recovered individuals at time t .

The model allows us to estimate the progression and peak of the outbreak by simulating the dynamics of the disease over time. In addition, it can be used to evaluate how different interventions (such as social distancing measures or vaccination programs) may impact the spread of the disease. Overall, the SIR model is a valuable tool for forecasting and mitigating the impact of the COVID-19 pandemic on a global scale.

It should be noted that if there is no immunity after a disease during the time periods being studied (such as with seasonal flu), a specific version of model (15) is the SI model. This model's solution can be simplified to the logistic equation (16).

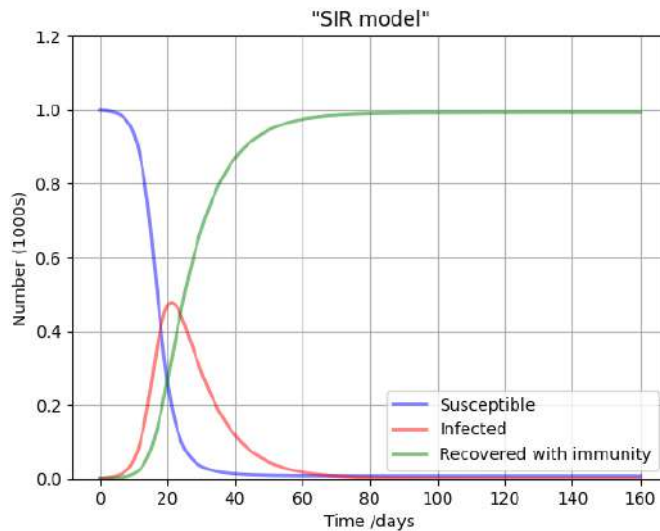


Figure 18. SI model with parameters: $A = 300$; $N = 1000$, $\gamma = 0.1$

Thus, it turns out that the main forecast models are based on the logistic equation. Accordingly, it is possible to adapt the approximation program for systems, but this requires a deeper study of systems.

4.3. Agent-Based Model

Logistic models are used to describe the spread of COVID-19 and can take into account power-law increases in cases [3,4,11]. More complex compartmental models divide the population into groups such as susceptible, infected, and recovered, but are unable to consider individual characteristics or random factors [1,14]. One significant limitation of the SIR model and its variations is the inability to consider the random factors that may affect the spread of an epidemic, as well as the unique characteristics of individuals. To address this limitation, agent-based models can be used to model the epidemic. With this approach, the population is seen as a group of agents who possess certain constant and variable characteristics that determine their behavior and interaction with others. Parameters such as the disease's characteristics, preventive measures, and restrictions are also included in the model. The

meanfield-type game model combines the SIR model (or its variations) with the agent model, taking into account the rationality of the agents.

In articles [16-17], an improved agent-based model for simulating the spread of COVID-19 using the Monte Carlo method is presented. The multicenter model considers a region as a collection of separate districts, where agents interact with each other using the pendulum migration mechanism to represent the interaction between districts. This approach has successfully simulated four waves of COVID-19 in the Nizhny Novgorod region and shows good agreement with official statistics. Accurate information on the number of migrants in specific cities/districts of the region is necessary for better modeling results. The model also considers the vaccination process during the spread of the infection. Results show that, even with a significant weakening of restrictive measures, vaccinating the population can reduce the number of cases and COVID-19-related deaths by up to 9 times, thus, highlighting the importance and effectiveness of vaccinations.

5. Conclusion

This paper discusses the development of an algorithm for implementing mathematical models for epidemic forecasting. Special attention is paid to the logistic equation, on the basis of which various forecasting models have been created. The stability and theoretical aspects of these models were studied. I implemented an algorithm for constructing approximated curves in the Python programming language. During the research, various types of logistic equations with additional parameters were considered, leading to the need to account for the non-linearity of the equations. However, the forecast based on these models was not optimal. Thus, it can be concluded that a more accurate forecast can be achieved by using a simple logistic equation or the Gompertz model. A brief part of the above results was presented at the conference "Nonlinear Waves-22" [18] and the second conference of Mathematical Centers of Russia [19].

The paper also considers other models, some of which are logistic models. The simplest models, such as SI and SIR, are directly related to the logistic equation. However, there are more complex models, such as agent-based models, which include a set of SIR models and modifications for individual agents, resulting in millions of equations. Two articles published by my supervisor (co-authored) [16-17] serve as an example.

References

[1] Olga Krivorotkoa, Mariia Sosnovskaiab, Ivan Vashchenkob, Cliff Kerrc, Daniel Lesnic – Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New Yorkstate and UK: Parameter identification algorithm// Infectious Disease Modelling. –2022. –V.7 – P. 30-44

[2] Nor Nisha Nadhira Nazirun, Nashuha Omar, Koshelya Selvaganeson, Asnida Abdul Wahab – A Review on Machine Learning Approaches in COVID-19 Pandemic Prediction and Forecasting//Malaysian Journal of Medicine and Health Sciences. – 2022. – V.18 –P. 78-84

[3] E. Pelinovsky, A. Kurkin, O. Kurkina, M. Kokolina, A. Epifanova - Logistic equation and COVID-19// Chaos, Solitons and Fractals. – 2020.- V.140.-P.110241

[4] E. Pelinovsky, M. Kokoulina, A. Epifanova, A. Kurkin, O. Kurkina, M. Tang, E. Macau, M. Kirillin - Gompertz model in COVID-19 spreading simulation // Chaos, Solitons and Fractals.- 2022.- V.-154. - P.111699

[5] Nicholas Tze Ping Pang, Assis Kamu, Mohd Amiruddin Mohd Kassim, Chong Mun Ho.- Monitoring the impact of Movement Control Order (MCO) in flattening the cumulative daily cases curve of Covid-19 in Malaysia: A generalized logistic growth modeling approach.// Infectious Disease Modelling V. 6, 2021, P. 898-908

[6] Bruno Hebling Vieira, Nathalia Hanna Hiar, George C. Cardoso, Uncertainty Reduction in Logistic Growth Regression Using Surrogate Systems Carrying Capacities: a COVID-19 Case Study// Brazilian Journal of Physics.- 2022.- V.- 52. P.-15

[7] N.B. Noll,9 I. Aksamentov, V. Druelle, A. Badenhorst, B. Ronzani, G. Jefferies, J. Albert, R. Neher. - COVID-19 Scenarios: an interactive tool to

explore the spread and associated morbidity and mortality of SARS-CoV-2. 2020 medRxiv 2020.05.05.20091363.

[8] World Health Organization (WHO) // <https://www.who.int/ru>

[9] Abramov S.M., Travin S.O. - On the Analysis, Modeling and Forecasting of the Coronavirus Epidemic in Russia//Digital Economy. - 2020.- V.- 2(10). P. 5-19

[10] Suroegina A. E. Analysis and prediction of characteristics of COVID-19 : Term paper – National Research University - Higher School of Economics - Nizhniy Novgorod – 2022.

[11] Kurkin A.A., Kurkina O.E., Pelinovsky E.N. - Logistic models of epidemic spread // Published of the R.E. Alekseev NSTU. 2020 Vol. 2(129). pp. 9-18.

[12] Bratus A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P. Dynamic systems and models of biology – Draft-2011.-P.28-33

[13] W.O. Kermack, A.G. McKendrick, A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1927, V. 115, N 772, P. 700–721.

[14] Syromyasov A. O., Malkov V. E. - Simulation SI-model of epidemic spread in a closed population.- Saransk,- 2022. -P. 185-192

[15] Verhulst P. F.- Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Corresp. Math. Et Pays. 1838 Vol. 10 P. 113–121.

[16] Kirillin, M., Khilov, A., Perekatova, V., Sergeeva, E., Kurakina, D., Fiks, I., Saperkin, N., Ming Tang, Yong Zou, Elbert Macau, and Pelinovsky, E. Simulation of the first and the second waves of COVID-19 spreading in Russian Federation regions using an agent-based model, *Journal of Biomedical Photonics and Engineering*, 2021, vol. 9, No. 1, 010302

[17] Kirillin, M., Khilov, A., Perekatova, V., Sergeeva, E., Kurakina, D., Fiks, I., Saperkin, N., Ming Tang, Yong Zou, Elbert Macau, and Pelinovsky, E. Multicentral agent-based model of four waves of COVID-19 spreading in Nizhny Novgorod Region of Russian Federation. *Journal of Biomedical Photonics and Engineering*, 2023, vol. 9, No. 1, 010306.

[18] A.E. Suroegina, E.N. Pelinovsky. COVID-19 analysis and prediction //NONLINEAR WAVES – 2022, November 7 – 13, 2022, Nizhny Novgorod/ Ed: Prof. RAS A.V. Slyunyaev - P. 262-264

[19] Abstracts of reports of the Second Conference of Mathematical Chapters of Russia (November 7-11, 2022, Moscow State University, MIAN, Moscow)//[https://www.mathnet.ru/ConfLogos/2184/Prikladnaya_matematika -
Abstracts.pdf](https://www.mathnet.ru/ConfLogos/2184/Prikladnaya_matematika_-_Abstracts.pdf)

Appendix 1. The program for the approximation algorithm

Data preparation

```

DATA['Закончило болеть']=DATA['Выздоровлений за день']+DATA['Смертей за день']
DATA['Пока больны']=DATA['Заражений за день']-DATA['Закончило болеть']
skoroc_t_zarazhenia=[]
skoroc_t_vyzdoravlenia=[]
skoroc_t_bolezni=[]
for i in range(0,len(DATA['Date Time'])):
    if (i<7):
        summa1=0
        summa2=0
        summa3=0
        for j in range(0,i+1):
            summa1+=DATA['Заражений за день'][j]
            summa2+=DATA['Закончило болеть'][j]
            summa3+=DATA['Пока больны'][j]
        skoroc_t_zarazhenia.append(summa1/(i+1))
        skoroc_t_vyzdoravlenia.append(summa2/(i+1))
        skoroc_t_bolezni.append(summa3/(i+1))
    elif (i>=7):
        summa1=0
        summa2=0
        summa3=0
        for j in range(7):
            summa1+=DATA['Заражений за день'][i-j]
            summa2+=DATA['Закончило болеть'][i-j]
            summa3+=DATA['Пока больны'][i-j]
        skoroc_t_zarazhenia.append(summa1/7)
        skoroc_t_vyzdoravlenia.append(summa2/7)
        skoroc_t_bolezni.append(summa3/7)
DATA['Средняя скорость заболеваемости']=skoroc_t_zarazhenia
DATA['Средняя скорость прекращения болезни']=skoroc_t_vyzdoravlenia
DATA['Средняя скорость протекания болезни']= skoroc_t_bolezni
vsego_bolelo=[]
v=0
for m in range(0,len(DATA['Date Time'])):
    v+=DATA['Заражений за день'][m]
    vsego_bolelo.append(v)
DATA['Всего болело']=vsego_bolelo
vsego_zakonchilo=[]
vv=0
for rer in range(0,len(DATA['Date Time'])):
    vv+=DATA['Закончило болеть'][rer]
    vsego_zakonchilo.append(vv)
DATA['Всего закончило болеть']=vsego_zakonchilo
Y=DATA['Средняя скорость заболеваемости']

```

```
X=DATA['Всего болело']
T=DATA['DateTime']
Y1=DATA['Средняя скорость прекращения болезни']
X1=DATA['Всего закончило болеть']
```

```
ckolko_znacheniy=780
```

```
t=[]
```

```
for l in range(0,len(DATA['DateTime'])):
```

```
    t.append(l)
```

```
tt=np.array(t) #All this is for data preparation
```

```
def distant(Y, Y1):
```

```
    return ((Y-Y1)**2)**0.5
```

```
def distance(x1, y1, x2, y2):
```

```
    c = sqrt((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2)
```

```
    print(c)
```

Функция для расчётов и построения графика

```
def stroica22(chislo_tochek,X,Y,T): #main function
```

```
    vse_paraboly=[]
```

```
    max_vse=[]
```

```
    shagi_vse=[]
```

```
    rastoyan_vse=[]
```

```
    dis_vse=[]
```

```
    prognoz_vse=[]
```

```
    toчки_vse=[]
```

```
    dni_rastoyan_vse=[]
```

```
    dni_prognoz_vse=[]
```

```
    reshenny=[]
```

```
    vzyat_toчки=[]
```

```
    rastoyan=[]
```

```
    prognoz=[]
```

```
    dni_rastoyan=[]
```

```
    dni_prognoz=[]
```

```
def dlyaresh_parab(values_x, a, M, N,be): #input equation
```

```
    #return a*((M-values_x)**al)*(N-np.log(values_x))**be
```

```
    return a*(M-values_x)*(N-values_x**be)
```

```
    # return a*((M-values_x))*((N-values_x))**be
```

```
# def dlyaresh_parab_p0(values_x, a, M, N):
```

```
#     #return a*((M-values_x)**al)*(N-np.log(values_x))**be
```

```
#     return a*(M-values_x)*(N-values_x)
```

```
def f(x, y):#для интегрирования
```

```
    return a*(M-y)*(N-y**be)
```

```
    # return a*((M-y))*((N-y))**be
```

```
    #return a*((y-M)**al)*(np.log(y)-N)**be
```

```
def dsolve(func, x0, y0): #solution by the Runge-Kutta method
```

```
    sol = [[x0], [y0]]
```

```
    de = ode(func)
```

```
    de.set_integrator('dopri5')
```



```

dt = 0.01
de.set_initial_value(y0, x0)
while de.successful() and de.t <= XLIM[1]:
    de.integrate(de.t + dt)
    sol[0].append(de.t)
    sol[1].append(de.y[0])
de.set_initial_value(y0, x0)
while de.successful() and de.t >= XLIM[0]:
    de.integrate(de.t - dt)
    sol[0].insert(0, de.t)
    sol[1].insert(0, de.y[0])
return sol
def graf(a,M,N,X,Y,T,be): #plotting
# y_fit1 = a*((M-X)*(N-X)**be
y_fit1 = a*(M-X)*(N-X**be)
#y_fit1 = a*(M-X)*(N-np.log(X))
y_fit11=y_fit1.tolist()
K_max_t=y_fit11.index(max(y_fit11))
shagi_vse.append(K_max_t)

dis=[]
dlya_rasstoyan=i
# qwqwqwqw=distant((a*((M-X[dlya_rasstoyan]))*((N-X[dlya_rasstoyan]))**be,Y[dlya_rasstoyan])
qwqwqwqw=distant(a*(M-X[dlya_rasstoyan])*(N-X[dlya_rasstoyan]**be),Y[dlya_rasstoyan])
#qwqwqwqw=distant(a*(M-X[dlya_rasstoyan])*(N-math.log(X[dlya_rasstoyan])),Y[dlya_rasstoyan])
while qwqwqwqw < 1000:
    dis.append(qwqwqwqw)
    dlya_rasstoyan=dlya_rasstoyan+1
# qwqwqwqw=distant((a*((M-X[dlya_rasstoyan]))*((N-X[dlya_rasstoyan]))**be,Y[dlya_rasstoyan])
qwqwqwqw=distant(a*(M-X[dlya_rasstoyan])*(N-X[dlya_rasstoyan]**be),Y[dlya_rasstoyan])
#qwqwqwqw=distant(a*(M-X[dlya_rasstoyan])*(N-math.log(X[dlya_rasstoyan])),Y[dlya_rasstoyan])
rastoyan.append(dis)
prognoz.append(len(dis))

K_max=int(max(y_fit1))
max_vse.append(K_max)
plt.figure(figsize=(20, 10))
plt.subplot(1, 2, 1)

plt.plot(X, Y, 'go', label="Real values")
plt.plot(X[i-chislo_tochek_izmen:i], Y[i-chislo_tochek_izmen:i], 'ro', label="Points taken-
{}".format(chislo_tochek_izmen))
plt.plot(X[i:dlya_rasstoyan], Y[i:dlya_rasstoyan], 'yo', label="Predicted points- {}".format(len(dis)))
plt.plot(X, y_fit1, label="Approximated curve:b={}".format(round(be,2) ))
vse_paraboly.append(y_fit1)
plt.xlabel("Total detected cases")
plt.ylabel("Diseases per day (average rate per week)")
plt.plot(X[K_max_t],K_max, 'bo', label="Maximum predicted")
plt.xlim(0,X[i]+0.1*X[800])

```

```

plt.ylim(0,60000)
plt.legend(loc = 'best', fancybox = True, shadow = True)
plt.grid(True)
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.xlabel('Number of days')
plt.ylabel('Total detected cases')
plt.xlim(0,i+150)
plt.grid(True)
plt.plot(tt[:i+100], X[:i+100], 'go', label="Real values")
sol = dsolve(f, x0, y0)

ssss=sol
r=0
prognoz_dney=[]
for z in range(len(ssss[0])):
    if int(ssss[0][z])!=r:
        prognoz_dney.append(ssss[1][z-1])
        r=r+1
    elif z == len(ssss[0])-1:
        prognoz_dney.append(ssss[1][z])

dis1=[]
dlya_rasstoyan1=i
qwqwqwq=distant(X[dlya_rasstoyan1],prognoz_dney[dlya_rasstoyan1-1])
while qwqwqwq < 25000:
    dis1.append(qwqwqwq)
    dlya_rasstoyan1=dlya_rasstoyan1+1
    qwqwqwq=distant(X[dlya_rasstoyan1],prognoz_dney[dlya_rasstoyan1-1])
dni_rastoyan.append(dis1)
dni_prognoz.append(len(dis1))
plt.plot(tt[i:dlya_rasstoyan1], X[i:dlya_rasstoyan1], 'yo', label="Predicted days- {}".format(len(dis1)))
plt.plot(*sol, 'b', label="Forecast of cases")
plt.plot([x0], [y0], 'r.', label="Sick today: {}".format(T[i][:10]))
plt.legend(loc = 'best', fancybox = True, shadow = True)
plt.show()
return sol,dis,dni_prognoz
for i in range(chislo_tochek,ckolko_znacheniy):

def podbor_param(X,Y,i): #selection of parameters
    chislo_tochek_izmen=chislo_tochek
    values_y = array(Y[i-chislo_tochek_izmen:i])
    values_x = array(X[i-chislo_tochek_izmen:i])
    # args_p0, _ = curve_fit(dlya_resh_parab, values_x, values_y, maxfev=10**8)

    # args, _ = curve_fit(dlya_resh_parab, values_x,
values_y,p0=[round(args_p0[0],2),round(args_p0[1],2),round(args_p0[2],2),1], maxfev=10**8)
    args, _ = curve_fit(dlya_resh_parab, values_x, values_y, maxfev=10**8)
    a, M, N, be= args[0], args[1], args[2], args[3]

```

```

if (a>0 or M<0 or N<0) and i>chislo_tochek+5:
    iter=0
    while iter<5:
        chislo_tochek_izmen=chislo_tochek+1
        values_y = array(Y[i-chislo_tochek_izmen:i])
        values_x = array(X[i-chislo_tochek_izmen:i])
        args, _ = curve_fit(dlyaresh_parab, values_x, values_y, maxfev=10**8)
        a, M, N, be= args[0], args[1], args[2], args[3]
        if (a>0 or M<0 or N<0):
            iter=iter+1
        else:
            iter=6
    return a,M,N,be, chislo_tochek_izmen
a,M,N,be, chislo_tochek_izmen=podbor_param(X,Y,i)
# if max(a*(np.abs(M-X)**a)*np.abs((N-X)**be))<max(DATA['Средняя скорость
заболеваемости])+10000:
if max(a*(M-X)*((N-X**be)))<max(DATA['Средняя скорость заболеваемости])+10000:
    XLIM=(0,i+150)
    YLIM=(0,i+150)
    x0 = i
    y0 = X[i]
    x1 = i+14
    y1 = X[i]
    a,M,N,be,chislo_tochek_izmen=podbor_param(X,Y,i)
    sol,dis,dni_prognoz=graf(a,M,N,X,Y,T,be)
    resheniy.append([i,sol])
    rastoyan_vse.append(rastoyan)
    dis_vse.append(dis)
    prognoz_vse.append(prognoz)
    tochki_vse.append(vzyat_tochki)
    dni_rastoyan_vse.append(dni_rastoyan)
    dni_prognoz_vse.append(dni_prognoz)

return
prognoz_vse,dis_vse,dni_prognoz_vse,tochki_vse,dni_rastoyan_vse,dni_prognoz_vse,resheniy,max_vse,sh
agi_vse,vse_paraboly

```

Starting the function and saving data

```

prognoz_vse=[]
dis_vse=[]
dni_prognoz_vse=[]
tochki_vse=[]
dni_rastoyan_vse=[]
dni_prognoz_vse=[]
resheniy=[]
max_vse=[]

```

```
shagi_vse=[]  
vse_paraboly=[]
```

```
for i in range(7,8):
```

```
    prognoz_vse1,dis_vse1,dni_prognoz_vse1,tochki_vse1,dni_rastoyan_vse1,dni_prognoz_vse1,resheniy1,m  
ax_vse1,shagi_vse1,vse_paraboly1=stroica22(i,X,Y,T)  
    prognoz_vse.append(prognoz_vse1)  
    dis_vse.append(dis_vse1)  
    dni_prognoz_vse.append(dni_prognoz_vse1)  
    tochki_vse.append(tochki_vse1)  
    dni_rastoyan_vse.append(dni_rastoyan_vse1)  
    dni_prognoz_vse.append(dni_prognoz_vse1)  
    resheniy.append(resheniy1)  
    max_vse.append(max_vse1)  
    shagi_vse.append(shagi_vse1)  
    vse_paraboly.append(vse_paraboly1)
```

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от Фисенко Ксении Ильиничны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием "Метод построения решений интегрируемых систем в частных разностях" являются: разработка нового метода построения решений интегрируемых разностных уравнений, которые не обязательно имеют свойство трехмерной совместимости. Этот метод использует дискретные преобразования Дарбу и работает для всех разностных уравнений, которые имеют пару Лакса. Схемы построения решений — алгебраические, и не требуется их интегрировать.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

— Эти результаты входят в научную статью в соавторстве с Константиной-Ризосом С. и Ксенидидисом П. (Liverpool Hope University, UK), которая опубликована в журнале Q1 "Chaos, Solitons & Fractals" vol.158, 112059 (2022) в статье "A discrete Darboux-Lax scheme for integrable difference equations" X.Fisenko, S.Konstantinou-Rizos, P.Xenitidis цитируемый в базах данных Web of Science и Scopus

— Исследование литературы и имеющихся научных результатов в данной сфере, по ключевым словам, "метод решения интегрируемых разностных уравнений, преобразования Бэклунда, схема Дарбу-Лакса, пара Лакса, уравнения в квад-графах". Не один из источников не содержал описанной в моей работе схемы решения.

— Опубликованная статья отправлялась в большое количество различных журналов международного уровня, и рецензенты подтверждали, что результат, представленный в работе не был описан ранее

— По результатам этой работы мною был сделан доклад на международной конференции международных математических центров мирового уровня в секции "Интегрируемые и динамические системы", 9-13 августа 2021, Сириус, г. Сочи.

— Также, моя работа была отобрана на конкурсе "Наука будущего - наука молодых" и была представлена мною в г. Новосибирске 22-26 августа 2022г.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьевки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 16 июня 2023г. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись  Фисенко Ксения Ильинична ФИО полностью

Дата 31.05.2023г.

город, страна Ярославль, Российская Федерация

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра нелинейной динамики

Метод построения решений интегрируемых систем в частных разностях.

направление подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель
PhD по математике (University of Leeds, UK),
доцент
Константину-Ризос Сотириос.

Студент группы ПМИ-21МО
Фисенко К.И.
май 2023 г.

Ярославль 2023 г.

Аннотация

24 страницы, 5 глав, 6 изображений, 33 источника.

Мы разработаем дискретную схему Дарбу–Лакса для построения автопреобразований Бэклунда и построения решений уравнений в квад-графах, которые не обязательно обладают свойством трехмерной совместимости. В качестве иллюстративного примера используем систему типа Адлера–Ямилова, связанную с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). В частности, мы строим автопреобразование Бэклунда для этой дискретной системы, ее принцип суперпозиции и используем их при построении одно- и двухсолитонных решений системы Адлера–Ямилова.

Ключевые слова: уравнение в квад-графах, преобразование Дарбу, пара Лакса, интегрируемость дискретных систем, преобразование Бэклунда, схема Лакса–Дарбу

Оглавление

1 Введение	4
2 Интегрируемость разностных уравнений	6
2.0.1 Классификация уравнений в квад-графах	7
2.1 Последствия свойства трехмерной совместимости	8
2.1.1 Построение пары Лакса	8
2.1.2 Построение преобразования Бэклунда	9
3 Дискретная схема Дарбу–Лакса	11
4 Система Адлера–Ямилова	14
4.1 Дискретная схема Лакса–Дарбу для системы Адлера–Ямилова	14
4.2 Вывод солитонных решений	17
5 Заключение	20

Глава 1

Введение

За последние несколько десятилетий стало понятно, что интегрируемые системы в частных разностях (PΔEs) интересны сами по себе, см., например, [18] и ссылки в нем. С одной стороны, они могут моделировать различные природные явления, а также процессы в промышленности и IT-сфере. С другой стороны, они обладают многими интересными алгебро-геометрическими свойствами [8, 18] и связаны со многими важными уравнениями математической физики, такими как уравнение Янга–Бакстера и уравнение тетраэдров [3, 11, 19, 29]. Более того, они могут быть получены как дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Один из таких подходов обеспечивается преобразованиями Дарбу интегрируемых нелинейных ДУЧП эволюционного типа [22, 34]; а именно, соотношения, полученные из коммутативности двух преобразований Дарбу, можно интерпретировать как PΔE.

В данной работе, мы сосредоточимся на особом классе PΔE, так называемых *уравнениях в квад-графах* или системах уравнений в квад-графах. Системы уравнений в квад-графах – это уравнения PΔE, заданные на элементарном четырехугольнике двумерной решетки. В частности, это системы вида

$$Q(f_{00}, f_{10}, f_{01}, f_{11}; \alpha, \beta) = 0, \quad (1.1)$$

где Q является функцией своих аргументов f_{ij} , $i, j = 0, 1$, а также может зависеть от параметров α и β . Схематично уравнение (2.1) можно представить на квадрате, где f_{00} , f_{10} , f_{01} и f_{11} размещены в вершинах квадрата и параметры α , β размещены на ребрах, как на рисунке 2.1. Уравнение (2.1) можно рассматривать как уравнение в частных разностях (PΔE), отождествляя f с функцией двух дискретных переменных $n, m \in \mathbb{Z}$, и f_{ij} со сдвигами в направлении n и m , т.е. $f_{ij} = f(n + i, m + j)$.

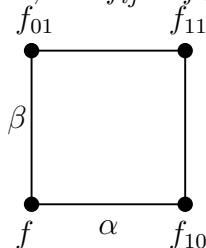


Рис. 1.1: Quad-graph equation.

Уравнения в квад-графах привлекли внимание многих исследователей в области дискретных интегрируемых систем, см. обзор [18]. Это привело к разработке методов их решения, т.е. [4, 16, 18, 27, 30], классифицируя их, например [5, 9, 32], анализируя их свойства интегрируемости, например [24, 25, 31, 33], и связав их с теорией отображений Янга–Бакстера и отображений тетраэдров, например [14, 29]. Особый интерес представляют так называемые 3D-совместные уравнения, которые можно совместным образом

распространить на трехмерную решетку. Для таких уравнений можно систематически построить представление Лакса и преобразование Бэклунда, используя трехмерную совместимость системы [18].

В этой работе мы предлагаем *дискретную схему Дарбу–Лакса* для построения преобразований Бэклунда и построения решений для уравнений в квад-графах, которые не обязательно являются трехмерно совместными, но имеют представление Лакса. Точнее, мы используем преобразования калибровочного типа для пары Лакса и показываем, как они приводят к преобразованиям Бэклунда для дискретной системы. В качестве иллюстративного примера мы используем систему Адлера–Ямилова [2], которая была получена как дискретизация нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с помощью преобразования Дарбу в [22].

Работа организована следующим образом. В следующей главе мы даем все необходимые определения для того, чтобы текст был автономным. Более конкретно, зафиксировав наши обозначения, мы даем определения интегрируемости системы РДЕ в смысле существования пары Лакса и преобразования Бэклунда. В главе 3 представлена дискретная схема Дарбу–Лакса для построения преобразований Бэклунда и решения интегрируемых РДЕ, которые не обязательно обладают свойством трехмерной совместности. В главе 4 мы применяем наши результаты к системе Адлера–Ямилова, приведенной в [22], и выводим одно- и двухсолитонные решения, используя ассоциированное преобразование Бэклунда и соответствующее преобразование Бьянки. Наконец, заключительный раздел содержит сводку полученных результатов и обсуждение того, как их можно расширить и обобщить.

Глава 2

Интегрируемость разностных уравнений

Начнем этот раздел с введения наших обозначений. В дальнейшем мы будем иметь дело с системами уравнений, в которые входят неизвестные функции, зависящие от двух дискретных переменных n и m . Зависимость функции $f = f(n, m)$ от этих переменных будем обозначать индексами следующим образом:

$$f_{ij} = f(n + i, m + j), \quad \text{для всех } i, j \in \mathbb{Z}$$

Мы также обозначаем через \mathcal{S} и \mathcal{T} операторы сдвига в направлении n и m , соответственно. Их действие на функцию f определяется как

$$\mathcal{S}^k(f_{00}) = f_{k0}, \quad \mathcal{T}^\ell(f_{00}) = f_{0\ell}.$$

Мы обозначаем векторы жирными буквами, например $\mathbf{f}_{00} = (f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, \dots, f_{00}^{(k)})$. Для систем уравнений мы также используем жирные буквы. В частности, система уравнений в квад-графах будет обозначаться через

$$\mathbf{Q}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}, \mathbf{f}_{01}, \mathbf{f}_{11}) = 0. \quad (2.1)$$

Наконец, мы будем обозначать матрицы латинскими заглавными буквами. Например, $L(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \alpha, \lambda)$ обозначает матрицу с элементами, зависящими от \mathbf{f}_{00} , \mathbf{f}_{10} , α и λ . Точка с запятой в аргументах матрицы используется для отделения полей $(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10})$ от параметров α, λ . Через λ в тексте обозначается спектральный параметр.

В наших обозначениях пусть $L(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda)$ и $M(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}; \lambda)$ – две $k \times k$ обратимые матрицы, зависящие от функции \mathbf{f} и спектрального параметра λ ¹. Пусть также $\Psi = \Psi(n, m)$ – вспомогательная матрица $k \times k$, и рассмотрим следующую переопределенную линейную систему

$$\mathcal{S}(\Psi) = L(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda)\Psi, \quad \mathcal{T}(\Psi) = M(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}; \lambda)\Psi. \quad (2.2)$$

При заданном \mathbf{f} эта система имеет нетривиальное решение Ψ при условии, что два уравнения совместимы, т.е. выполняется условие совместности $\mathcal{T}(\mathcal{S}(\Psi)) = \mathcal{S}(\mathcal{T}(\Psi))$. Последнее условие может быть записано явно как

$$L(\mathbf{f}_{01}, \mathbf{f}_{11}; \lambda)M(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}; \lambda) = M(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{f}_{11}; \lambda)L(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda). \quad (2.3)$$

Если приведенное выше уравнение выполняется тогда и только тогда, когда \mathbf{f} удовлетворяет (2.1), то мы говорим, что система PΔEs (2.1) является *интегрируемой*, система (2.2) является *парой Лакса* для (2.1), а уравнение (2.3) называется *представлением*

¹Матрицы L, M также могут зависеть от параметров, но, поскольку они не играют никакой роли в нашем обсуждении в этом и следующем мы подавляем эту зависимость.

Лакса для (2.1). Кроме того, матрицы $L(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda)$ и $M(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}; \lambda)$ называются *матрицами Лакса*, и без ограничения общности считаем, что они имеют постоянные определители.

Другим критерием интегрируемости является свойство трехмерной совместности [28], т.е. свойство системы (2.1) вкладываться в трехмерную решетку следующим совместным образом. Предполагая, что \mathbf{f} зависит от дополнительной третьей дискретной переменной k , т.е. $\mathbf{f} = \mathbf{f}(n, m, k)$, а γ является параметром, связанным с этим направлением решетки, мы накладываем три копии системы следующим образом.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{f}_{000}, \mathbf{f}_{100}, \mathbf{f}_{010}, \mathbf{f}_{110}; \alpha, \beta) &= 0, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{f}_{000}, \mathbf{f}_{100}, \mathbf{f}_{001}, \mathbf{f}_{101}; \alpha, \gamma) &= 0, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{f}_{000}, \mathbf{f}_{001}, \mathbf{f}_{010}, \mathbf{f}_{011}; \gamma, \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Начиная с начальных значений \mathbf{f}_{000} , \mathbf{f}_{100} , \mathbf{f}_{010} и \mathbf{f}_{001} , мы можем определить \mathbf{f}_{110} , \mathbf{f}_{101} и \mathbf{f}_{011} , используя эти три уравнения. Тогда есть три разных способа вычислить \mathbf{f}_{111} , а именно, учитывая сдвиг первого уравнения в (2.4) в третьем направлении или сдвиг второго уравнения во втором направлении, или сдвиг третьего уравнения в первом направлении. Мы говорим, что система трехмерно совместна (или 3D-совместна), если эти три различных способа приводят к точно такому же значению \mathbf{f}_{111} .

Сейчас мы дадим определение преобразования Бэклунда для уравнений в квад-графах. Такие преобразования связаны с понятием интегрируемости, как это станет очевидным в следующем разделе, где исследуем связь этих преобразований с парами Лакса через схему Дарбу-Лакса.

Definition 2.0.1. Пусть $\mathbf{Q}[\mathbf{f}] := \mathbf{Q}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}, \mathbf{f}_{01}, \mathbf{f}_{11}) = 0$ и $\mathbf{P}[\mathbf{g}] := \mathbf{P}(\mathbf{g}_{00}, \mathbf{g}_{10}, \mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{11}) = 0$ – две системы уравнений в квад-графах. Пусть также

$$\mathcal{B}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}, \mathbf{f}_{01}, \mathbf{g}_{00}, \mathbf{g}_{10}, \mathbf{g}_{01}; \varepsilon) = 0 \quad (2.5)$$

– система PΔE. Если система $\mathcal{B} = 0$ может быть интегрирована для \mathbf{g} при условии, что \mathbf{f} является решением $\mathbf{Q}[\mathbf{f}] = 0$, а полученное $\mathbf{g}(n, m)$ является решением $\mathbf{P}[\mathbf{g}] = 0$, и наоборот, то система (2.5) называется (гетеро-) преобразованием Бэклунда для уравнений $\mathbf{Q}[\mathbf{f}] = 0$ и $\mathbf{P}[\mathbf{g}] = 0$. Если $\mathbf{Q}[\mathbf{a}] = \mathbf{P}[\mathbf{a}]$, то (2.5) называется автопреобразованием Бэклунда для уравнения $\mathbf{Q}[\mathbf{f}] = 0$.

2.0.1 Классификация уравнений в квад-графах

В 2003 году все 3D-согласованные уравнения были классифицированы Адлером, Бобенко и Сурисом. Они рассматривают все уравнения вида (2.1), которые обладают несколькими свойствами:

1. Нелинейность. Q – полином первого порядка, линейный по каждому из аргументов $u, u_{01}, u_{10}, u_{11}$:

$$Q(u, u_{01}, u_{10}, u_{11}, a, b) = a_1 u u_{01} u_{10} u_{11} + a_2 u u_{10} u_{11} + a_3 u u_{01} u_{11} + \dots + a_{16} \quad (2.6)$$

где $a_i = a_i(a, b) i = 1, \dots, 16$

2. Симметрия. Полином Q обладает свойством симметрии:

$$Q(u, u_{01}, u_{10}, u_{11}, a, b) = \omega Q(u, u_{10}, u_{01}, u_{11}, b, a) = \gamma Q(u_{10}, u, u_{11}, u_{01}, a, b) \quad (2.7)$$

где $\omega, \gamma = \pm 1$

3. Свойство тетраэдра. То есть конечное значение u_{111} не зависит от u . Адлер, Бобенко и Сурис доказали, что все уравнения вида (1.13), которые имеют вышеуказанные

условия, могут быть сведены к семи основным уравнениям, используя преобразования Мебиуса (дробно-линейные) независимых переменных и параметров. Эти семь уравнений разделены на два списка, известных как Q-список (список из 4 уравнений) и H-список (список из 3 уравнений).

Отображение $Y : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ называется четырехуровневым, если отображение

$$u(., y) : A \rightarrow A \quad u(x, .) : A \rightarrow A$$

являются бирациональными.

Theorem 2.0.2. Любое четырехмерное отображение на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, вплоть до преобразований Мебиуса, эквивалентно одному из следующих отображений:

$$u = ayP, \quad v = bxP, \quad P = \frac{(1-b)x + b - a + (a-1)y}{b(1-a)x + (a-b)xy + a(b-1)y}; \quad (2.8a)$$

$$u = \frac{y}{a}P, \quad v = \frac{x}{b}, \quad P = \frac{ax - by}{x - y}; \quad (2.8b)$$

$$u = \frac{y}{a}P, \quad v = \frac{x}{b}, \quad P = \frac{ax - by + b - a}{x - y}; \quad (2.8c)$$

$$u = yP, \quad v = xP, \quad P = 1 + \frac{b - a}{x - y}; \quad (2.8d)$$

$$u = y + P, \quad v = x + P, \quad P = \frac{a - b}{x - y}; \quad (2.8e)$$

до подходящего выбора параметров a и b

2.1 Последствия свойства трехмерной совместимости

Есть несколько простых последствий свойства 3D-согласованности:

1. Как уже упоминалось ранее, 3D-согласованность подразумевает наличие пары Лакса;
2. Преобразование Бэклунда может быть построено

С помощью преобразования Бэклунда мы можем найти решения нелинейного уравнения четырехугольника, начиная с тривиальных.

2.1.1 Построение пары Лакса

Мы хотим описать способ построения пары Лакса на примере уравнения ДПКДФ.

Давайте рассмотрим $u_{001} = v$ и произведем замену:

$$(u - v_{100})(v - u_{100}) = a - c \quad (2.9a)$$

$$(u - v_{010})(u_{010} - v) = c - b, \quad (2.9b)$$

Теперь мы видим, что можем избавиться от направления k , которое будет играть роль параметра. Мы решаем уравнения (2.9a) для v_{01} и v_{10} :

$$v_{10} = u - \frac{a - c}{v - u_{10}} = \frac{vu - uu_{10} - a + c}{v - u_{10}} \quad (2.10)$$

Мы хотим линеаризовать уравнение. Это можно сделать, установив $v = \frac{F}{G}$

$$\frac{F_{10}}{G_{10}} = \frac{u\frac{F}{G} - uu_{10} - a + c}{\frac{F}{G} - u_{10}} = \frac{uF - G(uu_{10} + a - c)}{F - u_{10}G} \quad (2.11)$$

Зафиксируем функцию F_{10} и найдем G_{10} . Давайте выберем $F_{10} = uF - G(uu_{10} + a - c)$. Тогда $G_{10} = F - u_{10}G$.

Перепишем наше уравнение в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} F_{10} \\ G_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -a + c - uu_{10} \\ 1 & -u_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

Получаем матрицу, которая соответствует матрице (8), и наша вспомогательная функция $\Psi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$.

Для v_{01} мы строим матрицу на основе симметрии и получаем:

$$\begin{pmatrix} F_{01} \\ G_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -c + b - uu_{01} \\ 1 & -u_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

Таким образом, используя простой алгебраический метод, мы восстановили пару Лакса для дискретного потенциального уравнения КДФ, которое было описано в предыдущей главе. Здесь c играет роль спектрального параметра.

Тот же подход может быть использован для любого уравнения квад-графах, обладающего свойством 3D-согласованности.

2.1.2 Построение преобразования Бэклунда

Преобразование Бэклунда - это система отношений между решениями одного и того же уравнения (дифференциального или разностного) или отношений между решениями разных уравнений.

Непрерывный случай

Здесь мы представляем простейший пример преобразования Бэклунда для уравнений в частных производных.

Давайте рассмотрим знаменитое уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Хорошо известным соотношением Коши-Римана для функции $f(u, v) = u(x, y) + iv(x, y)$ является

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (2.12)$$

Функция f является гармонической тогда и только тогда, когда u и v удовлетворяют соотношениям Коши-Римана.

Давайте продифференцируем систему уравнений

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xy} = v_{yy} \\ u_{yx} = -v_{xx} \end{cases} \quad (2.13)$$

Для того чтобы приведенное выше уравнение было совместимым, нам требуется $u_{xy} = u_{yx}$. Это требование эквивалентно $v_{xx} + v_{yy} = 0$, т.е. уравнению Лапласа. Следовательно, уравнение Лапласа является условием совместимости системы линейных

уравнений (2.12). Мы можем использовать их для того, чтобы найти нетривиальное решение, начиная с тривиального.

Одним из очевидных решений уравнения Лапласа является $u(x, y) = xy$. Мы подставляем $u(x, y) = xy$ в (2.12), затем интегрируем первое уравнение для x и второе для y :

$$\begin{cases} y = v_y \\ x = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(x, y) = \frac{y^2}{2} + C_1(x) \\ v(x, y) = -\frac{x^2}{2} + C_2(y) \end{cases} \quad (2.14)$$

Получим новое решение уравнения Лапласа $v(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$. Таким образом, мы можем продолжить и найти другое решение, начиная с $v(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$.

Уравнение Лапласа - это линейное уравнение, и мы уже знаем его общее решение. Однако преобразование Бэклунда работает аналогичным образом для нелинейных уравнений в частных производных.

Глава 3

Дискретная схема Дарбу–Лакса

Результаты этой главы опубликованы в журнале Q1 "Chaos, Solitons Fractals" vol.158, 112059 (2022) в статье "A discrete Darboux-Lax scheme for integrable difference equations" X.Fisenko, S.Konstantinou-Rizos, P.Xenitidis [1].

Как мы увидели в Главе 2, для систем в квад-графах, обладающих свойством трехмерной совместимости, представление Лакса может быть получено алгоритмически [7, 10, 18, 26], также может быть построено преобразование Бэклунда, систематически [4, 18]. Однако существуют системы квад-графов, которые имеют пару Лакса, но не обладают свойством трехмерной совместимости.

Для таких систем мы разработаем новую схему построения Дарбу и преобразования Бэклунда. Здесь следует подчеркнуть, что эта схема работает для *любой* систем разностных уравнений, независимо от их трехмерной совместимости.

Для интегрируемых систем в квад-графах

$$\mathbf{Q}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}, \mathbf{f}_{01}, \mathbf{f}_{11}) = 0 \iff \mathbf{L}(\mathbf{f}_{01}, \mathbf{f}_{11}; \lambda) \mathbf{M}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}; \lambda) = \mathbf{M}(\mathbf{f}_{10}, \mathbf{f}_{11}; \lambda) \mathbf{L}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda), \quad (3.1)$$

мы определяем преобразование Дарбу следующим образом

Definition 3.0.1. *Дискретное преобразование Дарбу для интегрируемого PΔE (3.1) — это калибровочное преобразование, зависящее от спектрального параметра, которое оставляет матрицы Лакса L и M ковариантными. То есть преобразование, в котором используется обратимая матрица B такая, что*

$$\mathbf{L}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda) \mapsto \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{10}; \lambda) = \mathcal{S}(\mathbf{B}) \mathbf{L}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda) \mathbf{B}^{-1}, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}; \lambda) \mapsto \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{01}; \lambda) = \mathcal{T}(\mathbf{B}) \mathbf{M}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}; \lambda) \mathbf{B}^{-1}. \quad (3.2b)$$

Следствием данного определения является следующее утверждение.

Proposition 3.0.2. *Преобразование Дарбу отображает фундаментальные решения линейной системы*

$$\mathcal{S}(\Psi) = \mathbf{L}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda) \Psi, \quad \mathcal{T}(\Psi) = \mathbf{M}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}; \lambda) \Psi, \quad (3.3)$$

к фундаментальным решениям линейной системы

$$\mathcal{S}(\tilde{\Psi}) = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{10}; \lambda) \tilde{\Psi}, \quad \mathcal{T}(\tilde{\Psi}) = \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{01}; \lambda) \tilde{\Psi}, \quad (3.4)$$

через отношение $\tilde{\Psi} = \mathbf{B} \Psi$.

Доказательство. Пусть $\Psi = \Psi(n, m)$ — фундаментальное решение линейной задачи (3.3). Мы устанавливаем $\tilde{\Psi} = \mathbf{B} \Psi$, а затем сдвигаем в направлении n , чтобы найти, что

$$\mathcal{S}(\tilde{\Psi}) = \mathcal{S}(\mathbf{B}) \mathcal{S}(\Psi) \stackrel{(3.3)}{=} \mathcal{S}(\mathbf{B}) \mathbf{L}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}; \lambda) \Psi \stackrel{(3.2a)}{=} \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{10}; \lambda) \mathbf{B} \Psi = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{10}; \lambda) \tilde{\Psi}.$$

Точно так же, начиная с $\tilde{\Psi} = B\Psi$, мы сдвигаем в направлении m и используем (3.3) и (??), чтобы найти, что $\mathcal{T}(\tilde{\Psi}) = M(\tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{01}; \lambda)\Psi$. Более того, решение $\tilde{\Psi}$ фундаментально, так как Ψ фундаментально и $\det(\tilde{\Psi}) = \det B \det \Psi \neq 0$. \square

Используя приведенное выше определение дискретного преобразования Дарбу и соответствующей матрицы Дарбу, мы предлагаем следующий подход для построения матрицы Дарбу и преобразования Бэклунда, а также для вывода принципа суперпозиции для преобразования Бэклунда.

- Начнем с того, что примем начальную форму для матрицы B . Самое простое предположение, которое мы можем сделать, состоит в том, что матрица B линейно зависит от спектрального параметра, т.е.

$$B = \lambda B^{(1)} + B^{(0)}, \quad (3.5)$$

где матрицы $B^{(1)}$ и $B^{(0)}$ не зависят от λ .

- Мы определяем элементы этих двух матриц, используя уравнения (3.2), записанные как

$$L(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}}_{10}; \lambda)B = \mathcal{S}(B)L(\mathbf{f}, \mathbf{f}_{10}; \lambda), \quad M(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}}_{01}; \lambda)B = \mathcal{T}(B)M(\mathbf{f}, \mathbf{f}_{01}; \lambda). \quad (3.6)$$

В наших расчетах мы также должны учитывать, что $\det(B)$ является константой, что является очевидным следствием (3.6) и нашего предположения о том, что матрицы Лакса имеют определитель равный константе.

- Полученная матрица Дарбу будет зависеть от "старого" и "нового" полей \mathbf{f} и $\tilde{\mathbf{f}}$, а также от спектрального параметра λ , и параметра ε . Он также может зависеть от некоторой вспомогательной функции $g(n, m)$. То есть,

$$B = \lambda B^{(1)}(\mathbf{f}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{00}, g; \varepsilon) + B^{(0)}(\mathbf{f}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{00}, g; \varepsilon).$$

- При построении матрицы Дарбу (3.5) будут присутствовать некоторые алгебраические соотношения, определяющие элементы матрицы Дарбу, а также некоторые разностные уравнения для ее элементов. Эти разностные уравнения будут иметь вид

$$\mathcal{B}^{(n)}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{10}, \tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{10}, g; \varepsilon) = 0, \quad \mathcal{B}^{(m)}(\mathbf{f}_{00}, \mathbf{f}_{01}, \tilde{\mathbf{f}}_{00}, \tilde{\mathbf{f}}_{01}, g; \varepsilon) = 0, \quad (3.7)$$

и составляют соответственно n - и m -части преобразования Бэклунда, связывающего "старое" и "новое" поля. В дальнейшем мы будем обозначать это преобразование просто $\mathcal{B}(\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}, g; \varepsilon) = 0$.

- Коммутационная диаграмма Бьянки, также известная как принцип суперпозиции для преобразования Бэклунда (3.7), следует из перестановки четырех матриц Дарбу в соответствии с диаграммой на рис. 3.1

Точнее, начиная с решения \mathbf{f} уравнения (3.1), мы можем построить два новых решения $\tilde{\mathbf{f}}$ и $\hat{\mathbf{f}}$ с помощью преобразований Бэклунда $\mathcal{B}(\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}, g_1; \varepsilon_1) = 0$ и $\mathcal{B}(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}, g_2; \varepsilon_2) = 0$ соответственно, тогда можно использовать преобразование Бэклунда с начальным решением $\tilde{\mathbf{f}}$, новый g_{12} и параметр ε_2 для получения нового решения $\hat{\mathbf{f}}$, т.е. $\mathcal{B}(\tilde{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{f}}, g_{12}; \varepsilon_2) = 0$. Таким же образом мы можем начать с $\hat{\mathbf{f}}$, новый g_{21} и параметр ε_1 для получения решения $\tilde{\mathbf{f}}$, т.е. $\mathcal{B}(\hat{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}}, g_{21}; \varepsilon_1) = 0$. Требуя $\tilde{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{f}}$, согласно рисунку 3.1, мы можем построить это решение алгебраически, это следует из коммутативности соответствующих матриц Дарбу.

$$B(\tilde{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{f}}, g_{12}; \varepsilon_2, \lambda)B(\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}, g_1; \varepsilon_1, \lambda) = B(\hat{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}}, g_{21}; \varepsilon_1, \lambda)B(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}, g_2; \varepsilon_2, \lambda). \quad (3.8)$$

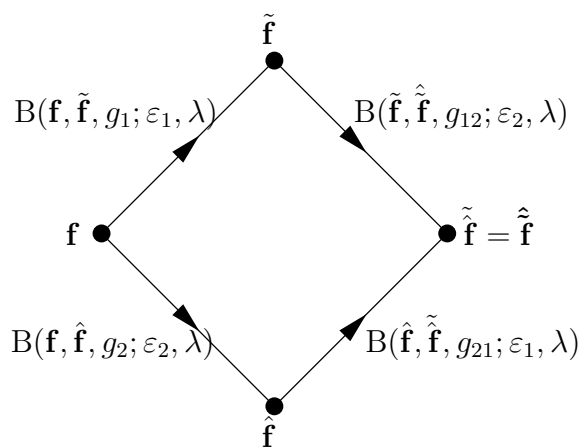


Рис. 3.1: Коммутирующая схема Бьянки. Следует отметить, что $g_{12} \neq g_{21}$.

Глава 4

Система Адлера-Ямилова

Из обсуждения в предыдущем разделе становится очевидно, что многомерная совместимость не является существенной для метода вывода преобразований Бэклунда. В этом разделе мы продемонстрируем применение нашей схемы на наглядном примере системы, связанной с нелинейным уравнением Шредингера [22].

Система Адлера-Ямилова может быть записана как

$$p_{10} - p_{01} - \frac{\alpha - \beta}{1 + p_{00}q_{11}}p_{00} = 0, \quad q_{10} - q_{01} + \frac{\alpha - \beta}{1 + p_{00}q_{11}}q_{11} = 0, \quad (4.1)$$

где α, β комплексные параметры. Более того, используя матрицу

$$L(f, g; a, \lambda) = \lambda L^{(1)} + L^{(2)}(f, g; a) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + fg & f \\ g & 1 \end{pmatrix},$$

пара Лакса для (4.1) может быть записана как

$$\mathcal{S}(\Psi) = L(p_{00}, q_{10}; \alpha, \lambda)\Psi = \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha + p_{00}q_{10} & p_{00} \\ q_{10} & 1 \end{pmatrix} \right) \Psi, \quad (4.2a)$$

$$\mathcal{T}(\Psi) = L(p_{00}, q_{01}; \beta, \lambda)\Psi = \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta + p_{00}q_{01} & p_{00} \\ q_{01} & 1 \end{pmatrix} \right) \Psi. \quad (4.2b)$$

4.1 Дискретная схема Лакса-Дарбу для системы Адлера-Ямилова

Мы начинаем с выбора (3.5) начальной формы матрицы Дарбу B ,

$$B = \lambda B^{(1)} + B^{(0)} = \lambda \begin{pmatrix} f_{00}^{(1)} & f_{00}^{(2)} \\ f_{00}^{(3)} & f_{00}^{(4)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{00}^{(1)} & g_{00}^{(2)} \\ g_{00}^{(3)} & g_{00}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

и определяем уравнение (3.6), которое имеет вид

$$(\lambda L^{(1)} + L^{(2)}(\tilde{p}_{00}, \tilde{q}_{10}; \alpha)) (\lambda B^{(1)} + B^{(0)}) = (\lambda \mathcal{S}(B^{(1)}) + \mathcal{S}(B^{(0)})) (\lambda L^{(1)} + L^{(2)}(p_{00}, q_{10}; \alpha)), \quad (4.4a)$$

$$(\lambda L^{(1)} + L^{(2)}(\tilde{p}_{00}, \tilde{q}_{01}; \beta)) (\lambda B^{(1)} + B^{(0)}) = (\lambda \mathcal{T}(B^{(1)}) + \mathcal{T}(B^{(0)})) (\lambda L^{(1)} + L^{(2)}(p_{00}, q_{01}; \beta)). \quad (4.4b)$$

Поскольку все матрицы, входящие в (4.4), не зависят от λ , мы собираем коэффициенты при разных степенях спектрального параметра. Члены λ^2 дают уравнения

$$L^{(1)}B^{(1)} = \mathcal{S}(B^{(1)})L^{(1)}, \quad L^{(1)}B^{(1)} = \mathcal{T}(B^{(1)})L^{(1)},$$

приводящие к

$$f_{00}^{(1)} = c_1 \in \mathbb{R}, \quad f_{00}^{(2)} = f_{00}^{(3)} = 0. \quad (4.5)$$

λ выражается в отношениях (4.4)

$$L^{(1)}B^{(0)} + L^{(2)}(\tilde{p}_{00}, \tilde{q}_{10}; \alpha)B^{(1)} = \mathcal{S}(B^{(1)})L^{(2)}(p_{00}, q_{10}; \alpha) + \mathcal{S}(B^{(0)})L^{(1)},$$

$$L^{(1)}B^{(0)} + L^{(2)}(\tilde{p}_{00}, \tilde{q}_{01}; \beta)B^{(1)} = \mathcal{T}(B^{(1)})L^{(2)}(p_{00}, q_{01}; \beta) + \mathcal{T}(B^{(0)})L^{(1)},$$

с учетом (4.5) предполагаем

$$f_{00}^{(4)} = c_2 \in \mathbb{R}, \quad g_{00}^{(2)} = c_1 p_{00} - c_2 \tilde{p}_{00}, \quad g_{00}^{(3)} = c_1 \tilde{q}_{00} - c_2 q_{00}, \quad (4.6)$$

$$(\mathcal{S} - 1) \left(g_{00}^{(1)} \right) = c_1 (\tilde{p}_{00} \tilde{q}_{10} - p_{00} q_{10}), \quad (\mathcal{T} - 1) \left(g_{00}^{(1)} \right) = c_1 (\tilde{p}_{00} \tilde{q}_{01} - p_{00} q_{01}). \quad (4.7)$$

Независимые члены λ ,

$$L^{(2)}(\tilde{p}_{00}, \tilde{q}_{10}; \alpha)B^{(0)} = \mathcal{S}(B^{(0)})L^{(2)}(p_{00}, q_{10}; \alpha), \quad L^{(2)}(\tilde{p}_{00}, \tilde{q}_{01}; \beta)B^{(0)} = \mathcal{T}(B^{(0)})L^{(2)}(p_{00}, q_{01}; \beta), \quad (4.8)$$

определяют $g_{00}^{(4)}$ и дают нам соответствующее автоматическое преобразование Бэклунда. В частности, (2, 2)-элементы приведенных выше соотношений дают

$$(\mathcal{S} - 1) \left(g_{00}^{(4)} \right) = c_2 (p_{00} q_{10} - \tilde{p}_{00} \tilde{q}_{10}), \quad (\mathcal{T} - 1) \left(g_{00}^{(4)} \right) = c_2 (p_{00} q_{01} - \tilde{p}_{00} \tilde{q}_{01}). \quad (4.9)$$

Остальные записи (4.8) с учетом (4.7) и (4.9) становятся

$$c_1 (p_{10} + p_{00}(\alpha + p_{00} q_{10})) - c_2 (\tilde{p}_{10} + \tilde{p}_{00}(\alpha + \tilde{p}_{00} \tilde{q}_{10})) = g_{00}^{(4)} \tilde{p}_{00} - g_{00}^{(1)} p_{00}, \quad (4.10a)$$

$$c_1 (p_{01} + p_{00}(\beta + p_{00} q_{01})) - c_2 (\tilde{p}_{01} + \tilde{p}_{00}(\beta + \tilde{p}_{00} \tilde{q}_{01})) = g_{00}^{(4)} \tilde{p}_{00} - g_{00}^{(1)} p_{00}, \quad (4.10b)$$

$$\tilde{q}_{10} = \frac{c_1 \tilde{q}_{00} - c_2 (q_{00} - \alpha q_{10}) - g_{00}^{(4)} q_{10}}{c_1 (\alpha + p_{00} q_{10}) - c_2 \tilde{p}_{00} q_{10} - g_{00}^{(1)}}, \quad \tilde{q}_{01} = \frac{c_1 \tilde{q}_{00} - c_2 (q_{00} - \beta q_{01}) - g_{00}^{(4)} q_{01}}{c_1 (\beta + p_{00} q_{01}) - c_2 \tilde{p}_{00} q_{01} - g_{00}^{(1)}}. \quad (4.10c)$$

которые играют роль преобразования Бэклунда.

Наконец, нам потребуется определитель матрицы Дарбу B , который с учетом (4.5) и (4.6) может быть записан как $\det(B) = c_1 c_2 \lambda^2 + \left(c_2 g_{00}^{(1)} + c_1 g_{00}^{(4)} \right) \lambda + g_{00}^{(1)} g_{00}^{(4)} - (c_1 p_{00} - c_2 \tilde{p}_{00})(c_1 \tilde{q}_{00} - c_2 q_{00})$. Из этого требования вытекают соотношения

$$c_2 g_{00}^{(1)} + c_1 g_{00}^{(4)} = \kappa, \quad g_{00}^{(1)} g_{00}^{(4)} - (c_1 p_{00} - c_2 \tilde{p}_{00})(c_1 \tilde{q}_{00} - c_2 q_{00}) = \varepsilon, \quad \kappa, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Следует отметить, что первое соотношение в (4.11) также можно рассматривать как следствие (4.7) и (4.10).

Подводя итог, мы показали, что матрица Дарбу B имеет вид

$$B = \lambda B^{(1)} + B^{(0)} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{00}^{(1)} & c_1 p_{00} - c_2 \tilde{p}_{00} \\ c_1 \tilde{q}_{00} - c_2 q_{00} & g_{00}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

где потенциалы $g^{(1)}$ и $g^{(4)}$ определяются (4.7), (4.9) и (4.11), а преобразование Бэклунда задается (4.10).

Рассмотрим теперь два случая: (i) $c_1 = 0$ и $c_2 \neq 0$ и (ii) $c_1 \neq 0$ и $c_2 = 0$.

Первый случай: $c_1 = 0$ и $c_2 \neq 0$

Если $c_1 = 0$ и $c_2 \neq 0$, то без ограничения общности можно выбрать $c_2 = 1$. Тогда из уравнений (4.7) следует, что $g_{00}^{(1)}$ является константой, и мы выбираем $g_{00}^{(1)} = 1$ ¹. Кроме того, второе соотношение в (4.11) подразумевает

$$g_{00}^{(4)} = \tilde{p}_{00}q_{00} + \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

При таком выборе матрица Дарбу становится следующей:

$$B(q_{00}, \tilde{p}_{00}; \varepsilon) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{p}_{00} \\ -q_{00} & \varepsilon + \tilde{p}_{00}q_{00} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

и отношение (4.10) становится

$$\tilde{p}_{10} = p_{00} + \frac{\alpha - \varepsilon}{1 + \tilde{p}_{00}q_{10}} \tilde{p}_{00}, \quad \tilde{q}_{10} = q_{00} - \frac{\alpha - \varepsilon}{1 + \tilde{p}_{00}q_{10}} q_{10}, \quad (4.15a)$$

$$\tilde{p}_{01} = p_{00} + \frac{\beta - \varepsilon}{1 + \tilde{p}_{00}q_{01}} \tilde{p}_{00}, \quad \tilde{q}_{01} = q_{00} - \frac{\beta - \varepsilon}{1 + \tilde{p}_{00}q_{01}} q_{01}. \quad (4.15b)$$

Ввиду вышеупомянутого выбора и системы (4.15) соотношения (4.9) выполняются тождественно.

Система (4.15) является автопреобразованием Баклунда для системы Адлера-Ямилова (4.1). Действительно, если мы сдвинем уравнения (4.15a) в направлении m , а уравнения (4.15b) в направлении n соответственно, то легко убедиться, что два выражения для \tilde{p}_{11} и два выражения для \tilde{q}_{11} совпадают по модулю системы Адлера-Ямилова (4.1). И наоборот, мы переставляем приведенную выше систему для p_{00} , q_{10} и q_{01} ,

$$q_{10} = \frac{q_{00} - \tilde{q}_{10}}{\alpha - \varepsilon - \tilde{p}_{00}(q_{00} - \tilde{q}_{10})}, \quad p_{00} = \tilde{p}_{10} - \tilde{p}_{00}(\alpha - \varepsilon - \tilde{p}_{00}(q_{00} - \tilde{q}_{10})), \quad (4.16a)$$

$$q_{01} = \frac{q_{00} - \tilde{q}_{01}}{\beta - \varepsilon - \tilde{p}_{00}(q_{00} - \tilde{q}_{01})}, \quad p_{00} = \tilde{p}_{01} - \tilde{p}_{00}(\beta - \varepsilon - \tilde{p}_{00}(q_{00} - \tilde{q}_{01})). \quad (4.16b)$$

Если мы сдвинем первое уравнение в (4.16a) в направлении m , а первое уравнение в (4.16b) в направлении n , то полученные выражения для q_{11} совпадают при условии, что \tilde{p} и \tilde{q} удовлетворяют системе (4.1). Кроме того, вычитая два выражения для p_{00} в (4.16), мы получаем

$$\tilde{p}_{10} - \tilde{p}_{01} - \tilde{p}_{00}(\tilde{p}_{00}(\tilde{q}_{10} - \tilde{q}_{01}) + \alpha - \beta) = 0,$$

которое выполняется на решениях (4.1).

Наконец, согласно рисунку 3.1 и соотношению (3.8), принцип суперпозиции для автопреобразования Бэклунда (4.15) следует из

$$B(\tilde{q}_{00}, \hat{\tilde{p}}_{00}; \varepsilon_2)B(q_{00}, \tilde{p}_{00}; \varepsilon_1) = B(\hat{q}_{00}, \hat{\tilde{p}}_{00}; \varepsilon_1)B(q_{00}, \hat{p}_{00}; \varepsilon_2),$$

и может быть записано как

$$\hat{\tilde{p}}_{00} = -\frac{\tilde{p}_{00} - \hat{p}_{00}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + (\tilde{p}_{00} - \hat{p}_{00})q_{00}}, \quad \hat{q}_{00} - \tilde{q}_{00} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + (\tilde{p}_{00} - \hat{p}_{00})q_{00})q_{00}. \quad (4.17)$$

¹Это означает, что мы выбираем $\kappa = 1$ в первом соотношении (4.11).

Второй случай: $c_1 \neq 0$ и $c_2 = 0$

Если $c_2 = 0$ и $c_1 \neq 0$, то выбираем $c_1 = 1$, из соотношений (4.9) следует, что $g_{00}^{(4)} = 1$, а из определителя В следует, что $g_{00}^{(1)} = p_{00}\tilde{q}_{00} + \varepsilon$. С учетом этих вариантов мы приходим к матрице Дарбу, которую можно записать в терминах матрицы (4.14) как

$$C(p_{00}, \tilde{q}_{00}; \varepsilon) = (\lambda + \varepsilon) (B(\tilde{q}_{00}, p_{00}; \varepsilon))^{-1}, \quad (4.18)$$

тогда как отношения (4.10) дают фактически систему (4.16) с перестановкой ролей нового и старого полей, т.е. систему (4.16) с перестановкой $(p, q) \leftrightarrow (\tilde{p}, \tilde{q})$. Таким образом, в этом случае мы получаем обратное преобразование Дарбу и Бэклунда, полученное ранее.

4.2 Вывод солитонных решений

Мы используем автопреобразование Бэклунда (4.15) и его принцип суперпозиции (4.17) при выводе солитонных решений системы Адлера-Ямилова (4.1).

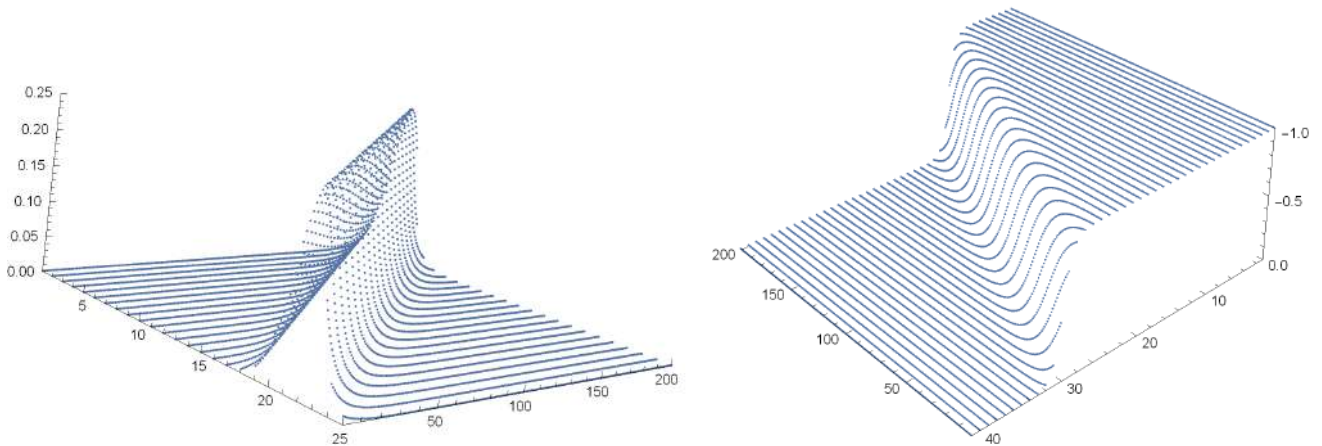


Рис. 4.1: Односолитонное решение системы Адлера-Ямилова и потенциал $1/g_{00}$. В обоих случаях $\alpha = 8$, $\beta = 4$, $\varepsilon = 1$ и $c = -2$.

