Черновские аппроксимации к решению уравнений с зависящими от времени коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = a(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) - u(t,x) \\ u(0,x) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

где функции $a\colon [0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $u_0\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ограничены и равномерно непрерывны, считаются известными параметрами задачи, а функция $u\colon [0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ считается неизвестной.

2013 год – А.С. Пляшечник – построены черновские аппроксимации к решению несколько более общей задачи Коши на основе интегрального оператора с несобственным интегралом.

2018 год – И.Д. Ремизов – построены черновские аппроксимации на основе оператора сдвига, но задача Коши не содержит зависящих от времени коэффициентов.

Теорема Пусть даны константы $0 < a_0 < a_1 < +\infty$ и для каждых $x\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$ дано число $a(t,x)$, причём функция a равномерно непрерывна и справедливо неравенство $a_0 \leq a(t,x) \leq a_1$. Положим $(H(t)f)(x) = a(t,x)f''(x) - f(x)$, где область определения $D(H(t)) = UC_b^2(\mathbb{R})$ не зависит от t, и $H(t)$ взаимнооднозначно отображает $D(H(t)) = UC_b^2(\mathbb{R})$ на $X = UC_b(\mathbb{R})$.

Для каждого $f\in UC_b(\mathbb{R})$ и $x\in\mathbb{R}$ при $s,t\geq 0$ положим:

$$(F(t,s)f)(x) = \frac{1}{4}f\left(x+2\sqrt{a(s,x)t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x-2\sqrt{a(s,x)t}\right) + \frac{1}{2}f(x) + (s-t)f(x).$$

Пусть в банаховом пространстве $X = UC_b(\mathbb{R})$ для каждых $t,s\geq 0$ дан линейный непрерывный оператор $U(t,s)\colon X\to X$, причём эволюционное семейство $(U(t,s))_{0\leq s\leq t\leq T}$ удовлетворят следующими условиям:

1) существует такое число $C\geq 1$, что неравенство $\|U(t,s)\|\leq C$ верно при всех t,s;

2) для каждого $g\in D$ выполнено $\frac{U(t+\Delta t,t)-I}{\Delta t}g \to H(t)g$.

Тогда:

1) для каждого $t\geq 0$ опрератор H(t) замкнут;

2) оператор $U(t,s)$ представляется в виде предела композиций операторов $F(t_k,t_{k-1})$, то есть, при всех t,s и всех $f\in X$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n,t_{n-1})...F(t_1,t_0)f = U(b,a)f.$$

Заметим, что условия теоремы Чернова-Пляшечника выполняются, а именно:

1) имеется семейство операторов $H(t)$, которые замкнуты;

2) область определения $D(H(t)) = UC_b^2(\mathbb{R})$ плотна в $X = UC_b(\mathbb{R})$;

3) для каждого f из UC_b^2 множество $H(t)f$ ограничено в X;

4) для любого набора $0 \leq t_1 < ... < t_k \leq T$ выполнено $\|F(t_k, t_{k-1})...F(t_2, t_1)\| < C$;

5) для каждого g из UC_b^2 $\frac{F(t+\Delta t, t)-I}{\Delta t} g \to H(t)g$ при $\Delta t \to 0$ равномерно по t.

Поэтому, применив теорему Чернова-Пляшечника, получаем, что наша теорема доказана.

Таким образом, u задаётся формулой $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, где u_n задаётся следующей формулой:

$$u_n(t, x) = (F(t_n, t_{n-1})F(t_{n-1}, t_{n-2})...F(t_1, t_0)u_0)(x) =$$
$$= \left(\left(\prod_{k=1}^{n} F\left(\frac{kT}{n}, \frac{(k-1)T}{n}\right)\right) u_0\right)(x),$$

где $t_n = T, t_0 = 0, t_k = t_0 + \frac{k}{n}(T - t)$, $k = 0, 1, ..., n$,

при этом

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(t, x) - u(t, x)| = 0.$$