Точнее, мы начинаем с решения²

$$p_{00} = 0, \quad q_{00} = \alpha^{-n}\beta^{-m}. \quad (4.19)$$

С этим начальным решением первое уравнение в (4.15a) и первое уравнение в (4.15b) становятся

$$\tilde{p}_{10} = \frac{\alpha - \varepsilon}{1 + \tilde{p}_{00}\alpha^{-n-1}\beta^{-m}}\tilde{p}_{00}, \quad \tilde{p}_{01} = \frac{\beta - \varepsilon}{1 + \tilde{p}_{00}\alpha^{-n}\beta^{-m-1}}\tilde{p}_{00}. \quad (4.20)$$

Мы можем линеаризовать эти уравнения Рикатти, установив $\tilde{p}_{00} = \alpha^n\beta^m/g_{00}$,

$$(\alpha - \varepsilon)g_{10} = \alpha g_{00} + 1, \quad (\beta - \varepsilon)g_{01} = \beta g_{00} + 1.$$

Общее решение линейной системы имеет вид

$$g_{00} = \frac{\alpha^n}{(\alpha - \varepsilon)^n} \frac{\beta^m}{(\beta - \varepsilon)^m} c - \frac{1}{\varepsilon}, \quad (4.21)$$

²Это решение можно построить, начиная с нулевого решения $p_{00} = q_{00} = 0$ и используя второе преобразование, которое мы обсуждали в подразделе ?? с $\varepsilon = 0$.

где $c \in \mathbb{R}$ постоянная константа интегрирования, поэтому

$$\tilde{p}_{00} = \frac{\varepsilon \alpha^n \beta^m (\alpha - \varepsilon)^n (\beta - \varepsilon)^m}{c \varepsilon \alpha^n \beta^m - (\alpha - \varepsilon)^n (\beta - \varepsilon)^m}. \quad (4.22a)$$

Используя начальное решение (4.19) и обновленный потенциал (4.22a), мы можем использовать уравнение для \tilde{q}_{10} в (4.15a) или уравнение для \tilde{q}_{01} в (4.15b) для определения \tilde{q}_{00} . Оба пути ведут к

$$\tilde{q}_{00} = \frac{c \varepsilon^2}{c \varepsilon \alpha^n \beta^m - (\alpha - \varepsilon)^n (\beta - \varepsilon)^m}. \quad (4.22b)$$

Это двухпараметрическое семейство решений дает односолитонное решение (4.1): хотя обе функции в (4.22) расходятся, их произведение представляет собой солитон. Эта интерпретация мотивирована связью системы Адлера-Ямилова с нелинейным уравнением Шрёдингера [22] и очевидна из графика произведения $|\tilde{p}_{00} \tilde{q}_{00}|$. Мы также наносим на график потенциальный $1/g_{00}$, который является перегибом. См. рис. 4.1.

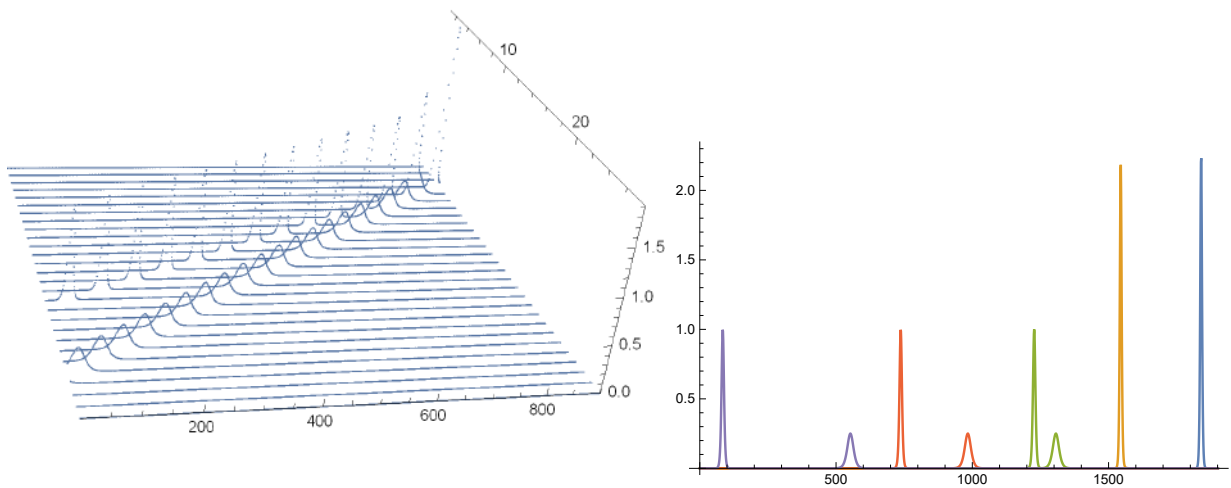


Рис. 4.2: Двухсолитонное решение системы Адлера-Ямилова: решение (4.24) с $\alpha = 8$, $\beta = 4$, $\varepsilon_1 = 1$, $c_1 = -2$, $\varepsilon_2 = 3$ и $c_2 = 8$. Следует отметить, что это решение требует комбинации неособого решения, т.е. пары (\tilde{p}, \tilde{q}) , которая соответствует односолитонному решению и сингулярному (\hat{p}, \hat{q}) .

Построив двухпараметрическое семейство решений (4.22), мы можем использовать его вместе с принципом суперпозиции (3.8) для определения третьего решения и, в частности, двухсолитонного решения системы (4.1). Начиная с одного и того же начального решения, два решения $(\tilde{p}_{00}, \tilde{q}_{00})$ и $(\hat{p}_{00}, \hat{q}_{00})$, участвующие в (4.17), следуют из (4.22) заменой параметров (ε, c) на (ε_1, c_1) и (ε_2, c_2) соответственно. Чтобы сделать изложение более понятным, введем сокращенное обозначение

$$\delta_0 := \alpha^n \beta^m, \quad \delta_1 := (\alpha - \varepsilon_1)^n (\beta - \varepsilon_1)^m, \quad \delta_2 := (\alpha - \varepsilon_2)^n (\beta - \varepsilon_2)^m.$$

В этих обозначениях начальное решение равно $p_{00} = 0$, $q_{00} = 1/\delta_0$, а два описанных нами решения можно записать в виде

$$\tilde{p}_{00} = \frac{\varepsilon_1 \delta_0 \delta_1}{c_1 \varepsilon_1 \delta_0 - \delta_1}, \quad \tilde{q}_{00} = \frac{c_1 \varepsilon_1^2}{c_1 \varepsilon_1 \delta_0 - \delta_1}, \quad \text{and} \quad \hat{p}_{00} = \frac{\varepsilon_2 \delta_0 \delta_2}{c_2 \varepsilon_2 \delta_0 - \delta_2}, \quad \hat{q}_{00} = \frac{c_2 \varepsilon_2^2}{c_2 \varepsilon_2 \delta_0 - \delta_2}, \quad (4.23)$$

соответственно. Используя эти формулы, первое соотношение в (4.17) дает

$$\hat{p}_{00} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_0 (c_1 \delta_2 - c_2 \delta_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \delta_1 \delta_2}{c_1 c_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \delta_0 - c_1 \varepsilon_1^2 \delta_2 + c_2 \varepsilon_2^2 \delta_1}. \quad (4.24a)$$

Чтобы найти \hat{q}_{00} , мы действуем так же, как мы получили (4.22b), и в соответствии с диаграммой Бьянки. Точнее, мы можем использовать второе уравнение либо в (4.15a), либо в (4.15b) с заменой \tilde{q} на \hat{q} , (p, q) заменены на (\tilde{p}, \tilde{q}) , указанные в (4.23), а параметр ε заменен на ε_2 (в качестве альтернативы мы можем заменить (p, q) на (\hat{p}, \hat{q}) из (4.23), а параметр ε на ε_1), чтобы найти

$$\hat{q}_{00} = \frac{c_1 c_2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{c_1 c_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \delta_0 - c_1 \varepsilon_1^2 \delta_2 + c_2 \varepsilon_2^2 \delta_1}. \quad (4.24b)$$

Это четырехпараметрическое семейство решений дает двухсолитонное решение (4.1) так же, как мы интерпретировали (4.22) как односолитонное решение системы Адлера-Ямилова. См. графики произведения $|\hat{p}_{00} \hat{q}_{00}|$ на рисунке 4.2.

Глава 5

Заключение

В этой статье мы предложили новый метод вывода преобразований Бэклунда и построения решений для нелинейных интегрируемых РДЕ, которые допускают представление Лакса, но не обязательно обладают свойством трехмерной совместимости. В частности, в нашем подходе мы рассматриваем преобразования Дарбу, которые оставляют данную пару Лакса ковариантной и по построению приводят к преобразованиям Бэклунда для соответствующей дискретной системы. Перестановочность четырех матриц Дарбу согласно диаграмме Бьянки на рисунке 3.1 приводит к нелинейному принципу суперпозиции родственного преобразования Бэклунда. Более того, последнее преобразование и принцип суперпозиции можно использовать в построении интересных решений РДЕ, начиная с простых. В качестве иллюстративного примера мы использовали систему Адлера–Ямилова (4.1). Для этой системы мы построили Дарбу и соответствующие преобразования Бэклунда. С помощью преобразования (4.15) и принципа суперпозиции построены одно- и двухсолитонные решения, начиная с тривиального решения $p_{00} = 0, q_{00} = \alpha^{-n} \beta^{-m}$.

В иллюстративном примере, который мы рассмотрели в разделе 4, представление Лакса (3.1) включает матрицы L и M, которые имеют одинаковый вид, см. (4.2). Возникает естественный вопрос, можно ли применить наш метод к случаю интегрируемых РДЕ с представлением Лакса (3.1), где матрицы L и M не имеют одинаковой формы. Ответ на этот вопрос положительный, соответствующие преобразования могут включать вспомогательные функции (потенциалы), и этот вывод аналогичен общей конструкции, которую мы представили в подразделе 4.1, см. Матрица Дарбу и отношения (4.7), (4.9), (4.10).

Более того, наши рассуждения могут быть распространены на обобщенные симметрии дискретной системы. Обобщенные симметрии представляют собой (интегрируемые) дифференциально-разностные уравнения, включающие сдвиги в одном направлении решетки и совместимые с РДЕ. Их пара Лакса полудискретна, и ее дискретная часть совпадает с одним из двух уравнений полностью дискретной пары Лакса (2.2), см., например, [15]. Это соотношение позволяет распространить преобразования Дарбу и Бэклунда для РДЕ на соответствующие преобразования для дифференциально-разностных уравнений и использовать преобразование Бэклунда и его принцип суперпозиции при построении решений для уравнения симметрии. Мы подробно продемонстрируем этот метод и его расширения в нашей дальнейшей работе на примере уравнения Хироты–КдФ, а также систем, появившихся в [6, 13, 25].

Наши результаты можно использовать и расширять различными способами.

1. Применение метода для построения решений всех уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера, полученных в [22].

В [22] мы классифицировали преобразования Дарбу, связанные с уравнениями ти-

па НУШ, и построили интегрируемые дискретизации последних, а именно интегрируемые системы нелинейных РДЕ. Используя дискретную схему Дарбу–Лакса, которую мы предложили в разделе 3, можно вывести преобразования Беклунда и построить солитонные решения для этих нелинейных РДЕs.

2. Изучение решений связанных УЧП.

Система Адлера–Ямилова (4.1) представляет собой дискретизацию уравнения НУШ посредством его преобразования Дарбу [22]. В этой статье мы построили солитонные решения этой системы, чтобы можно было рассмотреть континуальные пределы этих решений для построения решений уравнения НУШ. Эта процедура может быть применена к другим уравнениям типа НУШ, появившимся в [22].

3. Изучение соответствующих отображений Янга–Бакстера.

В [21, 23] рассмотрены задачи матричной рефакторизации матриц Дарбу для интегрируемых УЧП с целью получения решений уравнения Янга–Бакстера и сплетающего уравнения Янга–Бакстера. Поскольку генератор отображений Янга–Бакстера является задачей матричной рефакторизации (3.8), имеет смысл понять, как преобразования Беклунда для РДЕ связаны с отображениями Янга–Бакстера. В будущей работе мы планируем показать, что отображения Янга–Бакстера и переплетающие отображения Янга–Бакстера являются суперпозициями преобразований Беклунда РДЕ.

4. Распространение результатов на случай дискретных систем на трехмерной решетке.

Результаты, использованные в этой статье, можно распространить на случай трехмерных систем, интегрируемых на решетке. Ожидается, что суперпозиция преобразований Беклунда, связанных с этими системами, является решением уравнения тетраэдра.

5. Обобщение результатов на случай алгебры Грассмана.

Расширения Грассмана преобразований Дарбу использовались при построении некоммутативных версий дискретных систем, см., например, [17, 34]. Однако в [20] было выведено, что системы в квад-графах могут потерять свойство трехмерной согласованности в расширении Грассмана. Представленный здесь метод можно было бы обобщить и использовать при построении преобразований Беклунда и выводе решений систем расширенного квадратографа Грассмана, появившихся в литературе.

6. Нахождение решения волн-убийц для системы Адлера–Ямилова.

Было бы интересно попытаться построить такие решения, вывод которых требует использования преобразования Дарбу, см., например, [12]. Тем не менее, нужно найти подходящее затравочное решение.

Литература

- [1] X. Fisenko, S. Konstantinou-Rizos, P. Xenitidis, "A discrete Darboux–Lax scheme for integrable difference equations," *Chaos, Solitons Fractals*, vol. 158, 112059 (2022)
- [2] V.E. Adler and R.I. Yamilov. 1994 Explicit auto-transformations of integrable chains *J. Phys. A.: Math. Gen.* **27** 477-492.
- [3] V. Adler, A. Bobenko, and Y. Suris. 2005 Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings *Comm. Anal. Geom.* **12** 967–1007.
- [4] J. Atkinson, J. Hietarinta and F. Nijhoff. 2007 Seed and soliton solutions for Adler’s lattice equation *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** F1–F8.
- [5] J. Atkinson and M. Nieszporski. 2014 Multi-Quadratic Quad Equations: Integrable Cases from a Factorized-Discriminant Hypothesis *Int. Math. Res. Not.* **2014** 4215–4240.
- [6] G. Berkeley, A.V. Mikhailov, and P. Xenitidis. 2016 Darboux transformations with tetrahedral reduction group and related integrable systems *J. Math. Phys.* **57**, 092701.
- [7] A. Bobenko and Y. Suris. 2002 Integrable systems on quad-graphs *Int. Math. Res. Notices* **11** 573–611.
- [8] A. Bobenko and Y. Suris. 2008 *Discrete Differential Geometry. Integrable Structure.* Graduate Studies in Mathematics **98** American Mathematical Society.
- [9] R. Boll. 2011 Classification of 3D Consistent Quad-Equations *J. Nonlinear Math. Phys.* **18** 337–365
- [10] T. Bridgman, W. Hereman, G.R.W. Quispel and P. van der Kamp. 2013 Symbolic Computation of Lax Pairs of Partial Difference Equations using Consistency Around the Cube *Found. Comput. Math.* **13** 517–544.
- [11] V. Caudrelier, N. Crampé, C. Zhang. 2014 Integrable Boundary for Quad-Graph Systems: Three-Dimensional Boundary Consistency *SIGMA* **014** (24 pp).
- [12] Sh. Chen, L.-Y. Song. 2013 Rogue waves in coupled Hirota systems. *Phys. Rev. E* **87** 032910.
- [13] A. Fordy and P. Xenitidis. 2017 \mathbb{Z}_N graded discrete Lax pairs and integrable difference equations. *J. Phys. A: Math. Theor.* **50** 165205.
- [14] A. Fordy and P. Xenitidis. 2017 \mathbb{Z}_N graded discrete Lax pairs and Yang–Baxter maps. *Proc. R. Soc. A.* **473** 20160946.
- [15] A. Fordy and P. Xenitidis. 2020 Symmetries of \mathbb{Z}_N graded discrete integrable systems *J Phys A: Math Theor* **53** 235201 (30pp).

- [16] W. Fu. 2020 Direct linearization approach to discrete integrable systems associated with Z_N graded Lax pairs. *Proc. R. Soc. A.* **476**.
- [17] G.G. Grahovski, A.V. Mikhailov. 2013 Integrable discretisations for a class of nonlinear Schrödinger equations on Grassmann algebras, *Phys. Lett. A* **377** 3254–3259.
- [18] J. Hietarinta, N. Joshi, F. Nijhoff. 2016 *Discrete Systems and Integrability* Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge University Press.
- [19] P. Kassotakis, M. Nieszporski, V. Papageorgiou, A. Tongas 2019 Tetrahedron maps and symmetries of three dimensional integrable discrete equations, *J. Math. Phys.* **60** 123503.
- [20] S. Konstantinou-Rizos. 2020 On the 3D consistency of a Grassmann extended lattice Boussinesq system, *J. Nuc. Phys. B* **951** 114878.
- [21] S. Konstantinou-Rizos and A.V. Mikhailov. 2013 Darboux transformations, finite reduction groups and related Yang–Baxter maps. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 425201.
- [22] S. Konstantinou-Rizos, A.V. Mikhailov and P. Xenitidis. 2015 Reduction groups and related integrable difference systems of nonlinear Schrödinger type *J. Math. Phys.* **56** 082701.
- [23] S. Konstantinou-Rizos, G. Papamikos. 2019 Entwining Yang–Baxter maps related to NLS type equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **52** 485201.
- [24] S.B. Lobb, F.W. Nijhoff. 2009 Lagrangian multiforms and multidimensional consistency, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 454013.
- [25] A.V. Mikhailov and P. Xenitidis. 2014 Second Order Integrability Conditions for Difference Equations: An Integrable Equation. *Lett. Math. Phys.* **104** 431–450.
- [26] F. Nijhoff. 2002 Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system *Phys. Lett. A* **297** 49–58.
- [27] F. Nijhoff, J. Atkinson and J. Hietarinta. 2010 A Constructive Approach to the Soliton Solutions of Integrable Quadrilateral Lattice Equations *Commun. Math. Phys.* **297** 283–304.
- [28] F. Nijhoff, A.J. Walker. 2001 The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the garnier systems *Glasgow Math. J.* **43** 109–123.
- [29] V. Papageorgiou, A. Tongas. 2007 Yang–Baxter maps and multi-field integrable lattice equations *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 12677.
- [30] Y. Shi 2020 Z_N graded discrete integrable systems and Darboux transformations. *J. Phys. A: Math. Theor.* **53** 044003.
- [31] P. Xenitidis. 2018 Determining the symmetries of difference equations. *Proc. R. Soc. A.* **474** 20180340.
- [32] P. Xenitidis. 2019 On consistent systems of difference equations. *J. Phys. A: Math. Theor.* **52** 455201.
- [33] P. Xenitidis, F. Nijhoff and S. Lobb. 2011 On the Lagrangian formulation of multidimensionally consistent systems. *Proc. R. Soc. A.* **467** 3295–3317.

- [34] L.L. Xue, D. Levi and Q.P. Liu. 2013 Supersymmetric KdV equation: Darboux transformation and discrete systems *J. Phys. A: Math. Theor. (FTC)* **46** 502001.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Чужина Богдана Бахтияровича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Локальные представления групп плоских виртуальных кос автоморфизмами свободной группы» являются: представления (12), предложенные в теореме 1, теоремы 2, 3, 5, следствие 2, семейства представлений, предложенные в параграфе 2.5.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с февраля 2021 года по март 2023 года мною был произведен поиск в следующих поисковых системах: Google, arxiv.org по следующим ключевым словам: flat virtual braids, representations of flat virtual braids, в выдаче поисковиков было исследовано 18 статей, 1 монография, 2 диссертации (большинство вошло в список литературы к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [12] и [20] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Андреем Юрьевичем Весниным, профессором кафедры геометрии и топологии механико-математического факультета Новосибирского государственного университета (далее ММФ НГУ).

- Проведена серия консультаций с профессором кафедры алгебры и математической логики ММФ НГУ Валерием Георгиевичем Бардаковым.

- Проведены выступления на учебно-исследовательском семинаре «Инварианты трехмерных многообразий» ММФ НГУ (руководитель семинара член-корреспондент РАН Андрей Юрьевич Веснин).

- Проведены многократные обсуждения вопросов, затронутых в квалификационной работе, с аспирантами и студентами кафедры геометрии и топологии ММФ НГУ.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьевки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведенные в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 20.06.2023. На Смотр представлен проект текста работы.



Чужин Богдан Бахтиярович
31 мая 2023 г. Новосибирск, Россия

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет механико-математический

Кафедра геометрии и топологии

Направление подготовки математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

Чужинова Богдана Бахтияровича

(Фамилия, Имя, Отчество)

Тема работы: «Локальные представления групп плоских виртуальных кос
автоморфизмами свободной группы»

«К защите допущен»

Научный руководитель

Заведующий кафедрой,
д.ф.-м.н., академик РАН

д.ф.-м.н., профессор кафедры
ГиТ ММФ НГУ, чл.-корр. РАН

Тайманов И. А. / _____

(фамилия, И.,О.) (подпись, МП)

« » _____ 2023 г.

Веснин А. Ю. / _____

(фамилия, И.,О.) (подпись, МП)

« » _____ 2023 г.

Дата защиты: « » июня 2023 г.

Новосибирск, 2023

Реферат

Название работы: «Локальные представления групп плоских виртуальных кос автоморфизмами свободной группы»

Количество страниц: 34

Количество иллюстраций и таблиц: 0

Количество использованных источников: 20

Ключевые слова: группа плоских виртуальных кос, представления плоских виртуальных кос, локальные представления плоских виртуальных кос, представления типа Вады

Объектом изучения настоящей работы являются представления группы плоских виртуальных кос. Актуальность работы определяется тем, что классические узлы и их обобщения активно изучаются в последние годы, при этом инварианты узлов тесно связаны с представлениями групп кос.

В работе вводится определение локального представления группы плоских виртуальных кос FVB_n автоморфизмами свободной группы, установлены некоторые свойства таких представлений, классифицированы однородные представления FVB_3 , найдено семейство неоднородных локальных представлений группы FVB_n , а также получено алгебраическое описание ядер изучаемых представлений при малых n .

Полученные, в данной работе, результаты будут полезны для решения общей проблемы нахождения точного представления группы FVB_n автоморфизмами некоторой свободной группы.

Содержание

1 Введение	2
2 Основные результаты	6
2.1 Существование локальных представлений	6
2.2 Ядро гомоморфизма $\Theta_n^{w,m}$ и группа FH_n	10
2.3 Нетривиальность ядра $\text{Ker}(\Theta_n^{w,m})$ при $n \geq 3$	17
2.4 Классификация локальных однородных представлений FVB_n .	20
2.5 Примеры неоднородных представлений FVB_n	29
3 Заключение	31
Список литературы	34

1 Введение

При исследовании классических узлов и их обобщений важную роль играют инварианты, возникающие из представлений групп кос. Основы теории классических кос заложены в работах Э. Артина в 20-е годы прошлого века. В [1] он определил группу B_n классических кос на n нитях, как группу с порождающими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2. \quad (2)$$

Артин построил точное представление $\varphi_n: B_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, где $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ — свободная группа ранга n . Гомоморфизм φ_n сопоставляет порождающему $\sigma_i \in B_n$ следующий автоморфизм:

$$\varphi_n(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}, \\ x_j \mapsto x_j, \quad j \neq i, i + 1. \end{cases}$$

Далее мы не будем указывать действие автоморфизма на тех порождающих, на которых он действует тождественно. Композицию автоморфизмов мы записываем в порядке их применения слева направо, то есть $\varphi\psi(f) = \psi(\varphi(f))$.

В [15] Л. Кауффман ввел понятия виртуального узла и виртуального зацепления, которые являются обобщениями классических узлов и зацеплений. В той же работе, аналогично группе классических кос, он определил группу виртуальных кос VB_n , порожденную элементами $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ и $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, которые удовлетворяют *косовым соотношениям* (1) — (2), *соотношениям*

группы подстановок (3) – (5) и смешанным соотношениям (6) – (7):

$$\rho_i^2 = 1, \quad 1 \leq i \leq n - 1, \quad (3)$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad (4)$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2, \quad (5)$$

$$\rho_i \sigma_j = \sigma_j \rho_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad (6)$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2. \quad (7)$$

С. Камада [13] установил, что имеет место следующая *теорема Александра для виртуальных кос*: Если K – виртуальное зацепление, то для некоторого n найдется виртуальная коса $\beta \in VB_n$ такая, что K является замыканием β .

Отметим, что как показано в [11], соотношения

$$\rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2, \quad (8)$$

$$\rho_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \rho_i, \quad 1 \leq i \leq n - 2, \quad (9)$$

не выполняются в группе VB_n . Соотношения (8) – (9) называют *запрещенными соотношениями*. Группа WB_n , которая получается из VB_n добавлением соотношения (8), называется *группой со спайками (welded group)* [8]. Эта же группа получается, если к группе VB_n добавить соотношение (9). Добавление к VB_n обоих соотношений (8) и (9) приводит к распутывающим преобразованиям для виртуальных узлов и зацеплений [11; 14; 13]. Другие распутывающие преобразования для зацеплений, виртуальных зацеплений и зацеплений со спайками приведены, например, в [9; 10; 17]. Отметим, что представления $VB_n \rightarrow \text{Aut}(G_n)$ были построены, например, для групп G_n следующего вида: $G_n = \mathbb{F}_n * \mathbb{Z}^{n+1}$ в [19], $G_n = \mathbb{F}_n * \mathbb{Z}^2$ в [6], $G_n = \mathbb{F}_n * \mathbb{Z}^{2n+1}$ и $G_n = \mathbb{F}_n * \mathbb{Z}^n$ в [4].

В [16] была введена *группа плоских виртуальных кос FVB_n* на n нитях

как результат добавления к группе VB_n соотношений (10):

$$\sigma_i^2 = 1, \quad 1 \leq i \leq n - 1. \quad (10)$$

В [7] была сформулирована проблема существования такого представления группы FVB_n автоморфизмами некоторой группы, при котором не выполнялись бы запрещенные соотношения. В [3] было построено представление $\eta_n: FVB_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$, где $\mathbb{F}_{2n} = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle$ свободная группа с $2n$ образующими. Гомоморфизм η_n сопоставляет порождающим $\sigma_i, \rho_i \in FVB_n$ следующие автоморфизмы:

$$\eta_n(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}y_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_iy_{i+1}^{-1}, \end{cases} \quad \eta_n(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ y_i \mapsto y_{i+1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i. \end{cases} \quad (11)$$

При этом, было показано, что представление $\eta_2: FVB_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_4)$ является точным.

В данной работе строятся новые представления группы FVB_n автоморфизмами свободной группы $\mathbb{F}_{2n} = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle$, которые обобщают представление (11). А именно, рассматривается семейство гомоморфизмов $\Theta_n: FVB_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$, которые задаются сопоставлением порождающим $\sigma_i, \rho_i \in FVB_n$ следующих автоморфизмов:

$$\Theta_n(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} a_i(y_i, y_{i+1}), \\ x_{i+1} \mapsto x_i b_i(y_i, y_{i+1}), \end{cases} \quad \Theta_n(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} c_i(y_i, y_{i+1}), \\ x_{i+1} \mapsto x_i d_i(y_i, y_{i+1}), \\ y_i \mapsto y_{i+1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i, \end{cases}$$

где для каждого i , $1 \leq i \leq n - 1$, элементы $a_i(y_i, y_{i+1})$, $b_i(y_i, y_{i+1})$, $c_i(y_i, y_{i+1})$ и $d_i(y_i, y_{i+1})$ являются словами в свободной группе ранга два с порождающими

$\{y_i, y_{i+1}\}$. Таким образом, гомоморфизмы Θ_n зависят только от выбора слов a_i, b_i, c_i, d_i , определяющих локально нетривиальное действие автоморфизма, соответствующего порождающему группы FVB_n , и в этом смысле гомоморфизмы Θ_n являются *локальными*. Отметим, что локальные представления классических групп кос B_n автоморфизмами свободной группы ранга n изучались, например, в [20]. Т. Ито в [12] дал классификацию классических локальных представлений группы B_n . В той же работе изучались групповые инварианты, возникающие из найденных представлений. В этой работе, мы определим понятие локальности для представлений группы FVB_n и дадим классификацию локальных представлений группы FVB_n автоморфизмами свободной группы \mathbb{F}_{2n} ранга $2n$.

Работа имеет следующую структуру. В теореме 1 будет установлено при каких a_i, b_i, c_i и d_i существует локальный гомоморфизм Θ_n группы FVB_n в группу автоморфизмов свободной группы \mathbb{F}_{2n} . В параграфе 2.2 будут получены результаты о строении ядра гомоморфизма Θ_n , в частности, в теореме 3 будет описано ядро гомоморфизма при $n = 2$. В теореме 4 будет установлено, что при $n \geq 3$ ядро гомоморфизма Θ_n содержит свободную группу ранга 2. Отметим, что ранее в [3] было показано, что при $n \geq 3$ ядро гомоморфизма η_n , являющегося частным случаем Θ_n , содержит бесконечную циклическую группу. В параграфе 2.4 вводится понятие локального представления группы FVB_n . Теорема 5 дает классификацию локальных однородных представлений FVB_n автоморфизмами свободной группы ранга 6. В параграфе 2.5 рассмотрено одно семейство локальных неоднородных представлений.

2 Основные результаты

2.1 Существование локальных представлений

Пусть \mathbb{F}_{2n} — свободная группа ранга $2n$ со свободными порождающими $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$, и $a_i(y_i, y_{i+1}), b_i(y_i, y_{i+1}), c_i(y_i, y_{i+1}), d_i(y_i, y_{i+1})$ — слова в свободной группе с порождающими $\{y_i, y_{i+1}\}$, где $1 \leq i \leq n - 1$. Зададим отображение $\Theta_n : FVB_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$ сопоставляя σ_i и ρ_i автоморфизмы:

$$\Theta_n(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} a_i(y_i, y_{i+1}), \\ x_{i+1} \mapsto x_i b_i(y_i, y_{i+1}), \end{cases} \quad \Theta_n(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} c_i(y_i, y_{i+1}), \\ x_{i+1} \mapsto x_i d_i(y_i, y_{i+1}), \\ y_i \mapsto y_{i+1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда имеют место следующие свойства.

(1) Отображение Θ_n является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$b_i(y_i, y_{i+1}) = a_i^{-1}(y_i, y_{i+1}), \quad c_i(y_i, y_{i+1}) = y_{i+1}^{m_i}, \quad d_i(y_i, y_{i+1}) = y_i^{-m_i},$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$, при $1 \leq i \leq n - 1$ и

$$a_j(y_j, y_{j+1}) = y_{j+1}^{m_j} a_{j-1}(y_j, y_{j+1}) y_j^{-m_{j-1}}, \quad 2 \leq j \leq n - 1,$$

при $n \geq 3$, где $a_1 = w(y_1, y_2)$ для некоторого слова $w(A, B) \in \mathbb{F}_2 = \langle A, B \rangle$.

(2) При отображении Θ_n не сохраняются запрещенные соотношения.

Доказательство. (1) Проверим, что соотношения $(\boxed{1}) - (\boxed{7})$ и соотношение $(\boxed{10})$ сохраняются при отображении Θ_n . Обозначим $s_i = \Theta_n(\sigma_i) \in \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$ и $r_i = \Theta_n(\rho_i) \in \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$.

Соотношения (1), (4) и (6) сохраняются поскольку s_i действует нетривиально только на x_i и x_{i+1} , а r_i действует нетривиально только на x_i , x_{i+1} , y_i и y_{i+1} .

Поскольку

$$s_i^2 : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} a_i(y_i, y_{i+1}) \mapsto x_i b_i(y_i, y_{i+1}) a_i(y_i, y_{i+1}), \\ x_{i+1} \mapsto x_i b_i(y_i, y_{i+1}) \mapsto x_{i+1} a_i(y_i, y_{i+1}) b_i(y_i, y_{i+1}), \end{cases}$$

соотношение (10) будет сохраняться если и только если $b_i(y_i, y_{i+1}) = a_i^{-1}(y_i, y_{i+1})$ для всех $1 \leq i \leq n - 1$. Далее,

$$r_i^2 : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} c_i(y_i, y_{i+1}) \mapsto x_i d_i(y_i, y_{i+1}) c_i(y_{i+1}, y_i), \\ x_{i+1} \mapsto x_i d_i(y_i, y_{i+1}) \mapsto x_{i+1} c_i(y_i, y_{i+1}) d_i(y_{i+1}, y_i), \end{cases}$$

и соотношение (3) сохраняется если и только если

$$d_i(y_i, y_{i+1}) = c_i^{-1}(y_{i+1}, y_i), \quad 1 \leq i \leq n - 1. \quad (13)$$

Рассмотрим действие автоморфизмов $r_i r_{i+1} s_i$ и $s_{i+1} r_i r_{i+1}$. Получаем

$$r_i r_{i+1} s_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} c_i(y_i, y_{i+1}) \mapsto x_{i+2} c_{i+1}(y_{i+1}, y_{i+2}) c_i(y_i, y_{i+2}), \\ x_{i+1} \mapsto x_i c_i^{-1}(y_{i+1}, y_i) \mapsto x_i c_i^{-1}(y_{i+2}, y_i) \mapsto x_{i+1} a_i(y_i, y_{i+1}) c_i^{-1}(y_{i+2}, y_i), \\ x_{i+2} \mapsto x_{i+2} \mapsto x_{i+1} c_{i+1}^{-1}(y_{i+2}, y_{i+1}) \mapsto x_i a_i^{-1}(y_i, y_{i+1}) c_{i+1}^{-1}(y_{i+2}, y_{i+1}), \end{cases}$$

и

$$s_{i+1} r_i r_{i+1} : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} c_i(y_i, y_{i+1}) \mapsto x_{i+2} c_{i+1}(y_{i+1}, y_{i+2}) c_i(y_i, y_{i+2}), \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+2} a_{i+1}(y_{i+1}, y_{i+2}) \mapsto x_{i+2} a_{i+1}(y_i, y_{i+2}) \\ \mapsto x_{i+1} c_{i+1}^{-1}(y_{i+2}, y_{i+1}) a_{i+1}(y_i, y_{i+1}), \\ x_{i+2} \mapsto x_{i+1} a_{i+1}^{-1}(y_{i+1}, y_{i+2}) \mapsto x_i c_i^{-1}(y_{i+1}, y_i) a_{i+1}^{-1}(y_i, y_{i+2}) \\ \mapsto x_i c_i^{-1}(y_{i+2}, y_i) a_{i+1}^{-1}(y_i, y_{i+1}). \end{cases}$$

Таким образом, для выполнения соотношения (7) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено

$$a_{i+1}(y_i, y_{i+1})c_i(y_{i+2}, y_i) = c_{i+1}(y_{i+2}, y_{i+1})a_i(y_i, y_{i+1}), \quad (14)$$

для всех $1 \leq i \leq n - 2$.

Аналогичное рассмотрение соотношений (5) приводит к равенству

$$c_{i+1}(y_i, y_{i+2})c_i(y_{i+1}, y_{i+2}) = c_{i+1}(y_{i+1}, y_{i+2})c_i(y_i, y_{i+2}), \quad (15)$$

для всех $1 \leq i \leq n - 2$. Это возможно лишь в случае $c_i(y_i, y_{i+1}) = y_{i+1}^{m_i}$ для некоторого $m_i \in \mathbb{Z}$ при $1 \leq i \leq n - 1$. Используя (14) и (15) получаем

$$a_{i+1}(y_i, y_{i+1}) = y_{i+1}^{m_{i+1}} a_i(y_i, y_{i+1}) y_i^{-m_i}, \quad 1 \leq i \leq n - 2.$$

Выполнение соотношений (2) проверяется непосредственно.

(2) Теперь покажем, что при отображении Θ_n не выполняются запрещенные соотношения. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} y_i \xrightarrow{r_i} y_{i+1} \xrightarrow{s_{i+1}} y_{i+1} \xrightarrow{s_i} y_{i+1}, \\ y_i \xrightarrow{s_{i+1}} y_i \xrightarrow{s_i} y_i \xrightarrow{r_{i+1}} y_i, \end{aligned}$$

следовательно, $r_i s_{i+1} s_i \neq s_{i+1} s_i r_{i+1}$. Аналогично

$$\begin{aligned} y_i \xrightarrow{s_i} y_i \xrightarrow{s_{i+1}} y_i \xrightarrow{r_i} y_{i+1}, \\ y_i \xrightarrow{r_{i+1}} y_i \xrightarrow{s_i} y_i \xrightarrow{s_{i+1}} y_i, \end{aligned}$$

следовательно, $s_i s_{i+1} r_i \neq r_{i+1} s_i s_{i+1}$. □

Таким образом, представление Θ_n , задаваемое формулой (12), зависит от слова $a_1(A, B) = w(A, B) \in \mathbb{F}_2 = \langle A, B \rangle$ в которое вместо A и B подставляются y_i и y_{i+1} и набора целых чисел $m = (m_1, \dots, m_{n-1})$. Чтобы подчеркнуть

эту зависимость представления от w и m , мы будем обозначать его $\Theta_n^{w,m}$:

$$\Theta_n^{w,m}(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} \prod_{k=i}^2 y_{i+1}^{m_k} w(y_i, y_{i+1}) \prod_{k=1}^{i-1} y_i^{-m_k}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i \prod_{k=i-1}^1 y_i^{m_k} (w(y_i, y_{i+1}))^{-1} \prod_{k=2}^i y_{i+1}^{-m_k}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\Theta_n^{w,m}(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} y_{i+1}^{m_i}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i y_i^{-m_i}, \\ y_i \mapsto y_{i+1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i, \end{cases} \quad (17)$$

где в произведениях $\prod_{k=i}^2$ и $\prod_{k=i-1}^1$ предполагается, что $i \geq 2$ и индексы убывают,

а в произведениях $\prod_{k=1}^{i-1}$ и $\prod_{k=2}^i$ предполагается, что $i \geq 2$ и индексы возрастают.

Слово w будем называть *определяющим словом* для гомоморфизма $\Theta_n^{w,m}$.

В частном случае, когда $m_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, n-1$, будем писать

$\Theta_n^w : FVB_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$, полагая что

$$\Theta_n^w(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} w(y_i, y_{i+1}), \\ x_{i+1} \mapsto x_i (w(y_i, y_{i+1}))^{-1}, \end{cases} \quad \Theta_n^w(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ y_i \mapsto y_{i+1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i. \end{cases} \quad (18)$$

Отметим, что гомоморфизм 11, построенный в [3], может быть представлен

в виде $\eta_n = \Theta_n^w$, для $w(A, B) = B$.

Пусть $\beta \in FVB_n$ и $x \in \mathbb{F}_{2n}$. Далее, для упрощения обозначений, под $\beta(x)$ мы подразумеваем $\Theta_n^{w,m}(\beta)(x)$, где слово w и набор m предполагается понятными из контекста.

2.2 Ядро гомоморфизма $\Theta_n^{w,m}$ и группа FH_n

В этом разделе мы покажем, что ядро гомоморфизма $\Theta_n^{w,m}$ лежит в пересечении группы плоских виртуальных крашенных кос и группы FH_n , определенных ниже.

Рассмотрим подгруппу $S_n = \langle \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \rangle$ группы FVB_n , которая изоморфна группе перестановок n -элементного множества. Отображение $\pi_n : FVB_n \rightarrow S_n$, заданное на порождающих σ_i, ρ_i по правилу:

$$\begin{aligned} \pi_n(\sigma_i) &= \sigma_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \pi_n(\rho_i) &= \sigma_i, & 1 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

очевидно, является гомоморфизмом. Его ядро, обозначаемое $FVP_n = \text{Ker}(\pi_n)$, называется *группой плоских виртуальных крашенных кос на n нитях*.

Аналогично, подгруппа $S'_n = \langle \rho_1 \dots \rho_{n-1} \rangle$ группы FVB_n изоморфна группе перестановок n -элементного множества, и отображение $\nu_n : FVB_n \rightarrow S'_n$, заданное на порождающих σ_i, ρ_i следующим образом:

$$\begin{aligned} \nu_n(\sigma_i) &= 1, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \nu_n(\rho_i) &= \rho_i, & 1 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

также является гомоморфизмом. Его ядро, обозначенное в [3] через $FH_n = \text{Ker}(\nu_n)$, является плоским аналогом группы H_n из [2, Prop. 17]. Отметим, что в [5] группа FH_n обозначается через KFB_n и называется *kure virtual braid group*.

Лемма 1. [3, Prop. 4] *Группа FH_n допускает представление с порождающими $x_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$ и определяющими соотношениями*

$$x_{i,j}^2 = 1, \quad x_{i,j} x_{k,l} = x_{k,l} x_{i,j}, \quad x_{i,k} x_{k,j} x_{i,k} = x_{k,j} x_{i,k} x_{k,j}, \quad (19)$$

где различные буквы обозначают различные индексы.

Следствие 1. *Группа FH_n является группой Коксетера с определяющими соотношениями*

$$x_{i,j}^2 = 1, \quad (x_{i,j} x_{k,l})^2 = 1, \quad (x_{i,k} x_{k,j})^3 = 1. \quad (20)$$

Следующее свойство является обобщением свойства, установленного в [3, Prop. 9] для слова $w(A, B) = B$.

Лемма 2. *Пусть $n \geq 2$. Для любого слова $w \in \mathbb{F}_2$ и любого набора целых чисел $m = (m_1, \dots, m_{n-1})$ выполнено $\text{Ker}(\Theta_n^{w,m}) \leq FVP_n \cap FH_n$.*

Доказательство. Пусть $g \in \text{Ker}(\Theta_n^{w,m})$. Тогда $y_i = g(y_i) = \nu_n(g)(y_i)$, так как все σ_i действуют на y_i тождественно. Но тогда $\nu_n(g)$ — тождественная перестановка множества $\{y_1, \dots, y_n\}$, что по определению означает $g \in FH_n$.

Далее, покажем, что $g \in FVP_n$. Обозначим через G нормальное замыкание подгруппы $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ в \mathbb{F}_{2n} . Ясно, что G является инвариантной подгруппой относительно действия $\Theta_n^{w,m}(FVB_n)$. Тогда $\Theta_n^{w,m}$ индуцирует гомоморфизм $\Psi_n^{w,m}: FVB_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n}/G) = \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, где $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Из формул (16), (17) можно выписать действие $\Psi_n^{w,m}$ на порождающих группы FVB_n :

$$\Psi_n^{w,m}(\sigma_i): \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \end{cases} \quad \Psi_n^{w,m}(\rho_i): \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Теперь легко видеть, что образом FVB_n при отображении $\Psi_n^{w,m}$ являются перестановки элементов множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. Осталось заметить, что если $g \in \text{Ker}(\Theta_n^{w,m})$, то $g \in \text{Ker}(\Psi_n^{w,m}) = FVP_n$. \square

Поскольку $S'_n \leq FVB_n$, то непосредственно из определения FH_n следует разложение $FVB_n = FH_n \rtimes S'_n$. Рассмотрев сужение гомоморфизма π_n на FH_n , получим гомоморфизм $\xi_n: FH_n \rightarrow S_n$. Заметим, что его ядро $FVHP_n = \text{Ker}(\xi_n) = FVP_n \cap FH_n$. Далее, поскольку $S'_n \leq FH_n$, получаем

разложение $FH_n = FVHP_n \rtimes S_n$. Таким образом, справедливо следующее разложение группы плоских виртуальных кос:

$$FVB_n = (FVHP_n \rtimes S_n) \rtimes S'_n.$$

Следуя [2], обозначим

$$\begin{aligned} \lambda_{i,i+1} &= \rho_i \sigma_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \lambda_{i,j} &= \rho_{j-1} \rho_{j-2} \cdots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-2} \rho_{j-1}, & j-i \geq 2. \end{aligned}$$

Лемма 3. [2] *Группа FVP_n порождается элементами $\lambda_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$, при этом определяющие соотношения имеют вид:*

$$\lambda_{i,j} \lambda_{k,l} = \lambda_{k,l} \lambda_{i,j}, \quad (21)$$

$$\lambda_{k,i} \lambda_{k,j} \lambda_{i,j} = \lambda_{i,j} \lambda_{k,j} \lambda_{k,i}, \quad (22)$$

где i, j, k, l соответствуют разным индексам.

Рассмотрим более подробно случай $n = 3$. Как показано в [2],

$$FVP_3 = \langle a, b, c \mid [a, c] = 1 \rangle, \quad (23)$$

где $a = \lambda_{2,3} \lambda_{1,3}$, $b = \lambda_{2,3}$ и $c = \lambda_{2,3} \lambda_{1,2}^{-1}$.

Теорема 2. *Имеет место следующее разложение*

$$FVHP_3 = \mathbb{Z}^2 * \mathbb{F}_3 * \Gamma,$$

где \mathbb{F}_3 – свободная группа ранга 3 и $\Gamma = \langle x, y, u, v, p, q \mid xy = uv, vu = pq, qp = yx \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим сужение гомоморфизма $\nu_3: FVB_3 \rightarrow S'_3$ на FVP_3 . Обозначим его $\varphi: FVP_3 \rightarrow S'_n$. Тогда $FVHP_3 = \text{Ker}(\varphi)$.

Для нахождения порождающих и соотношений группы $FVHP_3$ применим метод Райдемайстера – Шрайера, см. например [18]. Выпишем систему

шраеровых представителей для $\text{Ker}(\varphi)$, используя порождающие, указанные в копредставлении (23): $T = \{1, a, ab, c, cb, b\}$. Для элемента g через \bar{g} будем обозначать его представитель в T . Тогда ядро $\text{Ker}(\varphi)$ порождается следующим элементом:

$$\begin{aligned}
a \cdot a \cdot (\overline{a^2})^{-1} &= a^2 c^{-1} = t, & a \cdot c \cdot (\overline{ac})^{-1} &= ac = m, \\
ab \cdot a \cdot (\overline{aba})^{-1} &= abab^{-1} = v, & ab \cdot b \cdot (\overline{ab^2})^{-1} &= ab^2 a^{-1} = w, \\
ab \cdot c \cdot (\overline{abc})^{-1} &= abcb^{-1} c^{-1} = p, & c \cdot a \cdot (\overline{ca})^{-1} &= ca = r, \\
c \cdot c \cdot (\overline{c^2})^{-1} &= c^2 a^{-1} = g, & cb \cdot a \cdot (\overline{cba})^{-1} &= cbab^{-1} a^{-1} = q, \\
cb \cdot b \cdot (\overline{cb^2})^{-1} &= cb^2 c^{-1} = h, & cb \cdot c \cdot (\overline{cbc})^{-1} &= cbcb^{-1} = y, \\
b \cdot a \cdot (\overline{ba})^{-1} &= bab^{-1} c^{-1} = x, & b \cdot b \cdot (\overline{b^2})^{-1} &= b^2 = f, \\
b \cdot c \cdot (\overline{bc})^{-1} &= bcb^{-1} a^{-1} = u.
\end{aligned}$$

Далее, соотношения $taca^{-1}c^{-1}t^{-1}$ для $t \in T$ нужно переписать в новых порождающих. Например, при $t = ab$ получаем:

$$\begin{aligned}
ab(aca^{-1}c^{-1})b^{-1}a^{-1} &= vbca^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1} = vuaba^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1} \\
&= viuq^{-1}cbc^{-1}b^{-1}a^{-1} = viuq^{-1}p^{-1}.
\end{aligned}$$

Аналогично находятся остальные соотношения. В итоге получим:

$$\begin{aligned}
m &= r, & m &= tg, & r &= gt, \\
xy &= uv, & vu &= pq, & qp &= yx.
\end{aligned}$$

Теперь ясно, что элементы g, t порождают \mathbb{Z}^2 , элементы w, h, f порождают \mathbb{F}_3 , а группу, порожденную элементами x, y, u, v, p и q , обозначим через Γ . \square

Лемма 4. [3] Пусть G_n – подгруппа группы FVP_n , порожденная элемен-

тамы:

$$t_{i,j} = \lambda_{i,j}^2, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (24)$$

$$d_{i,j,k} = \lambda_{j,k}^{-1} \lambda_{i,j}^{-1} \lambda_{j,k} \lambda_{i,k}, \quad 1 \leq i < j < k \leq n, \quad (25)$$

$$e_{i,j,k} = \lambda_{j,k}^{-1} \lambda_{i,j}^{-1} \lambda_{i,k} \lambda_{i,j}, \quad 1 \leq i < j < k \leq n. \quad (26)$$

Тогда нормальное замыкание G_n в FVP_n совпадает с $FVHP_n$.

Опишем действие Θ_n^w на порождающих, указанных в лемме [4](#).

Лемма 5. Гомоморфизм $\Theta_n^w : FVB_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$, определяемый словом $w \in \mathbb{F}_2$, сопоставляет порождающим группы группы G_n следующие автоморфизмы:

$$\Theta_n^w(t_{i,j}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i w_{i,j}^{-1} w_{j,i}^{-1}, \\ x_j \mapsto x_j w_{i,j} w_{j,i}, \end{cases} \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (27)$$

$$\Theta_n^w(d_{i,j,k}) : \begin{cases} x_j \mapsto x_j w_{j,i}^{-1} w_{i,k}^{-1} w_{j,k}, \\ x_k \mapsto x_k w_{i,k} w_{j,i} w_{j,k}^{-1}, \end{cases} \quad 1 \leq i < j < k \leq n, \quad (28)$$

$$\Theta_n^w(e_{i,j,k}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i w_{i,j}^{-1} w_{j,k}^{-1} w_{i,k}, \\ x_j \mapsto x_j w_{i,j} w_{i,k}^{-1} w_{j,k}, \end{cases} \quad 1 \leq i < j < k \leq n. \quad (29)$$

где $w_{i,j} = w(y_i, y_j)$ для всех i, j .

Доказательство. Пусть, как и ранее, $s_i = \Theta_n^w(\sigma_i)$ и $r_i = \Theta_n^w(\rho_i)$. Прежде всего установим некоторые вспомогательные формулы.

Пусть $1 \leq i < j - 1 \leq n - 1$, тогда

$$b_{i,j} := \Theta_n^w(\rho_{j-1} \dots \rho_{i+1}) : \begin{cases} x_{i+1} \xrightarrow{r_{i+1}} x_{i+2}, \\ \vdots \\ x_{j-1} \xrightarrow{r_{j-1}} x_j, \\ x_j \xrightarrow{r_{j-1}} x_{j-1} \xrightarrow{r_{j-2}} x_{j-2} \dots \xrightarrow{r_{i+1}} x_{i+1}, \\ y_{i+1} \xrightarrow{r_{i+1}} y_{i+2}, \\ \vdots \\ y_{j-1} \xrightarrow{r_{j-1}} y_j, \\ y_j \xrightarrow{r_{j-1}} x_{j-1} \xrightarrow{r_{j-2}} x_{j-2} \dots \xrightarrow{r_{i+1}} y_{i+1}. \end{cases}$$

Далее,

$$a_{i,i+1} := \Theta_n^w(\lambda_{i,i+1}) = \Theta_n^w(\rho_i \sigma_i) : \begin{cases} x_i \xrightarrow{r_i} x_{i+1} \xrightarrow{s_i} x_i w_{i,i+1}^{-1}, \\ x_{i+1} \xrightarrow{r_i} x_i \xrightarrow{s_i} x_{i+1} w_{i,i+1}, \\ y_i \xrightarrow{r_i} y_{i+1} \xrightarrow{s_i} y_{i+1}, \\ y_{i+1} \xrightarrow{r_i} y_i \xrightarrow{s_i} y_i. \end{cases}$$

Покажем, что для $1 \leq i < j \leq n$ справедливы формулы

$$\Theta_n^w(\lambda_{i,j}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i w_{i,j}^{-1}, \\ x_j \mapsto x_j w_{i,j}, \\ y_i \mapsto y_j, \\ y_j \mapsto y_i, \end{cases} \quad \Theta_n^w(\lambda_{i,j}^{-1}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i w_{j,i}, \\ x_j \mapsto x_j w_{j,i}^{-1}, \\ y_i \mapsto y_j, \\ y_j \mapsto y_i. \end{cases}$$

В самом деле, имеем

$$\Theta_n^w(\lambda_{i,j}) : \left\{ \begin{array}{l} x_i \xrightarrow{b_{i,j}} x_i \xrightarrow{a_{i,i+1}} x_i w_{i,i+1}^{-1} \xrightarrow{b_{i,j}^{-1}} x_i w_{i,j}^{-1}, \\ x_{i+1} \xrightarrow{b_{i,j}} x_{i+2} \xrightarrow{a_{i,i+1}} x_{i+2} \xrightarrow{b_{i,j}^{-1}} x_{i+1}, \\ \vdots \\ x_{j-1} \xrightarrow{b_{i,j}} x_j \xrightarrow{a_{i,i+1}} x_j \xrightarrow{b_{i,j}^{-1}} x_{j-1}, \\ x_j \xrightarrow{b_{i,j}} x_{i+1} \xrightarrow{a_{i,i+1}} x_{i+1} w_{i,i+1} \xrightarrow{b_{i,j}^{-1}} x_j w_{i,j}, \\ y_i \xrightarrow{b_{i,j}} y_i \xrightarrow{a_{i,i+1}} y_{i+1} \xrightarrow{b_{i,j}^{-1}} y_j, \\ y_{i+1} \xrightarrow{b_{i,j}} y_{i+2} \xrightarrow{a_{i,i+1}} y_{i+2} \xrightarrow{b_{i,j}^{-1}} y_{i+1}, \\ \vdots \\ y_{j-1} \xrightarrow{b_{i,j}} y_j \xrightarrow{a_{i,i+1}} y_j \xrightarrow{b_{i,j}^{-1}} y_{j-1}, \\ y_j \xrightarrow{b_{i,j}} y_{i+1} \xrightarrow{a_{i,i+1}} y_i \xrightarrow{b_{i,j}^{-1}} y_i. \end{array} \right.$$

Теперь мы готовы доказать формулы (27) – (29). Например, установим (27):

$$\Theta_n^w(t_{i,j}) = \Theta_n^w(\lambda_{i,j}^2) : \left\{ \begin{array}{l} x_i \xrightarrow{\lambda_{i,j}} x_i w_{i,j}^{-1} \xrightarrow{\lambda_{i,j}} x_i w_{i,j}^{-1} w_{j,i}^{-1}, \\ x_j \xrightarrow{\lambda_{i,j}} x_i w_{i,j} \xrightarrow{\lambda_{i,j}} x_i w_{i,j} w_{j,i}, \\ y_i \xrightarrow{\lambda_{i,j}} y_j \xrightarrow{\lambda_{i,j}} y_i, \\ y_j \xrightarrow{\lambda_{i,j}} y_i \xrightarrow{\lambda_{i,j}} y_j. \end{array} \right.$$

Формулы (28) и (29) устанавливаются аналогично. □

Следующее утверждение дает ответ на вопрос о точности представлений $\Theta_n^{w,m}$ в случае $n = 2$.

Теорема 3. *Представление $\Theta_2^{w,m} : FVB_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_4)$ не является точным если определяющее слово w имеет вид*

$$w(A, B) = A^{k_1} B^{k_2} \dots A^{k_m} B^{-k_m} \dots A^{-k_2} B^{-k_1} A^{m_1},$$

где все k_i — целые числа, отличные от нуля за исключением, возможно, k_1 и k_m . При этом $\text{Ker}(\Theta_2^{w,m}) = FVHP_2$. Для остальных w представление $\Theta_2^{w,m}$ является точным.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $\text{Ker}(\Theta_2^{w,m}) \leq FVHP_2$. Нетрудно показать, что $FVHP_2$ порождается элементом $t_{1,2}$.

В случае $n = 2$ набор m состоит из одного целого числа $m = \{m_1\}$. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\Theta_n^{w,m}(t_{1,2}^k): \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 (w_{1,2}^{-1} y_2^{m_1} w_{2,1}^{-1} y_1^{m_1})^k, \\ x_2 \mapsto x_2 (w_{1,2} y_1^{-m_1} w_{2,1} y_2^{-m_1})^k. \end{cases}$$

Таким образом, $\Theta_n^w(t_{1,2}^k) = \text{id}$ тогда и только тогда, когда либо $k = 0$, либо $w_{1,2}^{-1} y_2^{m_1} w_{2,1}^{-1} y_1^{m_1} = 1$, то есть $f(y_1, y_2) = f^{-1}(y_2, y_1)$ для слова $f(y_1, y_2) = w(y_1, y_2) y_1^{-m_1}$.

Пусть $f(A, B) = A^{k_1} B^{k_2} \dots B^{k_s} A^{k_{s+1}}$. Тогда

$$A^{k_1} B^{k_2} \dots B^{k_s} A^{k_{s+1}} = B^{-k_{s+1}} A^{-k_s} \dots A^{-k_2} B^{-k_1},$$

откуда $f(A, B) = A^{k_1} B^{k_2} \dots A^{k_m} B^{-k_m} \dots A^{-k_2} B^{-k_1}$, где все k_i — целые числа, отличные от нуля за исключением, быть может k_1 и k_m . Но тогда $w(A, B) = A^{k_1} B^{k_2} \dots A^{k_m} B^{-k_m} \dots A^{-k_2} B^{-k_1} A^{m_1}$. □

2.3 Нетривиальность ядра $\text{Ker}(\Theta_n^{w,m})$ при $n \geq 3$

Рассмотрим следующие подгруппы группы FVB_n :

$$Q_n^i = \langle t_{i,i+1}, e_{i,i+1,i+2} \rangle, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad (30)$$

$$M_n^{i+1} = \langle t_{i+1,i+2}, d_{i,i+1,i+2} \rangle, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad (31)$$

$$P_n^{i+2} = \langle t_{i,i+2} \rangle, \quad 1 \leq i \leq n-2. \quad (32)$$

Лемма 6. Пусть $n \geq 3$ и $w(A, B) \in \mathbb{F}_2(A, B)$, Тогда для всех $i, 1 \leq i \leq n-2$, справедливо включение

$$\left[Q_n^i, [M_n^{i+1}, P_n^{i+2}] \right] \leq \text{Ker}(\Theta_n^w). \quad (33)$$

Доказательство. Заметим, что Q_n^i нетривиально действует только на порождающих x_i и x_{i+1} , M_n^{i+1} нетривиально действует только на x_{i+1} и x_{i+2} , а P_n^{i+2} нетривиально действует только на x_i и x_{i+2} . Рассмотрим элемент

$$h = q(mptm^{-1}p^{-1})q^{-1}(mptm^{-1}p^{-1})^{-1},$$

где $q \in Q_n^i$, $m \in M_n^{i+1}$ и $p \in P_n^{i+2}$. Он нетривиально действует только на порождающие x_i, x_{i+1} и x_{i+2} . Выпишем это действие:

$$h : x_i \xrightarrow{q} qx_i \xrightarrow{m} qmx_i \xrightarrow{p} pqmx_i \xrightarrow{m^{-1}} mpqmx_i \xrightarrow{p^{-1}} mpqmx_i \xrightarrow{q^{-1}} x_i \xrightarrow{p} px_i \xrightarrow{m} pmx_i \xrightarrow{p^{-1}m^{-1}} x_i;$$

$$h : x_{i+1} \xrightarrow{q} qx_{i+1} \xrightarrow{m} mqx_{i+1} \xrightarrow{p} pmqx_{i+1} \xrightarrow{m^{-1}} pmpqx_{i+1} \xrightarrow{p^{-1}} pmpqx_{i+1} \xrightarrow{q^{-1}} x_{i+1} \xrightarrow{p} px_{i+1} \xrightarrow{m} pmx_{i+1} \xrightarrow{p^{-1}m^{-1}} x_{i+1};$$

$$h : x_{i+2} \xrightarrow{q} qx_{i+2} \xrightarrow{m} mqx_{i+2} \xrightarrow{p} pmqx_{i+2} \xrightarrow{m^{-1}} pmpqx_{i+2} \xrightarrow{p^{-1}} pmpqx_{i+2} \xrightarrow{q^{-1}} x_{i+2} \xrightarrow{p} px_{i+2} \xrightarrow{m} pmx_{i+2} \xrightarrow{p^{-1}m^{-1}} x_{i+2};$$

Таким образом, $h \in \text{Ker}(\Theta_n^w)$ и включение (33) доказано. \square

Теорема 4. Пусть $n \geq 3$. Для любого определяющего слова $w(A, B) \in \mathbb{F}_2(A, B)$ ядро $\text{Ker}(\Theta_n^w)$ содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.

Доказательство. Обозначим свободную группу ранга 2 через \mathbb{F}_2 . В силу леммы 6 достаточно показать, что $\mathbb{F}_2 \leq \left[Q_3^1, [M_3^2, P_3^3] \right] \leq FVP_3$.

Рассмотрим элементы

$$h_0 = [t_{1,2}, [t_{2,3}, t_{1,3}]] \quad \text{и} \quad h_1 = [t_{1,2}, [d_{1,2,3}, t_{1,3}]].$$

Выпишем их через образующие группы FVP_3 , см. (23):

$$h_0 = [(c^{-1}b)^2, [b^2, (b^{-1}a)^2]] \quad \text{и} \quad h_1 = [(c^{-1}b)^2, [b^{-2}ca, (b^{-1}a)^2]]. \quad (34)$$

Докажем, что h_0 и h_1 порождают \mathbb{F}_2 . Для этого достаточно показать, что между ними нет соотношений. Пусть $\psi : FVP_3 \rightarrow \langle a, b \rangle$ – гомоморфизм, задаваемый отображением $\psi(a) = a$, $\psi(b) = b$ и $\psi(c) = 1$. Обозначим $\bar{h}_0 = \psi(h_0)$ и $\bar{h}_1 = \psi(h_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{h}_0 &= b^3ab^{-1}ab^{-2}a^{-1}ba^{-1}b^{-2}ab^{-1}ab^2a^{-1}ba^{-1}b^{-1}, \\ \bar{h}_1 &= ab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}b^{-2}ab^{-1}ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^2. \end{aligned}$$

Элементы \bar{h}_0 и \bar{h}_1 лежат в свободной группе $\langle a, b \rangle$. Следовательно, группа $\langle \bar{h}_0, \bar{h}_1 \rangle$ либо изоморфна \mathbb{Z} , либо изоморфна \mathbb{F}_2 . Первый случай означает, что \bar{h}_0 и \bar{h}_1 должны быть степенями одного элемента, т.е. $\bar{h}_0 = g(a, b)^k$ и $\bar{h}_1 = g(a, b)^s$ для некоторого слова $g(a, b) \in \langle a, b \rangle$ и ненулевых $k, s \in \mathbb{Z}$. Пусть $g(a, b) = f \cdot w \cdot f^{-1}$, где $w(a, b)$ – циклически приведенное слово в $\langle a, b \rangle$. Тогда $g^s = f w^s f^{-1} = \bar{h}_1$ и т.к. \bar{h}_1 само циклически приведено, получаем $f = 1$. Но тогда $g^k = f w^k f^{-1} = w^k = \bar{h}_0$ должно быть циклически приведенным, что не так. Таким образом, $\langle \bar{h}_0, \bar{h}_1 \rangle \cong \mathbb{F}_2$ и, следовательно, $\langle h_0, h_1 \rangle \cong \mathbb{F}_2$. \square

Следствие 2. Для любого набора целых чисел $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ и любого определяющего слова $w(A, B) \in \mathbb{F}_2(A, B)$ ядро $\text{Ker}(\Theta_n^{w, m})$, при $n \geq 3$, содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

- $t_{1,2}$ нетривиально действует только на порождающих x_1 и x_2 ,
- $t_{2,3}$ и $d_{1,2,3}$ нетривиально действуют только на x_2 и x_3 ,
- $t_{1,3}$ нетривиально действует только на x_1 и x_3 .

Напомним, что по формуле (24), $t_{i,i+1} = \lambda_{i,i+1}^2 = (\rho_i \sigma_i)^2$. Следовательно, $t_{1,2}$ и $t_{2,3}$ удовлетворяют указанному свойству.

Проверим, что $t_{1,3} = (\rho_2 \rho_1 \sigma_1 \rho_2)^2$ оставляет x_2 , y_1 , y_2 и y_3 на месте. Элемент $t_{1,3}$ тривиально действует на порождающих y_i при $1 \leq i \leq 3$, т.к. из формул (17) получаем $t_{1,3} \cdot y_i = (\rho_2 \rho_1 \rho_2)^2 \cdot y_i = 1 \cdot y_i = y_i$. Тривиальное действие на x_2 следует из того, что $\rho_2 \rho_1 \sigma_1 \rho_2$ оставляет этот элемент на месте. В самом деле, согласно (17),

$$x_2 \xrightarrow{\rho_2} x_3 y_3^{m_2} \xrightarrow{\rho_1} x_3 y_3^{m_2} \xrightarrow{\sigma_1} x_3 y_3^{m_2} \xrightarrow{\rho_2} x_2 y_2^{-m_2} y_2^{m_2} = x_2.$$

Аналогично проверяем действие для $d_{1,2,3} = \sigma_2 \rho_2 \sigma_1 \rho_1 \rho_2 \sigma_2 \rho_2 \rho_1 \sigma_1 \rho_2$:

$$\begin{aligned} x_1 &\xrightarrow{\sigma_2 \rho_2} x_1 \xrightarrow{\sigma_1} x_2 w(y_1, y_2) \xrightarrow{\rho_1} x_1 y_1^{-m_1} w(y_2, y_1) \xrightarrow{\rho_2} x_1 y_1^{-m_1} w(y_3, y_1) \xrightarrow{\sigma_2} \\ &\xrightarrow{\sigma_2} x_1 y_1^{-m_1} w(y_3, y_1) \xrightarrow{\rho_2} x_1 y_1^{-m_1} w(y_2, y_1) \xrightarrow{\rho_1} \\ &\xrightarrow{\rho_1} x_2 y_2^{m_1} y_2^{-m_1} w(y_1, y_2) \xrightarrow{\sigma_1} x_1 w^{-1}(y_1, y_2) w(y_1, y_2) \xrightarrow{\rho_2} x_1, \\ d_{1,2,3} \cdot y_i &= \rho_1 \rho_2 \rho_1 \rho_1 \rho_2 \rho_1 \cdot y_i = y_i, \quad 1 \leq i \leq 3. \end{aligned}$$

□

2.4 Классификация локальных однородных представлений FVB_n

В [12] Т. Ито ввел следующее понятие локального представления группы кос автоморфизмами свободной группы. Пусть \mathbb{F}_n — свободная группа ранга n , порожденная x_1, \dots, x_n . Для $i = 1, \dots, n-1$ будем говорить, что автоморфизм $\tilde{\tau}_i : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ является i -локальным, если $\tilde{\tau}_i(x_j) = x_j$ для $j \neq i, i+1$ и $\tilde{\tau}_i(\langle x_i, x_{i+1} \rangle) = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$, где через $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ обозначена подгруппа группы \mathbb{F}_n , порожденная x_i и x_{i+1} . Иначе говоря, автоморфизм $\tilde{\tau}_i \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ является i -локальным тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\tau_i \in \text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ такой, что

$$\tilde{\tau}_i = \text{id} * \tau_i * \text{id} : \mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{i-1} * \mathbb{F}_2 * \mathbb{F}_{n-i-1} \rightarrow \mathbb{F}_{i-1} * \mathbb{F}_2 * \mathbb{F}_{n-1-1} = \mathbb{F}_n.$$

Представление $\Theta : B_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ называется *локальным*, если автоморфизм $\Theta(\sigma_i)$ является i -локальным для всех $i = 1, \dots, n - 1$. Если для локального представления Θ имеет место $\tau_1 = \dots = \tau_{n-1}$, то оно называется *представлением типа Вады*, см. [20].

Далее нам понадобится понятие слоговой длины. Напомним, что для слова $w \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ его *слоговой длиной по x_i* , где $1 \leq i \leq k$, называется число вхождений в редуцированную запись этого слова максимальных по длине подслов вида x_i^a для $a \neq 0$.

Мы введем следующее понятие локального представления группы плоских виртуальных кос автоморфизмами свободной группы. Пусть \mathbb{F}_{2n} — свободная группа ранга $2n$, порожденная элементами $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Для $i = 1, \dots, n - 1$ будем говорить, что автоморфизм $\tilde{\tau}_i : \mathbb{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{F}_{2n}$ является *i -локальным*, если

- $\tilde{\tau}_i(x_j) = x_j$ и $\tilde{\tau}_i(y_j) = y_j$ для $j \neq i, i + 1$;
- $\tilde{\tau}_i(\langle y_i, y_{i+1} \rangle) = \langle y_i, y_{i+1} \rangle$;
- Каждое из слов $\tilde{\tau}_i(x_i)$ и $\tilde{\tau}_i(x_{i+1})$ имеет нулевую слоговую длину либо по x_i , либо по x_{i+1} .

Представление $\Theta : FVB_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$ будем называть *локальным*, если автоморфизмы $\Theta(\sigma_i)$ и $\Theta(\rho_i)$ являются i -локальными для всех $i = 1, \dots, n - 1$. Очевидно, в этом случае, каждому автоморфизму $\Theta(\sigma_i)$ и $\Theta(\rho_i)$ группы \mathbb{F}_{2n} соответствуют автоморфизмы τ_i и ξ_i группы $\langle A, B, C, D \rangle$. Локальное представление $\Theta : FVB_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$ будем называть *локальным однородным*, если $\tau_1 = \dots = \tau_{n-1} = \tau$ и $\xi_1 = \dots = \xi_{n-1} = \xi$ для некоторых τ и ξ . Если к тому же выполняется $\tau = \xi$, то такое представление будем называть *представлением типа Вады*.

В данном параграфе мы дадим полную классификацию локальных (в

принятом выше смысле) однородных представлений. Для этого достаточно классифицировать все локальные однородные представления группы FVB_3 , после чего техникой, описанной в [12], нетрудно получить классификацию представлений для произвольного числа нитей.

Далее, мы докажем основное свойство локальных представлений.

Лемма 7. *Если $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{F}_{2n})$ является i -локальным, то каждое из слов $\tau_i(x_i)$ и $\tau_i(x_{i+1})$ имеет единичную слоговую длину либо по x_i , либо по x_{i+1} .*

Доказательство. Запишем возможное действие автоморфизма τ на x_i и x_{i+1} :

$$\tau: \begin{cases} x_i \mapsto w_1 = x_i^{\alpha_1} f_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_i^{\alpha_k} f_k(y_i, y_{i+1}) x_i^{\alpha_{k+1}}, \\ x_{i+1} \mapsto w_2 = x_{i+1}^{\beta_1} g_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_{i+1}^{\beta_m} g_m(y_i, y_{i+1}) x_{i+1}^{\beta_{m+1}}, \end{cases}$$

либо

$$\tau: \begin{cases} x_i \mapsto w_1 = x_{i+1}^{\alpha_1} f_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_{i+1}^{\alpha_k} f_k(y_i, y_{i+1}) x_{i+1}^{\alpha_{k+1}}, \\ x_{i+1} \mapsto w_2 = x_i^{\beta_1} g_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_i^{\beta_m} g_m(y_i, y_{i+1}) x_i^{\beta_{m+1}}. \end{cases}$$

Рассмотрим подробно первый случай. Соотношение $\tau^2 = \text{id}$ дает равенство

$$\begin{aligned} x_i &= (x_i^{\alpha_1} f_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_i^{\alpha_k} f_k(y_i, y_{i+1}) x_i^{\alpha_{k+1}})^{\alpha_1} f'_1(y_i, y_{i+1}) \dots \\ &\dots (x_i^{\alpha_1} f_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_i^{\alpha_k} f_k(y_i, y_{i+1}))^{\alpha_k} f'_k(y_i, y_{i+1}) \cdot \\ &\cdot (x_i^{\alpha_1} f_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_i^{\alpha_k} f_k(y_i, y_{i+1}))^{\alpha_{k+1}}, \end{aligned}$$

в котором $1 \neq f'_j(y_i, y_{i+1}) = \tau(f_j(y_i, y_{i+1}))$ в силу второго пункта определения локальности. Если слоговая длина слова w_1 по x_i больше единицы, то в правой части равенства выше должны происходить сокращения x_i . Это возможно лишь в подсловах вида $w_1^{\alpha_j} f'_j w_1^{\alpha_{j+1}}$ в которых $\alpha_j \alpha_{j+1} < 0$. Но в этом случае нетривиальное f'_j , сопряженное некоторым элементом, остается нетривиальным и не дает возможности для сокращения вхождений x_i . Следовательно,

слово w_1 имеет вид $f_1(y_i, y_{i+1})x_i^\alpha f_2(y_i, y_{i+1})$. Аналогично рассматривается слово w_2 .

Теперь рассмотрим второй случай. Здесь равенство $\tau^2 = \text{id}$ дает

$$\begin{aligned} x_i = & (x_i^{\beta_1} g_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_i^{\beta_m} g_m(y_i, y_{i+1}) x_i^{\beta_{m+1}})^{\alpha_1} f'_1(y_i, y_{i+1}) \dots \\ & \dots (x_i^{\beta_1} g_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_i^{\beta_m} g_m(y_i, y_{i+1}) x_i^{\beta_{m+1}})^{\alpha_k} f'_k(y_i, y_{i+1}) \cdot \\ & \cdot (x_i^{\beta_1} g_1(y_i, y_{i+1}) \dots x_i^{\beta_m} g_m(y_i, y_{i+1}) x_i^{\beta_{m+1}})^{\alpha_{k+1}}. \end{aligned}$$

Теми же рассуждениями, что и в предыдущем случае, аналогично получаем, что $w_1 = f_1(y_i, y_{i+1})x_{i+1}^\alpha f_2(y_i, y_{i+1})$ и $w_2 = g_1(y_i, y_{i+1})x_i^\alpha g_2(y_i, y_{i+1})$. \square

Доказав этот вспомогательный факт, теперь мы можем сформулировать основной результат этого параграфа.

Теорема 5. *Существует ровно 49 типов локальных однородных представлений группы FVB_3 автоморфизмами свободной группы $\text{Aut}(\mathbb{F}_6)$ ранга 6.*

Доказательство. Вторым пункт в определении локальности дает возможность упростить задачу классификации представлений. Действительно, сузив автоморфизм τ на подгруппу $\langle y_i, y_{i+1} \rangle$ мы получаем автоморфизм свободной группы ранга 2, который индуцирует локальный автоморфизм $\mathbb{F}_n = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$. Это позволяет нам воспользоваться классификационным результатом Ито в [12], извлекая из найденного списка представлений только инволютивные:

$$\tau: \begin{cases} y_i \mapsto y_i^{\pm 1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_{i+1}^{\pm 1}, \end{cases} \quad \tau: \begin{cases} y_i \mapsto y_{i+1}^{\pm 1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i^{\pm 1}. \end{cases}$$

Итак, рассматриваем произвольное локальное однородное представление $\Theta: FVB_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_6)$. По определению оно однозначно определяется парой

(s, r) инволютивных автоморфизмов свободной группы $\langle a, b, c, d \rangle$ ранга 4:

$$\Theta(\sigma_1) = \tilde{s}, \quad \Theta(\rho_1) = \tilde{r},$$

$$\Theta(\sigma_2) = \tilde{s}, \quad \Theta(\rho_2) = \tilde{r}.$$

Из второго пункта определения локальности, леммы [\(7\)](#), инволютивности, а также основной теоремы в работе [\[12\]](#) следует, что и s и r должны иметь вид один из следующих:

$$F_1: \begin{cases} a \mapsto f_1(c, d) \cdot a^{\pm 1} \cdot f_2(c, d), \\ b \mapsto g_1(c, d) \cdot b^{\pm 1} \cdot g_2(c, d), \\ c \mapsto c^{\pm 1}, \\ d \mapsto d^{\pm 1}; \end{cases} \quad F_2: \begin{cases} a \mapsto f_1(c, d) \cdot a^{\pm 1} \cdot f_2(c, d), \\ b \mapsto g_1(c, d) \cdot b^{\pm 1} \cdot g_2(c, d), \\ c \mapsto d^{\pm 1}, \\ d \mapsto c^{\pm 1}; \end{cases}$$

$$F_3: \begin{cases} a \mapsto f_1(c, d) \cdot b^{\pm 1} \cdot f_2(c, d), \\ b \mapsto g_1(c, d) \cdot a^{\pm 1} \cdot g_2(c, d), \\ c \mapsto c^{\pm 1}, \\ d \mapsto d^{\pm 1}; \end{cases} \quad F_4: \begin{cases} a \mapsto f_1(c, d) \cdot b^{\pm 1} \cdot f_2(c, d), \\ b \mapsto g_1(c, d) \cdot a^{\pm 1} \cdot g_2(c, d), \\ c \mapsto d^{\pm 1}, \\ d \mapsto c^{\pm 1}, \end{cases}$$

где f_1 , f_2 и g_1 , g_2 — слова в подгруппе $\langle c, d \rangle$.

Далее, для классификации однородных представлений FVB_3 мы должны брать произвольную пару (F_{i_1}, F_{i_2}) в качестве (s, r) и проверять соотношения [\(1\)–\(7\)](#), [\(10\)](#) точно так же, как мы делали это в доказательстве теоремы [1](#). Выкладки при этом несложны, но громоздки. Представленный подход лежит в основе доказательства данного классификационного результата.

Таким способом можно показать, что индуцирующие произвольное локальное однородное представление автоморфизмы s и r являются либо одними из списка ниже, либо одними из автоморфизмов, представленных в

параграфе 2.5, соответствующих однородному случаю.

$$\text{Тип 1 : } s = r = \text{id};$$

$$\text{Тип 2 : } s = \text{id}, \quad r: \begin{cases} a \mapsto f(c, d) \cdot b \cdot g(c, d), \\ b \mapsto f^{-1}(c, d) \cdot a \cdot g^{-1}(c, d), \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d; \end{cases}$$

$$\text{Тип 3 : } s = \text{id}, \quad r: \begin{cases} a \mapsto f(c, d) \cdot b^{-1} \cdot g(c, d), \\ b \mapsto g(c, d) \cdot a^{-1} \cdot f(c, d), \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d; \end{cases}$$

$$\text{Тип 4 : } s: \begin{cases} a \mapsto f^\alpha(c, d) \cdot b \cdot g^\beta(c, d), \\ b \mapsto f^{-\alpha}(c, d) \cdot a \cdot g^{-\beta}(c, d), \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto f^\gamma(c, d) \cdot b \cdot g^\delta(c, d), \\ b \mapsto f^{-\gamma}(c, d) \cdot a \cdot g^{-\delta}(c, d), \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$;

$$\text{Тип 5 : } s: \begin{cases} a \mapsto g f^{-\alpha} g^{-1} \cdot b \cdot f^\alpha, \\ b \mapsto g f^\alpha g^{-1} \cdot a \cdot f^{-\alpha}, \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto g \cdot b^{-1} \cdot g f^\beta, \\ b \mapsto g f^\beta \cdot a^{-1} \cdot g, \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases}$$

где $f = f(c, d)$, $g = g(c, d)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$;

$$\text{Тип 6: } s: \begin{cases} a \mapsto g f^\alpha \cdot b^{-1} \cdot g, \\ b \mapsto g \cdot a^{-1} \cdot g f^\alpha, \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto g f^{-\beta} g^{-1} \cdot b \cdot f^\beta, \\ b \mapsto g f^\beta g^{-1} \cdot a \cdot f^{-\beta}, \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases}$$

где $f = f(c, d)$, $g = g(c, d)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$;

$$\text{Тип 7: } s: \begin{cases} a \mapsto f^{\alpha-\beta+\gamma} \cdot b^{-1} \cdot f^\beta, \\ b \mapsto f^\beta \cdot a^{-1} \cdot f^{\alpha-\beta+\gamma}, \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d; \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto f^\alpha \cdot b^{-1} \cdot f^\gamma, \\ b \mapsto f^\gamma \cdot a^{-1} \cdot f^\alpha, \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases}$$

где $f = f(c, d)$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$;

$$\text{Типы 8, 9: } s = \text{id} \quad r: \begin{cases} a \mapsto a, \\ b \mapsto b, \\ c \mapsto d^\varepsilon, \\ d \mapsto c^\varepsilon, \end{cases}$$

где для восьмого типа $\varepsilon = 1$, а для девятого $\varepsilon = -1$;

$$\text{Типы 10, 11: } s = \text{id} \quad r: \begin{cases} a \mapsto d^\alpha \cdot b \cdot d^\beta, \\ b \mapsto c^{-\varepsilon\alpha} \cdot a \cdot c^{-\varepsilon\beta}, \\ c \mapsto d^\varepsilon, \\ d \mapsto c^\varepsilon, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и для десятого типа $\varepsilon = 1$, а для одиннадцатого $\varepsilon = -1$;

$$\text{Типы 12, 13 : } s = \text{id} \quad r: \begin{cases} a \mapsto d^\alpha \cdot b^{-1} \cdot d^\beta, \\ b \mapsto c^{\varepsilon\beta} \cdot a^{-1} \cdot c^{\varepsilon\alpha}, \\ c \mapsto d^\varepsilon, \\ d \mapsto c^\varepsilon, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и для двенадцатого типа $\varepsilon = 1$, а для тринадцатого $\varepsilon = -1$;

$$\text{Типы 14, 15 : } s: \begin{cases} a \mapsto f(c, d) \cdot b^\varepsilon \cdot g(c, d), \\ b \mapsto h(c, d) \cdot a^\varepsilon \cdot p(c, d), \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto b, \\ b \mapsto a, \\ c \mapsto d, \\ d \mapsto c, \end{cases}$$

где для четырнадцатого типа $\varepsilon = 1$, $h(c, d) = f^{-1}(c, d)$ и $p(c, d) = g^{-1}(c, d)$, а для пятнадцатого $\varepsilon = -1$, $h(c, d) = g(c, d)$ и $p(c, d) = f(c, d)$;

$$\text{Типы 16, 17 : } s: \begin{cases} a \mapsto f(c, d) \cdot b^\varepsilon \cdot f^{-1}(c, d), \\ b \mapsto f^{-1}(c, d) \cdot a^\varepsilon \cdot f(c, d), \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto b^{-1}, \\ b \mapsto a^{-1}, \\ c \mapsto d, \\ d \mapsto c, \end{cases}$$

где для шестнадцатого типа $\varepsilon = 1$, а для семнадцатого $\varepsilon = -1$;

$$\text{Типы 18, 19 : } s: \begin{cases} a \mapsto f(c, d) \cdot b^\varepsilon \cdot f^{-1}(c^{-1}, d^{-1}), \\ b \mapsto f^{-1}(c^\varepsilon, d^\varepsilon) \cdot a^\varepsilon \cdot f(c^{-\varepsilon}, d^{-\varepsilon}), \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto b^{-1}, \\ b \mapsto a^{-1}, \\ c \mapsto d^{-1}, \\ d \mapsto c^{-1}, \end{cases}$$

где для восемнадцатого типа $\varepsilon = 1$, а для девятнадцатого $\varepsilon = -1$;

$$\text{Типы 20, 21 : } s: \begin{cases} a \mapsto b^\varepsilon, \\ b \mapsto a^\varepsilon, \\ c \mapsto c, \\ d \mapsto d, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto b, \\ b \mapsto a, \\ c \mapsto d^{-1}, \\ d \mapsto c^{-1}, \end{cases}$$

где для двадцатого типа $\varepsilon = 1$, а для двадцать первого $\varepsilon = -1$;

$$\text{Типы 22 – 25 : } s: \begin{cases} a \mapsto a, \\ b \mapsto b, \\ c \mapsto d^{\varepsilon_1}, \\ d \mapsto c^{\varepsilon_1}, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto a, \\ b \mapsto b, \\ c \mapsto d^{\varepsilon_2}, \\ d \mapsto c^{\varepsilon_2}, \end{cases}$$

где $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$ соответственно;

$$\text{Типы 26 – 33 : } s: \begin{cases} a \mapsto a, \\ b \mapsto b, \\ c \mapsto d^{\varepsilon_1}, \\ d \mapsto c^{\varepsilon_1}, \end{cases} \quad r: \begin{cases} a \mapsto b^{\varepsilon_2}, \\ b \mapsto a^{\varepsilon_2}, \\ c \mapsto d^{\varepsilon_3}, \\ d \mapsto c^{\varepsilon_3}, \end{cases}$$

где $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (-1, -1, -1), (-1, -1, 1), \dots, (1, 1, 1)$ соответственно. \square

Интересен вопрос точности полученных представлений. Непосредственными вычислениями для всех типов однородных представлений можно доказать, что все они не являются точными, более того справедлива следующая

Теорема 6. *При $n \geq 3$ ядро любого из однородных локальных представлений содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.*

Доказательство. Аналогично доказательству следствия [2](#) для всех типов теоремы [5](#). \square

2.5 Примеры неоднородных представлений FVB_n

Задача классификации всех представлений FVB_n автоморфизмами свободной группы ранга 6, если отказаться от условия однородности, становится более объемной. В этом параграфе рассмотрено семейство представлений, которые, с одной стороны, завершают классификацию однородных представлений, будучи типами 34 – 49 в теореме [5](#), а с другой, являются примером случая, когда условия на задающие представление автоморфизмы могут быть выписаны в обозримом виде. Итак, это семейство локальных представлений FVB_3 можно записывать в следующем виде:

$$\Theta_3(\sigma_1): \begin{cases} x_1 \mapsto y_2^{\beta_{11}} x_2^{\alpha_1} y_2^{\beta_{12}}, \\ x_2 \mapsto y_1^{\beta_{21}} x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_{22}}, \\ y_1 \mapsto y_2^{\varepsilon_1}, \\ y_2 \mapsto y_1^{\varepsilon_1}, \end{cases} \quad \Theta_3(\rho_1): \begin{cases} x_1 \mapsto y_2^{\gamma_{11}} x_2^{\alpha_2} y_2^{\gamma_{12}}, \\ x_2 \mapsto y_1^{\gamma_{21}} x_1^{\alpha_2} y_1^{\gamma_{22}}, \\ y_1 \mapsto y_2^{\varepsilon_2}, \\ y_2 \mapsto y_1^{\varepsilon_2}, \end{cases}$$

$$\Theta_3(\sigma_2): \begin{cases} x_2 \mapsto y_3^{b_{11}} x_3^{a_1} y_3^{b_{12}}, \\ x_3 \mapsto y_2^{b_{21}} x_2^{a_1} y_2^{b_{22}}, \\ y_2 \mapsto y_3^{\varepsilon_1}, \\ y_3 \mapsto y_2^{\varepsilon_1}, \end{cases} \quad \Theta_3(\rho_2): \begin{cases} x_2 \mapsto y_3^{g_{11}} x_3^{a_2} y_3^{g_{12}}, \\ x_3 \mapsto y_2^{g_{21}} x_2^{a_2} y_2^{g_{22}}, \\ y_2 \mapsto y_3^{\varepsilon_2}, \\ y_3 \mapsto y_2^{\varepsilon_2}, \end{cases}$$

с коэффициентами $e_1 e_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$. Это семейство содержит 64 подсемейства, разбитых на 4 группы:

- $\alpha_1 = \alpha_2 = a_1 = a_2 = 1$ либо $\alpha_1 = \alpha_2 = -a_1 = -a_2 = 1$ с условием

$$b_{11} - g_{11} = e_2 \beta_{11} - e_1 \gamma_{11},$$

$$b_{12} - g_{12} = e_2 \beta_{12} - e_1 \gamma_{12},$$

- $\alpha_1 = -\alpha_2 = a_1 = -a_2 = 1$ либо $\alpha_1 = -\alpha_2 = -a_1 = a_2 = 1$ с условием

$$b_{11} + g_{12} = -e_2\beta_{12} + e_1\gamma_{12},$$

$$b_{12} + g_{11} = -e_2\beta_{11} + e_1\gamma_{11},$$

- $-\alpha_1 = \alpha_2 = a_1 = -a_2 = 1$ либо $-\alpha_1 = \alpha_2 = -a_1 = a_2 = 1$ с условием

$$b_{11} + g_{12} = e_2\beta_{11} - e_1\gamma_{11},$$

$$b_{12} + g_{11} = e_2\beta_{12} - e_1\gamma_{12},$$

- $-\alpha_1 = -\alpha_2 = a_1 = a_2 = 1$ либо $-\alpha_1 = -\alpha_2 = -a_1 = -a_2 = 1$ с условием

$$b_{11} - g_{11} = -e_2\beta_{12} + e_1\gamma_{12},$$

$$b_{12} - g_{12} = -e_2\beta_{12} + e_1\gamma_{11}.$$

Заметим, что условие инволютивности однозначно определяет коэффициенты $\beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ через оставшиеся.

Для того, чтобы получить однородные представления типов 34 – 49 в теореме [5](#), нужно в формулах выше положить:

$$\alpha_1 = a_1,$$

$$\alpha_2 = a_2,$$

$$\beta_{11} = b_{11},$$

$$\beta_{12} = b_{12},$$

$$\gamma_{11} = g_{11},$$

$$\gamma_{12} = g_{12},$$

$$\varepsilon_1 = e_1,$$

$$\varepsilon_2 = e_2,$$

в этом случае нумерация типов происходит от 34 до 49 следуя лексикографическому порядку четверок $(\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ начиная с $(-1, -1, -1, -1)$ заканчивая набором $(1, 1, 1, 1)$.

Таким образом, мы описали все типы локальных однородных представлений FVB_3 , тем самым закончив их классификацию.

3 Заключение

В работе приведено обобщение ранее известных представлений группы плоских виртуальных кос автоморфизмами свободной группы. Введено понятие локальности и однородности представления. Классифицированы локальные однородные представления. Построены первые примеры семейств неоднородных представлений. Изучен вопрос точности полученных представлений. В частности, доказано, что ядро каждого из изучаемых представлений содержит свободную неабелеву подгруппу.

Полученные в данной работе результаты будут полезны для решения общей проблемы нахождения точного представления группы FVB_n автоморфизмами некоторой свободной группы.

Список литературы

- [1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, **4** (1925), 47–72.
- [2] V. Bardakov, P. Bellingeri, C. Damiani, *Unrestricted virtual braids, fused links and other quotients of virtual braid groups*, J. Knot Theory Ramifications, **24(12)** (2015), paper number 1550063.
- [3] V. Bardakov, B. Chuzhinov, I. Emel'yanenkov, M. Ivanov, E. Markhinina, T. Nasybullov, S. Panov, N. Singh, S. Vasyutkin, A. Vesnin, V. Yakhin, *Representations of flat virtual braids which do not preserve the forbidden relations*, accepted to J. Knot Theory Ramifications. Preprint <https://arxiv.org/abs/2010.03162>
- [4] V. Bardakov, Yu. Miljakchishima, M. Neshchadim, *Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups*, J. Knot Theory Ramifications, **25(1)** (2017), paper number 1750003.
- [5] P. Bellingeri, L. Paris, A. Thiel, *Virtual Artin groups*, Proceedings of the London Mathematical Society, published online 31 October 2022, <https://doi.org/10.1112/plms.12491>
- [6] H. Boden, E. Dies, A. Gaudreau, A. Gerlings, E. Harper, A. Nicas, *Alexander invariants for virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications, **24(3)** (2015), paper number 1550009.
- [7] R. Fenn, D. Ilyutko, L. Kauffman, V. Manturov, *Unsolved problems in virtual knot theory and combinatorial knot theory*, In: Banach Center Publications, **103** (2014), 9–61.

- [8] R. Fenn, R. Rimányi, C. Rourke, *The braid-permutation group*, *Topology*. **36** (1997), 123–135.
- [9] A. Gill, M. Prabhakar, A. Vesnin, *Gordian complexes of knots and virtual knots given by region crossing and arc shift moves*, *J. Knot Theory Ramifications*, **20(10)** (2020), paper number 2042008.
- [10] A. Gill, K. Kaur, M. Prabhakar, A. Vesnin, *An unknotting invariant for welded knots*, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **131** (2021), paper number 47.
- [11] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, *Topology*, **39(5)** (2000), 1045–1068.
- [12] T. Ito, *Actions of the N -strand braid groups on the free groups of rank N which are similar to the Artin representation*, *The Quarterly Journal of Mathematics*, **66(2)** (2015), 563–581.
- [13] S. Kamada, *Braid presentation of virtual knots and welded knots*, *Osaka J. Math.*, **44** (2007), 441–458.
- [14] T. Kanenobu, *Forbidden moves unknot a virtual knot*, *J. Knot Theory Ramifications*, **10(1)** (2001), 89–96.
- [15] L. Kauffman, *Virtual knot theory*, *European J. Comb.*, **20(7)** (1999), 663–690.
- [16] L. Kauffman, *A survey of virtual knot theory*, in: *Knots in Hellas '98 (Delphi)*, 143–202, Ser. Knots Everything, 24, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.
- [17] K. Kaur, M. Prabhakar, A. Vesnin, *An unknotting index for virtual links*, *Topology and Its Applications*, **264** (2019), 352–368.

- [18] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar *Combinatorial group theory*.
New York 1996.
- [19] D. Silver, S. Williams, *Alexander groups and virtual links*, J. Knot Theory
Ramifications, **10(1)** (2001), 151–160.
- [20] M. Wada, *Group invariants of links*, Topology, **31(2)** (1992), 399–406.

Примечание

В Оргкомитет Смотра научных работ математиков России
от Завадского Константина Геннадьевича

Заявление о новизне

Собщию, что новизна в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием "Об условиях существования простых ростков эквивариантных отображений" заключается:

- Новое определение числа D_r^z , которое определяется как размерность максимальной подгруппы D_n^{GG} над \mathbb{C} , действующей эквивариантно на $(j_r^z O_n^{GG} / j_{r-1}^z O_n^{GG})$ (Ранее число D_r^{GG} определялось тривиальной оценкой сверху размерности максимальной подгруппы D_n^{GG} , действующей эквивариантно на $(j_r^z O_n^{GG} / j_{r-1}^z O_n^{GG})$);
- Проверка корректности нового определения D_r^{GG} (Утверждение 3 + Замечание 4);
- Определение семейства функций Q и способы вычисления значений функций из семейства Q с любой точностью параметров (Определение 12 + Утверждение 5 + Утверждение 6 + Утверждение 7 + Лемма 1 + Утверждение 8);
- Вычисление чисел d_r^z и D_r^z с помощью функций из семейства Q (Утверждение 9 + Утверждение 10);
- Достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков, эквивалентные условиям Е. А. Асташовой (Лемма 1);
- Полный разбор случаев для допустимых весов $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\frac{p_1}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)}, \dots, \frac{p_n}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)})$ и размерности $n=2$ и $n=3$ в O_n^{GG} , когда эквивариантно простых ростков нет (Высствие 1 + высствие 2).

Также сообщая, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Выступление на семинаре В. М. Гусейн-Заде;
- Выступление на семинаре И. В. Асташовой;
- Выступление на заседании кафедры теории динамических систем мехмата МГУ (А. А. Савилов, И. А. Богачевский);
- Консультации с научным руководителем Е. А. Асташовой.

Подтверждаю, что являюсь автором представленной на Смотри работы и прошу признать её для оценки в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения в Смотре) принимаю на себя обязательство оценить работу участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьевки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на свой выбор. А правила правила оценки работ, приведенные в п. 4.3 Положения о Смотре для согласия на публикацию адрес моей электронной почты.

Заявить работу составлена 31 мая 2023 г. На Смотри представлен проект текста.

Зу

Завадский Константин Геннадьевич

31 мая 2023

Москва, Россия.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

**Об условиях существования простых ростков
эквивариантных отображений**

Выполнил студент:
603 группы
Завадский К. Г.

подпись студента

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., старший преподаватель
Асташов Е. А.

подпись научного руководителя

Москва
2023

Содержание

1 Введение	2
1.1 Основные определения	2
1.2 Обзор существующих результатов	8
1.3 Цель и структура работы	9
2 Основные результаты	9
2.1 Формулы для количества эквивариантных мономов	9
2.1.1 Формула для количества эквивариантных мономов при $n = 1$	10
2.1.2 Формула для количества эквивариантных мономов при $n = 2$	10
2.1.3 Формула для количества эквивариантных мономов при $n = 3$	11
2.2 Вычисление чисел d_r^α и D_r^α	14
2.3 Достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков	15
3 Заключение	18
Список используемой литературы	19

1 Введение

1.1 Основные определения

Пусть n – натуральное число.

Определение 1. Пусть G – группа, действующая на множествах \mathbb{C}^n и \mathbb{C} . Функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называется *эквивариантной* относительно действия группы G на множествах \mathbb{C}^n и \mathbb{C} , если для любых $\sigma \in G$ и $z \in \mathbb{C}^n$ выполняется условие

$$\sigma * f(z) = f(\sigma * z),$$

где операция $*$ обозначает действие группы G на множестве \mathbb{C}^n или \mathbb{C} соответственно.

Определение 2. Пусть G – группа, действующая на множестве \mathbb{C}^n . Отображение $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ называется *эквивариантным* относительно действия группы G на множестве \mathbb{C}^n , если для любых $\sigma \in G$ и $z \in \mathbb{C}^n$ выполняется условие

$$\sigma * \Phi(z) = \Phi(\sigma * z).$$

Определение 3. Будем говорить, что функции $f: U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $g: V \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ *эквивалентны* в точке $x \in U \cap V$, если существует такая окрестность $W \subset U \cap V$ точки x , что $f|_W = g|_W$, где $f|_W$ обозначает ограничение f на W . Класс эквивалентности, к которому принадлежит функция f , будем называть *ростком функции f в точке x* .

Понятие ростка естественным образом переносится на отображения $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Будем использовать запись $\Phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ для обозначения ростка отображения, которое точку $0 \in \mathbb{C}^n$ переводит в точку $0 \in \mathbb{C}^n$.

Понятие эквивариантности естественным образом переносится на ростки.

Фиксируем число $m \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, группу $G = \mathbb{Z}_m$ и действие группы G на множествах \mathbb{C}^n и \mathbb{C} , задаваемое формулой

$$\sigma * (z_1, \dots, z_n; w) = (\tau^{p_1} z_1, \dots, \tau^{p_n} z_n; \tau^q w), \quad (1)$$

где $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}$, σ – образующая группы \mathbb{Z}_m , $\tau = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$, для $b \in \{1, \dots, n\}$ $p_b \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, m\}$.

На самом деле действие (1) задаёт все возможные действия конечной абелевой группы \mathbb{Z}_m на \mathbb{C}^n и \mathbb{C} . Это следует из теоремы Бохнера о линеаризации (см. [4]). Сформулируем следствие из теоремы Бохнера о линеаризации.

Утверждение 1 (Следствие из теоремы Бохнера о линеаризации). *Пусть конечная группа G действует на пространстве \mathbb{C}^{n+1} . Тогда существует система координат на \mathbb{C}^{n+1} , в которой это действие линеаризуется.*

Так как любое конечномерное комплексное представление может быть представлено в виде суммы одномерных представлений, из утверждения следует, что действие каждой образующей любой конечной группы G на пространстве \mathbb{C}^{n+1} задается диагональной матрицей размером $n+1 \times n+1$. Эти матрицы также удовлетворяют групповым соотношениям (если таковые имеются в группе G). В частности, если $G = \mathbb{Z}_m$, то действие образующей этой группы определяется диагональной матрицей, у которой на диагонали расположены корни степени m из единицы.

Далее условия эквивариантности рассматриваются относительно действия (1), если не оговорено иное. В дальнейшем будем говорить об "эквивариантных" ростках и отображениях, а не "эквивариантных относительно действия группы G " (считаем, что всегда подразумевается действие 1).

Пространство ростков всех эквивариантных голоморфных функций $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ будем обозначать \mathcal{O}_n^{GG} .

Группу ростков всех эквивариантных биголоморфных отображений $\Phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ обозначим \mathcal{D}_n^{GG} .

Определение 4. Два ростка эквивариантных функций $f, g \in \mathcal{O}_n^{GG}$ называются *эквивариантно правоэквивалентными*, если существует такой росток эквивариантного отображения $\Phi \in \mathcal{D}_n^{GG}$, что

$$f = g \circ \Phi,$$

где символ \circ обозначает операцию композиции отображений.

Определение 5. Квазистепеню с весами $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ монома $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}, (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ называется число $\deg_{\alpha}(z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}) = \alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n$.

Определение 6. Набор весов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ называется *допустимым* относительно действия (1) группы $G = \mathbb{Z}_m$, если выполнены следующие условия:

- 1) наибольший общий делитель весов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равен единице;
- 2) для любого $b \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $1 \leq \alpha_b \leq m$;
- 3) мономом $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}, (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ эквивариантен относительно действия (1) с $q = 0$ тогда и только тогда, когда квазистепень монома $\deg_{\alpha}(z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n})$ делится на m .

Замечание 1. Определение (6) взято из статьи [3].

Замечание 2. Допустимые веса для действия (1) существуют. Например, в качестве допустимых весов можно взять такие:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left(\frac{p_1}{\text{НОД}(p_1, \dots, p_n)}, \dots, \frac{p_n}{\text{НОД}(p_1, \dots, p_n)} \right).$$

Именно такими допустимыми весами мы будем пользоваться в настоящей работе.

Под допустимым набором весов будем понимать набор весов допустимый относительно действия (1) группы $G = \mathbb{Z}_m$.

Определение 7. Пусть $f, g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ – ростки аналитических функций. Ростки f и g имеют в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ касание порядка $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с весами $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, если существует предел функции нескольких переменных:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(f(z) - g(z))}{\left(\sqrt{|z_1|^{\frac{2}{\alpha_1}} + \dots + |z_n|^{\frac{2}{\alpha_n}}} \right)^r} = 0 \in \mathbb{C}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Определение 8. Класс эквивалентности ростков аналитических функций из \mathcal{O}_n^{GG} по отношению эквивалентности "касание порядка r с весами α " называется *r -квазиструей с весами α* . Будем обозначать через $j_r^{\alpha} f$ r -квазиструю с весами α ростка $f \in \mathcal{O}_n^{GG}$.

Пространство r -квазиструй с весами α ростков из \mathcal{O}_n^{GG} будем обозначать $j_r^{\alpha} \mathcal{O}_n^{GG}$.

Замечание 3. Если фиксировать систему координат в \mathbb{C}^n и \mathbb{C} , то r -квазиструя с весами α ростка $f \in \mathcal{O}_n^{GG}$ может быть представлена отрезком ряда Тейлора ростка f , состоящим из членов квазистепени с весами α не выше r . Действительно, если фиксирована система координат и $f \in \mathcal{O}_n^{GG}$ – росток аналитической функции, представленный в окрестности точки 0 сходящимся степенным рядом

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{J=(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_J z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}, \quad a_J \in \mathbb{C},$$

то r -струя ростка f – это многочлен:

$$j_r^{\alpha} f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{J=(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ \alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n \leq r}} a_J z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}.$$

Группа \mathcal{D}_n^{GG} действует на бесконечномерное пространство \mathcal{O}_n^{GG} , разбивая его на орбиты действия. Пространства r -квазиструй $j_r^{\alpha} \mathcal{O}_n^{GG}$ образуют факторпространства в \mathcal{O}_n^{GG} по пространству функций с нулевой r -квазиструей, и на них также действует группа \mathcal{D}_n^{GG} .

Для каждого $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ обозначим через d_r^{α} размерность факторпространства $(j_r^{\alpha} \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^{\alpha} \mathcal{O}_n^{GG})$ над \mathbb{C} . Число d_r^{α} равно числу эквивариантных мономов, у которых квазистепень с весами α равна r .

Утверждение 2 (Критерий эквивариантности ростка биголоморфного отображения). Пусть $\Phi \in \mathcal{D}_n^{GG}$ – росток эквивариантного биголоморфного отображения $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$, которое определяется следующей формулой

$$(z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_{J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{1,J} \tilde{z}^J, \dots, \sum_{J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{n,J} \tilde{z}^J \right), \quad a_{s,J} \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Тогда росток Φ эквивариантен тогда и только тогда, когда для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ и $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ выполняется условие

$$p_1 j_1 + \dots + p_n j_n \not\equiv p_k \pmod{m} \Rightarrow a_{k,J} = 0.$$

Доказательство. Пусть $g \in \mathbb{Z}_m$. Тогда

$$g \circ \Phi(z) = \left(\tau^{p_1} \sum_{J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{1,J} \tilde{z}^J, \dots, \tau^{p_n} \sum_{J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{n,J} \tilde{z}^J \right),$$

$$\Phi(g \circ z) = \left(\sum_{J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \tau^{p_1 j_1 + \dots + p_n j_n} a_{1,J} \tilde{z}^J, \dots, \sum_{J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \tau^{p_1 j_1 + \dots + p_n j_n} a_{n,J} \tilde{z}^J \right).$$

$\Phi(g \circ z) = g \circ \Phi(z) \Leftrightarrow$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ и $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ выполняется условие

$$a_{k,J} = 0 \text{ или } \tau^{p_1 j_1 + \dots + p_n j_n} = \tau^{p_k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{k,J} = 0 \text{ или } p_1 j_1 + \dots + p_n j_n \equiv p_k \pmod{m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1 j_1 + \dots + p_n j_n \not\equiv p_k \pmod{m} \Rightarrow a_{k,J} = 0.$$

Использован факт: если A и B два логических утверждения, то $A \vee B = \bar{A} \Rightarrow B$. \square

Утверждение 3. Пусть выполняются следующие условия:

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – допустимый набор весов;
- $d_1^\alpha = \dots = d_{r-1}^\alpha = 0 < d_r^\alpha$;
- для каждой переменной \tilde{z}_b ($b \in \{1, \dots, n\}$) существует моном из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$, содержащий эту переменную.

Обозначим H – множество, состоящее из всех возможных ростков отображений $(z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$, которые определяются формулой

$$(z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_{\substack{I^1 = (i_1^1, \dots, i_n^1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ \alpha_1 i_1^1 + \dots + \alpha_n i_n^1 = \alpha_1}} a_{1,I^1} \tilde{z}^{I^1}, \dots, \sum_{\substack{I^n = (i_1^n, \dots, i_n^n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ \alpha_1 i_1^n + \dots + \alpha_n i_n^n = \alpha_n}} a_{n,I^n} \tilde{z}^{I^n} \right), \quad (3)$$

все коэффициенты рядов комплексны, причём линейная часть не вырождена. Тогда множество H – максимальная подгруппа \mathcal{D}_n^{GG} , действующая на $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$ эффективно.

Доказательство. Проверим, что H подгруппа \mathcal{D}_n^{GG} :

- голоморфность ростков из H следует из того, что все компоненты в формуле (3) содержат конечное количество слагаемых;
- биголоморфность ростков из H следует из того, что в определении H требуется, чтобы линейная часть отображений (3) была невырожденная;

- эквивариантность ростоков из H следует из критерия эквивариантности ростка биголоморфного отображения и определения достаточного веса: для любого монома $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$, $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ должно выполняться условие

$$\alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow p_1 j_1 + \dots + p_n j_n \equiv 0 \pmod{m}.$$

Действительно, возьмём из первой компоненты отображений (3) моном $\tilde{z}_1^{i_1} \dots \tilde{z}_n^{i_n}$ и покажем, что он эквивариантный. Для степеней взятого монома выполняется условие $\alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_n i_n = \alpha_1$, тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_n i_n = \alpha_1 &\Rightarrow \alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_n i_n \equiv \alpha_1 \pmod{m} \Leftrightarrow \alpha_1 (i_1 - 1) + \dots + \alpha_n i_n \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p_1 (i_1 - 1) + \dots + p_n i_n \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow p_1 i_1 + \dots + p_n i_n \equiv p_1 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Из критерия эквивариантности ростка биголоморфного отображения следует, что взятый моном – эквивариантный. Для других компонент доказательство проводится аналогично;

- очевидно, что H – подмножество \mathcal{D}_n^{GG} . Докажем, что H – подгруппа \mathcal{D}_n^{GG} . Не ограничивая общности считаем, что $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$. Определим число $k \in \{1, \dots, n\}$ и натуральные числа $b_1 < \dots < b_k = n$ следующим условием

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{b_1} < \alpha_{b_1+1} = \dots = \alpha_{b_2} < \dots < \alpha_{b_{k-1}+1} = \dots = \alpha_{b_k}.$$

Любое отображение 3 представляется следующим образом

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \mathcal{L} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_n \end{pmatrix} + \mathcal{R}, \quad (4)$$

где \mathcal{L} – квазидиагональная матрица вида

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_k \end{pmatrix},$$

(блоки A_1, \dots, A_n имеют размерности $b_1 \times b_1, \dots, (b_k - b_{k-1}) \times (b_k - b_{k-1})$ соответственно и состоят из комплексных чисел), вектор \mathcal{R} имеет вид

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f_{b_1+1}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{b_1}) \\ \dots \\ f_{b_2-1}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{b_1}) \\ \vdots \\ f_{b_k-1}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{b_{k-1}}) \\ \dots \\ f_{b_k}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{b_{k-1}}) \end{pmatrix},$$

где функции f_1, \dots, f_n не содержат линейных частей.

1. $(z_1, \dots, z_n) = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$ – единичный элемент содержится в H ;
2. замкнутость композиции в H следует из явного вида \mathcal{L} и \mathcal{R} (если формулу (4) вставить в себя же, то мы получим формулу вида (4));
3. обратный элемент имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_n \end{pmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \mathcal{L}^{-1} \cdot \mathcal{R}.$$

В этом можно убедиться, если подставить формулу для обратного элемента в формулу (4). Из явного вида \mathcal{L} и \mathcal{R} следует, что формула для обратного элемента имеет вид (4).

Итак H – подгруппа \mathcal{D}_n^{GG} . Докажем, что H – максимальная подгруппа, которая действует эффективно на $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$. Найдём все отображения из \mathcal{D}_n^{GG} , которые сохраняют квазистепени эквивариантных мономов из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$. Всякое отображение Φ из \mathcal{D}_n^{GG} может быть представлено в виде

$$\Phi(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) = (z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_{I^1=(i_1^1, \dots, i_n^1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{1, I^1} \tilde{z}^{I^1}, \dots, \sum_{I^n=(i_1^n, \dots, i_n^n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{n, I^n} \tilde{z}^{I^n} \right).$$

1. Докажем, что в Φ не может быть бесконечного степенного ряда. Не ограничивая общности считаем, что бесконечное количество слагаемых содержится у ряда в первой компоненте. Возьмём эквивариантный моном $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$ ($j_1 \neq 0$) из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$. Такой моном найдётся в силу условий утверждения. Найдём композицию $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \circ \Phi(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$

$$z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \circ \Phi(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) = \left(\sum_{I^1=(i_1^1, \dots, i_n^1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{1, I^1} \tilde{z}^{I^1} \right)^{j_1} \dots \left(\sum_{I^n=(i_1^n, \dots, i_n^n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{n, I^n} \tilde{z}^{I^n} \right)^{j_n}. \quad (5)$$

Так как в ряде $\left(\sum_{I^1=(i_1^1, \dots, i_n^1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{1, I^1} \tilde{z}^{I^1} \right)$ содержится бесконечное количество членов, то существует $b \in \{1, \dots, n\}$ и член ряда с такой степенью $I' = (i_1', \dots, i_n')$, что $i_b' > 2(\alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n)$. Оценим квазистепень с весами α у монома $\tilde{z}_1^{i_1'} \dots \tilde{z}_n^{i_n'}$ получающегося в результате композиции (5), если в первом ряде выбрать моном со степенью I' , а в других рядах – произвольные мономы

$$\deg_\alpha(\tilde{z}_1^{i_1'} \dots \tilde{z}_n^{i_n'}) \geq \alpha_1 i_1' j_1 + \dots + \alpha_n i_n' j_n \geq \alpha_b i_b' j_1 > \alpha_b 2(\alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n) j_1.$$

Заметим, что получившаяся квазистепень с весами α больше, чем квазистепень с весами α монома $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$. Это значит, что если хотя бы в одной компоненте Φ есть бесконечный степенной ряд, то тогда Φ не может действовать на $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$.

2. Из прошлого пункта следует, что каждая компонента отображения Φ имеет конечное количество слагаемых. Пусть в компоненте b ($b \in \{1, \dots, n\}$) будет s_b слагаемых, тогда отображение Φ может быть представлено следующим образом

$$\Phi(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) = (z_1, \dots, z_n) = \left(a_{1, I_1^1} \tilde{z}^{I_1^1} + \dots + a_{1, I_{s_1}^1} \tilde{z}^{I_{s_1}^1}, \dots, a_{n, I_1^n} \tilde{z}^{I_1^n} + \dots + a_{n, I_{s_n}^n} \tilde{z}^{I_{s_n}^n} \right),$$

где $I_l^b = (i_{l,1}^b, \dots, i_{l,n}^b)$ – степени мономов, определённые для всех $l, b \in \mathbb{N}$. Для всех эквивариантных мономов найдём композицию $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \circ \Phi(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$.

$$z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \circ \Phi(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) = (a_{1, I_1^1} \tilde{z}^{I_1^1} + \dots + a_{1, I_{s_1}^1} \tilde{z}^{I_{s_1}^1})^{j_1} \dots (a_{n, I_1^n} \tilde{z}^{I_1^n} + \dots + a_{n, I_{s_n}^n} \tilde{z}^{I_{s_n}^n})^{j_n}.$$

Возведём суммы в степени

$$z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \circ \Phi(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) = \left(\sum_{\substack{k_1^1 + \dots + k_{s_1}^1 = j_1 \\ \text{для всех } b \in \{1, \dots, s_1\} \ k_b^1 \geq 0}} \binom{j_1}{k_1^1, \dots, k_{s_1}^1} (a_{1, I_1^1} \tilde{z}_1^{i_{1,1}^1} \dots \tilde{z}_n^{i_{1,n}^1})^{k_1^1} \dots (a_{1, I_{s_1}^1} \tilde{z}_1^{i_{s_1,1}^1} \dots \tilde{z}_n^{i_{s_1,n}^1})^{k_{s_1}^1} \dots \right. \\ \left. \dots \left(\sum_{\substack{k_1^n + \dots + k_{s_n}^n = j_n \\ \text{для всех } b \in \{1, \dots, s_n\} \ k_b^n \geq 0}} \binom{j_n}{k_1^n, \dots, k_{s_n}^n} (a_{n, I_1^n} \tilde{z}_1^{i_{1,1}^n} \dots \tilde{z}_n^{i_{1,n}^n})^{k_1^n} \dots (a_{n, I_{s_n}^n} \tilde{z}_1^{i_{s_n,1}^n} \dots \tilde{z}_n^{i_{s_n,n}^n})^{k_{s_n}^n} \right) \right),$$

где $\binom{j_1}{k_1^1, \dots, k_{s_1}^1}$ обозначает мультиномиальный коэффициент.

Для всех возможных наборов $(j_1, \dots, j_n), k_1^1, \dots, k_{s_1}^1, \dots, k_1^n, \dots, k_{s_n}^n$ найдём квазистепень с весами α у монома получающегося из формулы выше при подставке набора.

$$\begin{aligned} & \alpha_1((i_{1,1}^1 k_1^1 + \dots + i_{s_1,1}^1 k_{s_1}^1) + \dots + (i_{1,1}^n k_1^n + \dots + i_{s_n,1}^n k_{s_n}^n)) + \dots + \\ & + \alpha_n((i_{1,n}^1 k_1^1 + \dots + i_{s_1,n}^1 k_{s_1}^1) + \dots + (i_{1,n}^n k_1^n + \dots + i_{s_n,n}^n k_{s_n}^n)) = \\ & = k_1^1(\alpha_1 i_{1,1}^1 + \dots + \alpha_n i_{1,n}^1) + \dots + k_n^1(\alpha_1 i_{n,1}^1 + \dots + \alpha_n i_{n,n}^1) + \dots + \\ & + k_1^n(\alpha_1 i_{1,1}^n + \dots + \alpha_n i_{1,n}^n) + \dots + k_n^n(\alpha_1 i_{n,1}^n + \dots + \alpha_n i_{n,n}^n) \end{aligned}$$

Эта квазистепень должна быть равна $\alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n$ сразу для всех наборов. Возьмём эквивариантный моном $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$ ($j_1 \neq 0$) из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^{\alpha} \mathcal{O}_n^{GG})$. Для удобства введём обозначение $K_b^l = \alpha_1 i_{b,1}^l + \dots + \alpha_n i_{b,n}^l \geq 0$, тогда квазистепень с весами α , подсчитанная выше в новых обозначениях запишется так

$$k_1^1 K_1^1 + \dots + k_n^1 K_n^1 + \dots + k_1^n K_1^n + \dots + k_n^n K_n^n.$$

Возьмём наборы K', K^* чисел $k_1^1, \dots, k_{s_1}^1, \dots, k_1^n, \dots, k_{s_n}^n$, отличающихся в двух местах

$$\begin{aligned} k_1^1 &= j_1 - 1, & k_2^1 &= 1, \\ k_1^{*1} &= j_1, & k_2^{*1} &= 0. \end{aligned}$$

Вычтем квазистепени с весами α , полученные при подстановке этих двух наборов

$$\begin{aligned} j K_1^1 - (j-1) K_1^1 - K_2^1 &= 0, \\ K_1^1 &= K_2^1. \end{aligned}$$

Аналогично можно установить равенства $K_1^1 = \dots = K_n^1$. Аналогично можно получить остальные равенства $K_1^2 = \dots = K_n^2, \dots, K_1^n = \dots = K_n^n$.

Применим полученное свойство к подсчитанной выше квазистепени с весами α , получим

$$K_1^1(k_1^1 + \dots + k_n^1) + \dots + K_1^n(k_1^n + \dots + k_n^n) = K_1^1 j_1 + \dots + K_1^n j_n.$$

Чтобы отображение Φ сохраняло квазистепень любого эквивариантного монома из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^{\alpha} \mathcal{O}_n^{GG})$, должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} K_1^1 j_1 + \dots + K_1^n j_n &= \alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n, \\ (K_1^1 - \alpha_1) j_1 + \dots + (K_1^n - \alpha_n) j_n &= 0. \end{aligned}$$

Так как $\Phi \in \mathcal{D}_n^{GG}$, то для Φ должен выполняться критерий эквивариантности роста биголоморфного отображения. Добавим условия эквивариантности Φ и условие неотрицательности чисел K_1^1, \dots, K_1^n к условию сохранения квазистепени

$$\begin{aligned} (K_1^1 - \alpha_1) j_1 + \dots + (K_1^n - \alpha_n) j_n &= 0, \\ K_1^1 &\equiv \alpha_1 \pmod{m}, \\ &\vdots \\ K_1^n &\equiv \alpha_n \pmod{m}, \\ K_1^1 &\geq 0, \\ &\vdots \\ K_1^n &\geq 0. \end{aligned}$$

Так как $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – достаточные веса, то для α_1 выполняются ограничения $0 < \alpha_1 \leq m$. Отсюда и условий $K_1^1 \equiv \alpha_1 \pmod{m}, K_1^1 \geq 0$ следует, что коэффициент $(K_1^1 - \alpha_1)$ неотрицателен. Аналогичными рассуждениями можно получить, что неотрицательны коэффициенты $K_1^2 - \alpha_2, \dots, K_1^n - \alpha_n$. Возьмём эквивариантный моном $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$ ($j_1 \neq 0$) из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^{\alpha} \mathcal{O}_n^{GG})$. Такой моном найдётся в силу условий утверждения. Подставим степени этого монома в условие сохранения квазистепени, получим

$$(K_1^1 - \alpha_1) j_1 + \dots + (K_1^n - \alpha_n) j_n = 0.$$

Так как $j_1 > 0$, то $K_1^1 - \alpha_1 = 0$. Аналогично можно получить, что числа $K_1^2 - \alpha_2, \dots, K_1^n - \alpha_n$ равны нулю.

Итак H – подгруппа \mathcal{D}_n^{GG} , которая содержит все отображения из \mathcal{D}_n^{GG} , сохраняющие квазистепени мономов из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$. \square

Определение 9. Определим семейство функций $Q_{p_1, \dots, p_n}(x)$ (p_1, \dots, p_n берутся из формулы (1)), состоящее из функций $\mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, с помощью формулы

$$Q_{p_1, \dots, p_n}(x) = \#\{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : p_1 j_1 + \dots + p_n j_n = x\}.$$

Замечание 4. Если переменная z_1 не участвует ни в одном мономе из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$, то отображение

$$(z_1, \dots, z_n) = \left(\sum_{\substack{I^1 = (i_1^1, \dots, i_n^1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ \alpha_1 i_1^1 + \dots + \alpha_n i_n^1 = \alpha_1}} a_{1, I^1} \tilde{z}^{I^1}, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n \right)$$

действует тривиально на $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$. Такое отображение действует неэффективно. Чтобы получить максимальную подгруппу \mathcal{D}_n^{GG} , действующую на $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$ эффективно, необходимо брать в группу H (определённую в утверждении 3), только отображения

$$(z_1, \dots, z_n) = \left(\tilde{z}_1, \sum_{\substack{I^2 = (i_1^2, \dots, i_n^2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ \alpha_1 i_1^2 + \dots + \alpha_n i_n^2 = \alpha_2}} a_{2, I^2} \tilde{z}^{I^2}, \dots, \sum_{\substack{I^n = (i_1^n, \dots, i_n^n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ \alpha_1 i_1^n + \dots + \alpha_n i_n^n = \alpha_n}} a_{n, I^n} \tilde{z}^{I^n} \right).$$

Найти размерность группы H над \mathbb{C} можно с помощью формулы

$$\dim_{\mathbb{C}}(H) = I(A_1)Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\alpha_1) + \dots + I(A_n)Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\alpha_n),$$

где для всех $b \in \{1, \dots, n\}$

$$I(A_b) = \begin{cases} 1, & \text{если переменная } z_b \text{ есть хотя бы в одном мономе из } (j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Пусть выполняется условие $d_1^\alpha = \dots = d_{r-1}^\alpha < d_r^\alpha$. Размерность максимальной подгруппы \mathcal{D}_n^{GG} над \mathbb{C}^k , действующей эффективно на $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$ обозначим D_r^α .

Определение 10. Орбита $\mathcal{D}_n^{GG}(j_r^\alpha g) \subset j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG}$ называется *примыкающей* к орбите $\mathcal{D}_n^{GG}(j_r^\alpha f) \subset j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG}$, если любая окрестность некоторой, а значит и любой точки из $\mathcal{D}_n^{GG}(j_r^\alpha f)$ пересекается с $\mathcal{D}_n^{GG}(j_r^\alpha g)$.

Определение 11. Росток функции $f \in \mathcal{O}_n^{GG}$ называется *эквивариантно простым* (относительно действия (1)), если для достаточно большого $r \in \mathbb{N}$:

- 1) существует окрестность произвольной точки из орбиты $\mathcal{D}_n^{GG}(j_r^\alpha f)$, пересекающая конечное число других орбит;
- 2) число орбит, примыкающих к орбите $\mathcal{D}_n^{GG}(j_r^\alpha f)$, ограничено числом, не зависящим от r .

1.2 Обзор существующих результатов

Существует общая задача классификации ростков голоморфных функций, эквивариантно простых относительно всевозможных действий конечных абелевых групп на прообразе и образе. Ознакомимся с историей исследования этой задачи.

В 1972 году В.И.Арнольд классифицировал простые особенности ростков без условия эквивариантности (см.[1]). Позже в 1978 году В.И.Арнольд классифицировал простые особенности ростков на многообразии с краем (см. [2]). Эта задача эквивалентна описанию простых особенностей ростков, эквивариантных относительно действия циклической группы \mathbb{Z}_2 на множество $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ по первой координате

$$\sigma * (x_1, \dots, x_n; w) = (-x_1, x_2, \dots, x_n; w),$$

в обозначениях раздела 1.1.

В 2013 году В. Домитрж, М. Манюэль и П. де М. Риос классифицировали простые нечётные особенности (см. [5]). Эта задача эквивалентна описанию простых особенностей ростков, эквивариантных относительно действия циклической группы \mathbb{Z}_2 на множество $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, задаваемого формулой

$$\sigma * (x_1, \dots, x_n; w) = (-x_1, \dots, -x_n; -w),$$

в обозначениях раздела 1.1. В частности было доказано, что нечётных простых ростков при $n > 2$ нет.

В 2018 году Е.А.Асташов предложил достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков (см. [3], теорема 16) в терминах d_r^α и D_r^α (см. обозначение раздела 1.1):

Утверждение 4. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — допустимый набор весов, относительно действия (1) группы \mathbb{Z}_m . Если в обозначениях раздела 1.1 выполнено условие $d_1^\alpha = \dots = d_{r-1}^\alpha = 0 \neq d_r^\alpha > D_r^\alpha$, то не существует ростков функций $f \in \mathcal{O}_n^{GG}$, являющихся эквивариантно простыми.

1.3 Цель и структура работы

Цель настоящей работы — вывести из утверждения 4 достаточные условия в виде некоторых ограничений на p_1, p_2, p_3, q, m для размерностей $n = 2$ и $n = 3$.

В параграфе 2.1 вводится семейство функций, с помощью которого будут сформулированы достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков. Для этого семейства доказывается формула понижения количества параметров (утверждение 5) и выводятся формулы, позволяющие вычислять значения функций из семейства с количеством параметров 1, 2, 3 (утверждения 6, 7, 8 соответственно).

В параграфе 2.2 для действия (1) и допустимых весов α находятся такие значения d_r^α и D_r^α , что для $r \in \mathbb{N}$ выполняется условие $d_1^\alpha = \dots = d_{r-1}^\alpha \neq d_r^\alpha$. В утверждении 9 предлагается способ нахождения числа D_r^α , а в утверждении 10 предлагается способ нахождения числа d_r^α .

В параграфе 2.3 теорема 1 предлагает достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков при любом $n \in \mathbb{N}$. В следствиях 1 и 2 приводятся новые достаточные условия, учитывающие свойства из параграфа 2.1 семейств функций с двумя и тремя параметрами.

2 Основные результаты

В настоящей главе будем считать, что всегда задано действие (1). Для вещественного числа x под $[x]$ будем понимать целую часть числа x .

2.1 Формулы для количества эквивариантных мономов

Определение 12. Определим семейство функций $Q_{p_1, \dots, p_n}(x)$ (p_1, \dots, p_n берутся из формулы (1)), состоящее из функций $\mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, с помощью формулы

$$Q_{p_1, \dots, p_n}(x) = \#\{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : p_1 j_1 + \dots + p_n j_n = x\}.$$

Утверждение 5 (Формула понижения количества параметров). Для любых $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедлива формула понижения количества параметров

$$Q_{p_1, \dots, p_t}(x) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{x}{p_1}\right]} Q_{p_2, \dots, p_t}(x - p_1 s).$$

Доказательство. Все неотрицательные решения диофантова уравнения $p_1 j_1 + \dots + p_t j_t = \xi$ можно разбить на $[\xi/p_1] + 1$ множеств следующим образом. Решение (j_1, \dots, j_t) принадлежит к множеству $s \in \{0, \dots, [\xi/p_1]\}$ тогда и только тогда, когда $j_1 = s$. Описанные множества будем обозначать A_s . Посчитаем размер каждого множества из семейства A_s .

$$\begin{aligned} \#A_s &= \#\{(j_2, \dots, j_t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{t-1} : p_2 j_2 + \dots + p_t j_t = \xi - p_1 s\} = \\ &= Q_{p_2, \dots, p_t}(\xi - p_1 s). \end{aligned}$$

Осталось просуммировать все решения обратно

$$Q_{p_1, \dots, p_t}(\xi) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{\xi}{p_1} \rfloor} \#A_s = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{\xi}{p_1} \rfloor} Q_{p_2, \dots, p_t}(\xi - p_1 s).$$

□

2.1.1 Формула для количества эквивариантных мономов при $n = 1$

Утверждение 6 (Формула для $Q_{p_1}(x)$).

$$Q_{p_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } p_1 | x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Доказательство. Если $p_1 | x$, то уравнение $p_1 x_1 = x$ имеет одно решение в целых неотрицательных числах $x_1 = \frac{x}{p_1}$.

Если $p_1 \nmid x$, то уравнение $p_1 x_1 = x$ не имеет решений в целых неотрицательных числах. □

2.1.2 Формула для количества эквивариантных мономов при $n = 2$

Утверждение 7 (Формула для $Q_{p_1, p_2}(x)$). Фиксируем $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- Если $\text{НОД}(p_1, p_2) | x$, то верна формула

$$Q_{p_1, p_2}(x) = Q_{p'_1, p'_2}(x') = Q_{p'_1, p'_2}(x' \bmod \text{НОК}(p'_1, p'_2)) + \left\lfloor \frac{x'}{\text{НОК}(p'_1, p'_2)} \right\rfloor$$

где

$$p'_1 = \frac{p_1}{\text{НОД}(p_1, p_2)}, \quad p'_2 = \frac{p_2}{\text{НОД}(p_1, p_2)}, \quad x' = \frac{x}{\text{НОД}(p_1, p_2)}.$$

- Если $\text{НОД}(p_1, p_2) \nmid x$, то верна формула

$$Q_{p_1, p_2}(x) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что $\text{НОД}(p_1, p_2) = 1$. Для удобства обозначим за $x_0 = x - \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2)$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & Q_{p_1, p_2} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) \right) - Q_{p_1, p_2}(x_0) = \\ & \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2)}{p_1} \right\rfloor} Q_{p_2} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) - ip_1 \right) - \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{x_0}{p_1} \right\rfloor} Q_{p_2}(x_0 - ip_1). \end{aligned}$$

Во второй сумме заменим индекс $i \rightarrow i - \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \frac{\text{НОК}(p_1, p_2)}{p_1}$.

$$\begin{aligned} & Q_{p_1, p_2} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) \right) - Q_{p_1, p_2}(x_0) = \\ & \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2)}{p_1} \right\rfloor} Q_{p_2} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) - ip_1 \right) - \\ & - \sum_{i = \frac{s \text{НОК}(p_1, p_2)}{p_1}}^{\left\lfloor \frac{x_0}{p_1} \right\rfloor + \frac{\left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2)}{p_1}} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) - ip_1 \right) = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor} Q_{p_2} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) - ip_1 \right).$$

Получили сумму нулей и единичек.

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor} Q_{p_2} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) - ip_1 \right).$$

Заметим, что $i \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor p_2 - 1 \right\}$. Посчитаем количество единиц в полученной сумме

$$\begin{aligned} Q_{p_2} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) - ip_1 \right) = 1 &\Leftrightarrow x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) - ip_1 \equiv p_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_0 - ip_1 \equiv p_2. \end{aligned}$$

Известно, что если $\text{НОД}(p_1, p_2) = 1$, то сравнение $ip_1 \equiv x_0 \pmod{p_2}$ имеет одно решение $i \in \{0, \dots, p_2 - 1\}$. Во множестве $\left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor p_2 - 1 \right\}$ будет $\left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor$ решений.

То есть значение искомой суммы равно $\left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor$. То есть

$$\begin{aligned} Q_{p_1, p_2} \left(x_0 + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2) \right) - Q_{p_1, p_2}(x_0) &= \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor, \\ Q_{p_1, p_2}(x) &= Q_{p_1, p_2}(x \bmod \text{НОК}(p_1, p_2)) + \left\lfloor \frac{x}{\text{НОК}(p_1, p_2)} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Если $\text{НОД}(p_1, p_2) \neq 1$, тогда есть два варианта:

- $\text{НОД}(p_1, p_2) \nmid x$, тогда $Q_{p_1, p_2}(x) = 0$, ибо в уравнении $p_1 j_1 + p_2 j_2 = x$ левая часть делится на $\text{НОД}(p_1, p_2)$, а правая часть не делится;
- $\text{НОД}(p_1, p_2) \mid x$, тогда справедлив переход

$$Q_{p_1, p_2}(x) = Q_{\frac{p_1}{\text{НОД}(p_1, p_2)}, \frac{p_2}{\text{НОД}(p_1, p_2)}} \left(\frac{x}{\text{НОД}(p_1, p_2)} \right),$$

ибо количество решений уравнения $p_1 j_1 + p_2 j_2 = x$ совпадает с количеством решений уравнения $\frac{p_1}{\text{НОД}(p_1, p_2)} j_1 + \frac{p_2}{\text{НОД}(p_1, p_2)} j_2 = \frac{x}{\text{НОД}(p_1, p_2)}$.

□

2.1.3 Формула для количества эквивариантных мономов при $n = 3$

Лемма 1. Пусть $x < \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)$ и $\text{НОД}(p_1, p_2, p_3) = 1$, тогда для любого $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ справедлива формула

$$\begin{aligned} Q_{p_1, p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(x + s \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) &= \\ = Q_{p_1, p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(x) + s \frac{(\text{НОК}(p_1, p_2, p_3))^2}{p_1 p_2 p_3}. \end{aligned}$$

Доказательство.

$$Q_{p_1, p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(x + s \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) = \quad (6)$$

(применяем формулу понижения размерности)

$$= \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{x}{p_1} \right\rfloor + (s+1) \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1}} Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) -$$

$$- \sum_{i=0}^{\left[\frac{x}{p_1}\right] + (s) \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1}} Q_{p_2, p_3}(x + (s) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) =$$

(понижаем индекс во второй сумме)

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{x}{p_1}\right] + (s+1) \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1}} Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) -$$

$$- \sum_{i=\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1}}^{\left[\frac{x}{p_1}\right] + (s+1) \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1}} Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) =$$

(сокращаем одинаковые слагаемые)

$$= \sum_{i=0}^{\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1} - 1} Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1).$$

В частности из выведенной формулы следует, что

$$\begin{aligned} Q_{p_1, p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(x) &= \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1} - 1} Q_{p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь можно найти разность (7)-(6)

$$\begin{aligned} &Q_{p_1, p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(x + s \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - \\ &\quad - (Q_{p_1, p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(x)) = \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1} - 1} Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) - \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1} - 1} Q_{p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1} - 1} (Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) - Q_{p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1)). \quad (8)$$

Найдём значение разности $Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) - Q_{p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1)$. Предположим, что $\text{НОД}(p_1, p_2) | x - ip_1$, тогда

$$\begin{aligned} &Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) - Q_{p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) = \\ &= Q_{p'_2, p'_3} \left(\frac{x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3)} \bmod \text{НОК}(p'_2, p'_3) \right) + \left[\frac{x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p'_2, p'_2)} \right] - \\ &\quad - \left(Q_{p'_2, p'_3} \left(\frac{x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3)} \bmod \text{НОК}(p'_2, p'_3) \right) + \left[\frac{x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p'_2, p'_2)} \right] \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p'_2, p'_3) = \text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК} \left(\frac{p_2}{\text{НОД}(p_2, p_3)}, \frac{p_3}{\text{НОД}(p_2, p_3)} \right) = \frac{p_2 p_3}{\text{НОД}(p_2, p_3)} = \text{НОК}(p_2, p_3)$. То есть $\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p'_2, p'_3) | \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)$, а значит

$$\begin{aligned} &Q_{p_1, p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(x + s \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - \\ &\quad - (Q_{p_1, p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(x)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Q_{p_2, p_3} \left(\frac{x - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3)} \bmod \text{НОК}(p_2', p_3') \right) + \left[\frac{x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p_2', p_2')} \right] - \\
&\quad - \left(Q_{p_2', p_3'} \left(\frac{x - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3)} \bmod \text{НОК}(p_2', p_3') \right) + \left[\frac{x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p_2', p_2')} \right] \right) = \\
&= \left[\frac{x - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p_2', p_2')} \right] + \frac{(s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p_2', p_2')} - \\
&\quad - \left(\left[\frac{x - ip_1}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p_2', p_2')} \right] + \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p_2', p_2')} \right) = \\
&= s \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{\text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p_2', p_3')} = s \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{\text{НОК}(p_2, p_3)}.
\end{aligned}$$

Если $\text{НОД}(p_1, p_2)$ не делит $x - ip_1$, то

$$Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) - Q_{p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) = 0.$$

Объединяя два случая получим, что

$$\begin{aligned}
&Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) - Q_{p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) = \\
&= \begin{cases} s \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{\text{НОК}(p_2, p_3)} & \text{если } \text{НОД}(p_2, p_3) | x - ip_1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.
\end{aligned}$$

В сумме (8) ненулевых слагаемых будет

$$\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1 \text{НОД}(p_2, p_3)}.$$

Известно, что если $\text{НОД}(p_1, p_2, p_3) = \text{НОД}(p_1, \text{НОД}(p_2, p_3)) = 1$, то сравнение $ip_1 \equiv x \pmod{\text{НОД}(p_2, p_3)}$ имеет одно решение на множестве $\{0, \dots, \text{НОД}(p_2, p_3) - 1\}$. На множестве $\left\{0, \dots, \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1} - 1\right\}$ будет $\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1 \text{НОД}(p_2, p_3)}$ решений.

Вычислим сумму (8)

$$\begin{aligned}
&\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1} - 1 \\
&\sum_{i=0}^{\frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1} - 1} (Q_{p_2, p_3}(x + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1) - Q_{p_2, p_3}(x + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3) - ip_1)) = \\
&= \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{p_1 \text{НОД}(p_2, p_3)} \cdot s \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)}{\text{НОК}(p_2, p_3)} = s \frac{(\text{НОК}(p_1, p_2, p_3))^2}{p_1 \text{НОД}(p_2, p_3) \text{НОК}(p_2, p_3)} = s \frac{(\text{НОК}(p_1, p_2, p_3))^2}{p_1 p_2 p_3}
\end{aligned}$$

□

Утверждение 8 (Формула для $Q_{p_1, p_2, p_3}(x)$). Пусть $y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\text{НОД}(p_1, p_2, p_3) = 1$. Обозначим $y_0 = y - \left\lfloor \frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)$. $Q_{p_1, p_2, p_3}(y)$ можно вычислить по следующей формуле

$$\begin{aligned}
Q_{p_1, p_2, p_3}(y) &= \left\lfloor \frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right\rfloor (Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0 + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0)) + \\
&\quad + \frac{\left(\left\lfloor \frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right\rfloor - 1 \right) \left\lfloor \frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right\rfloor \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)^2}{2 p_1 p_2 p_3} + Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0).
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$Q(y) = \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right\rfloor - 1} (Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0 + (s+1) \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0 + s \text{НОК}(p_1, p_2, p_3))) + Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0) =$$

(применяем лемму)

$$= \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right\rfloor - 1} \left(Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0 + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0) + s \frac{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)^2}{p_1 p_2 p_3} \right) + Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0) =$$

$$\left[\frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right] (Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0 + \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)) - Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0)) + \frac{\left(\left[\frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right] - 1 \right) \left[\frac{y}{\text{НОК}(p_1, p_2, p_3)} \right] \text{НОК}(p_1, p_2, p_3)^2}{2 p_1 p_2 p_3} + Q_{p_1, p_2, p_3}(y_0).$$

□

Замечание 5. Утверждение 8 верно только если $\text{НОД}(p_1, p_2, p_3) = 1$. Если $\text{НОД}(p_1, p_2, p_3) \neq 1$, то для вычисления $Q_{p_1, p_2, p_3}(y)$ можно воспользоваться формулой

$$Q_{p_1, p_2, p_3}(y) = \begin{cases} Q_{\frac{p_1}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)}, \frac{p_2}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)}, \frac{p_3}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)}} \left(\frac{y}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)} \right) & \text{НОД}(p_1, p_2, p_3) | y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

2.2 Вычисление чисел d_r^α и D_r^α

Утверждение 9 (Вычисление числа D_r^α). Пусть

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – допустимый набор весов;
- существует $\eta = \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + tm) \neq 0\}$;

Тогда D_r^α (r определяется условием $d_1^\alpha = \dots = d_{r-1}^\alpha = 0 < d_r^\alpha$) можно вычислить по следующей формуле

$$D_r^\alpha = I(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + \eta m) - Q_{\alpha_2, \dots, \alpha_n}(q + \eta m))Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\alpha_1) + \dots + I(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + \eta m) - Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}}(q + \eta m))Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\alpha_n),$$

где для любого $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & \text{иначе} \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Следует из определения числа D_r^α и семейства функций $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, утверждения 3 и замечания 4. □

Пример 1. Пусть выполняются следующие условия

- $s \in \mathbb{N}$,
- $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 2^s)$,
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 2^s)$,
- $m = q = 2^s$.

Заметим, что $\eta = 0$, ибо $Q_{p_1, p_2, p_3}(2^s) > 0$. Найдём все значения всех функций необходимых для вычисления D_r^α

- $Q_{1,1}(2^s) = Q_{1,1}(2^s \bmod 1) + \left[\frac{2^s}{1} \right] = Q_{p_1, p_2}(0) + 2^s = 2^s + 1$;
- $Q_{1,1,2^s}(2^s) = Q_{1,1}(0) + Q_{1,1}(2^s) = 1 + 2^s + 1 = 2 + 2^s$;
- $Q_{1,1,2^s}(1) = Q_{1,1}(1) = Q_{1,1}(0) + 1 = 2$.

$$D_r^\alpha = Q_{1,1,2^s}(1) + Q_{1,1,2^s}(1) + Q_{1,1,2^s}(2^s) = 2 + 2 + (2^s + 2) = 6 + 2^s.$$

Утверждение 10 (Вычисление числа d_r^α). Пусть выполняются условия

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – допустимый набор весов,
- существует $\eta = \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + tm) \neq 0\}$.

Тогда $d_r^\alpha = Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + \eta m)$ и $q + \eta m = r$, где r определяется условием $d_1^\alpha = \dots = d_{r-1}^\alpha = 0 < d_r^\alpha$.

Доказательство. Пусть $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$ моном из $(j_r^\alpha \mathcal{O}_n^{GG} / j_{r-1}^\alpha \mathcal{O}_n^{GG})$, тогда степени этого монома удовлетворяют соотношению

$$p_1 j_1 + \dots + p_n j_n \equiv q \pmod{m}.$$

Так как $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – допустимый набор весов, то верно

$$p_1 j_1 + \dots + p_n j_n \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow \alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n \equiv 0 \pmod{m},$$

$$p_1 j_1 + \dots + p_n j_n \equiv \alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n \pmod{m}.$$

Подставим это условие в соотношение для степени монома $z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}$ получим, что степень монома должны удовлетворять соотношению

$$\alpha_1 j_1 + \dots + \alpha_n j_n \equiv q \pmod{m}.$$

По определению η уравнение выше не имеет решений, если правая часть равна $q, q + m, \dots, q + (\eta - 1)m$, а значит при правой части равной $q + \eta m$ впервые появятся эквивариантные мономы. Количество таких мономов совпадает с d_r^α . Количество неотрицательных целых решений последнего уравнения совпадает с $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + \eta m)$. То есть справедливо равенства $d_r^\alpha = Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + \eta m)$, $q + \eta m = r$. \square

2.3 Достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков

Теорема 1 (Достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков в общем случае). Пусть выполняются следующие условия

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – допустимый набор весов,
- существует $\eta = \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + tm) \neq 0\}$.

Если выполнено условие

$$Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + \eta m) > I(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + \eta m) - Q_{\alpha_2, \dots, \alpha_n}(q + \eta m))Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\alpha_1) + \dots + \\ + I(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(q + \eta m) - Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}}(q + \eta m))Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\alpha_n),$$

где для любого $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & \text{иначе} \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}.$$

Тогда не существует эквивариантно простых ростков в \mathcal{O}_n^{GG} .

Доказательство. Следует из утверждений 4, 9 и 10. \square

Следствие 1 (Достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков при $n = 2$). Не ограничивая общности считаем, что $p_1 \leq p_2$. Пусть выполняются следующие условия

- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{p_1}{\text{НОД}(p_1, \dots, p_n)}, \frac{p_2}{\text{НОД}(p_1, \dots, p_n)} \right)$;
- существует $\eta = \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : Q_{\alpha_1, \alpha_2}(q + tm) \neq 0\}$.

Если выполнено одно из условий

1. • $p_1 = p_2$,
• $q \geq 4$;
2. • $p_1 < p_2$,
• $p_1 \mid p_2$,
• $q \geq 3 \frac{p_2}{p_1}$;
3. • $p_1 < p_2$,
• $p_1 \nmid p_2$,

- число $x_0\alpha_1^{\varphi(\alpha_2)-1}$ не лежит в множестве $\{0, \dots, \lfloor \frac{x_0}{\alpha_1} \rfloor\}$ ($x_0 = q + \eta m \pmod{\text{НОК}(\alpha_1, \alpha_2)}$, φ – функция Эйлера),
 - $q + \eta m \geq 3p_1p_2$;
- 4.
- $p_1 < p_2$,
 - $p_1 \nmid p_2$,
 - число $x_0\alpha_1^{\varphi(\alpha_2)-1}$ лежит в множестве $\{0, \dots, \lfloor \frac{x_0}{\alpha_1} \rfloor\}$ ($x_0 = q + \eta m \pmod{\text{НОК}(\alpha_1, \alpha_2)}$, φ – функция Эйлера),
 - $q + \eta m \geq 2p_1p_2$;

то не существует эквивариантно простых ростков в \mathcal{O}_n^{GG} .

Доказательство. Заметим, что если $d_r^\alpha = 1$, то условия теоремы 1 заведомо не выполняются. Если $d_r^\alpha > 1$, то все индикаторы в формуле D_r^α принимают значение 1.

- Если $p_1 = p_2$, то $\alpha_1 = \alpha_2$.

$$d_r^\alpha = Q_{1,1}(q + \eta m) = 1 + q + \eta m.$$

$$D_r^\alpha = Q_{1,1}(1) + Q_{1,1}(1) = 2 + 2 = 4.$$

Заметим, что $\eta = 0$. Если выполнено условие

$$q \geq 4,$$

то не существует эквивариантно простых ростков.

- Если $p_1 < p_2$ и $\alpha_1 \mid \alpha_2$, то $1 = \alpha_1 < \alpha_2$.

$$d_r^\alpha = Q_{1,\alpha_2}(q + \eta m) = 1 + \left\lfloor \frac{q + \eta m}{\alpha_2} \right\rfloor.$$

$$D_r^\alpha = Q_{1,\alpha_2}(\alpha_1) + Q_{1,\alpha_2}(\alpha_2) = 1 + 2 = 3.$$

Заметим, что $\eta = 0$. Если выполнено условие

$$q \geq 3\frac{p_2}{p_1},$$

то не существует эквивариантно простых ростков.

- Если $p_1 < p_2$ и $\alpha_1 \nmid \alpha_2$, то $1 \neq \alpha_1 < \alpha_2$.

$$d_r^\alpha = Q_{\alpha_1,\alpha_2}(q + \eta m) = Q_{\alpha_1,\alpha_2}(q + \eta m \pmod{\text{НОК}(\alpha_1, \alpha_2)}) + \left\lfloor \frac{q + \eta m}{\text{НОК}(\alpha_1, \alpha_2)} \right\rfloor = Q_{\alpha_1,\alpha_2}(x_0) + \left\lfloor \frac{q + \eta m}{\text{НОК}(\alpha_1, \alpha_2)} \right\rfloor.$$

$$Q_{\alpha_1,\alpha_2}(x_0) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{x_0}{\alpha_1} \rfloor} Q_{\alpha_2}(x_0 - i\alpha_1).$$

$Q_{\alpha_1,\alpha_2}(x_0) = 1 \Leftrightarrow$ существует $i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{x_0}{\alpha_1} \rfloor\}$ такое, что $i\alpha_1 \equiv x_0 \pmod{\alpha_2} \Leftrightarrow x_0\alpha_1^{\varphi(\alpha_2)-1} \in \{0, \dots, \lfloor \frac{x_0}{\alpha_1} \rfloor\}$.

$$D_r^\alpha = Q_{\alpha_1,\alpha_2}(\alpha_1) + Q_{\alpha_1,\alpha_2}(\alpha_2) = 1 + 1 = 2.$$

– Если $x_0\alpha_1^{\varphi(\alpha_2)-1} \notin \{0, \dots, \lfloor \frac{x_0}{\alpha_1} \rfloor\}$, то $d_r^\alpha = Q_{p_1,p_2}(q + \eta m) = \left\lfloor \frac{q + \eta m}{\alpha_1\alpha_2} \right\rfloor > 2 = D_r^\alpha \Leftrightarrow q + \eta m \geq 3\alpha_1\alpha_2$;

– Если $x_0\alpha_1^{\varphi(\alpha_2)-1} \in \{0, \dots, \lfloor \frac{x_0}{\alpha_1} \rfloor\}$, то $d_r^\alpha = Q_{p_1,p_2}(q + \eta m) = 1 + \left\lfloor \frac{q + \eta m}{\alpha_1\alpha_2} \right\rfloor > 2 = D_r^\alpha \Leftrightarrow q + \eta m \geq 2\alpha_1\alpha_2$.

□

В следующем следствии приведены слабые достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков при $n = 3$.

Следствие 2 (Достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков при $n = 3$). *Не ограничивая общности считаем, что $p_1 \leq p_2 \leq p_3$. Пусть выполняются следующие условия*

- существует $\eta = \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : Q_{p_1, p_2, p_3}(q + tm) \neq 0\}$,
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{p_1}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)}, \frac{p_2}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)}, \frac{p_3}{\text{НОД}(p_1, p_2, p_3)} \right)$ – допустимый набор весов.

Если выполнено одно из следующих условий

1.
 - $p_1 = p_2 = p_3$,
 - $q \geq 3$,
2.
 - $p_1 < p_2 = p_3$,
 - $\alpha_1 \nmid \alpha_2$,
 - $Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(q + \eta m) > 5$,
3.
 - $p_1 < p_2 = p_3$,
 - $\alpha_1 \mid \alpha_2$,
 - $Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(q + \eta m) > 7$,
4.
 - $p_1 = p_2 < p_3$,
 - $\alpha_2 \nmid \alpha_3$,
 - $Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(q + \eta m) > 5$,
5.
 - $p_1 = p_2 < p_3$,
 - $\alpha_2 \mid \alpha_3$,
 - $Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(q + \eta m) > 6 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$,
6.
 - $p_1 < p_2 < p_3$,
 - $\alpha_1 \nmid \alpha_2$,
 - $Q_{p_1, p_2, p_3}(q + \eta m) > 3 + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(\alpha_3)$,
7.
 - $p_1 < p_2 < p_3$,
 - $\alpha_1 \mid \alpha_2$,
 - $Q_{p_1, p_2, p_3}(q + \eta m) > 4 + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(\alpha_3)$,

то не существует эквивариантно простых ростков в \mathcal{O}_n^{GG} .

Доказательство. При доказательстве этой теоремы используется оценка $D_r^\alpha < Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_1) + Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_2) + Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_3)$.

- Пусть $p_1 = p_2 = p_3$, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Оценим значение D_r^α . Для этого посчитаем значения следующих функций

$$Q_{1,1,1}(\alpha_1) = Q_{1,1,1}(\alpha_2) = Q_{1,1,1}(\alpha_3) = 3,$$

и вычислим число D_r^α

$$D_r^\alpha = 3 + 3 + 3 = 9.$$

Условия теоремы 1 примут вид

$$Q_{1,1,1}(q + \eta m) = Q_{1,1,1}(q) > D_r^\alpha = 9.$$

$Q_{1,1,1}(x)$ – монотонная функция и $Q_{1,1,1}(3) = Q_{1,1,1}(0 + 3 \cdot 1) = 3(Q_{1,1,1}(1) - Q_{1,1,1}(0)) + \frac{(3-1)3}{2} \frac{1^2}{1 \cdot 1 \cdot 1} + Q_{1,1,1}(0) = 6 + 3 + 1 = 10$. Если $q \geq 3$, то выполняются достаточные условия теоремы 1.

- Пусть $p_1 < p_2 = p_3$, тогда $\alpha_1 < \alpha_2 = \alpha_3$. Оценим значение D_r^α . Пусть

1. $\alpha_1 \nmid \alpha_2$. Посчитаем значения следующих функций

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_1) &= 1, \\ Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_2) &= Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_3) = 2. \end{aligned}$$

2. $\alpha_1 \mid \alpha_2$. Посчитаем значения следующих функций

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_1) &= 1, \\ Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_2) &= Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_3) = 3. \end{aligned}$$

В зависимости от делимости α_2 на α_1 получаем условия из формулировки следствия.

• Пусть $p_1 = p_2 < p_3$, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3$. Оценим значение D_r^α . Пусть

– $\alpha_2 \nmid \alpha_3$. Посчитаем значения следующих функций

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_1) &= Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_2) = 2, \\ Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_3) &= 1. \end{aligned}$$

– $\alpha_2 \mid \alpha_3$. Посчитаем значения следующих функций

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_1) &= Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_2) = 2, \\ Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_3) &= Q_{\alpha_1, \alpha_2}(\alpha_3) = Q_{\alpha_1, \alpha_2}(0) + Q_{1,1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) = 1 + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2} + 1\right) = 2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

В зависимости от делимости α_2 на α_1 получаем условия из формулировки следствия.

• Пусть $p_1 < p_2 < p_3$, тогда $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Оценим значение D_r^α . Пусть

– $\alpha_1 \nmid \alpha_2$. Посчитаем значения следующих функций

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_1) &= Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_2) = 1, \\ Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_3) &= 1 + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(\alpha_3). \end{aligned}$$

– $\alpha_1 \mid \alpha_2$. Посчитаем значения следующих функций

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_1) &= 1, \\ Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_2) &= 2, \\ Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(\alpha_3) &= 1 + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(\alpha_3). \end{aligned}$$

В зависимости от делимости α_2 на α_1 получаем условия из формулировки следствия. □

3 Заключение

В работе получены достаточные условия отсутствия эквивариантно простых ростков при действии циклической группы по формуле (1) в терминах p_1, \dots, p_n, q, m . При $n = 2$ проверить достаточные условия можно с помощью следствия 1. В формулировке следствия 1 не фигурирует семейство функций $Q_{p_1, p_2}(x)$. При $n = 3$ выполнение достаточных условий можно проверить с помощью утверждений 5,6,7,8 и теоремы 1. Более того следствие 2 можно сформулировать таким образом, чтобы в нём не фигурировали семейства функций $Q_{p_1, p_2, p_3}(x)$ и $Q_{p_1, p_2}(x)$, однако в нём будет огромное количество условий, поэтому лучше всего пользоваться утверждениями 5,6,7,8 и теоремой 1.

С помощью результатов полученных в работе можно выявить случаи, когда не существует эквивариантно простых ростков при действии циклической группы \mathbb{Z}_m по формуле (1) при $n = 2$ и $n = 3$. Уменьшение зоны поиска эквивариантно простых ростков поможет при решении задачи классификации эквивариантно простых ростков. Заметим, что алгоритм доказательств утверждений 4 и 5 одинаковый. Можно предположить, что по такому же алгоритму выводятся формулы для семейства функций Q_{p_1, \dots, p_n} с количеством параметров больше чем 3. Скорее всего эти формулы окажутся очень громоздкими, однако они всё равно могут помочь в решении аналогичных задач с помощью компьютера.

Целями дальнейших исследований могут служить обобщение формулы для семейства функций Q_{p_1, \dots, p_n} при любых натуральных n или классификация эквивариантно простых ростков при действии циклической группы по формуле (1) при $n = 2$ и $n = 3$.

Список литературы

- [1] В.И.Арнольд. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функциональный анализ и его приложения, 6:4 (1972), 3–25.
- [2] В.И.Арнольд. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // Успехи математических наук, 33:5 (1978), 91–107.
- [3] E.A.Astashov. Equivariant simple singularities and admissible sets of weights // WSEAS Transactions on Mathematics 17, 2018, pp. 404–410.
- [4] S. Bochner. Compact groups of differentiable transformations // Ann. Math., 2:46 (1945), 372–381.
- [5] W. Domitrz, M. Manoel, P. de M. Rios. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // Journal of Geometry and Physics 71, 2013, pp. 58–72.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Зосимова Саввы Орестьевича

Заявление о новизне


Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Анализ типичных бифуркаций в параметрической модели Виландера океанических циркуляций» являются: Предложения 1,2,3, Следствия 3.1, 3.2, Теоремы 1,2 (с доказательствами)

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Консультация с научным руководителем, д.ф.-м.н. профессором Алексеем Александровичем Давыдовым, заведующим кафедрой Теории Динамических Систем Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова, заведующим кафедрой математики университета наук и технологий МИСИС и заведующим кафедрой Функционального Анализа и его приложений Владимирского Государственного Университета имени А.Г. и Н.Г. Столетовых
- Проведены серии докладов на КРОМШ-2022 (Крымская осенняя математическая школа) и МОСШ-2022 (Моделирование и оптимизация сложных систем) в Суздале.
- мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: Модель Виландера, Welander box model, Welander circulation model, в выдаче поисковиков встречались лишь работы, указанные в списке литературы ([2], [4]), а также различные источники лишь с описанием исследуемой модели. Все эти материалы не содержали материала, которые заявляются в качестве новых.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 31.05.2023. На Смотр представлен проект окончательного текста работы.

Подпись  Зосимов Савва Орестьевич

31.05.2023

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА) СПЕЦИАЛИСТА

**«Анализ типичных бифуркаций в параметрической
модели Виландера океанических циркуляций»**

Выполнил студент 603 группы
Зосимов Савва Орестьевич

подпись студента

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор А. А. Давыдов

подпись научного руководителя

Москва

2023

Оглавление

1.	Введение	3
1.1.	Постановка задачи	4
2.	Локализация задачи и основная идея анализа	5
3.	Неподвижные точки композиции инволюций	8
3.1.	Семейства пар инволюций с общей неподвижной точкой	8
4.	Рождение автоколебаний при маломерном параметре	13
4.1.	Одномерный параметр	13
4.2.	Двумерный параметр	14
5.	Колебания температуры и солености	17
5.1.	Редукция к анализу композиции инволюций прямой	17
6.	Формальные нормальные формы для одномерного параметра	21
7.	Заключение	25
	Список литературы	26

1. Введение

Существуют несколько математических аппаратов, которые используются для изучения и описания динамики океанических процессов: уравнение Навье-Стокса, использование так называемых обобщённых моделей циркуляций, исследование блочных моделей. Первые два способа являются вычислительно сложными; для уравнения Навье-Стокса неизвестен ответ на вопрос о существовании решения, а обобщённые модели, в силу специфики, могут скрывать некоторые причины возникновения изучаемых явлений. В блочных же моделях океан представляется в виде больших резервуаров с водой. Подобное упрощение позволяет записывать низкоразмерные системы дифференциальных уравнений, качественный анализ которых впоследствии может быть проведён с помощью аппарата теории динамических систем.

В данной работе предложен качественный анализ бифуркаций системы дифференциальных уравнений, которая моделирует процесс термохалинной циркуляции океана. Этот процесс считается потенциально неустойчивым и, как следствие, одной из самых острых причин резкого изменения климата в краткосрочном и долгосрочном периоде, а анализ возможных бифуркаций соответствующих моделей помогает понять механизмы потери стабильности. Так, например, в работе [1] была изучена седлоузловая бифуркация в модели Штоммеля.

Объектом исследования этой работы является модель Виландера - модификация модели Штоммеля, для которой численно были обнаружены самоподдерживающиеся осцилляции (см. [2]). А в [4] предоставлено доказательство существования предельного цикла этой модели для достаточно широкого класса так называемых функций переноса. Однако до сих пор не было известно ни возможное количество предельных циклов, ни механиз-

мы и условия их формирования. В этой работе будет предложен аппарат, позволяющий исследовать эти немаловажные аспекты.

1.1. Постановка задачи

В модели Виландера [2] однородный поверхностный слой воды постоянной толщины подвержен воздействию расположенной над ним атмосферы и лежащего под ним глубоководного слоя воды с постоянными значениями температуры и солёности T_A , S_A и T_0 , S_0 соответственно. Взаимодействие между слоями описывается законом Ньютона, при этом для взаимодействия с атмосферой коэффициенты обмена q_S и q_T для солёности и температуры постоянны и удовлетворяют соотношению $0 < q_S < q_T$. Для турбулентного обмена между слоями воды такой коэффициент является функцией, зависящей от разницы $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ плотностей поверхностного и глубоководного слоев. Эта функция называется функцией переноса и обозначается как q_0 . Функция переноса является неубывающей, имеющей близкие к нулю значения при значимых отрицательных значениях аргумента и быстро растущей вблизи нуля. Одним из модельных вариантов такой функции является, например, функция Хевисайда со скачком в нуле разницы плотностей.

После выбора температуры, солёности и плотности глубоководного слоя за начало отсчёта модель принимает следующий вид системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{T} = q_T(T_A - T) - q_0(\rho)T \\ \dot{S} = q_S(S_A - S) - q_0(\rho)S \end{cases} \quad (1)$$

на температуру и солёность поверхностного слоя воды. Зависимость плотности поверхностного слоя воды от его температуры и солёности положим

линейной

$$\rho = -\alpha T + \beta S \quad (2)$$

с $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ аналогично [2] и другим работам с подобными моделями (см. [13], [14]). Такая зависимость доставляет линейное приближение вблизи нуля любой дифференцируемой в нуле функции плотности $\rho = \rho(T, S)$ с отрицательной производной в нуле по температуре и положительной по солёности, что соотносится с действительностью. Следуя работе [4] предполагается, что в состоянии равновесия поверхностного слоя воды с атмосферой его температура и плотность больше соответственно температуры и плотности глубоководного слоя, то есть $T_A > 0$ и $-\alpha T + \beta S > 0$. Далее делается стандартный для моделей переход к безразмерным координатам: $x = T/T_A$ и $y = S/S_A$ с новым временем $\tau = q_T t$. Система (1) тогда примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x - q(z)x \\ \dot{y} = \delta(1 - y) - q(z)y \end{cases} \quad (3)$$

где $\delta = q_S/q_T$, $z = -x + ry$, $r = \beta S_A/(\alpha T_A)$ и $q = q_0(\alpha T_A z)/q_T$. Имеем $0 < \delta < 1$ в силу неравенства $0 < q_S < q_T$ и $1 < r$ в силу положительности величин α , T_A и $-\alpha T_A + \beta S_A$.

2. Локализация задачи и основная идея анализа

Нетрудно видеть, что для любой неотрицательной функции переноса единичный квадрат $K = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ является положительной инвариантной притягивающей областью для системы (3). В силу этого качественный анализ поведения траекторий этой системы достаточно провести в пределах этого квадрата. При этом анализе мы выберем более конкретный вид функции переноса q , а именно будем предполагать, что эта функция имеет нулевое значение при отрицательных значениях аргумента,

положительный скачок в нуле и является гладкой функцией на замыкании положительной полуоси.

При таком выборе функции переноса у системы (3) нет положений равновесия в области $z = -x + ry < 0$, где в силу $q(z) = 0$ векторное поле этой системы является линейным, особая точка которого устойчивый узел находится в точке с координатами $(1, 1)$ и лежит в области $z > 0$ в силу $r > 1$. Система уравнений в этом случае разделяется на два независимых уравнения, каждое из которых легко разрешается. И фазовые кривые в квадрате K задаются графиками функций

$$y = 1 + C(1 - x)^\delta \quad (4)$$

с отрицательными значениями константы C , $C \leq C_0 < 0$, и строго выпуклы вниз. Здесь C_0 - значение константы, при которой кривая (4) расположена в области $z \geq 0$ и имеет с прямой $z = 0$ единственную общую точку O с координатами $\left(\frac{1-r\delta}{1-\delta}, \frac{1-r\delta}{r(1-\delta)}\right)$, в которой она касается этой прямой с первым порядком касания. Координаты этой точки можно найти, например, из условия коллинеарности векторного поля и направляющего вектора прямой разрыва функции переноса $z = 0$ в этой точке. На прямой $z = 0$ вблизи точки O фазовые кривые (4) определяют гладкую инволюцию, которая для каждой из этих кривых переставляет точки её пересечения с этой прямой (Рис. 1, левый, на нём используемые части кривых (4) изображены сплошной линией, а кривая $z = 0$ штриховой).

Понятно, что квадрат этой инволюции даёт тождественное отображение. Сама точка O является неподвижной точкой этой инволюции. Эту инволюцию обозначим через I_- , где минус указывает на определение этой инволюции с помощью фазовых кривых системы, расположенных под прямой $z = 0$.

В силу специального вида векторного поля системы (3) на прямой

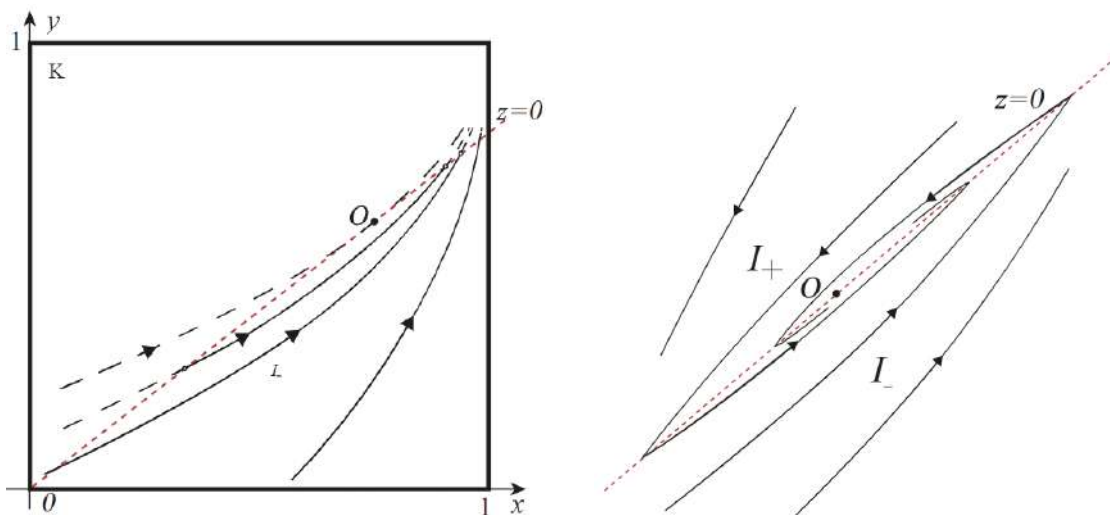


Рис. 1. Инволюции на прямой разрыва поля скоростей

$z = 0$ оно имеет направление этой прямой только в точке O при любой функции переноса. Действительно, вторая координата точки этой прямой, где это поле имеет такое направление, должна удовлетворять равенству

$$1 - ry - q(z)ry = r[\delta(1 - y) - q(z)y],$$

которое получается из условия коллинеарности векторного поля этой системы и направления этой прямой. Откуда находим

$$y = \frac{1 - r\delta}{r(1 - \delta)},$$

что совпадает с y -координатой точки O . Если при этом вблизи этой точки в области $z \geq 0$ фазовые кривые системы (3) оказываются строго вогнутыми как графики функций от x и имеют ненулевую кривизну, то по аналогии с I_- они определяют гладкую инволюцию I_+ на прямой $z = 0$ вблизи точки O . Например, при $r\delta < 1$ это верно при $q(z) = \sigma$, $z \geq 0$, где $\sigma > \delta(r - 1)/(1 - r\delta)$ [4].

В такой ситуации рождение автоколебаний в системе (3) при изменении её параметров (например, при изменении функции переноса) равносильно появлению вблизи точки O неподвижных точек у композиции

определенных выше инволюций I_- и I_+ , отличных от самой этой точки (Рис. 1, правый).

3. Неподвижные точки композиции инволюций

Сначала изучим неподвижные точки композиции инволюций. Все рассуждения проводятся локально вблизи нуля (точку O из предыдущих пунктов можно положить за начало системы координат) в прямом произведении вещественной прямой на вещественное арифметическое пространство параметров семейств пар инволюций, то есть по существу речь идёт о ростках семейств пар инволюций прямой с общей неподвижной точкой.

Известно, что типичная пара гладких инволюций прямой с общей неподвижной точкой гладкой заменой координат приводится к паре инволюций вблизи нуля, что переставляют на прямой точки с одинаковыми значениями функций x^2 и $x^2 + x^3$ [9], а в аналитическом случае возникают функциональные модули, которые описаны в [10], [11].

3.1. Семейства пар инволюций с общей неподвижной точкой

Рассмотрим конечно параметрическое гладкое семейство пар инволюций прямой $I = \{I_a, I_b\}$, где a и b - конечномерные вещественные параметры (одинаковые или различные, что несущественно) вещественной прямой (с координатой x), имеющих общую неподвижную точку в нуле. Про параметры a и b предполагается, что они изменяются вблизи нуля.

После замены координаты на прямой

$$\tilde{x} = x - I_a(x)$$

инволюции семейства I_a принимают канонический вид («тильду» опустим) $I : x \mapsto -x$ и, таким образом, переставляет точки прямой, в которых

функция $f(x) = x^2$ имеет одинаковые значения. Таким образом, можно ограничиться лишь изучением семейств пар инволюций, в которых первая инволюция фиксирована и имеет такой канонический вид.

После такой замены переменной вторая инволюция, конечно, будет зависеть от обоих параметров - и a , и b . Этот «суммарный» параметр второго семейства инволюций по-прежнему будет обозначаться через b .

Рассмотрим теперь семейство инволюций I_b . Как и для семейства I_a выше, для него существует гладкая функция вида $x^2g(x, b)$, $g(0, b) > 0$, на прямой, что инволюция I_b переставляет точки прямой с одинаковыми значениями этой функции. Представим эту функцию в виде суммы её четной и нечётной частей

$$x^2g(x, b) = x^2g_+(x^2, b) + x^3g_-(x^2, b)$$

с некоторыми гладкими функциями

$$g_+(x^2, b) = [g(x, b) + g(-x, b)]/2, \quad g_-(x^2, b) = [(g(x, b) - g(-x, b)]/2.$$

При этом $g_+(0, b) > 0$, ибо $g(0, b) > 0$.

Сделаем теперь нечётную замену переменной

$$\tilde{x} = x\sqrt{g_+(x^2, b)}.$$

В силу нечётности этой замены координат первая инволюция сохранит свой канонический вид, при этом вторая инволюция I_b теперь будет переставлять точки прямой с одинаковыми значениями гладкой функции («тильду» у новой координаты снова опустим, а за функцией сохраним обозначение g)

$$x^2 + x^3g(x^2, b)$$

с некоторой гладкой функцией g . Таким образом, достаточно изучить неподвижные точки композиции инволюций для семейства пар инволюций $\{I, I_b\}$,

переставляющих точки с одинаковыми значениями функций x^2 и $x^2 + x^3g(x^2, b)$.

Предложение 1. *Вблизи нуля точка x_0 вещественной прямой является неподвижной точкой композиции двух инволюций, переставляющих точки с одинаковыми значениями функций x^2 и $x^2 + x^3g(x^2, b)$, если и только если значения этих функций в этой точке одинаковы.*

Доказательство. Пусть x_0 - неподвижная точка композиции этих инволюций. Если $x_0 = 0$, то доказывать нечего и утверждение очевидно. Рассмотрим случай $x_0 \neq 0$. Первая инволюция имеет канонический вид $x \mapsto -x$, поэтому вторая инволюция переводит x_0 в $-x_0$, иначе x_0 не будет неподвижной точкой. Следовательно значения функции $x^2 + x^3g(x^2, b)$ в точках $\pm x_0$ одинаковы, то есть

$$x_0^2 + x_0^3g(x_0^2, b) = x_0^2 - x_0^3g(x_0^2, b).$$

Откуда $x_0^3g(x_0^2, b) = 0$, и в силу $x_0 \neq 0$ имеем $g(x_0^2, b) = 0$. Следовательно, значения функций x^2 и $x^2 + x^3g(x^2, b)$ в точке x_0 одинаковы и равны x_0^2 . В обратную сторону утверждение очевидно. \square

Следствие 3.1. *Если $g(0, 0) \neq 0$, то при достаточно малых значениях параметра b у композиции инволюций I и I_b нет неподвижных точек вблизи нуля, отличных от нуля.*

Действительно, в силу предложения 1 в неподвижной точке x имеем равенство

$$x^2 + x^3g(x^2, b) = x^2 \quad \text{или} \quad x^3g(x^2, b) = 0.$$

Но $g(0, 0) \neq 0$, поэтому при малых x и b имеем $g(x^2, b) \neq 0$ в силу непрерывности g . Следовательно, последнее равенство возможно лишь при $x = 0$, и справедливо утверждение следствия.

Таким образом, вблизи нуля у композиции изучаемых инволюций есть отличные от нуля неподвижные точки, если и только если $g(0, 0) = 0$. Рассмотрим этот случай. С этой целью вблизи нуля гладко продолжим функцию $g = g(\xi, b)$, определенную при положительных значениях первого аргумента, в область отрицательных значений этого аргумента, что возможно по лемме Бореля (см. [12], §2 гл. IV). Продолженную функцию будем обозначать также через g .

Пусть в нуле помимо обращения в ноль самой функции g также равны нулю и её первые $k - 1$ производная по первому аргументу, а k -ая производная отлична от нуля, $k \geq 1$. В силу подготовительной теоремы Мальгранжа (см. [12], §2 гл. IV) эта функция представляется вблизи нуля в виде

$$g(\xi, b) = G(\xi, b)[\xi^k + a_1(b)\xi^{k-1} + \dots + a_{k-1}(b)\xi + a_k(b)]$$

с некоторыми гладкими функциями G, a_1, \dots, a_k , $G(0, 0) \neq 0 = a_1(0) = a_2(0) = \dots = a_k(0)$. При этом ряды Тейлора этих функций в нуле определены однозначно. Из теоремы трансверсальности Тома (см., например, [12], §4 гл. IV) следует

Предложение 2. *Для типичного гладкого семейства функций g дифференциалы в нуле функций a_1, \dots, a_k линейно независимы, в частности, $k \leq \dim b$.*

Замечание 1. Свойство объекта называется *типичным* (или *свойством общего положения*), если оно имеет место для открытого всюду плотного множества объектов в их пространстве в подходящей топологии. В данном случае пространство объектов это пространство ростков в нуле гладких семейств g (поскольку все наши рассмотрения вблизи нуля и в пространстве параметров b и в пространстве x), а типичные это ростки семейств, для которых их струйные расширения трансверсальны в нуле подмногообразиям в пространстве струй этих ростков, которые задаются обращением

в ноль значений самого семейства и его первых производных по первому аргументу.

Это предложение, в свою очередь, влечет

Следствие 3.2. *В случае общего положения нули функции $g = g(x^2, b)$ вблизи нуля совпадают с нулями функции g_k ,*

$$g_k(x^2, b) = x^{2k} + b_1 x^{2k-2} + \dots + b_{k-1} x^2 + b_k \quad (5)$$

при подходящем выборе локальных гладких координат $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ в пространстве параметров с началом в нуле.

Предложение 1 и следствие 3.2 сводят анализ рождения неподвижных точек у композиции инволюций $I_b I$ вблизи нуля при малых значениях параметра $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ к исследованию появления ненулевых корней у многочлена (5) при таких значениях параметров и сформулировать основную теорему данной работы:

Теорема 1. *Для ростка в нуле типичного k -параметрического гладкого семейства функций переноса бифуркации рождения термохалинных колебаний вблизи точки O в точности описываются рождением нетривиальных неподвижных точек у композиции ростков в нуле двух гладких инволюций вещественной прямой I и I_b , переставляющих точки с одинаковыми значениями функций соответственно*

$$x^2 \quad \text{и} \quad x^2 + x^3[x^{2k} + b_1 x^{2k-2} + \dots + b_{k-1} x^2 + b_k], \quad (6)$$

где $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ - подходящие гладкие координаты вблизи нуля в пространстве параметра семейства функций переноса.

4. Рождение автоколебаний при маломерном параметре

В данном пункте рассматриваются примеры одномерного и двумерного параметра b , приводятся соответствующие бифуркационные диаграммы. Для параметров размерности выше 1 и 2 идейно мало что меняется; становится лишь сложнее изобразить перестройки в различных областях пространства параметра b .

4.1. Одномерный параметр

В простейшем случае, при $k = 1$ инволюции I и I_b переставляют точки, в которых функции соответственно $f_1(x, b) = x^2$ и $f_2(x, b) = x^2 + x^3[x^2 + b_1]$ имеют одинаковые значения. В этом случае графики этих функций вблизи нуля при $b_1 \geq 0$ не пересекаются вне нуля, у композиции инволюций $I_b I$ нет неподвижных точек за исключением нуля, а ноль является асимптотически устойчивой гиперболической точкой для этой композиции (Рис. 2, левый, иллюстрирует эту ситуацию с указанием аналогов лестниц Ламерея для неподвижных точек изучаемой композиции инволюций).

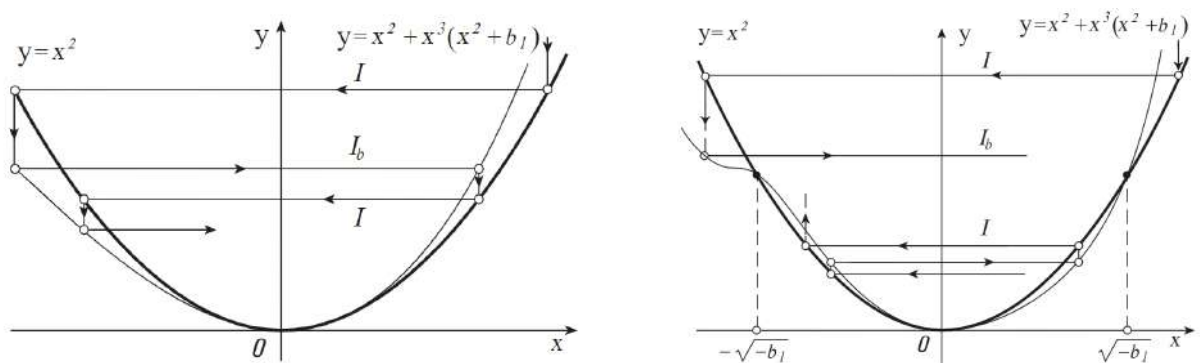


Рис. 2. Бифуркация Андронова-Хопфа

Если же $b_1 < 0$, то функции f_1 и f_2 вне нуля имеют одинаковые значения лишь в точках $x = \pm\sqrt{-b_1}$, а их графики в соответствующих точках

пересекаются и в системе наблюдается устойчивый предельный цикл (Рис. 2, правый, иллюстрирует эту ситуацию, также с указанием аналогов лестниц Ламерея).

Таким образом, при проходе параметра b_1 через ноль наблюдается классическая мягкая потеря устойчивости ([3] §33 гл. 6 или [8] гл. 5) типа Андронова-Хопфа неподвижной точки ноль композиции изучаемых инволюций.

4.2. Двумерный параметр

При $k = 2$ инволюции I и I_b переставляют точки, в которых функции соответственно $f_1(x, b) = x^2$ и $f_2(x, b) = x^2 + x^3[x^4 + b_1x^2 + b_2]$ имеют одинаковые значения. Вблизи нуля число отличных от нуля неподвижных точек изучаемой композиции инволюций при различных близких к нулю значениях параметров b_1, b_2 равно удвоенному числу положительных корней квадратного уравнения $\xi^2 + b_1\xi + b_2 = 0$. Это уравнение не имеет таких корней при отрицательном дискриминанте, то есть при $D := b_1^2 - 4b_2 < 0$, и при неотрицательном дискриминанте, когда $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$. У него два различных положительных корня при $D > 0, b_1 < 0, b_2 > 0$ и один такой корень при $b_2 < 0$. Рис. 3 иллюстрирует бифуркационную диаграмму для корней этого квадратного уравнения в пространстве параметров b_1, b_2 и соответствующее поведение изучаемой композиции инволюций с указанием аналогов лестниц Ламерея для неподвижных точек этой композиции.

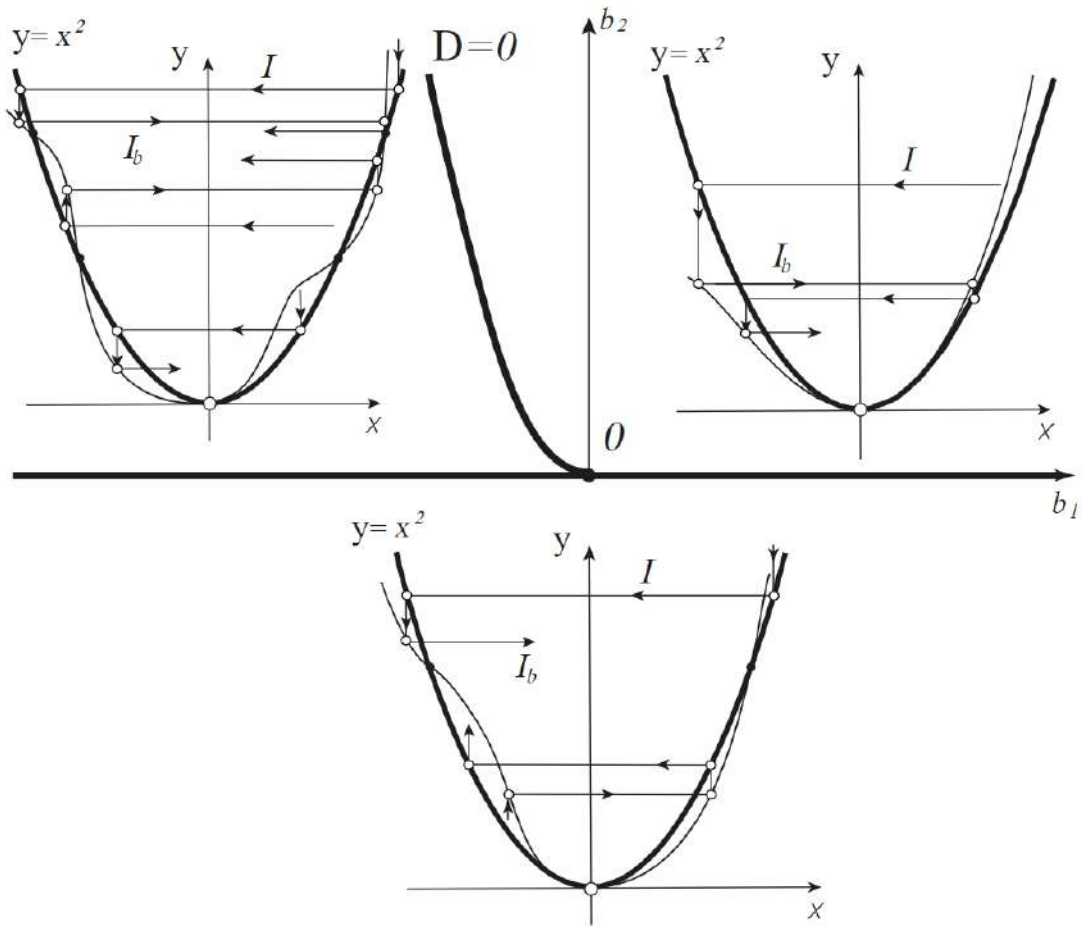
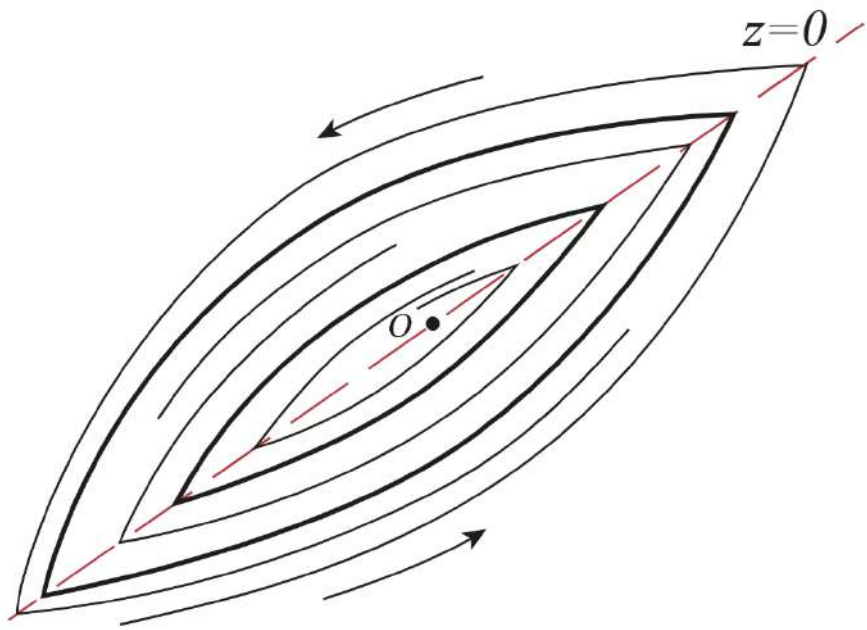
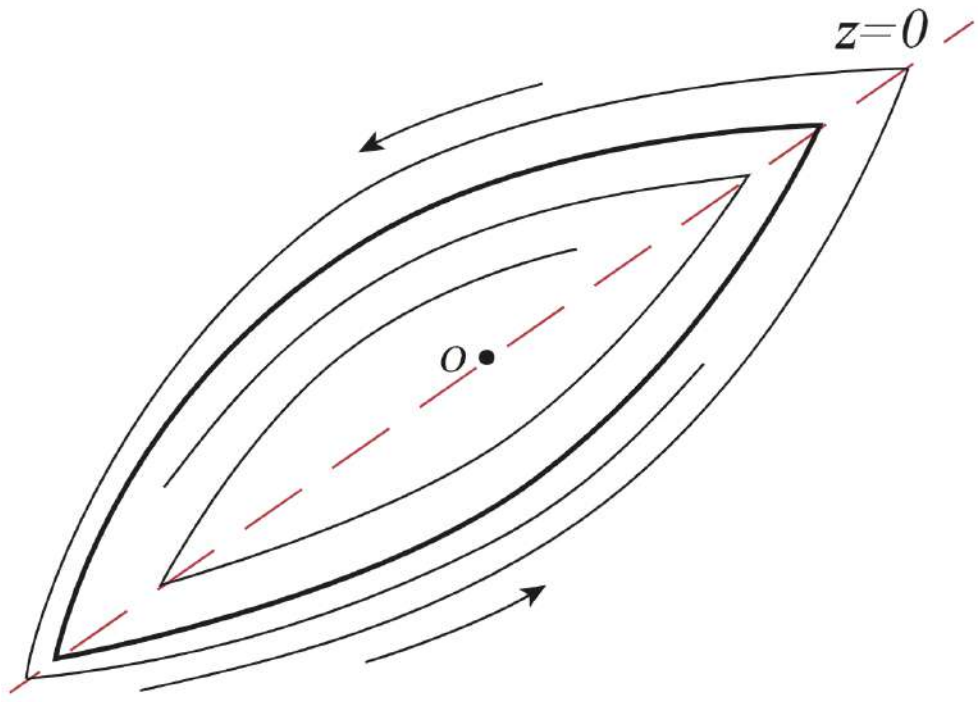


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма при двумерном параметре $b = (b_1, b_2)$

Как видно из рисунка, при выходе из нуля в область $b_2 < 0$ значений параметра происходит мягкая потеря устойчивости как и в предыдущем примере, а при выходе в область $b_1 < -2\sqrt{b_2}, 0 < b_2$, ноль сохраняет устойчивость и рождается сразу два гиперболических цикла, один неустойчивый, он ближайший к нулю, а другой устойчивый. Такое поведение фазовых кривых иллюстрируют соответственно первый и средний фазовые портреты вблизи точки O на Рис. 4 (направление движения по фазовым кривым указано стрелками), а третий - поведение фазовых кривых вблизи этой точки для правой верхней области бифуркационной диаграммы.



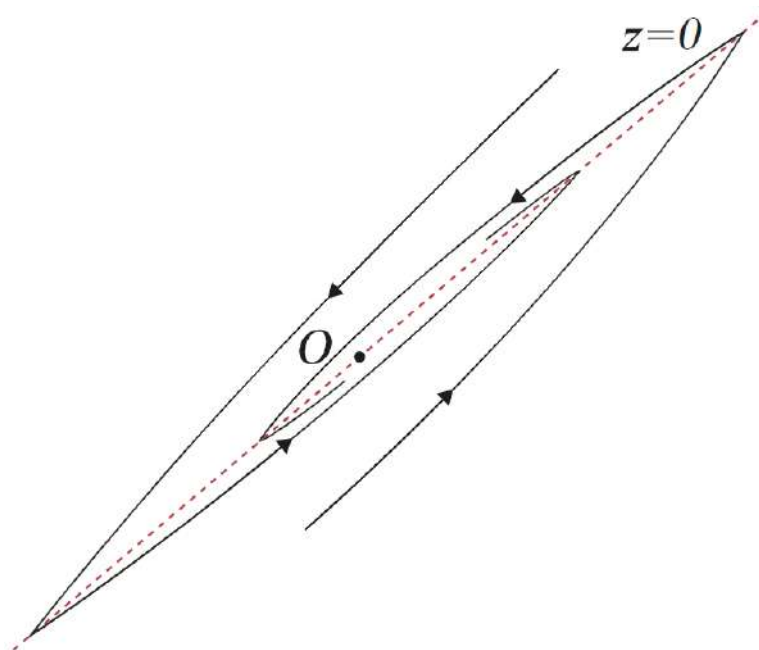


Рис. 4. Эскизы фазовых портретов для областей бифуркационной диаграммы

5. Колебания температуры и солености

Здесь мы доказываем основной результат работы и объясняем, почему результаты предыдущего параграфа доставляют и анализ появления колебаний температуры и солености в изучаемой модели (3).

5.1. Редукция к анализу композиции инволюций прямой

В предыдущих пунктах уже было объяснено появление пары инволюций I_+ и I_- прямой $z = 0$ с общей неподвижной точкой, которые определяются фазовыми кривыми системы (3). Чтобы обосновать применение полученных в предыдущем параграфе результатов к анализу появления колебаний температуры и солености в верхнем слое воды достаточно показать, что фазовая кривая этой системы в области $z \geq 0$, проходящая через точку O (прямой $z = 0$) вблизи этой точки может быть задана графиком

функции вида

$$y = x/r + (x - x(0))^2 f(x),$$

с гладкой функцией f , имеющей в точке $x(O)$ произвольные производные нечетной степени при подходящем выборе функции переноса.

Напомним, что у нас функция переноса, вообще говоря, разрывна на прямой $z = 0$, поэтому следует уточнить, что речь здесь идёт о фазовой кривой для функции переноса из области $z \geq 0$. При построении этой кривой надо гладко продолжить эту функцию в область отрицательных значений её аргумента. Такое продолжение существует по лемме Бореля [12]. Это продолжение неединственно, оно определено с точностью до гладкой функции, имеющей нулевой ряд Тейлора в нуле, поэтому такая неединственность не влияет на ряд Тейлора функции f в точке $x(O)$.

С этой целью введем новую переменную $z = -x + ry$ вместо y в изучаемой системе (3) и, исключив время, перепишем эту систему в виде следующего уравнения вблизи точки O

$$z' = -1 + \frac{r\delta - (\delta + q(z))(z + x)}{1 - x - q(z)x} \quad (7)$$

где $z' = dz/dx$. Теперь вторая координата точки O нулевая, а её первая осталась прежней $x_0 = \frac{1-r\delta}{1-\delta}$. Кроме того, учитывая, что в точке O изучаемая фазовая кривая касается прямой $z = 0$ имеем $z'(O) = 0$.

Предложение 3. *При*

$$r\delta \neq 0 \quad \text{и} \quad q(0) \neq \frac{\delta(r-1)}{1-r\delta}$$

уравнение (7) определяет диффеоморфизм пространства производных $q', q'', \dots, q^{(k)}$, $k \geq 1$, в нуле в пространство нечётных производных $z''', \dots, z^{(2k+1)}$, $k \geq 1$, в x_0 решения задачи Коши $z = z(x)$, $z(x_0) = 0$, для этого уравнения.

Теорема 1 напрямую вытекает из этого предложения. Докажем само предложение.

Доказательство. Достаточно взять функцию q в виде $q(z) = q(0) + Q(z)$, а правую часть уравнения (7) как функцию от x, z и Q представить в виде

$$-1 + \frac{r\delta - (\delta + q(z))(z + x)}{1 - x - q(z)x} = A(x, z) + QB(x, z) + Q^2C(x, z, Q), \quad (8)$$

используя, например, лемму Адамара (см. [6], §12 гл. 2). Понятно, что

$$A(x, z) = -1 + \frac{r\delta - (\delta + q(0))(z + x)}{1 - x - q(0)x},$$

а B и C - некоторые гладкие функции. Значение $B(x_0, 0)$ легко вычисляется

$$B(x_0, 0) = \frac{(r\delta)^2}{\delta(r - 1) + q(0)(r\delta - 1)}.$$

Это значение отлично от нуля в силу условий предложения, что нетрудно проверить.

Теперь при вычислении второй и каждой из последующих производных решения уравнения (7) в точке x_0 вклад первого слагаемого A будет определяться уже вычисленными производными. Это справедливо и для вклада третьего слагаемого, поскольку $Q(0) = 0$, а стоит Q в этом слагаемом в квадрате.

Вклад же второго слагаемого нетрудно вычислить. Учитывая, что $B(0, 0) \neq 0 = Q(0) = z'(0)$ этот вклад будет нулевым для второй производной, равен $B(x_0, 0)Q'(0)z''(x_0)$ для третьей, а для каждой последующей четной ($2k$ -той) производной будет вычисляться через уже найденные производные решения, производные функции B и производные функции Q до порядка $k - 1$ включительно, а в выражении $2k + 1$ производных будет присутствовать слагаемое

$$B(x_0, 0)Q^{(k)}(0)(z''(x_0))^k.$$

В этом слагаемом k -ая производная функции Q в нуле появляется впервые с ненулевым коэффициентом

$$B(x_0, 0)(z''(x_0))^k.$$

Следовательно, любые значения нечётных производных решения $z = z(x)$, $z(x_0) = 0$, обеспечиваются подходящим выбором производных функции переноса в нуле, при этом для конечных производных матрица Якоби соответствующего отображения является треугольной с ненулевыми элементами на диагонали. Таким образом, полученное отображение является диффеоморфизмом. \square

Отсюда и предложения 3 получаем, что типичное семейства функций переноса доставляют семейства функции $f(x, 0)$ с типичными нечетными производными, начиная с третьей. Но эта функция и определяет вторую инволюцию вблизи точки x_0 на прямой $z = 0$, инволюцию, которая переставляет точки этой прямой с одинаковыми значениями этой функции.

Следовательно, для типичных семейств функций переноса появление автоколебаний в изучаемой модели (1) динамики температуры и солености в верхнем слое воды в точности описывается рождением неподвижных точек у композиции типичных семейств пар инволюций прямой с общей неподвижной точкой. Таким образом, результаты, полученные выше по изучению рождения неподвижных точек у композиций семейств пар инволюций прямой с общей неподвижной точкой применимы к анализу возникновения автоколебаний температуры и солености в модели (1).

6. Формальные нормальные формы для одномерного параметра

Здесь будут предложены лево-правые формальные замены координат, которые приводят интересующие нас типичные семейства пар инволюций I и I_b к семействам инволюций, переставляющим точки с одинаковым значением функций из Теоремы 1.

Для первого вырождения коразмерности 1 инволюции I и I_b нужно привести к формам переставляющие точки с одинаковыми значениями функций x^2 и $x^2 + x^3(x^2 + b_1)$ соответственно. При этом для сохранения нормальной формы первой инволюции замены координат должны быть нечётными.

Функцию g можно представить в виде $g(x^2, b) = a_1(b) + a_2(b)x^2 + \dots$, где a_1 и a_2 - гладкие функции $a_1(0) = 0$, $a_2(0) \neq 0$. Растяжением x и, возможно, сменой знака вместе с растяжением оси значений функции можно добиться, чтобы $a_2(b) = 1$. При этом первая инволюция сохранит нормальную форму, а для второй соответствующая функция примет форму $x^2 + a_1(b)x^3 + x^5 + \dots$. Тогда по теореме трансверсальности ([12] §3 гл. IV) для вырождения коразмерности 1 имеем $da_1(0) \neq 0$. Но тогда в этом случае положим $b_1 = a_1(b)$. Докажем следующую теорему

Теорема 2. *Для типичного семейства пар инволюций, переставляющих точки с одинаковыми значениями функций x^2 и $x^2 + a_1(b)x^3 + x^5 + \dots$, существуют лево-правые формальные замены координат, приводящие их к семейству пар инволюций, переставляющих точки с одинаковыми значениями функций x^2 и $x^2 + x^3(b_1 + x^2)$*

Доказательство. Сначала докажем теорему для специального случая - $b_1 = 0$. Первым делом будем убивать член степени 7. Будем искать замену

в прообразе вида $x = \tilde{x}(1 + \phi(\tilde{x}^2))$, где $\phi(0) = 0$ и $\phi(x^2) = c_2x^2 + c_4x^4 + \dots$ и в образе вида $f - Af^2 - Bf^3$, получим следующие уравнения на интересующие нас коэффициенты при соответствующих степенях x :

$$\deg f = 4 : 2c_2 - A = 0$$

$$\deg f = 6 : 2c_4 + c_2^2 - 4Ac_2 - B = 0$$

$$\deg f = 7 : 5c_2 + 1 - 2A = 0$$

$$\deg f = 8 : 2c_6 + 2c_2c_4 - 4Ac_4 - 6Ac_2^2 - 6Bc_2 = 0$$

Откуда $c_2 = -1$, $A = -2$, $c_4 = 7/2$, $c_6 = -33/2$, $B = 0$. После замены получим:

$$x^2 + x^5 + ax^9 + dx^{10} + h_{11}, \quad \text{где } \deg h_{11} \geq 11,$$

Теперь доказательство будем проводить методом математической индукции по n , где $k = 2n + 9$ - показатель степени с неотрицательным целым n , которую необходимо убить вместе со степенью $k + 1$.

База индукции: $n = 0$, $k = 9$

Проведём поиск замен, чтобы убить члены с 9-й и 10-й степенями. Нетрудно убедиться, что замены вида $x = \tilde{x}(1 + c_4\tilde{x}^4)$ в прообразе и замена вида $f - Af^3 - Bf^5$ в образе приводят к следующим уравнениям на коэффициенты при степенях, которые необходимо обнулить

$$\deg f = 9 : a + 5c_4 - 3A = 0$$

$$\deg f = 6 : 2c_4 - A = 0$$

$$\deg f = 10 : d + c_4^2 - B - 6Ac_4 - 6Ac_4 = 0$$

Откуда можно найти c_4 , A и B .

Шаг индукции: для $n = m$ существуют такие замены, докажем их существование для $n = m + 1$.

Пусть $k = 2(m + 1) + 9$. Будем искать замены, которые уничтожат степени k и $k + 1$ в $x^2 + x^5 + ax^k + dx^{k+1} + \dots$. Необходимыми заменами

являются $x = \tilde{x}(1 + c\tilde{x}^{(k-5)})$ и $f - Af^{(k-3)/2} - Bf^{(k+1)/2}$, которые приводят к уравнениям

$$\deg f = (k-3) : 2c - A = 0$$

$$\deg f = k : a + 5c - C_{(k-3)/2}^1 A = 0$$

$$\deg f = (k+1) : d - B = 0$$

Откуда мы сможем найти c , A и B . Таким образом, случай $b_1 = 0$ доказан.

Докажем для случая общего положения параметра ($b_1 \neq 0$). В этом случае вторая инволюция I_b переставляет точки, в которых функция $x^2 + x^3(b_1 + x^2) + f_7(b_1)x^7 + \dots$ имеет одинаковые значения. Сначала покажем как убить член степени 7. После замены $x = \tilde{x}(1 + c_2\tilde{x}^2 + c_4\tilde{x}^4 + c_6\tilde{x}^6)$ в прообразе и $f - Af^2 - Bf^3$ в образе, получим следующие уравнения на коэффициенты при степенях, которые необходимо убить:

$$\deg f = 4 : 2c_2 - A = 0$$

$$\deg f = 6 : c_2^2 + 2c_4 - b_1^2 A - 4Ac_2 - B = 0$$

$$\deg f = 7 : 3b_1c_2^2 + f_7(b_1) + 5c_2 + 3b_1c_4 - 10b_1Ac_2 - 2A - 3b_1B = 0$$

$$\deg f = 8 : 2c_4 + 2c_2c_4 - 6Ac_2^2 - 6b_1^2Ac_2 - 4Ac_4 - 6Bc_2 - 3b_1^2B = 0$$

После выражения $c_2 = A/2$ из уравнения на 4-ю степень и подстановки в уравнение 7-й степени, получим квадратное уравнение на A :

$$-\frac{17}{4}b_1A^2 - \frac{1}{2}A + f_7(b_1) + 3b_1c_4 - 3b_1B = 0$$

Положим $c_4 = B$, после чего можно разрешить квадратное уравнение в силу малости параметра b_1 по теореме о неявной функции (поскольку при малых значениях параметра b_1 производная левой части по A близка к $-1/2$ и ненулевая). Отсюда же найдём и c_2 . После подстановки найденного A в уравнение 6-й степени, найдём значение для $B = c_4$. Подставив все найденные неизвестные к этому моменту в уравнение на 8-ю степень, найдём

необходимое значение для c_6 . Таким образом мы нашли все неизвестные параметры наших замен, которые приводят I_b к виду:

$$x^2 + x^3(b_1 + \varepsilon(b_1)x^2) + a(b_1)x^9 + d(b_1)x^{10} + \dots$$

Теперь мы можем завершить эту часть доказательства методом математической индукции, сохраняя обозначения как в простейшем случае, доказательство проводится аналогичным образом.

База индукции: $n = 0, k = 9$.

После замены в прообразе вида $x = \tilde{x}(1 + c\tilde{x}^6)$ и в образе вида $f - Af^4 - Bf^5$, получим следующие уравнения:

$$\deg f = 8 : 2c - A = 0$$

$$\deg f = 9 : 3b_1c - 4b_1A + a = 0$$

$$\deg f = 10 : d - 6b_1^2A - B = 0$$

Откуда мы сможем найти c, A и B .

Шаг индукции: для $n = m$ существуют такие замены, докажем их существование для $n = m + 1$.

Пусть $k = 2(m + 1) + 9$. Имеем к этому моменту инволюцию I_b , записанную в виде $x^2 + x^3(b_1 + \varepsilon x^2) + a(b_1)x^k + d(b_1)x^{k+1} + \dots$. Делаем следующие замены: $x = \tilde{x}(1 + c\tilde{x}^{k-3})$ и $f - Af^{(k-1)/2} - Bf^{(k+1)/2}$ в прообразе и образе соответственно. Получатся такие уравнения:

$$\deg f = (k - 1) : 2c - B = 0$$

$$\deg f = k : 3b_1c + a - C_{(k-1)/2}^1 B = 0$$

$$\deg f = (k + 1) : d - b_1^2 C_{(k-1)/2}^2 B - C = 0$$

Откуда находятся все неизвестные параметры замен. Для этого случая мы тоже доказали возможность формального приведения инволюции I_b к виду,

переставляемому точки с одинаковыми значениями функции

$$x^2 + x^3(b_1 + \varepsilon(b_1)x^2), \quad \text{где } \varepsilon(b_1) = 1 + 3c_2b_1 \text{ (} c_2 \text{ из первой замены).}$$

Таким образом, теорема полностью доказана. □

7. Заключение

Таким образом, в работе показано, что появление автоколебаний для типичной функции переноса из рассматриваемого класса в изучаемой модели (1) динамики температуры и солености поверхностного слоя океана в точности описывается рождением неподвижных точек у композиции типичных семейств пар инволюций с общей неподвижной точкой. Помимо прочего, был продемонстрирован принцип построения соответствующих бифуркационных диаграмм на примерах маломерного параметра, благодаря которым можно изучать и описывать причины качественных перестроек термохалинной циркуляции. Также доказана Теорема 2 о существовании формальных замен координат (для случая одномерного параметра), которые позволяют привести инволюции к нужным нормальным формам.

Несмотря на то, что в работе было предоставлено доказательство существования нужных замен координат лишь для одномерного параметра, для всех остальных случаев ответ на вопрос об их существовании, кажется, является положительным. Остаётся открытым вопрос о гладкой приводимости инволюций к полученным формам.

Список литературы

1. Stommel H. Thermohaline convection with two stable regimes of flow // *Tellus*. 1961. V. 13. P. 224–230.
2. Welander P.A., A simple heat–salt oscillator // *Dyn. Atmos. and Oceans*. 1982. V. 6, N 4. P. 233–242.
3. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 4-е изд. М.:МЦНМО, 2012. 384 с.: ил.
4. Давыдов А.А., Мельников Н.Б., Мягкая потеря устойчивости в блочной модели океанической циркуляции с турбулентными потоками// *Анализ и особенности. Часть 2, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Труды МИАН, 259, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2007, 10–19; Davydov A.A., Melnikov N.B., Soft Loss of Stability in an Ocean Circulation Box Model with Turbulent Fluxes, Proc. Steklov Inst. Math., 259 (2007), 6–15*
5. Давыдов А.А., Особенности полей предельных направлений двумерных управляемых систем, *Матем. сб.*, 136(178):4(8) (1988), 478–499; А. А. Davydov, “Singularities of fields of limiting directions of two-dimensional control systems”, *Math. USSR-Sb.*, 64:2 (1989), 471–493
6. Арнольд В.И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3-е изд., переработанное и дополненное, "Наука М., 1984 , 272 с.
7. Филиппов А.Ф., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, *Матем. сб.*, 1960, том 93, номер 1, 99–128
8. Арнольд В.И. Теория Катастроф. - 3-е изд., доп. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. - С. 128. -ISBN 5-02-014271-9
9. Dufour J.P., Stabilité simultane de deux fonctions differentielles//*Ann. Inst. Fourier*. 1979. V. 29. No. 1. P. 262282.
10. Ecalle J., Sur les fonctions resurgentes. Orsay, Publ. Math. dOrsay, 1981.

11. Воронин С.М., Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения// Функцион. анализ. 1982. Т. 16. Вып. 2. С. 21—29
12. Голубицкий М., Гиемин В., Устойчивые отображения и их особенности. - М.: Мир, 1977. 294с.
13. Keane A., Pohl A., Dijkstra H.A., Ridgwell A., A simple mechanism for stable oscillations in an intermediate complexity Earth System Model// 2022, <https://arxiv.org/pdf/2201.07883.pdf>
14. Titz S., Kuhlbrodt T., Feudel U., Homoclinic bifurcation in an ocean circulation box model// Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2002. V. 12, N 4. P. 869875.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от Казакова Антона Александровича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием **Вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана** являются: Теорема 2.17 и ее доказательство, результат Раздела 2.5, Теорема 2.50 (совместный результат с В.Г.Горбуновым и Д.В.Талалаевым), Теорема 3.2 и ее доказательство, доказательство Теоремы 3.4, доказательство Теоремы 3.7, доказательство Теоремы 5.2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- 1.) Изучение литературы, представленной в списке литературы, найденной в Google scholar и arXiv.org по ключевым словам electrical networks, ncr-partition, dimer models и т.д..
- 2.) Результаты Теоремы 2.17 и Раздела 2.5 есть ответ на вопрос Томаса Лама о роли матриц отклика электрических сетей для вложения электрических сетей, построенного им в работе T. Lam, Electroid varieties and a compactification of the space of electrical networks, *Advances in Mathematics* Volume 338, 7 November 2018, Pages 549-600. Все результаты за исключением двух последних технических глав представленной работы вошли в совместный препринт Bychkov V. et al. Electrical networks, Lagrangian Grassmannians and symplectic groups //arXiv preprint arXiv:2109.13952. – 2021.
- 3.) Проведена переписка с Томасом Ламом – вышеуказанный препринт был отправлен Томасу Ламу, который сообщил, что часть результатов известна ему по материалам ещё неопубликованных на момент написания работы статьях Шпеера, Лама и других. Таким образом результаты работы были получены независимо и являются новыми. В дальнейшем Томас Лам и другие математики, занимающиеся данной темой, ссылались на вышеуказанный препринт.
- 4.) Материалы вышеуказанного препринта стали основой для принятой в печать статьи в MMJ.
- 5.) Результаты работы докладывались на различных конференциях: Дни геометрии в Новосибирске — 2022, Satellite International Conference on NONLINEAR DYNAMICS & INTEGRABILITY and Scientific School "NONLINEAR DAYS" — 2022, Конференция международных математических центров мирового уровня – 2021 и других.
- 6.) Результат Теоремы 3.2 является ответом на вопрос В.Г.Горбуновым и Д.В.Талалаевым о связи, построенной ими вершинной модели V. Gorbounov, D. Talalaev, Electrical varieties as vertex integrable statistical models, *J. Phys. A: Math. Theor.* 53 454001, (2020)., с вложением Томаса Лама. И поэтому является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 24.06.21. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись



Казаков Антон Александрович
31 мая, город Королев, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА высшей геометрии и топологии

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

**Вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева
грассманиана**

Выполнил студент
603 группа
Козаков Антон Александрович

подпись студента

Научный руководитель:
доцент Талалаев Дмитрий Валерьевич

подпись научного руководителя

Москва
2021

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	1
1.1. Результаты	2
2. Матрица отклика и вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана	2
2.1. Необходимые определения	2
2.2. Новая параметризация	6
2.3. Ациклический случай	9
2.4. Общий случай	13
2.5. Связь с конструкцией Лама	16
2.6. Вложение в положительную часть лагранжева грассманиана	16
3. Следствия и приложения	17
3.1. Связь с вершинными моделями	17
3.2. Приклеивание моста и спайка и изменение матрицы отклика	18
3.3. Теорема Кениона-Вильсона	20
4. Элементы матрицы отклика	21
5. Альтернатива соотношениям Плюккера и теорема Постникова	23
5.1. Теорема Постникова как альтернатива соотношениям Плюккера	23
6. Заключение	24
Список литературы	24

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория электрических сетей в настоящее время является хорошо исследованной областью математики и берет свое начало с работ Ома и Кирхгофа. Современная формализация этой теории, чья немалая значимость обусловлена, например, практическими задачами электронной томографии и приложениями в теории дифференциальных уравнений [2], была получена Кертисом и др. в фундаментальной работе [2]. Сформулируем несколько базовых определений и понятий, которые мы будем использовать на протяжении всей работы:

Определение 1.1. (Кертис и др. [2]) Электрической сетью e (также мы будем использовать обозначение $e(G)$) на графе G мы будем называть планарный, вложенный в диск, реберно-взвешенный граф G , отвечающий следующим условиям:

- все вершины графа разделены на внутренние и внешние (граничные);
- граничные вершины лежат на окружности;
- веса ребер положительны и означают проводимости ребер.

К каждой внешней вершине прикладывается некоторое электрическое напряжение, которые индуцируют напряжения на внутренних вершинах и токи, проходящие по ребрам электрической сети. Эти токи и напряжения определяются по классическим законам Кирхгофа (смотри [2]).

Теорема 1.2. (Кертис и др. [2]) Рассмотрим электрическую сеть и приложим к ее внешним вершинам набор напряжений U . Этот набор напряжений индуцирует некоторый набор токов I , которые протекают через внешние вершины. Тогда существует симметричная матрица, сумма строк и столбцов которой равна 0, X (называемого матрицей отклика), который связывает эти два набора по формуле:

$$XU = I.$$

В последние десятилетия теория электрических сетей стала источником новых и неожиданных комбинаторных и топологических результатов и задач. Например, из классической теоремы Кирхгофа Вагнером были получены ее обобщения, связывающие миноры классической матрицы Кирхгофа с производящими функциями роц [17]. Последние стали предметом исследования Кениона и Вильсона [6], которое позволило получить значимые качественные результаты и точные формулы в теории моделей двойных димеров, чья важность обусловлена их связью с моделями перколяций и абелевыми моделями лавин песка.

Фундаментальным прорывом в теории электрических сетей можно назвать работу Лама [10], который связал электрические сети с димерными моделями, теория которых восходит к пионерской работе Постникова [13]. Этот результат позволил не только получить качественно новые результаты, но и глубже понять природу электрических сетей, включив их в большое семейство моделей статистической физики. Другой чрезвычайно важный результат, также связывающий электрические сети с миром статистической физики, был получен в работе Горбунова и Талалаева [5], которые построили вершинную модель для электрических сетей на специальном, но в некотором смысле наибольшем семействе электрических сетей.

Учитывая сказанное выше, были поставлены следующие задачи, решения которых даны в данной работе:

- Связать вершинное представление электрических сетей Горбунова-Талалаева с димерным вложением Лама;
- понять роль матриц отклика электрических сетей с димерным вложением Лама (этот вопрос был поставлен Ламом);
- получить вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана (этот вопрос был поставлен Ламом и важен тем, что позволяет лучше понять связи между моделями электрических сетей и модели Изинга [3]);
- Получить эффективное доказательство теоремы Кениона-Вильсона [6], используя вложение электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана.

1.1. Результаты.

- Близкий результат к теореме 2.17 был получен независимо в еще неопубликованной работе Давида Шпеера (из личного сообщения Лама);
- возможность вложения электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана была в первые высказана Ламом, им было получено независимое доказательство в еще неопубликованной работе (из личного сообщения Лама);
- теорема 2.50 была получена совместно с В.Г.Горбуновым и Д.В.Талалаевым.

2. МАТРИЦА ОТКЛИКА И ВЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ В ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ ЧАСТЬ ЛАГРАНЖЕВА ГРАССМАНИАНА

Цель данного раздела построить вложение в положительную часть лагранжева грассманиана моделей электрических сетей с помощью их матриц отклика. Для этой цели мы будем использовать технику димерных моделей Лама и их связь с матрицами граничных измерений по Постникову.

2.1. Необходимые определения. В начале дадим определение димерных моделей по Ламу:

Определение 2.1. (Лам [9]) Мы будем называть димерной моделью $N(G, W)$ реберно-взвешенный, вложенный в диск граф G , удовлетворяющий следующим условиям:

- для любого ребра $e \in E(G)$ его вес $w_e \in W$ положительный;
- вершины лежащие на границе диска (мы будем называть их граничными) занумерованы по часовой стрелке;
- валентность каждой граничной вершины равна одному и вес ребер, инцидентных им, равен единице;
- все вершины $v \in V(G)$ покрашены либо в черный цвет, либо в белый, причем каждое ребро соединяет вершины разного цвета.

Определение 2.2. Рассмотрим димерную модель $N(G, W)$. Мы будем называть подмножество Π ребер графа G димером (димерной конфигурацией), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- различные ребра из Π не имеют общих точек;
- все внутренние вершины графа G покрыты ребрами из Π ;
- граничные вершины могут быть как покрыты, так и не быть покрыты.

С каждой моделью димеров $N(G, W)$ можно связать набор частичных статистических сумм, определяемых по следующему правилу:

Определение 2.3. (Лам [9]) Рассмотрим димерную модель $N(G, W)$ с n граничными вершинами, тогда для каждого подмножества I (мощности $|I| = k(G)$) множества граничных вершин, можно определить частичную статсумму Δ_I^d по формуле:

$$\Delta_I^d = \sum_{\Pi|I} wt(\Pi),$$

где суммирование идет по всем весам таких димеров, что для каждого из них черные граничные вершины из I являются покрытыми, а белые граничные вершины из I не являются покрытыми; и $k(G)$ задается формулой:

$$k(G) = \frac{1}{2} \left(n + \sum_{v \in black} (deg(v) - 2) + \sum_{v \in white} (2 - deg(v)) \right).$$

Более того, для каждой димерной модели $N(G, W)$ набор частичных статсумм Δ_I^d определяют положительную точку грассманиана:

Теорема 2.4. (Лам [10]) Рассмотрим димерную модель $N(G, W)$ с n граничными вершинами, тогда множество частичных статсумм Δ_I^d определяет координаты Плюккера положительной (то есть все координаты Плюккера неотрицательны) точки грассманиана $Gr(k(G), n)$.

Таким образом, для любой димерной модели $N(G, W)$ мы можем построить ее вложение в положительную часть грассманиана. Нам также понадобится другой способ вводить координаты Плюккера для димерных моделей. Для этого мы дадим определение моделей потоков:

Определение 2.5. Рассмотрим димерную модель $N(G, W)$ с n граничными вершинами. Назовем реберную ориентацию O графа G совершенной, если она удовлетворяет следующим условиям:

- из любой черной вершины, которая не является граничной, исходит только одно ребро;

- в любую белую вершину, которая не является граничной, входит только одно ребро.

Набор $N(G, W, O)$ будем называть моделью потоков.

Замечание 2.6. Для каждой димерной модели $N(G, W)$ существует естественная биекция между множеством совершенных ориентаций и множеством димеров. Рассмотрим какой-нибудь димер Π , построим по нему совершенную ориентацию $O(\Pi)$ следующим образом:

- если $e \notin \Pi$, установим ориентацию e от белой вершине к черной;
- если $e \in \Pi$, установим ориентацию e от черной вершине к белой.

Легко понять, что построенное отображение является биекцией.

Теперь дадим определение потока:

Определение 2.7. Рассмотрим модель потоков $N(G, W, O)$, будем называть потоком F подмножество ребер графа G такое, что для каждой вершины $v \in V(G)$, не являющейся граничной, количество входящих в нее ребер равно количеству исходящих.

Весом потока $wt(F)$ будем называть произведение всех его ребер.

Предложение 2.8. *Любой поток является объединением путей, соединяющих граничные вершины, и циклов.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения. \square

Теперь мы можем ввести множество частичных статсумм для моделей потоков:

Определение 2.9. Рассмотрим модель потоков $N(G, W, O)$, граничную вершину графа G будем называть истоком (стоком), если инцидентное ей ребро выходит из нее (входит в нее).

Определение 2.10. (Лам-Постников [9], [13]) Рассмотрим модель потоков $N(G, W, O)$ с n граничными вершинами, тогда для каждого подмножества I ($|I| = k(G)$) множества граничных вершин, можно определить частичную статсумму Δ_I^f по формуле:

$$\Delta_I^f = \sum_{F|I} wt(F),$$

где суммирование идет по весам всех таких потоков, что для каждого из них истоки, принадлежащие I , не покрыты (то есть инцидентное истоку ребро не входит в поток F), а стоки покрыты, принадлежащие I , покрыты (то есть инцидентное стоку ребро входит в поток F).

Аналогично случаю для моделей димеров, для каждой модели потоков $N(G, W, O)$ набор частичных статсумм Δ_I^f определяют положительную точку грассманиана:

Теорема 2.11. (Лам-Постников [9], [13]) *Рассмотрим димерную модель $N(G, W, O)$ с n граничными вершинами, тогда множество частичных статсумм Δ_I^f определяет координаты Плюккера положительной точки грассманиана $Gr(k(G), n)$.*

Таким образом мы получаем вложение в положительную часть грассманиана и для моделей потоков. Более того, теоремы 2.11 и 2.4 задают одно и тоже вложение:

Теорема 2.12. (Лам [9]) *Рассмотрим димерную модель $N(G, W)$ и модель потоков $N(G, W', O)$. Причем наборы весов W' и W отличаются друг от друга следующим образом:*

- для любого ориентированного ребра $e \in G$ модели $N(G, W', O)$, ведущего от белой к черной вершине, его вес совпадает с весом того же ребра модели $N(G, W)$;
- для любого ориентированного ребра $e \in G$ модели $N(G, W', O)$, ведущего от черной к белой вершине, его вес равен обратному весу того же ребра модели $N(G, W)$.

Тогда для координат Плюккера этих двух моделей верна следующая формула:

$$\Delta_I^f = \frac{\Delta_I^d}{wt(\Pi_0)},$$

где $wt(\Pi_0)$ вес димера, который отвечает совершенной ориентации O (смотри замечание 2.6).

С моделями потоков и их вложением в положительную часть грассманиана естественным образом связана расширенная матрица граничных измерений Постникова, дадим необходимые определения:

Определение 2.13. (Постников [13]) Мы будем называть моделью Постникова $P(G, W, O)$ реберно-взвешенный, ориентированный, вложенный в диск граф G , удовлетворяющий следующим условиям:

- для любого ребра $e \in E(G)$ его вес $w_e \in W$ положительный;
- граничные вершины занумерованы по часовой стрелке;
- валентность каждой граничной вершины равна одному; вес ребер, инцидентных граничным вершинам, равен единице.

Определение 2.14. С каждой моделью Постникова можно связать расширенную матрицу граничных измерений следующим образом. Рассмотрим модель Постникова $P(G, W, O)$ с k истоками и $n - k$ стоками, занумеруем по порядку по часовой стрелке ее истоки $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. Наконец, построим расширенную матрицу граничных измерений A размера $k \times n$ следующим образом:

- подматрица, отвечающая номерам столбцов, совпадающими с номерами истоков, является единичной;
- остальные элементы задаются по формуле $a_{rj} = (-1)^s M_{i_r, j}$, где s – количество элементов из I строго между истоком i_r и стоком j , $M_{i_r, j}$ – сумма весов всех путей из истока i_r в сток j .

Расширенная матрица отклика моделей Постникова также задает вложение в положительную часть грассманиана:

Теорема 2.15. (Постников [13]) Рассмотрим модель Постникова $P(G, W, O)$ с k истоками и $n - k$ стоками, тогда все миноры $\Delta_I(A)$ ее расширенной матрицы отклика A неотрицательны. Другими словами, матрица A задает положительную точку грассманиана $Gr(k, n)$.

Более того, при дополнительных условиях на модель Постникова $P(G, W, O)$ можно «забыть» об ориентации:

Теорема 2.16. (Теорема Постникова о замене ориентации [13]) Рассмотрим две модели Постникова $P_1(G, W_1, O_1)$ и $P_2(G, W_2, O_2)$ такие, что:

- все вершины $v \in V(G)$ покрашены либо в черный цвет, либо в белый, каждое ребро соединяет вершины разного цвета;
- ориентации O_1 и O_2 являются совершенными;

- для любого ребра $e \in G$ его вес $w_1(e)$ в первой модели равен весу $w_2(e)$ во второй модели, если его ориентации в первой и во второй модели совпадают;
- для любого ребра $e \in G$ его веса $w_1(e)$ и $w_2(e)$ в первой и во второй модели связаны отношением $w_1(e)w_2(e) = 1$, если его ориентации в первой и во второй модели противоположны;

Тогда для миноров A_1 и A_2 расширенных матриц отклика первой и второй моделей о верно следующее тождество:

$$\Delta_J(A_2) = \frac{\Delta_J(A_1)}{\Delta_{I_2}(A_1)},$$

где I_2 множество индексов истоков второй модели.

2.2. Новая параметризация. Теперь мы переходим к изучению моделей электрических сетей [2], [7]. Мы будем обозначать множество электрических сетей с n граничными вершинами E_n . Теперь сформулируем основную теорему данного раздела:

Теорема 2.17. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$, рассмотрим также матрицу X – матрицу отклика (смотри [2], [5]) сети $e \in E_n$, сконструируем из ее элементов x_{ij} матрицу $\Omega_n(e)$ по правилу:

$$\Omega_n(e) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

Тогда матрица $\Omega_n(e)$ задают положительную точку грассманиана $Gr(n-1, 2n)$.

Пример 2.18. Для $e \in E_4$ матрица будет иметь следующий вид:

$$\Omega_4(e) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & -x_{14} & 1 \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & x_{24} & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & -x_{34} & 0 \\ -x_{41} & 0 & x_{42} & 0 & -x_{43} & 1 & x_{44} & 1 \end{pmatrix},$$

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся два связанных с электрическими сетями объекта:

- ассоциированная с электрической сетью $e \in E_n$ модель димеров $N(G, W)$;
- ассоциированные с электрической сетью производящие функции роц L_σ .

Дадим все необходимые определения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение 2.19. (Лам [10]) Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ на графе G , построим по ней димерную модель $N(G, W)$, которую мы будем называть связанной (ассоциированной) с электрической сетью e , по следующему правилу. Если G имеет граничные вершины $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$, то граф $N(G)$ димерной модели $N(G, W)$ будет иметь граничные вершины $\{1, 2, \dots, 2n\}$, где граничная вершина \bar{i} отождествляется с $2i-1$, и каждая граничная вершина $2i$ в $N(G)$ лежит между \bar{i} и $\bar{i}+1$. Граничные вершины с индексами $2i$ отождествляются с вершинами \bar{i} , используемые для маркировки двойственных пср-разбиений (смотри определение ниже). Внутренние вершины $N(G)$ определяются следующим образом: нарисуем черную внутреннюю вершину b_v на месте каждой внутренней вершина v в G и черную внутреннюю вершину b_F в центре каждой внутренней грани F графа G ; наконец

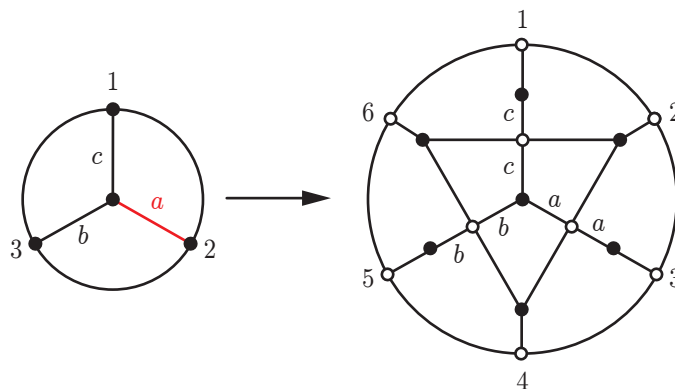


Рис. 1. Электрическая сеть и ассоциированная с ней димерная модель

поместим белую внутреннюю вершину w_e на месте середины каждого ребра e в G . Все граничные вершины покрасим в белый. Ребра $N(G)$ определим следующим образом:

- если v нарисована на месте вершины ребра e графа G , то b_v и w_e соединяются ребром, и вес этого ребра равен весу ребра e графа G ;
- если e граничит с F , то w_e соединяется с b_F ребром с весом 1,
- вершина b_i соединяется ребром с весом 1 с граничной вершиной $2i - 1$ в $N(G)$;
- четные граничные вершины $2i$ в $N(G)$ соединяются ребром с весом 1 с w_F – центром грани F , к которой они прилегают.

Пример 2.20. Для сети, изображенной на Рис. 1, верно, что

$$L_{1|2|3} = a + b + c, \quad L_{123} = abc, \quad L_{12|3} = ab, \quad L_{13|2} = ac, \quad L_{23|1} = cb;$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{45} = ac, \quad \Delta_{23} = \Delta_{56} = bc, \quad \Delta_{34} = \Delta_{16} = ab, \quad \Delta_{13} = \Delta_{35} = \Delta_{15} = abc,$$

$$\Delta_{24} = \Delta_{46} = \Delta_{26} = a + b + c, \quad \Delta_{14} = ac + ab, \quad \Delta_{25} = ca + cb, \quad \Delta_{36} = ba + bc.$$

Теперь перейдем к определению роц и их производящих функций:

Определение 2.21. Роцей F на графе G назовем остовный подграф (то есть ациклический подграф, такой что $V(F) = V(G)$). Граничное разбиение $\sigma(F)$ (или же граница роци F) – это разбиение множества граничных вершин G $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$, которое показывает какие граничные вершины должны лежать в одной компоненте связности роци F . Отметим, что, так как мы работаем с планарными графами G , $\sigma(F)$ должно быть непересекающимся разбиением (пср-разбиением).

Мы будем записывать пср-разбиение следующим образом: $\sigma = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}|\bar{f}\bar{g}|\bar{h})$. Каждое пср-разбиение σ множества $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$ имеет дуальное пср-разбиение множества $\{\tilde{1}, \tilde{2}, \dots, \tilde{n}\}$, где точка с индексом \tilde{i} лежит на окружности между точками с индексами \bar{i} and $\bar{i} + 1$. Например, $(\bar{1}, \bar{4}, \bar{6}|\bar{2}, \bar{3}|\bar{5})$ имеет дуальное пср-разбиение $(\tilde{1}, \tilde{3}|\tilde{2}|\tilde{4}, \tilde{5}|\tilde{6})$.

Определение 2.22. Для каждого пср-разбиения σ мы можем определить частичную статсумму (производящую функцию) следующим образом:

$$L_{\sigma(G)} = \sum_{F|\sigma(F)=\sigma} \omega(F),$$

где суммирование ведется по всем тем роцам, которые имеют границу, определяемую пср-разбиением σ , и $\omega(F)$ есть произведение весов ребер роци F .

Определение 2.23. В частности нам особенно понадобятся следующие пср-разбиения, для которых мы введем специальные обозначения:

- $L := L_{*|*|*...}$;
- $L_{ij} := L_{ij|*|*...}$;
- $L_{kk} := \sum_{i \neq k} L_{ik}$.

Определение 2.24. Мы будем называть $(n - 1)$ -элементное подмножество $I \subset 1 \dots 2n$ согласованным с пср-разбиением σ , если каждая компонента σ и дуального ему разбиения $\tilde{\sigma}$ содержит ровно один элемент не из I .

Теорема 2.25. (Лам [10]) Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ с n граничными вершинами и связанную с ней димерную модель $N(G, W)$ на $2n$ вершинах. тогда выполняется следующее тождество:

$$\Delta_I^M = \sum_{(\sigma, I)} L_{\sigma(G)},$$

где суммирование идет по всем тем пср-разбиением σ , которые согласованы с множеством I .

Теперь, используя согласованность, получим связь между производящими функциями L, L_{ij}, L_{kk} и координатами Плюккера димерной модели $N(G, W)$:

Лемма 2.26. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ и ассоциированную с ней сеть $N(G, W)$, для координат Плюккера последней верно следующее тождество:

$$L = \Delta_S^d,$$

где S ($|S| = n - 1$) любой набор четных индексов.

Доказательство. Рассмотрим пср-разбиения $\sigma = (\bar{1}|\bar{2}|\dots|\bar{n})$, дуальное к нему разбиение имеет вид $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}\tilde{2}\dots\tilde{n})$. Также рассмотрим произвольное множество S ($|S| = n - 1$) из четных индексов. Легко видеть, что $(\sigma, \tilde{\sigma})$ согласовано с множеством I и нет других σ , согласованных с S . \square

Лемма 2.27. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ и ассоциированную с ней сеть $N(G, W)$, для координат Плюккера последней верно следующее тождество:

$$L_{ij} = \Delta_{(2i-1)J}^d,$$

где J ($|J| = n - 2$) – набор всех четных индексов кроме двух ближайших к $2j - 1$.

Доказательство. Рассмотрим пср-разбиение $\sigma = (\bar{i}\bar{j}|\dots|*)$ и его дуальное разбиение, которое имеет вид $\tilde{\sigma} = (\tilde{A} - \tilde{j}_1|\tilde{B} - \tilde{j}_2)$, где \tilde{j}_1 и \tilde{j}_2 – две ближайшие точки к \bar{j} и \tilde{A}, \tilde{B} – некоторые подмножества $(\tilde{1}\tilde{2}\dots\tilde{n})$. Легко видеть, что σ согласовано с множеством $(2i - 1) \cup J$, где J – множество, состоящее из всех четных индексов, кроме двух ближайших к $2j - 1$ и $|J| = n - 2$.

Предположим, что существует другое σ , согласованное с множеством $\{2i - 1\} \cup J$, тогда σ должно иметь вид $\sigma = (\bar{i}\bar{k}|\dots|*)$ ($k \neq j$), а дуальное к нему должно иметь вид $\tilde{\sigma} = (\tilde{A}'|\tilde{B}')$, где \tilde{A}', \tilde{B}' – некоторые подмножества $(\tilde{1}\tilde{2}\dots\tilde{n})$. Тогда хотя бы одна из двух ближайших граничных вершин к $2j - 1$ должна принадлежать J , потому что либо \tilde{A}' , либо \tilde{B}' содержат обе точки \tilde{j}_1 и \tilde{j}_2 , поэтому мы получаем противоречие и $L_{ij} = \Delta_{\{2i-1\} \cup J}^d$. \square

Пример 2.28. Например, для электрической сети на 5 вершинах верно, что $L_{13} = \Delta_{128(10)}^d$.

Лемма 2.29. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ и ассоциированную с ней сеть $N(G, W)$, для координат Плюккера последней верно следующее тождество:

$$L_{kk} = \Delta_{(2k-1)K}^d,$$

где K ($|K| = n - 2$) – набор всех четных индексов кроме двух ближайших к $2k - 1$.

Доказательство. Легко видеть, что каждое пер-разбиение $\sigma = (\bar{k}\bar{i} | * | \dots | *)$ согласованно с множеством $(2k - 1) \cup K$, где K – множество, состоящее из всех четных индексов, кроме двух ближайших к $2k - 1$ и $|K| = n - 2$.

Чтобы завершить доказательство, остается только заметить, что любое σ , которое может быть согласовано с $(2k - 1) \cup K$, должно иметь форму $\sigma = (\bar{k}\bar{i} | * | \dots | *)$ ($k \neq i$). Таким образом мы уже перечислили все такие σ , которые согласованы с множеством $(2k - 1) \cup K$. \square

Пример 2.30. Например, для электрической сети на 5 вершинах верно $L_{11} = \Delta_{1468}^d$.

Нам понадобится также связь элементов матрицы отклика с производящими функциями роц:

Теорема 2.31. (Кенион-Вильсон [6]) Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$, тогда для внедиагональных элементов x_{ij} матрицы отклика X этой электрической сети верна следующая формула:

$$x_{ij} = -\frac{L_{ij|*|*|*...}}{L_{*|*|*...}} := -\frac{L_{ij}}{L}.$$

Доказательство. Мы дадим набросок независимого комбинаторного доказательства в отдельном разделе. \square

2.3. Ациклический случай. Теперь мы можем перейти к доказательству основного утверждения. Сначала разберем ациклический случай, то есть рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$, такую что, на ассоциированной с ней модели димеров $N(G, W)$ можно ввести хотя бы одну ациклическую совершенную ориентацию, все индексы истоков которой четны.

Замечание 2.32. Условие существования ациклической совершенной ориентации можно заменить на более слабые условия:

- электрическая сеть $e \in E_n$ топологически эквивалента (точное определение смотри Кенион [7]) такой электрической сети $e' \in E_n$, что ассоциированная с ней модели димеров $N'(G, W)$ имеет хотя бы одну ациклическую совершенную ориентацию все индексы истоков которой четны;
- ассоциированная с электрической сетью $e \in E_n$ модель димеров $N(G, O)$ преобразованиями Постникова (точное определение смотри Кенион [13]) переводится в димерную модель, на которой можно ввести ациклическую совершенную ориентацию, все индексы истоков которой четны.

Рассмотрим также ассоциированную с электрической сетью $e \in E_n$ димерную модель $N(G, W)$ с $2n$ граничными вершинами. По предположению на модели $N(G, W)$ есть совершенная, ациклическая ориентация O , причем множество I ($|I| = n - 1$) всех индексов ее истоков состоит только из четных чисел. Введем эту ориентацию O на модели $N(G, W)$, чтобы получить модель потоков $N(G, W', O)$.

Замечание 2.33. Отметим, что вообще говоря, для любого набора J четных индексов мощности $n - 1$ существует (но быть может не ациклическая) совершенная ориентация O_J , так как $\Delta_J^d = L \neq 0$ (смотри замечание 2.6).

Нашей следующей целью является получение связи для координат Плюккера моделей $N(G, W', O)$, $N(G, W)$ и модели Постникова $P(G, W', O)$:

Предложение 2.34. Для любого $i \in I$ верно, что

$$M_{ij} = \sum_{F|K_{ij}} wt(F) = \Delta_{K_{ij}}^f,$$

где $K_{ij} = \{I/i\} \cup \{j\}$.

Доказательство. Очевидно из предложения 2.8 и условия ацикличности. \square

Предложение 2.35. Для любого $i \in I$ верно, что

$$M_{ij} = \sum_{F|K_{ij}} wt(F) = \Delta_{K_{ij}}^f,$$

где $K_{ij} = \{I/i\} \cup \{j\}$.

Предложение 2.36. Для любого $i \in I$ верно, что

$$M_{ij} = \sum_{F|K_{ij}} wt(F) = \frac{\Delta_{K_{ij}}^d}{L},$$

где $K_{ij} = \{I/i\} \cup \{j\}$.

Доказательство. Действительно, используя предложение 2.35 и теорему 2.12, мы можем написать:

$$M_{ij} = \sum_{F|K_{ij}} wt(F) = \frac{\Delta_{K_{ij}}^d}{wt(\Pi_0)},$$

где $wt(\Pi_0)$ вес димера, отвечающей совершенной ориентации O . С другой стороны, используя условие ацикличности ориентации O и теорему 2.12, мы получаем, что:

$$1 = \sum_{F|I} wt(F) = \frac{\Delta_I^d}{wt(\Pi_0)},$$

из чего следует, что $\Delta_I^d = wt(\Pi_0)$. Остается только воспользоваться леммой 2.26, чтобы получить, что $L = \Delta_I^d$. В итоге мы получаем равенство $wt(\Pi_0) = L$, которое и завершает доказательство предложения. \square

Теперь изучим, как связаны миноры $\Delta_J(A)$ расширенной матрицы граничных измерений A модели Постникова $P(G, W', O)$ с координатами Плюккера Δ_J^d модели $N(G, W)$. Для этого нам понадобится следующая теорема Постникова:

Теорема 2.37. (Постников [13]) Для любых двух координат Плюккера $\Delta_{J_1}, \Delta_{J_2}$ точки грассманиана $Gr(k, n)$ верно следующее тождество:

$$\Delta_{J_1} \Delta_{J_2}^{r-1} = \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{xing(\pi)} \prod_{i \in N} \Delta_{(J_2 \setminus \{i\}) \cup \pi(i)},$$

где сумма берется по всем перестановкам π из множества $N = J_2 \setminus J_1$ во множество $S = J_1 \setminus J_2$, и $xing(\pi)$ – «знак» перестановки (смотри [13]).

Доказательство. Отдельно мы дадим набросок объяснения того, как эта теорема может быть получена с помощью альтернативы соотношениям Плюккера. \square

Из этой теоремы мы можем получить следующее следствие:

Теорема 2.38. Для любого минора расширенной матрицы отклика A модели Постникова $P(G, W', O)$ верно следующее равенство:

$$\Delta_J(A) = \frac{\Delta_J^d}{L}.$$

Доказательство. Действительно, применяя теорему 2.37 к минорам матрицы A под номерами $J_1 = J$ и $J_2 = I$, мы получаем следующее тождество:

$$(1) \quad \Delta_J(A) = \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} \Delta_{(I \setminus \{i\}) \cup \pi(i)}(A) = \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} M_{i\pi(i)},$$

где сумма берется по всем перестановкам π из множества $N = I \setminus J$ во множество $S = J \setminus I$.

С другой стороны, используя предложения 2.34 и 2.36, формулу (1) мы можем переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_J(A) &= \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} M_{i\pi(i)} = \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} \Delta_{K_{ij}}^f = \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} \frac{\Delta_{K_{ij}}^d}{L}; \\ (2) \quad \Delta_J(A) &= \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} \frac{\Delta_{K_{ij}}^d}{L}. \end{aligned}$$

В силу предположения ацикличности ориентации O $\Delta_I^f = 1$, поэтому теорема 2.37, примененная к координатам Плюккера модели $N(G, W', O)$ под номерами $J_1 = J$ и $J_2 = I$, принимает следующий вид:

$$(3) \quad \Delta_J^f = \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} \Delta_{K_{ij}}^f,$$

где сумма берется по всем перестановкам π из множества $N = I \setminus J$ во множество $S = J \setminus I$. Используя опять предложения 2.34 и 2.36, формулу (3) мы можем переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_J^f &= \frac{\Delta_J^d}{L} = \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} \Delta_{K_{ij}}^f = \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} \frac{\Delta_{K_{ij}}^d}{L}; \\ (4) \quad \frac{\Delta_J^d}{L} &= \sum_{\pi: N \rightarrow S} (-1)^{\text{xing}(\pi)} \prod_{i \in N} \frac{\Delta_{K_{ij}}^d}{L}; \end{aligned}$$

Сравнивая формулы 2 и 4, мы получаем утверждение теоремы. \square

Напомним, что мы получали пока все утверждения в предположении, что O – ациклическая ориентация. Посмотрим, что происходит при выборе другой совершенной ориентации O_0 на модели $N(G, W)$:

Теорема 2.39. (Следствие из теоремы Постникова о замене ориентации) Рассмотрим две модели Постникова $P(G, W', O)$, $P_0(G, W'_0, O_0)$, где O_0 такая совершенная ориентация, что множество I_0 индексов ее истоков состоит только из четных индексов. Рассмотрим A и A_0 – расширенные матрицы граничных измерений для моделей $N(G, W', O_I)$ и $N(G, W'_0, O_{I_0})$ соответственно. Тогда верно следующее тождество:

$$\Delta_J(A_0) = \Delta_J(A).$$

Доказательство. Действительно, по теореме 2.16 о замене ориентации мы можем написать следующее тождество:

$$\Delta_J(A_0) = \frac{\Delta_J(A)}{\Delta_{I_0}(A)}.$$

С другой стороны, используя лемму 2.26 и теорему 2.38, мы получаем, что $\Delta_{I_0}(A) = \frac{\Delta_{I_0}^d}{L} = \frac{L}{L} = 1$. Последнее наблюдение завершает доказательство теоремы. \square

Теперь, все готово для того, чтобы доказать основную теорему. Зафиксируем электрическую сеть $e \in E_n$ и произвольный $k \in [1 \dots n]$. Пусть I_k , $|I| = n - 1$ – множество всех четных индексов из $[2 \dots 2n]$, кроме ближайшего к $2k - 1$ против часовой стрелки четного индекса, который мы обозначим j_k . Рассмотрим связанную с электрической сетью $e \in E_n$ димерную модель $N(G, W)$ и пусть наконец $P(G, W', O_k)$ – модель Постникова, где O_k – совершенная ориентация с набором источников I_k , и A_k – ее расширенная матрица граничных измерения. Пусть $j(k)$ – ближайший по часовой стрелке четный индекс $2k - 1$.

Теорема 2.40. *Обозначим через $a_{j(k) \rightarrow m}$ элемент расширенной матрицы граничной измерений A_k , который отвечает за вес потоков от $j(k)$ в m . Тогда для элементов $a_{j(k) \rightarrow m}$ выполняются следующие равенства:*

1. $a_{j(k) \rightarrow m} = (-1)^{s+1} x_{k \frac{m+1}{2}}$ для любого стока с нечетным индексом $m \neq 2k - 1$, где s – количество элементов в I_k , расположенных строго между источником, обозначенным $j(k)$, и стоком с номером m ;
2. $a_{j(k) \rightarrow m} = x_{kk}$ для стока с номером $m = 2k - 1$;
3. $a_{j(k) \rightarrow m} = (-1)^s$ для стока с номером $m = j_k$, где s – количество элементов в I_k , расположенных строго между истоком с номером $j(k)$ и стоком с номером j_k ;
4. $a_{j(k) \rightarrow m} = 1$ для источника с номером $m = j(k)$;
5. $a_{(k) \rightarrow m} = 0$ для источника с номером $m \neq j(k)$.

Доказательство. 1. Из определения 2.13 следует, что

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = (-1)^s a_{j(k) \rightarrow n},$$

с другой стороны, используя теорему 2.38 и теорему 2.39, мы можем написать:

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = \Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A) = \frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L}.$$

Для завершения доказательства нам остается только воспользоваться леммой 2.27 и теоремой 2.31:

$$\frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L} = \frac{L \frac{n+1}{2} k}{L} = -x_{\frac{n+1}{2} k} = -x_{k \frac{n+1}{2}}.$$

2. Из определения 2.13 следует, что

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = a_{j(k) \rightarrow n},$$

с другой стороны, используя теорему 2.38 и теорему 2.39, мы можем написать:

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = \Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = \frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L}.$$

Для завершения доказательства нам остается только воспользоваться леммой 2.29 и теоремой 2.31:

$$\frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L} = \frac{L_{kk}}{L} = x_{kk}.$$

3. Из определения 2.13 следует, что

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = (-1)^s a_{j(k) \rightarrow n},$$

с другой стороны, используя теорему 2.38 и теорему 2.39, мы можем написать:

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = \Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A) = \frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L}.$$

Для завершения доказательства нам остается только воспользоваться леммой 2.26:

$$\frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L} = \frac{L}{L} = 1.$$

4. Непосредственно следует из определения 2.13.

5. Непосредственно следует из определения 2.13. □

Обозначим за v_k вектор, являющийся строчкой матрицы A_k , отвечающей весам путей из $j(k)$ в t . Рассмотрим все такие вектора для каждого k и организуем их в матрицу, которая будет иметь вид:

$$\Omega_n(e) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

Теорема 2.41. Матрица $\Omega'_n(e)$, получаемая выкидыванием последней строчки из матрицы $\Omega_n(e)$, задает точку положительного грассманиана $Gr(n-1, 2n)$.

Доказательство. Теорема моментально следует из того, что по построению все строчки матрицы $\Omega_n(e)$ являются векторами v_k , которые все лежат в одном и том же подпространстве, являющемся положительной точкой грассманиана $Gr(n-1, 2n)$. □

2.4. Общий случай. Докажем теперь основную теорему 2.17 в общем случае. Зафиксируем электрическую сеть $e \in E_n$ на n вершинах. Снова рассмотрим ассоциированную с электрической сетью димерную модель $N(G, W)$ на $2n$ вершинах и введем на ней совершенную ориентацию O со множеством истоков I ($|I| = n-1$), все индексы которых четные. Нашей целью снова будет получение связи для координат Плюккера моделей $N(G, W', O)$, $N(G, W)$ и модели Постникова $P(G, W', O)$. Для этого нам понадобится следующая сформулируем теорема:

Теорема 2.42. (Таласка [16]) Рассмотрим произвольную модель Постникова $P(G, W', O)$ с множеством истоков I , также рассмотрим ее расширенную матрицу граничных измерений A . Для ее миноров верна следующая формула:

$$\Delta_J(A) = \frac{\sum_F wt(F)}{\sum_C wt(C)},$$

где сумма в числителе берется по всем потокам, пути которых соединяют множество истоков I со множеством J , сумма в знаменателе берется по всем потокам, пути которых не соединяют никаких вершин на границе.

Из этой теоремы мы можем получить следующее следствие:

Теорема 2.43. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ и связанную с ней димерную модель $N(G, W)$. Пусть $O(I)$ – совершенная ориентация с множеством источников I , которые все помечены четными индексами. Рассмотрим наконец модель Постникова $P(G, W', O(I))$, тогда для миноров расширенной матрицы граничных измерений A выполняется следующее тождество:

$$\Delta_J(A) = \frac{\Delta_J^M}{L}.$$

Доказательство. Действительно, используя написать теорему 2.12 и теорему 2.42, мы можем написать следующую цепочку равенств:

$$\Delta_J(A) = \frac{\sum_F wt(F)}{\sum_C wt(C)} = \frac{\Delta_J^f}{\sum_C wt(C)} = \frac{\Delta_J^d}{wt(\Pi_0) \sum_C wt(C)},$$

где $wt(\Pi_0)$ – вес димерной конфигурации, отвечающей совершенной ориентации $O(I)$. Заметим, что непосредственно из определения 2.13 следует, что $\Delta_I(A) = 1$, с другой стороны: $\Delta_I(A) = \frac{\sum_F wt(F)}{\sum_C wt(C)} = \frac{\Delta_I^f}{\sum_C wt(C)} = \frac{\Delta_I^d}{wt(\Pi_0) \sum_C wt(C)}$. Откуда мы получаем, что $\Delta_I^d = wt(\Pi_0) \sum_C wt(C)$. Для завершения доказательства нам остается только воспользоваться леммой 2.26, из которой мы получаем равенство $L = \Delta_I^d = wt(\Pi_0) \sum_C wt(C)$. \square

Теперь, все готово для того, чтобы получить конструкцию вложения в положительную часть грассманиана электрических сетей с помощью их матриц отклика в общем случае. Рассмотрим нашу зафиксированную электрическую сеть $e \in E_n$ на n вершинах и произвольное $k \in 1 \dots n$. Построим затем множество I_k (мощности $n - 1$), состоящий из всех четных индексов от 2 до $2n$ кроме индекса j_k – четного индекса ближайшего к $2k - 1$ против часовой стрелке. Наконец рассмотрим модель Постникова $N(G, W', O_k)$ (где O_k – совершенная ориентация с набором истоков I_k) и ее расширенную матрицу граничных измерений A_k . Обратим наше внимание к ее $j(k)$ строке, где $j(k)$ – четный индекс ближайший к $2k - 1$ по часовой стрелке:

Теорема 2.44. Обозначим через $a_{j(k) \rightarrow m}$ элемент расширенной матрицы граничной измерений A_k , который отвечает за вес потоков от $j(k)$ в t . Тогда для элементов $a_{j(k) \rightarrow m}$ выполняются следующие равенства:

1. $a_{j(k) \rightarrow m} = (-1)^{s+1} x_{k \frac{m+1}{2}}$ для любого стока с нечетным индексом $m \neq 2k - 1$, где s – количество элементов в I_k , расположенных строго между источником, обозначенным $j(k)$, и стоком с номером m ;
2. $a_{j(k) \rightarrow m} = x_{kk}$ для стока с номером $m = 2k - 1$;
3. $a_{j(k) \rightarrow m} = (-1)^s$ для стока с номером $m = j_k$, где s – количество элементов в I_k , расположенных строго между истоком с номером $j(k)$ и стоком с номером j_k ;
4. $a_{j(k) \rightarrow m} = 1$ для источника с номером $m = j(k)$;
5. $a_{j(k) \rightarrow m} = 0$ для источника с номером $m \neq j(k)$.

Пример 2.45.

$$\begin{aligned} L_{1|2|3} &= 1, \quad L_{12|3} = a, \quad L_{13|2} = c, \quad L_{23|1} = b; \\ a_{21} &= a + c, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = a, \quad a_{24} = 0, \quad a_{25} = -c, \quad a_{26} = -1; \\ x_{12} &= \frac{-L_{12|3}}{L_{1|2|3}} = -a, \quad x_{13} = \frac{-L_{13|2}}{L_{1|2|3}} = -c. \end{aligned}$$

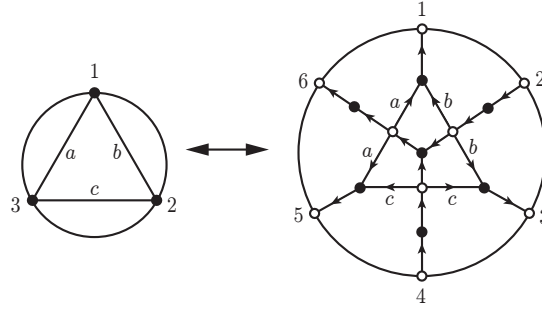


Рис. 2. Пример к 2.45

Доказательство. 1. Из определения 2.13 следует, что

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = (-1)^s a_{j(k) \rightarrow n},$$

с другой стороны, используя теорему 2.43, мы можем написать:

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = \frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L}.$$

Для завершения доказательства нам остается только воспользоваться леммой 2.27 и теоремой 2.31:

$$\frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L} = \frac{L^{\frac{n+1}{2}k}}{L} = -x_{\frac{n+1}{2}k} = -x_k^{\frac{n+1}{2}}.$$

2. Из определения 2.13 следует, что

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = a_{j(k) \rightarrow n},$$

с другой стороны, используя теорему 2.43, мы можем написать:

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = \frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L}.$$

Для завершения доказательства нам остается только воспользоваться леммой 2.29 и теоремой 2.31:

$$\frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L} = \frac{L_{kk}}{L} = x_{kk}.$$

3. Из определения 2.13 следует, что

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = (-1)^s a_{j(k) \rightarrow n},$$

с другой стороны, используя теорему 2.43, мы можем написать:

$$\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}(A_k) = \frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L}.$$

Для завершения доказательства нам остается только воспользоваться леммой 2.26:

$$\frac{\Delta_{\{n\} \cup I_k - \{j(k)\}}^d}{L} = \frac{L}{L} = 1.$$

4. Непосредственно следует из определения 2.13.

5. Непосредственно следует из определения 2.13. □

Обозначим за v_k вектор, являющийся строчкой матрицы A_k , отвечающей весам путей из $j(k)$ в m . Рассмотрим все такие вектора для каждого k и организуем их в матрицу, которая будет иметь вид:

$$(5) \quad \Omega_n(e) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Теорема 2.46. Матрица $\Omega'_n(e)$, получаемая выкидыванием последней строчки из матрицы $\Omega_n(e)$, задает точку положительного грассманиана $Gr(n-1, 2n)$.

Доказательство. Теорема моментально следует из того, что по построению все строчки матрицы $\Omega_n(e)$ являются векторами v_k , которые все лежат в одном и том же подпространстве, являющемся положительной точкой грассманиана $Gr(n-1, 2n)$. \square

2.5. Связь с конструкцией Лама. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ и ассоциированную с ней димерную модель $N(G, W)$. Последняя модель задает положительную точку грассманиана $Gr(n-1, 2n)$, однако положительную точку грассманиана $Gr(n-1, 2n)$ задает также и матрица $\Omega'_n(e)$. Легко заметить, что эти две точки совпадают. Действительно, по построению матрицы $\Omega'_n(e)$ ее строки состоят из векторов v_k , каждый из которых по теореме 2.46 лежит в положительной точке грассманиана, чьи координаты Плюккера проективно совпадают с координатами Плюккера модели $N(G, W)$.

2.6. Вложение в положительную часть лагранжева грассманиана. Теперь мы сконструируем вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана. Сначала высечем подпространство размерности $2n-2$ пространства $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ следующими условиями:

$$V := \{v \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{i=1}^n (-1)^i v_{2i} = 0, \sum_{i=1}^n (-1)^i v_{2i-1} = 0\}.$$

Рассмотрим теперь электрическую сеть $e \in E_n$ и связанную с ней матрицу $\Omega'_n(e)$. Сформулируем следующую лемму:

Лемма 2.47. Каждая вектор-строчка матрицы $\Omega'_n(e)$ принадлежит пространству V .

Доказательство. Утверждение леммы следует из прямой проверки. \square

Легко видеть, что у пространства V имеется следующий естественный базис:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, 0); \\ v_2 &= (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 0, 0); \\ &\dots \\ v_{2n-2} &= (0, 0, 0, 0, \dots, 1, 0, 1). \end{aligned}$$

Запишем теперь в этом базисе вектор-строки матрицы $\Omega'_n(e)$ и организуем их в матрицу $\tilde{\Omega}_n(e)$.

Пример 2.48. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_3$, тогда $\tilde{\Omega}_3(e)$ будет иметь следующий вид:

$$\Omega_3(e) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & x_{13} & -1 \\ -x_{21} & 1 & -x_{23} & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

Пример 2.49. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_4$, тогда $\tilde{\Omega}_4(e)$ будет иметь следующий вид:

$$\Omega_4(e) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & x_{13} + x_{14} & -1 & -x_{14} & 1 \\ -x_{21} & 1 & -x_{23} - x_{24} & 0 & x_{24} & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{31} - x_{32} & 1 & x_{34} & 0 \end{pmatrix},$$

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 2.50. Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ и связанную с ней матрицу $\tilde{\Omega}_n(e)$. Тогда матрица $\tilde{\Omega}_n(e)$ задает точку лагранжева грассманиана $Gr(n - 1, 2n - 2)$. Другими словами выполняется равенство

$$\tilde{\Omega}_n(e)\Lambda_{2n-2}\tilde{\Omega}_n(e)^t = 0,$$

где Λ_{2n-2} следующая невырожденная кососимметрическая матрица:

$$\Lambda_{2n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

Доказательство. Используя симметричность матрицы отклика $x_{ij} = x_{ji}$, мы получаем доказательство из прямой проверки равенства $\tilde{\Omega}_n(e)\Lambda_{2n-2}\tilde{\Omega}_n(e)^t = 0$. \square

Замечание 2.51. Более того, можно доказать, что точка $\tilde{\Omega}_n(e)$ принадлежит положительной части лагранжевого грассманиана $Gr(n - 1, 2n - 2)$ (более подробно смотри [1]).

3. СЛЕДСТВИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом разделе мы сформулируем связь вложения электрических сетей в положительную часть грассманиана с помощью их матриц отклика с другими конструкциями вложений, а также дадим доказательство теоремы Кениона-Вильсона.

3.1. Связь с вершинными моделями. Рассмотрим теперь электрические сети $e \in E_n$ на критических графах Γ_n . Известно, что такие модели могут быть эффективно описаны с помощью техники вершинных моделей. Сформулируем следующую теорему:

Теорема 3.1. (Горбунов-Талалаев [5]) Рассмотрим электрическую сеть $e(\Gamma_n)$ на критическом графе (смотри [5]) Γ_n , тогда следующие две точки грассманиана $Gr(n - 1, 2n)$ совпадают:

- (M_R, S_n)
- $(M_B, I_n)S_{2n}T_{2n}$

Из этой теоремы мы моментально получаем следующее следствие:

Теорема 3.2. *Рассмотрим электрическую сеть $El(\Gamma_n)$ на критическом графе Γ_n , тогда матрица*

$$\overline{Sp}(M_B, I_n)S_{2n}T_{2n}\overline{T}_{2n}$$

задает положительную точку $Gr(n - 1, 2n)$, где

$$\overline{Sp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

$$\overline{T}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

Доказательство. Доказательство следует из следующей цепочки равенств:

$$\Omega_n(e) = \overline{Sp}(M_R, S_n)\overline{T}_{2n} = \overline{Sp}(M_B, I_n)S_{2n}T_{2n}\overline{T}_{2n}.$$

□

3.2. Приклеивание моста и спайка и изменение матрицы отклика. В этом разделе мы применим теорему 2.17, чтобы получить классические и очень важные формулы, выражающие изменение матрицы отклика электрической сети при приклеивании к ней моста или спайка. Сначала дадим определение приклеивания моста и спайка к электрической сети:

Определение 3.3. (Лам [10]) Для электрической сети $e \in E_n$, произвольного целого числа $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ и неотрицательного действительного числа t определим как $u_{2k-1}(t)(e)$ электрическую сеть, полученную из e путем добавления нового ребра веса $\frac{1}{t}$, которое соединяет новую граничную вершину v со старой граничной вершиной, помеченной индексом k , которая становится новой внутренней вершиной. Мы будем называть эту операцию приклейкой спайка.

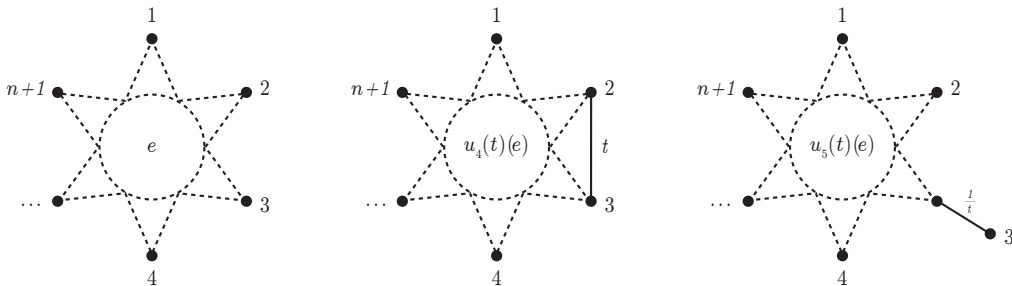


Рис. 3. Приклейка моста и спайка

Для электрической сети $e \in E_n$, произвольного целого числа $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ и неотрицательного действительного числа t определим как $u_{2k}(t)(e)$ электрическую сеть, полученную из e путем приклеивания нового ребра, соединяющего граничные

вершины с индексами k до $k + 1$ (все индексы взяты по модулю $n + 1$) с весом t . Мы будем называть эту операцию приклейкой моста.

Теорема 3.4. (Кертис и др. [2], [8]) Рассмотрим электрическую сеть $e \in E_n$ и электрическую сеть $e' \in E_n$, полученную из e добавлением ребра веса t между граничными вершинами с индексами k и $k + 1$ (смотри рисунок к определению 3.3). Тогда для элементов x_{ij} и x'_{ij} матриц отклика сетей e и e' верна следующая формула:

$$(6) \quad x'_{ij} = x_{ij} + (\delta_{ik} - \delta_{(i+1)k})(\delta_{jk} - \delta_{(j+1)k})t,$$

Если $e' \in E_n$ получается из e приклеиванием спайка веса $\frac{1}{t}$ к вершине с индексом k (смотри рисунок к определению 3.3), то для элементов x_{ij} и x'_{ij} матриц отклика сетей e и e' верна следующая формула:

$$(7) \quad x'_{ij} = x_{ij} - \frac{tx_{ik}x_{kj}}{tx_{kk} + 1},$$

где δ_{ij} стандартная дельта-функция Кронекера.

Доказательство. Для доказательства теоремы 6 мы сначала сформулируем несколько необходимых определений и утверждений:

Определение 3.5. Нам понадобятся следующие матрицы

- если $(i \in 1, \dots, n - 1)$, то $x_i(t)$ – это верхнетреугольная матрица с всеми единицами на главной диагонали и только одним ненулевым элементом $(x_i)_{i,i+1} = t$ над диагональю;
- если $(i \in 1, \dots, n - 1)$, то $y_i(t)$ – это нижнетреугольная матрица с всеми единицами на главной диагонали и только одним ненулевым элементом $(y_i)_{i+1,i} = t$ ниже диагонали;
- если $i = n$, тогда $x_n(t) = s_n x_1(t) s_n^{-1}$
- если $i = n$, тогда $y_n(t) = s_n y_1(t) s_n^{-1}$

где

$$(8) \quad s_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 3.6. (Лам [10]) Пусть $e(G) \in E_n$ – электрическая сеть и ассоциированная с ней сеть $N_1(G, W)$. Рассмотрим также электрические сети $u_{2k-1}(t)(e)$ и $u_{2k}(t)(e)$, обозначим ассоциированные с ними сети как $N_2(u_{2k-1}G, u_{2k-1}W)$ и $N_2(u_{2k}G, u_{2k}W)$. Тогда точки $X(N_1)$ и $X(N_2)$ грассманиана, определяемые сетями $N_1(G, W)$, $N_2(u_{2k-1}G, u_{2k-1}W)$ и $N_2(u_{2k}G, u_{2k}W)$ связаны друг с другом следующим образом:

$$X(N_2) = X(N_1)u_{2k-1}(t), \quad X(N_2) = X(N_1)u_{2k}(t),$$

где $u_i(t) = x_i(t)y_{i+1}(t)$.

Теперь все готово, чтобы перейти к доказательству теоремы (6). Легко заметить, что теорему (6) достаточно доказывать только в случае приклеивания моста между вершинами с индексами 1 и 2, потому что другие случаи могут быть получены из

этого перенумерации вершин электрической сети (то есть простым сдвигом нумерации граничных вершин).

По теореме 3.6 матрицы $\Omega(e)u_2(t)$ и $\Omega(e')$ задают одну и ту же точку $Gr(n-1, 2n)$.

Прямым вычислением получаем:

$$\Omega(e)u_2(t) = \begin{pmatrix} x_{11} + t & 1 & -x_{12} + t & 0 & x_{13} & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} + t & 1 & t + x_{22} & 1 & -x_{23} & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n x_{n1} & 0 & (-1)^{n+1} x_{n2} & 0 & (-1)^{n+2} x_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Умножение на $u_2(t)$ не меняет столбцы матрицы $\Omega(e)$ с четными индексами, поэтому мы получаем, что:

$$\Omega(e)u_2(t) = \Omega(e'),$$

что доказывает утверждение теоремы (6) в случае приклейки моста.

Аналогично, для доказательства (7) достаточно получить формулу в случае приклеивания спайка к граничной вершине с индексом 2. Точно также из теоремы 3.6 мы заключаем, что матрицы $\Omega(e')$ и $\Omega(e)u_3(t)$ задают одну и ту же точку $Gr(n-1, 2n)$ и в итоге мы получаем, что:

$$Cal_2(t)\Omega(e)u_3(t) = \begin{pmatrix} x_{11} - \frac{x_{12}x_{21}}{x_{22}t+1} & 1 & -x_{12} + \frac{x_{12}x_{22}}{x_{22}t+1} & 0 & x_{13} - \frac{x_{12}x_{23}}{x_{22}t+1} & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} + \frac{x_{22}x_{21}}{x_{22}t+1} & 1 & x_{22} - \frac{x_{22}x_{22}}{x_{22}t+1} & 1 & -x_{23} + \frac{x_{22}x_{32}}{x_{22}t+1} & \dots & 0 \\ x_{31} - \frac{x_{32}x_{12}}{x_{22}t+1} & 0 & -x_{32} + \frac{x_{32}x_{22}}{x_{22}t+1} & 1 & x_{33} - \frac{x_{32}x_{23}}{x_{22}t+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

где

$$Cal_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_{12}}{1+x_{22}t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x_{22}t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{x_{32}}{1+x_{22}t} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{x_{42}}{1+x_{22}t} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$Cal_2(t)\Omega(e)u_3(t) = \Omega(e'),$$

из чего следует формула (7). \square

3.3. Теорема Кениона-Вильсона. Теперь мы перейдем к доказательству, упомянутой в введении, теоремы Кениона-Вильсона (теорема 1.1 [6]) и покажем, что она может быть получена как простое следствие и основной теоремы 2.17:

Теорема 3.7. (Кенион-Вильсон [6]) *Рассмотрим электрическую сеть $e(G) \in E_n$ и отношения вида:*

$$\frac{L_\sigma}{L},$$

тогда каждое такое отношение может быть выражено как однородный целочисленный полином степени $n - k(\sigma)$, где $k(\sigma)$ – количество компонентов пср-разбиения σ , от переменных $L_{i,j} := \frac{L_{ij}}{L}$.

Замечание 3.8. Для простоты мы рассматриваем только случай, когда разбиение σ является пср-разбиением, однако утверждение теоремы верно (и может быть доказано с небольшими дополнительными усилиями описанным ниже методом), даже если σ не является пср-разбиением [6].

Для доказательства теоремы 3.7 мы будем использовать следующий результат, который по существу является переформулировкой предложения 5.19 [10]:

Теорема 3.9. (Лам [10]) *Рассмотрим электрическую сеть $e(G) \in E_n$ и ассоциированную с ней сеть $N(G, W)$. Тогда для любого пер-разбиения σ существует набор координат $\Delta_{J(\sigma)}^d$ такой, что выполняется следующее тождество:*

$$L_\sigma = \sum_{J(\sigma)} a_{J(\sigma)} \Delta_{J(\sigma)}^d,$$

где $a_{J(\sigma)} = \{1, -1\}$. Более того, для каждого $J(\sigma)$ верно следующее: $|J(\sigma)_{\text{odd}}| = n - k$, где $|J(\sigma)_{\text{odd}}|$ – количество нечетных индексов в $J(\sigma)$.

Теперь все готово, чтобы доказать теорему 3.7. Рассмотрим электрическую сеть $e(G) \in E_n$ и ассоциированную с ней сеть $N(G, W)$. Введем некоторую совершенную ориентацию O на $N(G, W)$, рассмотрим модель Постникова $P(G, W', O)$. Для пер-разбиения σ и соответствующей ей производящей функции роц L_σ в силу теорем 2.43 и 3.9 имеет место следующее равенство:

$$\frac{L_\sigma}{L} = \sum_{J(\sigma)} \frac{a_{J(\sigma)} \Delta_{J(\sigma)}^d}{L} = \sum_{J(\sigma)} a_{J(\sigma)} \Delta_{J(\sigma)}(A),$$

где A – расширенная матрица граничных измерений для $P(G, W', O)$.

С другой стороны, для каждого $\Delta_{J(\sigma)}$ по теореме 2.17 мы получаем равенство:

$$\frac{\Delta_{J(\sigma)}(A)}{\Delta_K(A)} = \frac{\Delta_{J(\sigma)}(\Omega'_n(e))}{\Delta_K(\Omega'_n(e))},$$

где $K = \{2, 4, 6, \dots, 2n - 2\}$. Используя то, что $\Delta_K(A) = \Delta_K(\Omega'_n) = 1$, мы получаем следующее:

$$\frac{L_\sigma}{L} = \sum_{J(\sigma)} a_{J(\sigma)} \Delta_{J(\sigma)}(A) = \sum_{J(\sigma)} a_{J(\sigma)} \frac{\Delta_K(A) \Delta_{J(\sigma)}(\Omega'_n(e))}{\Delta_K(\Omega'_n(e))} = \sum_{J(\sigma)} a_{J(\sigma)} \Delta_{J(\sigma)}(\Omega'_n(e)).$$

Заметим, что последнее выражение является однородным целочисленным полиномом от переменных x_{ij} и, следовательно, согласно теореме 2.31 является также однородным целочисленным полиномом и от $L_{i;j}$, поскольку $L_{i;j} = -x_{ij}$. Легко видеть, что степень каждого слагаемого $\Delta_{J(\sigma)}(\Omega'_n(e))$ равна $|J(\sigma)_{\text{odd}}|$. Последнее число равно количеству столбцов с нечетными индексами в матрице $\Omega'_n(e)$. Напомним, что столбцы с четными индексами содержат только матричные элементы равные 0 и 1. Наконец, используя теорему 3.9, мы заключаем, что $|J(\sigma)_{\text{odd}}| = n - k$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЦЫ ОТКЛИКА

Мы приведем набросок независимого доказательства теоремы 2.31, используя обобщенную теорему Кирхгофа и свойства дополнения по Шуру [14]. Но сначала дадим несколько технических определений:

Определение 4.1. Рассмотрим матрицу M , набор ее строк I и набор ее столбцов J , тогда можно рассмотреть следующие матрицы:

- $M[I, J]$ – матрица, полученная из M , взятием всех I строк и J столбцов.
- $M(I, J)$ – матрица, полученная из M , вычеркиванием всех I строк и J столбцов.

Теперь сформулируем теорему о связи матрицы отклика и матрицы Кирхгофа:

Теорема 4.2. (Кертис и др. [2]) Рассмотрим электрическую сеть с множеством внутренних вершин I и множеством внешних вершин $-J$. Занумеруем вершины графа электрической сети так, чтобы его матрица Кирхгофа записывалась следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где $K[I, I] = D$. Тогда для матрицы отклика выполняется:

- $X = K/K[I, I]$ – матрица отклика является дополнением по Шуру матрицы K .
- Рассмотрим подмножества P, Q множества внешних вершин J , тогда для $X_{P,Q}$ матрицы отклика между точками множеств P, Q верна формула $X_{P,Q} = K[I + P, I + Q]/K[I, I]$ – матрица отклика $X_{P,Q}$ является дополнением по Шуру матрицы $K[I + P, I + Q]$.

Предложение 4.3. Для элементов x_{ij} матрицы отклика верна формула:

$$x_{ij} = \frac{\det K[I + i, I + j]}{\det K[I, I]}.$$

Доказательство. Действительно, используя предыдущую теорему, получаем, что

$$x_{ij} = K[I + i, I + j]/K[I, I].$$

Теперь используем свойство определителя дополнения по Шуру ([14]):

$$x_{ij} = \det x_{ij} = \det(K[I + i, I + j][I, I]) = \frac{\det K[I + i, I + j]}{\det K[I, I]}.$$

□

Таким образом нам осталось только дать комбинаторную интерпретацию миноров $\det K[I + i, I + j]$ и $\det K[I, I]$. Для этого мы будем использовать обобщенную теорему Кирхгофа.

Теорема 4.4. (обобщенная теорема Кирхгофа для главных миноров, Вагнер [17]) Рассмотрим электрическую сеть и некоторое ее подмножество вершин R мощности $|R| = k$, тогда $K(R, R)$ является производящей функцией роц, таких что:

- каждая роца содержит ровно k деревьев;
- каждое дерево роци содержит ровно одну точку из R .

Предложение 4.5. Используя обобщенную теорему Кирхгофа для главных миноров получаем, что $K[I, I] = K(J, J) = L$.

Теорема 4.6. (обобщенная теорема Кирхгофа для неглавных миноров, Вагнер [17]) Рассмотрим электрическую сеть и некоторое ее подмножество вершин R, P мощности $|R| = |P| = k$, тогда $K(R, P)$ является производящей функцией роц со знаками (точное определение смотри [17]), таких что:

- каждая роца содержит ровно k деревьев
- каждое дерево роци содержит ровно одну точку из R и ровно одну точку из P

Предложение 4.7. Используя обобщенную теорему Кирхгофа для неглавных миноров получаем, что $K[I + i, I + j] = K(J - i, J - j) = -L_{ij}$.

5. АЛЬТЕРНАТИВА СООТНОШЕНИЯМ ПЛЮККЕРА И ТЕОРЕМА ПОСТНИКОВА

Мы покажем, что теорема 2.37 является следствием альтернативы соотношений Плюккера. Для этих целей дадим формулировку критерия разложимости тензора в форме альтернативы соотношениям Плюккера [14]:

Для простоты мы сформулируем только одну часть критерия. Рассмотрим разложимый тензор $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$ (где все $v_i \in V$) и рассмотрим произвольный набор линейных отображений $\alpha_i : V \rightarrow \mathbb{R}, i = 1 \dots m$. Определим также следующие отображения:

$$c_j(\omega) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_2(v_1) & \dots & \alpha_{j-1}(v_1) & v_1 & \alpha_{j+1}(v_1) & \dots & \alpha_m(v_1) \\ \alpha_1(v_2) & \alpha_2(v_2) & \dots & \alpha_{j-1}(v_2) & v_2 & \alpha_{j+1}(v_2) & \dots & \alpha_m(v_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_m) & \alpha_2(v_m) & \dots & \alpha_{j-1}(v_m) & v_1 & \alpha_{j+1}(v_m) & \dots & \alpha_m(v_m), \end{pmatrix},$$

здесь определитель понимается как формальное раскрытие по j -ому столбцу;

$$c(\omega) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_2(v_1) & \dots & \alpha_{j-1}(v_1) & \alpha_j(v_1) & \alpha_{j+1}(v_1) & \dots & \alpha_m(v_1) \\ \alpha_1(v_2) & \alpha_2(v_2) & \dots & \alpha_{j-1}(v_2) & \alpha_j(v_2) & \alpha_{j+1}(v_2) & \dots & \alpha_m(v_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(v_m) & \alpha_2(v_m) & \dots & \alpha_{j-1}(v_m) & \alpha_j(v_m) & \alpha_{j+1}(v_m) & \dots & \alpha_m(v_m), \end{pmatrix},$$

Теперь мы можем сформулировать следующий результат:

Теорема 5.1. (Прасолов [14]) *Для разложимого тензора ω верно следующее тождество:*

$$c_1(\omega) \wedge \dots \wedge c_m(\omega) = (c(\omega))^{m-1} \omega.$$

5.1. Теорема Постникова как альтернатива соотношениям Плюккера. Сперва напомним формулировку теоремы Постникова:

Теорема 5.2. (Постников [14]) *Рассмотрим два множества $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_k)$, такие, что $|I| = |J| = k$. Рассмотрим также множества $K = I \setminus J$ и $L = J \setminus I$, предположим, что их мощности равны $|K| = |L| = r$, тогда верно следующее тождество:*

$$\Delta_J \Delta_I^{r-1} = \sum_{\pi: K \rightarrow L} (-1)^{\text{sing}(\pi)} \prod_{i \in K} \Delta_{(I \setminus \{i\}) \cup \pi(i)},$$

где сумма берется по всем перестановкам π из множества K во множество L .

Доказательство. (Набросок) Мы дадим доказательство этой теоремы с помощью альтернативы соотношениям Плюккера. Действительно, рассмотрим тензор $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$, где $v_j = \sum_k m_{jk} e_k$, где m_{jk} – элементы матрицы M . Выберем α_i так, чтобы $c(\omega) = \Delta_I$. Тогда теорема Постникова сразу получается сравнением коэффициентов при $e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$ для левой и правой части альтернативы соотношениям Плюккера. \square

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное в основной теореме 2.17 вложение электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана оказалось крайне эффективным инструментом для их изучения. Так, например, удалось объяснить некоторые классические результаты и дать новое доказательство теоремы Кениона-Вильсона. В дальнейшем планируется с помощью этого вложения получить новый и возможно устойчивый алгоритм для восстановления проводимостей электрической сети (решение задачи черного ящика) по ее матрице отклика с помощью структуры кластерной алгебры на положительных грассманианах. Также планируется изучить вопрос о сюръективности построенного вложения, что поможет связать теорию электрических сетей и моделей Изинга (более подробно об этом вопросе смотри [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bychkov, B., Gorbounov, V., Kazakov, A., Talalaev, D. (2021). Electrical networks, Lagrangian Grassmannians and symplectic groups. arXiv preprint arXiv:2109.13952.
- [2] Curtis E. B., Ingerman D., Morrow J. A. Circular planar graphs and resistor networks //Linear algebra and its applications. – 1998. – Т. 283. – №. 1-3. – С. 115-150.
- [3] P. Galashin, P. Pilyavskyy, Ising model and the positive orthogonal Grassmannian, Duke Math. J. 169(10): 1877-1942 (15 July 2020). DOI: 10.1215/00127094-2019-0086.
- [4] O. Guichard, A. Wienhard, Positivity and higher Teichmüller theory, in European Congress of Mathematics Berlin, 2016 Editors: ISBN print 978-3-03719-176-7, ISBN online 978-3-03719-676-2, DOI 10.4171/176.
- [5] V. Gorbounov, D. Talalaev, Electrical varieties as vertex integrable statistical models, J. Phys. A: Math. Theor. 53 454001, (2020).
- [6] R. Kenyon and D. Wilson: Boundary partitions in trees and dimers, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 3, 1325–1364.
- [7] R. Kenyon The Laplacian on planar graphs and graphs on surfaces //arXiv preprint arXiv:1203.1256. – 2012.
- [8] T. Lam and P. Pilyavskyy, Electrical networks and Lie theory, Algebra Number Theory 9(6): 1401-1418 (2015). DOI: 10.2140/ant.2015.9.1401.
- [9] T. Lam, Totally nonnegative Grassmannian and Grassmann polytopes //arXiv preprint arXiv:1506.00603. – 2015.
- [10] T. Lam, Electroid varieties and a compactification of the space of electrical networks, Advances in Mathematics Volume 338, 7 November 2018, Pages 549-600.
- [11] J. Landsberg, L. Manivel, Construction and classification of complex simple Lie algebras via projective geometry . Sel. math., New ser. 8, 137 (2002). <https://doi.org/10.1007/s00029-002-8103-5>.
- [12] R. Karpman, Total positivity for the Lagrangian Grassmannian, Advances in Applied Mathematics, vol. 98, July 2018.
- [13] A. Postnikov, Total positivity, Grassmannians, and networks, arXiv:math/0609764.
- [14] Prasolov V. V. Problems and theorems in linear algebra. – American Mathematical Soc., 1994. – Т. 134.
- [15] C. Sabot, Electrical Networks, Symplectic Reductions, and Application to the Renormalization Map of Self-Similar Lattices , Proc. Sympos. Pure Math., 72, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2004).
- [16] K. Talaska: A formula for Plücker coordinates associated with a planar network. Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, Art. ID rnn 081, 19 pp.
- [17] Wagner D. G. Combinatorics of electrical networks. – 2009.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России
от Онуфриенко Марии
Викторовны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Классификация особенностей гладких функций с конечной циклической группой симметрий» являются: Определение 2.2, Теорема 2.6 и ее доказательство, Предложения 4.3, 4.4, Леммы 5.2, 6.4, 6.5, 6.7, 6.8, Следствия 2.7, 5.3, 6.2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arXiv.org по следующим ключевым словам: действия групп, инвариантные ростки, простые особенности, унимодальные особенности, эквивариантные отображения, число Милнора, интегрируемые системы с конечным числом параметров, гамильтоновы системы, в выдаче поисковиков было исследовано 23 статей, 5 тезисов докладов, 4 монографии, 3 препринта, 4 диссертации (список см. в списке литературы и приложении к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1-2], [6-8], [18] (из списка литературы) и [7] (из Приложения) были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Еленой Александровной Кудрявцевой, профессором РАН, профессором кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

- Проведена переписка с доктором физико-математических наук, Университет Лафборо, факультет математических наук (Loughborough University, Mathematical Sciences, UK) Болсиновым Алексеем Викторовичем. Также проведены консультации с научным сотрудником кафедры динамических систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова Е.А. Асташовым, профессором кафедры динамических систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова И.А. Богаевским, профессором кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова А.А. Ошемковым.

- Результаты, полученные в данной работе, докладывались на международных конференциях (Ломоносов 2021, Ломоносовские чтения 2021, Конференция международных математических центров-2021, 3rd International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics 2021, Воронежская Зимняя

математическая школа С.Г. Крейна 2022, Ломоносов-2022, Satellite International Conference on Nonlinear Dynamics and Integrability 2022, Динамические системы классической и небесной механики 2022, Dynamics in Siberia 2023, Ломоносов 2023) и научно-исследовательских семинарах («Современные геометрические методы» под руководством акад. А.Т.Фоменко, проф. А.С.Мищенко, проф. А.В.Болсинова, проф. А.А.Ошемкова, проф. Е.А.Кудрявцевой, проф. В.В.Ведюшкиной, доц. И.М.Никонова, доц. А.Ю.Коняева, асс. В.А.Кибкало (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова) и научном семинаре кафедры теории динамических систем под руководством проф. А.А.Давыдова (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова)).

- По результатам работы была опубликована статья Kudryavtseva E. A., Onufrienko M. V. Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2023. — Vol. 30, no. 1. — P. 76–94., <https://link.springer.com/article/10.1134/S1061920823010053>, 1.043

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 07.06.2023. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись



Онуфриенко Мария Викторовна
31 мая 2023 г. Москва, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И
ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Классификация особенностей гладких функций с конечной циклической группой симметрий

Выполнил студент
607 группы
Онуфриенко Мария Викторовна

Подпись студента

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор РАН Кудрявцева
Елена Александровна

Подпись научного руководителя

Москва
2023

Содержание

1	Введение	3
2	Формулировка основных результатов	4
3	Описание G-инвариантных функций и G-эквивариантных векторных полей	10
4	Вычисление G-градиентного идеала	13
5	Как меняется G-инвариантный ряд Тейлора при G-эквивариантной замене координат?	20
6	Доказательство теоремы 2.6	24
6.1	Построение последовательности G -эквивариантных замен координат	24
6.2	Доказательство теоремы 2.6 при $k < G /2$	27
6.3	Случай $ G /2 \leq k \leq 2 G - 5$	28
7	Интегрируемые системы	34
8	Свойства G-регулярных особенностей	35
9	Заключение	37
	Список литературы	38

1. Введение

В работе изучаются гладкие семейства функций $F(\mathbf{z}, \lambda)$ от двух переменных $\mathbf{z} = (x, y)$ и параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, инвариантных относительно поворота на угол $2\pi/s$ для целого числа $s \geq 2$:

$$F(A\mathbf{z}, \lambda) = F(\mathbf{z}, \lambda), \quad \text{где} \quad A(x, y) = \left(x \cos \frac{2\pi}{s} - y \sin \frac{2\pi}{s}, x \sin \frac{2\pi}{s} + y \cos \frac{2\pi}{s}\right).$$

Другими словами, рассматриваются гладкие функции, инвариантные относительно действия конечной группы $G \subset SO(2)$, порожденной оператором поворота $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$ (т. е. G -инвариантные функции).

Цель работы — изучить бифуркации критических точек, возникающие в гладких семействах G -инвариантных гладких функций, их особенности и нормальные формы, а также устойчивость таких бифуркаций относительно малых гладких возмущений семейства функций. Мы получаем классификацию вырожденных критических точек, появляющихся в типичных семействах G -инвариантных функций, заданных в окрестности неподвижной точки поворота $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$, с числом параметров $l \leq 2$ (следствие 2.7). Более того, мы получаем (в теореме 2.6 (А)) критерий для приводимости G -инвариантной гладкой функции к нормальной форме вблизи вырожденной критической точки при условии, что критическая точка G -регулярна (определение 2.2), а ее G -корузмерность $k \leq 2|G| - 5$. Также мы получаем (в теореме 2.6 (В)) критерий для приводимости гладкого семейства G -инвариантных функций к нормальной форме вблизи каустического значения параметра, при котором функция имеет особенность указанного типа. Оба критерия получены в терминах частных производных исходной функции в критической точке (без предварительного приведения функции к нормальной форме). Аналогичные результаты для групп G порядка 1 и 2 хорошо известны (см., например, [7]), причем без ограничений на G -кратность Милнора или G -корузмерность особенности.

В механике и симплектической геометрии возникает задача классификации орбит коранга 1 «типичных» интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС) с $k + 1$ степенями свободы (т. е. ИГС на (M, ω) , гамильтониан которых $H = H(x, y, I)$ — «типичная» гладкая G -инвариантная функция от двух переменных $(x, y) \in D^2$ с k параметрами $I = (I_1, \dots, I_k) \in D^k$, где $G = \langle A \rangle \subset SO(2)$,

$$M = (D^2 \times D^k \times T^k)/G, \quad \omega = dx \wedge dy + dI \wedge d\varphi, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in T^k,$$

$$A(x, y, I, \varphi) = \left((x, y)A^\ell, I, \varphi_1 + \frac{2\pi}{s}, \varphi_2, \dots, \varphi_k\right),$$

$0 < \ell < s = |G|$, $(\ell, s) = 1$). Эта задача эквивалентна следующей: описать критические точки, которые появляются в типичных параметрических семействах гладких G -инвариантных функций $H = H(x, y, \lambda)$ от двух переменных (x, y) с k параметрами $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, где группа $G = \langle A \rangle \subset SO(2)$, $G \cong \mathbf{Z}_s$, действует поворотами: $(x, y) \mapsto (x, y)A$,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{s} & -\sin \frac{2\pi}{s} \\ \sin \frac{2\pi}{s} & \cos \frac{2\pi}{s} \end{pmatrix}.$$

Другими словами: классифицировать (с точностью до G -эквивариантных замен локальных координат) все критические точки G -корузмерности k .

В качественной теории интегрируемых систем важную роль играют структурно устойчивые особые орбиты, т. е. такие орбиты, в малой окрестности которых топология слоения Лиувилля сохраняется при малых интегрируемых возмущениях системы. Например, невырожденные особые орбиты являются структурно устойчивыми, согласно теореме Элиассона–Вея [17, 5] (см. также [8, 12]). Простейшая вырожденная особенность — параболическая орбита [13] — является структурно устойчивой [13] и даже гладко структурно устойчивой [9]. Гладкие семейства функций, инвариантных относительно действия коммутативной компактной группы Ли, возникают при изучении бифуркаций критических орбит интегрируемых гамильтоновых систем [8]. Например, гладкие семейства четных функций с группой симметрий из двух элементов возникают в интегрируемых гамильтоновых системах с 2 степенями свободы вблизи таких вырожденных орбит ранга 1, как «эллиптическое удвоение периода» и «гиперболическое удвоение периода» [4]. Гладкие семейства функций от четырех переменных, инвариантных относительно гамильтонова действия окружности $G \cong SO(2)$, встречаются вблизи таких вырожденных орбит коранга 2, как «интегрируемая гамильтонова бифуркация Хопфа» [16] и ее гиперболические аналоги. Все указанные выше типы вырожденных особых орбит встречаются во многих интегрируемых системах динамики твердого тела (см., например, [4, 3, 8]), магнитных геодезических потоках, инвариантных относительно вращений [11]; они являются структурно устойчивыми относительно вещественно-аналитических интегрируемых возмущений. Семейства четных функций встречаются во многих динамических системах (не обязательно интегрируемых, см., например, [7]).

Гладкие семейства функций от двух переменных, инвариантных относительно действия произвольной конечной группы $G \subset SO(2)$ поворотами, встречаются вблизи параболических орбит с резонансами [6] — компактных орбит ранга 1 интегрируемых систем с 2 степенями свободы, допускающих локально-свободное гамильтоново действие окружности (такие интегрируемые системы иногда называют полуторическими). Известно, что классификация компактных орбит коранга 1, встречающихся в интегрируемых системах с $n \geq 2$ степенями свободы, допускающих локально-свободное гамильтоново действие $(n - 1)$ -мерного тора, сводится к классификации особенностей, возникающих в гладких $(n - 1)$ -параметрических семействах функций от двух переменных, инвариантных относительно действия конечной группы $G \subset SO(2)$ поворотами. Таким образом, результаты работы позволяют классифицировать особые орбиты указанного типа, возникающие в типичных интегрируемых системах (следствие 7.4).

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору РАН Елене Александровне Кудрявцевой за постановку задачи, всестороннюю поддержку, внимание к работе и ценные замечания.

Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

2. Формулировка основных результатов

Обозначим через $\mathcal{E}_{\mathbf{z}}$ алгебру (над полем \mathbb{R}) ростков в нуле гладких вещественнозначных функций $f(x, y) = f(\mathbf{z})$ двух переменных $\mathbf{z} = (x, y)$. В этой алгебре рассмотрим подалгебру $\mathcal{H}_{\mathbf{z}}$ сходящихся (в некоторой окрестности нуля) степенных рядов от переменных x, y с вещественными коэффициентами. Обозначим через $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ любую из

алгебр \mathcal{E}_z и \mathcal{H}_z . Далее под *гладкими функциями* будем понимать элементы алгебры \mathcal{A}_z .

Функция $f = f(\mathbf{z})$ называется *инвариантной* относительно действия группы G или G -*инвариантной*, если $f(g\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$ для любых $g \in G$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. Алгебру G -инвариантных гладких функций из \mathcal{A}_z обозначим через \mathcal{A}_z^G .

В пространстве однородных многочленов степени n от x, y с вещественными коэффициентами есть стандартный базис $x^k y^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$. Нам будет удобнее базис, состоящий из многочленов $\operatorname{Re}(z^k \bar{z}^{n-k}) = |z|^{2k} \operatorname{Re}(z^{n-2k})$, $\operatorname{Im}(z^k \bar{z}^{n-k}) = |z|^{2k} \operatorname{Im}(z^{n-2k})$, $0 \leq k < n/2$, и $|z|^n = (x^2 + y^2)^{n/2}$ при четном n , где $z = x + iy$.

Предложение 2.1. *Для любой конечной группы $G \subset SO(2)$ алгебра $\mathbb{R}[x, y]^G$ G -инвариантных многочленов от переменных x, y мультипликативно порождена многочленами $|z|^2$, $\operatorname{Re}(z^s)$ и $\operatorname{Im}(z^s)$ (базис Гильберта), где $s = |G|$, $z = x + iy$. То есть, $\mathbb{R}[x, y]^G = \{c(|z|^2, \operatorname{Re}(z^s), \operatorname{Im}(z^s)) \mid c \in \mathbb{R}[u, v, w]\}$. В частности, ряд Тейлора в нуле любой G -инвариантной функции $f(\mathbf{z})$ имеет вид*

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{p,q=0}^{\infty} c_{p,q} |z|^{2p} z^{sq} \right) = \frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^{\infty} (c_{p,q} z^{p+sq} \bar{z}^p + \overline{c_{p,q}} z^p \bar{z}^{p+sq}) = ZTZ^*, \quad (1)$$

где $c_{p,q} \in \mathbb{C}$, $c_{p,0} \in \mathbb{R}$, $Z = (1 \ z \ z^2 \ \dots)$,

$$T = \begin{pmatrix} c_{0,0} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}\overline{c_{0,1}} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & c_{1,0} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}c_{1,1} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & c_{2,0} & 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \ddots \\ \frac{1}{2}c_{0,1} & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots \\ 0 & \frac{1}{2}c_{1,1} & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

– бесконечная эрмитова матрица, $t_{p,p} = c_{p,0}$, $t_{p+sq,p} = \overline{t_{p,p+sq}} = \frac{1}{2}c_{p,q}$ при $q > 0$.

Доказательство предложения 2.1 приведено в §3.

Замечание. Слагаемые ряда Тейлора (1) имеют вид $\operatorname{Re}(c_{p,q} |z|^{2p} z^{sq}) = \frac{1}{2}c_{p,q} z^{p+sq} \bar{z}^p + \frac{1}{2}\overline{c_{p,q}} z^p \bar{z}^{p+sq}$. Поэтому коэффициенты ряда Тейлора (1) можно представить в виде частных производных

$$c_{p,0} = \frac{1}{p!2} f_{z^p \bar{z}^p}^{(2p)}(0,0), \quad c_{p,q} = \frac{2}{(p+sq)!p!} f_{z^{p+sq} \bar{z}^p}^{(2p+sq)}(0,0), \quad q > 0, \quad (2)$$

где частные производные по $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ определяются из соотношений

$$f'_x = f'_z + f'_{\bar{z}}, \quad f'_y = if'_z - if'_{\bar{z}}; \quad f'_z = \frac{1}{2}(f'_x - if'_y), \quad f'_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f'_x + if'_y). \quad (3)$$

В частности,

$$c_{0,1} = \frac{2}{s!} f_{z^s}^{(s)}(0,0). \quad (4)$$

Таким образом, согласно предложению 2.1, при $s > 1$ точка $(0,0)$ обязательно является критической точкой любой G -инвариантной функции, т. е. функция имеет особенность в нуле. Введем условие регулярности для такой особенности.

Определение 2.2. Пусть $f = f(x, y)$ — гладкая G -инвариантная функция, заданная в окрестности точки $(0, 0)$, где $|G| = s \geq 2$. Будем говорить, что функция f имеет G -регулярную особенность в точке $(0, 0)$, если $f_{z\bar{z}}^{(2)}(0, 0) \neq 0$ или $f_{z^s}^{(s)}(0, 0) \neq 0$ (т. е. хотя бы один из коэффициентов $c_{1,0}, c_{0,1}$ ряда Тейлора (1) отличен от нуля, см. (2) и (4)); другими словами, либо многочлен Тейлора степени 2 функции $f(x, y)$ отличен от константы, либо $s > 2$ и многочлен Тейлора степени s не является многочленом от $x^2 + y^2$.

Оказывается, у любой G -регулярной критической точки однозначно определен ее тип $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$, определяемый следующим образом.

Определение 2.3. Типом G -регулярной особенности назовем такое число $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$, что выполнено одно из следующих условий (схематично показанных на рис. 1):

- (i) при $s > 2(k + 1)$ многочлен Тейлора степени $2(k + 1)$ функции $f(x, y) - f(0, 0)$ является однородным многочленом степени $2(k + 1)$, отличным от 0 (это равносильно условию $f_{z^j \bar{z}^j}^{(2j)}(0, 0) = 0$ при $1 \leq j \leq k$ и $f_{z^{k+1} \bar{z}^{k+1}}^{(2k+2)}(0, 0) \neq 0$, т. е. условию $c_{1,0} = \dots = c_{k,0} = 0$ и $c_{k+1,0} \neq 0$ в разложении (1); при $k = 0$ это условие означает, что $c_{1,0} \neq 0$);
- (ii) при нечетном $s \leq 2k + 1$ выполнено $s = 2k + 1$ и многочлен Тейлора степени $s - 1$ функции $f(x, y) - f(0, 0)$ равен нулю (это равносильно условию $f_{z^j \bar{z}^j}^{(2j)}(0, 0) = 0$ при $1 \leq j \leq k$, т. е. условию $c_{1,0} = \dots = c_{k,0} = 0$);
- (iii) при четном $s = 2(k + 1)$ многочлен Тейлора степени s функции $f(x, y) - f(0, 0)$ является однородным многочленом степени s и не является полным квадратом многочлена (с точностью до знака), т. е. имеет вид $\operatorname{Re}(c_{0,1}(x + iy)^s) + c_{s/2,0}(x^2 + y^2)^{s/2}$, где $c_{s/2,0}^2 \neq |c_{0,1}|^2$ (это равносильно условию $f_{z^j \bar{z}^j}^{(2j)}(0, 0) = 0$ при $1 \leq j < s/2$ и $f_{z^{s/2} \bar{z}^{s/2}}^{(s)}(0, 0)^2 \neq 4 \frac{(s/2)!^4}{s!^2} |f_{z^s}^{(s)}(0, 0)|^2$, т. е. условию $c_{1,0} = \dots = c_{s/2-1,0} = 0$ и $c_{s/2,0}^2 \neq |c_{0,1}|^2$, см. (2) и (4));
- (iv) при четном $s \leq 2k$ многочлен Тейлора степени s функции $f(x, y) - f(0, 0)$ является однородным многочленом степени s и является полным квадратом многочлена (с точностью до знака), т. е. имеет вид $P_s(x, y) = \operatorname{Re}(c_{0,1}(x + iy)^s) + c_{s/2,0}(x^2 + y^2)^{s/2}$, где $c_{s/2,0}^2 = |c_{0,1}|^2$, и выполнено некоторое условие на многочлен Тейлора степени $2(k + 1)$ (см. ниже). Можно показать (см. §6.1), что с помощью замены переменных вида $x + iy = (\tilde{x} + i\tilde{y})(1 + Q)$, где $Q = Q(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2, (\tilde{x} + i\tilde{y})^s)$ — многочлен степени $2k + 2 - s$ с комплексными коэффициентами, $Q(0, 0) = 0$, многочлен Тейлора степени $2(k + 1)$ функции $f(x, y) - f(0, 0)$ можно привести к виду $P_s(\tilde{x}, \tilde{y}) + \sum_{j=s/2+1}^{k+1} \tilde{c}_{j,0}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^j$.¹ Условие на коэффициенты состоит в следующем: $\tilde{c}_{s/2+1,0} = \dots = \tilde{c}_{k,0} = 0$ и $\tilde{c}_{k+1,0} \neq 0$ (при $k = s/2$ это условие означает, что $\tilde{c}_{s/2+1,0} \neq 0$).

Замечание 2.4. (а) При нечетном $s \geq 3$ любая G -регулярная особенность имеет конечный тип, не превосходящий $(s - 1)/2$. При $s = 2$ G -регулярные особенности типа k — это в точности особенности типа $A_{e,k+1}^{\pm, \pm}$ из [7].

¹Как показано в §6.1, первый коэффициент равен $\tilde{c}_{s/2+1,0} = c_{s/2+1,0} - c_{s/2,0} \operatorname{Re}(c_{1,1}/c_{0,1})$.

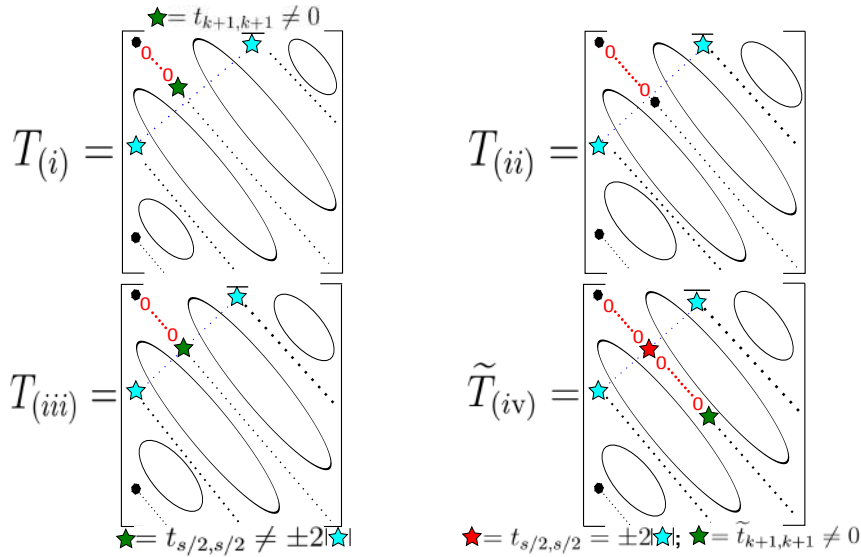


Рис. 1: Тип G -регулярной особенности: количество k красных элементов («нулей»)

(b) Согласно определению 2.2, тип G -регулярной особенности равен $k = 0$ в том и только том случае, когда либо $s \geq 3$ и $c_{1,0} \neq 0$, либо $s = 2$ и $c_{1,0}^2 \neq |c_{0,1}|^2$, т. е. когда критическая точка $(0, 0)$ невырождена (т. е. является морсовской). Типичные G -инвариантные функции имеют только такие особенности в нуле.

(c) Пусть $s \geq 3$. Из определения 2.2 следует, что G -инвариантная функция $f = f(x, y)$ не имеет в нуле никаких G -регулярных особенностей типов $k = 0, 1, 2$ тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из двух условий:

- выполнены три равенства $f_{z\bar{z}}^{(2)}(0, 0) = 0$, $\operatorname{Re} f_{z^s}^{(s)}(0, 0) = 0$, $\operatorname{Im} f_{z^s}^{(s)}(0, 0) = 0$ (это равносильно условию на коэффициенты $c_{1,0} = \operatorname{Re} c_{0,1} = \operatorname{Im} c_{0,1} = 0$),
- $s = 4$ и выполнены три равенства $f_{z\bar{z}}^{(2)}(0, 0) = 0$, $9f_{z^2\bar{z}^2}^{(4)}(0, 0)^2 = |f_{z^4}^{(s)}(0, 0)|^2$, $f_{z^3\bar{z}^3}^{(6)}(0, 0) = 0$ (это равносильно условию на коэффициенты $c_{1,0} = c_{2,0}^2 - |c_{0,1}|^2 = c_{3,0}|c_{0,1}|^2 - c_{2,0}\operatorname{Re}(c_{1,1}\bar{c}_{0,1}) = 0$).

Аналогично, f не имеет в нуле никаких G -регулярных особенностей типов $k = 0, 1$ тогда и только тогда, когда верно первое условие выше или хотя бы одно из двух условий:

- $s = 4$ и выполнены два равенства $f_{z\bar{z}}^{(2)}(0, 0) = 0$, $9f_{z^2\bar{z}^2}^{(4)}(0, 0)^2 = |f_{z^4}^{(s)}(0, 0)|^2$ (это равносильно условию на коэффициенты $c_{1,0} = c_{2,0}^2 - |c_{0,1}|^2 = 0$),
- $s \geq 5$ и выполнены два равенства $f_{z\bar{z}}^{(2)}(0, 0) = 0$, $f_{z^2\bar{z}^2}^{(4)}(0, 0) = 0$ (это равносильно условию на коэффициенты $c_{1,0} = c_{2,0} = 0$).

Таким образом, в типичных параметрических семействах гладких G -инвариантных функций с числом параметров $l \leq 2$ и порядком группы $|G| \geq 3$ в точке $(0, 0)$ нет ничего кроме G -регулярных особенностей типов $k = 0, 1, \dots, l$. При $|G| = 2$ это тоже верно [7, §2.6 and Assertion 6.3].

Обозначение 2.5. Для любой пары (s, k) как в определении 2.2 обозначим

$$r := \min(2k + 2, s), \quad m = [r/2] - 1, \quad \mu = m + k + 1, \quad (5)$$

т. е. $r = 2k + 2$ и $m = k$ в случаях (i) и (iii), $r = s$ в случаях (ii)–(iv). Определим функцию $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ от переменных $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ с параметрами $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ следующими формулами, в зависимости от случая (i)–(iv) из определения 2.2:

- (i) $f_{s,0,a}(\mathbf{z}) = \pm|z|^2$, $f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(z^s) + \sum_{i=1}^m a_i |z|^{2(k+i)}$ при $k \geq 1$, где $a_1 \neq 0$,
- (ii, iii) $f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(z^s) + \sum_{i=1}^m a_i |z|^{2(k+i)}$, где $a_1 \neq \pm 1$ в случае (iii) при $(s, k) \neq (2, 0)$,
 $f_{2,0,a}(\mathbf{z}) = \pm x^2 \pm y^2$,
- (iv) $f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(z^s) \pm |z|^s + \sum_{i=1}^m a_i |z|^{2(k+i)}$ при $s \geq 3$ и $a_1 \neq 0$; $f_{2,k,a}(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(z^2) \pm |z|^2 \pm |z|^{2(k+1)}$.

Здесь $\mathbf{z} = (x, y)$, $z = x + iy$. Определим параметрическое семейство функций

$$F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu) = f_{s,k,a}(\mathbf{z}) + \sum_{j=0}^k \nu_j |z|^{2j} \quad (6)$$

с параметрами $a = (a_i) \in \mathbb{R}^m$ («модули») и $\nu = (\nu_j) \in \mathbb{R}^{k+1}$ («малые» параметры).

Росток $\mathbf{w} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ гладкого отображения $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{z}) \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^2$ в точке $(0, 0)$ (например, росток диффеоморфизма или векторного поля в нуле) называется *эквивариантным* относительно действия группы G или G -эквивариантным, если $\mathbf{w}(g\mathbf{z}) = g\mathbf{w}(\mathbf{z})$ для любых $g \in G$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 2.6 (критерий приводимости G -инвариантной функции к нормальной форме при $k \leq 2s - 5$). (A) Пусть $G \subset SO(2)$ — конечная группа порядка $s \geq 2$ и $k \leq 2s - 5$. Гладкая G -инвариантная функция $f = f(x, y) \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$ имеет G -регулярную особенность типа k в нуле тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности нуля существует гладкая G -эквивариантная замена координат $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{z})$, $\det \frac{\partial \mathbf{w}(0,0)}{\partial \mathbf{z}} \neq 0$, приводящая функцию $f(\mathbf{z})$ к нормальной форме $f_{s,k,a}(\mathbf{w})$, т. е. к виду

$$f(\mathbf{z}) = f(0, 0) + f_{s,k,a}(\mathbf{w}(\mathbf{z}))$$

для некоторого $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ такого, что $a_1 \neq 0$ в случае (i) и (iv), $a_1 \neq \pm 1$ в случае (iii) (см. обозначение 2.5). Более того, G -кратность Милнора (определение 4.1), G -модальность и G -корузмерность ростка f равны $\mu = m + k + 1$, m и k , соответственно (см. (5)). При этом в случаях (i)–(iii) значение параметра $a \in \mathbb{R}^m$ единственно, т. е. ростки, отвечающие разным значениям a , не приводятся друг к другу G -эквивариантными заменами локальных координат.

(B) Предположим, что $F = F(x, y, \lambda) \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}, \lambda}^G$ — гладкое семейство G -инвариантных функций с параметрами $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ такое, что $F(x, y, 0) = f(x, y)$ — функция как в п. (A) выше. Тогда в некоторой окрестности начала координат в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^l$ существует гладкое семейство G -эквивариантных замен координат $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda)$, $\frac{\partial \mathbf{w}(0,0,0)}{\partial \mathbf{z}} \neq 0$, приводящее функцию F к нормальной форме $F_{s,k,a}(\mathbf{w}, \nu)$, т. е. к виду

$$F(\mathbf{z}, \lambda) = f(0, 0) + F_{s,k,a(\lambda)}(\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda), \nu(\lambda)) \quad (7)$$

для некоторых гладких функций $a_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq m$, и $\nu_j(\lambda)$, $0 \leq j \leq k$, таких, что $\nu_j(0) = 0$. Если в случаях (i)–(iii) выполнено $l = k$ и матрица $\left\| \frac{\partial^{2j+1} F(0,0)}{\partial z^j \partial \bar{z}^j \partial \lambda_i} \right\|_{i,j=1}^k$ невырождена (что эквивалентно невырожденности матрицы $\left\| \frac{\partial c_{j,0}(0)}{\partial \lambda_i} \right\|_{i,j=1}^k$, где $c_{p,q}(\lambda) =$

коэффициенты ряда Тейлора (1) функции $F(\mathbf{z}, \lambda)$ по переменным z, \bar{z}), то отображение $(\nu_j(\lambda))_{j=1}^k$ является диффеоморфизмом в некоторой окрестности нуля, и в любом близком семействе $\tilde{F}(\mathbf{z}, \lambda)$ существует G -регулярная особенность типа k при некотором значении λ , близком к 0.

Таким образом, теорема 2.6 (А) дает классификацию G -регулярных особенностей типов $k \leq 2|G| - 5$ с точностью до G -эквивариантных регулярных замен координат, а по теореме 2.6 (В) любое семейство G -инвариантных функций $F(\mathbf{z}, \lambda)$ приводится к нормальной форме $F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu)$ вблизи такой особенности. Доказательство теоремы 2.6 приведено в §6.

Замечание. (а) При $s \geq 3$ функции $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ в случаях (i), (ii), (iii) и (iv) из обозначения 2.5 — это нормальные формы особенностей серий $1_{k+1,s}$, 3_s , 4_s и $5_{k+1,s}$ (соответственно) из работы [18]. В действительности, в случае (i) при $m \geq 2$ нормальная форма из [18] отличается от нашей нормальной формы $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$, а именно: она получается из $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ прибавлением линейной комбинации функций $z|z|^{2j}(f_{s,k,a})'_z(\mathbf{z})$, $1 \leq j \leq k-2$. Так как такая линейная комбинация принадлежит G -градиентному идеалу (определение 4.1) ростка $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ (в силу предложения 4.2 ниже), то, согласно следствию 5.3 ниже и G -инвариантной теореме о конечной определенности, после прибавления такой линейной комбинации к ростку $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ получится росток, который можно привести к $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ некоторой G -эквивариантной заменой координат.

(б) Утверждение теоремы 2.6 не изучается в работе [18] и не следует из нее. Из [18, Theorem 4.2] и теоремы 2.6 (А) следует первое утверждение теоремы 2.6 (В). Действительно: согласно п. (а) выше, нормальные формы $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ и нормальные формы из работы [18] эквивалентны. Согласно [18], частные производные функции $F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu)$ по ν_j — это одночлены, образующие базис G -градиентного идеала ростка $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$, поэтому $F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu)$ — это инфинитезимально (право-) G -миниверсальная деформация ростка $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ [1, §8.2]. Значит, согласно G -инвариантной версии [15, §3] теоремы версальности [1, §8.3], росток $F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu)$ является G -версальной деформацией ростка $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$, что и доказывает существование искомых функций $\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda)$, $a_i(\lambda)$ и $\nu_j(\lambda)$ в теореме 2.6 (В).

(в) Второе утверждение теоремы 2.6 (В) не следует из [18, Theorem 4.2] и теоремы 2.6 (А). Покажем, что из [18, Theorem 4.2] и теоремы 2.6 (А) следует частный случай второго утверждения теоремы 2.6 (В) — когда $f(\mathbf{z}) = f_{s,k,a}(\mathbf{z})$. В этом случае в координатах \mathbf{z} росток $f(\mathbf{z})$ совпадает с нормальной формой $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$, но для этой нормальной формы в [18] указан базис G -градиентного идеала — это одночлены при ν_j в разложении (6) функции $F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu)$. Поэтому невырожденность матрицы $\|\frac{\partial c_{i,0}(0)}{\partial \lambda_j}\|_{i,j=1}^k$ означает, что $F(\mathbf{z}, \lambda)$ является инфинитезимально G -миниверсальной деформацией ростка $f(\mathbf{z}) = f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ [1, §8.2]. Отсюда и из (7) легко выводится, что $\det \|\frac{\partial \nu_i(0)}{\partial \lambda_j}\| \neq 0$.

Из теоремы 2.6 и замечания 2.4 (с) (с учетом [7] в случае $s = 1, 2$) получаем

Следствие 2.7 (классификация G -инвариантных особенностей). *Для любой конечной группы $G \subset SO(2)$ в типичных параметрических семействах G -инвариантных функций $F(\mathbf{z}, \lambda)$ с числом параметров $l \leq 2$ встречаются только особенности типов $f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = F_{s,k,a}(\mathbf{z}, 0)$, $0 \leq k \leq l$, где $F_{s,0,a}(\mathbf{z}, \nu) = F_{s,0}(\mathbf{z})$ — морсовские функции от переменных $\mathbf{z} = (x, y)$*

$$F_{s,0}(\mathbf{z}) = \pm x^2 \pm y^2, \quad s = 1, 2, \quad F_{s,0}(\mathbf{z}) = \pm |z|^2 = \pm(x^2 + y^2), \quad s \geq 3,$$

а ростки $F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu)$ в нуле при $k = 1, 2$ определяются формулами²

$$F_{s,1,a}(\mathbf{z}, \nu) = \begin{cases} \pm x^2 + y^3 + \nu y, & s = 1, \\ \pm x^2 \pm y^4 + \nu y^2, & s = 2, \\ \operatorname{Re}(z^3) + \nu |z|^2, & s = 3, \\ \operatorname{Re}(z^s) + a|z|^4 + \nu |z|^2, & a^2 \neq 1 \text{ при } s = 4, \ a \neq 0 \text{ при } s \geq 5, \end{cases}$$

$$F_{s,2,a}(\mathbf{z}, \nu) = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^4 - \nu_2 y^2 + \nu_1 y, & s = 1, \\ \pm x^2 \pm y^6 + \nu_2 y^4 + \nu_1 y^2, & s = 2, \\ \operatorname{Re}(z^4) \pm (1 + \nu_2)|z|^4 + a|z|^6 + \nu_1 |z|^2, & s = 4, \ a \neq 0, \\ \operatorname{Re}(z^5) + a|z|^6 + \nu_2 |z|^4 + \nu_1 |z|^2, & s = 5, \\ \operatorname{Re}(z^s) + a_1 |z|^6 + a_2 |z|^8 + \nu_2 |z|^4 + \nu_1 |z|^2, & a_1^2 \neq 1 \text{ при } s = 6, \\ & a_1 \neq 0 \text{ при } s \geq 7. \end{cases}$$

Здесь $s = |G| \geq 1$, $\mathbf{z} = (x, y)$ — переменные, $z = x + iy$, $\nu = (\nu_i) \in \mathbb{R}^k$ — малые параметры, $a = (a_j) \in \mathbb{R}^m$ — «модули», $m \in \{0, 1, 2\}$ — модальность.

Более того, вблизи такой особой точки $(\mathbf{z}, \lambda) = (0, \lambda^*)$ семейство функций $F(\mathbf{z}, \lambda)$ приводится к нормальной форме $F_{s,k,a}(\mathbf{w}, \nu) + \text{const}$ некоторым семейством G -эквивариантных замен переменных $(\mathbf{z}, \lambda) \mapsto (\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda), \nu(\lambda))$ для некоторого гладкого отображения $a = a(\lambda)$, где $\operatorname{rank} \frac{\partial(\mathbf{w}, \nu)}{\partial(\mathbf{z}, \lambda)}(0, \lambda^*) = 2 + k$. \square

Таким образом, следствие 2.7 дает классификацию (с точностью до G -эквивариантных регулярных замен координат) особенностей, встречающихся в типичных параметрических семействах гладких G -инвариантных функций с числом параметров $l \leq 2$. В частности, мы получили все классы особенностей, G -корузмерность которых не превосходит двух. Этот результат не следует из классификации [18] особенностей, G -кратность Милнора которых не превосходит 4, так как априори неизвестна верхняя оценка на G -кратность Милнора в терминах G -корузмерности.

Поясним, почему в формулах для функций $F_{s,1,a}(\mathbf{z}, \nu)$ и $F_{s,2,a}(\mathbf{z}, \nu)$ из следствия 2.7 при разных значениях s указаны разные условия на «модули» a . Дело в том, что пары (s, k) при $k = 1, 2$ относятся к разным случаям (i)–(iv) из определения 2.2:

- (i) $(s, k) \in \{(5, 1), (6, 1), (n, 1), (n, 2) \mid n \geq 7\}$,
- (ii) $(s, k) \in \{(3, 1), (5, 2)\}$,
- (iii) $(s, k) \in \{(4, 1), (6, 2)\}$,
- (iv) $(s, k) \in \{(4, 2), (2, n) \mid n \geq 1\}$.

3. Описание G -инвариантных функций и G -эквивариантных векторных полей

Предложение 3.1 (описание G -эквивариантных отображений). Пусть $G \subset SO(2)$ — конечная группа порядка $s \geq 1$. Отображение $\mathbf{w} = (w_1(\mathbf{z}), w_2(\mathbf{z}))$ G -эквивариантно тогда и только тогда, когда $w_1(\mathbf{z}) + iw_2(\mathbf{z}) = h_1(\mathbf{z})z + h_2(\mathbf{z})\bar{z}^{s-1}$ для некоторых G -инвариантных комплекснозначных функций $h_1(\mathbf{z}), h_2(\mathbf{z})$.

²При $s = 2$ и $k = 1, 2$ нормальные формы $F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu)$ из следствия 2.7 отличаются от нормальных форм из (6) линейной заменой координат.

Предложение 3.1 следует из леммы 3.5 ниже. Из предложения 3.1 получаем, что G -эквивариантные диффеоморфизмы при $s \geq 3$ сохраняют ориентацию.

Обозначим $\xi = e^{2\pi i/s}$ и рассмотрим изоморфизм $G \cong \{\xi^r \mid 0 \leq r < s\} \subset \mathbb{C}^*$, определенный условием $A \mapsto \xi$. Рассмотрим алгебру (над полем \mathbb{C})

$$V = \mathcal{A}_{\mathbf{z}} + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}},$$

состоящую из ростков в нуле комплекснозначных гладких функций $f(\mathbf{z}) = f_1(\mathbf{z}) + if_2(\mathbf{z})$, где $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}$.

Так как G — конечная циклическая группа порядка s (порожденная оператором поворота $A : \mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$), то для любого ее действия на любом векторном пространстве W комплексифицированное пространство $W + iW$ разлагается в прямую сумму s собственных подпространств с собственным значением ξ^r , $0 \leq r < s$. Изучим это разложение в случае векторного пространства $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ и индуцированного действия образующей группы G на пространстве $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ (и на его комплексификации $V = \mathcal{A}_{\mathbf{z}} + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$) вида

$$A^* : V \rightarrow V, \quad f \mapsto A^*(f) = f \circ A.$$

Обозначим через V_{ξ^r} множество собственных векторов $w = w_1 + iw_2 \in V$ оператора A^* с собственным значением ξ^r , где $r \in \mathbb{Z}$. Получаем разложение алгебры V в виде G -градуированной алгебры³:

$$V = \mathcal{A}_{\mathbf{z}} + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} V_{\xi^r}, \quad V_{\xi^r} V_{\xi^q} \subseteq V_{\xi^{r+q}}. \quad (8)$$

Замечание 3.2. Каждое собственное подпространство V_{ξ^r} , $0 \leq r < s$, состоит из G -эквивариантных функций с весом $\chi_r : G \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\chi_r(A) = \xi^r$, в следующем смысле: $w(g\mathbf{z}) = \chi_r(g)w(\mathbf{z})$ для любой функции $w = w_1 + iw_2 \in V_{\xi^r}$ и любых $g \in G$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. При $r = 1$ получаем (обычное) G -эквивариантное векторное поле $\mathbf{z} \mapsto (w_1(\mathbf{z}), w_2(\mathbf{z}))$. При $r = 0$ получаем пару G -инвариантных (вещественнозначных) функций $w_1, w_2 \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$.

Лемма 3.3. Частные производные $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ по переменным z, \bar{z} (см. (3)) переводят собственное пространство V_{ξ^r} в подпространства $\partial_z(V_{\xi^r}) \subseteq V_{\xi^{r-1}}$ и $\partial_{\bar{z}}(V_{\xi^r}) \subseteq V_{\xi^{r+1}}$, $0 \leq r < s$. В частности, для любой функции $w = w_1 + iw_2 \in V_{\xi^r}$ и любых $k, l \in \mathbb{Z}_+$ выполнено $w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)} \in V_{\xi^{r-k+l}}$.

Доказательство. Допуская некоторую вольность, будем обозначать $w(\mathbf{z})$ через $w(z, \bar{z})$. Дифференцируя выражение $w(\xi z, \bar{\xi} \bar{z}) = \xi^r w(z, \bar{z})$, получаем

$$\xi^{k-l} w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(\xi z, \bar{\xi} \bar{z}) = \xi^r w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(z, \bar{z}),$$

откуда $w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(\xi z, \bar{\xi} \bar{z}) = \xi^{r-k+l} w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(z, \bar{z})$, откуда $w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)} \in V_{\xi^{r-k+l}}$. \square

Следствие 3.4. Ряд Тейлора в нуле любой функции $w = w_1 + iw_2 \in V_{\xi^r}$ имеет вид

$$\sum_{s|(r-k+l)} a_{kl} z^k \bar{z}^l, \quad a_{kl} \in \mathbb{C}.$$

³Это разложение следует из представимости любой гладкой комплекснозначной функции $f \in V$ в окрестности нуля в виде суммы $f = f_0 + f_1 + \dots + f_{s-1}$, где слагаемое $f_r \in V_{\xi^r}$ находится из формулы $f_r(\mathbf{z}) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \xi^{-rj} f(A^j \mathbf{z})$. Это разложение не используется в данной работе и приводится для полноты изложения.

Доказательство. Рассмотрим ряд Тейлора функции w по переменным z, \bar{z} . Тогда коэффициент при одночлене $z^k \bar{z}^l$ равен $\frac{1}{k!l!} w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(0, 0)$. Но, согласно лемме 3.3, частная производная $w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)} \in V_{\xi^{r-k+l}}$, поэтому ее значение в начале координат равно 0, если $r - k + l$ не делится на s , что и требовалось. \square

Лемма 3.5 (описание G -эквивариантных функций с любым весом). *При любых $s \geq 1$ и $0 \leq r < s$ гладкая комплекснозначная функция $w = w_1 + iw_2 \in V = \mathcal{A}_{\mathbf{z}} + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ принадлежит подпространству V_{ξ^r} (т. е. G -эквивариантна с весом χ_r , см. замечание 3.2) тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$w = h_1 z^r + h_2 \bar{z}^{s-r}$$

для некоторых G -инвариантных комплекснозначных функций $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$. В частности, при $r = 1$ получаем общий вид G -эквивариантного векторного поля $\mathbf{w} = (w_1(\mathbf{z}), w_2(\mathbf{z}))$.

Доказательство. Нужно доказать, что любая функция $w \in V_{\xi^r}$ представима в указанном виде (обратное утверждение очевидно).

Для гладкой функции f одной переменной запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(u) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{u^k}{k!} + \frac{u^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tu)(1-t)^{n-1} dt.$$

Тогда для любой функции $w = w_1 + iw_2 \in V = \mathcal{A}_{\mathbf{z}} + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ имеем

$$\begin{aligned} w(\mathbf{z}) = w(u\mathbf{z})|_{u=1} &= \sum_{k+l < n} w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(0, 0) \frac{z^k \bar{z}^l}{k!l!} + n \sum_{k+l=n} \frac{z^k \bar{z}^l}{k!l!} \int_0^1 w_{z^k \bar{z}^l}^{(n)}(t\mathbf{z})(1-t)^{n-1} dt = \\ &= \sum_{k+l \leq n} a_{kl}(\mathbf{z}) z^k \bar{z}^l, \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_{kl}(\mathbf{z}) = \frac{1}{k!l!} w_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(0, 0)$ при $k + l < n$ и равен указанному выше интегралу при $k + l = n$.

Заметим, что если $w \in V_{\xi^r}$, то по лемме 3.3 для каждого слагаемого суммы (9) имеем

$$a_{kl}(\mathbf{z}) \in V_{\xi^{r-k+l}}. \quad (10)$$

Покажем, что в случае $n = s$ каждое слагаемое суммы (9) представимо в виде $h_1 z^r$ или $h_2 \bar{z}^{s-r}$, где $h_j \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$. Действительно: слагаемые из первой и второй сумм с $k \geq r$ имеют нужный вид $h_1 z^r$ ввиду (10), где

$$h_1 = a_{kl}(\mathbf{z}) z^{k-r} \bar{z}^l \in V_{\xi^{r-k+l}} V_{\xi^{k-r-l}} \subseteq V_{\xi^0} = \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G.$$

Для остальных слагаемых первой суммы выполнено $k < r$, и поэтому $l \geq s - r$ (действительно: $s | (r - k + l)$ по формуле для a_{kl} и следствию 3.4, откуда $l = k - r$ или $l = k - r + s$ ввиду $k + l < s$, значит $l = k - r + s \geq s - r$), что также выполнено и для остальных слагаемых второй суммы (так как $l = s - k > s - r$). Поэтому они представимы в нужном виде $h_2 \bar{z}^{s-r}$ ввиду (10), где

$$h_2 = a_{kl}(\mathbf{z}) z^k \bar{z}^{l-s+r} \in V_{\xi^{r-k+l}} V_{\xi^{k-l+s-r}} \subseteq V_{\xi^0} = \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G.$$

\square

Доказательство предложения 2.1. Из следствия 3.4 при $r = 0$ получаем условия на коэффициенты ряда Тейлора любой G -инвариантной гладкой функции $f \in V_{\xi^0}$, а именно: $a_{kl} = 0$ при $s \nmid (k - l)$. Таким образом, ненулевые слагаемые $a_{kl}z^k\bar{z}^l$ ряда Тейлора имеют вид $a_{p+sq,p}z^{p+sq}\bar{z}^p = a_{p+sq,p}|z|^{2p}z^{sq}$ и $a_{p,p+sq}z^p\bar{z}^{p+sq} = a_{p,p+sq}|z|^{2p}\bar{z}^{sq}$, где $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Из вещественнозначности функции f следует вещественнозначность ее ряда Тейлора. Получаем $\sum a_{kl}z^k\bar{z}^l = \sum \overline{a_{kl}z^k\bar{z}^l} = \sum \overline{a_{kl}}z^l\bar{z}^k = \sum \overline{a_{lk}}z^k\bar{z}^l$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах, получаем $a_{kl} = \overline{a_{lk}}$. Вклад пары одночленов $e_{kl} = z^k\bar{z}^l$, $e_{lk} = \overline{e_{kl}}$ в ряд Тейлора имеет вид $a_{kl}e_{kl} + \overline{a_{kl}e_{kl}} = 2\text{Re}(a_{kl}e_{kl}) = 2\text{Re}(a_{p+sq,p}|z|^{2p}z^{sq})$, где $k = p + sq$, $l = p \leq k = p + sq$ (остальные пары одночленов дают нулевой вклад ввиду G -инвариантности функции, см. выше). Мы получили требуемый вид ряда Тейлора.

Отсюда легко следует, во-первых, что в качестве базиса векторного пространства $\mathbb{R}[x, y]^G$ можно взять $e_{kl} + e_{lk} = 2\text{Re}(z^k\bar{z}^l)$, $l \leq k$, и $i(e_{kl} - e_{lk}) = -2\text{Im}(z^k\bar{z}^l)$, $l < k$, где $s \mid (k - l)$. Во-вторых, алгебра $\mathbb{R}[x, y]^G$ мультипликативно порождена однородными многочленами $z\bar{z}$, $\text{Re}(z^s)$ и $\text{Im}(z^s)$. \square

4. Вычисление G -градиентного идеала

В этом разделе мы напомним определение G -градиентного идеала инвариантного ростка и вычислим его для любого ростка $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ из обозначения 2.5.

Для любой гладкой вещественнозначной функции $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ имеем $f'_z = \overline{f'_z}$ ввиду (3). Вычислим, используя формулы (3), производную функции f вдоль любого векторного поля $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$:

$$v_1 f'_x + v_2 f'_y = (v_1 + iv_2)f'_z + (v_1 - iv_2)f'_{\bar{z}} = 2\text{Re}((v_1 + iv_2)f'_z) = 2\text{Re}(v f'_z).$$

Определение 4.1. G -градиентным идеалом G -инвариантного ростка $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$ называется векторное пространство

$$I_{\nabla f}^G := \{v f'_z + \bar{v} f'_{\bar{z}} = 2\text{Re}(v f'_z) \mid \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{z}) - G\text{-эквивариантное векторное поле}\}$$

(то, что $I_{\nabla f}^G$ действительно является идеалом алгебры $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$, следует из предложения 4.2 ниже). Число $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G / I_{\nabla f}^G)$ называется G -кратностью Милнора критической точки $(0, 0)$ функции f .

Для любых элементов f_1, \dots, f_N алгебры $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$ обозначим через $(f_1, \dots, f_N)^G$ ее идеал, порожденный этими элементами.

Предложение 4.2 (описание порождающих G -градиентного идеала). G -градиентный идеал любого G -инвариантного ростка $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$ имеет вид

$$I_{\nabla f}^G = (\text{Re} f_j, \text{Im} f_j, j = 1, 2)^G, \quad \text{где } f_1(\mathbf{z}) := z f'_z(\mathbf{z}), \quad f_2(\mathbf{z}) := z^{s-1} f'_{\bar{z}}(\mathbf{z}).$$

В частности, $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$, и $I_{\nabla f}^G$ является идеалом алгебры $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$.

Доказательство. По определению G -градиентный идеал $I = I_{\nabla f}^G$ состоит из выражений вида $v_1 f'_x + v_2 f'_y = 2\text{Re}((v_1 + iv_2)f'_z)$, где $v = v_1 + iv_2$ — G -эквивариантная комплекснозначная функция (т. е. векторное поле $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ G -эквивариантно). Условие G -эквивариантности поля \mathbf{v} равносильно (ввиду предложения 3.1) условию

$$v_1 + iv_2 = v(\mathbf{z}) = h_1(\mathbf{z})z + h_2(\mathbf{z})\bar{z}^{s-1},$$

где $h_j(\mathbf{z})$ — любые G -инвариантные комплекснозначные функции. Получаем, что I состоит из элементов вида

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}((v_1 + iv_2)f'_z) &= 2\operatorname{Re}((h_1(\mathbf{z})z + h_2(\mathbf{z})\bar{z}^{s-1})f'_z) = \\ &= 2\operatorname{Re}(h_1(\mathbf{z})zf'_z) + 2\operatorname{Re}(h_2(\mathbf{z})\bar{z}^{s-1}f'_z) = 2\operatorname{Re}(h_1(\mathbf{z})f_1) + 2\operatorname{Re}(\overline{h_2(\mathbf{z})}f_2), \end{aligned}$$

что и требовалось. Здесь мы опять воспользовались соотношением $\overline{f'_z} = f'_{\bar{z}}$. \square

Предложение 4.3 (описание идеалов алгебры $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$, порожденных одночленами). Пусть $E \subseteq \{(k, l) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid 0 \leq l \leq k, s|(k-l)\}$ — подмножество целочисленного квадранта \mathbb{Z}_+^2 , содержащее точку $(sn, 0)$ для некоторого $n > 0$. Пусть

$$I_E^G := (\operatorname{Re}(z^\alpha \bar{z}^\beta), \operatorname{Im}(z^\alpha \bar{z}^\beta) \mid (\alpha, \beta) \in E)^G$$

— идеал алгебры $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$, порожденный вещественными и мнимыми частями одночленов $z^\alpha \bar{z}^\beta$, $(\alpha, \beta) \in E$. Тогда верно равенство $I_E^G = \hat{I}_E^G$, где

$$\hat{I}_E^G := \{f \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G \mid c_{p,q}(f) = 0, p, q \in \mathbb{Z}_+, (p+sq, p) \notin \bigcup_{(\alpha, \beta) \in E} ((\alpha, \beta) + \mathbb{R}_+^2)\},$$

$c_{p,q}(f)$ — коэффициент ряда Тейлора (1) ростка f .

Доказательство. Покажем сначала, что $I_E^G \subseteq \hat{I}_E^G$. По предложению 2.1 любой одночлен $e_{\alpha\beta} = z^\alpha \bar{z}^\beta$, $(\alpha, \beta) \in E$, является G -инвариантным, т. е. принадлежит алгебре $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$. Если точка $(p+sq, p)$ не принадлежит положительному квадранту с вершиной в точке (α, β) , то верно хотя бы одно из условий: 1) $p+sq < \alpha$, 2) $p < \beta$ (откуда $p < \alpha$).

В первом (соотв. втором) случае для любой гладкой функции $h = h_{\alpha\beta} \in V = \mathcal{A}_{\mathbf{z}} + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ частная производная $(he_{\alpha\beta})_{z^{p+sq}}^{(p+sq)} \in e_{\alpha-p-sq, 0}V$ (соотв. $(he_{\alpha\beta})_{\bar{z}^p}^{(p)} \in e_{0, \beta-p}V$), откуда в начале координат $(he_{\alpha\beta})_{z^{p+sq}\bar{z}^p}^{(2p+sq)}(0, 0) = 0$; аналогично частная производная $(he_{\alpha\beta})_{\bar{z}^p}^{(p)} \in e_{\alpha-p, 0}V$, откуда в начале координат $(he_{\alpha\beta})_{z^p\bar{z}^{p+sq}}^{(2p+sq)}(0, 0) = 0$. Значит, в случае $h \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$ коэффициент ряда Тейлора $c_{p,q}(he_{\alpha\beta}) = 0$.

В обоих случаях получаем, что если $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$, то $h_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} \in \hat{I}_E^G + i\hat{I}_E^G$. Отсюда получаем, что $I_E^G + iI_E^G \subseteq \hat{I}_E^G + i\hat{I}_E^G$, откуда $I_E^G \subseteq \hat{I}_E^G$.

Покажем теперь, что $\hat{I}_E^G \subseteq I_E^G$. Рассмотрим любую функцию $f \in \hat{I}_E^G$. Запишем формулу Тейлора степени $2sn$ для функции f , аналогичную (9):

$$f(x, y) = \sum_{k+l \leq 2sn} a_{kl}(\mathbf{z})z^k \bar{z}^l, \quad (11)$$

где

$$a_{kl}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \frac{1}{k!l!} f_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(0, 0), & k+l < 2sn; \\ \frac{2sn}{k!l!} \int_0^1 f_{z^k \bar{z}^l}^{(2sn)}(tz, t\bar{z})(1-t)^{2sn-1} dt, & k+l = 2sn. \end{cases}$$

Так как f является G -инвариантной, то $a_{kl} \in V_{\xi^{l-k}}$ в силу (10) при $r = 0$.

Покажем, что каждое слагаемое в (11) представимо в виде

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in E} (h_{\alpha, \beta}(\mathbf{z})z^\alpha \bar{z}^\beta + h_{\beta, \alpha}(\mathbf{z})z^\beta \bar{z}^\alpha), \quad (12)$$

где $h_{\alpha,\beta}, h_{\beta,\alpha} \in V_{\xi^0} = \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$. Действительно: если $(\alpha, \beta) \in E$ и $(k, l) \in (\alpha, \beta) + \mathbb{R}_+^2$, то $k \geq \alpha$, $l \geq \beta$, и слагаемое $a_{k,l}(\mathbf{z})z^k\bar{z}^l$ автоматически имеет нужный вид $h_{\alpha,\beta}e_{\alpha,\beta}$, где

$$h_{\alpha,\beta} = a_{k,l}(\mathbf{z})z^{k-\alpha}\bar{z}^{l-\beta} \in V_{\xi^{l-k}}V_{\xi^{k-\alpha-l+\beta}} \subseteq V_{\xi^0},$$

а слагаемое $a_{l,k}(\mathbf{z})z^l\bar{z}^k$ автоматически имеет нужный вид $h_{\beta,\alpha}e_{\beta,\alpha}$, где

$$h_{\beta,\alpha} = a_{l,k}(\mathbf{z})z^{l-\beta}\bar{z}^{k-\alpha} \in V_{\xi^{k-l}}V_{\xi^{l-\beta-k+\alpha}} \subseteq V_{\xi^0}.$$

Покажем, что остальные слагаемые равны нулю. Действительно: все такие слагаемые разбиваются на пары $a_{k,l}(\mathbf{z})z^k\bar{z}^l$ и $a_{l,k}(\mathbf{z})z^l\bar{z}^k$, где $0 \leq l \leq k$ и $k+l < 2sn$ (так как ни одна из точек (k, l) и (l, k) не принадлежит положительному квадранту с вершиной в точке $(sn, 0) \in E$). Значит, $s|(k-l)$ по формуле для a_{kl} и следствию 3.4 для $r=0$, поэтому $a_{k,l}(\mathbf{z}) = \frac{1}{k!l!}f_{z^k\bar{z}^l}^{(k+l)}(0,0) = 0$ ввиду условия $c_{l,(k-l)/s}(f) = 0$ на коэффициенты ряда Тейлора. Имеем $a_{l,k}(\mathbf{z}) = \overline{a_{k,l}(\mathbf{z})} = 0$.

Таким образом, функция f представима в виде суммы (12). Так как f вещественнозначна, то она совпадает со своей вещественной частью, а потому

$$f = \operatorname{Re} \sum_{(\alpha,\beta) \in E} (h_{\alpha,\beta}(\mathbf{z})z^\alpha\bar{z}^\beta + h_{\beta,\alpha}(\mathbf{z})z^\beta\bar{z}^\alpha),$$

где $h_{\alpha,\beta}, h_{\beta,\alpha} \in V_{\xi^0} = \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$. Это и означает, что $f \in I_E^G$. \square

Предложение 4.4 (описание G -градиентного идеала ростка $f_{s,k,a}$). Для любого $s \geq 2$ идеал $I_{\nabla f_{s,k,a}}^G$ содержит вещественные и мнимые части следующих одночленов: $|z|^{2k}z^s$, $|z|^{4k+2}$ и z^{2s} (соотв. $|z|^{2k-sj}z^{s+sj}$ и z^{s+sq} , $-1 \leq j < q = \lceil \frac{2k}{s} \rceil$) в случаях (i)–(iii) (соотв. (iv)) из определения 2.2.

Доказательство. Обозначим росток $f_{s,k,a} = f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ через $g = g(\mathbf{z})$. Согласно предложению 4.2, $I := I_{\nabla g}^G$ — это идеал алгебры $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$, порожденный вещественными и мнимыми частями ростков $g_1(\mathbf{z}) = zg'_z(\mathbf{z})$ и $g_2(\mathbf{z}) = z^{s-1}g'_{\bar{z}}(\mathbf{z})$. Поэтому $I + iI$ — это идеал алгебры $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$ (над полем \mathbb{C}), порожденный ростками g_1 и g_2 . Достаточно доказать, что три одночлена из условия предложения принадлежат идеалу $I + iI$. Рассмотрим случаи (i)–(iv).

Случай (i): $s > 2(k+1)$. Если $k=0$, то $g(\mathbf{z}) = \pm|z|^2 = \pm z\bar{z}$, $g_1(\mathbf{z}) = zg'_z(\mathbf{z}) = \pm|z|^2$, $g_2(\mathbf{z}) = z^{s-1}g'_{\bar{z}}(\mathbf{z}) = \pm z^s$. Поэтому все три одночлена из условия предложения

$$h := |z|^{2k}z^s, \quad h_1 := |z|^{4k+2}, \quad h_2 := z^{2s} \quad (13)$$

принадлежат идеалу $I + iI$, порожденному g_1 и g_2 .

Пусть $k \geq 1$. Имеем $g(\mathbf{z}) = f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(z^s) + \sum_{j=1}^m a_j|z|^{2(k+j)}$, где $a_1 \neq 0$, $m = k$. Поэтому

$$g_1(\mathbf{z}) = zg'_z(\mathbf{z}) = \frac{s}{2}z^s + \sum_{j=1}^k (k+j)a_j|z|^{2(k+j)},$$

$$g_2(\mathbf{z}) = z^{s-1}g'_{\bar{z}}(\mathbf{z}) = \frac{s}{2}|z|^{2(s-1)} + \sum_{j=1}^k (k+j)a_j|z|^{2(k+j-1)}z^s.$$

По предложениям 2.1 и 4.2 и по определению идеала имеем

$$g_j^{p,q} := |z|^{2p}z^{sq}g_j = z^{p+sq}\bar{z}^p g_j \in I + iI \quad \text{для любых } p, q \in \mathbb{Z}_+ \text{ и } j = 1, 2. \quad (14)$$

Для любого многочлена $P(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+} a_{\alpha, \beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$ рассмотрим носитель

$$\text{supp } P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid a_{\alpha, \beta} \neq 0\}. \quad (15)$$

Носители одночленов (35) показаны в виде трех белых кружков на рис. 2.

Определим *усеченный трехчлен* $\hat{g} = \text{Re}(z^s) + a_1 |z|^{2(k+1)}$, полученный из многочлена g откидыванием слагаемых при a_2, \dots, a_k . Рассмотрим соответствующие *усеченные двухчлены*

$$\hat{g}_1(\mathbf{z}) = \frac{s}{2} z^s + (k+1)a_1 |z|^{2(k+1)}, \quad \hat{g}_2(\mathbf{z}) = \frac{s}{2} |z|^{2(s-1)} + (k+1)a_1 |z|^{2k} z^s.$$

Изобразим каждый усеченный двухчлен

$$\hat{g}_j^{p,q} := |z|^{2p} z^{sq} \hat{g}_j, \quad j = 1, 2,$$

в виде направленного отрезка, соединяющего точки его носителя (рис. 2). А именно: усеченный двухчлен $\hat{g}_1^{p,q}$ (соотв. $\hat{g}_2^{p,q}$) изобразим в виде тонкого (соотв. жирного) вектора, ведущего из точки $(s, 0) + (p + sq, p)$ в точку $(k+1, k+1) + (p + sq, p)$ (соотв. из точки $(s-1, s-1) + (p + sq, p)$ в точку $(k+s, k) + (p + sq, p)$). При этом направление на любом ребре таково, что отвечающий ему усеченный двухчлен имеет коэффициенты $s/2$ и $(k+1)a_1$ при одночленах, отвечающих начальной и конечной вершинам ребра, соответственно.

Получаем ориентированный граф с вершинами в точках квадранта \mathbb{Z}_+^2 , тонкими ребрами $\hat{g}_1^{p,q}$ и жирными ребрами $\hat{g}_2^{p,q}$ (рис. 2, 4). Допуская некоторую вольность изложения, будем отождествлять любую вершину (α, β) с соответствующим одночленом $z^\alpha \bar{z}^\beta$, а любое ребро — с соответствующим усеченным двухчленом $\hat{g}_j^{p,q}$, $j = 1, 2$.

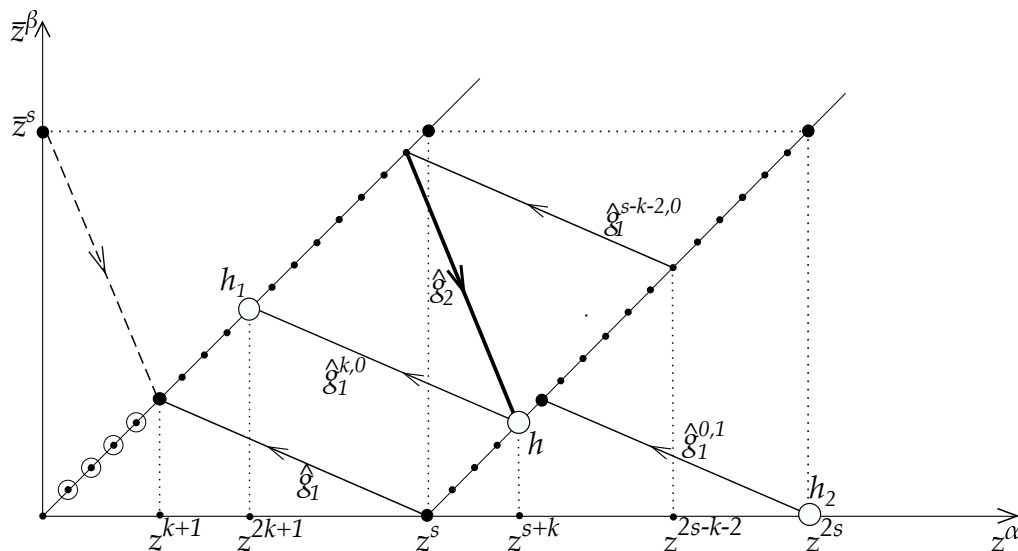


Рис. 2: Граф, ребра которого изображают элементы $g_j^{p,q}$ комплексифицированного G -градиентного идеала ростка $g = f_{s,k,a}$, в случае (i), т. е. при $s > 2(k+1)$, $k \geq 1$ (на примере случая $s = 17$, $k = 4$)

Первый интересующий нас одночлен h (см. формулу (35)) изображен в виде вершины $(s+k, k)$ графа (средний белый кружок на рис. 2). Проведем из вершины h двухзвенную ломаную, состоящую из ребер \hat{g}_2 и $\hat{g}_1^{s-k-2,0}$. Так как конечная вершина

этой ломаной (отличная от начальной вершины h) принадлежит положительному квадранту с вершиной в точке h и не совпадает с самой вершиной h , то

$$h + c_1 \hat{g}_2 + c_2 \hat{g}_1^{s-k-2,0} = h\hat{Q} \quad (16)$$

для некоторых констант $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ и одночлена $\hat{Q} = \hat{Q}(|z|^2, z^s)$ с комплексными коэффициентами такого, что $\hat{Q}(0, 0) = 0$ (в действительности, обе константы и одночлен вещественны и имеют вид $c_1 = -1/((k+1)a_1)$, $c_2 = -(c_1 s/2)/((k+1)a_1)$, $\hat{Q} = \hat{Q}(|z|^2) = (c_2 s/2)|z|^{2(s-2k-2)}$). Заменяя усеченные двухчлены $\hat{g}_j^{p,q}$ на неусеченные многочлены (14), получим аналогичное соотношение:

$$h + g_2 P + c_2 g_1^{s-k-2,0} = hQ, \quad (17)$$

где $P = P(|z|^2)$ и $Q = Q(|z|^2)$ — G -инвариантные многочлены и $Q(0) = \hat{Q}(0) = 0 \neq 1$ (в действительности, оба многочлена P и Q имеют вещественные коэффициенты и $P = P(|z|^2) = -(2c_2/s) \sum_{j=1}^k (k+j)a_j |z|^{2j-2}$). Так как в соотношении (17) многочлены $g_1^{p,q}, g_2$ принадлежат идеалу $I + iI$ (см. (14)), то

$$h(1 - Q) \in I + iI.$$

Отсюда заключаем, что $h \in I + iI$ ввиду обратимости многочлена $1 - Q$ в кольце $\mathcal{A}_z^G + i\mathcal{A}_z^G$ ростков гладких функций в нуле.

Итак, $h \in I + iI$. Отсюда с помощью ребер $\hat{g}_1^{k,0}$ и $\hat{g}_1^{0,1}$ получаем, что оставшиеся два одночлена $h_1 = |z|^{4k+2}$ и $h_2 = z^{2s}$ (изображенные в виде левого и правого белых кружков на рис. 2) тоже принадлежат $I + iI$. Действительно: так как ребро $\hat{g}_1^{k,0}$ соединяет вершины h и h_1 (рис. 2), то

$$h + c_3 \hat{g}_1^{k,0} = c_4 h_1$$

для некоторых ненулевых констант c_3, c_4 . Заменяя усеченный двухчлен $\hat{g}_1^{k,0}$ на многочлен $g_1^{k,0}$, получим

$$h + c_3 g_1^{k,0} = (c_4 + Q_1) h_1$$

для некоторого многочлена $Q_1 = Q_1(|z|^2)$ такого, что $Q_1(0) = 0$. Но левая часть полученного соотношения принадлежит идеалу $I + iI$ (ввиду $h, g_1^{k,0} \in I + iI$), а многочлен $c_4 + Q_1$ обратим в кольце $\mathcal{A}_z^G + i\mathcal{A}_z^G$. Поэтому $h_1 \in I + iI$.

Так как ребро $\hat{g}_1^{0,1}$ соединяет вершины h_2 и $h|z|^2$, то

$$h_2 + c_5 \hat{g}_1^{0,1} = c_6 h|z|^2$$

для некоторых констант c_3, c_4 . Заменяя усеченный двухчлен $\hat{g}_1^{0,1}$ на многочлен $g_1^{0,1}$, получим

$$h_2 + c_5 g_1^{0,1} = hQ_2$$

для некоторого многочлена $Q_2 = Q_2(|z|^2)$. Но $h, g_1^{0,1} \in I + iI$, поэтому $h_2 \in I + iI$.

Случай (ii): $s = 2k + 1$, $k \geq 1$. Имеем $g(\mathbf{z}) = f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(z^s) + \sum_{j=1}^m a_j |z|^{2(k+j)}$, где $a_1 \neq 0$, $m = k - 1$. Поэтому

$$g_1(\mathbf{z}) = z g'_z(\mathbf{z}) = \frac{s}{2} z^s + \sum_{j=1}^{k-1} (k+j) a_j |z|^{2(k+j)},$$

$$g_2(\mathbf{z}) = z^{s-1} g'_z(\mathbf{z}) = \frac{s}{2} |z|^{2(s-1)} + \sum_{j=1}^{k-1} (k+j) a_j |z|^{2(k+j-1)} z^s.$$

Если $a = (a_1, \dots, a_{k-1}) = (0, \dots, 0)$, то $g_1 = \frac{s}{2} z^s$ и $g_2 = \frac{s}{2} |z|^{2(s-1)}$, т. е. идеал $I + iI$ порожден одночленами g_1, g_2 . Согласно предложению 4.3, имеем $I = I_E^G = \hat{I}_E^G$ для $E = \{(0, 1), (s-1, s-1)\}$ в обозначениях этого предложения. Отсюда очевидно, что $I + iI$ содержит три требуемых одночлена $|z|^{2k} z^s, |z|^{4k+2}, z^{2s}$.

Пусть теперь $a = (a_1, \dots, a_{k-1}) \neq (0, \dots, 0)$. Определим число $k_1 \in [k, 2k-2]$ условиями $a_1 = \dots = a_{k_1-k} = 0$ и $a_{k_1-k+1} \neq 0$. Рассмотрим усеченный трехчлен $\hat{g} = \text{Re}(z^s) + a_{k_1-k+1} |z|^{2(k_1+1)}$, полученный из многочлена g откидыванием слагаемых при $a_{k_1-k+2}, \dots, a_{k-1}$, и соответствующие усеченные двухчлены

$$\hat{g}_1(\mathbf{z}) = \frac{s}{2} z^s + (k_1+1) a_{k_1-k+1} |z|^{2(k_1+1)}, \quad \hat{g}_2(\mathbf{z}) = \frac{s}{2} |z|^{2(s-1)} + (k_1+1) a_{k_1-k+1} |z|^{2k_1} z^s.$$

Аналогично случаю (i) изобразим каждый усеченный двухчлен

$$\hat{g}_j^{p,q} := |z|^{2p} z^{sq} g_j, \quad j = 1, 2,$$

в виде направленного отрезка (рис. 3).

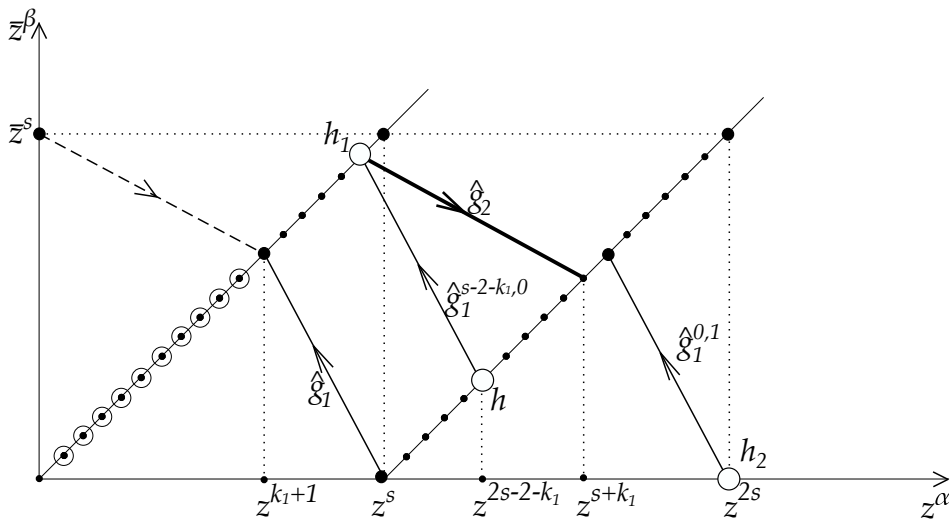


Рис. 3: Граф, ребра которого изображают элементы $g_j^{p,q}$ комплексифицированного G -градиентного идеала ростка $g = f_{s,k,a}$, в случае (ii), т. е. при $s = 2k+1, s-3 \geq k_1 \geq k \geq 1$ (на примере случая $s = 17, k_1 = 10$)

На полученном ориентированном графе отметим три вершины (в виде белых кружков), отвечающие трем одночленам

$$h = |z|^{2(s-2-k_1)} z^s, \quad h_1 = |z|^{2s-2}, \quad h_2 = z^{2s}.$$

Из вершины h проведем двухзвенную ломаную с ребрами $\hat{g}_1^{s-2-k_1, 0}$ и \hat{g}_2 . Заметим, что конечная вершина этой ломаной (отличная от начальной вершины h) принадлежит положительному квадранту с вершиной в точке h и не совпадает с самой вершиной h . Рассуждая как в случае (i), заключаем, что $h \in I + iI$.

Отсюда с помощью ребер $\hat{g}_1^{s-2-k_1, 0}$ и $\hat{g}_1^{0, 1}$ получаем (повторяя рассуждения случая (i)), что оставшиеся два одночлена h_1 и h_2 (изображенные в виде левого и правого белых кружков на рис. 3) тоже принадлежат $I + iI$.

Осталось заметить, что, так как $h, h_1, h_2 \in I + iI$, то три одночлена из условия предложения тоже принадлежат идеалу $I + iI$.

Случай (iii): $s = 2(k + 1)$. Если $k = 0$, то $g(\mathbf{z}) = \pm x^2 \pm y^2$, $g_1(\mathbf{z}) = zg'_z(\mathbf{z}) = \pm x \mp iy$, откуда $x, y \in I$ (так как $\operatorname{Re}(g_1), \operatorname{Im}(g_1) \in I$). Значит, любая нечетная функция от x, y принадлежит идеалу I . Поэтому все три одночлена из условия предложения принадлежат идеалу $I + iI$.

Пусть $k \geq 1$. Имеем $g(\mathbf{z}) = f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(z^s) + \sum_{j=1}^m a_j |z|^{2(k+j)}$, где $a_1 \neq \pm 1$, $m = s/2 - 1$. Поэтому

$$g_1(\mathbf{z}) = zg'_z(\mathbf{z}) = \frac{s}{2}z^s + \sum_{j=1}^k (k+j)a_j |z|^{2(k+j)},$$

$$g_2(\mathbf{z}) = z^{s-1}g'_z(\mathbf{z}) = \frac{s}{2}|z|^{2(s-1)} + \sum_{j=1}^k (k+j)a_j |z|^{2(k+j-1)}z^s$$

принадлежат идеалу $I + iI$, согласно предложению 4.2. Нам нужно показать, что три одночлена (35) тоже принадлежат идеалу $I + iI$.

Перейдем к усеченным двухчленам

$$\hat{g}_1 = \frac{s}{2}z^s + (k+1)a_1 |z|^{2(k+1)}, \quad \hat{g}_2 = \frac{s}{2}|z|^{2(s-1)} + (k+1)a_1 |z|^{2k}z^s.$$

Рассматривая усеченные двухчлены $\hat{g}_j^{p,q} := \hat{g}_j |z|^{2p}z^{sq}$ как ребра соответствующего ориентированного графа и рассуждая как в случае (i), выпустим из вершины $h = |z|^{s-2}z^s$ двухзвенную ломаную, образованную жирным ребром \hat{g}_2 и тонким ребром $\hat{g}_1^{s-k-2,0} = \hat{g}_1^{s/2-1,0}$. Эта ломаная является петлей, т. е. начинается и заканчивается в вершине h . Рассуждая как в случае (i), получаем соотношение (16) для некоторых констант c_1, c_2 и многочлена $\hat{Q} = \hat{Q}(|z|^2)$ такого, что $\hat{Q}(0) \neq 1$ ввиду условия $a_1 \neq \pm 1$ (действительно: константы c_1, c_2 и одночлен \hat{Q} вычисляются по тем же формулам, что и в случае (i), а именно: $c_1 = -1/((k+1)a_1)$, $c_2 = -(c_1 s/2)/((k+1)a_1)$, $\hat{Q} = \hat{Q}(|z|^2) = (c_2 s/2)|z|^{2(s-2k-2)} = c_2 s/2$, откуда $\hat{Q}(0) = \hat{Q} = (s/2)^2/((k+1)a_1)^2 = 1/a_1^2 \neq 1$).

Заменяя усеченные двухчлены $\hat{g}_j^{p,q}$ на неусеченные многочлены, получаем соотношение (17) для некоторых многочленов $P = P(|z|^2)$ и $Q = Q(|z|^2)$ таких, что $Q(0) = \hat{Q} \neq 1$. Аналогично случаю (i) заключаем, что $h(1-Q) \in I + iI$. Отсюда сразу получаем, что $h \in I + iI$ ввиду обратимости многочлена $1-Q$ в кольце $\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^G$ ростков гладких функций в нуле.

Из принадлежности $h \in I + iI$ выводится, что $h_1, h_2 \in I + iI$, так же, как в случае (i).

Случай (iv): четное $s \leq 2k$. Имеем $g(\mathbf{z}) = f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(z^s) \pm |z|^s + \sum_{j=1}^m a_j |z|^{2(k+j)}$, где $a_1 \neq 0$ и $m = s/2 - 1$ при $s \geq 3$, $a_1 = \pm 1$ и $m = 1$ при $s = 2$. Поэтому

$$g_1(\mathbf{z}) = zg'_z(\mathbf{z}) = \frac{s}{2}z^s \pm \frac{s}{2}|z|^s + \sum_{j=1}^m (k+j)a_j |z|^{2(k+j)},$$

$$g_2(\mathbf{z}) = z^{s-1}g'_z(\mathbf{z}) = \frac{s}{2}|z|^{2(s-1)} \pm \frac{s}{2}|z|^{s-2}z^s + \sum_{j=1}^m (k+j)a_j |z|^{2(k+j-1)}z^s$$

принадлежат идеалу $I + iI$, согласно предложению 4.2. Нам нужно показать, что одночлены $h = |z|^{2k}z^s$, $h_1 = |z|^{2k+s}$, $h'_j = |z|^{2k-sj}z^{s+sj}$ и $h_2 = z^{s+sq}$, $1 \leq j < q = \lceil \frac{2k}{s} \rceil$, тоже принадлежат $I + iI$.

Рассмотрим усеченные трехчлен $\hat{g} = \operatorname{Re}(z^s) \pm |z|^s$ и четырехчлен $\tilde{g} = \hat{g} + a_1|z|^{2(k+1)}$ и соответствующие усеченные двухчлены и трехчлены

$$\hat{g}_1 = \frac{s}{2}z^s \pm \frac{s}{2}|z|^s, \quad \tilde{g}_1 = \hat{g}_1 + (k+1)a_1|z|^{2(k+1)},$$

$$\hat{g}_2 = \frac{s}{2}|z|^{2(s-1)} \pm \frac{s}{2}|z|^{s-2}z^s, \quad \tilde{g}_2 = \hat{g}_2 + (k+1)a_1|z|^{2k}z^s.$$

Как в случае (iii), выпустим из вершины $|z|^{s-2}z^s$ двухзвенную ломаную, образованную жирным ребром \hat{g}_2 и тонким ребром $\hat{g}_1^{s/2-1,0}$. Эта ломаная является петлей, т. е. начинается и заканчивается в вершине $|z|^{s-2}z^s$. Складывая усеченные двухчлены или трехчлены, отвечающие этим ребрам, получим $\hat{g}_2 \mp \hat{g}_1^{s/2-1,0} = 0$, но $\tilde{g}_2 \mp \tilde{g}_1^{s/2-1,0} = (k+1)a_1(h \mp h_1)$, т. е. линейную комбинацию одночленов h и h_1 . Сумма неусеченных многочленов имеет вид $g_2 \mp g_1^{s/2-1,0} = (k+1)a_1Q_1[h \mp h_1]$ для некоторого многочлена $Q_1 = Q_1(|z|^2)$, $Q_1(0) = 1$. Но одночлены h и h_1 — это концы ребра $\hat{g}_2^{k+1-s/2,0}$, поэтому $h_1 = \frac{2}{s}g_2^{k+1-s/2,0} \mp Q_2h$ для некоторого многочлена $Q_2 = Q_2(|z|^2)$, $Q_2(0) = 1$. Подставляя, получаем $g_2 \mp g_1^{s/2-1,0} = (k+1)a_1Q_1[(1+Q_2)h \mp \frac{2}{s}g_2^{k+1-s/2,0}]$. Так как $g_j^{p,q} \in I + iI$, то сразу получаем, что $h \in I + iI$, ввиду обратимости многочлена $Q_1(1+Q_2)$ в кольце $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^G + i\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^G$ ростков в нуле гладких функций. С помощью ребер $\hat{g}_1^{k-j s/2, j}$, $0 \leq j < q = \lceil 2k/s \rceil$, и $\hat{g}_1^{0,q}$ отсюда выводится, что $h_1, h'_j, h_2 \in I + iI$.

Предложение 4.4 доказано. \square

5. Как меняется G -инвариантный ряд Тейлора при G -эквивариантной замене координат?

В этом разделе мы опишем «ведущий» член разности $f(\mathbf{w}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z})$ для G -эквивариантной замены координат $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{w}(\mathbf{z})$ при условии, что в ряде Тейлора в нуле функции f обнуляются коэффициенты, отвечающие целым точкам, лежащим внутри некоторого плоского многоугольника «хорошего вида».

Замечание 5.1. Ввиду предложений 2.1 и 3.1 любая G -эквивариантная полиномиальная замена координат $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{w}(\mathbf{z})$ имеет вид

$$w(\mathbf{z}) = \sum_{p,q \geq 0} (a_{p,q}|z|^{2p}z^{sq+1} + b_{p,q}|z|^{2p}\bar{z}^{sq+s-1}), \quad \text{где } a_{p,q}, b_{p,q} \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

$s = |G|$. Замена регулярна (т. е. является диффеоморфизмом вблизи нуля) тогда и только тогда, когда либо $s \geq 3$ и $a_{0,0} \neq 0$, либо $s \leq 2$ и $(a_{0,0}, b_{0,2-s}) \neq (0, 0)$. Далее в этом разделе мы будем предполагать, что замена (18) имеет вид $z \mapsto z + v(\mathbf{z})$, где $v(0, 0) = 0$ и линеаризация v в нуле равна нулю (т. е. $a_{0,0} = 1$ и либо $s \geq 3$, либо $s = 2$ и $b_{0,0} = 0$, либо $s = 1$ и $b_{0,1} = 0$).

Пусть $L = A_1 \dots A_N$ — плоская ломаная без самопересечений в положительном квадранте \mathbb{R}_+^2 с концами в точках $A_1 = (\alpha_0, 0)$ и $A_N = (0, \beta_0)$ на координатных осях, $\alpha_0, \beta_0 > 1$, все вершины которой кроме концов имеют целые положительные

координаты. Согласно теореме Жордана, замкнутая ломаная $A_0A_1 \dots A_N$, где $A_0 = (0, 0)$, ограничивает компактную область (многоугольник), которую обозначим через Δ_L (отметим, что $L \subset \partial\Delta_L \subset \Delta_L$). Пусть I_L — идеал алгебры $V = \mathcal{A}_{\mathbf{z}} + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ над полем \mathbb{C} , порожденный одночленами $z^\alpha \bar{z}^\beta$, отвечающими всем точкам $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \Delta_L$.

Техническая лемма 5.2. Пусть $s = |G| \geq 1$. Пусть $L = A_1 \dots A_N$ — плоская ломаная в \mathbb{R}_+^2 с вершинами $A_j = (\alpha_j, \beta_j)$, где $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$ и $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_N = 0$ — две последовательности целых чисел такие, что

$$\frac{1}{\sigma - 1} < \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{\beta_j - \beta_{j+1}} < \sigma - 1 \quad \text{при } 1 \leq j < N, \quad (19)$$

где $\sigma = s$ при $s \geq 3$, $\sigma = s + 2$ при $s = 1, 2$. Пусть $g \in \mathbb{C}[x, y]$ — многочлен с носителем на ломаной L (т. е. g имеет вид $g = g(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^N a_j z^{\alpha_j} \bar{z}^{\beta_j}$, где $a_j \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$). Тогда для любой гладкой функции $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}} + i\mathcal{A}_{\mathbf{z}}$ такой, что $f - g \in I_L$, и любого G -эквивариантного гладкого векторного поля $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, значение и линейризация которого в нуле равны нулю, выполнено $f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z}) \in I_L$.

Доказательство. Рассмотрим плоский сектор $S = S_\sigma \subset \mathbb{R}^2$ с вершиной в точке $(0, 0)$, построенный на векторах $(\sigma - 1, -1)$ и $(-1, \sigma - 1)$:

$$S = \{t(\sigma - 1, -1) + u(-1, \sigma - 1) \mid t, u \in \mathbb{R}_+\}.$$

Из условия (19) наклон ребер ломаной следует, что любой сдвинутый сектор $(\alpha', \beta') + S$ с вершиной $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Delta_L$ не пересекает многоугольник Δ_L , а любой сдвинутый сектор $(\alpha, \beta) + S$ с вершиной $(\alpha, \beta) \in L$ пересекает многоугольник Δ_L в точности по своей вершине, т. е.

$$(\alpha', \beta') + S \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_L, \quad ((\alpha, \beta) + S) \setminus \{(\alpha, \beta)\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_L. \quad (20)$$

Рассмотрим комплекснозначную функцию $v = v_1 + iv_2$, где $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — векторное поле из условия леммы. Так как G -эквивариантная замена координат $\mathbf{w}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})$ имеет вид $w(\mathbf{z}) = z + v(\mathbf{z})$ из замечания 5.1, то $v_{z_j}^{(j)}(0, 0) = v_{\bar{z}_j}^{(j)}(0, 0) = 0$ при любом $j < \sigma - 1$. Поэтому носитель (см. (15))

$$\text{supp } v \subset ((k, l) + S) \setminus \{(k, l)\} \quad \text{для любой точки } (k, l) \in \{(1, 0), (0, 1)\}. \quad (21)$$

Достаточно показать, что для любого одночлена $e_{\alpha, \beta}(\mathbf{z}) = z^\alpha \bar{z}^\beta$ выполнено

$$\text{supp } [e_{\alpha, \beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha, \beta}(\mathbf{z})] \subset ((\alpha, \beta) + S) \setminus \{(\alpha, \beta)\}. \quad (22)$$

Действительно: из (22) и (20) следует, что носители (см. (15)) следующих ростков не пересекаются с многоугольником Δ_L : ростков $e_{\alpha, \beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha, \beta}(\mathbf{z})$ и $e_{\alpha', \beta'}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))$ для любой вершины $(\alpha, \beta) \in L$ и любой точки $(\alpha', \beta') \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \Delta_L$, а потому и ростка $f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - g(\mathbf{z})$. Значит, эти ростки принадлежат идеалу I_L по определению идеала I_L , что и требовалось.

Докажем соотношение (22) индукцией по $\max(\alpha, \beta)$. Для $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ имеем $e_{1,0}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{1,0}(\mathbf{z}) = v(\mathbf{z})$, и соотношение (21) при $(k, l) = (1, 0)$ дает требуемое (22). Для $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ имеем $e_{0,1}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{0,1}(\mathbf{z}) = v(\mathbf{z})$, и соотношение (21) при $(k, l) = (0, 1)$ дает требуемое (22).

Предположим, что соотношение (22) верно. Докажем его аналоги для $e_{\alpha+1,\beta}$ и $e_{\alpha,\beta+1}$. Имеем

$$e_{\alpha+1,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha+1,\beta}(\mathbf{z}) = z [e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z})] + v(\mathbf{z})e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})). \quad (23)$$

По предположению индукции выполнено (22), поэтому

$$\text{supp} [e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))] \subset (\alpha, \beta) + S, \quad (24)$$

$$\text{supp} [z (e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z}))] \subset ((\alpha + 1, \beta) + S) \setminus \{(\alpha + 1, \beta)\}.$$

Из соотношения (21) при $(k, l) = (1, 0)$ и соотношения (24) получаем

$$\text{supp} [v(\mathbf{z})e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))] \subset [((1, 0) + S) \setminus \{(1, 0)\}] + ((\alpha, \beta) + S) \subset ((\alpha + 1, \beta) + S) \setminus \{(\alpha + 1, \beta)\}.$$

Ввиду (23) получаем первое требуемое соотношение

$$\text{supp} [e_{\alpha+1,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha+1,\beta}(\mathbf{z})] \subset ((\alpha + 1, \beta) + S) \setminus \{(\alpha + 1, \beta)\}.$$

Аналогично имеем

$$e_{\alpha,\beta+1}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha,\beta+1}(\mathbf{z}) = \bar{z} [e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z})] + \overline{v(\mathbf{z})}e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})). \quad (25)$$

Из (22) получаем

$$\text{supp} [\bar{z} (e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z}))] \subset ((\alpha, \beta + 1) + S) \setminus \{(\alpha, \beta + 1)\}.$$

Из соотношения (21) при $(k, l) = (0, 1)$ и соотношения (24) получаем

$$\begin{aligned} \text{supp} [\overline{v(\mathbf{z})}e_{\alpha,\beta}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))] &\subset \\ &\subset [((0, 1) + S) \setminus \{(0, 1)\}] + ((\alpha, \beta) + S) \subset ((\alpha, \beta + 1) + S) \setminus \{(\alpha + 1, \beta)\}. \end{aligned}$$

Ввиду (25) получаем второе требуемое соотношение

$$\text{supp} [e_{\alpha,\beta+1}(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - e_{\alpha,\beta+1}(\mathbf{z})] \subset ((\alpha, \beta + 1) + S) \setminus \{(\alpha, \beta + 1)\}.$$

Таким образом, требуемое соотношение (22) доказано. Лемма доказана. \square

Замечание. Техническая лемма 5.2 и ее доказательство останутся верны, если условие G -эквивариантности векторного поля $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ заменить на следующие более слабые условия: $\mathbf{v}(0, 0) = 0$, линеаризация поля \mathbf{v} в нуле равна нулю, и $v_{z^j}^{(j)}(0, 0) = v_{\bar{z}^j}^{(j)}(0, 0) = 0$ для функции $v = v_1 + iv_2$ и любого $j < \sigma - 1$.

Для любого вектора $(k, l) = (1, 0)$ или $(0, 1)$ рассмотрим ломаную $L' = (L - (k, l)) \cap \mathbb{R}_+^2$ (которая получена сдвигом ломаной L на вектор $(-k, -l)$ и пересечением полученной ломаной с квадрантом \mathbb{R}_+^2). Обозначим идеал $I_{L'}$ через $I_{L-(k,l)}$.

Следствие 5.3. Пусть $s \geq 1$ и $A_1 \dots A_N$ — плоская ломаная в \mathbb{R}_+^2 , удовлетворяющая условиям технической леммы 5.2. Предположим, что ломаная L симметрична относительно биссектрисы, т. е. $A_j = (\alpha_j, \beta_j) = (\beta_{N-j+1}, \alpha_{N-j+1})$ при $1 \leq j \leq \lfloor N/2 \rfloor = n$. Пусть $g \in \mathbb{R}[x, y]^G$ — G -инвариантный многочлен с носителем на ломаной L (т. е. g имеет вид $g = g(\mathbf{z}) = 2\text{Re} \sum_{j=1}^n a_j z^{\alpha_j} \bar{z}^{\beta_j}$, где $a_j \in \mathbb{C}$), и пусть G -инвариантная функция $f \in \mathcal{A}_z^G$ такова, что $f - g \in I_L$. Тогда

- (а) для любого G -эквивариантного векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{z}) = (v_1(\mathbf{z}), v_2(\mathbf{z}))$, линейризация которого в нуле равна нулю, выполнено

$$f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) = f(\mathbf{z}) + 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})(g'_z(\mathbf{z}) + R(\mathbf{z}))], \quad (26)$$

где $R \in V_{\xi^{-1}} \cap I_{L-(1,0)}$ (см. (8)), $v(\mathbf{z}) = v_1(\mathbf{z}) + iv_2(\mathbf{z})$;

- (б) в частности, для одночленных G -эквивариантных векторных полей $v_{1,p,q}(\mathbf{z}) = a|z|^{2p}z^{sq+1}$ при $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, и $v_{2,p,q}(\mathbf{z}) = \bar{a}|z|^{2p}\bar{z}^{sq+s-1}$ при $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$ (причем $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{(0, 0), (0, 1)\}$ при $s = 1$), $a \in \mathbb{C}$ (см. замечание 5.1) выполнено

$$f(\mathbf{z} + \mathbf{v}_{j,p,q}(\mathbf{z})) = f(\mathbf{z}) + 2\operatorname{Re}[a|z|^{2p}z^{sq}(g_j(\mathbf{z}) + R_j(\mathbf{z}))], \quad j = 1, 2, \quad (27)$$

где $g_1(\mathbf{z}) = zg'_z(\mathbf{z})$, $g_2(\mathbf{z}) = z^{s-1}g'_z(\mathbf{z})$ как в предложении 4.2,

$$R_1 \in z(V_{\xi^{-1}} \cap I_{L-(1,0)}), \quad R_2 \in z^{s-1}(V_{\xi} \cap I_{L-(0,1)}).$$

Замечание. Слагаемое $2\operatorname{Re}(a|z|^{2p}z^{sq}g_j(\mathbf{z}))$ в сумме (27) принадлежит G -градиентному идеалу $I_{\nabla_g}^G$ ростка g ввиду G -эквивариантности нашей замены (18) и определения 4.1 идеала $I_{\nabla_g}^G$. Таким образом, по следствию 5.3 это слагаемое является «ведущим», а слагаемое $2\operatorname{Re}(a|z|^{2p}z^{sq}R_j(\mathbf{z}))$ имеет носитель (см. (15)) «правее и выше», чем у «ведущего» слагаемого.

Замечание. Техническая лемма 5.2 аналогична утверждению [18, Technical lemma 5.1] с векторным подпространством $A = \operatorname{Re}(I_L)$, семейством функций $f_t(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z}))$ и диффеоморфизмом $\phi = \operatorname{id}$. Частный случай следствия 5.3 для однородного многочлена g (т. е. когда ломаная L содержится в отрезке) является частным случаем утверждения [18, Corollary 5.2] для случая конечной группы G , действующей поворотами на плоскости.

Доказательство. (а) Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{z})$ — любое векторное поле. Имеем $f(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}) + \delta(\mathbf{z})$, где $\delta = f - g \in I_L$ по условию. Запишем $f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))$ в интегральной форме, с учетом (3):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) &= f(\mathbf{z}) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z})) dt = f(\mathbf{z}) + \\ &+ \int_0^1 (v(\mathbf{z})f'_z(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z})) + \bar{v}(\mathbf{z})f'_{\bar{z}}(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z}))) dt = f(\mathbf{z}) + 2\operatorname{Re}(v(\mathbf{z}) \int_0^1 f'_z(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z})) dt). \end{aligned}$$

Из условия получаем $\operatorname{supp} g'_z \subseteq L' := (L - (1, 0)) \cap \mathbb{R}_+^2$. Так как $\delta \in I_L$, то $\operatorname{supp} \delta \subseteq \mathbb{R}_+^2 \setminus \Delta_L$. Поэтому $\operatorname{supp} \delta'_z \subseteq \mathbb{R}_+^2 \setminus \Delta_{L'}$. Отсюда и из технической леммы 5.2 для ломаной L' получаем, что если векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{z})$ эквивариантно и его линейризация в нуле равна нулю, то $f'_z(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z})) - g'_z(\mathbf{z}) \in I_{L'}$. Мы доказали формулу (26) с функцией $R(\mathbf{z}) = \int_0^1 [f'_z(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z})) - g'_z(\mathbf{z})] dt$, а также соотношение $R \in I_{L'} = I_{L-(1,0)}$. Осталось заметить, что $g'_z, f'_z \in V_{\xi^{-1}}$ в силу леммы 3.3 при $r = 0$. Поэтому, ввиду эквивариантности векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{z})$, функция $f'_z(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z}))$ тоже принадлежит $V_{\xi^{-1}}$. Значит, $R \in V_{\xi^{-1}}$.

(б) Выведем (б) из (а). Для $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{1,p,q}$ имеем $g_1 = zg'_z$ и $R_1 = zR \in z(V_{\xi^{-1}} \cap I_{L-(1,0)})$. Для $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{2,p,q}$ имеем $g_2 = z^{s-1}g'_z = z^{s-1}\bar{g}'_{\bar{z}}$ и $R_2 = z^{s-1}\bar{R} \in z^{s-1}(V_{\xi} \cap I_{L-(0,1)})$. \square

6. Доказательство теоремы 2.6

6.1. Построение последовательности G -эквивариантных замен координат

Пусть $s \geq 3$. Предположим, что функция $f(x, y)$ имеет G -регулярную особенность типа $k \geq 1$ в точке $(0, 0)$ (т. е. критическая точка $(0, 0)$ не является морсовской), а значит $c_{0,1} \neq 0$ в ряде Тейлора (1).

Опишем построение последовательности G -эквивариантных замен координат $\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{z}})$, приводящих функцию $f(x, y) - f(0, 0)$ к нормальной форме $f_{s,k,a}(\tilde{\mathbf{z}})$, $a \in \mathbb{R}^m$, с точностью до членов высокого порядка для случаев (i)–(iii) из определения 2.2 (для случая (iv) это будет сделано в разделе 6.3), а также с точностью до одночленов $\tilde{c}_{p,0}|\tilde{z}|^{2p}$, $p > s/2$, в случае (iv).

Определим усеченный трехчлен $\hat{f} = \hat{f}(\mathbf{z})$ в зависимости от случаев (i)–(iv). В случае (ii) положим $\hat{f}(\mathbf{z}) := \operatorname{Re}(c_{0,1}z^s)$, а в остальных случаях положим

$$\hat{f}(\mathbf{z}) := \operatorname{Re}(c_{0,1}z^s) + c_{\varkappa,0}|z|^{2\varkappa},$$

где $\varkappa = k + 1$ и $c_{\varkappa,0} \neq 0$ в случае (i), $\varkappa = s/2$ и $c_{\varkappa,0}^2 \neq |c_{0,1}|^2$ в случае (iii), $\varkappa = s/2$ и $c_{\varkappa,0}^2 = |c_{0,1}|^2$ в случае (iv). В случаях (i) и (iii) усеченный трехчлен $\hat{f}(\mathbf{z})$ фактически равен усеченному трехчлену $\hat{g}(\mathbf{w})$ из доказательства предложения 4.4 (с точностью до линейной замены переменных $w = cz$, где $c = c_{0,1}^{1/s} \in \mathbb{C}$). Далее, допуская некоторую вольность, будем обозначать $\hat{f}(\mathbf{z})$ через $g(\mathbf{z})$.

В случаях (ii)–(iv) усеченный трехчлен $g(\mathbf{z})$ однороден степени s , а потому удовлетворяет условиям технической леммы 5.2. В случае (i) носитель (см. (15)) трехчлена $g(\mathbf{z})$ состоит из трех точек $A_1 = (0, s)$, $A_2 = (\varkappa, \varkappa)$, $A_3 = (s, 0)$. Соединим эти точки двухзвенной ломаной

$$L = A_1A_2A_3.$$

Эта ломаная состоит из двух ребер, симметричных относительно биссектрисы, где нижнее ребро является носителем двухчлена $g_1 = zg'_z$ (см. рис. 2, 4). Тангенс угла наклона этого ребра равен $\frac{-\varkappa}{s-\varkappa}$, а потому принадлежит интервалу $(1 - s, \frac{-1}{s-1})$ ввиду условия $1 < \varkappa < s - 1$. Значит, ломаная L удовлетворяет условиям технической леммы 5.2. По построению идеала I_L (см. §5) имеем

$$f(\mathbf{z}) - f(0, 0) = g(\mathbf{z}) + \delta(\mathbf{z}), \quad \text{где } \delta \in I_L.$$

Применим следствие 5.3 (b) отдельно в каждом случае (i)–(iv).

Случай (i): $s > 2(k + 1)$. Как и в доказательстве предложения 4.4, изобразим каждый усеченный двухчлен

$$g_j^{p,q} := |z|^{2p} z^{sq} g_j, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, 2,$$

в виде направленного отрезка на графе с вершинами в точках \mathbb{Z}_+^2 (рис. 4). Допуская некоторую вольность изложения, будем отождествлять любую точку $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^2$ с соответствующим одночленом $z^\alpha \bar{z}^\beta$, а любое ребро — с соответствующим усеченным двухчленом $g_j^{p,q}$, $j = 1, 2$ (будем рассматривать только вершины на и под биссектрисой $\alpha = \beta$).

Применяя следствие 5.3 снова и снова, мы будем убивать одночлены в ряде Тейлора ростка δ с помощью последовательности эквивариантных замен переменных:

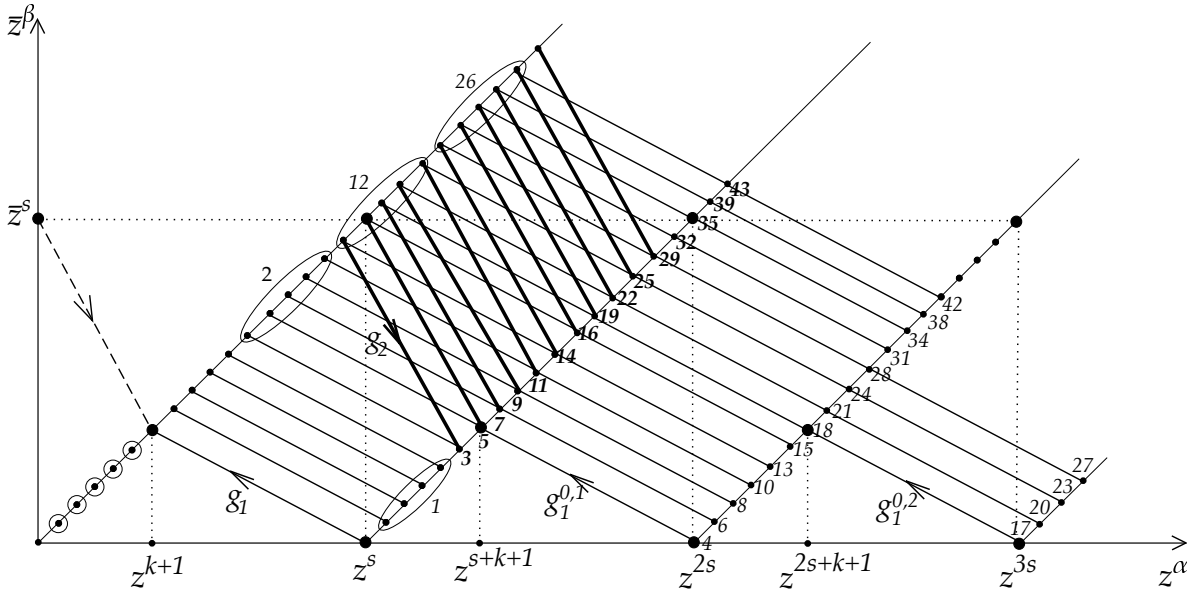


Рис. 4: Последовательность эквивариантных замен координат $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_{j,p,q}(\tilde{\mathbf{z}})$, ассоциированных с ребрами $g_j^{p,q}$, в случае (i): на l -м шаге убиваем одночлены с меткой « l » (на примере случая $k = 5, s = 17$)

на l -м шаге убиваем все одночлены, помеченные на рис. 4 меткой « l » тонким (соотв. жирным) шрифтом, с помощью серии замен, отвечающих одночленным векторным полям вида $v_{1,p,q}$ (соотв. $v_{2,p,q}$), ассоциированным с тонкими ребрами $g_1^{p,q}$ (соотв. жирными ребрами $g_2^{p,q}$).

Каждая такая серия замен не меняет одночлены с метками « n » такими, что $n < l$. На всех шагах коэффициенты при одночленах

$$\operatorname{Re}(c_{0,1}z^s), \quad c_{p,0}|z|^{2p} \quad \text{при } 1 \leq p \leq k+1 \quad (28)$$

останутся неизменными. После серии замен первого шага мы получим новые одночлены $\tilde{c}_{p,0}|\tilde{z}|^{2p}$ при $k+2 \leq p \leq 2k$. На последующих шагах эти одночлены останутся нетронутыми, а все остальные одночлены (кроме указанных в (28)) мы будем по очереди убивать.

С помощью линейной замены $\tilde{z} \rightarrow \hat{z} = c_{0,1}^{1/s}\tilde{z}$ мы приведем сумму оставшихся одночленов $\operatorname{Re}(c_{0,1}\tilde{z}^s) + c_{k+1,0}|\tilde{z}|^{2(k+1)} + \sum_{p=k+2}^{2k} \tilde{c}_{p,0}|\tilde{z}|^{2p}$ к нормальной форме $f_{s,k,a}(\hat{z})$, откуда получаем формулы для «модулей» $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$:

$$a_1 = c_{k+1,0}|c_{0,1}|^{-2(k+1)/s}, \quad a_j = \tilde{c}_{k+j,0}|c_{0,1}|^{-2(k+j)/s}, \quad 2 \leq j \leq k.$$

Например, при $j = 2 \leq k$ имеем $a_2 = \left[c_{k+2,0} - \frac{2(k+1)}{s}c_{k+1,0}\operatorname{Re}(c_{1,1}/c_{0,1}) \right] |c_{0,1}|^{-2(k+2)/s}$.

Случай (ii): $s = 2k + 1$. Имеем $g = \operatorname{Re}(c_{0,1}z^s) = (1/2)(c_{0,1}z^s + \overline{c_{0,1}}\bar{z}^s)$ — однородный двухчлен степени s (поэтому L — отрезок), $g_1 = zg'_z = (s/2)c_{0,1}z^s$, $g_2 = z^{s-1}g'_z = (s/2)\overline{c_{0,1}}|z|^{2(s-1)}$. Применяя следствие 5.3 снова и снова, мы будем убивать все одночлены, пропорциональные одночленам $g_1^{p,q}$ при $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и $g_2^{p,q}$ при $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$ (в j -ой серии шагов убиваем одночлены степени j). При этом останутся нетронутыми одночлены (28) и $c_{p,0}|z|^{2p}$ при $k+2 \leq p \leq 2k-1 = s-2$ (k из которых, отвечающие $1 \leq p \leq k$, равны нулю), а все остальные мы сможем по очереди убивать.

Формулы для «модулей» $a \in \mathbb{R}^{k-1}$ получаются те же, что и в случае (i) (при $j \leq k-1$).

Случай (iii): $s = 2k + 2$ и $c_{s/2,0}^2 \neq |c_{0,1}|^2$. Имеем $g = \operatorname{Re}(c_{0,1}z^s) + c_{s/2,0}|z|^s$ — однородный трехчлен степени s (поэтому L — отрезок),

$$g_1 = zg'_z = \frac{s}{2}c_{0,1}z^s + \frac{s}{2}c_{s/2,0}|z|^s, \quad g_2 = z^{s-1}g'_z = \frac{s}{2}\overline{c_{0,1}}|z|^{2(s-1)} + \frac{s}{2}c_{s/2,0}|z|^{s-2}z^s.$$

Применяя следствие 5.3 снова и снова, мы будем убивать одночлены в ряде Тейлора ростка δ с помощью последовательности эквивариантных замен, аналогичной последовательности замен в случае (i) (на каждом шаге убиваем одночлены одной и той же степени). При этом на всех шагах останутся нетронутыми одночлены (28) (первые k из которых, отвечающие $1 \leq p \leq k$, равны нулю). После серии замен первого шага мы убьем одночлены $\operatorname{Re}(c_{p,1}|z|^{2p}z^s)$, $1 \leq p \leq k-1 = s/2-2$, и получим новые одночлены $\tilde{c}_{p,0}|\tilde{z}|^{2p}$ при $k+2 \leq p \leq 2k = s-2$. На последующих шагах все эти одночлены останутся нетронутыми, а все остальные одночлены (кроме указанных в (28)) мы сможем по очереди убивать (ввиду условия $c_{s/2,0}^2 \neq |c_{0,1}|^2$).

Формулы для «модулей» $a \in \mathbb{R}^k$ получаются те же, что и в случае (i).

Случай (iv): четное $s \leq 2k$ и $c_{s/2,0}^2 = |c_{0,1}|^2$. Трехчлен g — однородный степени s (поэтому L — опять отрезок), и для g , g_1 и g_2 верны те же формулы, что и в случае (iii). Однако, в отличие от случая (iii), имеем $\overline{c_{0,1}}|z|^{s-2}g_1 = c_{s/2,0}g_2$, так как $c_{s/2,0}^2 = |c_{0,1}|^2$. Значит, трехчлены $g_1^{p+s/2-1,q}$ и $g_2^{p,q}$ совпадают с точностью до постоянного множителя. Поэтому результат применения следствия 5.3 к векторному полю $\mathbf{v}_{2,p,q}$ будет таким же (с точностью до членов более высоких степеней), как и в случае векторного поля $\mathbf{v}_{1,p+s/2-1,q}$ (т. е. можно обойтись без векторных полей $\mathbf{v}_{2,p,q}$).

Применяя следствие 5.3 снова и снова, мы будем убивать одночлены в ряде Тейлора ростка δ с помощью последовательности эквивариантных замен, полученной из последовательности замен в случае (iii) выкидыванием замен, отвечающих векторным полям вида $\mathbf{v}_{2,p,q}$. При этом на всех шагах останутся нетронутыми первые $s/2$ одночленов из (28) (первые $s/2-1$ из которых, отвечающие $1 \leq p \leq s/2-1$, равны нулю). После n -ой серии замен мы убьем одночлены $\operatorname{Re}(c_{p,q}|z|^{2p}z^{sq})$, $2p+sq \leq n$, со свойством $q > 0$ и $(p,q) \neq (0,1)$ (т. е. все кроме $\operatorname{Re}(c_{0,1}z^s)$ и $c_{p,0}|z|^{2p}$, $s/2 \leq p \leq n/2$), и получим новые одночлены $\tilde{c}_{p,0}|\tilde{z}|^{2p}$ при $s/2+1 \leq p \leq n/2$, например:

$$\tilde{c}_{s/2+1,0} = c_{s/2+1,0} - c_{s/2,0}\operatorname{Re}(c_{1,1}/c_{0,1}). \quad (29)$$

На последующих шагах все эти одночлены останутся нетронутыми, и мы сможем по очереди убивать все одночлены вида $\operatorname{Re}(c_{p,q}|z|^{2p}z^{sq})$, где $q > 0$, и получать новые одночлены $\tilde{c}_{p,0}|\tilde{z}|^{2p}$.

В частности, получаем формулы для «модулей» $a \in \mathbb{R}^{s/2-1}$ аналогично случаям (i)–(iii):

$$a_j = \tilde{c}_{k+j,0}|c_{0,1}|^{-2(k+j)/s}, \quad 1 \leq j < s/2.$$

Например, при $k = s/2$ и $j = 1$ из (29) получаем

$$a_1 = [c_{s/2+1,0} - c_{s/2,0}\operatorname{Re}(c_{1,1}/c_{0,1})] |c_{0,1}|^{-(s+2)/s}.$$

Итак, в случае (iv) мы показали, что для любого $k \geq s/2$ существует эквивариантная замена переменных, упомянутая в определении 2.2 (iv), убивающая все одночлены кроме $\tilde{c}_{p,0}|\tilde{z}|^{2p}$, $s/2 \leq p \leq k+1$. Эта замена имеет требуемый вид $z = \tilde{z}(1 + Q(|\tilde{z}|^2, \tilde{z}^s))$, так как в ней участвуют только векторные поля $\mathbf{v}_{1,p,q}$.

Замечание 6.1. Наши рассуждения также показывают, что при $k < s/2$, во-первых, для любой G -эквивариантной замены координат $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ функция $f(\mathbf{w}(\mathbf{z}))$ имеет G -регулярную особенность того же типа k в точке $(0, 0)$. Во-вторых, если два набора $a, a' \in \mathbb{R}^m$ различны, то функции $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$ и $f_{s,k,a'}(\mathbf{z})$ нельзя перевести друг в друга никакими G -эквивариантными заменами координат вблизи начала координат.

6.2. Доказательство теоремы 2.6 при $k < |G|/2$

В случае $k = 0$ теорема 2.6 следует из эквивариантной леммы Морса [2]. Пусть далее $1 \leq k < |G|/2$, а значит, $s = |G| \geq 3$.

(А) Нужно показать, что если гладкая функция $f(\mathbf{z})$ имеет G -регулярную особенность типа k в нуле, то она приводится к виду $f_{s,k,a}(\mathbf{w})$ эквивариантной заменой координат $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ (обратное утверждение следует из замечания 6.1).

С помощью последовательности эквивариантных замен координат из §6.1 вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{z}})$, где линейаризация векторного поля \mathbf{v} в нуле равна нулю, мы сможем последовательно убивать у функции $f(\mathbf{z})$ коэффициенты при всех одночленах кроме z^s, \bar{z}^s и $|z|^{2j}$, где $j \leq 2k$ в случае (i), $j \leq s - 2$ в случаях (ii) и (iii). Линейной заменой получим $\tilde{c}_{0,1} = 1$.

Отсюда сразу следует теорема 2.6 (А). Действительно: когда мы убьем у f достаточно много одночленов, то получим, что многочлен Тейлора достаточно большой степени функции $f - f(0, 0) - f_{s,k,a}$ будет равен 0 для набора $a = (a_1, \dots, a_m)$, указанного выше. Так как росток $f_{s,k,a}$ конечно- G -кратен (это легко следует из предложений 4.3 и 4.4), то он конечно- G -определен в силу G -эквивариантной теоремы Тужрона. Поэтому $f - f(0, 0)$ приводится к $f_{s,k,a}$ некоторой G -эквивариантной заменой переменных, что и доказывает (А).

(В) Докажем первое утверждение теоремы 2.6 (В). По теореме 2.6 (А) существует G -эквивариантная замена локальных координат $\mathbf{w}(\mathbf{z})$, приводящая $f(\mathbf{z})$ к виду $f_{s,k,a}(\mathbf{w})$. Из предложений 4.3 и 4.4 нетрудно найти базис факторпространства $\mathcal{A}_{\mathbf{w}}^G/I$ в координатах \mathbf{w} : в качестве базиса можно взять, например, одночлены при ν_j и a_i в формуле (6) для функции $F_{s,k,a}(\mathbf{w}, \nu)$, $0 \leq j \leq k$. Значит, $F_{s,k,a}(\mathbf{w}, \nu)$ — G -версальная деформация ростка $f_{s,k,a}(\mathbf{w}) = F_{s,k,a}(\mathbf{w}, 0)$, а потому $F_{s,k,a}(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \nu)$ — G -версальная деформация ростка $f_{s,k,a}(\mathbf{w}(\mathbf{z})) = f(\mathbf{z}) - f(0, 0)$. В силу G -инвариантной теоремы версальности [15, §3] деформация $F(\mathbf{z}, \lambda)$ выражается через G -версальную деформацию $F_{s,k,a}(\mathbf{w}(\mathbf{z}), \nu)$, т. е. существуют искомые гладкие функции $\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda)$, $a_i(\lambda)$ и $\nu_j(\lambda)$ такие, что $\mathbf{w}(\mathbf{z}, 0) = \mathbf{w}(\mathbf{z})$ и выполнено (7).

Докажем второе утверждение теоремы 2.6 (В). По замечанию 5.1 для любой G -эквивариантной замены координат $\mathbf{w}(\mathbf{z}) = (w_1(\mathbf{z}), w_2(\mathbf{z}))$ соответствующая функция $w(\mathbf{z}) = w_1(\mathbf{z}) + iw_2(\mathbf{z})$ имеет вид $w(\mathbf{z}) = zQ(|z|^2) + O(|z|^{s-1})$, где Q — многочлен с комплексными коэффициентами, $Q(0) \neq 0$. Поэтому любое семейство G -эквивариантных замен координат $\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda)$ тоже имеет вид

$$w(\mathbf{z}, \lambda) = zQ(|z|^2, \lambda) + O(|z|^{s-1}), \quad \text{откуда} \quad |w(\mathbf{z}, \lambda)|^2 = |z|^2 Q(|z|^2, \lambda)^2 + O(|z|^s), \quad (30)$$

где Q — многочлен от $|z|^2$ с комплексными коэффициентами, являющимися гладкими функциями от параметров $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^k$, $Q(0, 0) \neq 0$. Из (7) имеем

$$F(\mathbf{z}, \lambda) - F(0, \lambda) = f_{s,k,a(\lambda)}(\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda)) + P(\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda), \nu(\lambda))$$

— сумма двух слагаемых, где обозначено

$$P(\mathbf{w}, \nu) = \sum_{j=1}^k \nu_j |w|^{2j}.$$

Первое слагаемое при замене координат (30) примет вид

$$f_{s,k,a(\lambda)}(\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda)) = O(|z|^s) + O(|z|^{2(k+1)}),$$

поэтому его частная производная $\frac{\partial^{2j+1}}{\partial z^j \partial \bar{z}^j \partial \lambda_i}$ в нуле равна нулю при любых $i, j \leq k$ ввиду $2k < s$ (это также следует из технической леммы 5.2). Второе слагаемое примет вид

$$P(\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda), \nu(\lambda)) = \sum_{j=1}^k \nu_j(\lambda) |zQ(|z|^2, \lambda)|^{2j} + O(|z|^s) = \sum_{p=1}^k \hat{\nu}_p(\nu(\lambda)) |z|^{2p} + O(|z|^s),$$

где $\hat{\nu}_p(\nu) = \sum_{j=1}^p c_{p,j} \nu_j$ для некоторых констант $c_{p,j}$, $c_{p,p} \neq 0$, откуда $\frac{\partial \hat{\nu}_p(0)}{\partial \nu_j}$ — невырожденная матрица. Поэтому

$$\frac{\partial^{2p+1} F(0,0)}{\partial z^p \partial \bar{z}^p \partial \lambda_i} = \frac{\partial^{2p+1} P(\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda), \nu(\lambda))}{\partial z^p \partial \bar{z}^p \partial \lambda_i} \Big|_{(\mathbf{z}, \lambda) = (0,0)} = \frac{\partial \hat{\nu}_p(\nu(0))}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \hat{\nu}_p(0)}{\partial \nu_j} \frac{\partial \nu_j(0)}{\partial \lambda_i}$$

при любых $i, j \leq k$. Поэтому невырожденность матрицы $\left\| \frac{\partial^{2p+1} F(0,0)}{\partial z^p \partial \bar{z}^p \partial \lambda_i} \right\|_{i,p=1}^k$ равносильна тому, что отображение $(\nu_j(\lambda))_{j=1}^k$ является диффеоморфизмом в некоторой окрестности нуля. Из определения 2.2 и теоремы о неявных функциях следует, что для любого близкого к F семейства G -инвариантных функций $\tilde{F}(\mathbf{z}, \lambda)$ существует λ^* , близкое к 0, такое, что функция $\tilde{F}(\mathbf{z}, \lambda^*)$ имеет G -регулярную особенность типа k в нуле, и что $\tilde{F}(\mathbf{z}, \lambda^*)$ приводится к нормальной форме f_{s,k,a^*} для некоторого набора $a^* \in \mathbb{R}^m$, близкого к набору a .

Теорема 2.6 доказана в случае $k < s/2$. □

6.3. Случай $|G|/2 \leq k \leq 2|G| - 5$

В разделе 6.1 мы показали, что в случае (iv), т. е. при четном $s = |G|$ и $k \geq s/2$, росток $f(\mathbf{z})$ можно привести к виду

$$f = f(0,0) + g(\tilde{\mathbf{z}}) + \sum_{j=k+1}^{\ell} \tilde{c}_{j,0} |\tilde{z}|^{2j} + O(|\tilde{z}|^{2\ell+1}) \quad (31)$$

с помощью замены переменных $\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ вида $z = \tilde{z}(1 + Q(|\tilde{z}|^2, \tilde{z}^s))$, где $g(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}(c_{0,1} z^s) + c_{s/2,0} |z|^s$, $c_{s/2,0} = \pm |c_{0,1}| \neq 0$, $\tilde{c}_{k+1,0} \neq 0$, ℓ — любое наперед заданное (большое) число, $Q \in \mathbb{C}[u, v]$, $Q(|\tilde{z}|^2, \tilde{z}^s)$ — многочлен степени $2\ell - s$, $Q|_{\mathbf{z}=0} = 0$. Осталось убедиться в том, что с помощью эквивариантных замен можно последовательно убивать все мономы, кроме входящих в нормальную форму $f_{s,k,a}$, т. е. все мономы

$$\tilde{c}_{i,0} |\tilde{z}|^{2i}, \quad k + s/2 \leq i \leq \ell. \quad (32)$$

В этом разделе мы покажем, как это сделать в случае $s/2 \leq k \leq 2s - 5$.

Из технической леммы 5.2 (точнее, из ее частного случая, когда полином g однородный) выведем еще одно следствие, аналогичное следствию 5.3, а также [18, Corollary 5.2] и [1, лемма в §12.5].

Следствие 6.2. Пусть $g = g(\mathbf{z})$ — однородный многочлен степени m , $h = h(\mathbf{z})$ — однородный многочлен степени $n > m$. Тогда для любой гладкой функции $f = f(\mathbf{z}) = g + h + O(|z|^{n+1})$ и любого гладкого векторного поля $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{z}) = O(|z|^N)$ вблизи точки $z = 0$, $N \geq 2$, выполнено

$$f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z}) = 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})(g+h)'_z(\mathbf{z})] + \sum_{2 \leq k+l \leq n_1} \frac{v(\mathbf{z})^k \bar{v}(\mathbf{z})^l}{k!l!} g_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(\mathbf{z}) + O(|z|^{N+n}), \quad (33)$$

где $n_1 := \lceil (n - m + 1)/(N - 1) \rceil$. В частности, при $N \geq n - m + 2$ выполнено $n_1 = 1$ и сумма \sum в (33) равна 0.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) &= f(\mathbf{z}) + 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})f'_z(\mathbf{z})] + \\ &+ \sum_{2 \leq k+l \leq n_1} \frac{v(\mathbf{z})^k \bar{v}(\mathbf{z})^l}{k!l!} f_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(\mathbf{z}) + \\ &+ \sum_{k+l=n_1+1} \frac{v(\mathbf{z})^k \bar{v}(\mathbf{z})^l}{k!l!} \int_0^1 f_{z^k \bar{z}^l}^{(n_1+1)}(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z})) (1-t)^{n_1} dt. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое с точностью до $O(|z|^{N+n})$:

$$2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})f'_z(\mathbf{z})] = 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})(g+h)'_z(\mathbf{z})] + O(|z|^{N+n}),$$

$$v(\mathbf{z})^k \bar{v}(\mathbf{z})^l f_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(\mathbf{z}) = v(\mathbf{z})^k \bar{v}(\mathbf{z})^l g_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(\mathbf{z}) + O(|z|^{n+2(N-1)})$$

при $2 \leq k+l$ ввиду того, что $N \geq 1$ (действительно: после каждого дифференцирования степень любого монома увеличивается на $N-1 \geq 0$, а поэтому после $k+l$ дифференцирований степень увеличится на $(k+l)(N-1)$, т.е. степень любого монома в этом слагаемом не меньше, чем $n + (k+l)(N-1) \geq n + 2(N-1)$, т.е. это слагаемое имеет порядок малости $O(|z|^{n+(k+l)(N-1)}) = O(|z|^{n+2(N-1)})$,

$$v(\mathbf{z})^k \bar{v}(\mathbf{z})^l f_{z^k \bar{z}^l}^{(n_1+1)}(\mathbf{z} + t\mathbf{v}(\mathbf{z})) = O(|z|^{m+(n_1+1)(N-1)})$$

при $k+l = n_1+1$ ввиду технической леммы 5.2 для однородного полинома g (действительно: ведущие мономы у f имеют степень m , а после каждого дифференцирования их степень увеличивается на $N-1$, поэтому после $k+l = n_1+1$ дифференцирований эти мономы будут иметь порядок малости $O(|z|^{m+(n_1+1)(N-1)})$).

Осталось заметить, что $n + 2(N-1) \geq N + n$ (так как $N \geq 2$) и $(n_1+1)(N-1) + m \geq N + n$ (так как $n_1(N-1) \geq n - m + 1$ по определению числа n_1). Следствие доказано. \square

Замечание 6.3. Пусть далее $v(\mathbf{z})$ — однородный многочлен степени N . Тогда

- (а) ведущее (т.е. минимальной степени по \mathbf{z}) слагаемое в выражении (33) для $f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z})$ — это многочлен $2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})]$ степени $m + N - 1$ от \mathbf{z} (см. (33));

(b) степень слагаемого $2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})h'_z(\mathbf{z})]$ в выражении (33) для $f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z})$, равная $n + N - 1$, *максимальна*, т. е. не меньше степеней $m + d(N - 1)$ слагаемых суммы \sum в (33) (действительно: $n - m \geq (d - 1)(N - 1)$ ввиду $n - m + 1 > > (n_1 - 1)(N - 1) \geq (d - 1)(N - 1)$ по определению числа n_1); слагаемые суммы \sum в (33) назовем *призрачными* или *фантомными*, так как их порядок малости больше, чем у $2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})h'_z(\mathbf{z})]$, по переменным \mathbf{v} (но не по \mathbf{z}).

Рассмотрим случай (iv), т. е. $2k \geq |G| = s \geq 3$. Тогда функция $f - f(0, 0)$ из (31) имеет вид $f - f(0, 0) = g + h + O(|\tilde{z}|^{n+1})$ из следствия 6.2. Без ограничения общности

$$g(\mathbf{z}) := \operatorname{Re}(c_{0,1}z^s) + c_{s/2,0}|z|^s = \operatorname{Re}(z^s) - |z|^s, \quad (34)$$

$$h(\mathbf{z}) := \tilde{c}_{k+1,0}|z|^{2(k+1)} = a_1|z|^{2(k+1)}, \quad (35)$$

$$\deg g = m = s, \quad \deg h = n = 2(k + 1).$$

Здесь и далее предполагаем без ограничения общности, что $c_{0,1} = -c_{s/2,0} = \pm 1$ (этого можно достичь линейной заменой переменных $z \rightarrow az$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), и что ± 1 равен 1 (это достигается путем замены f на $-f$). Предположим, что мы уже убили первые $j - 1$ мономов $\tilde{c}_{k+s/2,0}|\tilde{z}|^{2k+s}, \dots, \tilde{c}_{k+s/2-2+j,0}|\tilde{z}|^{2k+s-4+2j}$ в (32), и хотим убить моном

$$\tilde{c}_{k+s/2-1+j,0}|\tilde{z}|^{2k+s-2+2j} \quad (36)$$

с помощью некоторой последовательности эквивариантных замен координат. Допуская некоторую вольность, будем обозначать $\tilde{\mathbf{z}}$ снова через \mathbf{z} . Опишем построение искомой последовательности замен координат в два шага.

Шаг 1. Сделаем замену координат $\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_{N,\lambda}(\tilde{\mathbf{z}})$, где

$$v(\mathbf{z}) = v_{N,\lambda}(\mathbf{z}) := |z|^{2(j-1)}(\lambda|z|^{s-2}z + \bar{\lambda}\bar{z}^{s-1}), \quad \deg v = N = s - 3 + 2j \geq s - 1, \quad (37)$$

коэффициент $\lambda \in \mathbb{C}$ определим ниже (а именно, положим $\operatorname{Re}\lambda = -\tilde{c}_{k+s/2,0}/(12\tilde{c}_{k+1,0})$).

Поясним формулу (37). Биномиальному векторному полю $v = v_{N,\lambda}(\mathbf{z})$ из (37) соответствует следующий элемент G -градиентного идеала ростка $g = g(\mathbf{z})$:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})] &= 2|z|^{2(j-1)}\operatorname{Re}[\lambda|z|^{s-2}zg'_z(\mathbf{z}) + \bar{\lambda}\bar{z}^{s-1}g'_z(\mathbf{z})] = \\ &= 2|z|^{2(j-1)}\operatorname{Re}[\lambda|z|^{s-2}g_1(\mathbf{z}) + \lambda z^{s-1}g'_z(\mathbf{z})] = \\ &= 2|z|^{2(j-1)}\operatorname{Re}[\lambda(|z|^{s-2}g_1(\mathbf{z}) + g_2(\mathbf{z}))] = \\ &= 2|z|^{2(j-1)}\operatorname{Re}[\lambda(g_1^{s/2-1,0}(\mathbf{z}) + g_2(\mathbf{z}))], \end{aligned}$$

где g_1, g_2 — ростки, сопоставляемые ростку g как в предложении 4.2. Если $j = 1$, то этот элемент отвечает двухзвенной ломаной-петле из доказательства предложения 4.4.

Лемма 6.4. *Для замены координат $\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_{N,\lambda}(\tilde{\mathbf{z}})$ ведущее слагаемое (т. е. минимальной степени $m + N - 1$ по \mathbf{z}) в выражении (33) для $f(\mathbf{z} + \mathbf{v}_{N,\lambda}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z})$ (равное $2\operatorname{Re}[v_{N,\lambda}(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})]$ по замечанию 6.3 (a)) равно нулю.*

Доказательство. Согласно пояснению к формуле (37), ведущее слагаемое — это однородный многочлен

$$2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})] = 2|z|^{2(j-1)}\operatorname{Re}[\lambda(g_1^{s/2-1,0}(\mathbf{z}) + g_2(\mathbf{z}))].$$

Из формулы (34) для g получаем

$$g_1(\mathbf{z}) = zg'_z = \frac{s}{2}(z^s - z^{s/2}\bar{z}^{s/2}) = \frac{s}{2}(z^s - |z|^s), \quad (38)$$

$$\begin{aligned} g_2(\mathbf{z}) &= z^{s-1}g'_z = \frac{s}{2}z^{s-1}(\bar{z}^{s-1} - z^{s/2}\bar{z}^{s/2-1}) = \\ &= \frac{s}{2}(|z|^{2s-2} - |z|^{s-2}z^s) = \frac{s}{2}|z|^{s-2}(|z|^s - z^s), \\ g_1^{s/2-1,0}(\mathbf{z}) &= \frac{s}{2}|z|^{s-2}(z^s - |z|^s). \end{aligned}$$

Складывая, получаем

$$g_1^{s/2-1,0}(\mathbf{z}) + g_2(\mathbf{z}) = 0.$$

Значит, при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ ведущий однородный многочлен равен 0, что и требовалось. \square

Лемма 6.5. Для замены координат $\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_{N,\lambda}(\tilde{\mathbf{z}})$ рассмотрим («фантомные») однородные многочлены в сумме (33), имеющие вид

$$P_d(\mathbf{z}) = \sum_{k+l=d} \frac{v(\mathbf{z})^k \bar{v}(\mathbf{z})^l}{k!l!} g_{z^k \bar{z}^l}^{(k+l)}(\mathbf{z}), \quad 2 \leq d \leq n_1, \quad (39)$$

где $n_1 = \lceil (n-m+1)/(N-1) \rceil$, $\deg P_d = m+d(N-1)$. Тогда $P_d|_{z=1+i0} = 0$, т. е. сумма коэффициентов каждого такого многочлена P_d как многочлена от переменных z, \bar{z} равна 0.

Доказательство. Докажем лемму в случае $s = 4, k = 2$. Имеем

$$g(\mathbf{z}) := \operatorname{Re}(z^4) - |z|^4,$$

$$h(\mathbf{z}) := \tilde{c}_{3,0}|z|^6 = a|z|^6.$$

Положим

$$\operatorname{Re} \lambda = -\tilde{c}_{k+s/2,0}/(12\tilde{c}_{k+1,0}) = -\tilde{c}_{4,0}/(12a).$$

Пусть $h = \tilde{c}_{3,0}|z|^6 = a|z|^6$. По (37) при $j = 1$ имеем

$$v(\mathbf{z}) = v_{N,\lambda}(\mathbf{z}) := \lambda|z|^2 z + \bar{\lambda}\bar{z}^3.$$

По лемме 6.4 имеем $2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})] = 0$. Далее

$$2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})h'_z(\mathbf{z})] = 6a|z|^4 \operatorname{Re}(\lambda(|z|^4 + z^4)).$$

По (33) и (39) имеем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z}) &= 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})(g+h)'_z(\mathbf{z})] + P_2(\mathbf{z}) + O(|z|^9) = \\ &= 6|z|^4 \operatorname{Re}(\lambda a(|z|^4 + z^4)) + P_2(\mathbf{z}) + O(|z|^9). \end{aligned}$$

Равенство

$$f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))_8|_{z=1} = (f(\mathbf{z}) + 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})(g+h)'_z(\mathbf{z})] + P_2(\mathbf{z}) + O(|z|^9))_8|_{z=1} = \tilde{c}_{4,0} + 12a \operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

имеет место в том и только том случае, если $\operatorname{Re}\lambda = -\tilde{c}_{4,0}/(12a)$. Действительно: $P_2(\mathbf{z})$ — однородный многочлен степени 8, равный

$$\begin{aligned} P_2(\mathbf{z}) &= v^2 g''_{z^2}/2 + |v|^2 g''_{z\bar{z}} + \bar{v}^2 g''_{\bar{z}^2}/2 = \\ &= (4|\lambda|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda^2))|z|^8 - 2\operatorname{Re}(-2\bar{\lambda}^2 + 2|\lambda|^2)\bar{z}^4|z|^4 - 2\operatorname{Re}(\lambda^2)z^8. \end{aligned}$$

Поэтому $P_2|_{z=1} = 0$.

В общем случае $P_d|_{z=1+i0}$ равно коэффициенту при $x^{m+d(N-1)}$ в разложении функции $g(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))|_{z=x+i0}$ в степенной ряд по x . Но $g = 0$ на оси Ox (см. (34)). С другой стороны,

$$v|_{z=x+i0} = x^{2j-2+s-1}(\lambda + \bar{\lambda}) = 2x^{s+2j-3}\operatorname{Re}\lambda \in \mathbb{R}$$

(см. (37)), т. е. векторное поле \mathbf{v} касается оси Ox . Значит, при сдвиге вдоль векторного поля \mathbf{v} ось Ox перейдет в себя, а значит, на оси Ox функция $g(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))$ останется нулевой:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))|_{z=x+i0} &\in g(Ox) = 0, \\ g(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z})) - g(\mathbf{z})|_{z=x+i0} &= 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

поэтому все коэффициенты этого степенного ряда от x равны 0.

В частности, коэффициент при $x^{m+d(N-1)}$ равен $P_d|_{z=1+i0} = 0$. \square

Обозначение и замечание 6.6. Обозначим через f_j однородный многочлен степени j ряда Тейлора функции f в 0. Заметим, что $f_j|_{z=x+i0}$ — это сумма его коэффициентов (как многочлена от z, \bar{z}), домноженная на x^j .

При помощи слагаемого $2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})h'_z(\mathbf{z})]$ в (33) добьемся, чтобы сумма коэффициентов многочлена $f(\mathbf{z} + \mathbf{v}(\mathbf{z}))_{n+N-1}$ (как многочлена от z, \bar{z}) стала равной 0. Это возможно для некоторого λ , так как указанная сумма коэффициентов равна (ввиду леммы 6.5) сумме коэффициентов многочлена $f_{n+N-1}(\mathbf{z}) + 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})h'_z(\mathbf{z})]$, т. е. коэффициенту при $x^{n+N-1} = x^{2k+s+2j-2}$ многочлена $f_{n+N-1}(\mathbf{z}) + 2\operatorname{Re}[v(\mathbf{z})h'_z(\mathbf{z})]|_{z=x+i0} = (\tilde{c}_{k+s/2+j-1,0} + 4(k+1)a_1\operatorname{Re}\lambda)x^{2k+s+2j-2}$. Осталось взять такое $\lambda \in \mathbb{C}$, чтобы

$$\operatorname{Re}\lambda = -\tilde{c}_{k+s/2+j-1,0}/(4(k+1)a_1).$$

Это возможно, так как $a_1 = \tilde{c}_{k+1,0} \neq 0$.

При этом мы испортили однородные многочлены вида $f_{m+d(N-1)}$ степеней $m + d(N-1) < n + N - 1$, прибавив к ним однородные многочлены P_d , $d \geq 2$ (нас будут интересовать только те из них, степени которых $\leq n + N - 1$).

Зато мы не испортили сумму коэффициентов каждого из этих однородных многочленов $f_{m+d(N-1)}$ (для каждого фиксированного $d \geq 2$) в силу леммы 6.5. Также мы занулили сумму коэффициентов однородного многочлена f_{n+N-1} .

Шаг 2. На этом шаге мы уберем возникшие (испорченные) на шаге 1 недиагональные мономы степеней $m + d(N-1) \leq n + N - 1$ с помощью последовательности замен $\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{z}})$, зависящих от d (поочередно для каждого $d = 2, 3, \dots$), где

$$\deg \tilde{v} = \tilde{N} = \tilde{N}(d) := d(N-1) + 1,$$

$\tilde{v}(\mathbf{z})$ — однородный многочлен, например вида $\tilde{v}(\mathbf{z}) = zH(|z|^2, z^s)$ (или вида $\tilde{v}(\mathbf{z}) = \bar{z}^{s-1}H(|z|^2, \bar{z}^s)$).

Ясно, что ведущим слагаемым $2\operatorname{Re}[\tilde{v}(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})] = 2\operatorname{Re}[Hg_1]$ (соотв. $2\operatorname{Re}[Hg_2]$) мы можем убить все мономы (минимальной) степени $m + \tilde{N} - 1$ за исключением, быть

может, диагонального монома $|z|^{m+\tilde{N}-1}$ (см. §6.1, п.(iv)). Это легко следует из того, что g_1 (соотв. g_2) — однородный двухчлен, причем сумма его коэффициентов равна нулю ввиду (38).

Оказывается (в силу следующей леммы), все слагаемые кроме ведущего имеют порядок малости $O(|z|^{n+N})$, т. е. более высокий, чем интересующий нас моном (36).

Лемма 6.7. *Если $s/2 \leq k \leq 2s - 5$, то при любой замене координат указанного вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{z}})$ выполнено $f(\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z}) = 2\text{Re}[\tilde{v}(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})] + O(|z|^{n+N})$.*

Доказательство. Нужно проверить, что для рассматриваемой замены все слагаемые в выражении типа (33), за исключением ведущего слагаемого $2\text{Re}[\tilde{v}(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})]$, имеют порядок малости $O(|z|^{n+N})$ (у ведущего слагаемого степень $m + \tilde{N} - 1 = s + d(N - 1) \leq n + N - 1$, согласно предположению в начале шага 2). Степень “фантомного” слагаемого (степени $\tilde{d} \geq 2$ по \tilde{v}) имеет вид

$$m + \tilde{d}(\tilde{N} - 1) = s + \tilde{d}d(N - 1) \geq s + 4(N - 1),$$

а последнее выражение $> n + N = 2k + 2 + N$, так как $s + 3N - 6 \geq s + 3(s - 1) - 6 = 4s - 9 > 2k$. Степень слагаемого $2\text{Re}[\tilde{v}(\mathbf{z})h'_z(\mathbf{z})]$ равна

$$n + \tilde{N} - 1 = n + d(N - 1) \geq n + 2(N - 1) \geq n + N,$$

так как $N \geq s - 1 \geq 2$ (поскольку $s > 2$). □

Лемма 6.8. *При замене координат $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{z}})$ указанного вида сумма коэффициентов однородного многочлена $f_{m+\tilde{N}-1}$ как многочлена от z, \bar{z} не меняется.*

Доказательство. Нужно показать, что выражение $f_{m+\tilde{N}-1}|_{z=x+i0}$ корректно определено, т. е. не меняется при указанной замене. Так как $g_1|_{z=x+i0} = 0$ (см. (38)), то

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z}))_{m+\tilde{N}-1}|_{z=x+i0} &= 2\text{Re}[\tilde{v}(\mathbf{z})g'_z(\mathbf{z})]|_{z=x+i0} = \\ &= 2\text{Re}[zH(|z|^2, z^s)g'_z(\mathbf{z})]|_{z=x+i0} = 2\text{Re}[H(|z|^2, z^s)g_1(\mathbf{z})]|_{z=x+i0} = 0. \end{aligned}$$

□

Применив все замены координат из шагов 1 и 2, мы получим некоторый новый диагональный моном $\hat{c}_{(m+\tilde{N}-1)/2,0}|z|^{m+\tilde{N}-1}$. Оказывается, он не изменится в случае $m + \tilde{N} - 1 < n + N - 1$, поскольку мы не испортили суммы коэффициентов при мономах фиксированной степени $< n + N - 1$ заменами координат из шагов 1 и 2. Более подробно: сумма коэффициентов каждого однородного многочлена $f_{m+\tilde{N}-1}$, $m + \tilde{N} - 1 = m + d(N - 1) < n + N - 1$, сохраняется при заменах вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_{N,\lambda}(\tilde{\mathbf{z}})$, $\deg v_{N,\lambda} = N$ (по леммам 6.4 и 6.5), и при заменах вида $\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{z}})$, $\deg \tilde{v} = \tilde{N}$ (по леммам 6.7 и 6.8).

Итак, диагональный моном $|z|^{m+\tilde{N}-1}$ будет убит в случае $m + \tilde{N} - 1 < n + N - 1$ тогда и только тогда, когда сумма коэффициентов однородного многочлена $f_{m+\tilde{N}-1}$ как многочлена от z, \bar{z} была равна нулю.

Аналогично показывается, что после всех указанных замен интересующий нас диагональный моном (36) станет равен $\hat{c}_{(n+N-1)/2,0}|z|^{n+N-1} = 0$.

Итак, мы распространили результаты раздела 6.1 на оставшийся случай $s/2 \leq k \leq 2s - 5$. Тем самым, теорема 2.6 полностью доказана. □

7. Интегрируемые системы

Для каждого $s \in \mathbb{N}$ рассмотрим морсовский G -инвариантный росток

$$\widehat{F}_{s,0}(\mathbf{z}) = \begin{cases} x^2 \pm y^2, & s \in \{1, 2\}, \\ \pm(x^2 + y^2) = \pm|z|^2, & s \geq 3, \end{cases}$$

и два семейства G -инвариантных ростков $\widehat{F}_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, \nu)$, $k \in \{1, 2\}$, в нуле:

$$\widehat{F}_{s,1,\alpha}(\mathbf{z}, \nu) = \begin{cases} x^2 + y^3 & +\nu y, & s = 1, \\ \pm x^2 + y^4 & +\nu y^2, & s = 2, & \text{(iv)} \\ \operatorname{Re}(z^3) & +\nu|z|^2, & s = 3, & \text{(ii)} \\ \operatorname{Re}(z^4) + \alpha|z|^4 & +\nu|z|^2, & s = 4, \alpha^2 \neq 1, & \text{(iii)} \\ \operatorname{Re}(z^s) + |z|^4 & +\nu|z|^2, & s \geq 5, & \text{(i)} \end{cases}$$

$$\widehat{F}_{s,2,\alpha}(\mathbf{z}, \nu) = \begin{cases} \pm x^2 + y^4 & -\nu_2 y^2 + \nu_1 y, & s = 1, \\ \pm x^2 + y^6 & +\nu_2 y^4 + \nu_1 y^2, & s = 2, & \text{(iv)} \\ \operatorname{Re}(z^4) - |z|^4 \pm |z|^6 & +\nu_2 |z|^4 + \nu_1 |z|^2, & s = 4, & \text{(iv)} \\ \operatorname{Re}(z^5) + |z|^6 & +\nu_2 |z|^4 + \nu_1 |z|^2, & s = 5, & \text{(ii)} \\ \operatorname{Re}(z^6) + \alpha|z|^6 + |z|^8 & +\nu_2 |z|^4 + \nu_1 |z|^2, & s = 6, \alpha^2 \neq 1, & \text{(iii)} \\ \operatorname{Re}(z^s) \pm |z|^6 + \alpha|z|^8 & +\nu_2 |z|^4 + \nu_1 |z|^2, & s \geq 7. & \text{(i)} \end{cases}$$

Замечание. Приведенные выше ростки $\widehat{F}_{s,k,\alpha}$ ($k \in \{0, 1, 2\}$) выражаются через $F_{s,k,\alpha}$:

$$\widehat{F}_{s,k,\alpha} = \begin{cases} F_{s,k,\alpha}, & (s, k) = (4, 1), \\ F_{s,k,\pm 1}, & (s, k) \in \{(4, 2), (5, 2), (t, 1) \mid t \geq 5\}, \\ F_{s,k,(\alpha,\pm 1)}, & (s, k) = (6, 2), \\ F_{s,k,(\pm 1,\alpha)}, & (s, k) \in \{(t, 2) \mid t \geq 7\}. \end{cases}$$

Лемма 7.1. Любой росток $F_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, 0)$ при $k \in \{0, 1, 2\}$, кроме ростков $F_{5,2,0}(\mathbf{z}, 0)$ и $F_{6,2,(\alpha,0)}(\mathbf{z}, 0)$, лево-право G -эквивалентен некоторому ростку $\widehat{F}_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, 0)$.

Доказательство. Аналогично [8, proof of Proposition 4.3, Step 7]. \square

Интегрируемая гамильтонова система (ИГС) на $2n$ -мерном симплектическом многообразии (M, ω) задается гладким отображением

$$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

где $\{f_i, f_j\} = 0$. Возникает лагранжево слоение с особенностями на (M, ω) , слой которого — это связные компоненты множеств $\mathcal{F}^{-1}(c)$. Регулярные компактные слои — это торы Лиувилля.

Пусть M компактно, поля $X_{f_j} = \operatorname{sgrad} f_j$ касаются ∂M , и \mathcal{F} имеет «хорошее» поведение около ∂M . Отображение \mathcal{F} порождает гамильтоново \mathbb{R}^n -действие на M .

Определение 7.2. Локальная особенность (т. е. \mathbb{R}^n -орбита) интегрируемой системы (M, ω, \mathcal{F}) называется *структурно устойчивой*, если существует её окрестность U в M такая, что любую C^r -близкую интегрируемую систему $(\bar{U}, \tilde{\omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ можно представить так: $\tilde{\mathcal{F}} = \phi \circ \mathcal{F} \circ \Phi$, где $\Phi : \bar{U} \rightarrow M$ и $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вложение и гомеоморфизм, близкие к тождественным.

Пусть дана особенность (компактная \mathbb{R}^n -орбита \mathcal{O}) коранга 1 (т. е. $\text{rk } d\mathcal{F}(\mathcal{O}) = n - 1$). Тогда в некоторой окрестности этой орбиты система будет *полуторической* (если система вещественно-аналитическая и размерность слоя, содержащего данную орбиту, $\leq n$ [19]), т. е. будет иметь вид

$$M_{st} = (D^2 \times D^p \times T^p)/G, \quad \omega_{st} = dx \wedge dy + dI \wedge d\varphi, \quad \mathcal{F}(\mathbf{z}, I, \varphi) = \phi(H(\mathbf{z}, I), I),$$

где $p = n - 1$, $G = \langle A \rangle \subset SO(2)$, $H = H(\mathbf{z}, I) = H(x, y, I_1, \dots, I_p)$ — гладкая G -инвариантная функция от переменных $\mathbf{z} = (x, y) \in D^2$ и параметров $I = (I_1, \dots, I_p) \in D^p$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in T^p$, $s = |G| \in \mathbb{N}$, $A(x, y, I, \varphi) = ((x, y)A^\ell, I, \varphi_1 + \frac{2\pi}{s}, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$, $0 < \ell < s$, $(\ell, s) = 1$, $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм.

Определение 7.3. Определим *стандартную модель* $(M_{st}, \omega_{st}, \mathcal{F}_{st})$, полагая

$$\mathcal{F}_{st}: M_{st} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{F}_{st}(\mathbf{z}, I, \varphi) = (\widehat{F}_{s,k,\alpha(I)}(\mathbf{z}, I'), I),$$

где $0 \leq k < n$, $I' = (I_1, \dots, I_k)$, $\alpha(I)$ — гладкая функция (функциональный параметр модели).

Итак, стандартная модель — это полуторическая ИГС $(M_{st}, \omega_{st}, \mathcal{F}_{st})$ с гамильтоновым $(\mathbb{R} \times T^{n-1})$ -действием, мультипликаторами $e^{\pm \frac{2\pi \ell i}{s}} = \xi^{\pm \ell}$, скручивающим резонансом ℓ/s [8] и порядком резонанса $s = |G|$.

Пусть $n = \frac{1}{2} \dim M \in \{2, 3\}$. Рассмотрим класс $\mathcal{S} = \mathcal{S}(M)$ интегрируемых систем на M (называемых полуторическими), для которых функции f_2, \dots, f_n порождают локально-свободное гамильтоново действие $(n-1)$ -мерного тора на M . Из следствия 2.7 и леммы 7.1 получаем

Следствие 7.4 (классификация особых орбит коранга 1). *Класс $\mathcal{S}_{st} \subseteq \mathcal{S}$ систем, все локальные особенности которых послойно диффеоморфны стандартным, открыт и плотен в \mathcal{S} относительно C^∞ -топологии.*

Если у стандартной модели при малом изменении модуля α фазовый портрет сохраняется с точностью до гомеоморфизма (например, модуль отсутствует), то любая послойно диффеоморфная ей особенность (соотв. гладко) структурно устойчива относительно возмущений в классе \mathcal{S} .

Замечание. 1) Следствие 7.4 при $n = 2$ описывает параболические траектории с резонансами [6], а при $n = 3$ — их типичные бифуркации.

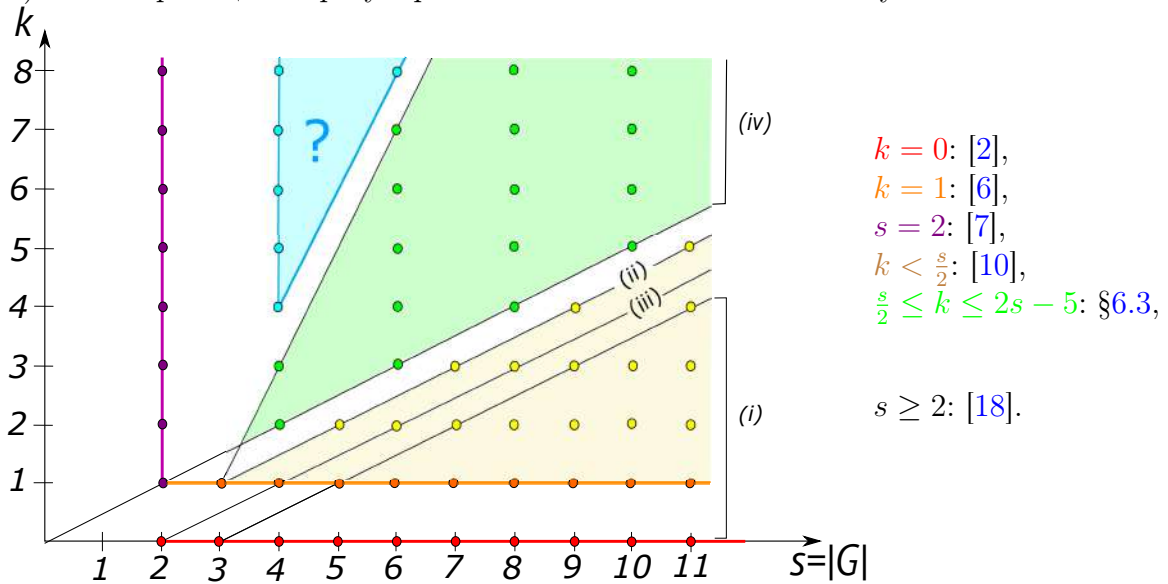
2) Следствие 7.4 будет обобщено на случай n степеней свободы, если найти полный список особенностей G -корузмерности $k \leq n - 1$, их нормальные формы $\widehat{F}_{s,k,\alpha^*}(\mathbf{z}, \mathbf{0})$ и их G -устойчивые бифуркации $\widehat{F}_{s,k,\alpha(\nu)}(\mathbf{z}, \nu')$.

8. Свойства G -регулярных особенностей

1) Возможны следующие случаи i–iv для пары (s, k) , где $s = |G|$, k — тип:

$k \setminus s$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
0	iii	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	⋮
1	iv	ii	iii	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	
2	iv	-	iv	ii	iii	i	i	i	i	i	i	i	i	
3	iv	-	iv	-	iv	ii	iii	i	i	i	i	i	i	
4	iv	-	iv	-	iv	-	iv	ii	iii	i	i	i	i	
5	iv	-	iv	-	iv	-	iv	-	iv	ii	iii	i	i	
6	iv	-	iv	-	iv	-	iv	-	iv	-	iv	ii	iii	
7	iv	-	iv	-	iv	-	iv	-	iv	-	iv	-	iv	
...														

2) Классификации G -регулярных особенностей в частных случаях:



3) G -кратность Милнора $\mu = m + k + 1$, $m = \min\{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1, k\}$, $z = x + iy$, $\mathbf{z} = (x, y)$.
 Тип k однозначно определяется условиями из следующей таблицы:

Случай	k равенств	Неравенство кроме $ c_{1,0} + c_{0,1} > 0$	μ	m	Порядок достат. струи	
i	$k < \frac{s}{2} - 1$	$f_{z^j \bar{z}^j}^{(2j)}(0, 0) = 0, 1 \leq j \leq k$	$f_{z^{k+1} \bar{z}^{k+1}}^{(2k+2)}(0, 0) \neq 0$	$2k + 1$	k	$s + \mu - 3$
ii	$k = \frac{s-1}{2}$	$f_{z^j \bar{z}^j}^{(2j)}(0, 0) = 0, 1 \leq j \leq k$		$s - 1$	$k - 1$	$2\mu - 2$
iii	$k = \frac{s}{2} - 1$	$f_{z^j \bar{z}^j}^{(2j)}(0, 0) = 0, 1 \leq j \leq k$	$f_{z^{s/2} \bar{z}^{s/2}}^{(s)}(0, 0) \neq \pm 2 \frac{(s/2)!^2}{s!} f_{z^s}^{(s)}(0, 0) $	$s - 1$	k	$2\mu - 2$
iv	$k \geq \frac{s}{2}$, s четно	$f_{z^j \bar{z}^j}^{(2j)}(0, 0) = 0, 1 \leq j < \frac{s}{2}$, $f_{z^{s/2} \bar{z}^{s/2}}^{(s)}(0, 0) = \pm 2 \frac{(s/2)!^2}{s!} f_{z^s}^{(s)}(0, 0) $, $f_{z^j \bar{z}^j}^{(2j)}(0, 0) = 0, \frac{s}{2} < j \leq k$	$f_{z^{k+1} \bar{z}^{k+1}}^{(2k+2)}(0, 0) \neq 0$	$\frac{s}{2} + k$	$\frac{s}{2} - 1$	$2\mu - 2$

4) Нормальная форма: $f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = F_{s,k,a}(\mathbf{z}, 0)$, где $F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu)$ — G -миниверсальная деформация [18] вида

$$F_{s,k,a}(\mathbf{z}, \nu) = \sum_{i=1}^m a_i |z|^{2(k+i)} + \sum_{j=0}^k \nu_j |z|^{2j} + \begin{cases} \pm |z|^2, & s \geq 3, k = 0, & \text{(i)} \\ \pm x^2 \pm y^2, & s = 2, k = 0, & \text{(iii)} \\ \operatorname{Re}(z^s), & 0 < k < s/2, & \text{(i), (ii), (iii)} \\ \operatorname{Re}(z^s) \pm |z|^s, & \text{четное } s \in [4, 2k], & \text{(iv)} \\ \operatorname{Re}(z^2) \pm |z|^2 \pm |z|^{2(k+1)}, & s = 2, k > 0. & \text{(iv)} \end{cases}$$

5) Пространство G -регулярных ростков C^∞ -открыто в \mathcal{A}_z^G . Для любого G -регулярного ростка $f \in \mathcal{A}_z^G$ существует окрестность U_f такая, что $k|_{U_f} \leq k(f)$, а потому $m|_{U_f} \leq$

$\leq m(f)$. Значит, $U_f = \cup_{k'=0}^k \cup_{a' \in \mathbb{R}^{m'}} [f_{s,k',a'}]$, где $[g]$ — класс G -правой эквивалентности, $m' = \min\{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1, k'\}$. Поэтому G -модальность $\leq m$ (и равна m в случаях i–iii).

9. Заключение

Предметом анализа данной работы была классификация гладких G -инвариантных функций при действии конечной циклической группы порядка s . В следствии 2.7 представлена классификация вырожденных критических точек, появляющихся в типичных семействах G -инвариантных функций, заданных в окрестности неподвижной точки поворота $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$, с числом параметров $l \leq 2$. В теореме 2.6 получен критерий для приводимости G -инвариантной гладкой функции к нормальной форме вблизи вырожденной G -регулярной критической точки (определение 2.2) при условии, что ее G -корузмерность $k \leq 2|G| - 5$. В ходе работы были получены промежуточные результаты о порождающих элементах алгебры G -инвариантных многочленов (предложение 2.1), представлении G -эквивариантного отображения (предложение 3.1), вычислении G -градиентного идеала роста (предложения 4.2, 4.3 и 4.4) и преобразовании ряда Тейлора роста при G -эквивариантной замене координат (техническая лемма 5.2, следствия 5.3 и 6.2, леммы 6.4, 6.5, 6.7 и 6.8).

Результаты, полученные в данной работе, докладывались на международных конференциях (Ломоносов 2021, Ломоносовские чтения 2021, Конференция международных математических центров-2021, 3rd International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics 2021, Воронежская Зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2022, Ломоносов-2022, Satellite International Conference on Nonlinear Dynamics and Integrability 2022, Динамические системы классической и небесной механики 2022, Dynamics in Siberia 2023, Ломоносов 2023) и научно-исследовательском семинаре «Современные геометрические методы» под руков. акад. А.Т.Фоменко, проф. А.С.Мищенко, проф. А.В.Болсинова, проф. А.А.Ошемкова, проф. Е.А.Кудрявцевой, проф. В.В.Ведюшкиной, доц. И.М.Никонова, доц. А.Ю.Коняева, асс. В.А.Кибкало (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова).

Список литературы

- [1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts*, Vol. I, Birkhäuser/Springer, New York, 2012.
- [2] V. I. Arnold, “Wave front evolution and equivariant Morse lemma”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29** (1976), 557–582.
- [3] A. V. Bolsinov, L. Guglielmi, E. A. Kudryavtseva, “Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems”, *Philos. Trans. Roy. Soc. A*, **376**:2131 (2018), 20170424, 29 pp.
- [4] A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [5] L. H. Eliasson, “Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case”, *Comment. Math. Helv.*, **65**:1 (1990), 4–35.
- [6] V. V. Kalashnikov, “Typical integrable Hamiltonian systems on a four-dimensional symplectic manifold”, *Izv. Math.*, **62**:2 (1998), 261–285.
- [7] E. A. Kudryavtseva, E. L. Lakshtanov, “Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions”, *Topological Methods in the Theory of Integrable Systems*, eds. A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko and A. A. Oshemkov, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006, 173–214.
- [8] E. A. Kudryavtseva, “Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems”, *European Journal of Mathematics*, **8** (2022), 1487–1549; <https://doi.org/10.1007/s40879-021-00501-9>; *arXiv:2008.01067*.
- [9] E. A. Kudryavtseva, N. N. Martynchuk, “Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **26**:6 (2021), 732–741.
- [10] E. A. Kudryavtseva, M. V. Onufrienko, “Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **30**:1 (2023), 76–94.
- [11] E. A. Kudryavtseva, A. A. Oshemkov, “Bifurcations of integrable mechanical systems with magnetic field on surfaces of revolution”, *Chebyshevskii Sb.*, **21**:2 (2020), 244–265 (Russian).
- [12] E. A. Kudryavtseva, A. A. Oshemkov, “Structurally stable nondegenerate singularities of integrable systems”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **29**:1 (2022), 57–75.
- [13] L. M. Lerman, Ya. L. Umanskii, “The structure of a Poisson action of \mathbb{R}^2 on a four-dimensional symplectic manifold”, transl. from Russian preprint of 1981, *Selecta Math. Sov.*, **6**:4 (1987), 365–396.
- [14] G. Schwarz, “Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group”, *Topology*, **14** (1975), 63–68.
- [15] P. Slodowy, “Einige Bemerkungen zur Entfaltung symmetrischer Funktionen”, *Math. Z.*, **158** (1978), 157–170.
- [16] J.-C. van der Meer, *The Hamiltonian Hopf Bifurcation*, Lecture Notes in Mathematics, **1160**, Springer, Berlin, 1985.
- [17] J. Vey, “Sur certaines systèmes dynamiques séparables”, *Amer. J. Math.*, **100**:3 (1978), 591–614.
- [18] G. Wassermann, “Classification of singularities with compact Abelian symmetry”, *Singularities*. Banach Center Publications, **20**, PWN, Warsaw, 1988, 475–498; *Preprint*, Univ. Regensburg, 1976.
- [19] N. Zung, “A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems”, *Comment. Math. Helv.*, **75** (2000), 271–283.

Приложение: дополнительный список литературы

- [1] Е. А. Асташов, "О классификации особенностей, эквивариантно простых относительно представлений конечных абелевых групп", Конференция "Ломоносов-2016", 2016 (тезисы)
- [2] Е. А. Асташов, "О простых особенностях кососимметричных матричных семейств", Вторая конференция Математических центров России. Секция «Динамические системы и обыкновенные дифференциальные уравнения», 2022 (тезисы)
- [3] Е.А. Асташов, "Классификация простых ростков эквивариантных функций", 2017 (диссертация)
- [4] А.А. Басалаев "Зеркальная симметрия для простых эллиптических особенностей с действием группы", 2016 (диссертация)
- [5] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2. 1999. 892 с.
- [6] В. В. Горюнов, "Унитарные группы отражений, связанные с особенностями функций с циклической симметрией", УМН, 54:5(329) (1999), 3–24; Russian Math. Surveys, 54:5 (1999), 873–893
- [7] В. В. Горюнов, К. Е. Бейнс, "Циклически эквивариантные особенности функций и унитарные группы отражений $G(2m, 2, n)$, G_9 и G_{31} ", Алгебра и анализ, 11:5 (1999), 74–91; St. Petersburg Math. J., 11:5 (2000), 761–774
- [8] С. М. Гусейн-Заде, А.-М. Я. Раух, "О простых \mathbb{Z}_2 -инвариантных и угловых ростках функций", Матем. заметки, 107:6 (2020), 855–864; Math. Notes, 107:6 (2020), 939–945
- [9] С. М. Гусейн-Заде, А.-М. Я. Раух, "О простых \mathbb{Z}_3 -инвариантных ростках функций", Функц. анализ и его прил., 55:1 (2021), 56–64
- [10] В.В. Калашников "Особенности интегрируемых гамильтоновых систем", 1998 (диссертация)
- [11] В.А. Кибкало, Е.А. Кудрявцева, "Topology of typical corank-1 singularities for integrable systems with 3 degrees of freedom", 3 rd International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics, 2021 (тезисы)
- [12] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971. – 121 с.
- [13] И.А. Проскурнин, "Степень и минимальные деформации отображений двумерных плоскостей", Конференция «Ломоносов 2020», 2020 (тезисы)
- [14] И.А. Проскурнин, "Конечная определённость и устойчивость G-инвариантных функций", Конференция «Ломоносов 2017», 2017 (тезисы)
- [15] А.И. Эстеров "Индексы 1-форм, обобщенные результаты и многогранники Ньютона", 2005 (диссертация)
- [16] V. V. Goryunov, "Symmetric X_9 Singularities and Complex Affine Reflection Groups", Анализ и особенности. Часть 1, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Труды МИАН, 258, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2007, 49–57; Proc. Steklov Inst. Math., 258 (2007), 44–52
- [17] Laurentiu Maxim, Mihai Tibar, "Morse numbers of function germs with isolated singularities" (preprint, 2023) <https://arxiv.org/abs/2301.00963>
- [18] Tat Thang Nguyen "Uniform stable radius and Milnor number for non-degenerate isolated complete intersection singularities" (preprint, 2020) <https://arxiv.org/abs/1912.10655>
- [19] Zbigniew Jelonek, "Note on Milnor numbers of irreducible germs" (preprint, 2023) <https://arxiv.org/abs/2301.08989>

Приложение
к приказу НИУ ВШЭ – Нижний
Новгород
от 30.04.2021 №8.1.6.3-14/300421-1

УТВЕРЖДЕНО
ученым советом НИУ ВШЭ – Нижний
Новгород
(протокол от 22.04.2021 № 4)

Положение о конкурсе
«Смотр дипломных работ математиков России»

1. Общие положения

1.1. Настоящее Положение определяет порядок организации и проведения конкурса «Смотр дипломных работ математиков России» (далее – Смотр), организуемого и проводимого НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.

1.2. Организатором Смотра является НИУ ВШЭ – Нижний Новгород (далее – Организатор). Проведение Смотра от имени НИУ ВШЭ – Нижний Новгород обеспечивает кафедра фундаментальной математики. Контактным лицом Организатора является Ремизов Иван Дмитриевич, iremizov@hse.ru.

1.3. Предметом Смотра является выпускная квалификационная работа (далее – конкурсная работа). Кандидатские, докторские, PhD диссертации и приравненные к ним работы не допускаются до участия в Смотре.

1.4. Смотр является открытым и проводится среди студентов, а также выпускников образовательных организаций Российской Федерации, освоивших основные профессиональные образовательные программы высшего образования - программы бакалавриата, программы специалитета, программы магистратуры математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки в год проведения конкурса, а также за один, два или три года до даты проведения Смотра (далее – Участники, Авторы конкурсной работы). Срок проведения Смотра с 1 мая до 1 июля (информация о конкурсе публикуется на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>).

1.5. Сроки проведения отдельных этапов конкурса могут быть скорректированы и опубликованы на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>.

1.6. Смотр проводится по следующим номинациям:

1.6.1. Лучшие работы по мнению участников Смотра (далее – Номинация 1, называемая также «выбор авторов работ»);

1.6.2. Лучшие работы по мнению представителей научно-исследовательских организаций и организаций высшего образования (далее – Номинация 2, называемая также «выбор учёных и преподавателей»);

1.6.3. Лучшие работы по мнению представителей других организаций, деятельность которых тесно связана с математикой (далее – Номинация 3, называемая также «выбор работодателей»).

1.7. Кафедра фундаментальной математики не менее чем за три рабочих дня до даты начала приема конкурсных работ публикует на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород информацию об условиях Смотра, критерии и порядок оценок конкурсных работ, место, срок и порядок представления конкурсных работ, размер и форму награды, порядок и сроки объявления результатов Смотра.

1.8. Положение и изменения к нему утверждаются ученым советом НИУ ВШЭ – Нижний Новгород и вводится в действие приказом директора НИУ ВШЭ – Нижний Новгород

1.9. Положение действует на период проведения Смотра.

2. Условия Конкурса

2.1. Смотр проходит в два этапа:

2.1.1. первый этап Смотра проводится с 1 мая по 10 июня включительно и состоит из следующих мероприятий:

- с 1 мая по 31 мая включительно осуществляется сбор конкурсных работ.

Конкурсные работы, поступившие после окончания срока приема конкурсных работ, к Смотру не допускаются.

- с 1 июня по 10 июня включительно осуществляется отбор конкурсных работ на соответствие правилам оформления конкурсных работ.

Список Участников по итогам первого отборочного этапа конкурсных работ будет опубликован на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород не позднее 10 июня.

2.1.2. второй этап Смотра проводится с 11 июня до 1 июля и состоит из следующих мероприятий:

- присвоение конкурсным работам порядковых номеров и их публикация в сборнике;

- оценка конкурсных работ членами Жюри для выявления Победителей в Номинациях 1-3.

Решение жюри Смотра по второму этапу Смотра должно быть принято не позднее 1 июля.

2.2. Информация о Победителях Смотра по каждой номинации по итогам второго этапа Смотра будет опубликована не позднее 9 июля на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>.

2.3. Награждение Победителей Смотра по каждой номинации осуществляется не позднее 15 июля.

3. Участники Смотра

3.1. Участниками Смотра являются студенты, а также выпускники образовательных организаций Российской Федерации, освоившие основные профессиональные образовательные программы высшего образования - программы бакалавриата, программы специалитета, программы магистратуры математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки в год проведения конкурса, а также за один, два или три года до даты проведения Смотра.

3.2. Участники, принимая участие в Смотре, соглашаются с правилами проведения Смотра, изложенными в настоящем Положении.

3.3. Участник может обращаться за консультациями, разъяснениями и технической поддержкой по вопросам, связанным с участием в смотре, к Организатору.

3.4. В случае нарушения Участником настоящего Положения, а равно установления факта недобросовестного поведения в рамках Смотра, Организатор вправе не допустить такого Участника к участию в смотре и отстранить на любом этапе от дальнейшего участия в смотре и лишить призового места.

4. Жюри Смотра

4.1. Рассмотрение конкурсных работ Участников и определение Победителя Смотра по каждой номинации осуществляет жюри Смотра, состав которого формируется Оргкомитетом Смотра и публикуется на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.

4.2. Для выявления Победителей в каждой номинации формируется три группы Жюри, состоящие из:

4.2.1 всех Участников Смотра для выявления Победителя в Номинации 1 (далее – группа Жюри 1);

4.2.2 представителей научно-исследовательских организаций и организаций высшего образования для выявления Победителя в Номинации 2 (далее – группа Жюри 2);

4.2.3 представителей других организаций, деятельность которых тесно связана с математикой, для выявления Победителя в Номинации 3 (далее – группа Жюри 3).

4.3. При оценке работ Участников член жюри Смотра по каждой номинации руководствуется следующими критериями:

4.3.1. Понятность постановки задачи. После прочтения работы должно быть ясно, какая задача решалась автором;

4.3.2. Доступность введения для неспециалистов. Базовые термины и факты исследуемой области должны быть изложены в форме, доступной для понимания широкой математической аудиторией;

4.3.3. Качество изложения основного научного результата, полученного автором;

4.3.4. Качество обоснования основного научного результата, полученного автором;

4.3.5. Качество оформления работы - стилистическое единство, качество вёрстки текста, наличие необходимых частей в работе;

4.3.6. Наличие и уровень публикаций автора по теме работы.

4.4. Каждый член жюри Смотра проводит оценку работ Участников по критериям, указанным в п. 4.3. настоящего Положения, по бинарной шкале (0 или 1 балл), где «0» – «конкурсная работа имеет существенные недостатки и в представленном на Смотри виде не может считаться достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно», а «1» – «конкурсная работа является достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно».

4.5. Каждый член группы Жюри обязан оценить 5 работ, направленных ему Оргкомитетом случайным образом, а также выбрать для оценки по своему усмотрению любые другие от 2 до 5 работ из опубликованных в сборнике конкурсных работ.

4.6. Набранные баллы от каждой группы Жюри суммируются отдельно. Авторы работ, набравшие наибольшее количество баллов от одной группы Жюри, признаются Победителями в соответствующей Номинации.

4.7. При определении итоговых оценок работ учитываются оценки, присланные членами каждой из трёх групп Жюри до даты окончания приёма оценок от Жюри.

5. Правила оформления конкурсных работ и порядок их представления

5.1. Конкурсная работа должна быть выполнена в формате PDF и содержать:

5.1.1. Полный текст выпускной квалификационной работы со всеми пригодными для изображения в статическом виде приложениями;

5.1.2. Отзыв научного руководителя о работе (необязательно). Направляя отзыв, Участник подтверждает согласие научного руководителя на публикацию отзыва в сети Интернет;

5.1.3. Скан/фото заполненного и подписанного Заявления о новизне согласно Приложению.

5.2. К конкурсной работе должно прилагаться письмо с информацией об Участнике. Информация об Участнике должна содержать следующие данные:

5.2.1. фамилия, имя, отчество;

5.2.2. контактный номер телефона;

5.2.3. страна и город проживания;

5.2.4. информация о (планируемой) дате защиты представленной на Смотр выпускной квалификационной работы.

5.3. Конкурсная работа направляется Организатору в электронном виде. Конкурсные работы в электронном виде направляются Организатору на корпоративную электронную почту, указанную на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>.

5.4. Конкурсные работы должны быть направлены Организатору в срок, указанный на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>.

6. Подведение итогов Смотра

6.1. Решение жюри Смотра должно быть принято не позднее 10 июня (I этап) и 01 июля (II этап).

6.2. Оргкомитет осуществляет сбор и обработку оценок, выставленных членами жюри Смотра, в электронном виде заочно. Очных заседаний членов Жюри не предусмотрено.

6.3. Решение жюри Смотра оформляется протоколами заседания Оргкомитета, которые подлежат опубликованию на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород не позднее 9 июля.

6.4. Победителями Смотра по каждой номинации являются Участники, набравшие высший балл по результатам заочного голосования жюри Смотра.

6.5. Решение жюри Смотра является окончательным и обязательным для Участников.

6.6. Подлинники протоколов заседаний Оргкомитета и прилагаемые к ним материалы хранятся в структурном подразделении НИУ ВШЭ – Нижний Новгород,

обеспечивающем проведение Смотра, в течение пятилетнего срока оперативного хранения.

6.7. Протоколы заседаний Оргкомитета и прилагаемые к ним материалы являются документами постоянного срока хранения. По истечении пятилетнего срока оперативного хранения протоколы и прилагаемые к ним материалы передаются по описи на архивное хранение в Общий отдел НИУ ВШЭ – Нижний Новгород в установленном в НИУ ВШЭ – Нижний Новгород порядке.

7. Финансирование Смотра

7.1. Призовой фонд Смотра отсутствует, денежное вознаграждение Победителей Смотра по каждой номинации не предусмотрено.

7.2. По результатам подведения итогов Смотра Победитель Смотра из каждой номинации награждается нематериальным вознаграждением в виде диплома I или II степени Победителя Смотра в соответствующей номинации.

8. Авторские права

8.1. Конкурсная работа является результатом творческой деятельности соответствующего Автора конкурсной работы.

8.2. Автор конкурсной работы гарантирует Организатору Смотра, что:

8.2.1. на момент направления (передачи) конкурсной работы он является единственным ее правообладателем, обладает всеми необходимыми правами для принятия всех условий проведения Смотра, предусмотренных настоящим Положением. В случае если Авторами конкурсной работы являются несколько лиц, Автор, направляющий конкурсную работу Организатору, обязуется заблаговременно получить согласие остальных лиц на направление работы Организатору и обеспечить достижение соглашения с остальными лицами в отношении распоряжения исключительным правом на конкурсную работу в соответствии с условиями, предусмотренными настоящим Положением;

8.2.2. использование конкурсной работы Организатором Смотра в соответствии с условиями настоящего Положения не приведет к нарушению прав и законных интересов третьих лиц;

8.2.3. им за свой счет будут предприняты все необходимые действия, исключающие возникновение (или обеспечивающие возмещение уже понесенных) расходов Организатора Смотра, связанных с требованиями и претензиями третьих лиц в отношении использования конкурсной работы. До полного выяснения обстоятельств использования и удовлетворения соответствующих требований и претензий конкурсная работа, послужившая их основанием, исключается из Смотра.

8.3. Автор конкурсной работы предоставляет Организатору Смотра право использования конкурсной работы на условиях простой (неисключительной) лицензии путем:

8.3.1. воспроизведения в любой форме, без ограничения количества экземпляров;

8.3.2. распространения, включая воспроизведенные экземпляры, путем продажи или иного отчуждения;

8.3.3. доведение до всеобщего сведения;

8.3.4. включения в составные и иные произведения;

8.3.5. перевода или другой переработки с возможностью последующего использования любыми способами такого перевода или иным образом переработанного произведения (производного произведения) и распоряжения исключительным правом на производное произведение.

Использование конкурсной работы Организатором Смотра допускается на территории любого государства (на территории всего мира) в течение всего срока действия исключительного права на конкурсную работу с момента предоставления права использования, без выплаты вознаграждения за использование конкурсной работы и без представления отчетов. Право использования конкурсной работы считается предоставленным в момент получения Организатором Смотра конкурсной работы в порядке, указанном в настоящем Положении, безотносительно результатов оценки работ Участников Смотра.

8.4. Автор конкурсной работы дают свое согласие на:

8.4.1. использование конкурсной работы Организатором Смотра с указанием имени Автора при каждом таком использовании;

8.4.2. использование созданной им конкурсной работы в составе сборника работ.

8.5. Принимая участие в Смотре, Автор конкурсной работы выражает свое согласие на:

8.5.1. сбор, запись, систематизацию, хранение, уточнение, извлечение, использование, удаление и уничтожение Организатором следующих своих персональных данных, предоставленных и предоставляемых Организатору, в частности: фамилии, имени, отчества; даты, года, места рождения; образования, квалификации и их уровня; профессии (специальности); места и адреса работы, должности; места регистрации и проживания; номера телефонов (мобильный, домашний, рабочий); адреса электронной почты; адресов страниц Автора в социальных сетях и прочих Интернет-сайтах; иных данных, предоставляемых Организатору, а также обусловленных участием Автора в Смотре;

8.5.2. передачу третьим лицам (распространение, в том числе посредством корпоративного сайта (портала) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, предоставление, доступ) Организатором следующих своих персональных данных, предоставленных и предоставляемых Организатору, в частности: фамилии, имени, отчества; даты, года, места рождения; образования, квалификации и их уровня; профессии (специальности); места и адреса работы, должности; города регистрации и проживания; адреса электронной почты; адресов страниц Автора в социальных сетях и прочих Интернет-сайтах.

8.6. Принимая участие в Смотре, Автор конкурсной работы выражает свое согласие, что обработка персональных данных Автора может осуществляться как с помощью средств вычислительной техники (автоматизированная обработка), так и без их применения.

8.7. Целями предоставления согласия Автора на обработку его персональных данных является обеспечение соблюдения Организатором прав Автора на имя, обеспечения равных условий для всех Участников и гласности проведения Смотра, распространения его результатов. Срок, в течение которого действует согласие Автора, равен сроку действия исключительного права на конкурсную работу. Отзыв согласия Автора на обработку его персональных данных осуществляется в порядке, предусмотренном Федеральным законом от 27.07.2006 № 152-ФЗ «О персональных данных».

8.8. Представленные на Смотр работы проверяются Оргкомитетом на соответствие формальным требованиям настоящего Положения. При этом рецензирования работ не происходит, члены жюри представляют лишь оценки, но не рецензии. В Сборнике работ указывается дата его публикации. В силу этого:

8.8.1. Сборник не может считаться рецензируемым научным изданием;

8.8.2. Публикация научных результатов в составе выпускной квалификационной работы в Сборнике не является препятствием для публикации их в составе статьи в рецензируемых научных изданиях;

8.8.3. Публикация работы в Сборнике может быть использована для установления научного приоритета;

8.8.4. Опубликованная в Сборнике работа не может быть полностью бесследно отозвана после публикации Сборника.

Приложение
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников
математических или связанных с математикой специальностей и направлений
подготовки

от _____

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной
работе (далее - работа) под названием _____ являются:

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:
*перечислить сделанное (поиск в Интернете, выступления на семинарах, консультации
с коллегами и т.п.)*

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу
принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила
Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя
обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в
результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на
мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о
Смотре.

Защита работы состоится/состоялась _____. На Смотр представлен
проект текста/окончательный текст работы.

Подпись

ФИО полностью

Дата
город, страна

Пример заполнения Приложения

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Иванова Ивана Ивановича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Конструкции, связанные с продолжением интеграла Петтиса» являются: Определение 2.3, Лемма 3.1, доказательство Теоремы 3.4, Замечания 1.2, 1.3, 1.7.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arXiv.org по следующим ключевым словам: продолжение интеграла Петтиса, Pettis integral continuation, в выдаче поисковиков было исследовано 23 статьи, 5 тезисов докладов, 6 монографий, 25 препринтов, 4 диссертации (список см. в Приложении 1 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1-4], [5], [7] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Иваном Петровичем Сидоровым, доцентом кафедры математики факультета естественных наук Пензенского государственного университета.

- Проведена переписка с профессором кафедры дифференциальных уравнений факультета математики Казанского государственного университета Сидором Петровичем Ивановым.

- Проведено выступление на научном семинаре отдела математики и информатики Самарского государственного педагогического университета (руководитель семинара член-корреспондент РАН Петр Иванович Сидоров).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоится 30.05.2021. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись Иванов Иван Иванович
15 мая 2021 г. Пермь, Россия

Смотр дипломных работ математиков России 2023

Уважаемые коллеги!

На Смотр можно представить как готовящуюся к защите в 2023 году выпускную квалификационную работу бакалавра, специалиста или магистра, так и защищённую в 2020, 2021, 2022, 2023 годах. **Участие в Смотре заочное и бесплатное, участники присылают свои работы по электронной почте в Оргкомитет.** Главное требование — работа должна содержать новый математический материал (то есть хотя бы одно из этого: новые определения, теоремы, доказательства, замечания, пригодные для проверки гипотезы и прочее) и должно быть указано, что именно автор работы сделал для того, чтобы убедиться, что этот материал действительно новый.

Подробности: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>



Этапы проведения Смотра:

- **1 мая по 31 мая** – сбор заявок и выпускных квалификационных работ;
- **1 июня по 10 июня** – вёрстка сборника выпускных квалификационных работ, формирование списка оценщиков;
- **10 июня** – публикация сборника работ на сайте Смотра и рассылка сборника для оценивания оценщикам Смотра (в том числе и авторам работ);
- **11 июня по 1 июля** – сбор оценок от оценщиков;
- **8 июля** – публикация оценок;
- **15 июля** – подведение итогов Смотра, награждение авторов работ.



**Кафедра
фундаментальной
математики**

